Ejercicios

de

Matemáticas

por Carmen Martín Gaite

Instituto Femenino de Salamanca-

Calcular la distancia focal y la excentricidad de la elipse cuyos semiejes a y b tienen los valores $a = 13$ $b = 12$-

La ecuación de esta elipse será:

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1 -$$

La mitad de la distancia focal vale: $c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$

Luego la distancia focal será:

$$2c = 2 \times 5 = \underline{\underline{10}}$$

La excentricidad es igual a $\frac{c}{a}$

Por tanto:

$$e = \frac{5}{\underline{\underline{13}}} -$$

Carmen Martín Gaite

- Alumna de 7º Curso-

– Instituto Femenino de Salamanca –

Una pelota rebota a una altura que es los $\frac{3}{4}$ de la que ha caido y al 3^{er} rebote alcanza una altura de 3'5 ms. ¿De qué altura cayó?

Sea x la altura primitiva.
En el 1^{er} rebote, por tanto, alcanza: $\frac{3}{4}x$
En el 2^{o} la altura que alcanza es $\frac{3}{4}$ del anterior, o sea,:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} x = \frac{9x}{16}.$$

En el 3^{er} rebote alcanza: $\frac{3}{4} \times \frac{9x}{16} = \frac{27x}{64}$.

(También podría buscarse por una progresión geométrica de razón $\frac{3}{4}$.)

Como, según el enunciado, la altura del 3^{er} rebote es 3'5:

$\frac{27x}{64} = 3'5$; De donde:

$$x = \frac{3'5 \times 64}{27} = \underline{8'29 \text{ ms}}$$

Carmen Martín Gaite

– Alumna de 7^{o} curso –

- Instituto femenino de Salamanca -

Una finca ha sido dividida en varios trozos vendidos a distintas personas; la 1ª adquirió la 3ª parte de la finca; la 6ª parte del total otra, y la 10ª parte del total cada uno de los restantes compradores. ¿Cuántos eran?

Las partes en que se ha dividido la finca son $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{10}$.

Llamando x al nº de compradores que reciben esta 10ª parte:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + x\frac{1}{10} \; ; \quad (\text{m.c.m.}(3, 6, 10) = 30)$$

Resolviendo esta ecuación:

$$30 = 10 + 5 + 3x \; ;$$

$$3x = 30 - 10 - 5 = 15 \; ; \text{ De donde:}$$

$$x = \frac{15}{3} = \underline{5 \text{ compradores}}.$$

En total los compradores eran 7: estos 5 más los 2 que determina el enunciado.

Carmen Martín Gaite

- Alumna de 7º curso -

- Instituto femenino de Salamanca -

En una máquina neumática las capacidades del cuerpo de bomba y de la campana son tales que en cada golpe de émbolo la presión del aire en la campana se reduce a sus $\frac{2}{7}$. Se desea saber la presión a que se reducirá después de 5 golpes si la presión primitiva era de 760 mms (normal).

En la 2ª embolada la presión queda reducida a: $\frac{2}{7}$ de $\frac{2}{7} = \frac{4}{49}$. En la 3ª embolada: $\frac{2}{7}$ de $\frac{4}{49} = \frac{8}{343}$ En la 4ª embolada: $\frac{2}{7}$ de $\frac{8}{343} = \frac{16}{2.401}$. Y en la 5ª embolada: $\frac{2}{7}$ de $\frac{16}{2.401} = \frac{32}{16807}$. El resultado del problema será, pues,:

$$\frac{32}{16807} \times 760 = \frac{24320}{16807} = 1'44 \text{ mms.}$$

(Por progresión el 6º termino habría sido:

$1 \times \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{32}{16807}$, igual resultado.)

Carmen M. Gaite
Alumna de 7º curso

— Instituto femenino de Salamanca —

Hallar el radio de un cilindro de revolución que tiene 2 ms de altura y cuya area total es 188.496 cms².

$A/r_{tot\ cil} = 2\pi r\,(h+r)$

$18'8496 = 2 \times 3'14 \times r\,(2+r)$ (Reduciendo los cms² a ms²)

$18'8496 = 6'2832\,r\,(2+r) = 12'5664\,r + 6'2832\,r^2$

$6'2832\,r^2 + 12'5664\,r - 18'8496 = 0$

$2 \times 3'1416\,r^2 + 2 \times 3'1416\,r \times 2 - 18'8496 = 0$

$3'1416\,r^2 + 2 \times 3'1416\,r - 9'4248 = 0$

Dividiendo ahora por 3'1416 resultará:

$r^2 + 2r - 3 = 0$;

De donde: $r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 3}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$

1ª solución) $r_1 = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = \underline{\underline{1\ m}}$

2ª solución) $r_2 = \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ m.

Tomamos la 1ª solución pues por la naturaleza del problema es la aplicable en este caso.

Carmen Martín Gaite

— Alumna de 7º curso —

Instituto Femenino de Salamanca

Calcular el límite de $\frac{4x^2-3x}{2x^2+5x}$ cuando x tiende a cero.

Dividiendo al numerador y denominador de la fracción por x:

$$\lim \frac{4x^2-3x}{2x^2+5x} = \frac{\frac{4x^2}{x} - \frac{3x}{x}}{\frac{2x^2}{x} + \frac{5x}{x}} = \frac{4x-3}{2x+5},$$

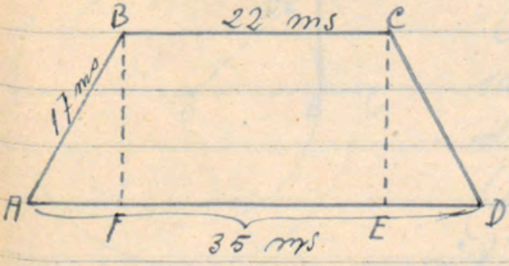
Como en este caso x tiende a cero será: $\frac{4.0-3}{2.0+5} = \frac{-3}{5}$. Luego cuando x tiende a cero el lim de esta fracción es $\frac{-3}{5}$.

Carmen Martín Gaite

- Alumna de 7º Curso -

- Instituto Femenino de Salamanca -

Calcular el area de un cuadrado sabiendo que su diagonal es igual a la altura de un trapecio isósceles en el que la base mayor mide 35 ms, la menor 22 ms y los lados no paralelos 17 ms.



$AF = \frac{35-22}{2} = \frac{13}{2} = 6'5\,ms$ Según el teorema de Pitágoras:

$BF^2 = 17^2 - 6'5^2 =$

$= 289 - 42'25 = \underline{246'75}$,

que es el cuadrado de la altura del trapecio y diagonal del cuadrado.

La diagonal es hipotenusa del un triángulo rectángulo de catetos iguales en el cual:

$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$.

$246'75 = 2l^2$. De donde $l^2 = \underline{\underline{123'375\,ms^2}}$

que es el area pedida.

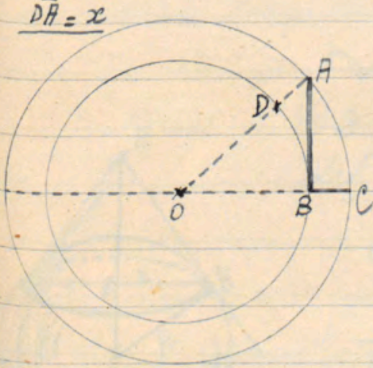
Carmen Martín Gaite

- Alumna de 1º curso

-Instituto femenino de Salamanca-

Una circunferencia tiene 57 cms de diametro - ¿Que longitud habrá que prolongar este para que la tg. mida 38 cms?

$\overline{DA} = x$



En el triángulo OAB:

$OA^2 - OB^2 = AB^2$

Como AB ha de medir 38 y sabemos que $OB = \frac{57}{2} = 28'5$: tendremos:

$(28'5 + DA)^2 - 28'5^2 = 38^2$;

$28'5^2 + 2 \times 28'5x + x^2 - 28'5^2 = 38^2$;

$\cancel{812'25} + 57x + x^2 - \cancel{812'25} = 38^2$;

$x^2 + 57x - 1444 = 0$ Resolviendo esta ecuación de 2º grado: $x = \frac{-57 \pm \sqrt{57^2 + 4 \times 1444}}{2}$;

$$x = \frac{-57 \pm \sqrt{3249 + 5776}}{2} = \frac{-57 \pm \sqrt{9025}}{2} = \frac{-57 \pm 95}{2}$$

$x_1 = \frac{-57 + 95}{2} = \frac{38}{2} = \underline{19}$ (Despreciamos la solución x_2 porque da un valor negativo)

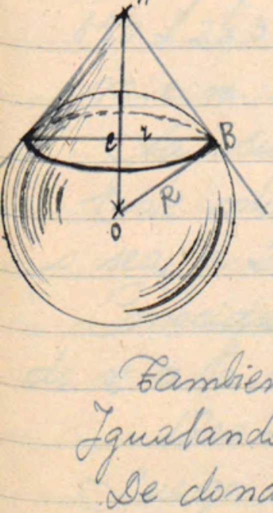
Luego había que prolongar el diametro 19 cms por cada lado.

Carmen Martín Gaite

Alumna de 7º Curso

- Instituto Femenino de Salamanca -

Desde un punto situado a 25 cms del centro de una esfera de 15 cms de radio se traza la superficie cónica tangente. Calcúlese el volumen del cono limitado por el círculo de contacto.



La tg BA perpendicular al radio OB en el punto B es la generatriz del cono problema.

En el triángulo OAB:

$AB = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$ cms.

En el triángulo ACB desconocemos los catetos pero se puede hallar r:

$Ar\ OAB = \frac{1}{2}\ 15 \text{ cms} \times 20 \text{ cms}$

También: $Ar\ OAB = \frac{1}{2}\ 25 \times r$ (tomando por base OA)

Igualando: $\frac{1}{2}\ 15 \times 20 = \frac{1}{2}\ 25 \times r$;

De donde $r = \frac{300}{25} = 12$ cms.

Luego: $AC = \sqrt{AB^2 - r^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = \underline{16 \text{ cms}}$.

Una vez conocida la altura: $\underline{\text{Vol cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times AC =$
$= \frac{1}{3}\ 3'14 \times 12^2 \times 16 = \underline{2412'7488 \text{ cms}^3}$.

Carmen Martín Gaite

Alumna de 7.º curso

- Instituto Femenino de Salamanca -

Un librero ha ganado 196'80 pts vendiendo 82 ejemplares de una obra. La mitad, al precio del catálogo y la otra mitad con una rebaja del 10%. El editor le da una comisión por libro del 25% sobre el precio del catálogo. Hallar este precio.

Sea x el precio del catálogo. Si vendiera todos los libros a este precio ganaría el 25% del producto de la venta. Pero esta ganancia disminuye en el 10% aplicado a $41x$ que es el producto obtenido de la venta de la mitad del lote al precio del catálogo.

Así: $25 \times \frac{82x}{100} = 196'80 + \frac{41x \times \cancel{10}}{10\cancel{0}} =$

$= 196'80 + 4'1x$; $\quad 0'25 \times 82x = 196'80 + 4'1x$

Resolviendo esta ecuación:

$20'50x - 4'1x = 196'80$; $\quad 16'4x = 196'80$

De donde $x = \frac{196'80}{16'4} = \underline{12 \text{ pts}}$.

Carmen M. Gaite

Alumna de 7º curso

- Instituto Femenino de Salamanca -

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2,0) y (0,1) y tiene potencia 6 respecto del origen.

La ecuación de la circunferencia viene dada por la fórmula general: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Para que la circunferencia pase por dos puntos dados, las coordenadas de estos han de satisfacer la ecuación. El término independiente viene dado por la potencia respecto al origen. en este caso $C=6$

Sustituimos los valores de x e y por los de los puntos determinados y el término independiente por su valor igual para las dos ecuaciones que se forman:

1ª ecuac. $2^2+0^2+A\times 2+B\times 0+6=0$; $\underline{4+2A+6=0}$ -

2ª ecuac. $0^2+1^2+A\times 0+B\times 1+6=0$; $\underline{1+B+6=0}$ -

$4+2A+6=0$; $10=-2A$; $A=\frac{10}{-2}=\underline{-5}$ -

$1+B+6=0$; $7=-B$; $\underline{B=-7}$ -

Luego la ecuación pedida será:

$\underline{x^2+y^2-5x-7y+6=0}$ -

Carmen M. Gato

- Alumna de 7º curso -

- Instituto Femenino de Salamanca -

Un terreno rectángular dedicado al cultivo y que tiene 320 kms de largo por 120 de ancho está cruzado en el sentido de la longitud por 3 caminos y en el de la anchura por 4. Calcular la superficie cultivable del terreno sabiendo que cada camino tiene 1'25 ms de anchura.

Los tres caminos del sentido de la longitud medirán: 1'25 × 3 = 3'75 ms.

320 − 3'75 = 316'25 ms, que es la longitud del area de la parte cultivable.

Análogamente: En el sentido de la anchura le cruzan 4 caminos. Luego será:

4 × 1'25 = 5 ms ; 120 − 5 = 115 ms, anchura de la parte cultivable.

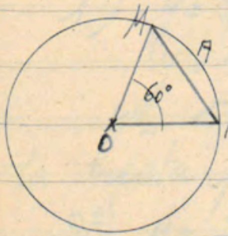
Por lo tanto la superficie cultivable del terreno es: Ar = 115 × 316'25 = 36368'75 ms^2.

Carmen Martín Gaite alumna de 7º curso.

Instituto Femenino de Salamanca-

Determinar el area del segmento circular limitado en la circunferencia de radio igual a 12 ms por el arco de 60° y su cuerda.

$Ar\ seg\ MNA = Ar\ sec\ OMNA - Ar\ triang\ OMN$



Hay que hallar, pues, el area del sector y del segmento.

Ef area del sector:

$\frac{180°}{\pi r} = \frac{60°}{x}$; $x = \frac{60° \times \pi r}{180} =$

$= 1'25664\ dms = 12'5664\ cms$. Luego:

$Ar\ sector\ OMNA = \frac{arco \times r}{2} = \frac{12'5664 \times 12}{2} =$

$= \underline{75'3984\ cms^2}$.

Ef area del triángulo: Obsérvese que es un triángulo equilatero. Luego:

$Ar\ t = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{12^2}{4}\sqrt{3} = 36\sqrt{3} = \underline{62'352\ cms^2}$

Así el area del segmento $MNA = 75'3984 \times$

$\times\ 62'352 = \underline{13'0462\ cms^2}$.

Carmen M. Gaite

7° Curso.

Instituto Femenino de Salamanca.

Calcular la pendiente de las curvas representadas por las ecuaciones: $y = x^5 - x^3 + 1$.
$y = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - x + 4$, para los puntos de abcisas $+2$ y $-\frac{1}{2}$ respectivamente.

1º) $y = x^5 - x^3 + 1$. Su pendiente o derivada será:
$y' = 5x^4 - 3x^2$. Dando a x el valor $+2$:
$y' = 5 \times 2^4 - 3 \times 2^2 = 80 - 12 = \underline{68}$, pendiente de la recta para el valor dado.

2º) $y = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - x + 4$. El valor de su derivada será: $y' = \frac{12}{3}x^5 + \frac{4}{2}x^3 - 6x - 1 = 4x^5 + 2x^3 - 6x - 1$.
Dando a x el valor de $\left(-\frac{1}{2}\right)$ resultará:

$$y' = 4\left(\frac{-1}{3^2}\right) + 2\left(\frac{-1}{8}\right) - 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$y' = \frac{-4}{3^2} - \frac{2}{8} + 3 - 1 = -\frac{1}{8} - \frac{2}{8} + 2;$$

$$y' = 2 - \frac{3}{8} = \frac{16 - 3}{8}.$$

Luego $y' = \frac{13}{8}$, pendiente de esta ecuación para el valor de $x = -\frac{1}{2}$

Carmen Martín Gaite

Alumna de 7º curso

Instituto femenino de Salamanca

Un nadador avanza por segundo $\frac{1}{3}$ de m. más que otro y llega un minuto y 40 segundos antes que él al término de una carrera de 400 ms. Calcular el tiempo que tardarán uno y otro en recorrer 100 ms.

Según el enunciado si x es la velocidad del 1er nadador, la del 2º es $x+\frac{1}{3}$.

Tiempo que tarda el 1º en recorrer los 400 m $= \frac{400}{x}$ -

Tiempo " " " 2º " " " $= \frac{400}{x+\frac{1}{3}} = \frac{1200}{3x+1}$ -

El 2º nadador tardará menos

$$\frac{400}{x} - \frac{1200}{3x+1} = 1m\ 40\ seg = 100\ segundos;$$

$$1200x + 400 - 1200x = 300x^2 + 100x$$

De donde: $300x^2 + 100x - 400 = 0$

Resolviendo esta ecuación: $x_1 = \frac{-1+7}{6} = \frac{6}{6} = \underline{1\ m/seg}$

Para el nadador de más velocidad:

$x + \frac{1}{3} = \frac{3x+1}{3}$; De donde $x_1 = \underline{1'3\ m/seg}$

El primer nadador tardará en recorrer los 100 ms: $\frac{100\ ms}{1\ m/seg} = 100\ seg = \underline{1\ minuto\ 40\ seg.}$

El 2º tardará: $\frac{100}{1'3} = \underline{76'9\ segundos}$.

M. Carmen Martín Gaite

7º Curso.

- Instituto Femenino de Salamanca -

Un automovil sale de un lugar A con una velocidad media de 40 kms/h pero en la mitad del trayecto a recorrer sufre una averia que le obliga a parar una hora, siguiendo despues el viaje que duró en total 4 horas y media. ¿Cuantos kms tiene el trayecto y cuanto invirtió el auto en recorrer cada mitad?

Como el automovil está detenido una hora, el tiempo que emplea en recorrer el espacio es: 4'5 horas - 1 hora = 3'5 horas

Aplicando la fórmula del espacio $e = vt$:
$e = 40 \times 3'5 = \underline{140}$ __kms__, que tiene el trayecto recorrido.

La mitad del trayecto será $\frac{140}{2} = 70$ kms.
Aplicando la fórmula $t = \frac{e}{v}$:
$t = \frac{70}{40} = \underline{1'75 \text{ horas}}$, tiempo que empleó en recorrer cada mitad.

Carmen Martín Gaite

- Alumna de 7º Curso -

- Instituto femenino de Salamanca -

Hallar el centro y el radio de la circunferencia representada por la ecuación:

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0.$$

Para determinar el centro necesitamos hallar sus coordenadas. Sean estas a y b:

$a=\frac{-A}{2}$; $b=\frac{-B}{2}$, siendo A y B los coeficientes de x y de y respectivamente.

Luego: $a=\frac{-(-2)}{2}=\frac{2}{2}=1$

$b=\frac{-(-4)}{2}=\frac{4}{2}=2.$

Para hallar el radio aplicaremos la fórmula $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$:

$$r=\sqrt{1^2+2^2-5}=\sqrt{5-5}=0$$

Es decir que en este problema la circunferencia está reducida a un punto; su radio es nulo.

Carmen Martín Gaite

- Alumna de 7º curso -

- Instituto Femenino de Salamanca -

¿La suma de dos nºs es 56. La diferencia de sus cuadrados es 448. ¿Cuales son esos números?

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{ll} (I) & x + y = 56 \\ (II) & x^2 - y^2 = 448 \end{array}\right\}$$ Despejando x en (I): $x = 56 - y$

Sustituyendo este valor en (II):

$(56 - y)^2 - y^2 = 448;$

$56^2 - 2 \times 56 y + y^2 - y^2 = 448;$

$3{,}136 - 112 y = 448;$

$3.136 - 448 = 112 y;$ De donde:

$y = \frac{2688}{112} = \underline{\underline{24}}$

Conociendo y, podremos hallar x:

$x = 56 - y;$ $x = 56 - 24 = \underline{\underline{32}}$

- Comprobación -

$x^2 - y^2 = 448$

$32^2 - 24^2 = 448$

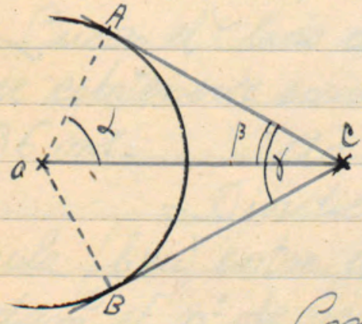
$448 = 448$, identidad

Carmen Martín Gaite

- Alumna de 7º Curso -

— Instituto Femenino de Salamanca —

Un punto del plano de una circunferencia, cuyo radio mide 5 ms, dista del centro 10 ms. Calcular el ángulo que forman las tangentes trazadas a la circunferencia por dicho punto.



Los radios OA y OB son perpendiculares a las tangentes. Por tanto los dos triángulos rectángulos que se forman OAC y OBC son iguales.

Como $OA = OC \times \cos\alpha$;

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OC} = \frac{5}{10} = 0'5.$$

$\log \cos 0'5 = \bar{1}'6990$; En las tablas este logaritmo corresponde a un ángulo de 60º.

Si $\alpha = 60°$, $\beta = 90° - 60° = 30°$.

Y el ángulo $\gamma = 2\beta = \underline{\underline{60°}}$.

Carmen Martín Gaite — Alumna de 7º Curso —

- Instituto Femenino de Salamanca -

Los lados de un rectángulo miden 900 ms y 1764 ms. Se desea saber la longitud del lado del mayor cuadrado contenido en el rectángulo un nº exacto de veces y el area de este rectángulo tomando como unidad de superficie dicho cuadrado.

$$m.c.d\,(900, 1764) = 2^2 \times 3^2 = 36.$$

Luego el lado del mayor cuadrado que puede contenerse exactamente en el ~~rectángulo~~ rectángulo mide 36 ms. $Ar. cuad = 36^2 = 1296\ ms^2$

Dividiendo ahora el área del rectángulo (bxa) entre el area de este cuadrado nos dará el nº de veces que este está contenido en aquel: $Ar\ rect = 1764 \times 900 = 1587600\ ms^2$

$\frac{1587600}{1296} = 1225$ nº de veces que está contenido en el rectángulo.

$1296 \times 1225 = 1587600\ ms^2$, que es en efecto el area del rectángulo.

Carmen Martín Gaite. - Alumna de 7º curso -

— Instituto femenino de Salamanca —

Se vende un objeto en 9 pts con pérdida sobre el coste de un tanto por ciento igual a dicho coste. ¿Que pérdida sufre el vendedor de dicho objeto?

— Sea x el coste. Como este y el tanto por ciento son iguales será: $\frac{x \cdot x}{100}$;

Luego podremos plantear:

$9 + \left(\frac{x^2}{100}\right) = x$ De donde: $900 + x^2 = 100x$

Ordenando resulta una ecuación de 2º grado:

$x^2 - 100x + 900 = 0$ De donde:

$x = \frac{100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2 - 900} = 50 \pm 40$.

La solución aplicable en este caso es $x_2 = 50 - 40 = 10$. (1)

En efecto, perdiendo el 10% de 10 lo que se pierde es una peseta, y el precio de venta es 9 p.

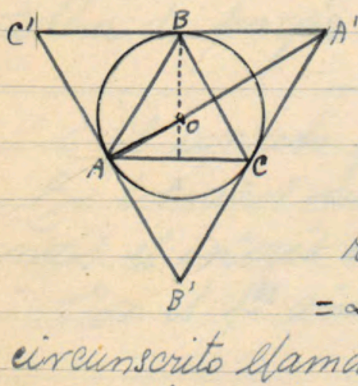
(1) y también $x_1 = 50 + 40 = 90$; Pues perdiendo el 90% de 90, se pierde 81 pts y precio de venta es 9 pts

Carmen Martín Gaite

7º Curso —

– Instituto Femenino de Salamanca –

Dada una circunferencia de 8 cms de radio hallar el lado, la apotema y la altura del triángulo equilátero inscrito y del circunscrito.



En el triángulo equilátero la apotema es igual a $\frac{1}{3}$ de la altura. En el circunscrito esa apotema es el radio $OA = 8$ cms. Luego $AA' = 3 \times 8 = 24$ cms. El lado del polígono circunscrito llamando l al del inscrito viene dado por la fórmula: $x = \frac{2rl}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$ Como el lado del triángulo equilátero es igual al radio $\times \sqrt{3}$:

$A'B' = \frac{2 \times 8^2 \sqrt{3}}{\sqrt{4 \times 8^2 - 8^2 \cdot 3}} = 2 \times 8\sqrt{3}$ Luego el lado $A'B'$ es el duplo del lado AB y valdrá $16\sqrt{3}$

Por igual razonamiento la apotema del triángulo inscrito será la mitad de la del circunscrito es decir $\frac{8}{2} = 4$ cms y la altura del inscrito será $\frac{24}{2} = 12$ cms.

Carmen Martín Gaite

Alumna de 7º curso

-Instituto femenino de Salamanca-

Un labrador compró maquinaria agricola por valor de 2,500 pts con la condición de pagar al contado la 5ª parte y en los años sucesivos la 5ª parte del total mas el interés devengado al 4% que le falta por pagar - ¿Cuanto ha de pagar cada año?

Al contado paga: $\frac{2500}{5}$ = 5.000 pts

En los años sudesivos pagará estas 5000 pts más el interés del resto que suman en total:

En el 1er año: $5000 + \frac{20\,000 \times 4}{100} = \underline{5800}$ pts

En el 2º año: $5000 + \frac{15.000 \times 4}{100} = \underline{5600}$ pts

En el 3er año: $5000 + \frac{10.000 \times 4}{100} = \underline{5400}$ pts

En el 4º año: $5000 + \frac{5000 \times 4}{100} = \underline{5.200}$ pts

Carmen Martín Gaite

— Alumna de 7º Curso —