TRATADO

DE

BALISTICA.

1.ª PARTE.—ARTILLERÍA LISA

POR

LOS COMANDANTES CAPITANES DE ARTILLERÍA

D. ANTONIO DE LA AZUELA Y D. GUILLERMO MARTINEZ,

PROFESORES DE LA ACADEMIA ESPECIAL DEL CUERPO.

SEGOVIA, 1879.

Imprenta de Pedro Ondero, Juan Bravo, 40 y 42.

TRATADO

DE

BALISTICA.

1.ª PARTE.—ARTILLERÍA LISA

POR

LOS COMANDANTES CAPITANES DE ARTILLERÍA

D. ANTONIO DE LA AZUELA Y D. GUILLERMO MARTINEZ,

PROFESORES DE LA ACADEMIA ESPECIAL DEL CUERPO.

SEGOVIA, 1879.

Imprenta de Pedro Ondero, Juan Bravo, 40 y 42.

Al Sr. D. Manuel Cabanyes

Los Autores

AGOTADA *la notabilísima obra que, bajo el modesto título de Elementos de Artillería, escribió y dió á luz el distinguido Académico de la de Ciencias Sr. D. Manuel Fernandez de los Senderos, Coronel del Cuerpo y Profesor de su Escuela de Aplicacion, la enseñanza en nuestra Academia de la Balística, rama la más importante de nuestros estudios profesionales, ha sido objeto de tan penoso trabajo para el encargado de profesarla como para el alumno obligado á seguirla. Falto éste de una base, de un texto escrito, que le presentara, en breve espacio reunidos, los primeros elementos y sirviérale de punto de partida para mejor apoderarse de la esplicacion y desarrollo de la materia científica, á la dificultad á ella inherente, uníase esta otra, y el alumno fatigaba por doble motivo su inteligencia sin mayor provecho: el Profesor al propio tiempo, veíase obligado á recapitular cuanto bueno se encuentra en multitud de Memorias esparcido; pero trabajos especiales al fin y de estension desmesurada en general, que si son poderoso y hasta eficaz auxilio para esplicacion de una asignatura, no se conciertan en la necesaria unidad á que debe obedecer todo sistema de exposicion científica.*

Movidos por esta necesidad y estimulados por el deber, hemos emprendido el trabajo cuya primera parte damos hoy al público, confiando en nuestro buen deseo, acaso tanto, que no nos haya dejado apreciar la limitada medida de nuestras fuerzas: y si bien el temor que nos arredra lo encontrarán justificado los doctos, de ellos es de esperar más la benevolencia, que sin duda merecen los motivos que decidieron nuestro empeño: modesto éste y reducido á reunir y presentar con el órden y la claridad debidos las várias teorías que constituyen la ciencia, hemos partido de las últimas *leyes de la resistencia del aire, por tan repetidas como por modernas experiencias confirmadas; y sin perder de vista los esfuerzos hechos por sábios ilustres y no ménos ilustres artilleros, que florecieron ántes de nuestros dias, hemos dado preferencia á trabajos más recientes, que si en los de aquellos toman su orígen y tienen como en ellos su raiz, no puede desconocerse que adelantan en las vias del progreso científico y señalan un nuevo rumbo abierto á la investigacion.*

Bajo tales ideas, y por norma lo indicado, despues del estudio de la resistencia, que al movimiento de los proyectiles opone el aire, estudio sucinto, pero comprensivo de lo esencial y en manera adecuada á elemental enseñanza, con criterio igual, como en el resto de la obra, se trata la velocidad inicial, factor importantísimo del tiro, y se exponen algunos principios de balística interior, todo lo que, juntamente con la determinacion analítica de la trayectoria y problemas consiguientes, en sus vários géneros, constituye lo que comprenderse puede bajo la denominacion muy generalizada de Trayectoria normal. Las desviaciones observadas en los tiros, la clase de estos más conveniente, segun el objeto que el artillero se propone, asi como los medios que debe emplear para conseguirlo y el conocimiento de los efectos que producir puede con sus disparos, tratados están tambien sin prolijidad escesiva, pero con suficientes detalles para apreciar con recto juicio el partido que las necesidades del servicio demanden.

Advertirá el que leyere, que solo vé hoy la luz pública lo que á la Artillería lisa es concerniente; y si bien se liga con el estudio de la trayectoria accidental, *en la segunda parte de este primer volúmen presentado, lo que denominar pudiéramos* trazado *de las piezas, por lo que su forma, como la disposicion y dimensiones de sus diversas partes, influye en la curva* real *que el proyectil describe, al prescindir de ello hemos tenido en cuenta, que de una manera más general, y comprendiéndolo por tanto, tiene su lugar propio en el estudio de la Balística y Trazado de la Artillería rayada.*

LA BALÍSTICA es la ciencia que trata del movimiento de los cuerpos pesados que se lanzan en el espacio segun una direccion cualquiera. Se designa sin embargo con aquel nombre, más especialmente, la ciencia y el arte de lanzar proyectiles con las bocas de fuego: todas las cuestiones relativas al tiro de los proyectiles y á sus efectos destructores, caen pues bajo su dominio, ofreciendo un carácter científico al investigar la leyes y las condiciones necesarias de todo hecho balístico, así como un carácter puramente práctico y de aplicacion en cuanto deduce de aquel estudio las reglas que han de observarse para alcanzar el fin propuesto.

A primera vista este problema aparece comprendido en el general mecánico; mas como quiera que este exija no solo el conocimiento de las masas de los cuerpos á que se aplican las fuerzas, sino tambien las magnitudes de estas, sus direcciones y puntos de aplicacion en cada instante, y las fuerzas, y resistencias que en él accionan y se desenvuelven no pueden ser apreciadas sino por la observacion, faltos de una espresion analítica que nos de su valor en funcion del tiempo, de aqui la insuficiencia de la Mecánica racional al par que la necesidad de acudir á la esperiencia cuyos resultados constituyen á veces la sola demostracion posible de los mismos hechos observados.

Se puede estudiar el movimiento de un proyectil dentro del ánima, sujeto á la accion de los gases de la pólvora y el que lleva, desde el momento que sale de su boca, sometido yá á las acciones de la pesantez y de la resistencia del medio en que se mueve, marcándose por tal manera la division de esta ciencia en balística interior y exterior ó propiamente balística, de la palabra griega βαλλω (yó lanzo). En este caso y en suposicion de que el centro de gravedad del proyectil quede obligado á recorrer el eje del ánima, concurrirán en dicho centro la direccion de la fuerza impulsiva de la pólvora y la vertical del peso del proyectil, determinando el plano en que este ha de moverse, pues la resistencia del aire, directamente opuesta á la resultante de aquellas dos fuerzas, está dirigida en el plano mismo de la trayectoria. La impulsiva de la pólvora, que ha accionado durante la marcha del proyectil por el ánima de la pieza, cesa despues que éste sale de la boca, de manera que á no intervenir otras fuerzas, seguiria moviéndose en linea recta; mas como lanzado en la direccion inicial correspondiente, se mueve bajo la accion de la pesantez, supuesta constante en magnitud y direccion, la trayectoria será parabólica, separándose desde el primer instante de su direccion inicial.

En la práctica no sucede así sin embargo: la resistencia que el aire opone constantemente al proyectil en su movimiento, resistencia cuya variabilidad es debida á diversas causas, le modifica de contínuo, separándose en cada caso la trayectoria de las condiciones teóricas fijadas.

Conocido siempre el peso del proyectil, la resistencia que el aire le opone, asi como la velocidad que la fuerza elástica de los gases le imprime, deben ser los primeros puntos que se determinen para la resolucion del problema balístico. Antes de abordarlo en toda su generalidad conveniente será conocer las leyes del movimiento de los proyectiles supuesto que se verificara en el vacío, pudiendo considerarse los resultados que se obtengan como una aproximacion muy útil y aun aplicable en algunos casos de la práctica.

modifica de continuo, separándose, en cada caso la trayectoria de las condiciones teóricas fijadas.

Conocido siempre el peso del proyectil, la resistencia que el aire le opone, así como la velocidad que la fuerza elástica de los gases le imprime, deben ser los primeros puntos que se determinen para la resolucion del problema balístico. Antes de abordarlo en toda su generalidad conveniente será conocer las leyes del movimiento de los proyectiles supuesto que se verificara en el vacío, pudiendo considerarse los resultados que se obtengan como una aproximacion muy útil y aun aplicable en algunos casos de la práctica.

CAPÍTULO 1.º

Movimiento parabólico de los proyectiles.

1. Las ecuaciones diferenciales del movimiento de un punto material animado de una velocidad inicial y sometido á la accion de la pesantez, supuesta constante en magnitud y direccion, y referido este movimiento á un sistema coordenado rectangular cuyo orígen sea el punto de partida del móvil y cuyos ejes coincidan, uno con la direccion de la gravedad y con la horizontal el que lo sea de abcisas, son

$$\frac{d^2 x}{d t^2}=0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 y}{d t^2}=-g$$

por ser nula la componente de la aceleracion sobre el eje de las x.

Integradas estas ecuaciones, llamando V la velocidad ini cial, θ el ángulo, dicho de proyeccion, que forma ésta con la horizontal, resulta para las ecuaciones del movimiento proyectado

$$x=\mathrm{V}\cos.\theta\times t; \quad y=-\frac{1}{2}g t^2+\mathrm{V}\,\mathrm{sen.}\,\theta\, t$$

y por consiguiente para la de la trayectoria

$$y=x\,\mathrm{tang.}\,\theta-\frac{g x^2}{2\,\mathrm{V}^2\cos.^2\theta}=x\,\mathrm{tang.}\,\theta-\frac{x^2}{4\,h\cos.^2\theta}$$

ecuacion de una parábola cuyo eje es vertical y que es tangente en el orígen de coordenadas á la direccion de la velocidad inicial.

2. El alcance del tiro se obtiene haciendo $y=0$ en la ecuacion de la trayectoria, por cuyo medio se encuentra

$$x=\frac{\mathrm{V}^2\,\mathrm{sen.}\,2\theta}{g}=2h\,\mathrm{sen.}\,2\theta$$

Este alcance tiene pues un valor máximo, para una misma velocidad inicial, cuando el ángulo θ es de 45°, siendo los alcances iguales para ángulos que difieran de este, en más ó en ménos, el mismo número de grados. Siendo el valor de θ, que da el máximo alcance, mitad de el del ángulo del sistema, fácilmente se encuentra que el alcance del tiro en una direccion cualquiera tiene un valor máximo, siendo la misma la velocidad inicial, cuando el ángulo de proyeccion es mitad de el del sistema.

Del anterior valor formular se deduce, que los alcances son proporcionales á los senos de los ángulos dobles del de proyeccion é iguales para ángulos de proyeccion complementarios: tambien hace ver que aquellos son proporcionales á los cuadrados de las velocidades iniciales.

3. La ordenada del vértice de la parábola se obtiene reemplazando en su ecuacion

$$x \text{ por } \frac{1}{2}\,\frac{V^2 \operatorname{sen.} 2\theta}{g} = h \operatorname{sen.} 2\theta = 2h \operatorname{sen.} \theta \cos. \theta$$

lo que dá para valor de la ordenada

$$y = \frac{V^2}{2g} \operatorname{sen.}^2 \theta = h \operatorname{sen.}^2 \theta$$

ordenada dirigida segun el eje de la parábola y que divide á la curva en dos partes simétricas. Su máximo valor corresponde al de $\theta = 90°$ y esta altura del tiro, igual á h, es debida á la velocidad inicial y mitad del alcance máximo $\frac{V^2}{g}$ en direccion horizontal.

4. La velocidad en un punto cualquiera es $v = \frac{ds}{dt}$, y

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{dt^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dt^2};$$

mas como

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang.} \theta - \frac{gx}{V^2 \cos.^2 \theta}, \text{ y } \frac{dx}{dt} = V \cos. \theta,\ v^2 = V^2 \cos.^2 \theta +$$

$$V^2 \operatorname{tang.}^2 \theta \cos.^2 \theta + \frac{g^2 x^2}{V^2 \cos.^2 \theta} - 2gx \operatorname{tang.} \theta = V^2 -$$

$$2g\left(x \operatorname{tang.} \theta - \frac{gx^2}{2V^2 \cos.^2 \theta}\right) = V^2 - 2g \times y.$$

Tambien

$$v=\frac{V\cos.\theta}{\cos.\varphi}$$

por ser constante la velocidad del movimiento proyectado sobre el eje de las x, siendo φ la inclinacion variable de la trayectoria.

Así pues la velocidad en el punto de caida es igual á la inicial y, dependiendo solo de y, en cada punto de la rama descendente lleva el móvil la misma velocidad que en su simétrico de la ascendente.

5. La inclinacion de la trayectoria se mide por el valor correspondiente de $\frac{dy}{dx}$; el ángulo de caida resulta igual al de proyeccion. La duracion de un trayecto es

$$t=\frac{x}{V\cos.\theta}$$ resultando así ser la del total

$$T=\frac{2V\,\text{sen.}\,\theta}{g}$$

6. Se puede determinar el lugar geométrico de los vértices de las parábolas descritas con la misma velocidad inicial y diversas direcciones, eliminando entre los valores generales de las coordenadas del vértice

$$x=2h\,\text{sen.}\,\theta\cos.\theta,\quad y=h\,\text{sen.}^2\theta$$

el ángulo de proyeccion; con lo que resulta

$$x^2=4hy-4y^2,$$

ecuacion de una elipse referida al vértice 0 (fig. 1.ª) Para $x=0$, $y=h$ valor del eje menor, y haciendo $y=\frac{1}{2}h$, $x=h$ valor del semieje mayor: lo que dice que los vértices de las parábolas descritas en tales condiciones se encuentran sobre una elipse cuyo eje menor es vertical é igual á $\frac{V^2}{2g}$, y horizontal é igual á $\frac{V^2}{g}$ el eje mayor.

7. Dáse el nombre de línea de seguridad á la envolvente de las diversas parábolas descritas con igual velocidad inicial y distintos ángulos de proyeccion, cuyo nombre lo toma de la circunstancia de

no poder ser batidos los puntos del plano vertical que estén sobre ella. Para obtener su ecuacion elimínase el ángulo θ entre la trayectoria y su derivada con relacion á aquel ángulo, siendo esta última

$$x \sec.^2 \theta - \frac{x^2}{2h} \tan g. \theta \sec.^2 \theta = 0 \quad \text{de la que} \quad \tan g. \theta = \frac{2h}{x}$$

valor que, sustituido en la primera, dá

$$x^2 = 4h(h - y),$$

ecuacion de la envolvente, que es por tanto una parábola, (fig. 2.ª)

8. Si sobre las líneas que miden los distintos ángulos de proyeccion se toman magnitudes O M (fig. 3.ª) iguales á $2h \,\text{sen.}\, 2\theta$, valor de los alcances, se obtiene una curva cuya ecuacion referida á coordenadas polares es

$$x = 2h \,\text{sen.}\, 2\theta,$$

siendo x el rádio vector: si

$$\theta = 45^\circ, \quad x = \text{O M}' = 2h,$$

que es su máximo valor; á medida que θ crece, el rádio vector disminuye, pasando por los mismos valores, por lo que la curva afecta la forma de una hoja, con su vértice en el orígen y simétrica con respecto á la línea de proyeccion de 45°: en cada uno de los cuadrantes hay otra igual, correspondiente á los valores de θ, desde 0° á 360°, habiéndosele dado el nombre de cuadrifólio balístico.

9. Las cuestiones balísticas se resuelven con gran sencillez, en la hipótesis del movimiento parabólico; determinadas la trayectoria y las circunstancias del movimiento disponemos de todos los medios necesarios: así, pueden conocerse, los valores de el alcance, del ángulo de proyeccion ó de la velocidad inicial, dados dos de estos elementos, bien sea el terreno sobre que se opere, horizontal ó inclinado; y por modo igual encontrar los valores de la velocidad inicial y ángulo de proyeccion necesarios para que un proyectil pase por dos puntos fijos ó con determinada inclinacion por uno tambien fijo.

No nos detenemos en la resolucion de estos problemas, porque su estrema sencillez lo hace innecesario y porque más adelante hemos de ocuparnos de ellos, teniendo en cuenta las circunstancias reales del movimiento.

CAPÍTULO 2.º

Resistencia del aire.

10. La determinacion de la resistencia que los flúidos oponen al movimiento de los cuerpos sólidos, cuando se toma en cuenta la forma de estos, presenta grandes dificultades bajo el punto de vista matemático, sin que sean menores bajo el de la experiencia, á causa de la complicacion del fenómeno. Así la teoría de Newton, despues de los trabajos de Galileo, que supone el cuerpo directamente chocado por cada una de las moléculas del medio que encuentra en su camino, se admitió largo tiempo por su sencillez, á pesar de su imperfeccion demostrada por repetidas esperiencias de Robins, Borda, Bossut, Hutton y sobre todo de Dubuat.

Sabido es que el efecto de la presion del aire sobre los cuerpos sólidos se reduce á disminuir su peso tanto cuanto es el del volúmen del flúido que desalojan, disminucion tanto mayor, á igualdad de volúmen, cuanto es menor el peso del cuerpo. La experiencia enseña, que la resistencia que el aire opone al movimiento de los cuerpos, en virtud de la inercia de sus moléculas, de sus cambios de lugar relativos y su mútua separacion, que ponen en juego las fuerzas de cohesion y adherencia, varía segun la estension y la forma de la superficie exterior del cuerpo y más especialmente segun el grado de rapidez del movimiento: hiriendo el aire con una paleta plana y delgada la resistencia que se experimenta es tanto mayor cuanto la velocidad del movimiento que se le imprime, siendo lo mas pequeña posible, á velocidad igual, cuando se dirige su cara plana en el sentido mismo del movimiento. La observacion de hechos análogos ha conducido á admitir que la resistencia crece generalmente: 1.º con la estension de la superficie anterior de los cuerpos, esto es de la que se presenta directamente á la accion del aire; 2.º con la dificultad, que consecuencia de su forma, el aire esperimenta á su resbalamiento á lo largo de la superficie del cuerpo; 3.° con la velocidad que posee, y esto en una relacion, que crece más rapidamente que esta magnitud y que, como veremos de seguida, escede á su cuadrado.

11. Aunque no haya sido posible someter al cálculo todas las circunstancias que ofrece el movimiento molecular de los gases y que influyen particularmente en la resistencia que el aire opone al movimiento de los cuerpos que le atraviesan, puede obtenerse una espresion de esta resistencia, basada sobre la consideracion de que la cantidad de movimiento que pierde el móvil es igual á la que comunica á la masa flúida que desaloja, tomando solo en cuenta el grado de velocidad de aquel, su masa, su estension y su forma, particularmente la de la parte anterior que choca con el fluido y la densidad de éste y prescindiendo de su elasticidad, tenacidad de sus moléculas y diversos rozamientos producidos.

Si quisiéramos calcular la resistencia sobre un plano animado de una velocidad de traslacion y que se conservara perpendicular á la direccion del movimiento, llamando S á su superficie, v la velocidad con que hiera el aire, supuesto en reposo y δ el peso de la unidad de volúmen de éste, $v\,dt$ sería el espacio recorrido por el plano en el elemento de tiempo dt y el volúmen de flúido desalojado $S\,v\,dt$, así como su masa estará espresada por $\frac{S\,\delta}{g}\,v\,dt$. En la hipótesis de que el plano comunique á esta masa flúida la misma velocidad que él posee su cantidad de movimiento no será otra cosa que el producto de ambas ó sea $\frac{S\,\delta}{g}\,v^2\,dt$. Pero si la velocidad adquirida elemental del móvil, durante el elemento de tiempo dt es dv, la disminucion de su cantidad de movimiento será

$$m\,dv = \frac{S\,\delta}{g}\,v^2\,dt,$$

que es la que tiene la masa flúida arrastrada por aquel.

De esta ecuacion se deduce, llamando ρ la resistencia, que se busca,

$$m\,\frac{dv}{dt} = \rho = \frac{S\,\delta}{g}\,v^2,$$

y cuyo valor varía proporcionalmente al cuadro de la velocidad, á la superficie expuesta á la accion del flúido y á la densidad de éste. Claro es que para obtener el valor real de la resistencia, se necesita afectar de un coeficiente la espresion anterior, coeficiente deducido de experiencias, en las que verdaderamente no se prescinde de las circunstancias que constituyen el movimiento tal cual es en realidad; así

$$\rho = k \frac{S\delta}{g} v^2.$$

12. Si el plano S no marchara en direccion perpendicular á la del movimiento, llamando α el ángulo que con esta forma la normal á aquel, descompondríamos la velocidad v en dos; una $v \cos.\alpha$, perpendicular al plano, influirá en la resistencia y otra $v \operatorname{sen}.\alpha$ de la que será independiente, marcando solo la velocidad con que el aire resbala sobre el plano: sustituyendo pues en la espresion de la resistencia, cuando el plano es perpendicular á la direccion del movimiento $v \cos.\alpha$ en vez de v, tendremos para valor de la resistencia normal sobre un plano S, oblícuo á la direccion del movimiento

$$\rho = \frac{S\delta}{g} v^2 \cos.^2\alpha; \text{ y más propiamente } \rho = k \frac{S\delta}{g} v^2 \cos.^2\alpha$$

siendo k un coeficiente deducido de la manera que se ha indicado.

13. Todavia podemos calcular con igual facilidad, la resistencia del aire sobre una superficie de revolucion, cuyo eje de figura coincida con la direccion del movimiento.

Tomemos el eje de figura por eje de abcisas ó de los x y una perpendicular por eje de las y. Si suponemos un cilindro, cuyas generatrices sean paralelas á la direccion del movimiento, circunscrito al cuerpo terminado por la superficie de revolucion, la circunferencia de contacto dividirá á esta en dos partes: la posterior sobre que no obra la resistencia, y la anterior, en la cual la normal á sus distintos elementos forma con la direccion del movimiento un ángulo α menor que 90°, y es sobre la que esta resistencia ejerce su accion.

Un elemento superficial, considerado yá de la parte anterior, está espresado por $2\pi y\, ds$ y por lo que acabamos de ver esperimenta una resistencia, en direccion perpendicular, igual á

$$k \frac{\delta}{g} 2\pi y\, ds\, v^2 \cos.^2\alpha = \frac{k\delta}{g} v^2 \cos.^2\alpha\, dS$$

llamando dS la diferencial de la superficie. Las componentes de esta resistencia, segun los ejes á que el movimiento está referido, serán respectivamente en direccion del eje de figura, que es la de movimiento

$$\frac{k\,\delta}{g}\,v^2 \cos.^2\alpha\, d\mathrm{S}\cos.\alpha, \quad \text{y} \quad \frac{k\,\delta}{g}\,v^2\cos.^2\alpha\, d\mathrm{S}\,\mathrm{sen.}\,\alpha$$

la dirigida segun el eje de las y; pero destruida ésta por la resistencia igual y contraria que el aire ejerce sobre el elemento de superficie que hallándose en la misma seccion meridiana forma el mismo ángulo que el otro con el eje de las x, la resultante de la resistencia, se reduce á su componente

$$\frac{k\,\delta}{g}\,v^2\, d\mathrm{S}\cos.^3\alpha. \quad \text{Ahora bien } \cos.\alpha = \frac{d\,y}{d\,s};$$

luego la resistencia sobre la zona engendrada por la revolucion del arco $d s$, cuya superficie es $2\,\pi\,y\,d\,s$ será

$$2\,\pi\,\frac{k\,\delta}{g}\,v^2 y\,\frac{d\,y^3}{d\,s^3}\times d\,s, \quad \text{y cuya integral } 2\,\pi\,\frac{k\,\delta}{g}\,v^2\int y\,\frac{d\,y^3}{d\,s^2},$$

que deberá tomarse entre los límites que correspondan, espresará la resistencia sobre todo la superficie del proyectil espuesta al choque.

14. Si hacemos aplicacion al movimiento de una esfera ó de una semiesfera, cuya convexidad se presenta al movimiento, y cuyo eje de figura coincida con la direccion de aquel; tomando el centro del cuerpo por orígen de coordenadas y llamando r su rádio, $x^2+y^2=r^2$ será la ecuacion del círculo y de ella

$$d\,y = -\frac{x}{y}\,d\,x,\; d\,y^2 = \frac{x^2}{y^2}\,d\,x^2 \text{ y } d\,y^3 = -\frac{x^3}{y^3}\,d\,x^3;$$

más como

$$ds = d\,x\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2},\; d\,s^2 = \left\{1+\left(\frac{d\,y}{dx}\right)^2\right\}dx^2 = \left(\frac{y^2+x^2}{y^2}\right)dx^2 =$$

$$\frac{r^2}{y^2}\,dx^2;\; \frac{d\,y^3}{d\,s^2} = -\frac{x^3}{y^3}\,d\,x^3 : \frac{r^2}{y^2}\,d\,x^2 = \frac{x^3}{y\,r^2}\,d\,x$$

$$\text{y} \quad \rho = 2\,\pi\,\frac{k\,\delta}{g}\,v^2\int y\,\frac{x^3\,d\,x}{y\,r^2} = 2\,\pi\,\frac{k\,\delta}{g}\,v^2\,\frac{1}{r^2}\int x^3\,d\,x,$$

el valor de cuya integral entre los límites $y=o, y=r$ resulta:

$$\rho = \frac{1}{2}\,\pi\,\frac{k\,\delta}{g}\,v^2 r^2$$

mitad del valor de la resistencia que sufriria el círculo máximo de la esfera si se presentase perpendicularmente á la direccion del movimiento.

15. Las dificultades señaladas para determinar analíticamente la resistencia del aire, distinguiendo los efectos que pueden ser debidos á la influencia de la forma y de la posicion de las diferentes partes del cuerpo disminuyen contrayéndose á los proyectiles de artillería, moviéndose en la atmósfera por la forma semejante que estos tienen, habiéndose podido fijar con una aproximacion suficiente para la práctica, con el auxilio de un gran número de experiencias, las leyes á que obedece la resistencia del aire, actuando sobre un proyectil. Concretándonos al caso de que éste sea esférico y homogéneo ó al menos que sus centros de gravedad y de figura se confundan, se admite que la resistencia es proporcional á su círculo máximo, á la densidad del aire, que á su vez depende de la altura barométrica, de la temperatura y del estado higrométrico de la atmósfera, y á una cierta funcion de la velocidad. Si pues representamos por R su radio, por v la velocidad al fin del tiempo t, δ la densidad del aire, supuesto en reposo y ρ la resistencia, la fórmula que nos dé su valor será:

$$\rho = \pi R^2 \delta f(v).$$

16. La cuestion, de esta manera presentada, se reduce á determinar el valor de $f(v)$ correspondiente á un movimiento cuyas circunstancias se fijen de antemano. Establezcamos pues las diferentes fórmulas que, contenidas en la precedente, se han empleado para determinar la resistencia del aire. Las esperiencias que han conducido á esta determinacion han tenido todas una misma base: se ha medido la velocidad en dos puntos de la trayectoria poco separados, y elegidos de manera que se hallen proximamente al mismo nivel, en cuyo caso puede prescindirse de la accion de la pesantez.

Si consideramos la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, segun la primera hipótesis establecida y admitida durante largo tiempo como queda dicho, la $f(v)$ que entra en su espresion puede representarse por $k v^2$, siendo k un coeficiente cuyo valor se determinará segun el procedimiento indicado.

De ser $\quad f(v) = k v^2, \; \rho = \pi R^2 \delta k v^2$

y llamando ρ' la aceleracion, su valor será:

$$\rho' = \frac{\pi R^2 \delta g v^2 k}{P},$$

designando P el peso del proyectil: si es d la densidad de éste, el valor de ρ' se convierte en

$$\rho' = \frac{3 g \delta k v^2}{4 R d} = -\frac{d v}{d t}$$

por ser el movimiento rectilíneo. La forma de esta ecuacion enseña que el efecto de la resistencia del aire influirá menos en la trayectoria del proyectil cuanto sean mayores su calibre y su densidad: así se observa que, á igual calibre, los proyectiles sólidos desvian menos que los huecos y en los de gran calibre, como son las bombas, la trayectoria que describen difiere muy poco de la calculada suponiendo que no obrase la resistencia del aire, si bien entre en ello por gran parte la pequeña velocidad con que se disparan.

El conocimiento de la ley de variacion de la fuerza, conduce así á la ley de variacion de la aceleracion, la cual permite determinar la del movimiento. En la integracion de esta ecuacion diferencial las constantes arbitrárias se determinarán por las circunstancias iniciales.

Volvamos á tomar la ecuacion

$$\rho' = \frac{3 g \delta k v^2}{4 R d} = H v^2$$

llamando H al factor que acompaña á v^2, y de aquí

$$\frac{d v}{d t} = -H v^2 \text{ y } \frac{d v}{v^2} = -H\, d t.$$

La primera integracion nos dá

$$\frac{1}{v} = H t + C$$

y si representamos por V la velocidad inicial

$$C = \frac{1}{V} \text{ y } v = \frac{V}{1 + H V t} = \frac{d x}{d t}.$$

Integrando de nuevo

$$x = \int \frac{V\, d t}{1 + H V t} + C = \frac{1}{H} \int \frac{H V\, d t}{1 + H V t} + C = \frac{1}{H}\, l.(1 + H V t) + C,$$

espresion en que la constante desaparece por ser nulo el valor de x cuando empieza á contarse el tiempo, resultando finalmente.

$$x = \frac{1}{H}\, l\,(1 + H\,V\,t).$$

Para obtener la relacion entre las velocidades del móvil y los espacios por este recorridos, bastará eliminar $(1 + H\,V\,t)$ entre los valores de v y de x, cuya relacion resulta

$$v = \frac{V}{e^{Hx}} \text{ por ser } 1 + H\,V\,t = e^{Hx}.$$

De esta relacion se deduce

$$H = \frac{1}{x}\, l\left(\frac{V}{v}\right) \text{ y como tambien } H = \frac{\pi g \delta R^2}{P} \times k$$

$$\frac{\pi g \delta R^2}{P} k = \frac{1}{x}\, l\left(\frac{V}{v}\right) \text{ y } k = \frac{P}{x \pi g \delta R^2}\, l\left(\frac{V}{v}\right).$$

A fin de evitar el cálculo logarítmico puede tomarse con aproximacion bastante por valor de

$$l\left(\frac{V}{v}\right) \text{ el de } \frac{V - v}{\frac{V + v}{2}}$$

lo cual permite considerar el valor obtenido para k como correspondiente á la velocidad media aritmética de las dos velocidades medidas para su determinacion.

Así, $$k = \frac{P}{x \pi g \delta R^2} \times \frac{V - v}{\frac{V + v}{2}} \quad (1)$$

---

(1) $l\left(\frac{V}{v}\right) = l\left(1 + \frac{V}{v} - 1\right) = l\left(1 + \frac{V - v}{v}\right) = \frac{V - v}{v} - \frac{1}{2}\left(\frac{V - v}{v}\right)^2 + \ldots\ldots$

luego

$$l\left(\frac{V}{v}\right) < \frac{V - v}{v};\; l\left(\frac{V}{v}\right) = -l\left(\frac{v}{V}\right) = -l\left(1 - \frac{V - v}{V}\right) = \frac{V - v}{V} + \frac{1}{2}\left(\frac{V - v}{V}\right)^2 + \ldots$$

luego $$l\left(\frac{V}{v}\right) > \frac{V - v}{V}.$$

Teniendo ambas espresiones el mismo numerador, seria necesario aumentar el denominador de la primera ó disminuir el de la segunda sin que llegáran á ser V y v respectivamente, por lo que sin error notable puede tomarse para denominador $\frac{V + v}{2}$ como hemos hecho en el testo.

::

17 Las renombradas esperiencias de 1839 y 1840 verificadas en Metz y en las que se hizo uso de esta fórmula, ponen de manifiesto su falta de conformidad con los resultados en la práctica obtenidos. Con la proligidad que exigen los esperimentos delicados é igualando en lo posible las condiciones todas, procedió la comision de Metz, encontrando que la resistencía del aire crece en mayor proporcion que la teóricamente establecida. Al efecto la referida comision (1) sirviéndose de cañones de 24, 12 y 8 y obus de 22 y tirando sobre el péndulo balistico á distancias que variaban entre sí 25^m, 50^m, 75^m y 100^m, á partir de 15^m, determinó en cada estacion la velocidad media con que los proyectiles herian el receptor, tomada ésta sobre cuatro disparos genenalmente: los límites de las cargas empleadas correspondian á los de las velocidades estremas en el servicio, de 200^m á 650^m. Con estos primeros datos formábanse luego las velocidades médias correspondientes á cada intérvalo y á las cuales hemos dicho se refiere la resistencia del aire. En todo el curso de las esperiencias se supuso constante la densidad de este é igual á 1, 208 correspondiente á la temperatura 15°, altura barométrica $0^m,75$ y medio saturado de vapor acuoso.

Este resultado es tanto mas cierto cuanto la diferencia $V - v$ es menor que la velocidad v.

Didion ha observado que segun se emplea una ú otra fórmula para espresar el valor de k, la diferencia entre los resultados es inferior al error que resultaria de tomar la altura barométrica en el momento de la esperiencia con una décima de milímetro de la verdadera. Así, disparando con un cañon de 24, siendo la carga de $1^k,50$ y las velocidades medias á 15^m y 90^m del péndulo balístico respectivamente $365^m,72$ y $346^m,03$, el diámetro del proyectil $0^m,14804$, su peso $12^k,010$ y la densidad media del aire 1,2031 se encuentra, aplicando una y otra:

$$\delta \times k = \frac{12^{kg}.01}{75^m \times 9^m,809 \times 0,0172} \times \frac{19^m,69}{355^m,87} = 0,05249$$

$$\delta \times k = \frac{12^{kg}.01}{75^m \times 9^m,809 \times 0,0172} \times$$

$$\left(l.365,72 - l.346,03 \right) = \frac{\log.365,72 - \log.346,03}{\log.(e = 2,71828}\right) = 0,05250$$

la diferencia de cuyos resultados no es sino una unidad del quinto órden decimal.

(1) Piobert, Morin y Didion: en el tratado de Balística de este último se detallan mas estas esperiencias.

De este modo y agrupando debidamente los resultados obtenidos se fijaron los distintos valores de $1,208 \times k$ relativos á las velocidades observadas, como aparece en el siguiente cuadro.

Calibres.	Velocidades medias. — *Metros.*	Valores de $\delta\ k$.	Calibres.	Velocidades medias. — *Metros.*	Valores de $\delta\ k$.	Calibres.	Velocidades medias. — *Metros.*	Valores de $\delta\ k$.
12	288,53	0,0317	24	391,74	0,0604	12	466,09	0,0628
24	300,97	0,0272	12	421,92	0,0481	12	526,26	0,0561
12	341,50	0,0488	24	427,71	0,0624	24	542,72	0,0801
24	356,20	0,0533	12	449,26	0,0415	24	562,42	0,0542
12	387,20	0,0722	24	453,41	0,0553	12	628,95	0,0640

VALORES MEDIOS.

Velocidades.	$337^m,22$. . . .	$428^m,81$. . . .	$535^m,15$
Valores de $\delta\ k$. . . .	0,0479.	0,0535.	0,0616

Los valores de k crecen pues con la velocidad y no son constantes, como debieran serlo, si la resistencia del aire fuese proporcional solamente al cuadrado de aquella.

Construidos los resultados, que resumen las esperiencias tomando las velocidades por abcisas y los valores de $1,208 \times k$ por ordenadas, resulta próximamente una línea recta en cuya ecuacion, de la forma $1,208 \times k = \alpha + \beta v$ será necesario determinar los parámetros y como quiera que la espresion de la resistencia del aire se obtiene, multiplicando este valor por $\pi R^2 v^2$, se vé que ella depende no solo del cuadrado sino además del cubo de la velocidad.

Esta línea recta de que acabamos de hablar se fija por los dos puntos cuyas abcisas y ordenadas son respectivamente

$$\{(337^m, 22;\ 0^m, 0479)\}\ \text{y}\ \{(428^m, 81;\ 0^m, 0535)\}$$

por cuyos valores el coeficiente angular resulta ser $\beta = 0,0000614$ y la ordenada en el orígen $\alpha = 0,0273$.

El valor de ∂k que mejor conviene á las velocidades comprendidas entre los límites tomados, es por tanto

$$\partial k = 0,0273\,(1 + 0,00224\,v)$$

Si buscamos el valor correspondiente á la velocidad média del último grupo $535^m,15$ el valor de ∂k resulta 0,060026 y siendo el observado 0,0616 la diferencia es tan insignificante que puede suponerse que la fórmula hallada espresa con exactitud suficiente los resultados obtenidos en los tres grupos de cinco esperiencias á que nos venimos refiriendo. La espresion pues de la resistencia del aire, dentro de los límites de velocidades con que ha sido calculada es

$$\rho = \pi R^2 v^2 \times 0,0273\,(1 + 0,00224\,v)$$

Mas como quiera que el cuadro anterior se refiere solo á esperiencias hechas con cañones de **12** y **24** y las de Metz se estendieron á medir la resistencia sobre balas de **8** y granadas de **22** y difiriendo aunque en muy pequeñas cantidades los valores de α y β que corresponden á cada calibre, segun de esperiencias al objeto se dedujo, pudo detenerse la determinacion de β en la segunda cifra decimal forzando la unidad, el valor de cuya relacion será entonces 0,0023 y el de α 0,0269 ó bien $\alpha = 0,027$; de manera que el de la resistencia del aire simplificado será:

$$\rho = \pi R^2 v^2 \times 0,027 \left(\{1 + 0,0023\,v\} = \left\{1 + \frac{v}{435}\right\} \right)$$

18. El cálculo de la resistencia en este caso se efectua, siguiendo una marcha análoga á la del verificado suponiéndola proporcional al cuadrado de la velocidad; la indeterminacion, sin embargo de los dos coeficientes, que entran en su espresion, exige conocer uno de ellos ó suponer al menos su valor. Si partimos pues del valor $\frac{1}{435}$ de $\frac{\beta}{\alpha}$ obtendremos el valor de α con mas exactitud.

La $f(v)$ que entra en la espresion general de la resistencia del aire es en este caso

$$\alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}v\right)v^2 \text{ por ser } \partial k = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}v\right)$$

y aquella por consiguiente

$$\rho = \pi R^2 v^2 \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}v\right)$$

y en la suposicion hecha

$$\rho = \pi R^2 v^2 \alpha \left(1 + \frac{v}{435}\right);$$

la aceleracion será pues

$$\rho' = \frac{3g}{4Rd} v^2 \times \alpha \left(1 + \frac{v}{435}\right) = -\frac{dv}{dt}$$

y llamando H al factor que acompaña á la $f(v)$, que entra en esta espresion $\dfrac{dv}{dt} = -Hv^2\left(1 + \dfrac{v}{435}\right);$

mas como $v = \dfrac{dx}{dt}$ se deduce $\dfrac{dv}{v\left(1 + \dfrac{v}{435}\right)} = -H\,dx;$

y descompuesta en fracciones simples la fraccion racional del primer miembro que dá las dos

$$\frac{1}{v},\ -\frac{\frac{1}{435}}{1 + \frac{v}{435}},$$

la integracion se hace inmediatamente teniendo presente que para

$$x = 0, \quad v = V.$$

Así $(a)\ Hx = l.\left(\dfrac{V}{v}\right) - l.\left(\dfrac{1 + \frac{1}{435}V}{1 + \frac{1}{435}v}\right) = \dfrac{3g\alpha}{4Rd}x$ y

$$\alpha = \frac{4Rd}{3gx}\left\{ l\left(\frac{V}{v}\right) - l\left(\frac{1 + \frac{V}{435}}{1 + \frac{v}{435}}\right)\right\} =$$

$$\frac{P}{\pi R^2 g x}\left\{\frac{\log.\left(1 + \frac{435}{v}\right) - \log.\left(1 + \frac{435}{V}\right)}{\log.\ e}\right\}$$

poniendo la densidad del proyectil en funcion de su peso, y sustituyendo la primera espresion logarítmica por la segunda, mas cómoda para el cálculo.

De la fórmula (a) se deduce

$$e^{\mathrm{H}x}=\frac{\mathrm{V}\left(1+\frac{v}{435}\right)}{v\left(1+\frac{\mathrm{V}}{435}\right)} \quad \text{y} \quad v=\frac{\mathrm{V}}{\left(1+\frac{\mathrm{V}}{435}\right)e^{\mathrm{H}x}-\frac{\mathrm{V}}{435}}$$

Calculando el valor de α para el cañon de 24, con carga de $1^{kg},50$, cuyas velocidades medias de las balas, á las distancias de 15^{m} y 90^{m} del péndulo balístico, han sido respectivamente $365^{m},72$ y $346^{m},03$ y todas las demás circunstancias las mismas de la esperiencia anteriormente citada, resulta

$$\alpha=\frac{12^{kg},010}{0,01721\times 9^{m},809\times 75}\times$$

$$\frac{\log.781,03-\log.346,03+\log.365,72-\log.800,72}{\log.e=0,4342944819}=0,0288794;$$

asi para la velocidad media de estas, que es 355,87

$$\delta k=0,0288794\left\{1+\frac{355,87}{435}\right\}=0,052505,$$

valor mas aproximado que el anteriormente obtenido.

19. Por medio de esta fórmula Didion ha calculado el valor de la resistencia que esperimentan algunos de los proyectiles mas usuales, comprendidas sus velocidades en los límites ordinarios. El cuadro siguiente reasume los citados cálculos

Velocidad de los proyectiles.	$\delta k=0,027$ $(1+0,00230.)$	Resistencia en Kilógramos $\varphi=\pi.\ \mathrm{R}^2\delta k.v^2$		
		Bala de 24 $2\mathrm{R}=0^{m},1485.$	Bala de 12 $2\mathrm{R}=0^{m},1185.$	Bomba de 27 c/m
500.^{m}	0,058050	251,3	160,2	»
450	0,054945	195,0	122,7	»
400	0,051840	143,5	91,4	»
350	0,048735	103,4	68,5	»
300	0,045630	71,1	45,3	237,0
250	0,042525	46,0	29,3	153,3
200	0,039420	27,3	17,4	91,0

De su contenido se desprende el rápido decrecimiento de la resistencia con el de velocidad.

20. El error anteriormente calculado al considerar que el lugar geométrico de los puntos cuyas abcisas y ordenadas eran los valores de v y δk deducidos de las repetidas esperiencias con cañones de 12 y 24, fuese una línea recta, aunque despreciable por su poca importancia ha sido tomado en consideracion por Saint-Robert, quien ha representado aquel por la curva parabólica cuya ecuacion es

$$\delta k = 0{,}0387\left(1+\left(\frac{v}{696}\right)^2\right)$$

y en su consecuencia la resistencia

$$\rho = \pi R^2 v^2 \times 0{,}0387\left(1+\left(\frac{v}{696}\right)^2\right)$$

21. Esto no obstante la espresion de la resistencia en que ésta depende del cuadrado y del cubo de la velocidad, y en cuya virtud se obtiene racional la de la trayectoria es la mas generalmente admitida si bien como desde luego veremos los trabajos mas recientes de la artillería francesa dán lugar á considerarla como simplemente proporcional al cubo.

En las esperiencias de que nos hemos ocupado, no habiéndose medido la velocidad de los proyectiles sino en un solo punto de sus trayectorias, por no permitir otra cosa el péndulo balístico que se empleaba, producíase un error cuya influencia en los resultados es innegable, error que desaparece por el empleo de dos péndulos electro-balístico, aparatos cuyo orígen es posterior á la fecha de aquellas. Por esta razon y contando yá con tales elementos, se verificaron nuevas esperiencias en Metz durante los años de 1856, 57 y 58.

Las piezas empleadas fueron igualmente cañones de 24, 12 y 8, y obuses de 22 y las velocidades variaron desde 190^m á 560^m. El mínimum de disparos con cada carga fué 20 y en cada uno se calculó la velocidad media entre las de dos puntos distantes 100 metros que resultaban de colocar los dos bastidores correspondientes al primer aparato á 30 metros de distancia uno de otro y á 100 metros de estos los que se ligaban al segundo péndulo electro-balístico y para cada velocidad media el valor de δk. De todos los valores así hallados, á carga igual, se tomó así mismo la media aritmética, y construidos los resultados, tomando por abcisas las velocidades y por ordenadas los valores relativos de δk, el lugar geométrico de los puntos determinados, resultó ser una línea recta que pasa por el orígen de coordenadas y cuya ecuacion es

$$\delta k = \frac{v}{7100} \quad \text{y por tanto}$$

$$\rho = 0{,}000142\,\pi\,R^2 v^3$$

22. Esperiencias posteriores verificadas en Rúsia (1868) á consecuencia de haberse observado algunas irregularidades en la marcha de los aparatos electro-balísticos empleados en Metz, han venido á modificar en parte estos resultados. Las piezas de que se hizo uso fueron cañones de 6^l y 24^l y un bombero de 120^l y las cargas empleadas dieron velocidades que variaron de 527^m á 227^m. En estas esperiencias se siguió la misma marcha que en las anteriormente citadas y el General Mayevski las reasume en el cuadro siguiente:

PIEZAS.	Velocidades en metros.	Valores de δk $\delta = 1^k,206$	PIEZAS.	Velocidades en metros.	Valores de δk $\delta = 1^k,206$
Cañon de 6^l	227	0,0295	Cañon de 24^l . . .	380	0,0554
Cañon de 24. . . .	234	0,0267	Cañon de 6. . . .	384	0,0602
Bombero de 120. .	262	0,0361	Bombero de 120. .	408	0,0587
Cañon de 6.	278	0,0424	Cañon de 6. . . .	415	0,0625
Cañon de 24. . . .	287	0,0411	Cañon de 24. . . .	457	0,0598
Bombero de 120. .	330	0,0491	Bombero de 120. .	463	0,0611
Cañon de 24. . . .	331	0,0519	Cañon de 6. . . .	475	0,0625
Cañon de 6. . . .	342	0,0582	Cañon de 24. . . .	527	0,0619

Los resultados obtenidos, indican: que los calibres no tienen una influencia sensible sobre el valor de δk y que la resistencia del aire puede ser considerada proporcional á la seccion del proyectil; todo ello dentro de los límites de la observacion. Además los valores de ∂k, desde las más pequeñas velocidades crecen con ellas y por tanto las resistencias más rápidamente que los cuadrados de las velocidades: segun el ilustre artillero citado, el crecimiento en proporcion mayor que el cuadrado de la velocidad corresponde para esta hasta el valor de 380^m, á partir del cual por permanecer ∂k sensiblemente constante, las resistencias varian sensiblemente tambien como el cuadrado de las velocidades. Si se trata de espresar ∂k en funcion de la velocidad por un solo término proporcional á una potencia de ella, se obtiene para el esponente de esta una fraccion que se acerca á la unidad, para velocidades hasta de 527^m desde las mas pequeñas, y si desde luego se toma la unidad para aquel deberá buscarse el coeficiente que ha de multiplicar á esta primera potencia de v para obtener el valor de ∂k; aquel ha sido evaluado en 0,000140 y por tanto la resistencia del aire

$$\rho = 0{,}000140 \times \pi R^2 v^3,$$

que como vemos difiere muy poco de los resultados de las últimas esperiencias de Metz.

23. Por último, nuevas fórmulas se han establecido á fin de poner en armonía estas esperiencias rusas con las que al propio tiempo verificaba Bashforth en Inglaterra, (1) las cuales vamos á esponer, porque permiten integrar fácilmente las ecuaciones diferenciales del movimiento de los proyectiles; y son á saber: para velocidades comprendidas entre 376^m y 530^m

$$\partial k = 0{,}061 \quad \text{y} \quad \rho = 0{,}061\, \pi R^2 v^2$$

y para las de 376^m hasta las mas pequeñas

$$\partial k = 0{,}012 \left(1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right) \quad \text{y} \quad \rho = 0{,}012\, \pi R^2 v^2 \left\{1 + \left(\frac{v}{186}\right)^2\right\}$$

(1) M. Bashforth ha deducido de sus esperiencias que la ley de resistencia de aire esperimenta un cambio brusco para velocidades comprendidas entre 345^m y 360^m.

Tambien Robins admitió una variacion en dicha ley para velocidades próximamente de 330^m y Hutton para las de 340^m.

Es de notar que los tres autores citados han seguido una marcha análoga para espresar esta condicion, si bien los dos últimos partieron de la hipótesis de la proporcionalidad de la resistencia al cuadrado de la velocidad, y el primero de que lo es al cubo.

Teniendo en cuenta las consideraciones establecidas al principio de este capítulo, inútil hubiera sido suponer la resistencia del aire dependiente de la velocidad media en la estension del trayecto que es objeto de la observacion, toda vez que suponerla proporcional al cuadrado de la velocidad dé alguna más exactitud, si bien no sea bastante; pues, como se ha visto, los resultados no están conformes con lo que muestra la práctica. Resta pues, para terminar estas indicaciones sobre la resistencia que al movimiento de los proyectiles opone el aire, calcular la densidad de este, como será necesario en cada caso, que se trata de determinar con precision aquél.

24. Esta influencia en el movimiento, de la densidad de el medio en que se verifica, se esplica fácilmente. En el choque del cuerpo con las moléculas del flúido que le rodea, estas varian de posicion en tanto mayor número cuanto sea su densidad, siendo arrastradas las que se presentan á su superficie anterior y adquiriendo una velocidad, que debe crecer con la velocidad del cuerpo. Esta accion se comunica á la masa flúida en todas direcciones, formándose de ella diversos hilos flúidos que rodean el cuerpo y llenan el espacio vacío, que mas ó menos completamente se produce por detràs del proyectil, á causa de la compresibilidad del aire; por cuya virtud, condensado en la parte anterior por la presion que sufre del móvil, se enrarece en la posterior, dejando espacio á un volúmen de flúido que acompaña al cuerpo, y cuyo volúmen, como formando parte de su masa, influye en el valor de la resistencia que esperimenta. Esta masa, á que se dá el nombre de popa flúida, es mas considerable á medida que es mayor la velocidad del móvil: se observa á veces en el tiro de morteros, cuando se lanzan bombas por 45^o y con velocidades que dán alcances próximamente de 600^m.

25. Pasando ya á determinar la densidad del aire tomaremos en consideracion su temperatura y presion y la cantidad de vapor acuoso que contenga.

El problema se reduce á encontrar el peso de 1^{mc}. de aire, cuyo estado higrométrico es e, t su temperatura y h la presion, siendo la densidad del vapor los $\frac{5}{8}$ de la del aire: claro es que el peso buscado será la suma de los pesos del aire y del vapor de agua.

La relacion que existe entre el estado higrométrico, la fuerza elástica del vapor de agua que contiene el aire y la del vapor que contendria á la misma temperatura, si estuviera saturado, representando ésta por F y aquella por f, es $e=\frac{f}{F}$, y como quiera que e es conocido y F se encuentra en las tablas de fuerzas elásticas, fácilmente se deduce el valor de f.

Si ahora llamamos f' la tension del aire $f+f'$ será igual á h de donde $f'=h-Fe$.

El peso de 1^{mc} de aire seco á t^o y á la presion $h-Fe$ es

$$1^{kg},293\,\frac{(h-Fe)}{(1+\alpha t)\,0{,}76}\times 1^{mc}$$

Así mismo, 1^{mc} de vapor á t^o y á la presion Fe pesa

$$\frac{1^{kg},\,293\,(Fe\times 5)}{(1+\alpha t)\,0{,}76\times 8}\times 1^{mc}$$

Sumando resulta

$$\frac{1^{kg},293\times 1^{mc}(h-\frac{3}{8}Fe)}{(1+\alpha t)\,0{,}76}=\delta,$$

que es la fórmula que resuelve la cuestion.

A continuacion se inserta la tabla de fuerzas elásticas, del vapor saturado, á distintas temperaturas, y como en dichas tablas la columna mercurial se supone á 0°, será preciso en las aplicaciones multiplicar los valores que en ella se encuentren por $(1+0{,}00018.t)$ binómio de dilatacion del mercurio.

A 15°, 0^m75 y $e=0,5,\delta=1,206$.

La comision de Metz, tomó para la densidad 1,208.

t grados.	F milimets.	t grados.	F milimets.	t grados.	F milimets.	t grados.	F milimets.
— 5	3,0	5	6,5	15	12,7	25	23,6
— 4	3,3	6	7,	16	13,5	26	25,0
— 3	3,6	7	7,5	17	14,4	27	26,5
— 2	3,9	8	8,	18	15,4	28	28,1
— 1	4,2	9	8,6	19	16,3	29	29,8
0	4,6	10	9,2	20	17,4	30	31,5
1	4,9	11	9,8	21	18,5	31	33,4
2	5,3	12	10,5	22	19,7	32	35,4
3	5,7	13	11,2	23	20,9	33	37,4
4	6,1	14	11,9	24	22,2	34	39,6

26. La aceleracion en el movimiento debido á la pesantez variando de un punto á otro con la latitud y altura sobre el nivel del mar, deberá calcularse en el lugar de las observaciones siempre que se trate de esperiencias delicadas y precisas. La variacion de la gravedad con la latitud envuelve la del péndulo simple, cuyas oscilaciones se efectúan en un segundo de tiempo, en los diversos lugares de la tierra. Entre la longitud l del péndulo, y la latitud x del lugar donde debe oscilar, la relacion existente es como sigue:

$$l = 0^{m},991033 + 0^{m},005638 \text{ sen.}^2 x$$

y como esta longitud se liga al valor de g por la relacion

$$l = \frac{g}{\pi^2} \quad \text{toda vez que} \quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

el de la gravedad, en un punto cuya latitud sea φ, y al nivel del mar, será:

$$g = 9,869588\left\{0^{m},991033 + 0^{m},005638 \text{ sen.}^2 x\right\}$$

mas como quiera que elevándose el punto de la observacion, se aleja del centro de la tierra y la pesantez decrece segun la ley de atraccion, si llamamos R el rádio del meridiano terrestre, cuyo valor médio es 6.366.200 metros, y h la altitud de la estacion, el valor de la gravedad que representaremos particularmente por g' estará con el hallado para la misma latitud por la fórmula anterior, en la relacion

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \text{ y } g' = \frac{R^2}{(R+h)^2}\, g \quad .$$

ó bien, con aproximacion bastante,

$$g' = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g.$$

despues de despreciar h^2 en el desarrollo del cuadrado y hacer la division algébrica.

En Segovia, á 40°, 57′, 3″, 6 de lat. y á 1000^{m},087 sobre el nivel del mar el valor de g es 9,801913.

Mas adelante, al tratar de la desviacion de los proyectiles, habrá necesidad de insistir sobre la influencia que en su movimiento tiene la resistencia del aire.

CAPÍTULO 3.°

Velocidad inicial; movimiento de los proyectiles en el ánima.

27. Al enunciar los problemas á que dán lugar las ecuaciones que determinan el movimiento parabólico de los proyectiles, hemos visto que era uno de ellos hallar la velocidad inicial conocidos el alcance y el ángulo de proyeccion; más como quiera que tales problemas hemos de resolverlos en el movimiento atmosférico y la velocidad inicial, esto es, la que el proyectil posea en el punto de partida, se le imprime por la accion impulsiva de la pólvora, de aquí la importancia y mas bien la necesidad de medios para conocer en cada caso el peso de la carga de pólvora que pueda imprimir al proyectil la velocidad indicada por las fórmulas balísticas, así como la velocidad inicial que resulta de una carga cuyo peso y condiciones sean determinados.

Ciertamente que la complicacion del fenómeno que dentro de las bocas de fuego sucede hace imposible deducir teóricamente la fórmula de la velocidad inicial, en funcion de las muchas variables de que depende; así que los cálculos al efecto establecidos, fundados en hipótesis que permitieran su desarrollo, no han producido resultados fijos é incontestables. Numerosas y repetidas esperiencias han venido sin embargo en auxilio de las teorías y mediante ellas nos será fácil obtener las velocidades con cierta aproximacion; que seria mayor si se conocieran las modificaciones que deban sufrir las fórmulas de aquellas deducidas, variadas las diversas condiciones que hacen diferir los esperimentos.

Si no existiera tanta incertidumbre respecto al valor de la fuerza espansiva de la pólvora, que á su vez depende de la manera como la inflamacion se verifica y cuya manera se juzga muy diversamente, si además fuera posible tomar en consideracion las múltiples circunstancias que influyen sobre la velocidad inicial; como la longitud de la pieza por cuanto con respecto á ella varía el tiempo que el proyectil está sometido á las impulsiones que de los gases recibe, á medida que estos se forman; la resistencia que el aire opone al movimiento, aunque en tan corto espacio no sea muy considerable; el rozamiento contra las paredes del ánima, gases escapados por el fogon y por el espacio, diferencia entre las secciones del ánima y del proyectil, á que se dá el nombre de viento; como en fin, y tambien muy principalmente, la naturaleza de la pólvora y la manera de cargar, que producen variaciones estraordinarias de potencia balística, por medio de la teoría general dinámica podria determinarse la velocidad del movimiento en el punto en que el proyectil abandona precisamente la boca de la pieza.

Robins trató ya de resolver esta cuestion, tomando como datos el calibre y la longitud de la pieza, el peso de la bala, la carga de pólvora y la fuerza elástica de esta en el primer instante de la inflamacion, inventando por motivo de estas investigaciones el péndulo balístico que lleva su nombre y del cual se sirvió para comparar los valores de la velocidad inicial obtenidos por espresiones matemáticas con los deducidos por sus esperiencias.

De entónces acá, multitud de esfuerzos se han hecho para conseguir, apreciar con exactitud bastante tan principal elemento del tiro, pero cuantas investigaciones teóricas se han emprendido no han dado otro resultado que evidenciar más y más la necesidad de recurrir á fórmulas empíricas deducidas de numerosos trabajos prácticos, los cuales ofrecen la seguridad de poderse emplear entre los límites en que han sido determinadas.

28. De la teoría sobre la accion de la pólvora de Piobert, ha deducido Didion una fórmula que representa con alguna aproximacion la variacion de la velocidad cuando se parte de una velocidad conocida y de una carga dada.

Dicha fórmula es:

$$V=\sqrt{\gamma \frac{\mu}{m+\frac{\mu}{3}} \log. \frac{M}{\mu}} - 700 \frac{C^2-R^2}{C^2}$$

Siendo V la velocidad inicial del proyectil, 2 C el calibre del ánima, R el radio del proyectil, P su peso y m el peso P aumentado de él de la carga, no comprendida la pólvora, μ el peso de la carga de pólvora, l su longitud, M el peso de la pólvora que llenaria el ánima y D la densidad de esta; así

$$M=\pi C^2 L D$$

siendo L la longitud del ánima y

$$l=\frac{\mu}{\pi C^2 D};$$

γ es un coeficiente que depende de la calidad de la pólvora y cantidad en que se emplea.

De ella se deduce

$$\gamma=\frac{\left(V+700\,\frac{C^2-R^2}{C^2}\right)^2}{\frac{\mu}{m+\frac{\mu}{3}} \log. \frac{M}{\mu}}$$

en cuya espresion deberá sustituirse por V el valor de la velocidad inicial correspondiente á la carga y pieza, que mas se aproximen al caso propuesto.

29. Piobert, con el fin de determinar la velocidad inicial de una bala, cuando se conoce su peso y el de la carga, ha propuesto la siguiente fórmula:

$$V=v\,\frac{\sqrt{\log.\left(1+\frac{C}{w}\right)}}{\sqrt{\log.\left(1+\frac{C}{w'}\right)}}$$

en la cual representa V, velocidad inicial que se busca, w, peso de la bala, v, velocidad inicial de otra bala conocida, w' su peso y C, el de la carga igual para ambas. Esperiencias verificadas en los Estados Unidos han demostrado la concordancia de ella con los resultados obtenidos, siempre que las cargas no escedan del tercio del peso de la bala y la pieza no tenga ménos de 16 calibres de longitud, no admitiendo en ella suficiente exactitud fuera de estos límites.

30. Aun es mas sencilla que la precedente la que presenta Douglas en su tratado de Artillería naval y de la que, segun dicho autor, se hace mucho uso en la artillería inglesa; tal es:

$$V = 1600\sqrt{\frac{ac}{w}},$$

representando por c el peso de la carga, w, el de la bala y a un coeficiente, que, segun Hutton, varía entre 2,1 y 2,5, segun la longitud del cañon y tambien la relacion en que aumenta el peso de la carga con respecto al de la bala. Esperiencias posteriores hechas en Deal y repetidas séries de ellas, en el trascurso de diez años, á objeto de determinar velocidades iniciales por alcances, hicieron ver que para la aplicacion de esta fórmula los valores medios de a, dependientes del viento de los proyectiles, son los siguientes:

Viento.	Valores de a.
$0^m,00592$	3,2
0 ,00508	3,4
0 ,00445	3,6
0 ,00318	4,4
0 ,00229	5,0

El coeficiente 1.600, en pies ingleses, ó $487^m,68$ es el mismo que entra en la fórmula de Hutton quien encontró ser esa la velocidad de una bala de á libra lanzada con una carga de ocho onzas de pólvora.

31. Las numerosas tentativas hechas para obtener fórmulas que permitań determinar la velocidad inicial de los proyectiles no han dado un resultado satisfactorio como yá hemos espuesto que debia esperarse dado lo complejo del fenómeno, y sin que tampoco se hayan sometido al cálculo todas las circunstancias que en el se presentan.

La fórmula, por ejemplo, del General Didion, fué establecida en verdad teóricamente, pero suponiendo que la densidad de los gases sea constante en toda la masa y aplicando á aquellos la ley de Mariotte: la cuestion, bajo el punto de vista analítico, se simplifica de esta suerte, pero dista mucho así presentada de la realidad de las cosas, puesto que ni aquella densidad es constante ni la ley de Mariotte es aplicable á los gases producidos por la combustion de la pólvora, tanto mas cuanto que, como repetidas esperiencias comprueban, los gases de la pólvora, no tan solo obran por presion sino tambien por choque.

Estas consideraciones nos dispensan de entrar en este terreno y hacen comprender una vez más la necesidad de acudir á fórmulas empíricas que al agrupar los resultados obtenidos por la esperiencia, sirven de guia en casos análogos á aquellos de que han sido deducidos. Para las necesidades de la práctica parecen suficientes estos medios, por mas que sea lógico el deseo de una exacta precision, imposible de todo punto, si se reflexiona en cuales son las diversas circunstancias, algunas de ellas apuntadas al principio, que deberán tenerse en cuenta: la variedad de calibres por una parte y la de las pólvoras que aquella arrasta, yá en su sistema de fabricacion ya en tamaño y forma, influyendo por las mas ligeras variaciones en las velocidades de inflamacion y combustion, modifican de una manera estraordinaria y que no puede cifrarse en una ley general, la velocidad que una cantidad dada de pólvora, comunica á un proyectil: esto es, que dadas todas las circunstancias del caso, no es posible espresar analíticamente una relacion que ligue las cargas y las velocidades que producen.

32. Cuanto hemos dicho sobre las dificultades que ofrece la determinacion teórica de las velocidades iniciales, es aplicable por igual á la de las demás cuestiones importantes que deben considerarse en balística interior, tales como la velocidad de retroceso de la pieza, el tiempo de la combustion de la carga y el que trascurre entre la comunicacion del fuego á esta y ponerse en movimiento el proyectil, y la presion que los gases de la pólvora ejercen en cualquier punto del ánima, como elemento indispensable para determinar el espesor de metales.

De no tomarse en cuenta la masa de la pólvora ó de las materias en que se trasforma por la inflamacion con respecto á las de la pieza y proyectil, como quiera que las presiones de los gases son fuerzas interiores, es muy fácil establecer una relacion entre las velocidades que por la combustion de la pólvora adquieren el proyectil y la pieza. Antes de verificarse ésta, el cañon y su carga forman un sistema para el que la suma de cantidades de movimiento proyectadas sobre el eje de la pieza es nula, y esta suma no varía por la inflamacion de la pólvora que solo desarrolla fuerzas interiores; la ecuacion correspondiente al teorema dinámico de las cantidades de movimiento proyectadas sobre un eje, será en este caso $mv - MV = 0$, siendo M y m las masas de la pieza y del proyectil y V y v sus velocidades respectivas y atendiendo á que sus movimientos se verifican en sentido contrario. De ella se deduce que son las velocidades inversamente proporcionales á las masas, lo que no es rigorosamente exacto por que el retroceso de la pieza se efectúa con una velocidad un poco mayor que la calculada, de esta manera.

El cuarto teorema general dinámico permite tambien establecer una relacion entre aquellas velocidades. Si representamos por F la resultante de las presiones de los gases de la pólvora sobre cada uno de aquellos cuerpos y designamos por r la distancia entre el proyectil y el fondo del ánima en el mismo instante, la ecuacion de fuerzas vivas dará

$$mv^2 + MV^2 = 2\int F\,dr,$$

para la integracion de la cual es necesario conocer F en funcion de r, y aunque el problema se ha resuelto de este modo, lo ha sido suponiendo que la temperatura de los gases sea constante y que toda la masa de pólvora se quema antes de empezar el movimiento del proyectil, circunstancias que no son exactas y cuya admision conduce á resultados que difieren mucho de la realidad.

Lo mismo en el caso de suponer uniforme la densidad de la masa gaseosa que de considerarla variable de capa á capa, con arreglo á determinadas leyes, el primero de los teoremas de mecánica citados suministra el médio de establecer una relacion entre aquellas velocidades. Sea m_1 la masa de los gases, la velocidad de su centro de gravedad será $\frac{1}{2}(v - V)$, media arítmética de las velocidades estremas y tendremos:

$$mv - MV + \tfrac{1}{2}m_1 \times (v - V) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{v}{V} = \frac{M + \frac{1}{2}m_1}{m + \frac{1}{2}m_1}$$

Suponiendo que exista una capa gaseosa de máxima densidad, á partir de la cual, y á uno y otro lado, con la densidad disminuya la presion, conservándose aquella inmóvil por sufrir presiones iguales y opuestas y siendo las velocidades de las demás capas proporcionales á sus distancias á la fija, éste teorema, como el de fuerzas vivas, permite establecer relaciones entre las velocidades; pero las fórmulas á que se llega, más ó ménos exactas segun las hipótesis que se establezcan, no conducen á una espresion real de los fenómenos que se verifican en el interior de las bocas de fuego, siendo por otra parte tan complicadas que no se utilizan para la práctica del tiro. La velocidad de el retroceso de la pieza, suponiendo que sea nulo el viento del proyectil puede calcularse por la fórmula de Piobert

$$\mathrm{M}\,v = m\,\mathrm{V} + \frac{\mu}{2}\,\mathrm{V} + 480\,\mu$$

en la cual M, m y μ son las masas respectivas del cañon, del proyectil y de la carga; v velocidad de retroceso de la pieza y V la velocidad inicial del proyectil (1).

33. Limitada la cuestion al terreno de la práctica, porque no es ciertamente procedimiento adecuado al progreso de la Artillería sustituir á la realidad un conjunto de hipótesis que á ella se oponen, esperimentalmente se determinan los elementos de balística interior y las velocidades iniciales que corresponden á diversas cargas de pólvora para cada proyectil, sin que á este objeto sea necesario tomar en cuenta el ángulo de proyeccion, pues si bien es cierto que por mucho tiempo ha sido admitida la idea de que un aumento en la inclinacion de la pieza lo producia en la velocidad inicial—idea fundada en que el peso del proyectil dá una componente en sentido opuesto á la accion de los gases de la pólvora cuando la pieza esté inclinada sobre la horizontal, componente que es tanto mayor cuanto lo sea ésta inclinacion, y la que, retardando el movimiento, dá lugar á una combustion mas completa de la pólvora—la esperiencia ha demostrado que ninguna influencia ejerce la inclinacion; lo que se esplica bien atendido á que la componente del peso comparada con

---

(1) Los trabajos de Bernouilli, Euler, Lagrange y Piobert mismo, pueden verse en la obra de este último intitulada: «Cours d' artillerie. Theorie et applications.»

ia enorme presion producida por los gases desarrollados es una fuerza muy pequeña para que puedan atribuírsele tales efectos.

La siguiente tabla formada de las esperiencias hechas por Navez confirma lo anteriormente espuesto.

		Inclinacion de la pieza.	Velocidad inicial media, en metros.	Número de disparos.
Calibre de la pieza.	$0^d,955$			
Longitud del ánima.	$15^d,28$	0	486,2	20
Proyectiles. Diámetro medio.	0,928	2°	485,4	20
Proyectiles. Peso medio.	$2^k,861$	4°	485,9	20
Carga.	1^k	10°	486,5	15

Aunque á primera vista pueda parecer ilimitado el número de esperimentos necesarios para esta determinacion, no lo es tanto, sin embargo, atendiendo á que, las cargas que producen máximo efecto, como más adelante tendremos ocasion de ver, esceden poco en peso al del proyectil que impulsen. Estas esperiencias pueden hacerse hoy, merced á los aparatos electro-balísticos de que se dispone, de cuya descripcion y manera de operar con ellos vamos de seguida á ocuparnos.

Antes de que los aparatos electro-balísticos aparecieran sirvió para la determinacion de las velocidades el yá citado péndulo de Robins, á más de una gran variedad de aparatos que pueden verse principalmente en los tratados especiales, ninguno de los que proporcionaba la exactitud que aquel. Disparando un proyectil contra una masa considerable en que penetre y con la que continúe moviéndose, la teoría mecánica del choque de dos cuerpos dá la velocidad del cuerpo que choca. Para facilitar su determinacion se sujeta el cuerpo que ha de ser chocado á un movimiento de oscilacion, formando así un péndulo compuesto y hallándose la relacion entre su velocidad angular y la que se busca: tal es el fundamento del péndulo balístico por tanto tiempo empleado y con el que tan notables esperiencias se han verificado. La disposicion y forma del aparato hacian sin embargo que su manejo fuera poco espedito por lo que la aplicacion de la electricidad á la medicion de tiempos, por pequeños que sean, vino á realizar un gran progreso en la investigacion que nos ocupa.

34. Los aparatos destinados á este objeto y empleados principalmente en la determinacion de la velocidad de los proyectiles, se dividen en cronóscopos y cronógrafos: reciben aquella denominacion los que miden el tiempo por graduacion, y son conocidos con la de cronógrafos los que dán la medida del tiempo gráficamente.

Wheatstone fué el primero que, en 1840 hizo aplicacion de la electricidad á esta medida, y desde entonces, muchos han sido los aparatos propuestos, sin que realmente hayan merecido los honores de la práctica, entre nosotros al ménos (1) sinó los de Navez, Leurs, Boulangé y Zapata, por lo que solo nos ocuparemos de estos, y de el presentado por Bashforht, profesor de Woolwich, en 1864. Destinado á dar indicaciones mas completas que el cronóscopo Navez, entonces empleado, es susceptible de marcar mas de dos instantes sucesivos del paso de un proyectil á través de marco-blancos: lo que le permitió verificar en 1868 esperiencias encaminadas á determinar la ley de la resistencia del aire; esperiencias que han sido tomadas en consideracion por el General Mayevski y de que hemos hecho mérito en el lugar correspondiente. Todos los aparatos de este género sin embargo, muy diferentes en sus combinaciones y detalles tienen en general como dice Navez inconvenientes que son consecuencia de su composicion. Así, los en que entran electro-imanes dán indicaciones variables con la intensidad de las corrientes; en los que hay movimientos de reloj por ruedas dentadas y escape de áncora las indicaciones son de exactitud muy limitada, por no poderse detener el áncora, sino entre dos dientes; los de cilindro rotativo exigen el empleo contínuo de un

(1) Existen otros muchos de que no nos hacemos cargo por no emplearse entre nosotros: el de Bashforth se cita por la aplicacion que se dice en el texto haber recibido, mereciendo de la Comision oficial nombrada para informar sobre él, y en la que se encontraba Noble, inventor tambien del cronógrafo que lleva su nombre, el informe mas satisfactorio, considerado como fué superior al de Schulz en precision y seguridad, por mas que éste, aunque abandonado en Europa, siga usándose en América por los oficiales de artillería de los Estados Unidos, que emplean los de Le Boulangé y Beuton para los trabajos de menos precision y mas rápidos.

cronómetro destinado á comprobar la velocidad de rotacion; en los que existen péndulos, como en el principio de la oscilacion, la velocidad no es suficientemente grande y la mas pequeña inexactitud en la medida de los arcos la produce grande en la de los tiempos, no es posible medir estos si son muy pequeños; los que marcan la interrupcion de la corriente por el salto de la chispa eléctrica tienen el inconveniente de la influencia atmosférica y el de la irregularidad en el salto y número de chispas: cada aparato, por otra parte, esté ó nó incluido en la anterior clasificacion, participará de alguno de los inconvenientes señalados á mas del que le sea peculiar. Al ocuparnos de los aparatos enunciados se notará como han tratado de obviar estos inconvenientes sus autores y cuales son los que su uso ofrece todavía.

35. Navez en 1848 inventó el péndulo electro-balístico que lleva su nombre, construyendo diversos modelos á consecuencia de las modificaciones que sus estudios y esperiencias le aconsejaban hasta que en 1855 presentó oficialmente el aparato cuyo empleo ha sido desde estonces tan general. El principio que ha servido de fundamento á su construccion es la suspension de un péndulo que empieza su movimiento al romperse un circuito por el paso de un proyectil á través de un marco blanco; á este péndulo acompaña un nónius, cuyo movimiento se detiene en el instante de romper el proyectil un segundo circuito de que forma parte otro marco blanco: de este modo se marca un arco que mide el tiempo empleado por el proyectil en recorrer el trayecto que separa ambos marcos, por lo que, como se conoce este trayecto y se supone que el movimiento del proyectil es en él uniforme, puede determinarse la velocidad: la suspension del péndulo y la detencion del nónius se obtienen por la aplicacion del principio físico de imantarse y desimantarse el eje ó núcleo de hierro dulce de toda bobina al paso de una corriente y á la interrupcion de esta.

36. De tres partes consta el péndulo electro-balístico: péndulo propiamente dicho, conjuntor y disyuntor.

Sobre una meseta, que se tiene horizontal por medio de tres tornillos, vá colocado un limbo de laton, cuya graduacion en cinta de plata se estiende de 0° á 150°; por construccion este y aquella son perpendiculares. Un electro-iman recto E (fig.ˢ 4.ª, 5.ª y 6.ª) atraviesa el limbo por su costado derecho y este presenta en el centro una abertura circular por la que pasan los estremos de un gran electro-iman en herradura H, cuyos polos están separados por dos piezas de laton: un tope *t* detiene la varilla del nónius cuando su cero coincide con el del limbo. Suspéndese un péndulo, de laton su lenteja y su varilla de acero, del centro del limbo, llevando la lenteja una pequeña pieza de hierro dulce *h* para conseguir la atraccion del péndulo por el electro-iman. Dos puentes P, P unidos al limbo dan paso á los dos tornillos, que terminados en punta cónica sirven para suspender el eje del péndulo. Está este eje (fig. 7.ª) formado por un cilindro de bronce con sus estremos de acero, en los que tiene abiertas dos oquedades cónicas, que sirven de alojamientos á las puntas de los tornillos *t' t'*: invariablemente unido á él se halla la varilla de la lenteja. El nónius vá unido á una redondela *r* y ésta á su vez, á un suncho *s*, en que entra á rozamiento suave el eje de suspension: un resorte bifurcado y sujeto á aquel liga á este con el nónius, resorte que es solo capaz de la presion necesaria para mantener en contacto el estremo *c* del suncho con el refuerzo *r'* del eje; de este modo, mientras una fuerza superior no lo impida, lenteja y nónius oscilan á la par; pero, cuando el electro-iman en herradura se halla en actividad, la redondela del nónius es atraida y se adhiere al limbo, continuando, sin embargo, la lenteja su movimiento de oscilacion: esta disposicion está motivada por que el electro-iman en herradura ha de ser activado en el momento de la rotura del segundo marco-blanco y necesitaria mucha energia para detener á la lenteja en el acto á causa de la fuerza viva que adquiere. Cuatro prensas de tornillo *p, p, p, p,* sirven para establecer la comunicacion con las pilas. Conviene cubrir el aparato con una caja de cristal, que dejando fuera las prensas y pudiendo abrirse á corredera su cara anterior permita la manipulacion al mismo tiempo que lo resguarde.

37. El conjuntor (fig.ª 8.ª y 9.ª) se compone de otra meseta en que apoyan dos montantes destinados á sostener un electro-iman recto E que puede correr á lo largo de ellos: el eje del electro-iman terminado en un cono, suspende, cuando está en actividad, un peso de plomo cuyo estremo es de hierro dulce: las prensas *p, p,* establecen la comunicacion con la pila. En la meseta y debajo del centro del electro-iman hay fija una cápsula de hierro dulce destinada á contener mercurio:

un cilindro de laton y de mayor altura que la cápsula sirve para envolverla: una lámina de cobre sobrepuesta á la meseta termina por una parte en la prensa de tornillo P y por la otra en el fondo de la cápsula. Un tornillo T con su cabeza graduada penetra en la cápsula y tiene por objeto hacer subir ó bajar el nivel del mercurio: el índice *i*, sujeto á la meseta, permite conocer el número de vueltas que se dán al tornillo. De la prensa *p'* parte una varilla terminada en punta, la que introduciéndose por una abertura practicada en la envuelta de laton, queda colocada sobre el mercurio, pero sin tocarle; hasta tanto que cayendo la pesa la obliga á introducirse en él.

38. Constituyen el disyuntor (fig.ˢ 10 y 11) dos muelles rectos *m* y *m* uno de sus estremos reforzado y el otro unido á una prensa de tornillo *p*; en la parte reforzada presentan un tornillo cuyo pie es de platino: dos piezas *z*, *z*, que sirven de prensas dan paso á los tornillos *t*, *t* con cabeza taladrada y colocados de manera que sus pies, tambien de platino, queden en frente de los anteriores: un cilindro de laton cubre un resorte de alambre de acero, que comprime un vástago, que por su parte anterior termina en la pieza *f* de marfil y por la otra en un mango de laton: un disparador con su boton está fijo por debajo del vástago y en direccion perpendicular á él, y tiene un diente que encaja en un rebajo del vástago, evitando que se dispare, cuando se comprime el resorte para poner el disyuntor en el disparador. Si el disyuntor está preparado, la pieza de marfil del vástago no toca á los muelles rectos *m*, *m*, por lo que los cuatro tornillos están dos á dos en contacto; mas si se dispara el vástago separa los muelles, cesando el contacto de los tornillos.

39. Descrito sumariamente el aparato, fácil será establecer los circuitos. Debiendo el electro-iman recto estar en actividad y necesitándose que esta cese en el momento de pasar el proyectil por el primer marco, claro es que debe ir desde la pila al marco, de este al electro-iman recto, pasando además por el disyuntor al objeto que muy luego veremos: por esta disposicion en el momento en que el proyectil rompe alguno de los alambres del primer marco el péndulo se pondrá en movimiento.

Un segundo circuito se establece desde una nueva pila al segundo marco; de aquí á las prensas de los montantes del conjuntor y pasando tambien por el disyuntor vá á terminar en la pila: la rotura de este circuito causada por el paso del proyectil á través del segundo marco permite la caida de la pesa; en este instante debe ser atraida la redondela del nónius por el electro-iman en herradura, lo que se conseguirá, estableciendo un tercer circuito, que partiendo de una pila vaya á una de las prensas en comunicacion con la cápsula de mercurio, que por el contacto de la punta metálica con éste dé paso á la corriente; esta se dirige á la otra prensa y de aquí al electro-iman en herradura, volviendo á la pila: la (fig. 12) marca claramente los circuitos citados. Como vemos debe producirse la imantacion del electro-iman en herradura precisamente cuando hay una rotura de circuito, lo que prueba la necesidad del conjuntor para cerrar el tercer circuito roto que haya sido el segundo.

40. Siendo preciso el trascurso de un tiempo, por pequeño que sea para la desimantacion é imantacion de los electro-imanes y para la caida de la pesa, ni el péndulo se pone en movimiento en el instante mismo de la rotura del primer marco, ni la redondela del nónius es atraida por la rotura del segundo; por tanto, el arco marcado por éste no mide el tiempo exacto empleado por el proyectil en recorrer el trayecto que separa ambos marcos. Si llamamos t, t', t'' y t''' los tiempos necesarios para la desimantacion del electro-iman recto del péndulo, para que lo mismo se verifique en el del conjuntor, para la caida de la pesa y para la imantacion del electro-iman en herradura; si además llamamos T el tiempo en que el proyectil salva la distancia de los marcos, es evidente que el arco marcado por el nónius debe corresponder á la suma de tiempos $t+t'+t''+t'''+\mathrm{T}$; pero siendo imposible calcular separadamente los cuatro primeros es por lo que Navez emplea el disyuntor que le permite operar *por diferencia,* cuya idea es el carácter distintivo de su invento y como dice Vignotti la mas ingeniosa para evitar dificultad de tanta monta. En efecto, segun hemos visto, los dos primeros circuitos pasan por el disyuntor; este aparato, al dispararle, desune en el instante los tornillos por donde pasan las corrientes, quedando estas interrumpidas simultáneamente: ahora bien, el nónius arrastrado por el péndulo se pone en movimiento por la rotura del primer circuito, al mismo tiempo que él; y como roto el segundo, el nónius se detiene, y este se rompe al par que e primero por la accion del disyuntor, aquel debe marcar un arco 0 porque su tendencia al movimiento queda destruida por la detencion

simultánea que esperimenta; mas no es así, puesto que habiendo de existir un cierto tiempo para las desimantaciones, imantacion y caida de la pesa, hechos necesarios para el movimiento y detencion del nónius, es indudable que este marcará un arco α' que corresponderá precisamente á la suma de tiempos $t+t'+t''+t'''$: si pues préviamente se ejecuta una disyuncion, y todo lo más rápidamente posible, á fin de que las circunstancias atmosféricas y cuanto se relacione con la intensidad de las corrientes y su manera de actuar no puedan variar de un modo sensible, hacemos un disparo, el arco α marcado por el nónius en este caso, correspondiente como se ha dicho á el tiempo $t+t'+t''+t'''+T$, disminuido de el α', nos dará uno A, que medirá el tiempo T: tal es el modo de operar *por diferencia.*

41. Para esperimentar con este aparato es necesario instalarle con ciertas precauciones; así, débese primeramente arreglar el péndulo, conjuntor y disyuntor y del mismo modo disponer convenientemente las pilas, los marcos y las comunicaciones entre las pilas, las prensas del aparato y los marcos, y por último, regularizar las corrientes y ensayar el instrumento: es de advertir tambien que su uso, como el de cualquier otro aparato de este género exige, que no se le coloque en la proximidad de carreteras ni de la pieza con que se esperimenta para evitar el efecto de las vibraciones; que su emplazamiento esté al abrigo de la intemperie; que la mesa en que se halle sea muy resistente y ni se apoye en la pared de la caseta ni descanse sobre su suelo, sino directamente sobre el terreno; que las pilas se hallen fuera del local para que no sean los metales atacados por los ácidos; que dentro de él no haya más que las personas necesarias para la manipulacion; que si el disyuntor, por su especial mecanismo, dá una fuerte sacudida al ser disparado, esté sobre otra mesa que el péndulo; procurando, por último, evitar cuantas causas puedan influir de un modo perjudicial en la marcha regular de las operaciones atendida la sensibilidad que deben tener estos aparatos.

42. En el que nos ocupa, al estar la lenteja del péndulo en contacto con el electro-iman recto, deben coincidir los ceros del nónius y del limbo y al caer aquella en union con el nónius y cesar en su oscilacion, el cero del nónius debe coincidir tambien con el grado 75 del limbo: fácilmente se consigue esto, valiéndose de los tres tornillos de la meseta y del movimiento rectilíneo que puede darse al electro-

iman recto. Seguidamente debe colocarse la redondela del nónius de modo que diste un espacio muy pequeño del limbo, para lo que nos serviremos de los dos tornillos de quienes está suspendido el aparato oscilatorio, que permiten un movimiento del eje de suspension en sentido perpendicular al limbo: por medio del resorte bifurcado se consigue la adherencia entre el eje y el suncho del nónius, pero cuidando que sea lo mas suave posible, á fin de que fácilmente sea en tiempo oportuno atraida por el electro-iman en herradura la redondela del nónius al limbo.

En cuanto al conjuntor se hace que sus montantes queden verticales y se echa mercurio en la cápsula, que conviene mudar cada dia de esperiencias porque la oxidacion de la capa superior dificulta el paso de la corriente: déjase así el conjuntor hasta que las comunicaciones y pilas queden arregladas.

El disyuntor, cuando no esté disparado, debe quedar de modo que los tornillos de los muelles y las prensas estén separados un pequeño intérvalo, y se consigue, introduciendo un pliego de papel entre aquellos, y dando vuelta á sus cabezas se hace que lo muerdan ligeramente sus estremos de platino; si despues se vuelven en sentido contrario, lo preciso solo para permitir la salida del papel, se ha obtenido que la distancia sea poco mas que el pequeño espesor de aquél.

Por lo que toca á las pilas, se emplean las de Bunsen con elementos de tamaño medio, variando el número de éstos con la distancia á que esté la pieza y diámetro de los conductores: la preparacion de las pilas exige los cuidados que su estudio recomienda, y en cuanto á los marcos no nos detendremos en su construccion porque al describir los recomendados por Le Boulangé lo haremos detalladamente por considerarlos de un uso muy cómodo y ser aplicables á este aparato: solo diremos que en principio están constituidos, segun indica la (figura 13) por un marco de madera en dos de cuyos largueros vá colocado un hilo de alambre, como la misma figura indica, de $0^m,0003$ si es para operar con cañones y mitad si con armas de fuego portátiles.

La fórmula de la velocidad $v = \frac{e}{t}$ permite dar una separacion conveniente á los marcos para el mejor resultado de la esperiencia. En efecto, dadas la pieza y carga con que se tire, ó se conoce de antemano la velocidad que otras veces ha dado, ó la comparacion con otra pieza análoga, en iguales circunstancias, dá una indicacion suficiente de la velocidad que ha de resultar: convendrá pues dar á *e* valores, que variando segun las velocidades presumibles hagan que *t* resulte dentro de límites á propósito para su medicion por el péndulo; la siguiente tabla facilita esta operacion.

Velocidades probables. — *Metros.*	Distancia entre los marcos. — *Metros.*	Tiempos probables. — *Segundos.*	Velocidades probables. — *Metros.*	Distancia entre los marcos. — *Metros.*	Tiempos probables. — *Segundos.*
600	50	0″,083	200	30	0,150
500	45	0,090	100	20	0,200
400	40	0,100	50	10	0,200
300	35	0,117	30	7	0,233

Las comunicaciones se establecen por medio de alambres de cobre recocido, recubiertos para todas las comunicaciones, que desde las pilas ván á los aparatos; los que están colocados fuera de la caseta no necesitan esta precaucion: los primeros convienen de $0^m,001$ y de $0^m,0015$ los segundos: la manera de disponer estas comunicaciones se detallarán tambien al tratar de ellas mas adelante. Establecidas que sean, hay que regularizar las corrientes concluyendo además el arreglo del conjuntor. Para ello, por medio del tornillo que penetra en la cápsula del mercurio, se hace que el nivel de éste suba hasta tanto que toque á la punta metálica, lo que inmediatamente se conocerá por un ligero ruido producido por el contacto de la redondela del nónius con el limbo. Seguidamente, viendo la graduacion que marca el índice en la cabeza graduada del tornillo, se dán dos vueltas justas en sentido contrario, por lo que bajará el nivel del mercurio y el tercer circuito quedará roto, consiguiendo de este modo que la separacion entre la punta metálica y el mercurio sea constante en todas las esperiencias. Es tambien conveniente, aunque no indispensable, arreglar la altura de caida de la pesa del conjuntor, de manera que el arco $\alpha-\alpha'$ correspondiente al paso del proyectil por entre ambos marcos, lo marque el nónius precisamente á derecha é izquierda del punto 75°; que es donde el péndulo tiene mayor velocidad. La fórmula $t = \frac{e}{v}$ nos permite este arreglo. Siendo conocido el espacio e así como la velocidad probable v, conoceremos igualmente el tiempo presumible t: en la tabla de tiempos de que en seguida nos vamos á ocupar, se obtiene el tiempo t', empleado por el péndulo en recorrer el arco 0°—75°; si á este tiempo le disminuimos en la mitad del probable t, y si en la misma tabla vemos el arco correspondiente al tiempo $t' - \frac{t}{2}$, claro es que este arco deberá ser el marcado por la disyuncion. En efecto, para que el tiempo probable se mida en un arco cuyo centro esté en 75, sea por ejemplo el $a\,b$, (fig. 14) claro es que al operar con la pieza el nónius debe marcar el arco $o\,b$ y como de este total tan solo el $a\,b$ ha de se recorrido por el nónius, es evidente que el arco $o\,a$ para que se consiga el fin deseado, debe ser el marcado por la disyuncion y esto corresponde precisamente al tiempo del arco 0°—75 menos la mitad de probable $a\,b$. Determinado de este modo el arco de la disyuncion, la operacion queda reducida á subir ó bajar la pesa hasta tanto que se consiga que al verificarse la disyuncion se detenga en nónius en dicho punto a.

La intensidad de las corrientes debe ser regularizada; la que vá al electro-iman recto no debe ser escesiva pues que entonces habria magnetismo remanente, pero debe tener la intensidad suficiente para sostener el péndulo: en operaciones delicadas sirve de norma el que dejando caer un lápiz desde algunos decímetros de altura baste la vibracion producida para que el péndulo se desprenda. Para conseguir esta regularizacion si son tres las pilas establecidas basta disminuir algun elemento en la correspondiente á este circuito, pero si son dos, se disminuirá la intensidad, cambiando el sitio de union del alambre conductor, pudiendo en todo caso emplear un reóstato. La corriente del electro-iman del conjuntor debe cumplir con iguales condiciones y se arregla del mismo modo. El tercer circuito, por último, debe ser mas enérgico, para que la redondela del nónius sea prontame atraida: este es el momento oportuno de determinar el arreglo del conjuntor, de la manera que se ha espresado.

Queda tan solo antes de verificar las esperiencias ensayar el aparato, lo que se hará midiendo un tiempo conocido, pues repitiendo la operacion en idénticas circunstancias las indicaciones del nónius, por las diferencias que marque, manifestarán el grado de precision: el tiempo que se elige es el cero y la cuestion se reduce á que despues de haberse asegurado de que todas las partes del aparato funcionan, de verificar la suspension por los electro-imanes, cumpliendo cuantas prescripciones se han sentado, se hagan diez ó doce disyunciones en cuyos arcos podemos ver la diferencia: si ésta, para dos sucesivas, no es mayor que 0°,25 puede desde luego decirse que el aparato se encuentra en disposicion de ser empleado en esperiencias balísticas.

Un esceso de tension en el resorte bifurcado, rozamientos de la redondela y del nónius contra el limbo; falta de energia en el tercer circuito; esceso en los dos primeros; pequeñas vibraciones en el suelo del local; falta de limpieza en la superficie del mercurio; oxidacion de la punta del resorte de acero y poca ó mucha distancia entre punta y superficie; contacto entre la cápsula y el resorte del conjuntor; y por último, la existencia tan solo de polvo en los estremos de platino de los tornillos del disyuntor, son otras tantas causas que influyen en la irregularidad de la marcha del aparato, por lo que en ellas será preciso fijarse cuando las disyunciones de los ensayos no cumplan con las condiciones ya dichas.

43. Para tener los tiempos correspondientes á los arcos descritos por el péndulo electro-balístico puede recurrirse á la ecuacion diferencial del movimiento del péndulo compuesto

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{ga\,\text{sen.}\,\theta}{k^2+a^2};$$

multiplicando ambos miembros por $2d\theta$, integrando y determinando la constante por la condicion de que para

$$\theta=\theta' \text{ es } \frac{d\theta}{dt}=u \quad \text{se tiene:}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{2ga}{k^2+a^2}(\cos.\theta-\cos.\theta')+u^2, \quad \text{de donde}$$

$$t=\int_{\theta'}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{u^2-\frac{2ga}{k^2+a^2}(\cos.\theta-\cos.\theta')}}.$$

Si se puede efectuar esta integracion, se obtiene t en funcion de θ. Si el desvio inicial θ' es muy pequeño, tambien θ lo será y entonces se halla una espresion finita del tiempo; mas sino fuese pequeño, solo es posible evaluar t por un desarrollo en série.

El cero del péndulo de Navez se halla á 75° de la vertical y en este caso $\theta'=75°$ y $u=0$: suponiendo que la disyuncion marque 44° y 71° el disparo, los límites de la integral serian para el primer arco

$$\theta'=75° \text{ y } \theta=75°-44°=31°, \text{ y } \theta'=75° \text{ y } \theta=75°-71°=4°$$

para el segundo. Cuando la amplitud de las oscilaciones es muy pequeña y la velocidad inicial u es cero, la fórmula que dá el tiempo de la oscilacion en el péndulo simple es

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

44. Pero en vez de efectuar las integraciones puede resolverse el problema de la manera siguiente. Sean θ' y θ los ángulos que forma el péndulo con la vertical en su posicion inicial y en otra cualquiera; V la velocidad correspondiente al ángulo θ y l la longitud; el teorema de fuerzas vivas dá

$$mv^2=2gml(\cos.\theta-\cos.\theta')$$

de donde

$$v=\sqrt{2gl(\cos.\theta-\cos.\theta')}$$

Por esta fórmula se pueden calcular los valores de v para diversos valores de θ, que varien de grado en grado; el movimiento del péndulo puede considerarse como uniforme al recorrer cada grado, suponiendo que lo recorre con una velocidad media; conocida que sea la longitud del péndulo, se conoce la magnitud de estos arcos; sea s, por ejemplo, la del arco de un grado, t la duracion empleada en este trayecto, v' y v'' las velocidades en sus estremos; por la suposicion hecha tendremos

$$t=\frac{2\ s}{v'+v''},$$

y claro es que sumando tiempos sucesivos, obtendremos los que tarde el péndulo desde su posicion inicial hasta otra cualquiera. La siguiente tabla dá la relacion del arco recorrido y los tiempos correspondientes para un péndulo compuesto en que la duracion de la oscilacion pequeña es $T=0'',3342$; pero variando este tiempo con los péndulos empleados, la duracion T' para otro se tendrá sin necesidad de nueva tabla, multiplicando los tiempos totales y parciales de la dada por la relacion $\frac{T'}{T}$.

Relacion entre los arcos recorridos y los tiempos correspondientes

$t = 0'',3342$

Arcos.	TIEMPOS		Arcos.	TIEMPOS		Arcos.	TIEMPOS	
	Totales.	Parciales		Totales.	Parciales		Totales.	Parciales
0								
		0",020186			0",002101			0",001627
1	0",020186		26	0",104488		51	0",149546	
		8386			2066			1618
2	28512		27	106554		52	151164	
		6447			2034			1610
3	35019		28	108588		53	152774	
		5442			2003			1602
4	40461		29	110591		54	154376	
		4793			1975			1595
5	45254		30	112566		55	155971	
		4343			1948			1588
6	49597		31	114514		56	157559	
		4001			1922			1581
7	53598		32	116436		57	159140	
		3730			1898			1575
8	57328		33	118334		58	160715	
		3510			1875			1569
9	60838		34	120209		59	162284	
		3325			1854			1564
10	64163		35	122065		60	163848	
		3168			1833			1559
11	67331		36	123896		61	165407	
		3033			1814			1554
12	70364		37	125710		62	166961	
		2914			1796			1550
13	73278		38	127506		63	168511	
		2810			1778			1546
14	76088		39	129284		64	170057	
		2716			1762			1543
15	78804		40	131046		65	171600	
		2633			1746			1539
16	81437		41	132792		66	173139	
		2557			1731			1536
17	83994		42	134523		67	174673	
		2488			1717			1534
18	86482		43	136240		68	176209	
		2425			1704			1532
19	88907		44	137944		69	177741	
		2367			1691			1530
20	91274		45	139635		70	179271	
		2314			1679			1528
21	93588		46	141314		71	180799	
		2265			1667			1527
22	95853		47	142981		72	182326	
		2219			1656			1526
23	98072		48	144637		73	183852	
		2177			1646			1525
24	100249		49	146268		74	185377	
		2138			1636			1525
25	102387		50	147919		75	186902	

Arcos.	TIEMPOS Totales.	TIEMPOS Parciales	Arcos	TIEMPOS Totales.	TIEMPOS Parciales	Arcos.	TIEMPOS Totales.	TIEMPOS Parciales
		0",001525			0",001636			0",002138
76	0",188427	1525	101	0",227521	1646	126	0",273555	2177
77	189952	1526	102	229167	1656	127	275732	2219
78	191478	1527	103	230823	1667	128	277951	2265
79	193005	1528	104	232490	1679	129	280216	2314
80	194533	1530	105	234169	1694	130	282530	2367
81	196063	1532	106	235860	1704	131	284897	2425
82	197595	1534	107	237564	1717	132	287322	2488
83	199129	1536	108	239281	1731	133	289810	2557
84	200665	1539	109	241012	1746	134	292367	2633
85	202204	1543	110	242758	1762	135	295000	2716
86	203747	1546	111	244520	1778	136	297716	2810
87	205293	1550	112	246298	1796	137	300526	2914
88	206843	1554	113	248094	1814	138	303440	3033
89	208397	1559	114	249908	1833	139	306473	3168
90	209956	1564	115	251741	1854	140	309641	3325
91	211520	1569	116	253595	1875	141	312966	3510
92	213089	1575	117	255470	1898	142	316476	3730
93	214664	1581	118	257368	1922	143	320206	4001
94	216245	1588	119	259290	1948	144	324207	4343
95	217834	1595	120	261238	1975	145	328550	4793
96	219428	1602	121	263213	2003	146	333343	5442
97	221030	1610	122	265216	2034	147	338785	6447
98	222640	1618	123	267250	2066	148	345232	8386
99	224258	1627	124	269316	2101	149	353618	20186
100	225885		125	271417		150	373804	

45. La fórmula que ha servido para la determinacion de esta tabla depende directamente de l, quien á su vez es funcion del tiempo de la oscilacion pequeña; y tanto por esto, como para saber si la tabla precedente sirve para el aparato con que se opere, será necesario determinar dicho tiempo de una oscilacion pequeña.

De dos maneras puede conseguirse esto: ó bien determinando prácticamente el tiempo de una oscilacion pequeña, ó bien deduciendo este de el de otra de mayor amplitud. Para lo primero, se coloca el péndulo en un soporte, ó mejor en el mismo aparato, de manera que la lenteja y el nónius estén una con respecto á otro en la misma situacion que tiene cuando aquella toca al electro-iman y éste al tope, coincidiendo los ceros del nónius y limbo: se hace enseguida oscilar el péndulo, observando el tiempo con un contador Breguet. En el momento que el péndulo termina la primera oscilacion se cuenta cero para el número de estas y se marca un punto en el contador; al terminar la segunda, se cuenta una, y así se continúa hasta que el péndulo esté próximo á pararse; entonces se hace otra señal en el contador: el número de oscilaciones hechas es el doble de las contadas y dividiendo el tiempo, que el contador marque, por este número, se tiene la duracion de una. Es conveniente que el número de oscilaciones sea muy grande, dos ó tres mil; y tomando el término medio de la duracion obtenida para cada grupo de oscilaciones, se conoce la que se busca.

46. Atendiendo á la pequeñez del péndulo, es preferible el segundo procedimiento, bajo el punto de vista de la exactitud, mas no de la facilidad, para lo que nos valdremos de la conocida fórmula

$$T' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\text{sen. ver } \theta'}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{\text{sen. ver } \theta'}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{\text{sen. ver } \theta'}{2}\right)^3 + \ldots \right.$$

Comparando esta ecuacion con la fórmula del péndulo simple, se obtiene la relacion $\frac{T'}{T}$, para diversas amplitudes: así se halla

para	10°	$T' = 1{,}00048\ T$
	20°	$T' = 1{,}00190\ T$
	30°	$T' = 1{,}00426\ T.$

Supongamos que en la esperiencia, despues de haber hecho partir el péndulo con gran amplitud, se han contado n oscilaciones de 10°, n' de 20° y n'' de 30°, porque se hayan dividido las oscilaciones en tres grupos y considerando estas constantes en cada uno de ellos, y si es t el tiempo empleado, es evidente que tendremos

$$t = T\left\{n \times 1,00048 + n' \times 1,00190 + n'' \times 1,00426\right\},$$

de donde obtendremos el valor de T que sustituido en la fórmula

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ nos dará el de } l.$$

47. Claro es que habiendo prescindido de toda clase de resistencias, las que varian segun los arcos, los tiempos que acusen las tablas no son los verdaderos, de lo que resulta que en el cronóscopo Navez se acortará el ángulo de la oscilacion y no tomando en cuenta esta disminucion, la velocidad que se determine será algo grande, si bien lo que difiere de la exacta es despreciable para las necesidades de la práctica. Nos hemos detenido en la descripcion y uso de este aparato porque realmente él señaló un gran progreso en la esperimentacion balística y aunque hoy sean otros, de que hemos de ocuparnos, mas usados, la aplicacion práctica de los principios en que se fundan es en verdad debida á Navez; terminaremos pues lo que á su aparato se refiere, haciendo notar, que al tomar el péndulo como parte cronométrica, evita el inconveniente de emplear movimientos de reloj y cilindro rotativo, corrigiendo el atribuido á los péndulos, porque la disposicion adoptada permite medir el tiempo por arcos comprendidos en la parte de la oscilacion en que la velocidad es mayor. La necesidad que hay para operar bien de que todos los detalles estén en las mismas condiciones, hace que á pesar de la sencillez aparente del instrumento se necesiten cierta habilidad y mucha práctica para obtener resultados cuya precision pueda satisfacer: esto dió lugar á que se propusieran algunas modificaciones, que dieron por resultado, suprimiendo el conjuntor, el nuevo cronóscopo Navez-Leurs, por ser este último quien con anuencia de aquél presentó el que á continuacion y muy ligeramente vamos á describir.

48. Consta solo de péndulo y disyuntor, como queda dicho, con-

sistiendo aquel en una meseta de fundicion (fig. 15) que sostiene un pié de gutapercha, el cual lleva una placa en forma de segmento circular y en cuyo borde *b* de laton tiene una graduacion en cinta de plata de 0° á 180, correspondiendo el grado nonagésimo á la vertical: dos electro-imanes E, E, fijos en los costados del limbo tienen por objeto suspender los dos péndulos P, P', llamándose cronométrico al primero y registrador al segundo; los movimientos de ambos son independientes: para realizar esta independencia el vástago del cronómetro vá fijo á un cilindro hueco de bronce, montado sobre un eje de acero terminado en puntas *p*, *p*, que descansan en dos pequeños alojamientos, que tienen para recibirlas los tornillos *t*, *t*, formándose de este modo la suspension del sistema oscilatorio. Un suncho de laton; terminado en una redondela *r*, envuelve á rozamiento suave el eje, esta redondela lleva el nónius, el que lo mismo que en Navez debe moverse á la par que el péndulo, mientras una fuerza superior no lo detenga. Para aumentar la adherencia de suncho y eje tiene aquel tres cortes: uno en direccion de una arista y los otros dos perpendiculares á ellas: claro es que la pequeña plancha que resulta de tales cortes puede ser más ó ménos oprimida contra el eje. El tornillo *t*, sobre quien descansaba el péndulo cronométrico tiene una parte cilíndrica que á su vez es envuelta por otro suncho *s*, al cual está fijo el péndulo registrador: del vástago de este péndulo sale el arco A, que tiene un tope movible T.

Fijos al limbo están los muelles *m*, *m*, que como indica la figura, tienen hácia su centro los dos salientes *h*, *h*,: estos muelles permanecen abiertos cuando en su estremo penetra una pequeña cuña; esta se encuentra fija en el estremo de una palanca angular *p'*, *p'*, la que puede girar alrededor del eje *o*: en el mismo eje gira una pieza (fig. 16) que termina por un estremo de un tope *l*; por último, el eje vá fijo á la placa del limbo.

49. El disyuntor se compone de una meseta (fig. 17) de cauchout, en ella están fijas dos piezas metálicas *p*, *p*, que tienen en sus estremos interiores dos puntas *p'*, *p'*, de igual altura; los otros estremos son dos prensas de tornillo. Sobre la misma meseta apoya un muelle que tiene en su estremo una prensa tambien de tornillo: la escéntrica *e* obliga al muelle á estar en contacto con las puntas; pero, al hacer girar esta escéntrica, el contacto cesa. Fácil es hacerse cargo de la

manera de funcionar este aparato. Estableciendo un circuito (fig. 18) que desde una pila vaya á un primer marco, de éste al electro-iman recto del péndulo cronométrico y de aquí á una de las prensas del disyuntor, y uniendo el polo positivo de la pila con la prensa del muelle que aquel lleva, quedará cerrado el circuito, cuando se verifique el contacto del muelle con las puntas; circuito que será roto, bien por la accion del disyuntor, bien por el paso del proyectil á través del primer marco. Un segundo circuito comprenderá la segunda pila, el otro marco el electro-iman del péndulo registrador, la prensa 6′ del disyuntor, uniéndose lo mismo que antes el polo positivo, con la prensa restante del muelle. Segun esto, si se hace la disyuncion, se romperá el primer circuito, empezará la oscilacion del péndulo cronométrico y con él el nónius; al mismo tiempo se romperá el segundo circuito, caerá el péndulo registrador, el tope del arco graduado chocará con el estremo *l* de la pieza montada sobre el eje de la palanca angular, por lo que elevándose el otro estremo hará que la palanca gire y la uña, que con anticipacion se ha colocado entre los estremos de los muelles *m*, *m*, para que permanezcan abiertos, sale dejando á aquellos en libertad de cerrarse, en cuyo caso los salientes *h*, *h*, fijan la redondela del nónius, quien habrá marcado un arco, que corresponderá á los tiempos que tardan en desimantarse los dos electro-imanes, en la caida del tope del arco graduado, en salir la cuña y en cerrarse los muelles.

Si vueltos á cerrar los circuitos se verifica el disparo, al paso del proyectil por el primer marco se romperá el primer circuito, verificándose la rotura del segundo cuando aquel pase por el otro marco: el arco marcado por el nónius habrá correspondido á los tiempos anteriormente citados más al empleado por el proyectil en recorrer el trayecto que separa á ambos marcos, siendo la diferencia entre este total y la suma de aquellos el tiempo que se busca. La tabla de tiempos puede calcularse del mismo modo que procedió Navez; Leurs, sin embargo, construyó la correspondiente á un péndulo simple de $0^{m},1$ de longitud determinando de seguida unos coeficientes por quienes es preciso multiplicar los tiempos de la tabla para que dén los de su aparato. Aunque el manejo de éste es más sencillo que el de Navez, preciso es comprender que tiene causas de error análogas á las de aquel, y si á esto se añade que su construccion es poco precisa particularmente por lo que toca á la suspension del segundo péndulo, se deduce que no es lo más á propósito para esperiencias delicadas; y esto nos evita entrar en pormenores, que pueden verse, no obstante, en—Terssen, Revista de Tecnologia militar, 4.º y 5.º—

50. Fundado realmente en los mismos principios, aunque la medicion del tiempo se haga en virtud de la conocida ley de la caida de los graves, disminuidas las causas de error y de un manejo por demás sencillo, el aparato presentado por Le Boulangé en 1867 supera á los anteriores y en su descripcion y empleo descenderemos por consiguiente á más pormenores.

El aparato se compone de una columna C (fig. 19) sujeta á una placa metálica triangular P; en la columna se atornillan dos electro-imanes E, E de eje partido, teniendo cada uno dos prensas de tornillo *p*, *p*,: sirve el primero para suspender, cuando esté imantado un tubo de laton *l* llamado cronómetro, y el segundo para sostener igualmente otro tubo mas pequeño *l'*, que recibe el nombre de registrador. Atornillada á la misma columna hay una pieza *z*, cuya longitud puede variarse á voluntad y tiene por objeto impedir el movimiento oscilatorio del registrador cuando está suspendido, inútil parece indicar que tanto éste como el cronómetro terminan por su parte superior en punta de hierro dulce. Fijo á la placa triangular vá el fiador de una cuchilla y ésta al montante como manifiesta la (fig. 20): en el muelle *m'* hay un eje que sostiene la cuchilla *ch* cuya forma es tronco-cónica; al muelle á su vez está unida la uña *u*.

En un soporte S, colocado sobre la placa hay tambien un eje O, alrededor del cual gira la palanca fiador *f*, que termina por un estremo en la uña *u'* y por el otro en el cilindro *c* en el que se atornilla el disco *d* que tiene diez incisiones. Una pequeña columna *c'* sujeta á la palanca fiador, sostiene el muelle *m'*, que es un nuevo fiador que, engranando en una de las incisiones del disco, fija su posicion. El resorte *r* obliga á que levantándose el cilindro baje la uña de la palanca fiador, que engranará entonces con la *u*: claro es que al caer el registrador sobre el disco *d* desengranarán ambas uñas y la cuchilla avanzará, volviéndose á montar ésta oprimiendo el mango *g* del muelle hácia la palanca fiador.

Un cilindro N, tambien unido á la placa triangular sirve para recibir al registrador en su caida. La caja en que se embala el aparato sirve de mesa para colocarle cuando se trata de operar con él, á cuyo objeto se atornilla en una de sus caras menores, fijando en la opuesta una cruceta de hierro con tornillos que permiten la verticalidad del aparato: la caja tiene un hueco *h* que recibe al cronómetro en su caida.

51. El disyuntor (fig. 21) consta de dos muelles *m*, *m*, sujetos por una de sus estremidades, en cada una de las que lleva una prensa de tornillo, á una meseta de madera: estos muelles apoyan las estremidades libres en las puntas de dos tornillos *t*, *t*, roscados en las piezas *p*, *p*, á las que ván unidas dos nuevas prensas 3 y 4: otro muelle *m'* fijo á la meseta tiene en su estremo una pieza aisladora *n*, *n*, sobre la que apoyan los dos citados muelles, y en el centro de esta pieza hay una uña *u*: un resorte *r*, con un rebajo *x*, sirve para que oprimiendo el boton *b* del muelle central *m*, engrane la uña que lleva en su estremo, en el rebajo *x*, en cuyo caso habrá contacto entre las puntas de los tornillos y los dos muelles rectos del disyuntor; pero al separar el resorte sale la uña del rebajo y el muelle central levantándose quita al mismo tiempo dichos contactos.

52. Dos son los circuitos necesarios para operar con el aparato; la (fig. 22) los representa. El primero 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, parte de uno de los polos de la pila, marcha al primer marco, de él viene á uno de los muelles del disyuntor, de aquí al electro-iman del cronómetro volviendo al otro polo de la pila: el segundo 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', se dispone del mismo modo que el anterior, pasando por el segundo marco, segundo muelle del disyuntor y por el electro-iman que corresponde al registrador. Segun esto, si cerrados los circuitos y suspendiendo el cronómetro á este, destornillando su cabeza, se le adapta un tubo de zinc y otro en la parte superior que apoye en el saliente de hierro dulce *s* que tiene el cronómetro (tubos llamados cartuchos receptores) y oprimiendo el disco *d* avanza la cuchilla, se marcará una incision en el cartucho inferior que se llama orígen de caida: si vuelto á suspender el cronómetro se verifica una disyuncion, cronómetro y registrador caerán á un tiempo y cuando este caiga sobre el disco la cuchilla marcará una incision en el mismo cartucho; la altura de caida del cronómetro medida de el primero al segundo trazo es evidente corresponde á un tiempo suma de los empleados en la desimantacion de los electro-imanes, en la caida del registrador, en el desengrane de la palanca fiador y en el que tarda la cuchilla desde su posicion de rete-

nida hasta quedar hecha la incision. Representando estos tiempos por $-t, t', t'', t'''$ y t^{IV}, la suma $-t+t'+t''+t'''+t^{\mathrm{IV}}=\mathrm{T}'$ nos dá este tiempo, debiendo contarse el t con el signo expresado por que la caida del cronómetro se ha retrasado á consecuencia de haberse tardado ese tiempo t en desimantarse el electro-iman que le suspende: por otra parte, si a es la distancia entre ambos trazos, ó sea la altura de caida, se verifica

$$\mathrm{T}'=\sqrt{\frac{2a}{g}},$$

por lo que fácilmente se conocerá este tiempo en todo caso.

Cerrados de nuevo los circuitos y verificado el disparo, por la rotura del primer marco caerá el cronómetro, así como el registrador por la rotura del segundo, y suelta por la accion de éste la cuchilla quedará marcada una incision que ahora caerá en el segundo cartucho receptor y la altura A de caida, distancia entre el trazo orígen y el últimamente señalado corresponderá á un tiempo suma de los anteriores, más el empleado por el proyectil en recorrer la distancia entre los dos marcos, siendo su valor

$$\mathrm{T}''=\sqrt{\frac{2\mathrm{A}}{g}};$$

y por último, $\mathrm{T}'-\mathrm{T}''=\mathrm{T}$ cuyo valor como divisor del espacio que media entre ambos marcos nos permitirá deducir de seguida la velocidad del proyectil.

La tabla que se inserta en el lugar correspondiente dá los tiempos para una altura de caida desde 0 á 520 milímetros, que es la longitud del cronómetro, creciendo de décima en décima; su disposicion es exactamente igual á la de las tablas de logaritmos de Callet.

53. Se evitan los cálculos ó el manejo de la tabla, usando la regla que lleva aneja el aparato, siempre que la distancia entre los marcos sea de cincuenta metros y que el tiempo de la disyuncion sea constante é igual á quince centésimas de segundo, lo que como pronto se verá, puede conseguirse fácilmente por la precision del aparato: esto sucede cuando la altura que marca la disyuncion es de $110^{\mathrm{mm}},37$, que es la que á tal tiempo corresponde. La (fig. 23) representa la regla; uno de sus costados tiene una graduacion de milímetro en milímetro y en el

opuesto están marcadas las velocidades correspondientes á las distintas alturas; la division *d* representa la altura de disyuncion anteriormente dicha: una corredera con un nónius, que aprecia décimas de milímetro puede marchar á lo largo de la regla. El modo de graduarla es el siguiente. Supongamos que el proyectil tenga una velocidad de 400^m por segundo, $\frac{50^m}{400} = 0'',125$, será el tiempo empleado por el proyectil en recorrer el intérvalo entre ambos marcos. Si la disyuncion ha sido de $0'',15$, claro es que el instrumento en este caso debe haber marcado por la accion del disparo una altura que corresponda al tiempo

$$0'',15 + 0'',125 = 0'',275$$

y esta altura será

$$A = g \times \frac{(0'',275)^2}{2} = 370^{mm},8:$$

es pues evidente que si el aparato marca esta altura, el proyectil tendria 400^m de velocidad; en la regla se marcará 400 en el sitio correspondiente á velocidades y enfrente de la altura dicha: de este modo y variando las velocidades de metro en metro puede graduarse la regla. Puede ocurrir que el espacio entre los marcos haya de reducirse ó bien que la velocidad que se mida sea menor que 285^m, límite de las indicaciones del cronómetro y de la regla, en cuyo caso es tambien necesario reducir la distancia entre los marcos: para que aun se pueda hacer uso de la regla será preciso multiplicar la indicacion que dé en velocidades por la relacion $\frac{e}{50}$, siendo *e* la nueva distancia; si esta fuese sin embargo, muy pequeña, como, por ejemplo, si quisiera conocerse la velocidad del proyectil á pocos metros de la boca de la pieza, el procedimiento que en breve indicaremos para medir tiempos muy cortos resolverá la cuestion.

54. Las indicaciones generales hechas al tratar del cronóscopo Navez son estensivas á este. Establécese la línea desde la barraca á los marcos ó bien con hilo de cobre de 2 á 3^{mm} de diámetro ó bien con alambre de hierro galvanizado sujetos á postes con sus aisladores correspondientes; puede asi mismo hacerse con cables aislados de

dos hilos tendidos en el suelo: los conductores que unen esta línea á los marcos y pilas deben ser de alambre de $1^{mm},5$, recubierto de gutapercha y los que van á parar á los electro-imanes serán tambien de hilo de cobre recubierto de seda, de $0^{mm},5$: se hace necesario, en efecto, que estos conductores sean muy delgados para impedir la comunicacion de las vibraciones esteriores, muy particularmente las que provienen del disyuntor, que es tambien por lo que conviene enrollarlos en hélice.

Si las piezas son á cargar por la boca el primer marco debe colocarse por lo menos á 10^{m} de distancia para calibres medios y 15^{m} ó 20^{m} para los grandes; esto con objeto de que los gases que se escapan por el viento no rompan los alambres antes de que lo verifique el proyectil; puede sin embargo, hacerse uso de una pantalla que, teniendo un orificio circular, permita solo el paso del proyectil, en cuyo caso no importa aproximar el marco cuando se quiera: en las piezas á retro-carga la cantidad de gases escapados es poca y puede suprimirse el primer marco, sustituyéndole por un alambre tendido en la boca; la (fig. 24) indica esta disposicion; pero como quiera que la obturacion por el proyectil no es completa, el diámetro de este alambre deberá ser mayor que el del empleado en los marcos: Le Boulangé indica para una pieza de 4, hilo de cobre de 1^{mm}; de 12, $2^{mm},5$; de 9 pulgadas, hilo de hierro de 8^{mm}; no aconsejando este sistema para calibres superiores: se tiene la seguridad de que la rotura se ha verificado por el proyectil cuando se hace por medio del alambre y se le observa como si se le hubiera sujetado á una laminacion: si son los gases los que producen la rotura no se encuentra sobre el alambre huella que indique el paso del proyectil y entonces la rotura se presenta segun las paredes del ánima.

Las pilas que se emplean son las de Bunsen y el número de pares para una instalacion ordinaria es de 4 ó 5 para el circuito del cronómetro, y de 1 ó 2 para el del registrador: es, sin embargo, variable este dato; desde luego la estension de los circuitos y las circunstancias que influyen en la electricidad de tension, determinan que aquellos números difieran en ocasiones de los dados.

55. Hechas estas indicaciones podemos desde luego entrar en la esplicacion del modo de proceder para la esperimentacion, por lo que, y antes de dar principio, se hace necesario instalar el aparato, que

comprende: su colocacion, y arreglo de la fuerza de los electro-imanes y de la altura de disyuncion.

El cronómetro despues de haber colocado en él los dos cartuchos receptores, el menor en la parte inferior, para lo que será preciso desatornillar su estremo, y el mayor en la parte superior, nos sirve para colocar vertical el aparato. Para ello, se suspende de su electro-iman, de modo que la cara de dicho estremo que tiene un número mire al operador y valiéndose de los tornillos del pié de la caja-soporte, se hace que se adapte el plano inclinado, que tiene la misma estremidad, muy ligeramente sobre la arista *a a* del platillo triangular, al mismo tiempo que el vértice del ángulo recto *h* esté en contacto con el del ángulo tambien recto *c* del mismo platillo: hay seguridad de que el cronómetro está bien colocado, observando si el plano inclinado ajusta bien sobre la arista de apoyo ó si ajusta demasiado, para lo que se le desvía de la vertical, hácia la izquierda, y si está bien, por sí solo debe volver á su posicion primitiva, sin violencia alguna.

Del mismo modo se arregla el registrador, haciendo que el plano inclinado de su estremo, despues de mirar tambien la cara numerada al esperimentador, se apoye muy ligeramente sobre la arista que tiene la pieza de corredera, para lo que, valiéndose del tornillo que ésta tiene, se hace que entre más ó ménos, observando si en su caida tropieza con el cilindro.

Los electro-imanes, siendo de eje partido, se sabe que aumentan su poder magnético por el contacto de los dos trozos, que constituyen el eje, y que aquel disminuye por la separacion de ambos, cuyos efectos pueden conseguirse por estar roscado uno de los trozos: debe ser lo más pequeña posible su fuerza atractiva porque de este modo se aumenta la regularidad pues que disminuye el tiempo necesario para la desimantacion; pero no debe ser tampoco tan pequeña que dificulte la suspension del cronómetro y del registrador: con objeto de proporcionar esta regularidad se hace uso de dos tubos de laton, llamados de sobre-carga, que se colocan respectivamente en el cronómetro y el registrador, con lo que se aumenta su peso: suspendidos ambos se van sacando muy lentamente los ejes de los electro-imanes hasta que debilitada su accion y no pudiendo sostenerlos caigan, y si entonces se quitan los tubos, la intensidad de los electro-imanes es la debida: conviene, antes de separar los tubos, cerciorarse nuevamente de que los electro-imanes no los sostienen, pues pudiera haber sucedido que por cualquier accidente se hubiera determinado la caida. El tornillo *q* que tiene la palanca fiador sirve para hacer que el engrane de las uñas de esta palanca y de la cuchilla sea el mas pequeño posible lo que se consigue haciendo subir ó bajar la palanca fiador por medio del espresado tornillo: siendo la cuchilla circular, cuando ésta por el uso llegue á mellarse, se la hace girar lo necesario para que presente nuevo corte.

56. Colocado é instalado el instrumento de este modo se procede al arreglo de la altura de disyuncion, la cual hemos dicho debe ser precisamente de 110^{mm}, 37: esta altura está marcada en la regla por medio de un trazo, que dice disyuncion. Se coloca la corredera de la regla de manera que su índice coincida con este trazo; seguidamente el pivote *p* de la regla se introduce en el agujero que tiene el estremo del cronómetro, haciendo que el cartucho inferior toque á la punta *p'*, de la corredera; dando una vuelta al cartucho receptor quedará en él trazado un círculo, que estará del orígen á la altura de 110^{mm},37. Verificando una disyuncion la cuchilla debe marcar su incision en este mismo círculo, si no es así, y la incision está mas alta, será preciso disminuir el curso del registrador, subiendo el disco sobre que este cae; si es mas baja, habrá tambien que bajar el disco. La disposicion que dijimos tenia este disco, permite este ascenso y descenso hasta por décimas de milímetro, cabeza como es de un tornillo cuyo paso es de un milímetro y tener 10 rebajos que señalan décimas de vuelta: es preciso, durante el curso de las operaciones cerciorarse de que la disyuncion, despues de arreglada, no ha variado.

57. En el anillo de hierro *s* del cronómetro hay marcada una arista *a*; al hacerse la esperiencia se marca con una pluma en el cartucho receptor un punto prolongacion de esta arista y en esta direccion marcará tambien una incision la cuchilla, cuya incision se señala con un 1; y haciendo girar unos dos milímetros el cartucho se señala un segundo punto y un número 2 debajo de la incision así hecha; continuando de este modo se tienen marcadas las distintas alturas de varios disparos sin que puedan confundirse sus resultados y pudiendo servir cada cartucho para cuarenta indicaciones.

La medida de la velocidad se hace colocando la regla como se ha dicho para marcar la altura de disyuncion, corriendo la corredera hasta que su punta encaje en la incision hecha en el cartucho: la division de la regla que marque el índice es la velocidad, que como hemos visto varía de metro en metro, apreciándose, á simple vista, los decímetros.

58. Reconocida la necesidad de asegurarse de la exactitud de las disyunciones convendrá ver si esta permanece inalterada cada tres disparos por ejemplo: si se observase en ellas alguna irregularidad deberá mirarse si algun electro-iman tiene demasiada fuerza ó si es grande la adherencia de los planos inclinados de los estremos del cronómetro y del registrador con las aristas correspondientes, ó bien si hay algun contacto en los circuitos mal establecido, haciendo que desaparezcan tales causas de error. Si algun circuito se interrumpe, sin causa visible, debe observarse primeramente si consiste en el disyuntor, para lo que dicho circuito se establece en el otro muelle del mismo; si entonces cierra es prueba que consistia en el contacto del otro con el tornillo respectivo; en este caso debe limpiarse dicho contacto: esta limpieza se recomienda muy especialmente en las puntas de contacto de los electro-imanes del cronómetro y del registrador, que nunca deberán tener la mas ligera oxidacion. Si el disyuntor no corta las dos corrientes á un mismo tiempo habrá un error constante: para ver si esto sucede, una vez seguros de la altura de disyuncion, se invierten las corrientes en el disyuntor y se hace una disyuncion; es evidente que si el disyuntor está bien arreglado la altura marcada nuevamente debe ser igual que la anterior; pero si no resultára así, es prueba de que una de las puntas está más ó ménos baja que la otra; la diferencia entre los dos trazos obtenidos es doble del error debido al aparato, el cual se corrige, variando la altura de las puntas, para lo que están á rosca, hasta que se llegue á hacer que se levanten á un tiempo los dos muelles por la pieza aisladora del muelle central en que se apoyan.

Si las esperiencias se hacen con armas portátiles desde luego conviene sujetar á un trípode la que se emplee: si es de bala forzada, el primer marco lo constituye un alambre delgado tendido en la boca del arma de igual manera que se ha dicho para las piezas; al segundo marco se le sustituye por una placa de hiero (fig. 25) suspendida en otro trípode: el circuito va á parar á dos tornillos aislados colocados en la estremidad del travesaño horizontal t; cuando la placa toca las puntas de estos tornillos; ella misma establece el circuito, y cuando la bala hiere la placa, ésta retrocediendo rompe el circuito al desaparecer el contacto.

59. Digimos ya que en un principio los marcos estaban formados por dos montantes verticales de madera unidos por dos cumbreras, de madera tambien, y en los que se fijaba por medio de clavijas un alambre; clavijas que distaban entre sí el intérvalo conveniente para que el proyectil no pudiera pasar sin romper aquel; pero como la disposicion de los marcos influye poderosamente en el resultado de las esperiencias, bien pronto se echaron de ver los inconvenientes que tenia ésta primitiva, pues formado el marco por un solo hilo que iba de una clavija á otra del lado opuesto, de ésta á la siguiente del mismo lado y de ésta al opuesto y así sucesivamente, cuando era roto por el proyectil, se hacia necesario unirlos, lo que es difícil si han de quedar bien tendidos; además despues de muchos disparos, habrá muchas uniones, lo que origina un aumento de resistencia al paso de la corriente, precisamente cuando ésta se halla más debilitada. Es condicion precisa que se halle el alambre muy tenso, porque de no ser así el proyectil tardará más en romperlo, aumentándose de este modo el trayecto, habiendo además la posibilidad en este caso de tocarse unos alambres con otros, contacto que dá lugar á corrientes derivadas. Pueden los alambres estar colocados, horizontal ó verticalmente; lo primero facilita la tension y lo segundo evita el pandeo: sin embargo, son preferibles los primeros, pues bien se comprende que siendo los marcos rectangulares y de no grandes dimensiones y empleándose por otra parte alambre de cobre muy delgado de $0^{mm},3$ de diámetro, si éste queda bien tendido no habrá lugar al pandeo. En resúmen, la madera del marco debe estar cubierta por un barniz aislador, estendiéndose éste hasta á los agujeros de las clavijas, evitándose de esta suerte las corrientes derivadas que puedan producirse: los alambres no deben tener mas longitud que la distancia entre los dos lados del marco, aumentada de lo necesario para sujetarlo á la clavija, procurando además dar con él el mismo número de vueltas en cada una; y claro es que será necesario para la continuidad del circuito unir cada dos clavijas de un mismo lado, lo que se hace á favor de un pequeño alambre. Dispuestos los alambres de una ú otra manera, en rigor, aunque en un principio queden bien estirados, se

alargarán al cabo de cierto tiempo operándose, al partir de aquí, con los alambres flojos, motivo por el cual conviene que vayan fijos á muelles que puedan absorber su dilatacion. Hé aquí los propuestos por Vignotti y modificados por Olry.

En los lados verticales del marco y distantes entre sí el intervalo que han de tener los alambres se abren unos agujeros de 4^{mm} de diámetro, que pueden estar al tresbolillo si la separacion ha de ser pequeña; emplea como aislador el barniz secante estraido del asfalto y de alambre de cobre roseta sin recocer, de 4^{mm} tambien de diámetro, obtiene las clavijas, cortándolo en trozos de 2^{cm} de longitud. En uno de los estremos de cada trozo se hace una hendidura de 7^{mm} á 8^{mm}, escuadrando este estremo para hacer uso de una llave con objeto de estirar los alambres, los que se colocan introduciendo sus cabos en las hendiduras de dos clavijas opuestas, dando luego vueltas con la llave hasta tanto que al vibrarlo produzca un sonido metálico. Para comunicar cada dos clavijas próximas entre sí emplea un hilo del mismo cobre de 1^{mm}, recocido, el que arrollándose sucesivamente por sus estremos sobre un macho cilíndrico de hierro, cuyo diámetro sea algo menor que el de las clavijas, formará dos hélices en el mismo sentido unidas por una parte recta de longitud igual á la separacion entre las clavijas; la (fig. 26) indica esta disposicion. Colócanse estas hélices de modo que toquen la madera y en ellas quedan introducidas las clavijas, conviniendo que los trozos de hilo que unen las hélices estén en contacto con los alambres del marco. Por esta disposicion, como las clavijas pueden girar, á frotamiento, en el interior de las hélices pueden tenderse y reemplazarse los alambres sin preocuparse de la comunicacion, asegurada como lo está: además, no siendo único el alambre que constituye el marco puede inmediatamente ser sustituido el que se rompa, por otro nuevo, sin necesidad de las uniones que acarrean los inconvenientes señalados. Estos marcos, para operar, se sujetan enterrando los estremos de sus montantes, asegurándolos por medio de tornapuntas. El sistema de colocacion de los marcos que recomienda Le Boulangé es el representado en la (fig. 27); el caballete es de hierro y el uso de este medio es sumamente cómodo.

Para la sujecion de los alambres se vale el mismo artillero de unos tornillos de laton apareados (fig. 28) colocando aquellos entre la cabeza del tornillo y el cilindro que le sirve de rosca; claro es que la comunicacion entre cada dos tornillos se hace por medio de la chapa que los une. La distancia de tornillo á tornillo es de 3^{cm}, conviniendo esta para proyectiles cuyo diámetro sea inferior á 18^{cm} y si tienen más, se unen por medio de un hilo conductor y se suprimen los alambres del marco que corresponden, para dejarlos espaciados de 9^{cm}. Aconseja tambien que los alambres del marco sean de cobre plateado, por tener la ventaja de ser muy fuerte al par que poco estensible.

60. Yá hemos dicho que la distancia entre los alambres debe ser menor que el diámetro del proyectil, no debiendo ser mayor que los dos tercios para que al ménos un alambre sea roto; pero hay aun otra condicion que cumplir porque el proyectil puede cortarlo, penetrando diferentes cantidades, con lo que variará la distancia que verdaderamente corre el proyectil entre ambos marcos. El caso más desfavorable será aquel en que el proyectil corte el alambre del primero, chocando por su punto mas avanzado y pase por el médio de dos alambres del segundo marco: si llamamos ε al error ab (fig. 29), se tiene

$$\varepsilon = \frac{d}{2}\left\{1-\sqrt{1-\left(\frac{i}{d}\right)^2}\right\}$$

siendo el intervalo i funcion del diámetro d; haciendo i igual á

$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$ de d, se obtiene

$$\varepsilon = 0{,}36\, d; \quad 0{,}064\, d; \quad 0{,}029\, d;$$

así pues si se trata de determinar i para la bala de 8, siendo su diámetro, esterior médio de las admisibles $0^m{,}1031$, cincuenta metros el intervalo entre los marcos se tendrá, si

$$i = \frac{2}{3}\, d, \quad \varepsilon = 0{,}0371;$$

la relacion de la distancia, á la variacion que puede esperimentar

$$\frac{50}{0{,}0371} = 1348;$$

el intervalo pues de $\frac{2}{3}$ para los alambres hará posible un error de $\frac{1}{1348}$

de la velocidad, porque siendo la que se calcula $\frac{50}{t}$ y la verdadera

$$\frac{50+0,0371}{t},$$

su comparacion acusa aquel resultado y como éste error es grande, si hacemos

$$i=\frac{1}{2}\,d,\ \text{será igual á}\ 0,0066;$$

la relacion análoga á la anterior será 7576, estando entonces el error posible espresado por $\frac{1}{7576}$ de la velocidad, que es una aproximacion muy suficiente: lo dicho hace ver que el intervalo de los alambres puede aumentar con la distancia comprendida entre los marcos y debe disminuir con el diámetro del proyectil.

61. El cronógrafo de Bashforth es un aparato en el que los fenómenos que se quieren observar quedan inscritos sobre un tambor animado de movimiento de rotacion, mediante un estilete que, activado por un electro-iman, marca el paso de un proyectil á través de varios marco-blancos: un segundo estilete, llamado contador, y activado tambien por un electro-iman, señala un trazo que se interrumpe á cada segundo que cuenta un cronómetro, permitiendo esta disposicion relacionar tiempos y espacios.

Los marcos están dispuestos de una manera tal, que, rota la corriente por el paso del proyectil, vuelve inmediatamente á establecerse.

62. Consta el aparato (fig. 30) de un eje vertical en el que se halla montado un cilindro C cubierto de papel preparado para quedar en él trazadas las huellas de los estiletes; en su estremo inferior lleva un volante A y en él tambien montada una rueda dentada B que engrana con otra M, de manera que permite desenrollarse lentamente la cuerda C′ D: el estremo de ésta vá unido á la plataforma S, la que, por tanto, desciende lentamente; sirviéndola de guia la corredera L. En la plataforma van montados los electro-imanes E y E′, enfrente de los que existen los muelles f y f' con tendencia á separarse de aquellos: estos muelles atraidos por los electro-imanes, en el momento en que la corriente se interrumpe, se separan, chocando contra los pequeños brazos a y a' que á su vez lo hacen contra las palancas b, b', las que,

como enseguida veremos, obligan á los estiletes *m* y *m'* á separarse del tambor, siguiendo marcando las hélices sobre él cuando la corriente vuelve á establecerse. Uno de los estiletes está en comunicacion con un cronómetro que marca medios segundos y á cada doble oscilacion determina un choque que rompe la corriente; este estilete, por lo tanto, marca sobre el cilindro intervalos de segundo, lo que permite apreciar la velocidad del papel en cada instante: el segundo estilete está en comunicacion con los marcos y registra el paso del proyectil á través de ellos.

La corredera L se fija paralelamente al eje vertical del cilindro por medio de otras mas pequeñas G y H. Oprimiendo la palanca *h* se elevan los dos resortes S, los que obligan á los estiletes á quedar en contacto con el cilindro. La (fig. 31) presenta en detalle la disposicion de los estiletes que están montados sobre una articulacion á la *Cardan*: *h* es la palanca; que anteriormente hemos dicho sirve para establecer el contacto de los estiletes con el cilindro: las armaduras de los electro-imanes obran por intermedio de los brazos *a* y *a'* sobre las palancas *b*, *b'* fijas invariablemente al círculo á la Cardan que lleva los ejes de los estiletes; cada una de estas palancas atraviesa una ranura rectangular del brazo correspondiente, en el que hay un juego bastante grande, de manera que cada estilete no recibe la accion del brazo, ó varilla respectivo, sino cuando éste haya recorrido una distancia igual á su juego, á favor de lo que la interrupcion del trazo, se hace prontamente y con gran limpieza y claridad: el curso de las palancas *b* y *b'* está limitado por la longitud de unas mortajas hechas en las piezas *c* y *c'*, cuya posicion puede arreglarse á voluntad; cuando la corriente se establece atraen los electro-imanes á los resortes, y las varillas *a* y *a'* vuelven á su posicion primitiva á las palancas *b* y *b*, estableciéndose el contacto de los estiletes con el cilindro.

63. Los marco-blancos empleados por Bashforth pertenecen á los llamados de contacto, en los que la corriente eléctrica no pasa por los alambres, sirviendo estos solamente para mantener el contacto de piezas metálicas que establecen las comunicaciones: constan (fig. 32) de una cumbrera horizontal de madera en la que están fijos los contactos *c*, *c c*....., á los que van atados hilos de algodon tendidos por medio de pesos, los que se apoyan sobre un travesaño *b*, que impide el movimiento de los hilos por la accion del viento: la distancia entre estos

es, como sabemos de antemano, menor que el diámetro del proyectil. La cumbrera tiene unas ranuras *r*, *r*, *r*..... angulares y en ellas van colocados los brazos horizontales de unos resortes de cobre duro *r'*, *r'*, *r'*.....: en su parte anterior lleva unas placas de laton *l*, *l*, *l*..... con orificios elípticos que dan paso á los resortes y los que, por la accion del peso, están en contacto con la parte inferior de tales orificios; de este modo la corriente se establecerá segun *a b c d e f g h i*....; en el momento en que uno ó más hilos queden rotos por el paso del proyectil cesa el contacto del resorte correspondiente por levantarse éste, en cuyo caso la corriente se interrumpe; pero levantándose aquel, choca contra la parte superior del orificio, volviendo á establecerse la corriente, que no ha estado interrumpida por lo tanto más que el cortísimo tiempo necesario para que el resorte haya recorrido un espacio igual al eje mayor de la elipse.

64. Para leer sobre el cilindro se le separa del aparato y se le coloca sobre unos cojinetes especiales representados en la (fig. 33): el círculo *a* graduado gira delante de un nónius fijo *n*; el eje del cilindro puede fijarse de modo que esté en prolongacion de el del círculo y que gire con él; de este modo se miden los espacios angulares que recorre. Un brazo de escuadra movible á lo largo de una regla dividida R colocada paralelamente al eje del cilindro y que lleve igualmente un nónius puede colocarse de manera que una punta fina que tiene quede en contacto con el punto marcado sobre la hélice y cuya lectura quiere hacerse; bastará para ello hacer girar al cilindro á fin de que el punto venga á estar sobre la generatriz superior; claro es que de esta suerte á partir de un punto cualquiera de la hélice tomado por orígen queda medido por medio del círculo el espacio angular de el que se deduce el lineal sobre la circunferencia y por medio de la regla el camino recorrido paralelamente al eje y de ambas medidas el desarrollo del arco de hélice que no es otra cosa que la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene aquellas magnitudes por catetos.

65. Para la medida del tiempo recuerdese que uno de los electro-imanes está en relacion con un cronómetro, que marca medios segundos y que á cada doble oscilacion verifica la rotura de una corriente, por lo que el estilete correspondiente, marcando sobre el cilindro intervalos de segundo, permite apreciar la velocidad del papel en cada instante. Determinando la longitud de los arcos recor-

ridos entre sucesivas interrupciones, siendo el movimiento regular, aquellas longitudes serán uniformemente decrecientes y proporcionarán el medio de conocer la ley del movimiento variado del cilindro, y en consecuencia calcular como ya hemos dicho, la velocidad que poseia en el momento en que fueron trazados por los estiletes los puntos sobre el papel. Segun Bashforth las segundas diferencias de las longitudes son sensiblemente constantes y sabido es que cuando esto sucede la ley del movimiento está representada por una parábola de segundo grado, cuya ecuacion es de la forma $s=a+bt+ct^2$ y si el tiempo empieza á contarse en el orígen del movimiento $s=bt+ct^2$ espresion de un movimiento uniformemente variado, que es el del cilindro. Los coeficientes *a* y *b* se calculan fácilmente en cada caso, deduciéndose del exámen de las diferencias segundas las irregularidades en el movimiento del cilindro.

66. El procedimiento sencillísimo segun Bashforth, que dá la velocidad con suficiente aproximacion para todos los casos prácticos, consiste solo en obtener tres señales del cronómetro y otras tres del paso del proyectil por igual número de marcos, que es el menor empleado. Si las tres primeras que designaremos por A, B, C concuerdan con las segundas *a*, *b*, *c*, la longitud A B se toma para representar un segundo y la distancia de la primera señal á la tercera en *a* representará aproximadamente, en la misma escala el tiempo empleado por el proyectil en pasar del primero al tercer marco: el marco intermedio sirve solamente para asegurar la ligazon de las señales correspondientes á los marcos; en este caso, la siguiente proporcion dá la velocidad que se busca: velocidad es á la distancia entre primero y tercer marco como A B es á la distancia entre la primera y tercera marca en *a*.

Si las tres señales de los marcos caen en *b* próximas á B, entonces se tomará para medida de un segundo la longitud $\frac{1}{2}$ A C y si caen hacia *c*, la longitud B C representará aquella duracion.

No esperimentado entre nosotros este aparato y sin otras noticias sobre él que las dadas por su autor Revista de Tecnologia militar tomo VI (1) no hemos de insistir sobre sus detalles y resultados con él

(1) Un estracto de esta memoria puede verse en el Estudio sobre el cálculo de las trayectorias, segun las esperiencias de M. Bashforth, por M. Sebert.

obtenidos: basta lo espuesto para dar una idea de la distinta variedad de los aparatos destinados á la medida de las velocidades.

67. Otro de ellos, tambien muy notable, es el cronógrafo debido al distinguido Comandante del cuerpo D. Francisco J. Zapata, aparato proyectado con objeto de servir para toda clase de esperiencias y muy particularmente para la determinacion de la resistencia del aire, debiendo por consiguiente marcar más de un tiempo en una misma trayectoria: tal fué tambien el fin que Bashforth se propuso con el cronógrafo anteriormente descrito; pero son muy diversos la idea fundamental y los medios de ejecucion en aquel y en el que vamos á describir sumariamente, (1) basado éste, como lo está, en la electricidad de induccion.

La precision que exigen las delicadas esperiencias balísticas y las causas de error que en sí lleva el empleo de electro-imanes, por la necesidad de regularizar muy mucho la fuerza de sus corrientes y por el tiempo que necesitan para su imantacion y desimantacion; las que el uso del disyuntor produce, porque las corrientes han de cortarse en un mismo instante y siempre en idénticas circunstancias para que sus indicaciones sean dignas de confianza; y el empleo tambien de medios mecánicos, que tan igual accion deben tener, fueron los motivos de que el Sr. Zapata tratára de evitar el disyuntor, electro-imanes y medios mecánicos para fijar las señales, acudiendo á la induccion fenómeno el más sutil y delicado.

68. Sabido es que si en una bobina de induccion se introduce el circuito de una pila, siempre que se corte este circuito salta en las estremidades del hilo inducido una chispa que produce efectos mecánicos y que puede servir para indicar el momento de corte, de una manera más delicada que la desimantacion de un iman; pero para la aplicacion de este principio al objeto que nos ocupa se hace necesario, por oposicion á lo que suceda, por ejemplo, al dar fuego á las minas por medio de la bobina, que la chispa sea de poca intensidad, tan solo lo suficiente para atravesar un papel, y producida por el corte de

(1) En lo que á este aparato se refiere seguimos la Memoria (Memorial de Artillería—1872) en que su ilustrado autor espone detenidamente su descripcion y empleo; así como con relacion á el mérito de los trabajos de nuestro respetado y querido Profesor nos atenemos á los favorables juicios emitidos por la J. S. F. del Cuerpo.

un circuito inductor, ó de la pila, largo y resistente toda vez que ha de comprender los alambres de los bastidores y los que los ligan con el aparato: si pues esta chispa se hace saltar entre dos puntos que comprendan un papel, claro es que en él quedarán señalados los pasos del proyectil á través de varios marco-blancos, por producirse en cada uno de ellos la rotura de la corriente, que será por otra parte necesario restablecer en el instante mismo.

En cuanto á la medida del tiempo que, como hemos visto, puede hacerse por el movimiento de un péndulo ó por la caida libre de un cuerpo, el autor adopta el primer medio por que debiendo medirse varios tiempos se hace necesario un cronómetro de longitud tal, que al caer puedan en él quedar grabadas las distintas señales correspondientes.

Un péndulo bastante grande, que termina en dos puntas, que oscilan con él; un limbo vertical con una ranura, que corresponde á la situacion de las puntas, donde se coloca el papel y un electro-iman en el orígen del movimiento, pero electro-iman destinado solo á retener el péndulo, son los elementos que en principio constituyen el aparato; de suerte que éste, realmente, no es más que un péndulo, que se pone en movimiento cuando el proyectil empieza su trayectoria, entre cuyas puntas y sin que se altere el movimiento oscilatorio saltan chispas de induccion, que acusan los momentos precisos en que la bala pasa por los distintos bastidores; y si el péndulo una y otra vez oscila lo mismo, los grados en que se hallen las señales sirven para fijar aquellos momentos del paso de la bala por los alambres y su rotura por ella.

69. El péndulo (fig. 34 y 35) consta de una lenteja A invariablemente unida á el eje *b* terminando por dos muñones de acero, que descansan en cojinetes de ágata: dos varillas *c*, *c* que terminan en las puntas *d*, *d*, por una parte, y por otra en los tornillos *f*, *f* acompañan al péndulo en su movimiento: unos alambres muy finos *g*, *g* ligan aquellos tornillos á los *h*, *h*, que se ponen en comunicacion por los conductores *h'* con los estremos del hilo fino de la bobina de Ruhmkorff, que es la empleada; de este modo queda cerrado el circuito inducido escepto en la parte comprendida entre las puntas *d*, *d*, de platino, cuya distancia ha de salvar la chispa, atravesando el papel.

El montante B suspende el péndulo, siendo por tanto donde se hallan colocados los cojinetes de ágata: sobre él tambien, hay montado un nivel D, cuyo eje es paralelo á el del péndulo.

El alambre g va precisamente unido al punto l, que es la prolongacion del eje matemático de el del péndulo; de este modo, como dicho punto permanece en reposo cuando aquel oscila claro es que no influye para nada esta union en el movimiento del péndulo el que por otra parte es bastante pesado para no sufrir alteracion por ligeras causas. Los contra-muñones m sirven para hacer que el péndulo oscile de la misma manera; el rozamiento del eje y los contra-muñones, que en gran manera influye en el número de las oscilaciones, tiene por objeto arreglar el aparato de modo que aquel número sea el mismo, igualando así esta circunstancia en la esperimentacion: el autor asegura que durante el largo tiempo empleado en sus trabajos para la formacion de la tabla de tiempos, colocaba siempre el aparato en condiciones tales que constantemente el número de oscilaciones dobles era el de 180 desde que se iniciaba hasta que concluia el movimiento.

Una fuerte plancha circular, de laton, montada sobre una plataforma, tiene una ranura G achaflanada por el frente; en la plancha se apoya el papel k que queda sujeto por medio de dos placas de cauchout que presentan otra ranura en correspondencia con la de la plancha: los bordes n de ésta tambien están cubiertos de aquella sustancia, así como las puntas envueltas con ella, por lo que la chispa atravesará el papel impedido su paso por todo otro sitio, á causa del aislamiento producido.

En la plancha hay un limbo y un nónius L que tiene dos patillas s, las que llegando casi al papel permiten conocer con gran exactitud, los grados á que corresponde el agujero hecho por la chispa; bastará para ello hacer que la patilla correspondiente al cero del nónius quede enfrente de dicho agujero, operacion que se facilita mediante un tornillo de coincidencia. Cada grado se halla dividido en diez partes y el nónius aprecia la treintava parte de una de ellas ó sea $\frac{1}{300}$ de grado.

Las plomadas $\bar{q}$, con sus puntos de referencia $\bar{q}'$, en union con el nivel ya dicho tienen por objeto colocar el aparato en la posicion debida.

Un electro-iman N sirve para sostener la lenteja: éste electro-iman es de eje partido, consiguiéndose así variar su fuerza de atraccion y rectificar el punto de retencion del péndulo, que debe corresponder á la horizontal como la chispa que se haga pasar en esta situacion inicial, á el cero de la graduacion.

70. El indicador es un aparato que tiene por objeto poder distinguir á qué oscilacion corresponde cada una de las chispas obtenidas por sucesivas interrupciones de la corriente. Consiste (fig. 36) en un sistema de ruedas dentadas, que por el descenso de un peso considerable comunican un movimiento de rotacion en sentido inverso á dos cilindros *a*, *b*, los que hacen marchar con gran rapidez á una tira de papel *c*: dos pares de puntas verticales *d d*, *d' d'*, que comprenden dichas tiras y entre las que saltan una chispa señalan en aquella el paso del péndulo por el grado nonagésimo y el del proyectil por los bastidores: para lo primero en la plataforma del péndulo hay un ligero muelle *q* dispuesto de modo, que un diente de ágata *q'* que tiene el péndulo, tropiece ligeramente en él al pasar en la oscilacion por aquel grado, deshaciendo el contacto *r*, en cuyo caso saltará una chispa de induccion entre las puntas *d d* si hay una pequeña bobina cuyos hilos inductoros vayan á parar á dichos puntos. El otro par de éstas *d' d'* está comprendido en el circuito inducido principal. De esta manera quedan en la tira de papel hechos los agujeros *n*, *n*, *n*....., que dicen las veces que el péndulo ha pasado por la vertical y los *p*, *p*, *p*..., que dicen igualmente los que el proyectil atravesó los marco-blancos. El autor indica que no es de necesidad absoluta el empleo del indicador y se concibe efectivamente que una larga práctica en el uso del cronógrafo permitirá apreciar á qué oscilacion corresponde cada chispa: de esta manera tambien se evita el inconveniente de su empleo, que es aumentar la resistencia que debe vencer la chispa, inconveniente tanto más grave cuanto sean mayores las distancias á que se opere, en cuyo caso, sin embargo, se hace mas necesario el indicador para distinguir la oscilacion á que la chispa corresponde. Por este motivo el autor reformó el indicador, sustituyendo las puntas por los electro-imanes *f*, *f*, los que al estar activados atraen los pequeños muelles *h*, *h*, que tienen en sus estremos unos lápices *g*, *g* y estos, cuando queden rotos los circuitos, cayendo sobre el papel, harán unas señales, que son precisamente las mismas que las chispas producian.

71. La necesidad de restablecer la corriente en el momento que

sea interrumpida si ella no ha de pasar contínuamente por todos los bastidores dispuestos para la esperiencia, lo que daria un circuito en estremo resistente, ha sido yá indicada, y por medio de la ingeniosa disposicion que vamos á esponer se consigue que la corriente obre al principio tan solo en el primer bastidor, despues en el segundo y así en cada uno de los sucesivos. Si en un tablero hay diferentes electro-imanes (fig.ˢ 37 y 38), tantos ménos uno como bastidores han de trabajar, y se hallan en actividad cuando el aparato está dispuesto para el disparo, retendrán respectivamente las palancas a, a', a'' que levantan los fuertes muelles b, b', b'', haciendo que varias puntas c, c, c....., que tienen destinadas á establecer circuitos estén fuera de las cápsulas con mercurio d, d', d'': así, cuando los electro-imanes dejen de estar en actividad, descendiendo los muelles, penetrarán las puntas en el mercurio, estableciendo circuitos que hasta entónces no han existido. Pasando el circuito del primer bastidor, ó de el alambre de la boca del cañon, por el primer electro-iman A, el del segundo bastidor por el A′ y así de los demás, si cuando esté el aparato preparado dichos imanes trabajan y si al cortarse el primer circuito cae el primer muelle b se establecerá la corriente del segundo bastidor, y al paso por él de la bala como se interrumpe la corriente caerá el muelle b', estableciendo la corriente, que cesará de nuevo al atravesar el proyectil el tercer marco y cayendo su muelle la establecerá en el último: es necesario por tanto, para lograr el restablecimiento sucesivo de las corrientes, que los muelles b, b', b'', estén forzados y vayan cayendo á medida que el proyectil atraviese los distintos marcos; y como la corriente general cuando el aparato esté preparado tan solo pasa por el primer bastidor y primer electro-iman del tablero, cuyo muelle fuerza, se necesitan pilas locales que tengan en tension los otros muelles, pilas de un solo par y cuyo número será, por lo dicho, el mismo que bastidores menos dos.

Para que los restablecimientos se verifiquen como es debido, es preciso caiga primero el primer muelle que envia la corriente al segundo bastidor; que pasando la bala por éste, caiga el segundo muelle y se dirija la corriente al tercero y así de los demás; de manera que han de caer uno á uno y por rutura de la corriente general; y como que ésta en un principio sólo, como se ha dicho, pasa por el primer electro-iman tienen que trabajar los demás para la tension de los muelles, por pilas locales á las que debe reemplazar la corriente general pero sin que los muelles caigan por éste reemplazo, que debe verificarse ántes que la bala alcance al bastidor cuyo circuito debe cortar.

Veamos como se cortan los circuitos locales y se verifica el reemplazo de ellos por el general. A éste objeto existe un muelle *f* en contacto con el tornillo *g* cuando aquel se encuentre en su posicion natural; por este contacto pasa el circuito local que trabaja en el iman siguiente; así, cuando cae el muelle *b* arrastra á el *f*, cesa el contacto y rompe el circuito de la pila local y si para el momento del corte el circuito general está ya establecido para el segundo electro-iman A', se habrá conseguido el reemplazo, sin haber caido el segundo muelle *b'*: es pues preciso que el momento de la entrada de las puntas en el mercurio de la cápsula, que es cuando se establece la corriente del segundo bastidor sea anterior al corte de la primera pila local, ó lo que es lo mismo, que el muelle *f* esté de modo que despues de entrar las puntas en el mercurio sea cuando el muelle grande *b* lo separe de su apoyo, consiguiéndose hacer depender el segundo iman A' de la corriente general en vez de la local que hasta entonces forzaba su muelle *b'*.

Es preciso que al cambiar la imantacion de la pila local por lo general no caigan los muelles, lo que sucedería si se neutralizára por ejemplo la corriente zinc de la general con la carbon de la local. Antes de operar por primera vez se probará prácticamente si así sucede, para lo que se cortarán sucesivamente los diferentes circuitos, y se verá si los muelles caen ó nó á la vez: si por caer uno, cae tambien el siguiente, es prueba de que hay centralizacion en las corrientes y entonces se cambiará la entrada de los hilos de la pila local.

72. En los trabajos hechos por el autor en 1871 encontró el grave inconveniente de que la chispa de induccion, si la pila se compone de cierto número de pares, no sólo se forma cuando se rompe un circuito, si que tambien cuando se establece, dando esto lugar á confusion en las señales. Para obviarlo hizo que el restablecimiento fuera sucesivo y á ello responden las puntas de distintos tamaños que penetran en el mercurio, las que están ligadas á carretes de hilo delgado que tienen longitudes variables y en disminucion como aquellos, por lo que el circuito en el corto tiempo que las puntas tardan en introducirse en

el mercurio ha pasado sucesivamente de la primera resistencia hasta la última, que es la que tiene realmente. Se comprende que así se logre evitar la chispa, porque para que ésta se produzca es necesario que la resistencia sea proporcional á la pila que se emplee y no la habrá, y si la hay, será imperceptible si con tres ó cuatro pares en la pila se quisiera operar á grandes distancias: restableciendo pues el circuito sucesivamente con diferentes resistencias, si la primera estraordinaria es la suficiente para que, aumentada en la del circuito respectivo, dé una bastante superior á la fuerza de la pila ó no habrá chispa al entrar la punta, ó de haberla, no perforará el papel. Cuando enseguida de la primera se introduzca la segunda encuentra un circuito restablecido, aunque con una resistencia mayor que la aneja á esta punta, habrá induccion; pero tan solo en lo relativo á la diferencia de resistencia y aunque puede producirse chispa por diferencia es preciso que sea muy pronunciada para que sean sensibles los efectos mecánicos: de igual manera se conducen cada una de las otras puntas con respecto á la anterior y como la última no tiene resistencia estraordinaria, sin producirse chispa, se consigue restablecer el circuito.

73. Existen además en el tablero unas bobinas de resistencia constituidas por carretes de hilo de alambre cuyo objeto, como su nombre indica, es disponer de resistencias para introducirla en los circuitos en que haya necesidad; esto sucede cuando se opera á largas distancias, porque empleándose una pila muy fuerte y teniendo la corriente de los primeros bastidores poca resistencia podia hacer que se inutilizase la bobina de induccion; en este caso, las corrientes de estos bastidores se les hace pasar por dichos carretes. En el mismo tablero hay tambien un iman B (fig. 39) que en actividad atrae los muellos *l*, *l*, que establecen los contactos *q*, *q*; la corriente que pasa por la boca del cañon, pasa tambien por el iman y cuando la bala rompe esta corriente, desprendiéndose los muelles queda interrumpida, respecto al resto de la línea, corriente que siendo la mas espuesta á que algun estremo del hilo conductor toque en tierra despues de roto por la bala no trabajaría en los demás bastidores por marcharse la electricidad al depósito comun. El muelle grande *b* arrastra en su caida no solo al muelle *f* sino tambien á otro *r* por cuyo contacto con el tornillo *s* de su montante se hace pasar el circuito general relativo al bastidor de este iman; así, al caer el primero, rompe el contacto de los otros dos, quedando por

uno de ellos cortado el circuito local y por el otro interrumpida la comunicacion con el bastidor que ha trabajado; y puede emplearse en los bastidores alambre sin revestir sin temor de que al tocarse unos con otros salten chispas en el péndulo.

74. En los ensayos sucesivos hasta llegar á conseguir resultados prácticos el autor se sirvió de bastidores directos y de contacto; los empleados primeramente estaban constituidos (fig. 40) por una série de alambres *a*, *a*, *a*.... sujetos por uno de sus estremos *c*, *c*, *c*.... y dependientes por el otro de los muelles en espiral *b*, *b*, *b*..., que los estira perfectamente; pero como la fuerza eléctrica que tales bastidores exigen es considerable no son convenientes para operar á grandes distancias. Bajo este punto de vista los de contacto pueden emplearse, pero como en ellos los muelles han de ser iguales y estar igualmente forzados, cuyas condiciones son difíciles de llenar en la práctica, no se les puede considerar capaces de la exactitud de los otros, y si á grandes distancias se aconseja su empleo es por que apreciándose tiempos de consideracion las pequeñas diferencias en la manera de trabajar los muelles, y más si estos son fuertes, no pueden influir sensiblemente en los resultados.

Los marcos empleados en las delicadas esperiencias con el aparato ejecutadas se componen (fig. 41) de dos montantes *h*, *h* en los que hay los muelles *c*, *c*, que establecen los contactos por medio de los pesos *b*, *b*, por cuya causa siempre estará obrando la fuerza aunque los bramantes ó alambres *a*, *a*, cedan: estos pasan por unas poleas movibles y así solo hay un contacto por cada dos hilos. Conviene que estos sean horizontales por que siendo menor esta dimension del bastidor que la vertical presenta menos resistencias, y por la misma razon, que el número de contactos sea el menor posible.

75. Antes de entrar en la disposicion de las corrientes convendrá indicar como están ligadas las diferentes partes del tablero. De la prensa *c*, puesta en comunicacion con una de las de la bobina salen hilos á todos los muelles grandes, y además uno al primer electro-iman, que termina en la prensa núm. 1, el que vá al primer muelle grande sigue por la cápsula con mercurio y comprendiendo al segundo electro-iman sale á la prensa núm. 2, pasando antes por el contacto del muelle *r*; el que va al segundo muelle igualmente sigue por la cápsula, marcha al tercer iman, saliendo á la prensa núm. 3, com-

prendiendo tambien el contacto del muelle r. De la prensa c parten pues tantos hilos como bastidores han de trabajar: el primero comprende directamente al primer electro-iman, y los demás á los siguientes respectivamente, pasando por los muelles fuertes y la cápsula con mercurio, no constituyendo continuidad metálica ínterin estén los grandes muelles forzados. Los circuitos locales, que entran por las prensas D D pasan por los respectivos contactos de los pequeños muelles y comprenden: el primero al segundo electro-iman, el segundo al tercero y así de los demás. Como estos imanes estén tambien comprendidos en la corriente general tienen que ligarse con el alambre que vá de la cápsula y con el que parte de las prensas donde se sujetan los hilos que van á los bastidores. Las diferentes puntas del muelle aisladas entre sí, se ligan á diferentes resistencias, cuyo estremo comun se une con el alambre de la cápsula. Esplicada esta disposicion veamos ahora la de los circuitos (fig. 42), en la que P representa el cañon B, B′, B″, B‴, los bastidores, G la pila general; L, L′, dos locales que trabajan en los imanes del tablero; L″, que lo hace en la bobina pequeña D′; D, bobina grande; I aparato indicador; C, péndulo cronógrafo y T el tablero de los restablecimientos.

En la bobina grande D se señalan cuatro prensas para el circuito inductor y dos para el inducido; en la pequeña D′ sucede lo mismo. En el cronógrafo C se representa el iman i, que retiene el péndulo; las puntas d por donde pasa la chispa de induccion y dos prensas en relacion con el contacto del pequeño muelle, que debe interrumpir el circuito cuando pase el péndulo por la vertical. En el tablero T se ven tres conjuntores t, t', t'', el primero t, tiene muelle fuerte con sus puntas, cápsula con mercurio, electro-iman, pequeño muelle para la pila local y dos bobinas de resistencia: el segundo t' las mismas partes, además del muelle para establecer el contacto, por donde pasa la corriente que ha trabajado ya cuando cae el fuerte muelle correspondiente á este conjuntor; y por último, el tercero t'' por la disposicion que la figura representa, no tiene muelle relativo á la pila local. Se vé tambien en el tablero el iman r que retiene los dos muelles, que establecen los contactos por donde pasa la corriente de la boca. Primer circuito, que es el representado por línea fuerte seguida; parte de un polo de la pila general y entra en la bobina grande, sigue al iman del péndulo, pasa por uno de los contactos destinados á interceptar la comunicacion entre el alambre de la boca y el resto de la línea, vá al cañon, vuelve á los hilos de el iman, pasa por el otro contacto de este iman, despues por la bobina de resistencia, luego por el iman del primer conjuntor y de aquí á la prensa general C, que está en comunicacion con una de las bobinas; que á su vez lo está con la cuarta prensa que queda en la bobina y que es la que se pone en comunicacion para terminar el circuito con el otro polo de la pila general.

Segundo circuito, representado por línea de puntos: comprende el muelle fuerte del primer conjuntor *t*, la cápsula de mercurio, las bobinas de resistencia, el contacto del muelle, que sirve para interceptar esta corriente de las demás, despues de haber trabajado; el iman del segundo conjuntor y el segundo bastidor; de manera que el circuito parte de la prensa C, vá al muelle fuerte, cápsula, bobina de resistencia, muelle del contacto, iman del segundo conjuntor, bastidor segundo y termina en la corriente general, que es comun á todos los bastidores y que está indicada con los números 2, 3 y 4.

Tercer circuito: sale de la prensa C; marcha al muelle grande del segundo conjuntor, despues á la cápsula, al muelle de contacto, al iman del tercer conjuntor, al tercer bastidor y termina en la línea general: se marca este con rayas.

Cuarto circuito: sale tambien de la prensa C; marcha al muelle del tercer conjuntor; de aquí á la cápsula, al cuarto bastidor y termina en la línea general: se marca en la figura con línea de puntos y rayas.

76. Todo así dispuesto, si los muelles del iman *r* tocan sus apoyos, pasa la corriente, los electro-imanes entran en actividad y el péndulo, palancas y muelles se sostienen en su posicion inicial; y estando ya forzado el muelle grande del primer conjuntor sus puntas no tocan al mercurio, por lo que toda la corriente de la pila general trabaja tan solo en el primer circuito.

Por la salida del proyectil se rompe el alambre de la boca de la pieza y el circuito por tanto; empieza el péndulo á moverse, los muelles se desprenden y los hilos que iban á la pieza quedan interceptados: la palanca del primer conjuntor se desprende, por ello cae el muelle grande, se introducen sus puntas en el mercurio y el circuito del segundo bastidor, que estaba cortado, se establece. Roto el segundo bastidor cae el muelle que restablece el tercer circuito y roto éste el que lo hace para el cuarto.

Los hilos correspondientes á las distintas puntas de los muelles fuertes, de cada conjuntor, despues de pasar por sus distintas bobinas de resistencia, se ligan al que parte de la cápsula de mercurio; los circuitos de las pilas locales, que trabajan en el tablero, comprenden, el primero L, al iman del segundo conjuntor y al contacto que en el primer conjuntor establece el pequeño muelle que debe ceder al grande, despues que éste haya introducido sus puntas en el mercurio; el segundo L′, comprende el muelle análogo del segundo conjuntor y al iman del tercero: ámbos se presentan con raya delgada.

El camino de la chispa de induccion procedente de la bobina grande, comprende las puntas del péndulo y una de las dos parejas que hay en el indicador: se marca por línea de aspas.

Las corrientes inductora é inducida de la pequeña bobina se representan por líneas de círculos y cuadrados respectivamente.

77. La complicacion que á primera vista parece observarse en estos circuitos no existe en realidad porque los bastidores tienen un hilo general 2, 3, 4, que una vez para siempre van á una prensa de la bobina grande; los polos de la pila general van á sus prensas y tampoco varian; los hilos que van al iman del aparato, los del tablero y los de las pilas locales son tambien fijos, por lo que una vez colocados, con presencia de la figura solo hay que fijar, para operar, los que van á los bastidores y los del cañon, que tambien tienen sus prensas: la práctica del tiro exige sólo unir las palancas á sus imanes, los muelles al iman *r* y el péndulo al suyo.

Obtenidas las señales correspondientes al paso del proyectil por los bastidores, resta solo venir en conocimiento de los tiempos que representan.

78. Siendo por construccion muy pesado el péndulo, á fin de conseguir la mayor igualdad en las oscilaciones, no es posible prescindir para la formacion de la tabla de tiempos de las resistencias pasivas y de la del aire, debiéndose por lo tanto contrastar el movimiento. El autor lo hizo valiéndose de la caida libre de un cuerpo, siendo éste pesado y grande la altura de aquella. Colocó al efecto sobre un pié derecho, de 5^m de altura, dos fuertes imanes en su estremo y tres pequeños bastidores, dos de ellos mirando á la cara de uno de los imanes y el tercero en sentido del otro: los imanes sostenian, el uno una bola de billar, y el otro una esfera de bronce de más de 2 kiló-

gramos de peso: si se cortan los circuitos de aquellos las bolas caen; la de billar pasa por el bastidor más alto, rompe su circuito, que está en comunicacion con el iman del cronógrafo y pone en movimiento el péndulo; la esfera de bronce rompe despues al primer bastidor de los dos que están al mismo lado y en comunicacion con la bobina, corta su circuito y produce una chispa; llega al segundo bastidor, vuelve á cortar su circuito y produce otra chispa en el aparato: de esta manera, fijos los dos bastidores que producen chispas y variando la situacion del primero, cuya mision es tan solo poner en movimiento el péndulo, un mismo tiempo se señala en distintos grados del aparato: conocido pues éste tiempo por la medicion de la altura de caida se aprecia el que debe indicar el aparato entre aquellos grados, disponiendo de una tabla del movimiento teórico del péndulo se determina el coeficiente porque hay que multiplicar el tiempo que éste acusa para que resulte el de la caida, que es el verdadero.

Apesar de las muchas dificultades prácticas con que el autor tropezó y enumera en el trabajo que estractamos, fueron todas vencidas con sin igual perseverancia, llevando el mayor esmero y los más prolijos cuidados hasta un límite imposible de esceder y obteniendo por resultado una exactitud tal que la máxima diferencia en todas operaciones ha sido de 0",0002, muchas de las que dieron tambien seis cifras comunes y sin que en la generalidad apareciera la diferencia hasta la quinta cifra decimal. El tiempo de contraste calculado, tomando en consideracion la resistencia del aire y ésta supuesta proporcional al cuadro de la velocidad, fué 0",04458759. El error que puede producirse por la distinta dilatacion del péndulo en las várias estaciones, aunque pudiera evitarse por medio de un compensador, no merece tomarse en cuenta y más si se le obliga en todo tiempo á que dé el mismo número de oscilaciones desde que el movimiento se inicia hasta que termine.

79. Con el cronógrafo, tal como queda descrito, se ha operado, empleando 26 pares Bunsen á 750^{m} de distancia, pudiendo asegurarse que con 40 se trabajará á 1000^{m} ó 1200^{m}; distancia muy suficiente para esperiencias y que rara vez escederán las dirigidas á investigaciones balísticas. En la esperimentacion con este aparato es necesario tener en cuenta que en virtud de la distinta resistencia que presentan los bastidores, los agujeros que la chispa de induccion produce son más

visibles unos que otros y que en general no hace uno sólo sino vários en la estension de un grado próximamente. Lo primero no es en realidad una dificultad por ser todos ellos muy pequeños y dan una indicacion bastante precisa; y lo segundo tampoco lo es por distinguirse el agujero que corresponde á la llegada del proyectil por ser mayor que los demás y éstos decrecer sucesivamente, los que seguramente han sido formados durante la completa rotura del circuito, que no es instantánea.

Por la disposicion dada á las puntas, que forman sistema con el péndulo, se han evitado, como en otros aparatos, que emplean la induccion ocurre, las descargas oblícuas que se producen cuando la chispa salta de punta á superficie, y que dan lugar á indicaciones erróneas.

Los resultados obtenidos en la práctica del cronógrafo Zapata han sido completamente satisfactorios y seria de desear que se realizáran las innovaciones que el autor espone ya en su memoria como plan de nuevos trabajos encaminados á facilitar su uso, toda vez que se ha conseguido suma precision.

80. No hace muchos años que en una obra, especial, sobre aparatos electro-balísticos (1) se consignaba, que pocas naciones, entre ellas España, habian dejado de prestar su contingente á la coleccion de aparatos destinados á resolver el problema de la aplicacion de la electricidad á las esperiencias de Artillería: cinco años van hoy corridos desde que el Sr. Zapata destruyó aquel aserto, presentando resuelto prácticamente, en fuerza de perseverancia y de ingenio, el problema de someter la chispa de induccion á dar indicaciones precisas, sin que posteriormente, que sepamos, se haya presentado otro cronógrafo del mismo género, que el de Watkin y que no es, en concepto de autoridad científica competente, superior al de Zapata.

81. Estamos ya en el caso de determinar las presiones que los gases de la pólvora ejercen sobre el proyectil y las paredes del ánima, que es, como ya se ha indicado, el elemento que mas importa conocer para las aplicaciones prácticas, considerando la variaciones que la tension de aquellos esperimenta, tanto con el tiempo, como con la posicion del punto del ánima en que se mide. En efecto, conocido el valor de la tension en diferentes instantes y en las sucesivas secciones

(1) Martin de Brettes: Etudes sur les appareils électro-magnétiques.

en que el ánima puede considerarse dividida, fácil es deducir las circunstancias del movimiento.

La fuerza que se trata de apreciar puede buscarse directamente, ó bien tratarse de conocerla por la aceleracion que imprime, mediante las variaciones de velocidad con el tiempo. Este procedimiento indirecto, á causa de la irregular distribucion de la masa de los gases, por efecto de las fugas, los huecos entre la carga, el proyectil y las paredes del ánima, y los choques que se producen, lo que dá lugar á variaciones bruscas y considerables en la presion, no permite tener éstas en cuenta, al paso que los métodos de medida directa proporcionan apreciar las circunstancias todas ó al ménos ponerlas en evidencia.

Los procedimientos en éste género comprendidos dan en un punto del ánima el valor de la presion máxima, de donde se deducen los valores sucesivos de la presion en el mismo punto; claro es que para tener una idea exacta deberá medirse la presion en muchos puntos.

82. Supongamos que en la pared de una arma y en el punto en que se quiere medir la presion soportada, se abre una canal cilíndrica de pequeño diámetro en la que se introduce un proyectil cilíndrico á rozamiento suave, de manera que la accion de los gases al ejercerse sobre él lo lance en los marco-blancos correspondientes á un aparato electro-balístico: supongamos tambien que se emplean una série de cilindros cuyas longitudes vayan aumentando, de manera que el peso tambien aumente, aunque en muy pequeña cantidad.

Si llamamos

$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ los pesos de estos cilindros, $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_n$,

sus velocidades iniciales medidas por medio de aquel aparato, L, el espacio recorrido en el canal por cada uno de los cilindros; espacio que consideramos constante. Siendo p_1 muy pequeño, el cilindro de este peso no estará sometido, sino durante un tiempo muy corto á la accion de los gases y la presion media que sobre él haya ejercido tendrá por espresion, suficientemente aproximada

$$F_1 = \frac{p_1 v_1^2}{2 g L},$$

por ser el trabajo igual á la mitad de la fuerza viva y haber sustituido á la fuerza variable la presion media: claro es que F_1 representa la presion total sobre la base del cilindro y es á la vez la presion que los gases de la pólvora tienen cuando el proyectil con que se carga la pieza, ocupe la posicion á que haya llegado en el ánima al fin del tiempo t_1 que es el empleado por el cilindro de peso p_1 en recorrer la longitud L del canal, presion que por otra parte no es exacta, por haber prescindido del rozamiento, aunque suave, del cilindro y haber supuesto que la velocidad v_1 es debida únicamente á la impulsion de los gases de la pólvora, siendo en rigor resultante de ésta, y de la del retroceso de la pieza.

Ahora bien, al considerar la fuerza F_1 constante, el movimiento debido á ella será uniformemente acelerado, verificándose

$$v_1 = j \cdot t_1$$

y como la aceleracion tiene por espresion, el valor de la fuerza dividido por la masa

$$j = \frac{v_1^2}{2L};$$

cuyo valor sustituido en la anterior relacion, nos dará aproximadamente el del tiempo

$$t_1 = \frac{2L}{v_1}$$

Colocando despues el cilindro de peso p_2, por ser éste mayor que p_1, tardará un tiempo $t_2 > t_1$ en recorrer el canal, y el proyectil dentro del ánima habrá tambien recorrido mayor trayecto que anteriormente, podemos por lo tanto admitir sin error sensible que descompuesto el tiempo t_2 en dos t_1 y $t_2 - t_1$ durante el tiempo t_1 la presion contínua siendo F_1 y en virtud de ella el cilindro de peso p_2 habrá recorrido un trayecto en el canal $l < L$ animado de una velocidad $u < v_2$, verificándose por lo tanto

$$F_1 = \frac{p_2 u^2}{2gl} \quad \text{y} \quad t_1 = \frac{2l}{u}$$

y siendo F_2 la presion media sobre la base del cilindro durante el tiempo $t_2 - t_1$

$$F_2 = \frac{p_2(v_2^2 - u^2)}{2g(L - l)}$$

y como en éste caso la aplicacion de la fuerza F_2 es sobre un móvil animado de la velocidad u

$$v_2 = u + j(t_2 - t_1)$$

de cuyo valor, lo mismo que anteriormente, se deduce

$$t_2 - t_1 = \frac{2(L - l)}{v_2 + u}$$

Igualando las dos espresiones obtenidas de F_1 y t_1 se obtienen los valores

$$u = \frac{p_1 v_1}{p_2} \quad \text{y} \quad l = L.\frac{p_1}{p_2}$$

que sustituidos en los de F_2 y $t_2 - t_1$, darán

$$F_2 = \frac{p_2^2 v_2^2 - p_1^2 v_1^2}{2gL(p_2 - p_1)} \quad \text{y} \quad t_2 - t_1 = \frac{2L(p_2 - p_1)}{p_2 v_2 - p_1 v_1}.$$

De igual manera podrá considerarse dividido el tiempo t_3 que tarda en recorrer igual espacio que los anteriores, el cilindro de peso p_3 en los tiempos

$$t_1, t_2 - t_1 \quad \text{y} \quad t_3 - t_2$$

y lo mismo para los restantes cilindros, lo que nos conducirá á las siguientes espresiones

$$F_n = \frac{p_n^2 v_n^2 - p_{n-1}^2 v_{n-1}^2}{2gL(p_n - p_{n-1})}; \qquad t_n - t_{n-1} = \frac{2L(p_n - p_{n-1})}{p_n v_n + p_{n-1} v_{n-1}}$$

y como las presiones que se ván obteniendo, operando con cilindros de peso creciente, son las de los gases de la pólvora en los tiempos

$$t_1, \; t_2 - t_1 \dots\dots t_n - t_{n-1},$$

que son las mismas que se ejercen sobre las paredes del ánima, en las distintas posiciones que el proyectil de la carga va tomando en ella, se llegará á una presion cero, correspondiente al momento en que el proyectil abandona la boca de la pieza: el cilindro que sale entonces del canal y cuyo peso es p_n estará ligado al anterior por la relacion

$$p_n^2\, v_n^2 = p_{n-1}^2\, v_{n-1}^2$$

Llámase á este método de *cilindros*, y tiene la ventaja de que dividiendo el tiempo durante el cual se ejerce la presion de los gases en tantos instantes sucesivos é infinitamente pequeños, como se desee, se obtiene la série de valores de la presion correspondiente á estos mismos tiempos, así se esperimenta sobre tiempos

$$t_1,\ t_2 - t_1,\ t_3 - t_2 \ldots.,$$

muy pequeños por lo que los valores encontrados para las presiones correspondientes difieren muy poco de la verdad; estos valores, sin embargo, son algo menores porque al establecer las fórmulas se han despreciado las resistencias de los cilindros al movimiento y la variacion de la fuerza viva que la masa gaseosa esperimenta á causa de su contraccion al penetrar en el canal. Claro es que la esperiencia no seria completa de no tomar las presiones en distintos puntos del ánima, lo que exige repetirla en muchos de ella, sin que cada vez se opere más que en uno: es evidente que para los orificios abiertos entre el proyectil y la boca de la pieza la accion de los gases sobre los cilindros no empieza sino cuando el proyectil ha salvado el primero de aquellos y la presion determinada representa la que se ejerce sobre el proyectil en dicho punto

Los diferentes valores obtenidos de F_1, F_2..... son como hemos visto, las presiones correspondientes á los tiempos

$$t_1,\ t_2 - t_1,\ t_3 - t_2 \ldots.$$

que se ejercen sobre la base total de los cilindros, y de ellas podemos obtener la presion por unidad superficial, que será la misma que en iguales tiempos se ejerce sobre el proyectil; así, conocida la presion F_1 que consideramos constante durante el tiempo t_1, imprimirá al proyectil un movimiento uniformemente acelerado en el trayecto correspondiente á dicho tiempo y conoceremos tambien la velocidad que le comunica; en el siguiente tiempo, conocemos tambien la presion F_2 que actúa sobre un móvil animado de la velocidad adquirida al final del tiempo anterior, por lo que tambien conoceremos la que tiene al fin del tiempo $t_2 - t_3$, y así sucesivamente podremos conocer la velocidad con que el proyectil abandona la boca de la pieza.

Aunque de poca importancia, alguna otra causa de error hay en este procedimiento; tal es la desigual distribucion de los gases por la existencia del canal, pero que puede contrarestarse colocando otro diametralmente opuesto y usarlos simultáneamente. Tampoco debe olvidarse que la velocidad medida del cilindro es resultante de la que los gases le imprimen y de la del retroceso de la pieza, por mas que éste pueda evitarse. Los primeros ensayos de este método fueron hechos por el Coronel Bomford de la Artillería de los Estados-Unidos: éste, colocó varios cañones de pistola en orificios verticales, abiertos desde la culata hasta el brocal, en la parte superior de la pieza, introduciendo en ellos balas, que lanzadas á distintas alturas le permitian deducir las presiones que sufrian: hé aquí los resultados de estas esperiencias, en las que se tomó por unidad la presion correspondiente al punto del ánima en que se hallaba al principio el centro del proyectil, cuyo diámetro es d.

Presiones.	Distancias á partir del centro del proyectil al origen.
0,9758	$-d$
1,0000	0
0,8149	$+d$
0,6767	$+2d$
0,6163	$+3d$
0,5291	$+4d$
0,4393	$+5d$

83. Cavalli en Italia y la Artillería prusiana despues han hecho repetidas esperiencias para determinar las presiones, sirviéndose del método de *cilindros*. La sencillez de los aparatos medidores, que sirven para determinar el valor máximo de la presion en un punto del ánima y más particularmente en el sitio que ocupa la carga, ha hecho que su uso sea general y por ésta causa vamos á describir los de Rodman y Noble.

Consiste el primero (fig. 43) en una caja cilíndrica de metal C terminada en una rosca R, cuya caja encierra una cuchilla de acero A encastrada á cola de milano en un cilindro *c* al que vá unido un piston *p*, que puede moverse en un canal de pequeño diámetro. En contacto con la cuchilla, pero independiente de ella, se coloca un disco de cobre D, sobre otro de hierro H: un tornillo de presion *t*, que atraviesa la caja por su parte superior, sirve para establecer el contacto entre la cuchilla y el disco de cobre.

Para usar el aparato se atornilla en la pieza de manera que el canal sea prolongacion de otro, con anterioridad abierto en ella. Al estremo libre del piston vá unida una cápsula obturatriz O, cuyo objeto es impedir la fuga de gases y la introduccion de granos de pólvora entre la pared del canal y el piston. Con el fin de dar salida á los gases que pudieran haber penetrado en el aparato existe la canal *c'*.

La cuchilla es una pirámide de base romboidal muy prolongada (1): el ángulo en el vértice, esto es, el formado por las dos aristas que se unen á los estremos de la mayor diagonal del rombo de la base, era de 163°,30 en el aparato primeramente usado por Rodman y el ángulo formado por las otras dos aristas de 57°, las incisiones tienen por consiguiente la forma indicada por la (fig. 44): su profundidad tiene una relacion constante con su longitud, por lo que conocida ésta, que se mide bien, puede deducirse aquella. Con el aparato tal como lo

---

(1) Esta forma permite apreciar mas exactamente la amplitud de la incision y su profundidad. La ley, enunciada primeramente por el ilustre geómetra D. Jorge Juan, de que la resistencia de un cuerpo sólido á la penetracion de otro es proporcional al área de la seccion del cuerpo penetrante, interceptada por la superficie del cuerpo penetrado, permite deducir, á causa de la semejanza de las secciones de la cuchilla interceptadas durante su penetracion en el cilindro de cobre, que la resistencia ó la presion de los gases que la determina es proporcional al cuadrado de las dimensiones de la señal y en este concepto la forma dada á las secciones de la cuchilla favorece la exactitud y facilidad de la medida que se desea mucho mas que si hubiera de tomarse la profundidad de la incision.

empleó Rodman (1) se podia apreciar una diferencia de $11^{ks},34$ por una presion de $1360^{ks},5$, que obrase sobre el piston, presion que equivale á la de $2142^{ks},5$ sobre centímetro cuadrado por ser la superficie del piston empleado de 0,368 pulgadas inglesas. Para esperimentar con él se limpia y engrasa el vástago del piston que lleva el útil, así como el canal en que juega; se introduce aquel en el receptor y éste se atornilla en el cañon: enseguida, por medio del tornillo de presion se establece el contacto entre el disco y la cuchilla: disparando el arma, la presion ejercida sobre el piston obliga á la cuchilla á penetrar en el disco y llevando éste á la máquina de probar metales se verá la presion necesaria para hacer una incision igual á aquella. Rodman suponiendo que se opera sobre discos de resistencia constante, ha calculado una tabla indicando la longitud de la incision correspondiente á presiones ejercidas sobre el piston y crecientes de $45^{k},359$ en $45^{k},359$ (100 libras inglesas), comprendiendo la tabla desde ésta presion, hasta la de $4082^{ks},31$ sobre el piston; presiones que deben referirse á la unidad superficial escojida.

La tabla á que nos referimos es la siguiente:

(1) Reports of Experiments on the properties of metals for cannon, and the qualities of cannon powder, with an account of the fabrication and trial of á 15—inch gun—Boston 1861. Traduccion del Comandante del Cuerpo D. Enrique Buelta. Rev.ª de Tecnologia t.º 4.º

TABLA.

PESO.		Longitud de la incision.		PESO.		Longitud de la incision.	
Libras.	Kilógrs.	Pulgadas	Milímets	Libras.	Kilógrs.	Pulgadas	Milímets
100	45,36	0,115	2,92	2400	1088,61	0,730	18,54
200	90,72	0,175	4,45	2500	1133,97	0,747	18,97
300	136,08	0,225	5,72	2600	1179,3	0,765	19,43
400	181,44	0,260	6,60	2700	1224,7	0,782	19,86
500	226,79	0,295	7,49	2800	1270,0	0,800	20,32
600	272,15	0,330	8,38	2900	1315,4	0,815	20,72
700	317,51	0,360	9,14	3000	1360,8	0,830	21,08
800	362,87	0,390	9,91	3100	1406,1	0,845	21,46
900	408,23	0,415	10,54	3200	1451,5	0,860	21,84
1000	453,59	0,440	11,18	3300	1496,8	0,875	22,23
1100	498,95	0,465	11,81	3400	1542,2	0,890	22,61
1200	544,31	0,490	12,45	3500	1587,6	0,905	22,99
1300	589,66	0,512	13,00	3600	1632,9	0,920	23,37
1400	635,02	0,535	13,59	3700	1678,3	0,935	23,75
1500	680,38	0,555	14,10	3800	1723,6	0,950	24,13
1600	725,74	0,575	14,61	3900	1769,0	0,965	24,51
1700	771,10	0,595	15,11	4000	1814,4	0,980	24,89
1800	816,46	0,615	15,62	4100	1859,7	0,995	25,27
1900	861,82	0,635	16,13	4200	1905,1	1,008	25,60
2000	907,18	0,655	16,64	4300	1950,4	1,021	25,93
2100	952,53	0,675	17,15	4400	1995,8	1,034	26,26
2200	997,89	0,695	17,65	4500	2041,1	1,047	26,59
2300	1043,25	0,712	18,08	4600	2086,5	1,060	26,92

PESO.		Longitud de la incision.		PESO.		Longitud de la incision.	
Libras.	Kilógrs.	Pulgadas	Milímets	Libras.	Kilógrs.	Pulgadas	Milímets
4700	2131,9	1,073	27,25	6900	3129,7	1,334	33,38
4800	2177,2	1,086	27,59	7000	3175,1	1,345	34,16
4900	2222,6	1,099	27,92	7100	3220,5	1,355	34,42
5000	2267,9	1,112	28,25	7200	3265,8	1,365	34,67
5100	2313,3	1,125	28,58	7300	3311,2	1,375	34,93
5200	2358,6	1,138	28,91	7400	3356,5	1,385	35,18
5300	2404,0	1,150	29,21	7500	3401,9	1,395	35,43
5400	2449,6	1,162	29,51	7600	3447,2	1,405	35,69
5500	2494,7	1,174	29,82	7700	3492,6	1,415	35,94
5600	2540,0	1,186	30,12	7800	3538,0	1,425	36,20
5700	2585,4	1,198	30,43	7900	3583,3	1,435	36,45
5800	2630,8	1,210	30,73	8000	3628,7	1,445	36,70
5900	2676,2	1,222	31,04	8100	3674,0	1,455	36,96
6000	2721,5	1,234	31,34	8200	3719,4	1,465	37,21
6100	2766,9	1,246	31,65	8300	3764,8	1,475	37,47
6200	2812,2	1,257	31,93	8400	3810,1	1,485	37,72
6300	2857,6	1,268	32,21	8500	3855,5	1,495	37,97
6400	2902,9	1,279	32,49	8600	3900,8	1,505	38,23
6500	2948,3	1,290	32,77	8700	3946,2	1,515	38,48
6600	2993,7	1,301	33,05	8800	3991,6	1,525	38,74
6700	3039,0	1,312	33,32	8900	4036,9	1,535	38,99
6800	3084,4	1,323	33,60	9000	4082,3	1,545	39,24

84. La (fig. 45) representa la ley de estas presiones en la curva hallada por la Junta Superior Facultativa del Cuerpo, empleando la cuchilla alemana cuyos ángulos son 160° y 55° respectivamente y en la que el vástago tiene 9 $^m/_m$ de diámetro. La inspeccion de la (fig. 46) hace ver la modificacion que el autor hizo en su aparato á fin de evitar abrir orificios en las armas: en ella solo hay que advertir que *cc* es una corona de cobre fuertemente comprimida en la union del cilindro y el tapon *t* que impide la introduccion de los gases en el aparato. Este, en tal caso, se coloca en el fondo del ánima ó del cartucho, pero sus indicaciones son menores que empleado esteriormente, lo que puede atribuirse: al mayor volúmen ocupado por la carga si á ella se une el aparato, lo que retarda la velocidad de inflamacion, y sea de este modo ó tenga su colocacion fuera del cartucho, al calor absorvido por su masa metálica, por cuya razon el instrumento debe reducirse á las dimensiones mas pequeñas que sean compatibles con su uso.

85. Varias son las causas de error propias del aparato descrito: permanentes unas y otras accidentales; son las primeras, la contraccion de los gases á su entrada en el canal, su choque contra el piston, teniendo en tal momento cierta velocidad adquirida, los rozamientos de las diferentes partes movibles del aparato; y las segundas, las infiltraciones de los gases, el contacto imperfecto del cuchillo con los discos y muy especialmente su falta de homogeneidad, pero aun cuando de tales errores se prescindiera no se puede afirmar que el aparato suministre verdaderamente el valor de la presion máxima en el punto á que está aplicado, porque las circunstancias de los trabajos que producen dos incisiones iguales una por la máquina y por los gases la otra, no son las mismas. Apesar de estas causas de error este aparato ha permitido apreciar hechos importantes y muy particularmente la necesidad que existe de emplear pólvoras de grano grueso para las piezas de grandes longitud y calibre.

Prescindiendo de las ligeras modificaciones que este aparato ha sufrido por algunos ilustrados esperimentadores, mencionaremos solo la idea del autor mismo, que acojida por otros, no ha recibido sin embargo la sancion de la práctica. Rodman propuso sustituir la cuchilla y el disco de cobre por un muelle que comprimido por el gas indicase la presion por la parte comprimida.

86. La Junta Superior Facultativa del Cuerpo, se ha servido de la

balanza de contraste que á continuacion se describe (1) con objeto de determinar las presiones que corresponden á incisiones hechas en las rodajas ó discos del aparato Rodman.

En principio se compone (fig. 47 y 48) de la barra B, de cuyo estremo libre lleva suspendido el platillo P; del soporte S correspondiente al punto de apoyo, ó con más exactitud á la superficie fija de apoyo; del porta-disco D, que sirve á la vez de guiá al vástago de la cuchilla incisiva I, y del tornillo T con su tuerca T' fija en el soporte D'.

La placa ó mesa de hierro colado M á la que se fijan los soportes y porta-discos, se asegura, por medio de cuatro tornillos á un fuerte sillar de grandes dimensiones y sólidamente fundado. Los agujeros *a a* corresponden á los tornillos de sujecion.

En la barra de hierro dulce B, que debiera ser de acero fundido y forjado, hay tres ejes *c*, *d*, *e*, de esta última materia, cuya forma y dimensiones se indican en la (fig. 49): los dos primeros son por los que aquella se apoya en el soporte S en las dos posiciones que puede tener, segun se trate de grandes ó de pequeñas incisiones; y el tercero corresponde al platillo P. En dicha barra existen además, de acero fundido, dos pequeñas planchuelas *f*, *g*, metidas á cola de milano en las que se verifica el contacto de ella con el estremo del vástago de la cuchilla terminando en arista redondeada.

En el soporte S de hierro dulce, sujeto á la placa M con la tuerca *h*, existe perfectamente ajustado un casquillo de acero *i*, cuya cara inferior K K es la superficie fija de apoyo de los ejes *c* y *d*. La abertura en forma de cruz que tiene en esta parte dicho soporte es para poder sacar y correr la barra á voluntad segun convenga operar favoreciendo más ó ménos al brazo de la palanca del platillo P. Las (fig.ˢ 50 y 51) que representan un corte y una vista de frente permiten formarse una idea exacta de estos detalles del aparato. El tornillo *l* sirve para fijar la posicion del casquillo *i*.

En cuanto al soporte porta-disco D, solo indicaremos que el vástago de la cuchilla ó más exactamente el que sirve de suplemento al de ésta puede correr libremente en sentido vertical, más no girar alrededor de su eje. A impedir éste último movimiento contribuye el tornillo *t*, cuyo estremo se aloja en la ranura abierta en aquel en direccion de

(1) Acta núm. 381 de la Junta Superior Facultativa de 25 de Agosto de 1876.

una generatriz. Si nos fijamos en los detalles de ésta parte representados en la (fig. 52) observaremos que el vástago propiamente dicho de la cuchilla entra en el hueco cilíndrico O abierto en el vástago *m* de mayor diámetro. Esta disposicion ha obedecido á la idea de poder contrastar las incisiones con la cuchilla misma usada en el aparato Rodman. La (fig. 53) dá una idea acabada del tornillo y tuerca correspondientes al soporte D′, que tiene por objeto sostener la barra miéntras no obra la cuchilla, principalmente en los momentos en que se colocan pesos en el platillo P.

Esta ligera esplicacion en la que hemos omitido algunos detalles de secundaria importancia bastará para comprender el uso de este aparato, respecto del que, solo hay que tener muy presente el evitar que la cuchilla ejerza su accion sobre el disco animada de fuerza viva sensible, á cuyo fin se procurará cada vez que se pongan pesos en el platillo, suspender la barra, y colocados que sean, hacerla descender muy poco á poco mediante las manivelas *n n*.

Como datos de interés, aunque sólo sean aproximados, convendrá tener presente: que la carga máxima (no comprendidos el peso del platillo con sus adherentes ni el de la barra) sin que la flexion aparezca muy sensible es poco más ó ménos de unos 130 kilógramos; que el peso de la barra es de unos 40 kilógramos; que el del platillo con cadena y ganchos de 17 idem; y que el centro de gravedad de la barra se encuentra en la mitad de su longitud.

Los precios del aparato y de cada disco de cobre vienen á ser respectivamente de 750 y dos pesetas.

87. Otro de los aparatos empleados para medir las presiones locales y usado por la Artillería inglesa es el propuesto por el Capitan Noble, cuyo fundamento es el aplastamiento que la accion de los gases de la pólvora causa en un cilindro de cobre: la resistencia á la compresion sustituye así á la resistencia á la penetracion, pudiendo considerarse éste medidor como una modificacion del de Rodman.

Consta el aparato de un grano de acero A A (fig. 54) que atornillado en la pared del ánima encierra las demás partes que le constituyen y son una pieza de acero templado en forma de yunque Y, un pequeño cilindro de cobre *c* un compresor C al que vá unido una cápsula obturatriz O: la parte cilíndrica del compresor y la cápsula están contenidas en un tubo *t* movible que se atornilla en el grano: un resorte circular R apoyado sobre la corona superior del tubo ejerce en la cabeza del compresor una presion, que asegura el contacto entre éste, el cilindro y el yunque: otro resorte R′ de doble espiral tiene por objeto centrar el cilindro de cobre.

Pudiendo los gases, á pesar de la cápsula, penetrar en el aparato, tanto la cabeza del compresor como el yunque están provistos de ranuras longitudinales, que por medio de las cuatro canales c′ comunican con la central C′. Para esperimentar se atornilla el aparato de modo que su estremidad E enrase con la superficie interior del ánima, con lo que la base del compresor queda muy próxima á la pared: verificado el disparo, se retira el aparato, se estrae el cilindro y se mide su acortamiento. Si por medio de una máquina de prueba se verifica idéntica compresion podrá medirse por el esfuerzo empleado, el ejercido por los gases de la pólvora, conviniendo proporcionar la seccion del cilindro á la del compresor y á la tension presumible de los gases.

Supónese por algunos que el aparato Noble dá indicaciones más aproximadas que el de Rodman; sin embargo, preciso es convenir en que está sujeto á causas análogas de error, por lo que puede sólo asegurarse que únicamente el método de cilindros suministra teóricamente con suficiente aproximacion el valor de la presion en un punto cualquiera del ánima; pero, como hemos dicho, tampoco es rigurosamente exacto y tiene por otra parte el inconveniente de su estremada lentitud (1).

88. Pudieran emplearse tambien como en 1866 propuso Mr. Tresca, consultado sobre medios dinamométricos para determinar las presiones, cilindros de plomo, de diámetros constantes, que, directamente comprimidos por la accion de los gases darian lugar á que salieran, por un pequeño orificio, cantidades de metal, cuyas longitudes dependerian de las presiones. Si aquellas podian llegar á ser hasta de 5 ó 6 centímetros, dando al canal por el que el metal habia de salir una forma conveniente, la apreciacion de las tensiones podria obtenerse de una manera más precisa, creyendo Morin (2) preferible éste procedimiento á los dos anteriores. Los tres, sin embargo, no permiten obtener de una vez si no es la presion en un punto más ó ménos exac-

(1) Revue d'Artillerie.—Tomo IV.

(2) Rapport fait á l'académie des Sciences: Séance du 28 Decembre 1874.

tamente, y por mucho que con ellos se opere sólo se podrá conocer un número siempre limitado de valores de la tension, que es de por sí muy variable; así es que de mucho tiempo viene estudiándose la manera de determinar esperimentalmente la ley del movimiento de un proyectil en el ánima. Mucho tiempo hace, en efecto, que se indicó la posibilidad de conseguir ésto, para lo cual se propuso abrir en la culata de una pieza un agujero que dejará pasar á frotamiento suave una varilla cilíndrica adaptada al proyectil que hubiera de dispararse y unir á ésta varilla un estilete que trazaria sobre un disco giratorio la curva representacion de la ley del movimiento; pero no llegó por entónces á esperimentarse de ésta manera.

Más tarde Constantinoff, por medio de un aparato electro-magnético y cronométrico, ideado para determinar los instantes sucesivos de los pasos de un mismo proyectil á través de marco-blancos colocados á diferentes distancias, propúsose tambiem la misma investigacion y, yá en nuestros dias, Noble, valiéndose de su cronóscopo elétrico, ha podido determinar los tiempos empleados por el proyectil en recorrer longitudes de ánima conocidos y representar por puntos la ley del movimiento, deduciendo luego gráficamente las velocidades y los esfuerzos.

Las indicaciones, sin embargo, que se han obtenido sobre los efectos que se producen en los primeros instantes al dar fuego á la carga, y en los que importa mas conocer la variacion de las tensiones, por lo que en ella influyen la inflamacion, la combustion y el espacio en que los gases se desarrollan por los cambios de lugar del proyectil, las indicaciones en estos primeros instantes son muy incompletas, pudiéndose ya hoy satisfacer esta necesidad merced al aparato ideado por el capitan Ricq, que vamos á dar á conocer lijeramente, valiéndonos de la nota que redactada por el autor, presentó el General Morin á la Academia de Ciencias de París.

89. El Capitan Ricq ha realizado la idea, que tiempo há se espresó segun queda dicho, de que un proyectil sujeto á la accion de los gases de la pólvora trace directamente sobre un cilindro giratorio una curva, representacion gráfica de la ley de su movimiento, y sabido es que conocida la relacion $s=f(t)$ se puede determinar la fuerza por medio de la que liga á esta con la aceleracion $F=mj$.

De la misma manera que hemos dicho al exponer el método de cilindros, como que el presente puede mirarse como una generalizacion de él, para conocer la ley de variacion de las presiones en un punto de una capacidad cualquiera en que haya de comburarse una carga de pólvora, se practicará un pequeño canal destinado á recibir el proyectil que se emplee, disponiendo el aparato en el sitio conveniente que exija el uso á que se le destina: desde luego se concibe la necesidad de que el canal sea de reducidas dimensiones, por ser preciso, para no alterar la ley de presion en aquel punto, que el aumento de volúmen que resulte por la marcha del proyectil en el canal sea despreciable con relacion al volúmen total de los gases; igualmente conviene, y mas contrayéndonos á las bocas de fuego á que nos referimos en este estudio, emplear dos proyectiles, uno ligero para obtener las presiones en los primeros instantes, y otro mas pesado para que imprimiéndole ménos velocidad la carga quede sujeto á su accion durante el tiempo en que el fenómeno se verifica.

El registrador á indicaciones contínuas data de 1873: los primeros ensayos fueron hechos valiéndose de un disco giratorio sobre el cual un estílete solidario del movimiento del proyectil marcaba una curva proponiéndose primeramente investigar si la intensidad de las fuerzas y la velocidad relativamente grande del móvil no impedian el trazado de aquella; los resultados obtenidos dieron lugar á la construccion del aparato, sustituyendo el disco por un cilindro giratorio por considerar que una curva referida á un sistema coordenado rectangular ofrece mas exactitud para la representacion; las esperiencias ya verificadas con respecto á las pólvoras han hecho ver la precision con que el aparato funciona y la utilidad que puede reportar para la determinacion de leyes que no bien conocidas todavia son fundamento de importantes cuestiones balísticas.

El registrador se compone esencialmente de un cilindro cuyo eje es horizontal animado de un movimiento de rotacion obtenido por un sistema de ruedas dentadas que le comunican una velocidad de 36 vueltas por 1'': el cilindro que es de cobre en este primer modelo, tiene un espesor de 4^{mm}, la circunferencia de su base es de 1^{m} y su altura 40^{cm}, y está colocado de manera que su eje quede perpendicular al de la pieza y próximamente á su misma altura. Con la velocidad espresada, una longitud de $0^{mm},1$ en la circunferencia cuyo desarrollo se toma por eje de los tiempos, representa

$$\frac{1''}{360000}$$

y este es el límite del error que puede cometerse por que bien se aprecia una décima de milímetro: igualmente, puede decirse que descomponiéndose una duracion de $\frac{1''}{100}$ en 36 períodos iguales, de $\frac{1''}{3600}$ cada uno, el error relativo en la observacion de cada período es de una centésima.

A fin de arreglar la velocidad de rotacion del cilindro se hace uso de un contador que consiste en una regla de acero graduada en milímetros que cae libremente y paralela al fondo del cilindro; este lleva en su base una punta que marca un trazo, en una capa de parafina colocada en una ranura que á lo largo tiene la regla; á cada revolucion del cilindro la fórmula

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

dá la duracion de una vuelta: la velocidad es constante en el intervalo de cierto número de vueltas y el aparato está dispuesto de modo que se aprovechen éstos instantes para que dando fuego automáticamente, se verifique el fenómeno que se desea registrar. Por la precision que se exige y para mayor seguridad, el inventor emplea un segundo contador, cuyas indicaciones contrasten las del primero, admitiendo solo la diferencia de una centésima del valor total.

Este cilindro se recubre con una capa uniforme de parafina y está encerrado dentro de una caja tambien cilíndrica, que tiene una ranura en sentido de una generatriz: en frentre de esta ranura hay un soporte que sirve de guia á una pequeña corredera, en cuyos estremos lleva dos estiletes de acero que penetran en la parafina algunas décimas de milímetro sin esperimentar resistencia sensible; claro es que ligada esta corredera al proyectil marchará con él quedando así trazadas dos curvas que representan la ley de su movimiento.

Para trasladar estas curvas al papel, que se elige de calcar y cuadriculado, abierta la caja que envuelve al cilindro, se coloca aquel sobre éste y oprimiéndole ligeramente con la uña se obtienen sobre el papel, marcando al propio tiempo y mas particularmente los puntos que hayan de servir para el cálculo: pueden emplearse cuantas precauciones aseguren la fidelidad en la representacion, motivo tambien por lo que en cada esperiencia se marca una doble curva y conviene repetirlas para operar con mas probabilidades de acierto.

Representada la ley del movimiento podemos deducir la que rige á las presiones, debiendo verificar el cálculo en sentido inverso para ver si los espacios calculados á partir de las presiones concuerdan con los directamente observados, sirviendo la diferencia que pueda resultar como medida de la exactitud del procedimiento. Teniendo presente que la velocidad y la aceleracion, en el movimiento rectilíneo, tienen por espresiones

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad j = \frac{d^2s}{dt^2};$$

y recordando que por el análisis superior se sustituye á la ley de variacion mas complicada de una funcion una série de variaciones uniformes correspondientes cada una á intervalos infinitamente pequeños, si tomamos sobre el eje de los tiempos subdivisiones de este muy pequeñas, podrán efectuarse los cálculos todos sin necesidad de determinar los valores reales de las presiones y de las velocidades, por que estas son proporcionales á las primeras diferencias de los espacios, como lo son las presiones á las segundas: calculadas estas diferencias, las velecidades y las aceleraciones al fin de los tiempos correspondientes se obtendrán dividiendo las primeras y segundas respectivamente por el intervalo de tiempo y por su cuadrado; y para tener las presiones por último, bastará multiplicar por la masa del sistema en movimiento, proyectil y corredera, dividiendo el producto resultante por la seccion del proyectil, si se desea la presion referida á la unidad de superficie.

Para deducir de las presiones, así calculadas, los espacios, puede considerarse que la curva representante de la ley de variacion de aquellas, es la misma que corresponde á las aceleraciones referidas á la unidad correspondiente y siendo

$$j = \frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{dv}{d t},$$

será $dv = j\,dt$ por cuya integracion podrá obtenerse la curva de las velocidades y análogamente por la relacion $ds = v\,dt$ la de los espacios, si bien será necesario acudir á métodos prácticos para la determinacion de estas cuadraturas. Se han ejecutado con este aparato distintas esperiencias y como muestra de los resultados obtenidos las (fig. 55 y 56 representan la ley del movimiento y la de las presiones, y la siguiente tabla los elementos del cálculo.

Pólvora de cañon ordinaria de pilones.

TIEMPOS á partir del orígen del movimiento: en $\frac{1}{3600}$ de segundo.	en segundos.	PRESIONES: Números proporcionales á las diferencias segundas de los espacios.	Valores efectivos en kilógramos por centímetro cuadrado	VELOCIDADES: Números proporcionales á las diferencias primeras de los espacios.	Valores efectivos en metros por segundo.	ESPACIOS RECORRIDOS: calculados. — En centésimas de milímetro	observados. — En centésimas de milímetro
				0	0,00		
0	0,00000	0	0,00	20	0,72	0	0
1	0,00028	10	20,80	30	1,04	20	20
2	0,00056	25	52,00	55	1,99	50	50
3	0,00084	70	146,00	125	4,50	105	100
4	0,00112	130	270,00	255	9,20	230	230
5	0,00140	190	395,00	445	16,00	485	490
6	0,00168	243	504,00	688	24,80	930	940
7	0,00196	284	612,00	972	35,20	1618	1620
8	0,00224	316	658,00	1288	46,70	2590	2600
9	0,00252	340	708,00	1628	59,80	3878	3890
10	0,00280	338	704,00	1966	71,00	5506	5500
11	0,00308	321	668,00	2287	82,90	7472	7490
12	0,00336	301	628,00	2588	93,30	9759	9800
13	0,00364	281	588,00	2869	104,00	12347	12350
14	0,00392	264	550,00	3133	113,00	15216	15200
15	0,00420	248	518,00	3381	122,00	18349	18340
16	0,00448	234	477,00	3615	131,00	21730	21710
17	0,00476	216	450,00	3831	138,00	25345	25350
18	0,00504	210	437,00	4041	146,00	29176	29000
19	0,00532	200	416,00	4241	153,00	33217	33250
20	0,00560	193	404,00	4434	160,00	37458	37500

Los datos comunes á todas las esperiencias han sido los siguientes: capacidad de la recámara 100 centímetros; peso del proyectil y corredera 610^{grm}; seccion trasversal del proyectil $3^{cc},85$ y 36 vueltas por 1″ velocidad de rotacion del cilindro.

Fácilmente se alcanza por todo lo espuesto la importancia de éste aparato para investigaciones de balística interior y pruebas comparativas de las pólvoras. Las primeras se habrán de referir principalmente á la determinacion en piezas construidas de la ley de variacion de presiones por variedad en los elementos de carga; y el estudio de las propiedades de la pólvora, por la diversa proporcion de sus componentes, se hará mediante él, empleando probetas convenientes, con lo que el conocimiento de sus propiedades se obtendrá independientemente de toda clase de piezas en que haya de usarse.

No hemos descendido á más pormenores, limitándonos á esponer el fundamento del aparato y los primeros resultados con él obtenidos porque su empleo ha indicado algunas modificaciones que el inventor se propone introducir para emprender mas detenidas investigaciones.

90. Terminaremos éste capítulo con las disposiciones que deben adoptarse para determinar algunos elementos ó datos de balística interior, dependientes siempre de tiempos muy cortos, sirviéndonos al efecto del cronógrafo Le Boulangé.

Por lo mismo que los tiempos en que se verifican los fenómenos que se quieren apreciar son muy cortos, debe procurarse que los trazos marcados por la cuchilla sean hechos en la parte superior del cronómetro, pues por ser ésta la de mayor velocidad, tiempos cortos estarán marcados por espacios relativamente grandes; por ésta razon colócase el electro-iman del registrador en la parte superior de la columna, con lo que la disyuncion se señalará por un trazo en la parte superior del mayor de los cartuchos receptores: además el circuito, que primero ha de romperse se hace pasar por el electro-iman del registrador y el segundo por el del cronómetro; de éste modo, el trazo, resultado del tiro, estará debajo de el de la disyuncion; todo cuanto anteriormente dijimos para el arreglo del aparato es aplicable á éste caso. En cuanto á la medida del tiempo, se hará determinando primeramente el de la disyuncion, que no hace falta sea constante en todas las esperiencias, pero sí la misma en disyuncion y tiro; en seguida el de éste y restando ámbos, se obtiene el que se desea: estos tiempos se obtienen, midiendo con auxilio de la regla, las alturas correspondientes, que se aprecian en milímetros y décimas, y despues, valiéndose de las tablas. Puede suceder que la duracion que se investiga sea bastante larga y el trazo por consiguiente quede más bajo que el cartucho superior; entonces, se quita el tope, que tiene el cronómetro y se colocan dos cartuchos. Si se trata, por ejemplo de medir el tiempo trascurrido desde que se dá fuego á la carga hasta que el proyectil llega á la boca de la pieza, se formará el primer circuito valiéndose de un alambre de cobre plateado, su diámetro $0,^{mm}15$, colocado segun dos generatrices opuestas del frictor, pasando por su base inferior; á los estremos de éste hilo se unen los del circuito: para aislar éstos alambres del frictor y fogon, se enrolla un papel en el frictor, disponiendo luégo el alambre como se ha dicho y enrollando un nuevo papel; queda roto éste circuito por romperse el alambre á causa de la combustion del misto del frictor. El segundo circuito se establece, como es sabido, valiéndose de otro alambre colocado en la boca.

Si el objeto fuera medir la duracion de los trayectos que sucesivamente recorre el proyectil dentro del ánima será preciso que él mismo rompa los circuitos en el momento de pasar por los dos puntos que lo determinan. Para conseguir esto puede emplearse el siguiente aparato, que ha servido en Inglaterra con igual objeto, operando con el cronógrafo de induccion de Noble. Consiste este en un grano (fig. 57) hueco G que se atornilla en uno de los pequeños orificios abiertos en la pieza segun una generatriz; dentro de él pasan dos hilos conductores aislados *h h*, cuyos estremos van unidos á los alambres que determinan el circuito; los dos hilos están ligados por otro trasversal *t*, que pasa por un pequeño agujero O del cuchillo interruptor *c*, el cual puede girar alrededor de un eje E fijo en el mismo grano. Colocado éste en la pieza, la punta P del cuchillo está mas baja que la generatriz del ánima correspondiente, pero al paso del proyectil se eleva el cuchillo y rompe el hilo trasversal, cuyos dos estremos, de ésta manera separados, se encuentran en un orificio O' el uno enfrente del otro, pero sin tocarse, con lo que el circuito quedará roto.

Como quiera que la fuerza de los gases de la pólvora, que siempre escapan por el viento, pudiera elevar el cuchillo y verificarse la rotura antes de tiempo, se fija aquel en su posicion saliente por un pequeño travesaño de suficiente resistencia para que aquellos no puedan romperle, pero que cede fácilmente á la accion del proyectil: inútil parece indicar que se necesitarán dos granos colocados en los puntos que limitan la longitud del trayecto que se trata de medir.

Como es imposible preveer todos los casos en que sea necesario determinar un tiempo muy corto, el operador tendrá necesidad de emplear los medios conducentes para que la rotura de los circuitos se verifique cuando sea menester segun el objeto que se proponga.

[illegible]

Si el objeto fuera medir la duracion de los trayectos que sucesivamente recorre el proyectil dentro del ánima será preciso que él mismo rompa los circuitos en el momento de pasar por los dos puntos que lo determinan. Para conseguir esto puede emplearse el siguiente aparato, que ha servido en Inglaterra con igual objeto, operando con el cronógrafo de induccion de Noble. Consiste éste en un grano (fig. [illegible]) [illegible] que se atornilla en uno de los pequeños orificios abiertos en [illegible] dos hilos conductores [illegible] á los alambres que [illegible] por otro [illegible] el cual puede girar [illegible] en la pieza, la punta [illegible] del ánima correspondiente, pero al paso del proyectil se eleva el cuchillo y rompe el hilo transversal, cuyos dos extremos, de este modo separados, se [illegible] sin tocarse, con lo que el circuito quedará roto.

[illegible] por la fuerza de los gases de la pólvora, que siempre [illegible] podrían elevar el cuchillo y verificarse la rotura antes de [illegible] al proyectil, cubierto por un pequeño travesaño [illegible] para que aquellos no puedan [illegible]

CAPÍTULO 4.°

Movimiento de los proyectiles en el aire.

91. Sabido es que en el movimiento de un sistema material cualquiera, el centro de gravedad se mueve del mismo modo que si toda la masa del sistema estuviese concentrada en él y todas las fuerzas esteriores fuesen trasportadas paralelamente á sí mismas á dicho centro: un proyectil, que se mueve en el aire no es sino un sistema material que, animado de una velocidad inicial, está sometido á las acciones de la pesantez y de la resistencia del aire; su movimiento, por tanto, puede estudiarse asimilándolo al de un punto material de la misma masa que aquel y al cual se aplicáran ámbas fuerzas, cuya accion consideraremos que empieza desde el momento en que abandona la boca de la pieza con la impulsion debida á la fuerza de la pólvora, impulsion que hemos procurado apreciar en el capítulo anterior.

La resultante de la resistencia del aire se supone constantemente tangente á la curva descrita por el centro de gravedad, ó sea su trayectoria, y dirigida en sentido contrario á la velocidad: ésto es lo mismo que suponer al proyectil perfectamente esférico y homogéneo, y no presentando circunstancia alguna capaz de alterar su movimiento de traslacion. Esta trayectoria, á que se dá el nombre de *normal*, es la que se determina bajo la anterior hipótesis, considerando luégo como causas que la alteran, las condiciones reales del proyectil, diversas de las teóricamente asignadas.

En éste supuesto y comprendida la trayectoria en el plano vertical determinado por la velocidad inicial, toda vez que en éste se halla de continuo la resultante de las fuerzas que obran sobre el móvil bastará para determinar su movimiento conocer las proyecciones de las aceleraciones que las fuerzas le imprimen sobre dos ejes cualesquiera trazados en el plano en que el movimiento se efectúa.

92. Sea (fig. 58) $y\,o\,x$ el sistema á que se refiere el movimiento; llamemos v la velocidad del proyectil en un punto cualquiera A, t, el tiempo empleado en llegar á él; r_1 el rádio de curvatura de la trayectoria en éste punto y φ el áugulo que mide la inclinacion variable de la velocidad.

Las componentes de la aceleracion en un movimiento cualquiera tienen por espresiones $\frac{dv}{dt}$ la tangencial y $\frac{v^2}{r_1}$ la centrípeta, y en este caso las proyecciones de las aceleraciones sobre el rádio de curvatura y sobre el eje de las x, tendrán respectivamente por valor esta, (1)

$$(1) \quad \frac{d(v\cos.\varphi)}{dt} = -\rho\frac{g}{p}\cos.\varphi$$

y la primera

$$(2) \quad \frac{v^2}{r_1} = g\cos.\varphi.$$

(1) Si proyectáramos las aceleraciones sobre los ejes á que referimos el movimiento, llamando α y β los ángulos que con ellos hace respectivamente la direccion de la resistencia ρ, las componentes de la aceleracion de esta fuerza segun los ejes en el punto cuyas coordenadas sean x é y, son

$$-\rho\frac{g}{p}\cos.\alpha = -\rho\frac{g}{p}\frac{dx}{ds} \quad \text{y} \quad -\rho\frac{g}{p}\cos.\beta = -\rho\frac{g}{p}\frac{dy}{ds}$$

y como la aceleracion de la pesantez es igual á la componente $-g$ en direccion del eje de las y, las ecuaciones diferenciales del movimiento serian

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho\frac{g}{P}\frac{dx}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \rho\frac{g}{P}\frac{dy}{ds}.$$

La primera dá

$$-\rho\frac{g}{P} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{ds}{dx} \quad (1)$$

El valor del rádio de curvatura se deduce de la espresion

$$d\varphi = \frac{d\,s}{r_1};$$

pero decreciendo el ángulo φ desde el primer instante, su diferencial es negativa y por tanto

$$r_1 = -\,\frac{d\,s}{d\,\varphi} = -\,\frac{v\,d\,t}{d\,\varphi} \quad \text{por ser} \quad d\,s = v\,d\,t,$$

y sustituyendo en la ecuacion (2)

$$\frac{v^2}{-\,\dfrac{v\,d\,t}{d\,\varphi}} = g\cos.\varphi \quad \text{ó bien} \quad \frac{v\,d\,\varphi}{d\,t} = -\,g\cos.\varphi \quad (3)$$

cuya ecuacion en union con la primera sirven de base, introduciendo una hipótesis sobre la resistencia del aire, á la determinacion del movimiento de los proyectiles.

Como definido un movimiento sus circunstancias todas han de ser conocidas, deberán de aquellas deducirse valores formulares de la velocidad, trayectoria, estension de arco y tiempo empleado en recor-

---

y sustituido en la segunda, convierte á ésta en

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2} = -\,g - \frac{d^2 x}{d\,t^2}\,\frac{d\,s}{d\,x}\,\frac{d\,y}{d\,s} = \frac{d^2 x}{d\,t^2}\,\frac{d\,y}{d\,x} - g.$$

Siendo $\frac{d\,y}{d\,x}$ una funcion de x, que designaremos por z, $dy = z\,dx$ y diferenciando ésta espresion y dividiendo por $d\,t^2$ se halla

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2} = z\,\frac{d^2 x}{d\,t^2} + \frac{d\,z}{d\,t}\,\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{d\,y}{d\,x}\,\frac{d^2 x}{d\,t^2} + \frac{d\,z}{d\,t}\,\frac{d\,x}{d\,t}$$

y si ésta espresion se iguala á la anteriormente encontrada de $\frac{d^2\,y}{d\,t^2}$, tendremos finalmente

$$\frac{d\,z}{d\,t}\,\frac{d\,x}{d\,t} = -\,g \qquad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) definen igualmente el movimiento.

rer uno cualquiera. A éste fin si en las ecuaciones (1) y (3) hacemos $v \cos. \varphi = v_1$, serán

$$(4) \quad \frac{d v_1}{d t} = - \rho \frac{g}{p} \cos. \varphi \quad \text{y} \quad v_1 \frac{d \varphi}{d t} = - g \cos.^2 \varphi \quad (5)$$

y dividiendo la una por la otra con lo cual $d t$ queda eliminada

$$(6) \quad \frac{d v_1}{d \varphi} = \frac{\rho}{p} \times \frac{v_1}{\cos. \varphi}$$

De la ecuacion (5) se deduce

$$(7) \quad d t = - \frac{1}{g} v_1 \frac{d \varphi}{\cos.^2 \varphi}$$

y como

$$d s = v d t = \frac{v_1}{\cos. \varphi} d t, \; d x = v_1 d t, \quad \text{y}, \quad d y = v \operatorname{sen.} \varphi d t = v_1 \frac{\operatorname{sen.} \varphi}{\cos. \varphi} d t,$$

tendremos

$$d s = \frac{v_1}{\cos. \varphi} d t = - \frac{1}{g} v_1^2 \frac{d \varphi}{\cos.^3 \varphi} \quad (8) \quad d x = - \frac{1}{g} v_1^2 \frac{d \varphi}{\cos.^2 \varphi} \quad (9)$$

$$d y = - \frac{1}{g} v_1^2 \times \frac{\operatorname{sen.} \varphi d \varphi}{\cos.^3 \varphi} \quad (10) \quad \text{y por último} \quad r_1 = \frac{v^2}{g \cos. \varphi} \quad (11);$$

las cuales nos dán todos los elementos necesarios, para la resolucion del problema que nos ocupa, siempre que sea posible integrar la ecuacion (6)

$$\frac{d v_1}{d \varphi} = \frac{\rho}{p} \; \frac{v_1}{\cos. \varphi}.$$

93. Hasta hoy sin embargo, no ha sido posible obtener una relacion finita entre el ángulo de proyeccion θ, velocidad inicial V y alcance x,

siendo preciso para conseguirlo, bien sea prescindir de cantidades, cuya influencia se ha considerado insignificante ó bien recurrir á séries irremplazables por espresiones finitas, y que de serlo, sólo permiten cierto grado de aproximacion. Deberá elegirse pues en cada caso, como método de aproximacion el que mejor corresponda á las condiciones especiales del tiro, con tanta mayor necesidad cuanto que éste al ser de distinto género por la variabilidad de los datos que lo determinan, podrá ser estudiado mediante hipótesis, que aceptables en un caso, no podrán serlo en otros: así segun el tiro sea, por grande ángulo de proyeccion y pequeña velocidad ó tiro de mortero; por pequeño ángulo y gran velocidad, ó tiro directo de cañon; por velocidades y ángulos medios, ó tiro por sumersion, éstas hipótesis serán distintas. Pasemos ya á la integracion de las ecuaciones diferenciales del movimiento.

Tomemos la ecuacion (6) y hagamos en ella

$$\frac{\rho}{p}=f(v), \quad \text{convirtiéndose en} \quad \frac{d\,v_1}{d\varphi}=f(v)\,\frac{v_1}{\cos.\,\varphi}.$$

Si la funcion $f(v)$ puede sustituirse por

$$\frac{f(\alpha v \cos.\,\varphi)}{\alpha \cos.\,\varphi}=\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha \cos.\,\varphi},$$

siendo α una constante convenientemente escojida, las variables pueden separarse cualquiera que sea la forma de la funcion. Esta sustitucion puede hacerse sin grande error siempre que el producto de $\alpha \cos.\,\varphi$ difiera muy poco de la unidad para todos los valores que pueda tomar $\cos.\,\varphi$, desde $\varphi=0$, hasta $\varphi=\varphi$.

La sustitucion dá:

$$\frac{d\,v_1}{d\varphi}=\frac{f(\alpha v_1)v_1}{\alpha \cos.^2\varphi}, \quad \text{de donde} \quad \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}=\frac{\alpha\,d\,v_1}{v_1 f(\alpha v_1)}=\alpha\times\frac{d\,(\alpha\,v_1)}{\alpha v_1 f(\alpha v_1)} \quad (1')$$

con cuya trasformacion quedan separadas las variables.

Integrando ámbos miembros, el primero entre los límites θ y φ y el segundo entre los correspondientes αV_1 y αv_1, será

$$\int_{\theta}^{\varphi} \sec.^2 \varphi\, d\varphi = \alpha \int_{\alpha V_1}^{\alpha v_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1) f(\alpha v_1)},$$

ó bien

$$\text{tang.}\, \varphi - \text{tang.}\, \theta = -\alpha \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1) f(\alpha v_1)},$$

de donde el valor de la inclinacion de la tangente á la trayectoria en un punto cualquiera,

$$\text{tang.}\, \varphi = \text{tang.}\, \theta - \alpha \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1 f(\alpha v_1)} \quad (2')$$

En la espresion

$$(9) \quad dx = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi},$$

podemos por $\dfrac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi}$ sustituir su valor, y será

$$dx = -\frac{1}{g} v_1^2 \times \alpha \frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1 f(\alpha v_1)} \times \frac{\alpha^2}{\alpha^2},$$

de dónde

$$\alpha\, dx = -\frac{1}{g} \frac{\alpha v_1\, d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)},$$

é integrando

$$\alpha x = \frac{1}{g} \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{\alpha v_1\, d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)} \quad (3')$$

Efectuando la integracion indicada se obtendrá αx en funcion de los límites de la integral, de donde se podrán deducir los valores αv_1 y de $\frac{1}{(\alpha v_1)^2}$ en funcion de αx y de αV_1. Pongamos pues,

$$(\alpha v_1)=F(\alpha x, \alpha V_1)\ldots.(4') \text{ y } \frac{1}{(\alpha v_1)^2}=\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1) \qquad (5')$$

Pasemos yá á determinar la ecuacion de la trayectoria, espresando antes la inclinacion de la tangente en cada punto conocida su abcisa. A este fin tomemos la ecuacion (9)

$$dx=-\frac{1}{g}v_1^2\frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}:$$

de ella se deduce inmediatamente

$$\frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}=-\frac{g\,dx}{v_1^2}=-\frac{\alpha g\,d(\alpha x)}{(\alpha v_1)^2}=-\alpha g\times d(\alpha x)\times\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1).$$

Integrando será:

$$\tang.\varphi=-\alpha g\int\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1)\,d(\alpha x)+C$$

y definiendo la integral entre los límites 0 y αx que corresponden á $\varphi=\theta$ y $\varphi=\varphi$ será por último

$$\tang.\varphi=\tang.\theta-\alpha g\int_0^{\alpha x}\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1)\,d(\alpha x) \qquad (6')$$

Pero $\tang.\varphi=\frac{dy}{dx}$, luego

$$dy=\tang.\theta\times dx-\alpha g\,dx\int_0^{\alpha x}\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1)\,d(\alpha x), \qquad y$$

de aquí

$$(7')\quad y = x \operatorname{tang.} \theta - g \int_{0}^{\alpha x} d(\alpha x) \int_{0}^{\alpha x} \overline{F}(\alpha x, \alpha V_1)\, d(\alpha x),$$

teniendo en cuenta que y es igual á cero cuando x lo sea.

El tiempo puede deducirse de la ecuacion

$$(7)\quad dt = -\frac{1}{g} v_1 \frac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi},$$

sustituyendo por $\dfrac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi}$ su valor dado por la ecuacion

$$(1')\quad \frac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi} = \alpha \frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1 f(\alpha v_1)},$$

lo que dá

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{\alpha v_1\, d(\alpha v_1)}{\alpha v_1 f(\alpha v_1)};\ \text{y}\ t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha V_1}^{\alpha v_1} \frac{d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)}$$

ó bien cambiando los límites

$$(8')\quad t = \frac{1}{g} \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)}.$$

Si el valor del tiempo quisiera obtenerse en funcion de la abcisa, siendo

$$dt = \frac{dx}{v_1} = \frac{d(\alpha x)}{\alpha v_1}$$

bastaría sustituir por el factor finito su valor deducido de la ecuacion (5') y por tanto

$$t = \int_{0}^{\alpha x} d(\alpha x) \sqrt{\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1)} \quad (9')$$

94. Como anteriormente queda dicho, deberá introducirse en éstas ecuaciones el valor de la resistencia del aire. Variando éste con la velocidad y dividiéndose una trayectoria, en cierto número de partes para su estudio, cada una de éstas exige realmente una hipótesis distinta sobre el valor de aquella fuerza. Faltos de esperiencias directas, bien se admita con Mayeuski que está la resistencia espresada por

$$\rho = A \pi R^2 \frac{\delta'}{\delta} v^2, \; A = 0{,}061,$$

para velocidades desde 530^m hasta 376^m y desde ésta hasta las más pequeñas que se empleen como iniciales ó que el proyectil adquiera por

$$\rho = A \pi R^2 \frac{\delta'}{\delta} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right) \quad \text{en la que} \quad A = 0{,}012 \quad \text{y} \quad r = 186,$$

bien sea la dada por Saint-Robert dependiente como ésta del cuadrado y de la cuarta potencia de la velocidad, ó ya por último se adopte la de Welter

$$\rho = A \pi \frac{\delta'}{\delta} R^2 v^3, \quad \text{siendo} \quad A = 0{,}000142$$

ó la deducida de las esperiencias rusas é inglesas en que $A = 0{,}00014$ será necesario obtener los valores formulares anteriormente espresados, bajo cada una de las hipótesis enumeradas.

95. Supongamos primeramente la resistencia del aire expresada por un monómio, cuyo primer término es proporcional al cuadrado de la velocidad y el segundo á la 4.ª potencia de ésta.

Si hacemos

$$\frac{P}{2 A \pi R^2 g} \; \frac{\delta'}{\delta} = c = \frac{P}{2 A \pi R^2 g},$$

suponiendo igual á la unidad la relacion de densidades, si no se trata de esperiencias sumamente precisas, como $\frac{\rho}{P}=f(v)$ será en este caso

$$\frac{\rho}{P}=f(v)=\frac{v^2}{2gc}\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right);\quad y\quad f(\alpha v_1)=\frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}\left(1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)$$

La ecuacion (2′) nos dá

$$\text{tang.}\,\varphi=\text{tang.}\,\theta-2\alpha g c\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} d(\alpha v_1)\times\frac{1}{(\alpha v_1)^3\left(1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)}$$

sustituyendo por $f(\alpha v_1)$ que entra en aquella su valor y efectuando la division indicada bajo el signo de integral

$$\text{tang.}\,\varphi=\text{tang.}\,\theta-2\alpha g c\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} d(\alpha v_1)\left\{\frac{1}{(\alpha v_1)^3}-\frac{1}{r^2}\times\frac{1}{(\alpha v_1)}+\frac{1}{r^4}\,\frac{\alpha v_1}{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}}\right\}$$

Separando las tres integrales en esta comprendidas y tomándolas entre los límites (αv_1) y (αV_1), tendremos para cada una de ellas

$$\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1)^3}=\frac{1}{2}\,\frac{(\alpha v_1^2)-(\alpha V_1)^2}{(\alpha v_1)^2\times(\alpha V_1)^2},$$

$$-\frac{1}{r^2}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1}=-\frac{1}{r^2}\,l\,\frac{\alpha V_1}{\alpha v_1}$$

$$\frac{1}{r^4}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{d(\alpha v_1)\times(\alpha v_1)}{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}}=\frac{1}{r^4}\left\{\frac{r^2}{2}\,l\left\{1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right\}-\frac{r^2}{2}\,l\left\{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{2r^2}\,l\,\frac{1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}};$$

y multiplicando por $2\alpha gc$, teniendo en cuenta los signos y sumando los valores de las dos últimas resulta ser

$$\frac{\alpha g c}{r^2}\,l\,\frac{V_1^2\left(1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)}{v_1^2\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)},$$

al que hay que agregar el valor de la primera, que reducido es

$$-\frac{1}{\alpha}\times\frac{g c}{v_1^2}\left(1-\frac{v_1^2}{V_1^2}\right),$$

resulta por último

$$\text{tang.}\,\varphi=\text{tang.}\,\theta-\frac{1}{\alpha}\times\frac{g c}{v_1^2}\left(1-\frac{v_1^2}{V_1^2}\right)+\frac{\alpha g c}{r^2}\,l\,\frac{V_1^2}{v_1^2}\times\frac{\left(1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)}{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)},$$

relacion que permite conocer la inclinacion de la tangente en punto de velocidad conocida.

Para hallar el valor de x en funcion de ésta misma velocidad nos valdremos de la ecuacion (3')

$$\alpha x=\frac{1}{g}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{(\alpha v_1)\,d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)}=\frac{1}{g}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{(\alpha v_1)\,d(\alpha v_1)}{\frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}\left\{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right\}},$$

y de ella se deduce

$$x = \frac{2c}{\alpha} \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{\alpha v_1 \left\{ 1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2} \right\}}.$$

Efectuando la division se integra fácilmente observando la completa analogía entre sus várias partes y las de la integral inmediatamente anterior, por lo que resulta

$$x = \frac{c}{\alpha}\, l\, \frac{V_1^2 \left(1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)}{v_1^2 \left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)},$$

y por ella despejando v_1, se obtiene el valor de la velocidad en funcion de la abcisa: así

$$e^{\frac{\alpha x}{c}} = \frac{V_1^2 \left(1 + \frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)}{v_1^2 \left(1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)} \quad \text{y}$$

$$v_1^2 \left(\left\{ 1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2} \right\} e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1^2)}{r^2} \right) = V_1^2,$$

de donde

$$v_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\left\{ 1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2} \right\} e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}}.$$

Si multiplicamos por α^2 los dos miembros de la penúltima ecuacion, obtendremos el valor de

$$\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1), \text{ que era igual á } \frac{1}{(\alpha v_1)^2},$$

$$\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1) = \frac{1}{(\alpha V_1)^2} \left\{ \left\{ 1 + \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2} \right\} e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2} \right\},$$

funcion, que entra en las ecuaciones (6') y (7') de la tangente y de la trayectoria las que se convierten por la sustitucion, la primera en

$$\operatorname{tang.}\varphi = \operatorname{tang.}\theta - \frac{g}{V_1^2}\left\{\frac{c}{\alpha}\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-1\right)-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}x\right\}$$

definida la integral entre los límites marcados, y reducida la espresion; y la segunda es:

$$y = x\operatorname{tang.}\theta - \frac{g}{V_1^2}\left\{\frac{c^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{\alpha x}{c}-1\right)-\frac{1}{2}\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\times x^2\right\}$$

ó bien sacando x por factor en aquella y $\frac{1}{2}x^2$ en esta

$$\operatorname{tang.}\varphi = \operatorname{tang.}\theta - \frac{gx}{V_1^2}\left\{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}-1}{\frac{\alpha x}{c}}\right)-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right\}$$

que espresa la inclinacion de la trayectoria en funcion de x, é

$$y = x\operatorname{tang.}\theta - \frac{gx^2}{2V_1^2}\left\{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right)\frac{\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{\alpha x}{c}-1\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2}-\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right\},$$

ecuacion del arco de la trayectoria que se considere, suponiendo que α varíe sólo de un arco á otro de los en que se divide aquella para su estudio.

Para calcular la duracion de un trayecto, nos valdremos de la ecuacion (8')

$$t = \frac{1}{g}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{d(\alpha v_1)}{f(\alpha v_1)} = \frac{1}{g}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1}\frac{d(\alpha v_1)}{\frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}\times\left(1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)} =$$

$$2\,c \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1)^2 \left(1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}\right)},$$

sustituyendo como anteriormente por $f(v_1)$ el valor correspondiente.

Si se efectúa la division indicada, su cociente es

$$d(\alpha v_1)\left\{\frac{1}{(\alpha v_1)^2}-\frac{1}{r^2}\times\frac{1}{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}}\right\},$$

por lo que la integral que nos dá el valor del tiempo es:

$$2\,c \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} d(\alpha v_1)\left\{\frac{1}{(\alpha v_1)^2}-\frac{1}{r^2}\times\frac{1}{1+\frac{(\alpha v_1)^2}{r^2}}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{\alpha v_1}-\frac{1}{\alpha V_1}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{r}\left(\text{arc. tang.} = \frac{\alpha V_1}{r} - \text{arc. tang.} = \frac{\alpha v_1}{r}\right)\right\} 2\,c.$$

A fin de poner el valor del tiempo en funcion de x, bastará multiplicar y dividir por $\alpha V_1 x$, con lo cual se trasformará su espresion en

$$t = \frac{x}{V_1} \times \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1 - \frac{\alpha V_1}{r}\left(\text{arc. tang.} = \frac{\alpha V_1}{r} - \text{arc. tang.} = \frac{\alpha v_1}{r}\right)}{\frac{\alpha x}{2\,c}},$$

y poniendo por v_1 su valor, que es

$$v_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right) e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}}$$

queda por último

$$t = \frac{x}{V_1} \times \left\{ \frac{\sqrt{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right) e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2} - 1}}{\frac{\alpha x}{2c}} - \frac{\frac{\alpha V_1}{r}\left\{ \text{arc. tang.} \frac{\alpha V_1}{r} - \text{arc. tang.} = \frac{\frac{\alpha V_1}{r}}{\sqrt{\left(1+\frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}\right) e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha V_1)^2}{r^2}}} \right\}}{\frac{\alpha x}{2c}} \right\}$$

96. Tales son las fórmulas que en la hipótesis de la resistencia del aire proporcional al cuadrado y á la cuarta potencia de la velocidad, nos determinan las circunstancias del movimiento. Pasemos á encontrar las correspondientes á la hipótesis de ser aquella solamente proporcional al cuadrado de la velocidad, esto es:

$$\rho = A \pi R^2 \frac{\delta'}{\delta} v^2 \quad \text{ó bien} \quad \rho = A \pi R^2 v^2$$

De análoga manera haremos

$$c = \frac{P}{2 A \pi R^2 g},$$

y como

$$f(v) = \frac{\rho}{P} = \frac{v^2}{2\, g\, c}, \quad \text{será} \quad f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha v_1)^2}{2\, g\, c}$$

y por tanto

$$\text{tang.}\, \varphi = \text{tang.}\, \theta - \frac{g\, x}{V_1^{\,2}} \; \frac{\left(e^{\frac{\alpha x}{c}} - 1\right)}{\frac{\alpha x}{c}}$$

porque, siguiendo el sistema establecido se encuentra el valor de tang. φ en funcion de la velocidad, sustituyendo en la fórmula (2') por $f(\alpha v_1)$ su igual en este caso $\frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}$, lo que dá

$$\text{tang.}\varphi = \text{tang.}\theta - gc\alpha\left(\frac{1}{(\alpha v_1)^2} - \frac{1}{(\alpha V_1)^2}\right) = \text{tang.}\theta - \frac{1}{\alpha} \times \frac{gc}{v_1^{\,2}}\left(1 - \frac{v_1^{\,2}}{V_1^{\,2}}\right):$$

si despues, en la (3'), se hace idéntica sustitucion, resulta

$$\alpha x = 2c \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d_{\cdot}(\alpha v_1)}{(\alpha v_1)} = 2\, c. l. \frac{\alpha V_1}{\alpha v_1}, \quad \text{y} \quad e^{\frac{\alpha x}{c}} = \frac{(\alpha V_1)^2}{(\alpha v_1)^2}$$

y de aquí, la velocidad v_1 en funcion de la abcisa;

$$v_1 = \frac{V_1}{\sqrt{e^{\frac{\alpha x}{c}}}}.$$

Desde luego se vé que

$$\frac{1}{(\alpha v_1)^2} = \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}}{(\alpha V_1)^2}$$

y sustituyendo en la ecuacion (6')

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \alpha g \int_0^{\alpha x} \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}}{(\alpha V_1)^2}\, d(\alpha x),$$

cuya integracion dá

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \frac{gc}{\alpha V_1^{\,2}}\left(e^{\frac{\alpha x}{c}} - 1\right),$$

ó bien

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \frac{g\,x}{V_1{}^2} \times \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - 1}{\frac{\alpha x}{c}}.$$

Si en la ecuacion (7')

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta - g \int_0^{\alpha x} d\,(\alpha\,x) \int_0^{\alpha x} \overline{\mathrm{F}}\,(\alpha\,x, \alpha\,V_1)\,d\,(\alpha\,x)$$

ponemos por

$$\overline{\mathrm{F}}\,(\alpha\,x, \alpha\,V_1) \text{ su igual } \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}}{(\alpha\,V_1)^2},$$

resulta

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta - g \int_0^{\alpha x} d\,(\alpha x) \int_0^{\alpha x} \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}}{(\alpha\,V_1)^2}\,d\,(\alpha\,x) =$$

$$x\,\text{tang.}\,\theta - g \int_0^{\alpha x} d\,(\alpha x) \times \frac{c}{\alpha^2\,V_1{}^2} \left(e^{\frac{\alpha x}{c}} - 1 \right) =$$

$$x\,\text{tang.}\,\theta - g \left\{ \frac{c^2}{\alpha^2\,V_1{}^2} \times e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{c^2}{\alpha^2\,V_1{}^2} - \frac{c}{\alpha^2\,V_1{}^2} \times \alpha\,x \right\} =$$

$$x\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g\,x^2}{2\,V_1{}^2} \left\{ \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{\alpha x}{c} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2} \right\}$$

ecuacion de la trayectoria.

El tiempo

$$t = \frac{x}{V_1}\left\{\frac{e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha x}{c}} - 1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha x}{c}}\right\}$$

se deduce de la ecuacion (8′) cuyo segundo miembro, se reduce despues de integrar, sustituyendo por $f(\alpha v_1)$ su igual $\frac{(\alpha v_1)^2}{2gc}$,

$$\text{á} \quad 2c\left\{\frac{1}{\alpha v_1} - \frac{1}{\alpha V_1}\right\};$$

en que poniendo por v_1 su igual $\frac{V_1}{e^{\frac{1}{2}\frac{\alpha x}{c}}}$ y sacando x factor comun, dá la espresion anterior.

97. Por último, las ecuaciones que resuelven la cuestion en el caso de que la resistencia del aire sea proporcional al cubo de la velocidad, se deducen siguiendo el procedimiento que hemos empleado. Así,

$$c = \frac{P}{A g \pi R^2} \quad y \quad \frac{\rho}{p} = f(v) = \frac{v^3}{gc} = \frac{(\alpha v_1)^3}{gc},$$

y de la ecuacion (2′)

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \alpha g c \int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d(\alpha v_1)}{(\alpha v_1)^4} = \frac{gc}{3\alpha^2 v_1^3}\left(1 - \frac{v_1^3}{V_1^3}\right),$$

inclinacion de la trayectoria en funcion de la velocidad.

La (3′) dá

$$\alpha x = c\left\{\frac{1}{(\alpha v_1)} - \frac{1}{(\alpha V_1)}\right\}$$

haciendo en aquella la repetida sustitucion, y por tanto

$$x = \frac{c}{\alpha^2 V_1} \left\{ \frac{V_1}{v_1} - 1 \right\};$$

despejando en ésta v_1, resultará

$$v_1 = \frac{V_1}{1 + \frac{\alpha^2 V_1 x}{c}},$$

que permite conocer la velocidad en funcion de la abcisa.

Si en el valor de αx despejamos $\frac{1}{(\alpha v_1)}$, formaremos la funcion

$$\overline{F}(\alpha x, \alpha V_1) = \frac{1}{(\alpha v_1)^2} = \left\{ \frac{\alpha x}{c} + \frac{1}{\alpha V_1} \right\}^2,$$

la que sustituida en la ecuacion (6') dá

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \alpha g \int_0^{\alpha x} \left(\frac{\alpha x}{c} + \frac{1}{\alpha V_1} \right)^2 d(\alpha x) =$$

$$\text{tang.}\,\theta - \alpha g \left\{ \frac{1}{c^2} \times \frac{\alpha^3 x^3}{3} + \frac{\alpha x}{(\alpha V_1)^2} + \frac{2}{c \alpha V_1} \times \frac{\alpha^2 x^2}{2} \right\} =$$

$$\text{tang.}\,\theta - \frac{g x}{V_1^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 V_1}{c} x + \frac{1}{3} \times \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 \times x^2 \right\}$$

Si tambien sustituimos el valor de $\overline{F}$ en la ecuacion (7') obtendremos la de la trayectoria, dando el cálculo

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta - g\int_0^{\alpha x} d(\alpha x)\left\{\frac{\alpha^3 x^3}{3\,c^2} + \frac{\alpha x}{(\alpha V_1)^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{c\,\alpha V_1}\right\} =$$

$$x\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g x^2}{2\,V_1^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V_1}{c}\,x + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c}\right)^2 x^2\right\}.$$

Ultimamente el tiempo se deducirá fácilmente de la ecuacion (8′)

$$t = \frac{1}{g}\int_{\alpha v_1}^{\alpha V_1} \frac{d\,(\alpha v_1)}{\frac{(\alpha v_1)^3}{g\,c}} = \frac{c}{2}\left\{\frac{1}{(\alpha v_1)^2} - \frac{1}{(\alpha V_1)^2}\right\},$$

y si en ésta espresion, ponemos por v_1 su valor $\dfrac{V_1}{1 + \dfrac{\alpha^2 V_1 x}{c}}$,

$$t = \frac{c}{2} \times \frac{\dfrac{\alpha^4 V_1^2 x^2}{c^2} + \dfrac{2\,\alpha^2 V_1 x}{c}}{\alpha^2 V_1^2} = \frac{x}{V_1}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2 V_1}{c}\,x\right\}.$$

98. La cantidad c es funcion del peso del proyectil de su rádio y del coeficiente $\partial k = A$, dándosele el nombre de coeficiente balístico; siendo su valor $\dfrac{P}{2\,A\pi R^2 g}$ en las dos primeras hipótesis y $\dfrac{P}{A\pi R^2 g}$ en la última, y variando aquel con el de A, sólo se han calculado los valores de $\dfrac{P}{\pi R^2 g}$, correspondientes á los proyectiles esféricos en uso, siendo $g = 9^m{,}801913$, valor de la gravedad en Segovia.

Proyectil de	Rádio medio en centímetros.	Peso en kilógramos.		Valores de $\frac{P}{\pi R^2 g}$
C. 28^{cm} proyectil H	13,79		78	126,62
C. 28^{cm} proyectil A*c*	13,86		87	141,23
C. 15^{cm}	7,49		11,84	68,64
C. 13^{cm}	6,54		7,82	59,24
C. 12^{cm}	5,92		5,86	54,26
C. 10^{cm}	5,16		3,79	45,66
C. 8^{cm}	4,06		1,95	39,00
M.° 32^{cm}	16,09	Peso de carga.....	73,61 / 3,68 } 77,29	96,52
M.° 27^{cm}	13,56	Peso de carga.....	48,76 / 1,84 } 50,60	91,27
O. 21^{cm}	10,68	Peso de carga.....	21,16 / 0,92 } 22,08	63,08
O. 16^{cm}	8,20	Peso de carga.....	11,04 / 0,46 } 11,50	53,34

99. A fin de apreciar á primera vista la influencia que las distintas hipótesis sobre la resistencia del aire ejercen en la determinacion analítica del movimiento en el cuadro siguiente se resúmen las fórmulas que corresponden á cada una de aquellas.

Fórmulas correspondientes al vacío $\rho = 0$.

$$y = x \text{ tang. } \theta - \frac{x^2}{4h\cos.^2\theta} = x \text{ tang. } \theta - \frac{g x^2}{2 V_1^2}$$

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } \theta - \frac{g x}{V_1^2}$$

$$v = \mathrm{V}.\ \frac{\cos.\ \theta}{\cos.\ \varphi}$$

$$t = \frac{x}{\mathrm{V}_1}$$

$$\rho = \mathrm{A}\,\pi\,\mathrm{R}^2\,\frac{\delta'}{\delta}\,v^2\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right)$$

$$y = x \operatorname{tang.} \theta - \frac{g\,x^2}{2\,\mathrm{V}_1{}^2}\left\{\left(1 + \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right)\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{\alpha x}{c} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2} - \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right\}$$

$$\operatorname{tang.} \varphi = \operatorname{tang.} \theta - \frac{g\,x}{\mathrm{V}_1{}^2}\left\{\left(1 + \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right)\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - 1}{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right\}$$

$$v = \mathrm{V}.\ \frac{\cos.\ \theta}{\cos.\ \varphi} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}}}$$

$$t = \frac{x}{\mathrm{V}_1} \times \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}} - 1}{\frac{\alpha x}{2\,c}}$$

$$\frac{\frac{\alpha\,\mathrm{V}_1}{r}\left\{\operatorname{arc. tang.} \frac{\alpha\,\mathrm{V}_1}{r} - \operatorname{arc. tang.} \frac{\frac{\alpha\,\mathrm{V}_1}{r}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{(\alpha\,\mathrm{V}_1)^2}{r^2}}}\right\}}{\frac{\alpha x}{2\,c}}$$

$$\rho = A \pi R^2 \frac{\delta'}{\delta} v^2$$

$$y = x \text{ tang. } \theta - \frac{g x^2}{2 V_1^2} \cdot \left\{ \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - \frac{\alpha x}{c} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2} \right\}$$

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } \theta - \frac{g x}{V_1^2} \left\{ \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}} - 1}{\frac{\alpha x}{c}} \right\}$$

$$v = V. \frac{\cos. \theta}{\cos. \varphi} \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha x}{c}}}$$

$$t = \frac{x}{V} \left\{ \frac{e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha x}{c}} - 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha x}{c}} \right\}$$

$$\rho = A \pi R^2 \frac{\delta'}{\delta} v^3$$

$$y = x \text{ tang. } \theta - \frac{g x^2}{2 V_1^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 V_1}{c} x + \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 x^2 \right\}$$

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } \theta - \frac{g x}{V_1^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 V_1}{c} x + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 x^2 \right\}$$

$$v = V. \frac{\cos. \theta}{\cos. \varphi} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2 V_1}{c} x}$$

$$t = \frac{x}{V_1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 V_1}{c} x \right\}$$

100. El exámen de estas espresiones enseña que las fórmulas del movimiento en el aire son las mismas que en el vacío nos dán las diversas circunstancias del movimiento, sin más que estar multiplicadas por ciertas funciones mayores siempre que la unidad por ser esta el primero de sus términos y todos los demás positivos: esta consideracion nos permite desde luego comparar unas con otras, deduciéndose de esta comparacion que en ciertos casos prácticos no nos separaríamos mucho de la realidad, haciendo uso de las del vacío.

Si nos fijamos en las ecuaciones de la trayectoria, vemos que las ordenadas, cuando se toma en cuenta la resistencia del aire, son menores que las correspondientes, á las mismas circunstancias, en el vacío, puesto que al primer término x tang. θ se sustrae en el último caso la cantidad $\frac{gx^2}{V_1^2}$, mientras que en las de la atmósfera esta cantidad sustraendo está siempre multiplicada por funciones cuyo valor hemos dicho escede á la unidad; así la trayectoria en el aire está por bajo de la que el proyectil describiría en el vacio y el alcance es menor.

De la misma manera y por igual razon las espresiones que nos dán la inclinacion de la trayectoria en uno y otro caso, manifiestan que para una misma abcisa la tangente á la trayectoria en el aire tiene menos inclinacion con respecto al eje de las x, que la tangente á la trayectoria en el vacío, por lo tanto la curvatura de la primera es mas pronunciada que la de la segunda.

La velocidad en un punto cualquiera, ó velocidad remanente en el vacío no difiere de la que el proyectil tiene en la atmósfera sino en estar dividida esta por una de dichas funciones; así pues conserva el proyectil ménos velocidad en la atmósfera que en el vacío. Por último, el mismo exámen enseña que la duracion del trayecto es mayor en aquella que en esta.

Por otra parte, como todas estas funciones han provenido de las distintas hipótesis hechas sobre la resistencia del aire y con ellas varian, fácilmente se comprende que cuantas diferencias se desprenden de la comparacion establecida serán tanto mayores como sea la influencia que ejerza en el movimiento aquella fuerza; y como quiera que al ocuparnos de la determinacion de ésta vemos que para proyectiles de grandes peso y calibre, animados de pequeña velocidad no era grande su influencia, podrá tomarse con aproximacion suficiente para valores de las diversas circunstancias del movimiento en el aire, los calculados en el vacío, en cuyo caso se hallan las trayectorias de las bombas lanzadas por morteros de grueso calibre y con pequeña carga de proyeccion.

101. Si para simplificar hacemos á

$$\frac{\alpha x}{c} = z \text{ y á } \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2} = V_0^2$$

todas cuantas funciones entran en las fórmulas correspondientes á ser la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, ó al cuadrado y á la cuarta potencia, se reducen á las siguientes:

$$e^z,\, e^{\frac{1}{2}z},\, \frac{e^z-1}{z}=\psi(z),\, \frac{e^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}z}=\psi\left(\frac{1}{2}z\right),\, \frac{e^z-z-1}{\frac{1}{2}z^2}=\psi_1(z),$$

$$(1+V_0^2)\psi_1(z)-V_0^2=f(z,V_0^2);\quad (1+V_0^2)\psi(z)-V_0^2=f_1(z,V_0^2)$$

$$\sqrt{(1+V_0^2)e^z-V_0^2}=f_2(z,V_0^2),$$

$$\frac{f_2(z,V_0^2)-1-V_0\left\{\text{arc. tang.}=V_0-\text{arc. tang.}\,\frac{V_0}{f_2(z,V_0^2)}\right\}}{\frac{1}{2}z}=f_3(z,V_0^2).$$

Bien se alcanza la sencillez que reporta tener de antemano calculadas estas funciones para los valores, usuales en el tiro, de las variables que entran en ellas: así en el lugar correspondiente pueden verse las tablas que los contienen, habiendo sido dadas las primeras por Didion y hallándose las otras en el tratado de Balística del General Mayeuski; tablas, cuya formacion vamos á esplicar con objeto de hacer su manejo fácil y espedito.

La construccion de las tablas que contienen

$$e^z,\, e^{\frac{1}{2}z},\, \frac{e^z-1}{z}=\psi(z),\, \frac{e^z-z-1}{\frac{1}{2}z^2}=\psi_1(z),$$

se simplifica estraordinariamente por las relaciones que entre estas funciones existen. El valor de la primera, siendo como es, e la base de los logaritmos neperianos está dado por el desarrollo

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

el cual ha permitido calcular la tabla número 2, dispuesta á tres columnas, en las que se hallan respectivamente los valores de z, desde $z=0$ á $z=3$, creciendo de centésima en centésima, los valores correspondientes de la funcion y las diferencias entre dos consecutivos.

La segunda funcion

$$\frac{e^z - 1}{z} = \psi(z),$$

se forma de la primera, restando de su desarrollo el primer término y dividiendo la resta por el segundo; en cuya virtud ha podido fácilmente formarse la tercera tabla que análoga á la anterior, contiene para valores desde $z=0$ á $z=2{,}40$, los valores de la funcion. Si de igual modo, quitamos á esta el primer término y dividimos por el segundo, obtendremos los valores de la funcion

$$\frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2} z^2} = \psi_1(z),$$

calculados en la tabla número 4: con el empleo de estas tres tablas se facilita aun más el cálculo, puesto que á causa de las relaciones enumeradas bastaría la primera, punto de partida, para conocer los valores de las otras. Por este motivo no se calculan los de

$$e^{\frac{1}{2}z},\ \frac{e^{\frac{1}{2}z} - 1}{\frac{1}{2}z},\ \frac{e^{\frac{1}{2}z} - \frac{1}{2}z - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^2};$$

puesto que $\frac{1}{2}z$ no es mas que un valor de z y es claro que en las tablas anteriores hallaremos el valor de la funcion.

102. Las cuestiones que en el manejo de estas tablas pueden presentarse, se reducen á determinar la funcion dada que sea la variable y su recíproca, estén ó no los valores de una ú otra contenidos en las tablas.

A este fin nos valdremos de la fórmula de interpolacion conocida

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \ldots..$$

en la cual u representa la funcion que se busca; u_0, la mas próxima á ella que se encuentra en las tablas; x el valor de la variable correspondiente á aquella funcion; x_0, el de la variable inmediatamente inferior al de x; h, la diferencia constante entre los valores señalados á la variable en las tablas, y Δu_0, la diferencia entre las funciones cuyas variables son x_0 y la inmediata superior.

Los términos siguientes de la fórmula corresponden, como es sabido, á las diferencias de órdenes superiores; de las que prescindimos por que en la práctica se obtiene así una aproximacion bastante, al par que se simplifican los cálculos.

Propongámonos calcular el valor de la funcion $\psi(z)$ para $z=0,6132$; y en este caso la fórmula se convertirá en

$$\psi(0,6132) = 1,3778 + \frac{0,6132 - 0,61}{0,01} \times 0,0076 = 1,3802$$

que es el verdadero valor de la funcion.

Si se desea resolver la cuestion inversa, esto es, dado un valor de la funcion que no se halle en las tablas, conocer el de la variable que lo produce, la misma fórmula nos dá:

$$x = x_0 + h \frac{u - u_0}{\Delta u_0};$$

así, siendo la funcion $\psi(z) = 1,3802$, se tendrá

$$z = x = 0,61 + 0,01 \frac{1,3802 - 1,3778}{0,0076} = 0,61 + 0,0032 = 0,6132$$

103. Las funciones de z y $V_0{}^2$, de que dependen las fórmulas en

la hipótesis de la resistencia proporcional al cuadrado y á la cuarta potencia, se reducen á la unidad por $z=0$, y crecen con z y V_0^2; á su vez, por $V_0^2=0$, la funcion f se reduce á

$$\frac{e^z-1}{z}=\psi(z);\ \text{la } f_1 \text{ á } \frac{e^z-z-1}{\frac{1}{2}z^2}=\psi_1(z);\ \text{la } f_2 \text{ á } e^{\frac{1}{2}z},$$

$$\text{y la } f_3 \text{ á } \frac{e^{\frac{1}{2}z}-1}{\frac{1}{2}z}=\psi\left(\frac{1}{2}z\right).$$

En estas, como anteriormente, las cuestiones que deben resolverse son: dados valores de las variables, se hallen ó no contenidos en las tablas, calcular los que toma la funcion; y tambien, conocido el de ésta y el de una de las variables, estén ó no en las tablas, determinar el correspondiente de la otra.

Las tablas señaladas con los números 5 y 6 contienen valores de funciones para los correspondientes á las variables z y V_0^2, desde $z=0$ hasta $z=1{,}68$, y $V_0^2=0$ hasta $V_0^2=4{,}2$, creciendo la primera de dos en dos centésimas y la segunda de décima en décima: dichas tablas dispuestas en columnas contienen varias casillas; en la primera se han escrito los valores de V_0^2 y en la segunda se hallan á la misma altura los valores que toma la funcion con el de z escrito en la parte superior, así como en la inferior se vé la diferencia, que es constante, entre dos valores consecutivos de funciones correspondientes á uno mismo de z y distintos de V_0^2: á continuacion hay otra casilla, conteniendo nuevos valores de funciones, correspondientes al inmediato de z y á todos los de V_0^2 existiendo, entre cada dos de aquellos, otro que espresa la diferencia entre dos funciones consecutivas, debidas á la variacion de z.

La fórmula de interpolacion que habremos de emplear al efecto es la siguiente:

$$f(z,v)=f(z_0,v_0)+\frac{z-z_0}{h}\times\Delta_z f(z_0,v_0)+\frac{v-v_0}{k}\times\Delta_v f(z_0,v_0)+\ldots\ldots$$

en la que el primer miembro representa la funcion que se busca;

$f(z_0; v_0)$ la inmediatamente inferior á ella, contenida en las tablas; z y v valores de estas variables correspondientes á aquella funcion; z_0 y v_0, valores mas próximos á los anteriores, y que igualmente se encuentran en las tablas;

$$\Delta_z f(z_0, v_0) = f(z_1, v_0) - f(z_0, v_0),$$

siendo z_1 un valor de la variable inmediatamente superior al z y contenido en las tablas;

$$\Delta_v f(z_0, v_0) = f(z_0, v_1) - f(z_0, v_0)$$

teniendo v_1 significacion análoga á la anterior: prescindimos de las diferencias segundas y siguientes por la razon ya espresada, por cuyo motivo solo tomaremos las tres primeras cifras decimales en los cálculos; esto no obstante, calculadas las funciones con cuatro decimales, lo que permite mucho mayor aproximacion de la que se necesita en la práctica ordinaria, las diferencias tabulares que son por tanto unidades del cuarto órden decimal, las tomaremos de tercer órden, separando la última cifra con una coma. Los ejemplos siguientes muestran con toda claridad la marcha que debe seguirse en la resolucion de esta clase de cuestiones.

Vamos á determinar el valor de $f(z, V_0^2)$ para $z = 0{,}9652$ y $V_0^2 = 0{,}5246$. Para llenar las indicaciones de la fórmula escribiremos los términos de la manera que aparece á continuacion:

$f(z_0\, v_0) = f(0{,}96,\ 0{,}05) =$ **1,621**

$\dfrac{z - z_0}{h} \times \Delta_z f(z_0\, v_0) = \dfrac{0{,}9652 - 0{,}9600}{0{,}02} \times 0{,}0166$, que puede

escribirse $\dfrac{52}{200} \times 16{,}6$, en unidades de 3.^{er} órden= 4

$\dfrac{v - v_0}{k} \times \Delta_v f(z_0\, v_0) = \dfrac{0{,}5246 - 0{,}5000}{0{,}1} \times 0{,}0414 = \dfrac{0{,}0246}{0{,}1} \times 41{,}4 =$ 10

$f(z, v) = f(0{,}9652,\ 0{,}5246) =$ 1,635

Si uno de los valores de las variables está en las tablas y el otro no, la cuestion se simplifica, como espresa el siguiente cuadro de las operaciones:

Sean $z = 0,9652$ y $V_0^2 = 0,5$

$f(z_0, v_0) = f(0,96, 0,5) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,621$

$\frac{z - z_0}{h} \times \Delta_z f(z_0, v_0) = \frac{52}{200} \times 16,6 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$

$\frac{v - v_0}{k} \times \Delta_v f(z_0, v_0)$, (por ser $v = v_0$) $= \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0$

$f(z, v) = f(0,9652, 0,5) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,625$

Si el valor de z estuviese en las tablas y no el de V_0^2, el segundo sumando seria el que se redujese á cero.

Recíprocamente vamos á deducir, en los distintos casos que ocurrir pueden, el valor de una de las variables, conocidas la otra y la funcion

Sea $f(z, V_0^2) = 1,635$ y $z = 0,9652$.

En la fórmula de interpolacion pueden despejarse, segun se trate de hallar el valor de z ó de V_0^2, respectivamente

$$\frac{z - z_0}{h} \Delta_z f(z_0, v_0) \quad \text{ó} \quad \frac{v - v_0}{k} \Delta_v f(z_0, v_0),$$

que es lo que corresponde en el presente caso, y su valor será dado por la espresion

$$\frac{v - v_0}{k} \Delta_v f(z_0, v_0) = f(z, v) - f(z_0, v_0) - \frac{z - z_0}{h} \Delta_z f(z_0, v_0).$$

El cálculo puede disponerse del siguiente modo:

$f(z, v) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ 1,635

$-f(z_0, v_0) = \left\{\begin{array}{l}\text{Este valor debe buscarse en la casilla} \\ \text{correspondiente al valor de } z \text{ inmedia-} \\ \text{tamente inferior al dado, siendo así} \\ \text{aquel el mas próximo al de la funcion} \\ \text{dada.}\end{array}\right\} = -$ 1,621

$-\frac{z - z_0}{h} \Delta_z f(z_0, v_0) = \frac{0{,}9652 - 0{,}96}{0{,}02} \times 16{,}6 = \dots\dots\dots -$ 4

$\frac{v - v_0}{k} \times \Delta_v f(z_0, v_0) = \dots\dots\dots\dots$ 0,010

Fácil será yá de esta espresion deducir el valor de v, habiéndose visto que v_0 es igual al valor 0,5 de V_0^2 correspondiente á la funcion 1,621; resultando dicho valor

$$v = \frac{0{,}010 \times 0{,}1}{0{,}0414} + 0{,}5 = 0{,}5242,$$

que difiere solo del verdadero en la cifra de cuarto orden, lo que es debido á no haber tomado en cuenta mas que los tres primeros decimales en el valor de

$$\frac{v - v_0}{k} \Delta_v f(z_0, v_0).$$

Como queda indicado, el cálculo se verificaría de igual manera si fuera z la variable que hubiera de determinarse, deduciéndose su valor del que se calculara para

$$\frac{z - z_0}{h} \Delta_z f(z_0, v_0).$$

Dada ahora una funcion que no se halle en las tablas y una de las variables cuyo valor se encuentre en ellas, veamos el modo de determinar el de la otra. Sea por ejemplo

$$f(z, V_0^2) = 1{,}625 \quad \text{y} \quad V_0^2 = 0{,}5;$$

el cálculo de aquel será:

$$f(z, v) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad 1{,}625$$

$$-f(z_0, v_0) = \left\{\begin{array}{l}\text{Cuyo valor se encuentra viendo to-}\\ \text{dos los valores de la funcion corres-}\\ \text{pondientes á } V_0^2 = 0{,}5\text{, y tomando de}\\ \text{estas el que más se aproxime al dado;}\\ \text{en la cabeza de la columna se leerá el}\\ \text{de } z_0\text{, de que hay que partir.}\end{array}\right\} = -\ 1{,}621$$

$$-\frac{v - v_0}{k}\Delta_v f(z_0, v_0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - \quad 0$$

$$\frac{z - z_0}{h}\Delta_z f(z_0, v_0) = \frac{z - 0{,}96}{0{,}02} \times 16{,}6 = \dots \quad 0{,}004$$

y de aquí facilmente el valor de z, que resulta ser $z = 0{,}9650$, el cual difiere del que en la cuestion directa propusimos en dos unidades de cuarto órden, diferencia que resulta por el motivo anteriormente espresado.

Las funciones

$$f_2(z, V_0^2) \quad \text{y} \quad f_3(z, V_0^2)$$

están dadas en las tablas números 7 y 8, para valores de z desde $z = 0$ á $z = 1{,}68$ y desde $V_0^2 = 0$ á $V_0^2 = 4{,}2$, siendo la diferencia constante de aquellos de 0,02 y de 0,1 la de estos: en ellas ha debido aumentarse una casilla correspondiente á las diferencias entre funciones consecutivas, que teniendo el mismo valor de z, difieren por el de V_0^2. Las cuestiones á que pueden dar lugar estas tablas son las mismas y es tambien el mismo su manejo.

No hemos hablado de las funciones que acompañan á las fórmulas que se refieren á la hipótesis de ser la resistencia del aire proporcional al cubo de la velocidad, por que sin necesidad de tablas, empleando el método seguido por Weltter en sus lecciones de Balística, se obtienen con suficiente aproximacion para lo que la práctica ordinaria exige, como veremos en la resolucion de problemas sobre el tiro.

104. Para integrar las ecuaciones diferenciales del movimiento

hemos sustituido por $f(v)$ la espresion $\frac{f(\alpha v \cos.\varphi)}{\alpha \cos.\varphi}$, en la cual, como se ha dicho, el error cometido será menor á medida que $\alpha \cos.\varphi$ se aproxime mas á la unidad, para todos los valores que $\alpha \cos.\varphi$ puede tomar por los de φ, desde $\varphi=\theta$ á $\varphi=\varphi$; por lo cual el valor de α debe ser igual á un valor medio entre todos los que tome

$$\frac{1}{\cos.\varphi}=\frac{d\,s}{d\,x},$$

para los mismos límites de φ.

Sea O A (fig. 59) un arco de la trayectoria real del proyectil, cuyas inclinaciones en O y A son respectivamente θ y φ, y O A′ un arco de curva, osculatriz de la primera, cuyas inclinaciones estremas en O y A′ son tambien iguales á θ y φ: siempre será posible dividir ambos arcos en cierto número de otros muy pequeños pero finitos y en los que las tangentes en los puntos estremos guarden la misma relacion de igualdad que los arcos totales: las inclinaciones medias de dos arcos correspondientes serán segun esto, las mismas, y la relacion $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ para un arco elemental de la trayectoria real será igual á la relacion $\frac{\Delta s_1}{\Delta x_1}$ en el arco elemental correspondiente de la curva osculatriz; se verificará por tanto la siguiente série de igualdades:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s_1}{\Delta x_1},\ \frac{\Delta s'}{\Delta x'}=\frac{\Delta s_1'}{\Delta x_1'}\,.........;$$

las cuales sumadas miembro á miembro darán:

$$\Sigma\frac{\Delta s}{\Delta x}=\Sigma\frac{\Delta s_1}{\Delta x_1},\ \text{ó sensiblemente}\ \frac{\Sigma\Delta s}{\Sigma\Delta x}=\frac{\Sigma\Delta s_1}{\Sigma\Delta x_1}$$

igualdad tanto mas cierta cuanto la osculacion entre ambas curvas sea de un órden mas elevado y menor la diferéncia entre θ y φ. Como de la relacion hallada, se deduce $\frac{s}{x}=\frac{s_1}{x_1}$, la cuestion queda reducida á calcular en vez de la del arco de trayectoria á su proyeccion, la de estos mismos términos en una osculatriz convenientemente escogida.

::

La derivada de un arco de curva con relacion á su abcisa, tiene por espresion

$$\frac{d\,s}{d\,x}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{d\,x}\right)^2},$$

y en el caso presente deberia sustituirse por

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\text{tang.}\,\varphi,$$

el valor que le corresponda segun la hipótesis adoptada sobre la resistencia del aire, pero cualquiera que ésta sea, tang. φ es funcion de α, lo que imposibilita verificar dicha sustitucion. Sin embargo, el problema podria resolverse fijando de antemano un valor para α, que aproximándose lo posible á su valor medio, pudiera ser sustituido en $\frac{d\,y}{dx}$ y éste entonces en $\frac{d\,s}{dx}$. Investiguemos este valor medio de α.

La velocidad inicial V del movimiento es conocida, y tambien su proyeccion V_1; la velocidad v en el punto estremo A puede ser medida con suficiente aproximacion y ser así su proyeccion v_1 conocida; y como

$$\alpha=\frac{d\,s}{dx}=\frac{\frac{d\,s}{d\,t}}{\frac{d\,x}{d\,t}},$$

será en el punto

$$0,\ \alpha=\frac{V}{V_1}\ \text{y en A},\ \alpha=\frac{v}{v_1};$$

la medida aritmética de estos valores nos dará el de α á que nos venimos refiriendo y por la sustitucion antedicha obtendremos el de

$$d\,s=dx\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2};$$

ecuacion, que, pudiendo ser integrada resolveria la cuestion que nos ocupa. Mas como quiera que la fórmula que de este modo lográsemos seria muy complicada, todos los autores están conformes en sustituir á la curva osculatriz la trayectoria en el vacio; puesto que, aun cuando está considerada en su totalidad difiere mucho de la trayectoria real, al tomar pequeños arcos, de una y otra, cuyas inclinaciones estremas sean iguales, los inconvenientes que aquella sustitucion ofrece no han lugar y se llega á determinar el valor de α con una aproximacion suficiente.

Siendo así y recordando las ecuaciones (8) y (9) párrafo (92) que son

$$ds = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi} \text{ y } dx = -\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}$$

y observando que en la trayectoria parabólica v_1, que representa la componente horizontal de la velocidad, tiene el valor V_1, se tiene

$$s = \frac{V_1^{\,2}}{g}\int_\varphi^\theta \frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi} \text{ y } x = \frac{V_1^{\,2}}{g}\int_\varphi^\theta \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi},$$

por lo que

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi}}{\displaystyle\int_\varphi^\theta \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}}; \text{ ahora bien, } \int_\varphi^\theta \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi} = \text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\varphi$$

$$\text{é } \int_\varphi^\theta \frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi} = \Sigma(\theta) - \Sigma(\varphi),$$

poniendo

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{tang.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi} + \text{log. tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right\} = \Sigma(\varphi):$$

por que en efecto

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\,\varphi}{\cos.^3 \varphi} = \int_0^{\varphi} \text{d. tang.}\, \varphi \times \frac{1}{\cos.\, \varphi};$$

é integrando por partes y teniendo presente que

$$\int \frac{d\,\varphi}{\cos.\, \varphi} = -\log.\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

resulta la espresion anterior, y será por lo tanto

$$\alpha = \frac{\Sigma(\theta) - \Sigma(\varphi)}{\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\varphi}$$

La funcion $\Sigma(\theta)$ se reduce á cero con $\theta = 0$ y cambia de signo cuando cambia el del ángulo; así pues la espresion hallada del valor de α corresponde á un arco tomado por entero en la rama ascendente; si empieza á contarse en la ascendente y termina en la descendente su valor seria

$$\alpha = \frac{\Sigma(\theta) + \Sigma(\varphi)}{\text{tang.}\,\theta + \text{tang.}\,\varphi},$$

y si en la rama descendente todo

$$\alpha = \frac{\Sigma(\varphi) - \Sigma(\theta)}{\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\theta},$$

siendo por último

$$\alpha = \frac{\Sigma(\theta)}{\text{tang.}\,\theta.}$$

cuando el arco termina en el vértice ó bien cuando empieza y acaba con la misma inclinacion en ambas ramas. Con objeto de facilitar los cálculos en el lugar correspondiente se insertan tablas de los valores de

$$\alpha = \frac{\Sigma(\theta) - \Sigma(\varphi)}{\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\varphi}$$

debida al Coronel Virlet, para ángulos que diminuyendo de 5.º en 5.º, desde 75º, sus inclinaciones estremas difieren sucesivamente 5º, 10º, 15º, 20º y 30º; otra calculada por Euler de los valores de

$$\Sigma(\theta) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\text{tang.}\,\theta}{\cos.\,\theta} + \log.\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

para arcos que varian por grados desde 0 hasta 90; y por último la debida á Bezout de los valores correspondientes de

$$\frac{\Sigma(\theta)}{\text{tang.}\,\theta},$$

dispuesta de la misma manera que la anterior: claro es que de necesitarse valores no comprendidos en ellos, se procederá por interpolacion, tomando valores consecutivos de los calculados entre los que los presentados queden comprendidos: dichas tablas están señaladas con los números 9, 10 y 11.

105. Con objeto de conocer el error que se comete al sustituir por $\frac{ds}{dx}$ el valor de α se pone á continuacion la tabla comparativa de los valores de α y de los valores estremos de $\frac{ds}{dx}$ para arcos de diferentes magnitudes é inclinaciones.

Estension de arcos.	Arcos. grados.	Secantes trigonométricas. $\frac{d\,s}{d\,x}$	Valores de $\alpha=\frac{\Sigma(\theta)-\Sigma(\varphi)}{\operatorname{tang}\theta-\operatorname{tang}\varphi}$	Diferencias entre los valores de α y $\frac{d\,s}{d\,x}$	
				en menos.	en más.
5 GRADOS.	60	2,0000			
			1,8699	0,1301	0,1245
	55	1,7454			
			1,6485	0,0969	0,0928
	50	1,5557			
			1,4837	0,0720	0,0695
	45	1,4142			
			1,3589	0,0553	0,0535
	40	1,3054			
			1,2623	0,0431	0,0415
	35	1,2208			
			1,1870	0,0338	0,0323
	30	1,1547			
			1,1253	0,0264	0,0249
	25	1,1034			
			1,0831	0,0203	0,0190
	20	1,0641			
			1,0491	0,0150	0,0138
	15	1,0353			
			1,0247	0,0106	0,0093
	10	1,0154			
			1,0090	0,0064	0,0052
	5	1,0038			
			1,0013	0,0025	0,0013
	0	1,0000			
10 GRADOS.	60	2,0000			
			1,7730	0,2270	0,2173
	50	1,5557			
			1,4270	0,1287	0,1246
	40	1,3054			
			1,2269	0,0785	0,0722
	30	1,1547			
			1,1066	0,0481	0,0425
	20	1,0641			
			1,0372	0,0269	0,0218
	10	1,0154			
			1,0052	0,0103	0,0051
	0	1,0000			
15 GRADOS.	60	2,0000			
			1,6973	0,3027	0,2831
	45	1,4142			
			1,2772	0,1370	0,1225
	30	1,1547			
			1,0887	0,0660	0,0534
	15	1,0353			
			1,0118	0,0235	0,0118
	0	1,0000			

	Estension de arcos.	Secantes trigonométricas. $\frac{ds}{dx}$	Valores de $\alpha = \frac{\Sigma(\theta) - \Sigma(\varphi)}{\text{tang}\,\theta - \text{tang}\,\varphi}$	Diferencias entre los valores de α y $\frac{ds}{dx}$ en más.	en menos.
Arcos contados desde 0°	60	2,0000	1,3802		
	55	1,7454	1,2758	0,6198	0,3802
	50	1,5557	1,2019	0,4696	0,2758
	45	1,4142	1,1478	0,3538	0,2019
	40	1,3054	1,1073	0,2664	0,1478
	35	1,2208	1,0760	0,1981	0,1073
	30	1,1547	1,0531	0,1448	0,0760
	25	1,1034	1,0351	0,1016	0,0531
	20	1,0641	1,0217	0,0683	0,0351
	15	1,0353	1,0118	0,0424	0,0217
	10	1,0154	1,0052	0,0235	0,0118
	5	1,0038	1,0013	0,0102	0,0052
	0	1,0000	1,0000	0,0025	0,0013

En ella vemos que siempre el valor de α se halla comprendido entre los dos de las secantes estremas del arco que se considere; por consiguiente, en toda la rama ascendente y en el orígen de los arcos, se comete un error por defecto, así como es por esceso en el estremo de ellos, sucediendo lo mismo, si bien inversamente en arcos correspondientes á la otra rama, existiendo por tanto una compensacion de errores en cada uno de los en que se considera dividida la trayectoria. Así mismo, su exámen nos manifiesta que á medida que es menor la estension de los arcos; menor es tambien el error cometido al tomar el valor medio α, y de aquí se desprende que el cálculo de una trayectoria será tanto más exacto, cuanto que se la divida en mayor número de partes. Vemos igualmente que á medida que las inclinaciones estremas sean mayores, mayor, es tambien el error cometido al tomar el valor medio α, deduciéndose de esto que al dividir una trayectoria en partes para su cálculo, estas pueden tener tanta menor estension cuanto mas próximas, se hallen al orígen, permitiéndola mayor en la inmediacion al vértice: á estas consideraciones debe ajustarse la eleccion de los puntos de division de una trayectoria, y de cuya eleccion mas conveniente nos ocuparemos al resolver los diversos problemas balísticos.

La octava casilla nos dá los valores de α correspondientes á arcos cuyo orígen es cero; en ella vemos que para el de cinco grados aquel es 1,0013; para el de diez 1,0052; y para el de quince 1,0118; si pues para esta última inclinacion tomamos por α la unidad, claro es que el error que se comete es de 118 unidades de cuarto órden decimal, cuyo error solo modifica las funciones que representan la resistencia del aire, y puede asimilarse á los que introducen las distintas causas que influyen en ella, tal como su densidad; pero las variaciones atmosféricas, cuando son insignificantes no se toman en consideracion en la práctica.

106. Pueden tambien determinarse directamente, por medio de repetidas esperiencias verificadas en circunstancias tan iguales como posible sea, la ecuacion de la trayectoria y las relaciones entre los diversos elementos que hay que considerar en el movimiento de los proyectiles, tales como alcance, ángulo de proyeccion y demás.

Siendo la trayectoria en el vacio dada por la ecuacion

$$y = x \operatorname{tang.} \theta - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos.^2 \theta},$$

la de aquella en el aire debe afectar una forma análoga y podrá por lo mismo representarse por

$$y = x \operatorname{tang.} \theta - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos.^2 \theta} \left(1 + V^2 f(x)\right),$$

en la que el factor

$$\{1 + V^2 f(x)\}$$

responda á la influencia que en el movimiento ejerce la nueva fuerza, resistencia del aire.

La funcion $f(x)$ por esta causa ha de ser tal que se anule con la densidad del aire y como los valores de x no pueden ser sino positivos la funcion tambien lo es, por lo que la curva que á aquella ecuacion corresponde está por bajo de la primera, conforme con lo que ya se ha establecido. Cuando la ordenada sea cero, la ecuacion para representar la trayectoria debe dar dos valores para x; uno, cero y otro, el alcance total y verificándose esto quedará

$$0 = \text{tang.}\,\theta - \frac{g\,X}{2\cos.^2\theta}\left\{\frac{1}{V^2}+f(x)\right\};$$

y como la forma más sencilla que la funcion puede tener es $f(x) = C\,x$, la ecuacion de la trayectoria en el aire será

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g\,x^2}{2\cos.^2\theta}\left\{\frac{1}{V^2}+C\,x\right\}$$

y la que dé el alcance

$$0 = \text{tang.}\,\theta - \frac{g\,X}{2\cos.^2\theta}\left\{\frac{1}{V^2}+C\,X\right\}$$

ó bien

$$\frac{\text{sen.}\,2\,\theta}{g\,X} = \frac{1}{V^2}+C\,X,$$

en la que tenemos el valor de C en funcion del alcance, ángulo de proyeccion y velocidad inicial. En las esperiencias que se hagan para determinarlo habrán de tomarse en cuenta los tres elementos citados, variando cada uno de ellos y juntamente, simplificándose esta determinacion si pudiera prescindirse de la influencia de alguno, tal como el ángulo de proyeccion, dentro de límites bastante estensos. Se ha visto ser esto posible, aunque no haya en ello rigurosa exactitud, cuando el ángulo de proyeccion no pase de 10°, de modo que siendo este un límite superior, cualesquiera que sean los valores de velocidad inicial y alcance, si aquel es menor de 10°, resultan tales los de C, segun esperiencias várias, que solo difieren en pequeñas cantidades y puede considerarse como constante para proyectiles de iguales calibres y densidad.

Estas esperiencias hechas en Francia y en Rúsia han dado para C los siguientes valores:

$$C = 0,00000000\,44 \times \frac{1}{D\,d} \text{ para proyectiles sólidos.}$$

$$C = 0,00000000\,41 \times \frac{1}{D\,d} \text{ para los huecos.}$$

$$C = 0,00000000\,56 \times \frac{1}{D\,d} \text{ para armas portátiles,}$$

en los que D y d representan respectivamente el diámetro y la densidad del proyectil.

Mayor exactitud puede conseguirse, fijándonos por ejemplo en el valor de C para proyectiles sólidos, si en vez de tomar el término medio de los valores dados por el total de las esperiencias hechas en Francia que aparecen en la siguiente tabla, formamos cuatro grupos con los catorce valores, obteniendo así lo que á continuacion de esta se inserta.

PIEZAS.	Velocidad inicial.	Valor de $CDd \times 10^{10}$	Número de tiros de que se ha deducido el valor.
Cañon de 18.	457	43.4	8
Cañon de 12.	455	41.6	120
Cañon de 30 números 1 y 2.	443	42.2	80
Cañon de 18.	429	42.4	80
Cañon de 30 números 1 y 2.	415	47.4	80
Cañon de 30 núm. 3.	415	42.2	60
Cañon de 18.	406	44.4	80
Cañon de 12.	395	41.7	120
Cañon de 30 números 1 y 2.	394	47.9	60
Cañon de 30 número 4.	393	44.4	60
Cañon de 30 núm. 3.	392	43.2	80
Cañon de 18.	382	44.2	80
Cañon de 30 números 1 y 2.	372	47.9	60
Cañon de 30 número 4.	363	48.4	60

Velocidad (metros)	452	416	393.5	372
Valor de $CDd \times 10^{10}$	42.4	44.1	44.3	46.8

En esta vemos que la cantidad CDd decrece á medida que la velocidad inicial aumenta, por lo que al poner aquella en funcion de ésta la forma mas sencilla en que puede hacerse para estudiar su variacion es $CDd = \frac{A}{V^n}$: si en esta sustituimos los cuatro sistemas de valores de V y CDd que contiene la tabla última, se obtendrán cuatro relaciones entre A y n, debiéndose escojer el valor de n de tal manera que cada uno de los cuatro de A sean, sino iguales, muy poco diferentes entre sí, tomando luego el término medio de estos. Siendo

$$n = \frac{1}{2},\ \frac{2}{5}\ \text{y}\ \frac{1}{3},$$

valores que satisfacen á esta condicion, resultan para CDd los siguientes

$$CDd = \frac{0{,}0000000896}{V^{\frac{1}{2}}},\ CDd = \frac{0{,}0000000491}{V^{\frac{2}{5}}},\ CDd = \frac{0{,}0000000329}{V^{\frac{1}{3}}}$$

que comparados con los que dá la esperiencia, no señalan diferencias sensibles.

Se facilita el cálculo del valor de C poniendo la densidad dependiente del peso y diámetro para lo que, tomando por unidades de longitud el metro, de densidad la del agua y de peso el kilógramo, se tiene evidentemente

$$P = 1000\,\frac{\pi D^3 d}{6}\ \text{por lo que}\ Dd = \frac{6P}{10\pi \times (10.D)^2},$$

que puede tambien escribirse

$$\frac{P}{(10.D)^2} = 5{,}236 \times Dd;$$

de donde

$$\frac{P}{(10.D)^2} \times C = 5{,}236 \times CDd;$$

y si espresáramos el diámetro en decímetros

$$C\,D\,d \times 5{,}236 = \frac{P}{D^2}\,C,$$

con lo que las anteriores fórmulas toman la forma

$$\frac{P}{D^2}\,C = \frac{0{,}0000004691}{V^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{P}{D^2}\,C = \frac{0{,}0000002570}{V^{\frac{2}{5}}}$$

$$\frac{P}{D^2}\,C = \frac{0{,}0000001722}{V^{\frac{1}{3}}}$$

107. De lo que precede resulta que mientras la inclinacion de la pieza no esceda de 10° la trayectoria puede ser reemplazada por una curva de tercer grado, cuya ecuacion es

$$y = x\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g\,x^2}{2\cos.^2\theta}\left(\frac{1}{V^2} + C\,x\right),$$

existiendo entre los elementos que determinan el tiro la relacion

$$\frac{\text{sen.}\,2\theta}{g\,X} = \frac{1}{V^2} + C\,X.$$

La derivada de la ecuacion de la trayectoria nos dará la inclinacion de la tangente, y será

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \frac{x}{2\,h\cos.^2\theta}\left(1 + 3\,g\,h\,C\,x\right).$$

Para determinar la velocidad en un punto cualquiera derivaremos la ecuacion última y tendremos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2h\cos.^2\theta}-\frac{3gCx}{\cos.^2\theta},\ \text{y como}\ \frac{dz}{dt}\,\frac{dx}{dt}=-g\quad(\text{nota, § 92.})$$

puede ponerse bajo la forma

$$\frac{dz}{dx}=-g\frac{dt^2}{dx^2}\ \text{ó}\ \frac{dz}{dx}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=-g\frac{dt^2}{dx^2}$$

por lo que, igualando ambas espresiones de $\frac{d^2y}{dx^2}$ tendremos

$$-\frac{1}{2h\cos.^2\theta}-\frac{3gCx}{\cos.^2\theta}=-g\frac{dt^2}{dx^2};$$

de donde

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{g}{\frac{1}{2h\cos.^2\theta}+\frac{3gCx}{\cos.^2\theta}}=\frac{g}{\frac{g}{V^2\cos.^2\theta}+\frac{3gCx}{\cos.^2\theta}}=\frac{V^2\cos.^2}{1+3CV^2x}$$

y por lo tanto

$$v_1=\frac{dx}{dt}=\frac{V\cos.\theta}{\sqrt{1+3CV^2x}}\ \text{ y }\ v=\frac{V\cos.\theta}{\cos.\varphi}\left(1+3CV^2x\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

La duracion del trayecto se deduce del valor de $\frac{dx}{dt}$, que puede escribirse

$$(1+3CV^2x)^{\frac{1}{2}}\times dx=V\cos.\theta\,dt,$$

la que integrada entre los límites 0 y t dá

$$V t \cos.\theta = \frac{2}{9 C V^2}(1+3 C V^2 x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9 C V^2},$$

integrado facilmente el primer miembro por sustitucion, y de esta ecuacion se deduce el valor del tiempo que bajo forma análoga á su espresion en el vacio es

$$t = \frac{x}{V \cos.\theta} \times \frac{2}{9 C V^2 x}\left((1+3 C V^2 x)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

El ángulo de proyeccion se determina por la ecuacion de la trayectoria en la que siendo $y=0$ por serlo x, queda

$$\tang.\theta - \frac{g x}{2 \cos.^2\theta}\left(\frac{1}{V^2} + C x\right) = 0,$$

ó bien

$2 \cos.^2\theta \times \tang.\theta = g x\left(\frac{1}{V^2} + C x\right)$ y de ésta, sen. $2\theta = g x\left(\frac{1}{V^2} + C x\right)$

Para obtener el alcance sustituiremos en la ecuacion últimamente encontrada por V^2 su valor $2 g h$ lo que dará

$$2 g h \text{sen.}\, 2\theta = g x + 2 g^2 h C x^2$$

y llamando X al alcance, su espresion será

$$X = \frac{2 h \text{ sen.}\, 2\theta}{1 + 2 g h C X},$$

que viene en funcion del mismo alcance; mas si este se calcula primeramente en el vacio y el valor hallado se sustituye en el denominador obtendremos el del alcance, el que ahora sustituido en el denominador nos dará uno mas aproximado de aquel, continuando así hasta que los resultados indiquen el grado de exactitud conseguido. Podemos, sin embargo, directamente determinar el valor de alcance y para ello bastará resolver la ecuacion del segundo grado en x que ordenada es

$$X^2+\frac{X}{2\,g\,h\,C}-\frac{\text{sen.}\,2\,\theta}{g\,C}=0$$

y de la que se deduce

$$X=-\frac{1}{2\,V^2C}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2\,V^2C}\right)^2+\frac{\text{sen.}\,2\,\theta}{g\,C}}=$$

$$\frac{1}{2\,C\,V^2}\left\{\sqrt{1+2\,C\,V^2\,\frac{2\,V^2\,\text{sen.}\,2\,\theta}{g}}-1\right\}$$

108. El coeficiente C sensiblemente constante, mientras la inclinacion de la pieza no escede de 10°, crece pasado este límite, por lo que su valor, funcion del ángulo, ha manifestado la esperiencia ser dado por la relacion

$$C'=C\,\frac{1+n\,\text{sen.}^2\,\theta}{1+n\,\text{sen.}^2\,10^0},$$

en la que aparece el nuevo coeficiente n, difícil de determinar, por cuanto los tiros bajo grandes ángulos de proyeccion ofrecen variaciones mas considerables. La circunstancia de que en el tiro de cañones rara vez se apunte por grande elevacion ha sido causa de ser muy limitado el número de esperiencias dirigidas á la determinacion del nuevo coeficiente: las verificadas en Gâvre dieron por valor de él 0,9 y otras mas tarde encaminadas al mismo fin, corroboraron el resultado de las primeras.

109. Esto no obstante, esperiencias mas recientes verificadas en Inglaterra han hecho variar estas fórmulas haciéndolas mas aplicables y aproximadas en la generalidad de los casos.

Las fórmulas, ya modificadas son las siguientes (1). Velocidad en un punto cualquiera de la trayectoria, dependiente de la inicial y de la distancia horizontal á dicho punto

$$v = \frac{V}{1 + c\,V\,x},$$

en la que v velocidad remanente, V la inicial en metros, x distancia horizontal tambien en metros y $c = b \times \frac{R^2}{P}$, siendo R el rádio, en metros, del proyectil y P su peso en kilógramos; unidades estas á que referimos las longitudes y los pesos. El valor de b es 0,004257.

La que dá el alcance

$$X = \frac{1}{2\,C\,V^2}\left\{\sqrt{1 + 2\,C\,V^2\,\frac{2\,V^2\,\text{sen.}\,2\,\theta}{g}} - \cos.\theta\right\},$$

siendo

$$C = \frac{z\,c}{V}; \quad c = b' \times \frac{R^2}{P}; \quad z = 0{,}025$$

para cualquier velocidad hasta la de 365^{m}, y 0,02 para velocidades menores; y $b' = 0,\ 19026$; las demás cantidades tienen la significacion ya conocida.

El ángulo de proyeccion para un alcance y velocidad inicial dados se obtiene por la siguiente:

$$\text{sen.}\,2\,\theta = \left(\frac{1}{V^2} + C\,X\right) g\,X\,a,$$

siendo $a = 0{,}98$.

De
$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{g\,x}{V^2 \cos.^2\theta} + \frac{3\,C\,g\,x^2}{2\cos.^2\theta} + \text{tang.}\,\theta$$

se deduce la inclinacion en un punto cualquiera.

(1) Para mas detalles pueden verse las Nociones de Artillería del ilustrado Brigadier. D. Cándido Barrios, tomo 2.°: páginas 233 y siguientes.

La duracion del trayecto se obtiene por la fórmula

$$T = \frac{X}{V \cos.\theta}\left(\frac{cVX}{2} + \cos.\theta\right);$$

fórmulas todas cuya sencillez en tal que reducen al manejo de una tabla logarítmica la resolucion de los problemas balísticos. Los resultados á que se llega considerando la trayectoria una curva de tercer grado satisfacen por lo menos tanto como los deducidos, adoptando algunas de las fórmulas de la resistencia del aire de que se ha hablado.

110. Puede observarse á este propósito la pequeña diferencia que dán para los vários elementos del tiro diversas fórmulas espresivas de la resistencia del aire, diferencias pequeñas en verdad si se tienen en cuenta las producidas por las irregularidades propias del tiro: las dos siguientes tablas calculadas por Otto demuestran lo indicado.

Distancias.	Velocidad segun diversas leyes de la resistencia del aire.					
	Ley de Newton.	Ley de los cubos.	Ley de Thiroux.	Ley de Euler.	Ley de Didion.	Ley de las 4.as potencias
0	386,9	395,2	390,7	390,8	389,5	406,9
100	371,3	374,5	372,8	372,7	372,3	378,3
200	356,3	355,8	356,1	356,0	356,1	355,0
300	341,8	339,0	340,5	340,5	340,9	335,6
400	328,0	323,6	325,9	326,0	326,5	319,0
500	314,8	309,6	312,2	312,4	313,0	304,6
800	278,1	274,0	275,9	276,3	276,7	271,0
1000	256,0	254,5	255,3	255,4	255,5	253,9
1200	235,7	237,6	236,7	236,6	236,4	239,7
1500	208,3	216,1	212,5	211,7	211,0	222,2

Distancias.	Tiempos del trayecto segun diversas leyes de la resistencia del aire.					
	Ley de Newton.	Ley de los cubos.	Ley de Thiroux.	Ley de Euler.	Ley de Didion.	Ley de las 4.as potencias
100	0,2638	0,2601	0,2620	0,2620	0,2626	0,2552
200	0,5388	0,5341	0,5366	0,5367	0,5373	0,5283
300	0,8254	0,8221	0,8238	0,8237	0,8243	0,8182
400	1,1241	1,1241	1,1241	1,1241	1,1241	1,1241
500	1,4353	1,4401	1,4376	1,4374	1,4370	1,4378
800	2,4501	2,4719	2,4611	2,4593	2,4576	2,4921
1000	3,1998	3,2296	3,2152	3,2129	3,2102	3,2552
1200	4,0141	4,0433	4,0295	4,0270	4,0244	4,0666
1500	5,3687	5,3687	5,3687	5,3687	5,3687	5,3687

Thiroux supone la resistencia proporcional á la potencia $\frac{5}{2}$ de la velocidad.

111. Partiendo del conocimiento de la trayectoria, para hallar la ley de la resistencia de aire (1) en la hipótesis de que esta fuerza le

(1) En general, la determinacion de la ley de la resistencia, conocida que sea la trayectoria que describe el proyectil, se resuelve sencillamente por el cálculo diferencial: veamos como dada aquella por su ecuacion $y = f(x)$ pueden obtenerse la velocidad v y la resistencia ρ,

El valor de tang. $\varphi = \frac{d\,y}{d\,x}$ dá por diferenciacion

$$\frac{d\,\varphi}{\cos.^2\varphi} = \frac{d^2\,y}{d\,x^2}\,d\,x,$$

sea constantemente tangente, procederemos de la siguiente manera.

Diferenciando la ecuacion

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\mathrm{V}\cos.^2\theta}{1+3\,\mathrm{C}\,\mathrm{V}x^2},$$

que hemos hallado al determinar la velocidad tendremos

$$2\,dx\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{V}^2\cos.^2\theta \times -\frac{3\,\mathrm{C}\,\mathrm{V}^2\,dx}{(1+3\,\mathrm{C}\,\mathrm{V}^2x)^2}$$

ó bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3\,\mathrm{C}\,\mathrm{V}^4\cos.^2\theta}{2\,(1+3\,\mathrm{C}\,\mathrm{V}^2x)^2}$$

y si por $(1+3\,\mathrm{C}\,\mathrm{V}^2x)$ ponemos su igual

---

y si ponemos por dx su igual

$$-\frac{1}{g}\,v_1^2\,\frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi} \text{ (ecuacion 9), se obtiene } v_1 = \sqrt{-\frac{g}{\frac{d^2y}{dx^2}}}$$

El valor de v_1 debe ser real y es por tanto necesario que sea positiva la cantidad subradical, y así es en efecto, en virtud de que presentando la trayectoria su convexidad á la x positivas, es negativo el segundo coeficiente diferencial. Ahora bien, como

$$v = \frac{v_1}{\cos.\varphi} = v_1\sqrt{1+\mathrm{tang.}^2\varphi} = v_1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad v = \sqrt{g}\;\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}}$$

Para hallar la resistencia en la ecuacion

$$\frac{dv_1}{d\varphi} = \frac{\rho}{\mathrm{P}}\cdot\frac{v_1}{\cos.\varphi},$$

sustituiremos el valor de dv_1 deducido de la relacion

$$\frac{V^2 \cos.^2 \theta \, dt^2}{d x^2}$$

que se deduce de aquella, se obtiene

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{3 C \left(\frac{d x}{d t}\right)^4}{2 \cos.^2 \theta};$$

y como una de las ecuaciones del movimiento (nota párrafo 92) es

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\rho' \frac{d x}{d s},$$

igualando y despejando será

$$v_1 = \sqrt{-\frac{g}{\frac{d^2 y}{d x^2}}},$$

la que diferenciada dá

$$d v_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{g} \, \frac{\frac{d^3 y}{d x^3} \, d x}{2 \frac{d^2 y}{d x^2} \sqrt{-\frac{d^2 y}{d x^2}}},$$

y si en ésta por $d x$ ponemos el espresado

$$-\frac{1}{g} v_1^2 \frac{d \varphi}{\cos.^2 \varphi}$$

queda

$$d v_1 = \frac{1}{2 \sqrt{g}} \cdot \frac{v_1^2}{\cos.^2 \varphi} \cdot \frac{\frac{d^3 y}{d x^3}}{\frac{d^2 y}{d x^2} \sqrt{-\frac{d^2 y}{d x^2}}} \cdot d \varphi.$$

$$\rho' = \frac{3\,C\,\dfrac{dx^4}{dt^4}\,\dfrac{ds}{dx}}{2\cos.^2\theta}; \text{ pero } v = \frac{ds}{dt} \text{ y } \frac{dx}{ds} = \cos.x$$

y se obtiene por último

$$\rho' = \frac{3\,C\,\dfrac{dx^4}{dt^4}\,\dfrac{ds}{dx}\,\dfrac{ds^3}{ds^3}}{2\cos.^2\theta} = \frac{3\,C\,\dfrac{dx^3}{ds^3}\times v^4}{2\cos.^2\theta} = \frac{3\,C\cos.^3\varphi}{2\cos.^2\theta}\,v^4,$$

esto es la resistencia del aire proporcional á la cuarta potencia de la velocidad; singularidad que solo se esplica por suponer dicha fuerza tangente á la trayectoria, lo que en realidad no sucede por el movimiento de rotacion que, como mas adelante se verá adquieren los proyectiles.

Deduciendo de ésta última $\dfrac{dv}{d\varphi}$ é igualándole al anterior resulta

$$\frac{\rho}{P} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot\frac{v_1}{\cos.\varphi}\cdot\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}\sqrt{-\dfrac{d^2y}{dx^2}}},$$

y poniendo por v_1 y $\cos.\varphi$ sus valores

$$\sqrt{-\frac{g}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}} \text{ y } \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$$

queda

$$\rho = -\frac{P}{2}\,\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

CAPÍTULO 5.°

Propiedades generales de la trayectoria atmosférica.

112. Determinada la ecuacion de la trayectoria en las distintas hipótesis que se han hecho sobre la resistencia del aire, y hallados los valores del tiempo, velocidad, é inclinacion de la tangente, tratemos de analizarlos y deducir las propiedades que de este análisis se desprenden. Esta discusion, puede hacerse sin limitarse á una ley determinada sobre la resistencia de aire, admitiendo solo que esta es funcion de la velocidad y de tal naturaleza, que ella crece con valores crecientes de esta variable, siendo únicamente inferior al peso del proyectil para una velocidad infinitamente pequeña (1).

113. Si nos fijamos primeramente en la velocidad veremos, que á medida que el proyectil recorre la rama ascendente, aquella disminuye de contínuo, tanto á causa de la accion de la pesantez como por consecuencia de la resistencia del aire, en el vértice de la trayectoria deja la pesantez de retardar el movimiento para empezar á acelerarlo, pero no cesa de producir aquel efecto la resistencia del aire, por lo que la velocidad continúa decreciendo hasta tanto que las aceleraciones producidas por ambas fuerzas se igualen, en cuyo punto la velocidad será mínima y á partir del cual aumentará esta, vencida la aceleracion debida á la resistencia del aire por la que la pesantez imprime al proyectil.

---

(1) Puede verse á este propósito el capítulo 3.° de la memoria de Saint-Robert movimiento de los proyectiles en los médios resistentes.

En la práctica, y particularmente en el tiro de cañon, no siempre se encuentra este punto de mínima en la trayectoria que describe el proyectil, sino que sigue disminuyendo la velocidad hasta la de caida que es la mínima de todas. La trayectoria, por ejemplo, del proyectil de 8 c/m hasta la distancia de 3000 metros no presenta punto de mínima velocidad sino una constante disminucion en ella.

Siendo $\frac{\rho g}{P}$ la aceleracion debida á la resistencia del aire, si dentro de la hipótesis establecida anteriormente hacemos $\frac{\rho}{P}=f(v)$, como quiera que la derivada de la velocidad con relacion al tiempo, representa la aceleracion tangencial, $\frac{dv}{dt}$ será igual á la suma de las proyecciones sobre la tangente de las aceleraciones de la pesantez y de la resistencia del aire; así

$$(1)\quad \frac{dv}{dt}=-g(f(v)+\text{sen.}\,\varphi)$$

En la rama ascendente, como φ y sen. φ son constantemente positivos, $\frac{dv}{dt}$ será negativa; luego v y t varian en sentido opuesto, es decir, que si t crece, v decrece; é inversamente, si t disminuye v aumenta. A partir pues de un punto cualquiera situado sobre la rama ascendente, y siguiendo la direccion del movimiento, la velocidad disminuye hasta el vértice de la trayectoria. En la rama descendente, como φ y sen φ son negativos, $\frac{dv}{dt}$ conserva este signo hasta el punto en que la velocidad tome un valor v', que satisfaga á la ecuacion $f(v')+\text{sen.}\,\varphi'=0$; continúa pues decreciendo la velocidad desde el vértice hasta el punto correspondiente á este valor v', en que la aceleracion tangencial es nula. Este valor es un mínimo, por que derivando la ecuacion (1); tenemos

$\frac{d^2v}{dt^2}=-gf'(v)\frac{dv}{dt}-g\cos.\varphi\frac{d\varphi}{dt}$ y como $\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{g\cos.\varphi}{v}$ (párrafo 92 ecuacion 3.)

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-gf'(v)\frac{dv}{dt}+\frac{g^2\cos.^2\varphi}{v} \text{ ó bien } \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{g^2\cos.^2\varphi}{v'}$$

por ser con este valor de v, $\frac{dv}{dt}=0$, cuya segunda derivada es positiva, toda vez que v' no puede ser cero ni negativa (1).

A partir de este punto de mínima velocidad, $\frac{dv}{dt}$ cambia de signo y la velocidad crece con el tiempo hasta alcanzar un valor v'' que satisfaga á la ecuacion

$$f(v'')+\text{sen.}\,\varphi''=0.$$

Este valor de v igual á v'' no es un máximo, puesto que de serlo, v deberia empezar á decrecer desde v'', para lo que sería preciso que $\frac{d^2v}{dt^2}$ llegara á anularse ó pasase á ser negativa; pero como este cambio no es posible y para que hubiese máximo deberia anularse á mas de este segundo coeficiente diferencial el tercero, y ver si el cuarto resultaba negativo, como el valor que anula el segundo es $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ y este valor de φ anula todas las derivadas sucesivas, forzosamente ha de concluirse que v'' no es un máximo, sino un límite hacia el cual tiende la velocidad en la rama descendente á medida que crece el tiempo límite definido por la ecuacion

$$f(v'')+\text{sen.}\,\varphi''=0.$$

Las consideraciones hechas anteriormente hacen ver que en general y tratándose de trayectorias reales no será precisa la determinacion del punto de mínima velocidad, mas si lo fuese, el procedimiento analítico para obtenerlo seria, siguiendo la teoría de máximos y mínimos, poner el valor de v en funcion de x, hallar la primera derivada y continuar los cálculos en la forma que aquella prescribe. Se concibe la dificultad, cualquiera que sea la hipótesis que se adopte sobre la resistencia del aire, de obtener una espresion sencilla de x, por lo que habitualmente se emplea el siguiente método gráfico.

(1) Saint Robert Memoria citada.

Trazada que sea (fig. 60) la trayectoria, se toman várias ordenadas próximas al vértice y en ellas longitudes proporcionales á la velocidad de los puntos á que corresponden: de este modo se obtiene una curva, cuya convexidad mira al eje de las x y el punto M de la trayectoria correspondiente al m, en que la tangente á la curva es horizontal, es el de mínima velocidad.

114. La velocidad, como queda dicho, aumenta á partir del punto de mínima y es indudable que al mismo tiempo aumenta la resistencia del aire; llegará por consiguiente un momento en que ésta equilibre al peso del proyectil y en este caso la velocidad será constante (1) y su valor el límite de la que puede adquirir el proyectil cayendo en el aire; siendo la ecuacion $\rho = P$, de la que nos serviremos para deducir este valor, y como será siempre menor que 376^m, la fórmula de la resistencia será la correspondiente,

$$\rho = A\pi R^2 \frac{\delta}{\delta'} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r}\right).$$

y como hemos llamado á

$$\frac{P}{2A\pi R^2 g} = c, \text{ será } \frac{\rho}{P} = \frac{v^2}{2gc}\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right).$$

(1) El movimiento será uniforme, pero no llegará este límite hasta tanto que la direccion de la trayectoria sea la vertical, por que el crecimiento de la componente tangencial de la pesantez impide que la velocidad pueda ser constante sobre la trayectoria antes de tomar aquella direccion: esto es en efecto lo que en el límite sucede; el cambio de valor que la velocidad del móvil esperimenta con el tiempo es debido únicamente á la fuerza tangencial, así como sus cambios de direccion son debidos á la fuerza centrípeta; y como la componente tangencial de la pesantez es constantemente creciente, de admitir que en un punto de la trayectoria dicha componente fuera igual á la resistencia del aire, que tangencialmente obra, seria en él nula la aceleracion en este sentido, y el elemento siguiente de la trayectoria, por efecto de la fuerza centrípeta, ó componente normal de la pesantez, á que está reducida, formará con la horizontal un ángulo mayor que el elemento precedente; ángulo que vá aumentando á medida que el móvil avanza, puesto que dirigida aquella fuerza segun el rádio de curvatura, y en el mismo sentido que este, la trayectoria vuelve su concavidad hacia las y negativas, teniendo por límite de su direccion la vertical.

Si en esta relacion hacemos $\rho=P$, tendremos para deducir el valor límite de v, que designamos por v'',

$$\frac{v''^2}{2gc}\left(1+\frac{v''^2}{r^2}\right)=1,$$

cuya ecuacion nos dá

$$v''=\pm\sqrt{-\frac{r^2}{2}\pm\sqrt{\frac{r^4}{4}+2gcr^2}}=$$

$$=\pm\sqrt{-\frac{r^2}{2}\pm\frac{r^2}{2}\sqrt{1+\frac{8gc}{r^2}}}=\sqrt{\frac{r^2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8gc}{r^2}}-1\right)}$$

toda vez que la velocidad ha de ser positiva.

El cuadro siguiente espresa las velocidades límites que pueden adquirir nuestros proyectiles por su caida en el aire.

Tabla de las velocidades que pueden adquirir nuestros proyectiles por su caida en el aire.

Proyectiles de	Peso en kg.	Valor de $c=\frac{P}{2A\pi R^2 g}$	Valor de $\sqrt{1+\frac{8gc}{r^2}}-1$	Valor de $v''=\sqrt{\frac{r^2}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{8gc}{r^2}}-1\right\}}$
C. 28^c P. H	78	5275	2,6	212^m
C. 28^c P. A	87	5884	2,7	216^m
C. 15^c	11,84	2860	1,7	171^m
C. 13^c	7,82	2468	1,5	161^m
C. 12^c	5,86	2260	1,4	155^m
C. 10^c	3,79	1902	1,3	149^m
C. 8^c	1,95	1625	1,1	137^m
M.° 32^c	77,29	4022	2,5	207^m
M.° 27	50,60	3803	2,1	190^m
O. 21	22,08	2630	1,6	167^m
O. 21	11,50	2223	1,4	155^m

115. Para terminar estas indicaciones relativas á la velocidad con que los proyectiles recorren su trayectoria demostraremos que para inclinaciones iguales, pero de signos contrarios, la velocidad es mayor en la rama ascendente que en la descendente y que en el punto de caida, estando éste á la misma altura que la boca de fuego, es menor que en el orígen.

En efecto la ecuacion (6, párrafo 92)

$$\frac{\rho}{P}=\frac{d\,(v\cos.\varphi)}{v\,d\,\varphi} \text{ nos dá } \frac{d\,(v\cos.\varphi)}{d\,\varphi}=v\,f(v),$$

que es una cantidad positiva, y como siendo positiva la derivada de una funcion, el crecimiento de esta se verifica en el sentido mismo de el de la variable; la velocidad horizontal $v\cos.\varphi$, disminuirá al propio tiempo que el ángulo φ, esto es, cuando se pasa de la rama ascendente á la descendente; así pues, para un mismo valor de $v\cos\varphi$ en dos puntos, uno de cada rama, v es mayor en la primera que en la segunda.

A fin de ver que el valor de v es menor en el punto de caida que en el orígen, tomemos la ecuacion

$$\frac{d\,v}{d\,t}=-g\,(f(v)+\text{sen}.\,x)=-\rho'-g\,\text{sen}.\,x,$$

y poniendo, á fin de eliminar el tiempo, $d\,t=\frac{d\,s}{v}$, se convertirá aquella en

$$v\,dv=-\rho'\,ds-g\,\text{sen}.\varphi\,ds=-\rho'\,ds-g\,dy, \quad \text{por ser} \quad dy=\text{sen}.\varphi\,ds.$$

Integrando y teniendo presente que en el orígen $v=V$, $s=0$, $y=0$ será:

$$\frac{v^2-V^2}{2}=-\int_0^s \rho'\,ds-gy \text{ ó bien } v^2=V^2-2\int_0^s \rho'\,ds-2gy,$$

espresion que nos permite comparar la velocidad de un punto cualquiera con la inicial, conocidas la longitud del arco que el determina á partir del orígen, la ordenada del punto y la ley de la resistencia del aire. Si pues llamamos v_c la velocidad de caida y s_c la longitud de la trayectoria comprendida entre el orígen y el punto de caida tendremos

$$v^2_c = V^2 - 2\int_0^{s_c} \rho\, ds,$$

puesto que el tercer término se anula con y; relacion que dice ser v_c menor que V, esto es que la velocidad en el punto de caida es mas pequeña que en el de partida.

116. Lo contrario de lo que en la velocidad de caida con respecto á la de proyeccion hemos dicho, sucede con el ángulo de caida; este es siempre mayor que el de proyeccion en terreno horizontal. En efecto, si tomamos la ecuacion que dá el valor de la ordenada en funcion de la inclinacion del punto correspondiente

$$gy = -\int_\theta^\varphi v^2 \operatorname{tang.} \varphi\, d\varphi$$

que resulta de integrar

$$dy = -\frac{1}{g} v_1{}^2 \frac{\operatorname{sen.} \varphi\, d\varphi}{\cos.^3 \varphi}, \text{ (ecuacion 10, párrafo 92.)}$$

por ser $y=0$ en el orígen y en el punto de caida, se tiene

$$0 = \int_\theta^0 v^2 \operatorname{tang.} \varphi\, d\varphi + \int_0^{-\varphi_c} v^2 \operatorname{tang.} \varphi\, d\varphi,$$

de donde

$$\int_0^{-\varphi_c} v^2 \operatorname{tang.} \varphi\, d\varphi = -\int_\theta^0 v^2 \operatorname{tang.} \varphi\, d\varphi = \int_0^\theta v^2 \operatorname{tang.} \varphi\, d\varphi.$$

Designando por φ_c el ángulo agudo bajo el que el proyectil corta al eje de las x, como pertenece á la rama descendente será negativo y deberá cambiarse en la integral anterior φ_c en $(-\varphi_c)$; así resultará

$$\int_0^{\theta} v^2 \operatorname{tang.} \varphi \, d\varphi = \int_0^{\varphi_c} v^2 \operatorname{tang.} \varphi \, d\varphi$$

Demostrado ya que sobre la misma horizontal la velocidad es menor en la rama descendente que en la ascendente, se deduce que los elementos de la integral del segundo miembro son inferiores á los de la del primero; lo que se hace palpable, considerando los arcos infinitesimales anterior y posterior al vértice de la trayectoria, en el principio y fin de cada uno de los cuales la velocidad es mayor respectivamente en el primero que en el segundo; para la igualdad de aquellas dos integrales es pues necesario que sea menor la diferencia entre los límites de la primera que la que exista entre los de la segunda, ó lo que es lo mismo, que φ_c sea mayor que θ; es decir, que el ángulo de caida de los proyectiles es mayor que el de proyeccion.

117. La determinacion de el ángulo de proyeccion que dá el máximo alcance exige, cualquiera que sea la hipótesis sobre la resistencia del aire, derivar el segundo miembro de la ecuacion de la trayectoria con relacion á θ igualado á cero el primero por serlo la ordenada en el punto que fija el alcance, y teniendo así $\frac{d\varphi}{d\theta}$, aplicar la teoría de máximos y mínimos; así podríamos determinar el ángulo que nos daba el máximo alcance y discutir el resultado obtenido; pero los cálculos que de ésta suerte se originan son en estremo complejos, por lo que apelaremos á un procedimiento indirecto.

Desde luego se comprende que ha de haber un ángulo de máximo alcance por la analogía que existe entre el movimiento parabólico y el movimiento real, pero al propio tiempo se vé que en éste no puede ser el de 45°. Si en la ecuacion de la trayectoria cuya forma general es

$$y = x \operatorname{tang.} \theta - \left(\frac{g\,x^2}{2\,V_1^2}\right) \times \gamma(x)$$

multiplicado éste segundo término por una funcion de α y de otras variables hacemos y igual á cero, y despejamos x, será

$$x = \frac{V^2}{g} \times \frac{\text{sen.}\, 2\,\theta}{\gamma(\alpha)} \text{ ó bien } x\gamma(\alpha) = \frac{V^2}{g}\,\text{sen.}\, 2\,\theta$$

El primer miembro de esta ecuacion crece con α y α á su vez crece con θ, en virtud de la mayor curvatura de los arcos. Como $\frac{V^2}{g}$ sen. $2\,\theta$ alcanza su valor máximo por $\theta = 45°$ y como por otra parte una funcion varía por grados insensibles en la proximidad de su máximo, es menester que x varíe poco para valores de θ algo superiores al de 45°. Verificándose aquella igualdad y disminuyendo su segundo miembro con valores de θ superiores á 45° y aumentando al par la funcion $\gamma(\alpha.....)$, claro es que el alcance x debe disminuir.

Si por el contrario θ recibe valores inferiores al de 45°, lo que hace que la funcion $\gamma(\alpha.....)$ disminuya, como $\frac{V^2}{g}$ sen. $2\,\theta$ varía, como hemos dicho, muy poco en la proximidad del máximo, claro es que para que la igualdad subsista x debe aumentarse; pero hay un límite para la disminucion de θ que produce aumento en el alcance, pues fácilmente se concibe que haciéndose sensible el decrecimiento del segundo miembro llegará un instante en que éste decrecimiento obligue el decrecimiento de x: hay pues un límite de crecimiento de alcance por disminucion de θ y este límite se encuentra con un valor para θ menor que 45°.

A medida que la resistencia del aire sea mayor debe serlo tambien la diferencia entre el ángulo de máximo alcance y 45°, y por lo mismo este será más pequeño en el tiro de cañones que en el de morteros, siendo tambien menor en una misma clase de tiro, cuanto menor sea el proyectil ó mayor velocidad inicial tenga, por ser causas que, con otras várias, influyen en el valor de la resistencia. Así es en efecto, porque dependiendo la funcion, que entra en el primer miembro, de la resistencia del aire, con esta aumentará la influencia que ejerce en el decrecimiento de x. La práctica confirma lo que acabamos de decir, pues fija próximamente como ángulo de máximo alcance para morteros el de 42° y el de 29° para cañones.

Para calcular el ángulo de máximo alcance el procedimiento ordinariamente seguido, consiste en calcular cuatro ó cinco alcances con ángulos de proyeccion convenientemente escojidos, tales que los unos sean superiores é inferiores los otros al que se presuma ser el de máximo alcance, conocida por de contado la velocidad inicial: se construye una curva que tenga por abcisas estos ángulos y cuyas ordenadas sean los alcances correspondientes; el punto en que la tangente sea horizontal determinará por su abcisa, el ángulo de máximo alcance.

118. La naturaleza de la trayectoria y la manera de obrar las fuerzas que actúan sobre el móvil dejan entrever cierta diferencia entre las amplitudes de las ramas ascendente y descendente y fácilmente puede demostrarse que es mayor aquella que ésta.

Siendo $d\,x = \dfrac{d\,y}{\text{tang.}\,\varphi}$ si llamamos x_1, la proyeccion sobre el eje de las x de la rama ascendente, ó sea su amplitud, y del mismo modo x_2 la de la descendente, ¡y si es y_1 la altura del tiro, tendremos

$$x_1 = \int_0^{y_1} \frac{d\,y}{\text{tang.}\,\varphi} \text{ y } x_2 = \int_{y_1}^{0} \frac{d\,y}{\text{tang.}\,\varphi} = -\int_0^{y_1} \frac{d\,y}{\text{tang.}\,\varphi}.$$

Como en la rama descendente φ es negativo, en la integral que nos dá el valor de x_2, cambiaremos φ en $-\varphi$ de donde resultará

$$x_2 = -\int_0^{y_1} \frac{d\,y}{\text{tang.}\,(-\varphi)} = \int_0^{y_1} \frac{d\,y}{\text{tang.}\,\varphi},$$

cuyas espresiones de x_1 y x_2, al parecer idénticas, varían por el distinto valor del ángulo en cada rama: en puntos situados sobre la misma horizontal se ha demostrado ser menor φ en la segunda que en la primera, y como los límites de las integrales que nos dán uno y otro valor son los mismos, el de x_1 es mayor que el de x_2.

119. El estudio de la variacion del rádio de curvatura en los di-

ferentes puntos de la trayectoria ayuda al conocimiento de su forma. Con este objeto tomemos su valor deducido de la espresion

$$\frac{v^2}{r_1} = g \cos.\varphi, \quad \text{que nos dá} \quad r_1 = \frac{v^2}{g} \times \frac{1}{\cos.\varphi}.$$

Esta espresion nos dice que el rádio de curvatura es ∞ cuando v igual á ∞ y que disminuye hasta el vértice de la curva, por decrecer al mismo tiempo v y $\frac{1}{\cos.\varphi}$. Mas allá del vértice v decrece pero $\frac{1}{\cos.\varphi}$ aumenta y es necesario acudir á la teoría de máximos y mínimos para ver si es constante el decrecimiento del rádio de curvatura ó presenta algun punto de mínima.

Para ello tomemos la primera derivada con relacion á φ y será

$$\frac{d\,r_1}{d\,\varphi} = \frac{1}{\cos.\varphi} \times \frac{2}{g}\, v \frac{d\,v}{d\,\varphi} + \frac{v^2}{g} \times \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\cos.^2\varphi}.$$

Pero de ser $v_1 = v \cos.\varphi$ se deduce

$$\frac{d\,v_1}{d\varphi} = \cos.\varphi \frac{d\,v}{d\,\varphi} - v\,\text{sen.}\,\varphi,$$

de donde

$$\frac{d\,v}{d\,\varphi} = \frac{1}{\cos.\varphi}\left(\frac{d\,v_1}{d\,\varphi} + v\,\text{sen.}\,\varphi\right)$$

y como ecuacion (6) párrafo 92

$$\frac{d\,v_1}{d\varphi} = \frac{\rho}{\text{P}} \times \frac{v_1}{\cos.\varphi} = \frac{\rho}{\text{P}}\, v = v f(v), \frac{d\,v}{d\,\varphi} = \frac{1}{\cos.\varphi} \times v\{f(v) + \text{sen.}\,\varphi\};$$

cuyo valor sustituido en aquel coeficiente diferencial nos dá

$$\frac{d\,r_1}{d\,\varphi} = \frac{\text{V}^2}{g\cos.^2\varphi}\{2 f(v) + 3\,\text{sen.}\,\varphi\}.$$

Partiendo del vértice $\frac{d\,r_1}{d\,\varphi}$ es positiva, por lo que r_1 continua decreciendo hasta tanto que se satisfaga la condicion de

$$2 f(v) + 3\,\text{sen.}\,\varphi = 0.$$

Con el valor de φ que anula este factor, $\frac{d^2 r_1}{d\varphi^2}$ es positiva y por consiguiente el rádio de curvatura toma en este punto un valor mínimo y crece luego indefinidamente. Para convencerse de ello basta fijarse en la espresion de la segunda derivada, despues de introducir en ella la condicion

$$2\, f(v) + 3 \operatorname{sen.} \varphi = 0:$$

$$\frac{d^2 r_1}{d\varphi^2} = \frac{v^2}{g \cos.^2 \varphi} \left\{ 2 f'(v) \frac{d\,v}{d\,\varphi} + 3 \cos.\, \varphi \right\} =$$

$$= \frac{v^2}{g \cos.^2 \varphi} \left\{ 2 f'(v) \left\{ \frac{v}{\cos.\, \varphi} f(v) + \frac{v}{\cos.\, \varphi} \operatorname{sen.} \varphi \right\} + 3 \cos.\, \varphi \right\},$$

habiendo sustituido por $\frac{d\,v}{d\,\varphi}$ su valor; y poniendo en la última igualdad $\operatorname{sen.} \varphi = -\frac{2}{3} f(v)$, será

$$\frac{d^2 r_1}{d\,\varphi^2} = \frac{r_1}{\cos.^2 \varphi} \left\{ \frac{2}{3} v\, f(v)\, f'(v) + 3 \cos.^2 \varphi \right\},$$

la que en efecto vemos es positiva.

Si en el valor de $\frac{d\,v}{d\,\varphi}$ hacemos $f(v) = -\frac{3}{2} \operatorname{sen.} \varphi$, condicion del mínimo para el rádio de curvatura, será en este punto $\frac{d\,v}{d\,\varphi} = -\frac{1}{2} \times$ tang. φ, pero como el punto pertenece á la rama descendente y en esta es φ negativo, $\frac{d\,v}{d\,\varphi}$ será positiva, por lo cual v y φ variarán en el mismo sentido; es decir: v decrece con φ, luego en el punto en cuestion no ha llegado la velocidad á su mínimo: está pues el punto de la trayectoria en que la curvatura es máxima, mas cerca del vértice, que aquel en que la velocidad es mínima.

La espresion del rádio de curvatura tambien nos hace ver que para inclinaciones de la trayectoria iguales pero de contrario signo, es mayor en la rama ascendente que en la descendente. En efecto el denominador de aquella espresion tiene el mismo valor, tratándose de puntos cuya inclinacion es la misma, pero su numerador, dependiente solo de la velocidad, es menor, en estos mismos puntos, en la rama descendente.

120. Tambien independientemente de la ley de resistencia del aire, existe cierta relacion, en el movimiento de los proyectiles esféricos, entre las velocidades de que dos de ellos se encuentran animados, los espacios recorridos y la duracion de sus trayectos.

Sea en efecto un proyectil animado de una velocidad inicial V y $v_1, v_2, v_3,\ldots$ las que conserva al final de los trayectos $e_1, e_2, e_3,\ldots$; se pueden tomar estos trayectos, y por lo tanto la diferencia entre sus velocidades, tan pequeños como se quiera. Aun cuando la resistencia del aire, siendo funcion de la velocidad, es continuamente variable, si cada uno de los trayectos es en realidad muy pequeño, análogo será el error que se cometa al suponer que la resistencia del aire durante él es constante y dependiente de la velocidad media $\frac{V+v_1}{2}$; la forma del valor de ella será pues

$$\rho=\pi R^2 f\left(\frac{V+v_1}{2}\right),$$

el trabajo de cuya fuerza será

$$e_1\times\pi R^2 f\left(\frac{V+v_1}{2}\right)$$

igual á la mitad del incremento de fuerza viva durante el mismo tiempo, puesto que el trabajo de la pesantez será despreciable, si escojemos, como es debido, los puntos que limitan los trayectos, de modo que estos resulten próximamente horizontales: así pues

$$e_1\times\pi R^2 f\left(\frac{V+v_1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}(V^2-v_1^2),\ \text{y}\ e_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{R\,D}{g}\cdot\frac{(V^2-v_1^2)}{f\left(\frac{V+v_1}{2}\right)}$$

Para otro proyectil de rádio R′, densidad D′, animado de la misma velocidad inicial V, y tal que al fin del trayecto e'_1 tenga la velocidad v_1, tendremos igualmente

$$e_1' = \frac{2}{3}\cdot\frac{R'D'}{g}\cdot\frac{(V^2 - v_1^2)}{f\left(\frac{V+v_1}{2}\right)},\ \text{de donde}\ \frac{e_1}{e_1'} = \frac{RD}{R'D'},\ \text{y}\ e_1 = e_1'\,\frac{RD}{R'D'},$$

teniendo para otros trayectos

$$e_2 = e_2'\,\frac{RD}{R'D'}\quad \text{y}\quad e_3 = e_3'\,\frac{RD}{R'D'},$$

por lo que

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots\ldots = (e_1' + e_2' + e_3' + \ldots\ldots)\,\frac{RD}{R'D'}$$

es decir

$$\frac{\Sigma e}{\Sigma e'} = \frac{E}{E'} = \frac{RD}{R'D'}$$

y como hemos admitido que los espacios elementales correspondientes son recorridos con una misma velocidad, tales movimientos serán uniformes y por tanto los espacios proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos; esto es,

$$\frac{e_1}{e_1'} = \frac{t_1}{t_1'} = \frac{RD}{R'D'};$$

y de aquí, por análoga manera

$$\frac{T}{T'} = \frac{RD}{R'D'}.$$

Estas propiedades corresponden á la diferente influencia que la resistencia del aire ejerce sobre proyectiles diversos, y manifiesta la ventaja para la conservacion del movimiento de los de grueso calibre y mucho peso específico, por lo que para batir objetos resistentes deberán preferirse los proyectiles sólidos y de gran calibre, y de cuyo empleo se obtendrá tanta mayor ventaja cuanto lo sea su velocidad inicial por que conservándola más, es el choque mas eficaz y se favorecen las penetraciones.

Para demostrar la anterior proposicion hemos admitido que los espacios recorridos eran realmente horizontales y nula por lo tanto la influencia de la gravedad, lo que no es así; sin embargo, como la pesantez obra del mismo modo sobre todos los proyectiles, la perturbacion que en los resultados, sin ella deducidos, deba introducirse al tomarla en cuenta, se comprende ha de ser análoga en unos y otros, y por lo mismo, las deducciones á que nos ha conducido el cálculo, son ciertas en principio, si bien no puede asegurarse que la relacion sea la enunciada, de productos de rádios por densidades. Bien se comprende, por lo espuesto, que estas consecuencias son mas aplicables al tiro de cañones que al de morteros, por ser en aquel mas pequeña la influencia de la gravedad. Lo dicho con respecto á espacios recorridos es aplicable á los alcances correspondientes, como proyecciones de aquellos, por lo que un proyectil alcanza tanto más, para iguales condiciones iniciales, cuanto más pesado y de mayor calibre sea.

tentes deberán preferirse los proyectiles sólidos y de gran calibre, y de cuyo empleo se obtendrá tanta mayor ventaja cuanto lo sea su velocidad inicial por que conservándola mas, es el choque mas eficaz y se favorecen las penetraciones.

Para demostrar la anterior proposicion hemos admitido que los espacios recorridos eran realmente horizontales y nula por lo tanto la influencia de la gravedad, lo que no es así; sin embargo, como la pesantez obra del mismo modo sobre todos los proyectiles, la perturbacion que en los resultados, sin ella deducidos, debe introducirse al tomarla en cuenta, se comprende ha de ser análoga en unos y otros, y por lo mismo, las deducciones á que nos ha conducido el cálculo, son ciertas en principio, si bien no puede asegurarse que la relacion sea la enunciada, de productos de rádios por densidades. Bien se comprende, por lo espuesto, que estas consecuencias son mas aplicables al tiro de cañones que al de morteros, por ser en aquel mas pequeña la influencia de la gravedad. Lo dicho con respecto á espacios recorridos es aplicable á los alcances correspondientes, como proyecciones de aquellos, por lo que un proyectil alcanza tanto más, para iguales condiciones iniciales, cuanto más pesado y de mayor calibre sea.

CAPÍTULO 6.º

Problemas sobre el tiro.

121. Al tratar de la integracion de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los proyectiles, hicimos ya observar que las condiciones especiales del tiro, por los datos que lo determinan, obligan á proceder de distinto modo en la resolucion de los problemas balísticos: así será preciso considerar por separado el tiro por grande ángulo de proyeccion y pequeña velocidad ó tiro de mortero; por pequeño ángulo y gran velocidad, ó tiro directo de cañon, y por velocidades y ángulos medios, ó tiro por sumersion, que son las clases diversas en que se hallan comprendidos los tiros en la práctica ordinaria. Esto no obstante, siendo el problema general balístico determinar los elementos del movimiento en cada punto de la trayectoria y especialmente en el de caida, lo resolveremos considerando el caso, poco comun en verdad, de un tiro por grandes ángulo de proyeccion y velocidad, lo cual nos servirá de punto de partida para las demás aplicaciones, introduciendo las circunstancias que las caracterizan.

Sea θ (fig. 61) el ángulo de proyeccion, de 35° y V la velocidad inicial, bajo el supuesto de ser superior á 376^m, para un proyectil de peso y rádio conocidos. Recordando cuanto se ha dicho sobre el error que resulta de tomar por $\frac{ds}{dx}$ el valor medio α, será preciso considerar dividida la trayectoria en distintos arcos, siendo de menor estension los próximos al orígen y fin de ella y de mayor los inmediatos al vértice. Segun esto y pues que admitimos para ley de la resistencia del aire, la ley de Euler para velocidades inferiores á 376^m y la de Newton para velocidades comprendidas entre 530^m y 376^m, lo cual, mientras nuevas y mas delicadas y precisas esperiencias que las de Bashforth y Mayeuski, no nos dén á conocer nuevas leyes, constituye la última palabra sobre la cuestion (1) empezaremos considerando el primer arco desde el punto de partida hasta aquel en que la velocidad sea de 376^m, tal como el a'.

Este arco debe calcularse bajo la hipótesis de la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, en cuyo concepto era

$$c = \frac{P}{2A\pi R^2 g} \times \frac{\delta'}{\delta} \quad \text{ó bien} \quad c = \frac{P}{2A\pi R^2 g}$$

para simplificar.

Mas no conociendo la situacion de dicho punto, deberemos empezar calculando, aproximadamente, la inclinacion que en él tiene la trayectoria por medio de la fórmula

$$\text{tang.}\,\varphi' = \text{tang.}\,\theta - \frac{1}{\alpha} \times \frac{gc}{v_1'^2}\left\{1 - \frac{v_1'^2}{V_1^2}\right\}$$

en la que podemos hacer

$$\alpha = \frac{1}{\cos.\,\theta},\ V_1 = V\cos.\,\theta,\quad \text{y} \quad v_1' = v'\cos.\,\theta:$$

de este modo obtendremos el valor de φ' con cierta aproximacion, lo que nos permitirá deducir el valor de α de la ecuacion

$$\frac{\Sigma(\theta) - \Sigma(\varphi')}{\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\varphi'},$$

y, volviendo á la anterior, tendremos el de φ' con suficiente precision, sustituyendo el valor de α últimamente obtenido, y poniendo

(1) Tilly.—Balistique.

en $v_1' \cos.\varphi$; verdadero valor de v_1', por φ' el valor obtenido para este ángulo en la primera aproximacion.

Podemos ya determinar la abcisa x' del punto a' por medio de la fórmula

$$\alpha x' = 2\,c\,l.\,\frac{\alpha V_1}{\alpha v_1} \quad \text{que dá} \quad x' = \frac{2\,c}{\alpha} \times \frac{1}{\log.\,e} \log.\,\frac{V \cos.\theta}{v_1' \cos.\varphi'},$$

por ser ya conocidos los valores de α y de φ'.

La ecuacion de la trayectoria

$$y' = x' \operatorname{tang}.\theta - \frac{g x'^2}{2\,V^2 \cos.^2\theta} \Psi_1\left(\frac{\alpha x'}{c}\right)$$

nos dá inmediatamente el valor de la ordenada. Los rádios de curvatura en los puntos 0 y a' nos los darán las fórmulas ya conocidas

$$r_1 = \frac{V^2}{g \cos.\theta}\ \ r_1' = \frac{v'^2}{g \cos.\varphi'};$$

y por último, el tiempo empleado por el proyectil en pasar de 0 á a' por la

$$t' = \frac{x'}{V \cos.\theta} \Psi\left(\frac{\alpha x'}{2\,c}\right),$$

con lo que quedan determinadas todas las circunstancias del movimiento relativas al punto a'.

122. Como para velocidades inferiores á 376^m la ley de la resi stencia es otra, con arreglo á esta calcularemos los arcos subsiguientes: bajo esta ley, la espresion que nos dá el valor de c es la misma, variando solo como sabemos el valor del coeficiente A. Supongamos que desde el punto a' á el de caida consideramos cinco arcos $a'\,a''$, $a''\,a'''$, $a'''\,a^{\text{IV}}$, $a^{\text{IV}}\,a^{\text{V}}$, $a^{\text{V}}\,a$, tales que sus inclinaciones estremas sean respectivamente

φ' y $20°$, $20°$ y $-20°$, $-20°$ y $-35°$, $-35°$ y $-40°$ y -40

y el de caida. Las circunstancias finales del arco calculado son iniciales para el siguiente; asi es que referido el movimiento á un sistema coordenado rectangular, y cuyo orígen sea a', claro es que tenemos, análogamente á lo ocurrido en el arco anterior, los datos precisos para el cálculo del segundo; esto es, ángulo de proyeccion y velocidad inicial que son φ' y v': el valor de α será pues

$$\frac{\Sigma(\varphi') - \Sigma(20^\circ)}{\text{tang.}\,\varphi' - \text{tang.}\,20^\circ}$$

La ecuacion general de la tangente, despues de sustituir en ella los datos de la cuestion, nos dá

$$\text{tang.}\,\varphi'' = \text{tang.}\,\varphi' - \frac{g\,x''}{v'^2 \cos.^2 \varphi'}\, f_1(z, V_0^2)$$

y nos servirá para determinar la abcisa x'', y á cuyo efecto multiplicaremos ambos miembros por $\frac{\alpha}{c}$, quedando

$$\frac{\alpha v'^2 \cos.^2 \varphi'}{g\,c}(\text{tang.}\,\varphi' - \text{tang.}\,\varphi'') = \frac{\alpha\,x''}{c} f_1(z, V_0^2) = z f_1(z, V_0^2)$$

En el lugar correspondiente se halla una tabla de los valores de esta funcion

$$z f_1(z, V_0^2)$$

señalada con el núm. 12, y como todo el primer miembro es conocido así como la variable V_0^2 que en este caso será

$$\left(\frac{\alpha\,v_1'}{r}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\,v' \cos.\,\varphi'}{r}\right)^2,$$

quedará la cuestion reducida á la ya tratada de determinar el valor de la variable z, conocida que es la funcion y la otra variable; y puesto que $z = \frac{\alpha\,x''}{c}$, de aquí $x'' = \frac{c\,z}{\alpha}$, valor de la abcisa que buscábamos.

La ordenada y'' se tiene inmediatamente por la ecuacion de la trayectoria, que ahora será

$$y''=x'' \operatorname{tang}.\varphi' - \frac{g\,x''^2}{2\,v'^2 \cos.^2 \varphi'} f(z, V_0^2) = x'' \operatorname{tang}.\varphi' -$$

$$- \frac{g\,x''^2}{2\,v'^2 \cos.^2 \varphi'} f.\left(\frac{\alpha\,x''}{c},\ \frac{\alpha^2 v'^2 \cos.^2 \varphi'}{r^2}\right)$$

La ecuacion de la velocidad

$$v = \frac{V}{f_2(z, V_0^2)} \times \frac{\cos.\,\theta}{\cos.\,\varphi},$$

que en este caso es

$$v'' = \frac{v'}{f_2\left(\frac{\alpha\,x''}{c},\ \frac{\alpha^2 v_1'^2}{r^2}\right)} \times \frac{\cos.\,\varphi'}{\cos.\,\varphi''}$$

nos dá la velocidad en el punto a''; y del mismo modo las del tiempo y rádio de curvatura nos permiten apreciarlos y serán

$$t'' = \frac{x''}{v' \cos.\,\varphi'} f_3\left(\frac{\alpha\,x''}{c},\ \frac{\alpha^2 v_1'^2}{r^2}\right) \quad \text{y} \quad r_1'' = \frac{v''^2}{g \cos.\,\varphi''}$$

El arco siguiente se determinará de idéntica manera, sin mas diferencia que por estenderse desde el punto en que la inclinacion de la tangente es de 20° hasta el en que esta es de (—20°) el valor de α será

$$\alpha = \frac{\Sigma(20^\circ)}{\operatorname{tang}.\,20^\circ}$$

Para el subsiguiente, cuyas inclinaciones estremas son de (—20°) y (—30°), el valor de α será

$$\alpha = \frac{\Sigma(30^\circ) - \Sigma(20^\circ)}{\operatorname{tang}.\,30^\circ - \operatorname{tang}.\,20^\circ},$$

de manera, que habremos obtenido los valores de

$$x''', y''', v''', t''' \text{ y } r''',$$

correspondientes al punto a''', así como los de

$$x^{\text{IV}}, -y^{\text{IV}}, v^{\text{IV}}, t^{\text{IV}} \text{ y } r^{\text{IV}},$$

del punto a^{IV} y los relativos de a^{V}; queda pues tan solo por determinar la distancia $m\,a$ para tener el alcance total. Supongamos para ello que la vertical, que separa el punto a^{V} del eje de las x sea muy pequeña, lo que se conocerá, haciendo la suma de

$$y'+y''+y'''-y^{\text{IV}}-y^{\text{V}};$$

para obtener en este caso $m\,a$ consideremos la tangente en el punto a^{V}, la que forma con la horizontal un ángulo, cuya tangente en valor absoluto es tangente de φ^{V}: el triángulo $a^{\text{V}}\,m\,m'$ dá

$$m\,m'=a^{\text{V}}\,m \cot.\varphi^{\text{V}},$$

y si tomamos por $m\,a$ este valor el error será tanto mas pequeño cuanto lo sea la suma

$$y'+y''+y'''-y^{\text{IV}}-y^{\text{V}},$$

siendo por consiguiente este valor muy admisible cuando esta suma se diferencie poco de cero. Si además, y atendiendo á la pequeñez del arco $a^{\text{V}}\,a$ suponemos, en lo que el error que se comete es despreciable, que el valor de α correspondiente al arco $a^{\text{IV}}\,a^{\text{V}}$ es aplicable tambien al siguiente, tendremos conocidas todas las circunstancias del movimiento.

123. Pero si dicha distancia vertical $m\,a^{\text{V}}$ fuese grande no podremos proceder de esta manera; sino cometiendo un error de consideracion, por lo cual será necesario recurrir al siguiente medio, que aunque tambien aproximado no induce á tan grandes errores como la aplicacion de aquel.

A este fin tomemos un arco $a^{\text{V}}\,a^{\text{VI}}$, tal que por el valor dado á la inclinacion de la tangente el punto a^{VI} se encuentre por debajo del eje horizontal, para lo que nos servirá de norma la propiedad de ser mayor el ángulo de caida que el de proyeccion en terreno horizontal, y supongamos en el caso actual que sea de (—45°) ésta inclinacion; el valor de α correspondiente á este arco será por tanto

$$\alpha = \frac{\Sigma(45^\circ) - \Sigma(40^\circ)}{\text{tang. } 45^\circ - \text{tang. } 40^\circ}$$

y claro es que el punto de caida es un punto de dicho arco.

Si en la ecuacion de la trayectoria sustituimos por la ordenada el valor de la del punto a^{v}, supuesto en este punto el orígen del sistema coordenado y despejamos el valor de x, claro es que este será el de $m\,a$ buscado; pero como quiera que en dicha ecuacion entra una funcion, que lo es á su vez de esta distancia, apelaremos á la misma, pero en el vacio, para obtener un primer valor de $m\,a$ igual x^{vi}; el que; sustituido en la funcion, la determina, pudiendo por lo tanto despejarse de ella el valor de $m\,a$. Si aun quisiéramos mas aproximacion, el valor últimamente obtenido por la resolucion de la ecuacion de la trayectoria seria el que sustituyéramos en la funcion y resuelta la ecuacion de nuevo lo obtendríamos con mas exactitud.

124. Otro procedimiento, aun cuando no susceptible de dar la exactitud que el anterior por repetidos tanteos, es el siguiente.

De la misma manera que anteriormente hemos procedido, tomaremos un punto que se encuentre por debajo de la horizontal y sea el a^{vi} (fig. 62).

Como en este caso conocemos la inclinacion en a^{v} y hemos asignado hipotéticamente lo que tiene en a^{vi} el valor de α queda determinado, pudiendo por lo tanto calcular los valores de x é y, que son ahora $h\,a^{\text{vi}}$ y $h\,a^{\text{v}}$. Si despues de la proporcion $\frac{m\,n}{h\,a^{\text{vi}}} = \frac{m\,a^{\text{v}}}{h\,a^{\text{v}}}$ despejamos el valor de $m\,n$ este es el que puede tomarse por $m\,a$, que era la cantidad que quedaba por determinar: claro es que el error consiste en haber tomado la cuerda por el arco $a^{\text{v}}\,a^{\text{vi}}$. Fáltanos por último para determinar el problema general, que nos ocupa, referir á un solo sistema coordenado los diversos elementos encontrados, para lo que tenemos las siguientes relaciones.

125. Alcance total

$$x = x' + x'' + \ldots\ldots; \quad Y = y' + y'' + \ldots\ldots;$$

el tiempo total estará representado por

$$T = t' + t'' + ...;$$

y la velocidad en el punto de caida así como el ángulo correspondiente son los mismos que se determinan en el último arco. Es inútil decir que la exactitud en la resolucion de este problema será tanto mayor cuanto lo sea el número de arcos en que se considere dividida la trayectoria total, puesto que el valor de α, que como vimos es medio entre los que tienen las secantes estremas de los arcos, será tanto más exacto, cuanto ménos se diferencien por hallarse más próximos sus estremos. Sin embargo de esto, las diferencias que se obtienen cuando se calcula una trayectoria dividida en un gran número de arcos y tambien en número mas reducido son tan pequeñas, que seria inútil hacer la division muy numerosa, hasta tal punto que la ejecucion de estos cálculos confirma que basta considerar tres arcos en la trayectoria de una bomba y que al pasar de cinco, al mismo tiempo que se alargan estraordinariamente los cálculos no se consigue mucha mayor exactitud.

126. El cálculo de la trayectoria varía como se ha dicho segun la clase de tiro que la origina; así, para el cálculo de la trayectoria descrita por una bomba lo primero que ocurre es escojer convenientemente los puntos de division y para ello nos servirá de norma los diversos fines que con este tiro se desean conseguir. Es el primero lanzar bombas de grueso calibre, animadas de grandes velocidades para que llevando en su caida una gran cantidad de fuerza viva produzcan quebrantamientos considerables; tírase en este caso por un ángulo de 60° y con la mayor velocidad posible.

Se desea otras veces hacer que las bombas alcancen á grandes distancias, y para que así sea sabemos ya que deben dispararse por ángulos de proyeccion muy próximos á 45° y tambien animadas de grandes velocidades; claro es que en este caso será la trayectoria mas baja; y por último, si este tiro se emplea contra masas mas ó menos profundas, importan mas los efectos producidos por la rotura de la bomba y la dispersion de sus cascos que la velocidad remanente y la elevacion que alcance; lo que se conseguirá mediante un ángulo de proyeccion de 30° y velocidades mas pequeñas: con mayor motivo será pues la trayectoria mas baja que la anterior.

En el primer caso, á causa de la mayor curvatura de la trayectoria, los valores, de α, son los que ejercen mayor influencia en los errores; bajo este punto de vista, muchos son los arcos en que habria de dividirse aquella; pero, como segun se ha dicho, es inútil pasar de cinco y como por otra parte sabemos que estos deben abrazar menos estension á medida que se hallen mas próximos al orígen y fin del movimiento, la siguiente division es la que se recomienda como bastante apropiada:

$$60^\circ \text{ á } 50^\circ;\ 50^\circ \text{ á } 35^\circ;\ 35^\circ \text{ á } (-35^\circ);\ (-35^\circ) \text{ á } (-50^\circ) \text{ y } (-50^\circ)$$

al de caida: claro es que esta division podrá variarse, pero sirve para dar una idea de la manera de proceder.

En el segundo caso los errores provienen más del aumento de la resistencia del aire por efecto de la gran velocidad de la bomba que de la inclinacion con que se dispara; será pues conveniente, si se desea mucha aproximacion dividir aun la trayectoria en arcos; pero no será necesario que sean tantos como anteriormente, bastando con tres; que podrán contarse respectivamente de

$$45^\circ \text{ á } 30^\circ, \text{ de } 30^\circ \text{ á } (-30^\circ) \text{ y de } (-30^\circ)$$

al de caida. Finalmente en el tercer caso, en que la inclinacion no es escesiva ni grande la velocidad, la cual nunca llega á 376^m, puede calcularse la trayectoria considerando un solo arco, lo que simplifica mucho la cuestion. Pero como quiera que los datos, que para este problema se tienen son la velocidad inicial y el ángulo de proyeccion, y el valor de α, que entra en todas las fórmulas es funcion de las inclinaciones estremas de los arcos, que serán ahora medidas por los ángulos de proyeccion y de caida, es forzoso para tener el valor de α, y ya que el del ángulo de caida no es conocido, asignarle un valor para lo que si el blanco está sobre la horizontal, segun las propiedades conocidas de la rama descendente de la trayectoria, deberá dàrsele algo mayor que el de proyeccion, pudiendo suponérsele igual cuando el blanco esté algo elevado sobre aquella. Bien se comprende, sin embargo que tales reglas no tienen nada de absolutas y que solo el hábito de el tiro permitirá proceder con todo el acierto posible.

Conocido que sea el valor correspondiente de α la primera determinacion necesaria será la del alcance, lo que se conseguirá facilmente, buscando la interseccion de la trayectoria con la línea del terreno, el que si es horizontal tendrá por ecuacion $y=0$, y si inclinado $y=x$ tang. Σ, siendo Σ, la inclinacion de dicho terreno, continuándose el cálculo por la simple sustitucion en las fórmulas balísticas.

Para la determinacion de este movimiento hemos partido de un valor prudencial del ángulo de caida, el que nos ha servido para conocer el de α: como ahora tendremos ya el valor del ángulo de caida dado por la ecuacion de la tangente, podremos tomar nuevamente otro valor de α, valiéndonos de aquel, cuya operacion repetida permite alcanzar una gran exactitud.

127. En el tiro directo de cañon, siempre por pequeño ángulo de proyeccion y gran velocidad, puede suceder que esta sea superior á 376^m y la de caida menor que 376^m, y en este caso el cálculo de la trayectoria se hará dividiéndola en dos arcos; uno hasta el punto en que la velocidad sea de 376 y otro desde éste hasta el de caida, siguiendo el procedimiento primeramente esplicado: puede ocurrir tambien que las velocidades incial y final escedan de 376^m, bastará entonces considerar un solo arco, empleando las ecuaciones correspondientes á la hipótesis de la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad; y por último, si la velocidad inicial es inferior á 376^m, igualmente bastará un solo arco, pero que habrá de calcularse con arreglo á la distinta ley de la resistencia del aire, de ser ésta dependiente de las potencias segunda y cuarta de la velocidad. En esta clase de tiro, casi nunca escede el ángulo de proyeccion de 15°, por lo que puede sin error sensible tomarse para valor de α la unidad, lo que simplifica mucho los cálculos; sin embargo, si fuese superior á 15° el ángulo, consideraciones análogas á las hechas anteriormente nos darian los valores con que deberia entrar en las fórmulas.

Si por mas sencillez, en el caso en que por tomar dos leyes distintas de la resistencia del aire para el cálculo de una trayectoria ha habido necesidad por lo menos de considerarla dividida en dos partes, quisiéramos estudiarla en su totalidad, los valores de α serian los mismos, pero deberian sustituirse las leyes de la resistencia por la ley media que deducida de las esperiencias rusas é inglesas está conforme con la que dá Welter adoptada por la escuela francesa, difiriendo solo en dos unidades del sesto órden decimal el coeficiente del cubo de la velocidad. Tambien esta sustitucion permite resolver los problemas concernientes al tiro sin necesidad de manejar tablas comprensivas de los valores de las funciones.

128. Calculada una trayectoria, dadas que han sido las condiciones iniciales de velocidad y ángulo de proyeccion, pasemos á resolver los diversos problemas que ocurren en la práctica respecto al tiro de morteros y al de cañones, que son: determinar el alcance, dados el ángulo de proyeccion y la velocidad inicial; determinar la velocidad que ha de imprimirse á un proyectil ó sea la carga de la pieza para que pase por un punto, lanzado por un ángulo de proyeccion dado, y por último, conocidas que sean la velocidad inicial y la situacion del blanco, determinar el ángulo de proyeccion. El caso mas general en el tiro de morteros, por la circunstancia de verificarse los disparos bajo un ángulo constante de proyeccion cuando tienen el mismo objeto, es el segundo, así como en el tiro de cañones, por la facilidad que hay en variar la inclinacion de la pieza, el dato de antemano fijo es la velocidad; de suerte que el problema ordinario consiste en determinar el ángulo de proyeccion. Vamos pues á resolver estos problemas, considerando la trayectoria como un solo arco, bien que distingamos la ley de la resistencia del aire aplicable á cada caso.

129. Sea el tiro de morteros, en el que la velocidad inicial no llega á 376^m, y tratemos de determinar el alcance. Dado un valor para la velocidad inicial inferior á 376^m, la fórmula correspondiente de la resistencia del aire es

$$\rho = 0{,}012\,\pi\,R^2 v^2 \left(1 + \frac{v^2}{(186)^2}\right)$$

de cuya espresion

$$\frac{\rho}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc}\left(1 + \frac{v^2}{(186)^2}\right), \text{ siendo } c = \frac{P}{2 \times 0{,}012\,\pi\,R^2 g}.$$

Supongamos tambien que el punto de caida se encuentra á una altura b sobre la horizontal que pasa por la boca de la pieza y entonces será la ecuacion de la trayectoria

$$b = x \tan g.\,\theta - \frac{g\,x^2}{2\,V_1^2} f(z, V_0^2),$$

la que es conveniente escribir bajo la forma

$$\frac{c}{\alpha} \tan g.\,\theta \times z - \frac{g\,c^2}{2\,\alpha^2\,V_1^2} f(z, V_0^2) \times z^2 = b,$$

en la que por α deberá ponerse

$$\alpha = \frac{\Sigma(\theta)}{\tan g.\,\theta}$$

por que estando el punto de caida algo mas elevado que la boca de la pieza, puede, como ya sabemos, sin error sensible, suponerse el ángulo de caida igual al de proyeccion. Tomando de seguida distintos valores de z en la tabla de la funcion $f.\,(z, V_0^2)$ y sustituyéndolos en la ecuacion última, estará el primer miembro conocido y cuando por estas sustituciones lleguemos á obtener de él dos valores, que siendo muy próximos entre sí, comprenden al dado b, se determinará el de z, por partes proporcionales, con lo que lo estará el de x, que es lo que se busca.

Si el punto que se trata de batir está á la misma altura que la boca de fuego, la ecuacion de la recta con que debe encontrarse la interseccion de la trayectoria para determinar el alcance es $y=0$ por lo que la ecuacion en este caso se reduce á

$$0 = x \tan g.\,\theta - \frac{g\,x^2}{2\,V_1^2} f(z, V_0^2)$$

ó bien

$$x\,f(z, V_0^2) = \frac{V^2}{g}\ \text{sen.}\,2\theta \quad \text{ó} \quad z\,f(z, V_0^2) = \frac{\alpha}{c}\,\frac{V^2}{g}\ \text{sen.}\,2\,\theta:$$

siendo el segundo miembro conocido, claro es que solo resta determinar en la funcion $z\,f(z, V_0^2)$ el valor de la variable z, dada que es aquella y la variable V_0^2. En este caso, para proceder con mas rigor en la determinacion del valor de α asignaremos al ángulo φ de caida negativo un valor algo mayor que el dado de proyeccion, y α será igual á

$$\frac{\Sigma(\theta)+\Sigma(\varphi)}{\text{tang.}\,\theta+\text{tang.}\,\varphi}.$$

Puede tambien resolverse este mismo problema, cuando no dándose la altura del blanco se dé sin embargo la inclinacion del terreno en que está situado. Si llamamos Σ á ésta inclinacion quedará el problema reducido á determinar la interseccion de la trayectoria con la recta $y{=}x$ tang. Σ; así se tendrá,

$$\text{tang.}\,\Sigma=\text{tang.}\,\theta-\frac{g\,x}{2\,V_1^2}f(z,V_0^2)\text{ y } x f(z,V_0^2)=(\text{tang.}\,\theta-\text{tang.}\,\Sigma)\,\frac{2\,V_1^2}{g};$$

y multiplicando por $\frac{\alpha}{c}$ quedará finalmente

$$z\,f.(z, V_0^2)=(\text{tang.}\,\theta-\text{tang.}\,\Sigma)\times\frac{2\,\alpha\,V_1^2}{g\,c},$$

en cuya espresion el valor de x se determina de una manera enteramente igual al anteriormente considerado.

Podemos observar que si en la última ecuacion hacemos Σ igual á cero queda una espresion idéntica á la obtenida en el segundo caso, lo que no puede menos de suceder por reducirse á aquel el tercero que hemos estudiado.

130. Pudiera ocurrir la necesidad de resolver este mismo problema, siendo la velocidad inicial superior á 376^m, en cuyo caso y para considerar un solo arco pondríamos

$$\rho=0{,}000142\,\pi R^2 v^3 \quad \text{ó bien} \quad \frac{\rho}{P}=f(v)=\frac{v^3}{g\,c}, \quad \text{siendo}$$

$$c=\frac{P}{0{,}000142\,\pi\,R^2\,g}$$

Sea b la elevacion del punto de caida; la ecuacion de la trayectoria dará.

$$b = x \operatorname{tang.} \theta - \frac{g x^2}{2 V_1^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 V_1}{c} x + \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 x^2 \right\}$$

de donde

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 x^4 + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 V_1}{c} x^3 + x^2 - \frac{2 V_1^2}{g} \operatorname{tang.} \theta \, x + b \frac{2 V_1^2}{g} = 0;$$

y si llamamos

$$x = \frac{u}{\frac{\alpha^2 V_1}{c}}, \text{ se tiene: } \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 \times \frac{u^4}{\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^4} + \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 V_1}{c} \times \frac{u^3}{\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^3} + \frac{u^2}{\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2} -$$

$$- \frac{2 V_1^2}{g} \operatorname{tang.} \theta \times \frac{u}{\frac{\alpha^2 V_1}{c}} + b \times \frac{2 V_1^2}{g} = 0,$$

en la que si multiplicamos los términos por $6 \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2$, resulta

$$u^4 + 4 u^3 + 6 u^2 - 12 \frac{V_1^2}{g} \operatorname{tang.} \theta \frac{\alpha^2 V_1}{c} u + b \, 12 \frac{V_1^2}{g} \times \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2 = 0.$$

Si en ella hacemos

$$m = \frac{2 V_1^2}{g} \operatorname{tang.} \theta \times \frac{\alpha^2 V_1}{c} \quad \text{y} \quad n = b \frac{2 V_1^2}{g} \times \left(\frac{\alpha^2 V_1}{c} \right)^2,$$

se reducirá á

$$u^4 + 4 u^3 + 6 u^2 - 6 m u + 6 n = 0,$$

ecuacion de cuarto grado que presenta dos variaciones si u es positivo, lo que depende de b, en cuyo caso tendrá dos raices positivas, que darán para x dos valores, que realmente existen, por que la trayectoria queda cortada en dos puntos por el plano horizontal que contiene el que ha de batirse: las condiciones físicas de la cuestion determinan la raiz que la satisface por entero y claro es que ésta será la correspondiente al punto mas lejano. Pero si fuera u negativo por serlo b, solo presentaría aquella una variacion y la raiz positiva de la ecuacion nos daria el problema resuelto, no existiendo mas que este valor que lo satisfaga por que aquella condicion implica hallarse el punto batido por debajo de la horizontal que pasa á la altura de la pieza, en cuyo caso tan solo es cortada la trayectoria en un punto.

La ecuacion á que ha dado lugar el problema propuesto puede resolverse siguiendo los procedimientos ordinarios de la resolucion de ecuaciones de grado superior, pero evita cálculos complicados y produce suficiente aproximacion el método gráfico de ensayos sucesivos, que consiste en dar á u tres valores u_1, u_2, u_3, que sustituidos en la ecuacion sean tales que uno, el u_2, dé para el primer miembro un valor y_2 de signo contrario á y_1 é y_3 relativos á u_1 y u_3, y tomando los de u por abcisas y los de y por ordenadas, se construye una curva, cuya interseccion con el eje de las u nos dá el valor que sustituido en el primer miembro de la ecuacion lo reduce á cero.

Debe tenerse presente al emplear este procedimiento que su exactitud aumenta tomando una escala bastante grande y que exige que sean convenientemente escojidos los valores de u_1, u_2, y u_3, diferenciándose poco entre sí: ninguna regla fija puede darse y sí solo la práctica del tiro y el conocimiento que debe tenerse del alcance probable por analogía con otros observados, permitirán asignar un valor prudencial que no dé lugar á muchos ensayos. Conocido que sea así el valor de u el de x quedará determinado por la relacion

$$x = \frac{u}{\frac{\alpha^2 V_1}{c}}.$$

La (fig. 63) indica la solucion dada.

Si el blanco está á la altura de la boca de la pieza la ecuacion de la trayectoria, despues de hacer $y=0$, queda reducida á

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c}\right)^2 x^3 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V_1}{c}\,x^2 + x - \frac{2 V_1^2}{g}\,\text{tang.}\,\theta = 0;$$

que puede escribirse bajo la forma,

$$x^3+\frac{4x^2}{\frac{\alpha^2 V_1}{c}}+\frac{6x}{\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c}\right)^2}-\frac{12 V_1^2}{g}\,\text{tang.}\,\theta\times\frac{1}{\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c}\right)^2}=0,$$

en la que como anteriormente, pondremos $x=\frac{u}{\frac{\alpha^2 V_1}{c}}$ y quedará

$$u^3+4u^2+6u-\frac{12 V_1^2}{g}\,\text{tang.}\,\theta\times\frac{\alpha^2 V_1}{c}=0$$

ecuacion de tercer grado que puede asi mismo ser resuelta por cualquiera de los procedimientos que el Algebra enseña, como tambien por el gráfico indicado mas arriba. Escusado es insistir sobre la determinacion del valor de α, por que éste se hallaria del mismo modo por las relaciones

$$\alpha=\frac{\Sigma(\theta)}{\text{tang.}\,\theta}\ \text{y}\ \alpha=\frac{\Sigma(\theta)+\Sigma(\varphi)}{\text{tang.}\,\theta+\text{tang.}\,\varphi}$$

respectivamente, en el primero y segundo caso.

131. Pasemos ahora á determinar la velocidad inicial que debe comunicarse á una bomba, esto es la carga que para ello haya de emplearse, conocido el ángulo de proyeccion, que ordinariamente se determina por las consideraciones del servicio y el efecto que se trate de producir, y conocido tambien por sus coordenadas un punto de la trayectoria. Sean estas a y b en la ecuacion

$$b=a\,\text{tang.}\,\theta-\frac{g a^2}{2 V_1^2}f(z, V_0^2),$$

la incógnita es V_1. De ello se deduce

$$\frac{b}{a}=\text{tang.}\,\Sigma=\text{tang.}\,\theta-\frac{g a}{2 V_1^2}f(z, V_0^2),$$

y de aquí

$$\frac{2 V_1^2(\text{tang.}\,\theta-\text{tang.}\,\Sigma)}{g a}=f(z, V_0^2)$$

en la que multiplicando y dividiendo el primer miembro por $\frac{r^2}{\alpha^2}$ será

$$\frac{2\,r^2}{\alpha^2} \times \frac{(\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma)}{g\,a}\,V_0^{\,2} = f(z, V_0^{\,2}),$$

y si llamamos M al coeficiente de $V_0^{\,2}$ y recordamos que $f(z, V_0^{\,2})$ es igual á $(1 + V_0^{\,2})\,\psi_1(z) - V_0^{\,2}$, claro es que el valor de V_0 será

$$V_0 = \sqrt{\frac{\psi_1(z)}{M - \psi_1(z) + 1}};$$

y conocido ya este valor se obtiene el de V por ser $V_0 = \frac{\alpha\,V\cos.\,\theta}{r}$.

Claro es que $\psi_1(z)$ se habrá determinado por la tabla correspondiente, siendo $z = \frac{\alpha\,a}{c}$.

Si el blanco estuviera á la altura de la boca de la pieza, la resolucion seria la misma sin mas que hacer $b=0$ y $\Sigma=0$, lo que en el valor formular obtenido de V_0 modifica el de M, que se reduciria á

$$\frac{2\,r^2}{\alpha^2} \times \frac{\text{tang.}\,\theta}{g\,a}.$$

132. Si como anteriormente hemos hecho, quisiéramos resolver este problema, suponiendo la resistencia del aire proporcional al cubo de la velocidad, siendo tambiem a y b las coordenadas del punto que se ha de batir, pondriamos

$$b = a\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g\,a^2}{2\,V_1^{\,2}}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2\,V_1}{c}\,a + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^2\,V_1}{c}\right)^2 a^2\right\}$$

de donde

$$\text{tang.}\,\Sigma = \text{tang.}\,\theta - \frac{g\,a}{2\,V_1^{\,2}}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2\,V_1}{c}\,a + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^2\,V_1}{c}\right)^2 a^2\right\},$$

y de esta, despues de ordenada con relacion á V_1 y despejando

$$V_1 = \frac{\frac{1}{3} g \frac{\alpha^3}{c} a^2 \pm \sqrt{2 g a (\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma) - \frac{1}{18} g^2 \times \frac{\alpha^4 a^4}{c^2}}}{2 (\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma) - \frac{1}{6} g . \frac{\alpha^4 a^3}{c^2}};$$

y si el punto que se bate está en la horizontal de la boca de la pieza bastará hacer $\Sigma = 0$ en el valor de V_1 que siendo igual á $V \cos.\theta$, nos dará la velocidad buscada.

133. El último problema sobre el tiro de morteros tiene por objeto determinar el ángulo de proyeccion dadas que sean la velocidad inicial y la situacion del blanco, problema que rara vez ocurrirá en este tiro, por ser constantes generalmente las inclinaciones por que se disparan, como anteriormente hemos dicho, pero es en cambio el mas frecuente en el tiro de cañones.

Sean a y b las coordenadas del punto y la ecuacion de la trayectoria, dará

$$b = a\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g\,a^2}{2\,V_1^2} f(z, V_0^2) \text{ ó bien}$$

$$b = a\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g\,a^2}{2\,V^2} (1 + \text{tang.}^2\theta) f(z, V_0^2)$$

y ordenando será

$$\text{tang.}^2\theta - \frac{2\,V^2}{g\,a\,f(z, V_0^2)} \times \text{tang.}\,\theta + \frac{2\,V^2\,b}{g\,a^2 f(z, V_0^2)} + 1 = 0,$$

de donde

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{V^2}{g\,a\,f(z, V_0^2)} \pm \sqrt{\frac{V^2}{g\,a^2 f(z, V_0^2)} \left\{ \frac{V^2}{g\,f(z, V_0^2)} - 2\,b \right\} - 1},$$

cuyos dos valores de θ resultan ser superior é inferior respectivamente al ángulo de máximo alcance. Pero como quiera que $f(z, V_0^2)$

depende de θ, será necesario acudir á fórmula análoga en el vacío para obtener aquellos dos valores: con esto podremos conocer los de α, que por ser el terreno inclinado tiene por espresion $\alpha = \frac{\Sigma(\theta)}{\text{tang.}\,\theta}$, conviniendo asignar á θ un valor algo mayor que el dado por la fórmula del vacio, puesto que sabemos ser necesario en la atmósfera un ángulo mayor para obtener el mismo alcance. Estos mismos valores de θ nos permiten conocer dos de V_0 y por tanto de la funcion de que depende tang. θ. Ahora bien, si tomamos el signo mas del radical, cuando sustituyamos en la espresion de tang. θ por $f(z, V_0^2)$ el mayor valor para ella obtenido habremos determinado el valor de θ superior al ángulo de máximo alcance, y si por el contrario, tomamos el signo menos al par de la sustitucion del menor valor de la funcion, el obtenido para θ será inferior al de máximo alcance; solucion la mas conveniente en la práctica.

Si la relacion $\frac{b}{a} = \text{tang.}\,\Sigma$ es tal que Σ es pequeño, el siguiente procedimiento conduce con gran sencillez á la resolucion del problema.

La ecuacion de la trayectoria, dá

$$\frac{b}{a} = \text{tang.}\,\Sigma = \text{tang.}\,\theta - \frac{g\,a}{2\,V^2 \cos.^2\theta}\, f(z, V_0^2)$$

de donde

$$\frac{g\,a}{2\,V^2}\, f(z, V_0^2) = \frac{\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma}{1 + \text{tang.}^2\,\theta};$$

y como

$$\text{sen.}\,2(\theta - \Sigma) = \frac{2\,\text{tang.}\,(\theta - \Sigma)}{1 + \text{tang.}^2(\theta - \Sigma)} = \frac{2\,(\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma)}{\{1 + \text{tang.}\theta\,\text{tang.}\Sigma\}\,\{1 + \text{tang.}^2(\theta - \Sigma)\}},$$

::

espresion que, multiplicando sus dos términos por el valor de

$$\frac{g\,a}{V^2} f(z, V_0^2) = \frac{2\,(\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma)}{1 + \text{tang.}^2\,\theta}$$

dá

$$\text{sen.}\,2\,(\theta - \Sigma) = \frac{g\,a}{V^2} f(z, V_0^2) \times \frac{1 + \text{tang.}^2\,\theta}{\{1 + \text{tang.}\,\theta\ \text{tang.}\,\Sigma\}\{1 + \text{tang.}^2(\theta - \Sigma)\}},$$

y siendo, segun la hipótesis, Σ pequeño, puede sin error sensible escribirse

$$\text{sen.}\,2\,(\theta - \Sigma) = \frac{g\,a}{V^2} f(z, V_0^2),$$

fórmula que nos dá tambien dos valores y en la que por las mismas consideraciones que anteriormente se hallan los valores de la funcion, obteniendo por lo tanto otros dos para $(\theta - \Sigma)$, á los que aumentados el de Σ dan los de θ superior é inferior al ángulo de máximo alcance.

Si consideramos ahora que el blanco se halle á la altura de la pieza, $\Sigma = 0$; por lo que la fórmula anterior, que en este caso es mas exacta como queda dicho, se reduce á

$$\text{sen.}\,2\,\theta = \frac{g\,a}{V^2} f(z, V_0^2),$$

que es la que resuelve la cuestion. Como anteriormente habrá necesidad de apelar á igual fórmula en el vacio debiendo tenerse presente que el valor de α será dado en este caso por la relacion

$$\alpha = \frac{\Sigma(\theta) + \Sigma(\varphi)}{\text{tan.}\,\theta + \text{tang.}\,\varphi}$$

en la que, como es sabido por ser el terreno horizontal se asigna á φ un valor algo mayor que el que se ha tomado para θ.

Si deseáramos obtener mas aproximacion, el valor de θ, una vez determinado, nos servirá para calcular el de α y por consecuencia el de las funciones; y de este modo obtendremos otro valor de θ mas exacto que el primero.

134. En el caso de considerar la resistencia del aire proporcional al cubo de la velocidad, siendo b y a las coordenadas del blanco, la ecuacion será

$$b = a\,\text{tang.}\,\theta - \frac{g a^2}{2 V_1^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V_1}{c}\,a + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c}\right)^2 a^2\right\}$$

y si, como de ordinario, llamamos $\frac{b}{a} = \text{tang.}\,\Sigma$ y ponemos el cos. θ que entra en V_1 en funcion de la tangente, se obtiene

$$\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\Sigma = \frac{g\,a}{2\,V^2}\left\{1 + \text{tang.}^2\theta\right\} \times$$

$$\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V}{c(\sqrt{1 + \text{tang.}^2\theta})}\,a + \frac{1}{6}\left(\alpha^2\frac{V a}{c}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \text{tang.}^2\theta}\right\},$$

ó bien

$$1 + \text{tang.}^2\theta + \frac{1}{6}\,\frac{\alpha^4 V^2}{c^2}\,a^2 - \frac{2\,V^2}{g\,a}\,\text{tang.}\,\theta +$$

$$+ \frac{2\,V^2}{g\,a}\,\text{tang.}\,\Sigma = -\frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V}{c}\,a\,(\sqrt{1 + \text{tang.}^2\theta},)$$

en la que si hacemos,

$$\text{tang.}\,\theta = u,\ \frac{2\,V^2}{g\,a} = m,\ \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V\,a}{c} = n \text{ y } 1 + \frac{1}{6}\,\alpha^4\,\frac{V^2}{c^2}\,a^2 + \frac{2\,V^2}{g\,a}\,\text{tang.}\,\Sigma = p,$$

queda

$$u^2 - m u + p = -n\sqrt{1 + u^2},$$

la que dá finalmente.

$$u^4 - 2\,m\,u^3 + (m^2 + 2\,p - n^2)\,u^2 - 2\,m p\,u + p^2 - n^2 = 0.$$

Sabidos los distintos procedimientos que pueden conducirnos á determinar las dos raices positivas, que la estructora de la ecuacion muestra, el mas espedito es sin embargo el gráfico, que ya hemos dado á conocer.

Inútil parece decir que si en la ecuacion anterior hacemos $\Sigma = 0$, nos conducirá á la resolucion del mismo problema en terreno horizontal.

Los razonamientos siguientes permiten simplificar la resolucion de la ecuacion resultado de este ploblema, sino se quisiera seguir el método de ensayos sucesivos. El valor de θ, conocida que sea la naturaleza del tiro ó sea el objeto que con él ha de seguirse, puede fijarse aproximadamente, consultando al efecto las tablas de tiro: sea θ_1 este valor; con él se calculará el de $V_1 = V\cos.\theta_1$ en este caso, el cual sustituido en la ecuacion

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\Sigma + \frac{g\,a}{2\,V_1^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2 V_1}{c}\,a + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^2 V_1}{c}\right)^2 a^2\right\}$$

dará desde luego un cierto valor θ_2. Si este difiere mucho de θ_1 se calcula un nuevo valor de $V_1 = V\cos.\theta_2$, que será el que se introduzca en la ecuacion última y el nuevamente dado por ella para θ es por lo general el ángulo de proyeccion que se busca, con una aproximacion muy suficiente, pudiendo sin embargo continuar las operaciones si se deseara mayor.

135. Réstanos por último determinar el ángulo y velocidad de caida, la duracion del trayecto y la altura total del tiro, despues de resuelto uno cualquiera de los anteriores problemas: lo que digamos al considerar la resistencia del aire proporcional á las potencias segunda y cuarta de la velocidad se entiende por modo igual para ser la resistencia proporcional al cubo.

Si en la ecuacion

$$\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\theta - \frac{g\,x}{V_1^2}\,f_1(z, V_0^2),$$

sustituimos todas las cantidades que entran en el segundo miembro por sus valores que nos son conocidos, tendremos el ángulo de caida;

del mismo modo conoceremos la velocidad en este punto por la ecuacion

$$v = \frac{V}{f_2(z, V_0^2)} \times \frac{\cos.\,\theta}{\cos.\,\varphi};$$

el tiempo total lo deduciremos de

$$T = \frac{x}{V_1 f_3(z, V_0^2)},$$

y buscaremos la altura total del tiro determinando la abcisa del punto que lo marca, para lo que haremos $\varphi=0$ en la ecuacion de la tangente, que nos dará

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{g\,x}{V_1^2} f_1(z, V_0^2), \text{ de la que } V^2 \text{sen.}\,2\theta \times \frac{\alpha}{2gc} = z f_1(z, V_0^2)$$

de cuya espresion sacaremos el valor de x, que sustituido en la ecuacion de la trayectoria nos dará el de la ordenada.

136. Cuando se trate de resolver los anteriores problemas en el tiro directo de cañones, el procedimiento será enteramente el mismo, pero con la simplificacion consiguiente á poder suponer α igual á la unidad, por verificarse siempre este tiro bajo ángulo de proyeccion que no esceden de 15°, siendo de muy escasa importancia el error que así se comete. En efecto los valores de α correspondientes á arcos de 0° á 5° á 10° y á 15° son respectivamente como se vé en la tabla que los contiene

$$1+0{,}0013,\ 1+0{,}0052,\ 1+0{,}0118;$$

y como quiera que estos valores tan solo afectan á las funciones que representan la influencia de la resistencia del aire, el error cometido puede referirse á esta, la que á su vez depende de la densidad de aquel, por lo que dicho error se traducirá en una variacion de la columna barométrica y se ha calculado que puede considerarse debido á reduccion de ésta respectivamente en 1^{mm}, 4^{mm} y 9^{mm} variaciones insignificantes y que nunca en la práctica ordinaria se toman en cuenta. Si las circunstancias, sin embargo exigieran un ángulo mayor de proyeccion no podria hacerse tal hipótesis, por lo que habria que proceder en un todo igualmente que en los casos diversos que hemos estudiado. No debe perderse de vista para la resolucion de estas cuestiones relativamente al tiro directo de cañones una circunstancia muy importante cual es la influencia que tienen las velocidades inicial y final en la ley de la resistencia del aire que se adopte para estos cálculos; así pues si el proyectil empezara su movimiento con una velocidad superior á 376^m, siendo la presumible de caida tambien mayor que ésta, la fórmula aplicable será la que depende del cuadrado de la velocidad; si por el contrario, fuera la inicial menor, se acudirá á la del cuadrado y cuarta potencia de la velocidad, y si por último fuese la inicial superior á 376^m y menor que esta la final, entonces la práctica del tiro sólo permitirá apreciar la ley apropiada, tomando en consideracion la velocidad que conservará el proyectil en la mayor parte del trayecto, á lo que deberá subordinarse la ley de la resistencia, si no se adopta la que la supone proporcional al cubo.

No ocurrirá pues dificultad alguna en los problemas en que entre la velocidad inicial por dato; pero si por el contrario ella fuese la incógnita, será necesario acudir á las fórmulas del vacío, las que nos darán para ella un valor aproximado y menor que el que se busca, permitiéndonos por tanto apreciar ésta y ver en consecuencia la ley de la resistencia del aire que nos determina las fórmulas que han de emplearse para la resolucion del problema.

137. En esta clase de tiro, cualquiera que sea la ley de la resistencia del aire que las circunstancias del caso obliguen á adoptar, se verifica que el ángulo de proyeccion, contado desde la línea, que une la boca de la pieza al blanco puede considerarse sin error sensible como independiente de la altura de aquel.

Siendo pequeños los ángulos de proyeccion el valor de α será igual á la unidad, y si llamamos a y b las distancias horizontal y vertical del blanco al punto de partida, la ecuacion general de la trayectoria será

$$b = a \text{ tang. } \theta - g \int_0^a dx \int_0^a \mathrm{F}(x, \mathrm{V}_1)\, dx,$$

ó bien

$$\operatorname{tang.}\theta - \operatorname{tang.}\Sigma = \frac{g}{a}\int_0^a dx \int_0^a F(x, V_1)\,dx;$$

de donde poniendo la tangente en funcion del seno y del coseno

$$\frac{\operatorname{sen.}(\theta-\Sigma)}{\cos.\theta \cos.\Sigma} = \frac{g}{a}\int_0^a dx \int_0^a F(x, V_1)\,dx,$$

Como el ángulo de proyeccion es por hipótesis pequeño $V_1 = V \cos.\theta$ difiere poco de V; así mismo si Σ es tambien pequeño, el producto $\cos.\theta \cos.\Sigma$ es sensiblemente igual á la unidad, reduciéndose la anterior espresion á

$$\operatorname{sen.}(\theta-\Sigma) = \frac{g}{a}\int_0^a dx \int_0^a F(x, V)\,dx,$$

lo que demuestra la proposicion enunciada por ser independiente de b el segundo miembro.

138. Los aparatos electro-balísticos (1) aprecian la velocidad de

(1) En el estudio de dichos aparatos obteníamos la velocidad, dividiendo el tiempo hallado, por la distancia que mediaba entre los marcos, sin fijar el punto á que dicha velocidad correspondia: fácil es demostrar que éste se halla próximamente á la mitad de aquella distancia. Para ello si, tomando la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, sustituimos en la fórmula

$$v = \frac{V}{e^{\frac{1}{2}s}} \times \frac{\cos.\theta}{\cos.\varphi}$$

las condiciones del movimiento correspondientes al punto medio de la espresada distancia entre los marcos, obtendremos la velocidad teórica, que en él tiene el proyectil.

Supongamos que el trayecto que entre los marcos recorre sea horizontal, lo que es admisible á causa de su pequeñez con respecto al total y si establecemos el sistema coordenado en el punto en que el proyectil corta al primer marco, se verificará ser los proyectiles á cierta distancia de la boca de la pieza, siendo necesario, si las investigaciones se dirigen á conocer las velocidades iniciales, determinar estas en funcion de la observada: si suponemos la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, la fórmula

$$v = \frac{V}{e^{\frac{x}{2}}} \times \frac{\cos.\theta}{\cos.\varphi}$$

nos permitirá resolver la cuestion. Á este fin si v se toma á corta distancia, los valores de φ y θ son próximamente iguales y si es a aquella distancia

$$\theta = \varphi = 0, \text{ y } \alpha = 1;$$

y si llamamos v' la velocidad con que llega á dicho punto, se tendrá

$$V_1 = V\cos.\theta = V = v';$$

por lo que el valor de la velocidad para todos los puntos situados entre ambos marcos se convierte en

$$v = \frac{v'}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{v'}{e^{\frac{x}{2c}}},$$

y el de la del punto medio se obtendrá sustituyendo por x; $\frac{1}{2}x'$, siendo $x' = e$, distancia entre ambos marcos; resultando finalmente

$$v = \frac{v'}{e^{\frac{1}{2}\frac{x'}{2c}}}.$$

La velocidad encontrada por los aparatos era

$$\bar{v} = \frac{e}{t} = \frac{x'}{t},$$

y si en ella sustituimos por t su valor que es

$$t = \frac{x}{V\cos.\theta}\,\Psi\left(\frac{\alpha x}{2c}\right),$$

é introducimos las condiciones anteriores

$$V = v \times e^{\frac{a}{2c}}$$

en la que, desarrollando en série $e^{\frac{a}{2c}}$ y despreciando los términos de ella en que $\frac{a}{2c}$ está afectada de esponentes superiores á la unidad, tendremos

$$V = v\left(1 + \frac{a}{2c}\right),$$

que nos dá la velocidad inicial siempre que v sea superior á 376^m.

$$\theta = \varphi = 0; \; \alpha = 1; \; V_1 = v' \text{ y } x = x'$$

se convierte esta en

$$t = \frac{x'}{v'} \Psi\left(\frac{x'}{2c}\right)$$

y aquella en

$$\bar{v} = \frac{v'}{\Psi\left(\frac{x'}{2c}\right)}.$$

Comparando la velocidad teórica con esta queda

$$\frac{v}{\bar{v}} = \frac{e^{\frac{v'}{\frac{1}{2}\frac{x'}{2c}}}}{\frac{v'}{\Psi\left(\frac{x'}{2c}\right)}} = \frac{\Psi\left(\frac{x'}{2c}\right)}{e^{\frac{1}{2}\frac{x'}{2c}}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{x'}{2c} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{x'}{2c}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{x'}{2c}\right)^3 + \ldots\ldots}{1 + \frac{1}{2}\frac{x'}{2c} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{x'}{2c}\right)^2 + \frac{1}{2.3.8}\left(\frac{x'}{2c}\right)^3 + \ldots\ldots}$$

y como el numerador es mayor que el denominador $v > \bar{v}$; y siendo el movimiento retardado nos dice que la velocidad $\bar{v}$ corresponde á un punto algo mas allá del punto médio; pero como quiera que en estas séries no empieza la diferencia hasta los terceros términos, diferencia que por la naturaleza de ellas es sumamente pequeña, puede siempre admitirse ser $v = \bar{v}$. Si hubiéramos tomado fórmulas espresivas de otras leyes de la resistencia del aire los resultados hubieran sido análogos y basta lo dicho para indicar la manera de proceder.

Si v es inferior á este límite, la fórmula de que haremos uso es,

$$V=v f_2\left(\frac{a}{c}, \frac{V^2}{r^2}\right),$$

obtenida de la fórmula general de la velocidad, despues de poner por α la unidad y de suponer como antes cos. θ=cos. φ. Pero como $f_2(z, V_o^2)$ es igual á

$$\sqrt{\left(1+\frac{V^2}{r^2}\right) e^{\frac{a}{c}}-\frac{V^2}{r^2}}$$

se tiene

$$V=v\sqrt{\left(1+\frac{V^2}{r^2}\right) e^{\frac{a}{c}}-\frac{V^2}{r^2}}$$

de donde

$$V^2\left\{1+\frac{v}{r^2}-\frac{v}{r^2}\times e^{\frac{a}{c}}\right\}=v^2\times e^{\frac{a}{c}} \text{ y } V=v\sqrt{\frac{e^{\frac{a}{c}}}{1-\frac{v^2}{r^2}\left(e^{\frac{a}{c}}-1\right)}},$$

y como antes desarrollamos en série $e^{\frac{a}{c}}$ y despreciamos los mismos términos puede escribirse bajo la forma

$$V=v\,\frac{1+\frac{a}{2c}}{1-\frac{v^2}{r^2}\times\frac{a}{2c}}$$

y verificada la division y prescindiendo tambien de los términos superiores al primer grado de $\frac{a}{c}$, resultará por último

$$V=v\left\{1+\frac{a}{2c}\left\{1+\frac{v^2}{r^2}\right\}\right\}$$

Si para igual determinacion nos sirviéramos de las fórmulas deducidas en el caso de ser la resistencia proporcional al cubo de la velocidad, tendriámos

$$v = \frac{\cos.\theta}{\cos.\varphi} \times \frac{V}{1 + \frac{\alpha^2 V_1}{c} \times a}$$

y haciendo tambien $\alpha = 1$, y supuesta la pequeñez de a

$$\cos.\theta = \cos.\varphi,$$

la espresion anterior se reduce á

$$v = \frac{V}{1 + \frac{V}{c} \times a}$$

de la que se obtiene

$$V = \frac{v}{1 - \frac{a v}{c}}.$$

139. Réstanos para resolver los distintos géneros de problemas sobre el tiro ocuparnos de los relativos al tiro por sumersion ó indirecto. Llámase asi al que tiene por objeto dar en un punto que no puede ser batido directamente por existir un obstáculo entre él y la batería; de manera que los proyectiles deberán pasar por encima del obstáculo para tocar el blanco. Será necesario á fin de conseguir el mayor efecto que la trayectoria no se eleve y lejos de esto que pase rasante á la cresta de la obra que impide el empleo del tiro directo, deduciéndose de esta circunstancia que la forma de la trayectoria no está determinada únicamente por la posicion relativa de la pieza y el blanco, sino que es preciso tomar en consideracion un tercer punto, cual es el mas alto del obstáculo que hay que salvar; de esta manera se consigue tambien que á igualdad de carga y de distancia la velocidad con que el proyectil llega al blanco sea mayor.

En esta clase de tiro se admite como en el directo que el valor de α es la unidad, por que aunque el ángulo de proyeccion sea mayor que lo es en aquel ordinariamente, no pasa por lo general de 15° tampoco y rara vez se emplea alguno un poco mayor; además la velocidad es menor y nunca llega á 376^m, los proyectiles son de mayor peso y los efectos de la resistencia del aire menores por lo tanto.

Debiendo, segun queda dicho, pasar el proyectil rasando la cresta del parapeto y dar en el blanco situado detrás de él, se conocen dos puntos que deberán pertenecer á la trayectoria, por lo que será necesario resolver el problema de dados estos por sus coordenadas determinar la velocidad inicial y el ángulo de proyeccion.

Otras veces se desea que el proyectil pase por la cresta del parapeto con una inclinacion determinada para que pueda rebotar dentro de la obra batida, multiplicando así sus efectos destructores; serán pues los datos la posicion de un punto de la cresta y la inclinacion que en él debe tener la trayectoria, siendo las incógnitas las mismas que anteriormente.

Sean pues (a, b) y $(a'—b')$ las coordenadas de ambos puntos, en el primer caso, y por satisfacer la ecuacion de la trayectoria tendremos

$$\text{tang.}\,\theta - \frac{b}{a} = \frac{g\,a}{2\,V_1^2} f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) \text{ y tang.}\,\theta - \frac{b'}{a'} = \frac{g\,a'}{2\,V_1^2} f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right),$$

y eliminando entre ellas tang. θ.

$$\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} = \frac{g}{2\,V_1^2}\left\{a' f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)\right\}$$

y poniendo por V_1^2 su igual $r^2\,V_0^2$, se tendrá

$$\frac{2\,r^2}{g}\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)V_0^2 = a' f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right),$$

y si al factor que acompaña á V_0^2 le llamamos M para abreviar, sustituyendo á las funciones sus desarrollos se tiene

$$M V_0^2 = a'\left\{ \left(1+V_0^2\right) \Psi_1 \left(\frac{a'}{c}\right) - V_0^2 \right\} - a\left\{ \left(1+V_0^2\right) \Psi_1 \left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2 \right\}$$

de donde despejando V_0, será su valor

$$V_0 = \sqrt{\frac{a' \Psi_1\left(\frac{a'}{c}\right) - a\, \Psi_1\left(\frac{a}{c}\right)}{M + (a'-a) - \left\{ a' \Psi_1\left(\frac{a'}{c}\right) - a \Psi_1\left(\frac{a}{c}\right) \right\}}};$$

conocido que sea éste se determinarán los valores de las funciones

$$f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) \text{ y } f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)$$

y dividiendo una por otra las dos ecuaciones de condicion será

$$\frac{\text{tang.}\, \theta - \frac{b}{a}}{\text{tang.}\, \theta - \frac{b'}{a'}} = \frac{a f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}{a' f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right)},$$

de donde

$$\text{tang.}\, \theta = \frac{a' f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) \frac{b}{a} - a f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) \frac{b'}{a'}}{a' f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) - a f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right)}$$

por cuya espresion conocemos el valor de θ, y como

$$V_0 = \frac{V_1}{r} = \frac{V \cos.\, \theta}{r},$$

podemos conocer tambien el valor de V.

140. Si nos sirviéramos de las ecuaciones deducidas en virtud de

suponer la resistencia del aire proporcional al cubo de la velocidad, será igualmente

$$\text{tang. } \theta - \frac{b}{a} = \frac{g\,a}{2\,V_1^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{V_1}{c}\,a + \frac{1}{6}\,\frac{V_1^2}{c^2}\,a^2\right\}$$

$$\text{y tang. } \theta - \frac{b'}{a} = \frac{g\,a'}{2\,V_1^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{V_1}{c}\,a' + \frac{1}{6}\,\frac{V_1^2}{c^2}\,a'^2\right\}$$

ecuaciones que restadas dán desde luego

$$V_1^2\left\{2\left\{\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right\} - \frac{1}{6}\,\frac{g}{c^2}\left\{a'^3 - a^3\right\}\right\} - V_1 \times \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{g}{c}\left\{a'^2 - a^2\right\} - g\left\{a' - a\right\} = 0,$$

de lo que puede obtenerse el valor formular de V_1. En las aplicaciones llegaremos pues á una sencilla ecuacion de segundo grado con coeficientes numéricos al sustituir por las cantidades literales los valores correspondientes al caso de que se trata. Si el valor de V_1 así deducido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones de condicion, obtendremos el de θ dado por su tangente y por tanto determinaremos el cos. y el valor de V da la espresion $V_1 = V \cos.\, \theta$.

141. Sean las condiciones ahora (a, b) coordenadas del punto por donde ha de pasar la trayectoria y φ la inclinacion de ésta en él; si, como siempre hacemos $\frac{b}{a} = \text{tang. } \Sigma$, aquellas condiciones deberán satisfacer las ecuaciones de la trayectoria y la tangente; tendremos así un sistema formado por estas dos, que nos permitirá resolver la cuestion: el sistema será

$$\text{tang. } \theta - \text{tan. } \Sigma = \frac{g\,a}{2\,V_1^2}\, f\left(\frac{a}{c},\, V_0^2\right)$$

$$\text{y tang. } \theta - \text{tang. } \varphi = \frac{g\,a}{V_1^2}\, f_1\left(\frac{a}{c},\, V_0^2\right);$$

restándolas como anteriormente, llamando M á

$$\frac{2r^2}{ga}\left\{\text{tang.}\,\Sigma-\text{tang.}\,\varphi\right\}$$

y poniendo por las funciones sus desarrollos, facilmente se obtiene

$$V_0=\sqrt{\frac{2\,\psi\left(\frac{a}{c}\right)-\psi_1\left(\frac{a}{c}\right)}{M+1-\left\{2\,\psi\left(\frac{a}{c}\right)-\psi_1\left(\frac{a}{c}\right)\right\}}}:$$

continuando tambien como anteriormente, hallaremos el valor de tang. θ, dividiendo una por otra ambas ecuaciones, lo que dá

$$\text{tang.}\,\theta=\frac{2\,\text{tang.}\,\Sigma f_1\left(\frac{a}{c},V_0^2\right)-\text{tang.}\,\varphi f\left(\frac{a}{c},V_0^2\right)}{2f_1\left(\frac{a}{c},V_0^2\right)-f\left(\frac{a}{c},V_0^2\right)}$$

valor que con el de V_0 nos permite resolver el problema.

142. Si en vez de partir de las ecuaciones que hemos tomado de la trayectoria y su tangente hiciéramos uso de

$$\frac{b}{a}=\text{tang.}\,\theta-\frac{g\,a}{2\,V_1^2}\left\{1+\frac{2}{3}\,\frac{V_1}{c}\,a+\frac{1}{6}\,\frac{V_1^2}{c^2}\,a^2\right\} \quad \text{y}$$

$$\text{tang.}\,\varphi=\text{tang.}\,\theta-\frac{g\,a}{V_1^2}\left\{1+\frac{V_1}{c}\,a+\frac{1}{3}\,\frac{V_1^2}{c^2}\,a^2\right\}$$

las restaríamos igualmente y de la ecuacion resultante sacaríamos el valor de V_1, que sustituido en la primera de aquellas nos daria el de θ.

143. En la primera de las soluciones dadas á este problema conviene observar que no se comete gran error al suponer las funciones que entran en el valor de tang. θ iguales á la unidad, por que en esta clase de tiro V_1 no es grande la distancia á que se tira tampoco es escesiva y los proyectiles no son de pequeños calibres, por lo que los valores de las variables son tambien muy pequeños, en cuyo caso las funciones difiriendo poco de la unidad pueden suponerse iguales á ella, y en esta hipótesis la fórmula se reduce á

$$\text{tang.}\, \theta = 2\, \text{tang.}\, \Sigma - \text{tang.}\, \varphi;$$

si todavia admitiéramos que por ser los ángulos pequeños pueden sustituir á sus tangentes, quedará finalmente $\theta = 2\Sigma - \varphi$, que nos demuestra la relacion que en este tiro existe entre el ángulo de proyeccion, el de elevacion del objeto ó sea el ángulo de posicion y el de caida.

Deduccion igual puede hacerse en la segunda solucion, puesto que de las ecuaciones de condicion se obtiene

$$\frac{\text{tang.}\, \theta - \text{tang.}\, \Sigma}{\text{tang.}\, \theta - \text{tang.}\, \varphi} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{V_1}{c} a + \frac{1}{6}\frac{V_1^2}{c^2} a^2}{1 + \frac{V_1}{c} a + \frac{1}{3}\frac{V_1^2}{c^2} a^2},$$

y por las mismas consideraciones que anteriormente

$$\frac{\text{tang.}\, \theta - \text{tang.}\, \Sigma}{\text{tang.}\, \theta - \text{tang.}\, \varphi} = \frac{1}{2}$$

y de aquí

$$\tan \theta = 2\, \text{tang.}\, \Sigma - \text{tang.}\, \varphi$$

y tambien, por modo igual $\theta = 2\Sigma - \varphi$.

Esta relacion que hemos encontrado permite, con suficiente aproximacion en la práctica, conocer el ángulo de proyeccion, debiendo tenerse presente que φ es siempre negativo: tambien nos hace ver el límite del ángulo de proyeccion que puede dar lugar á esta clase de tiro, puesto que, siendo forzoso que el blanco sea un punto de la rama descendente, como en el primero de ella $\varphi=0$, $\theta=2\Sigma$ será aquel límite. Los fundamentos en que nos hemos apoyado para llegar á estas conclusiones, no son rigurosamente exactos, por lo que solo debe concedérseles cierta aproximacion.

144. Facilmente se determina tambien el límite de la altura á la cual se puede rasar la cresta de un parapeto bajo una inclinacion dada. Sea θ el mayor ángulo de proyeccion que puede obtenerse en una pieza; a la distancia al objeto y b la mayor altura que puede tener para que la inclinacion de la trayectoria en este punto sea φ.

Por ser a y b las coordenadas de un punto de la trayectoria satisfarán su ecuacion y será

$$b=a\ \text{tang.}\theta-\frac{g\,a}{2\,V_1^2}f\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right).$$

Al mismo tiempo, por tener en dicho punto la tangente la inclinacion φ, se tiene

$$\text{tang.}\varphi=\text{tang.}\theta-\frac{g\,a}{V_1^2}f_1\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right);$$

ecuacion que dá

$$\frac{r^2}{a\,g}\ (\text{tang.}\ \theta-\text{tang.}\ \varphi)\ V_0^2=f_1\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right);$$

y si llamamos M al factor que acompaña á V_0^2 y recordamos que

$$f_1\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right)=(1+V_0^2)\ \Psi\left(\frac{a}{c}\right)-V_0^2$$

resulta

$$V_0=\sqrt{\frac{\Psi\left(\frac{a}{c}\right)}{M+\Psi\left(\frac{a}{c}\right)-1}}:$$

Conociendo V_0 se determina V, y se conoce el valor de la funcion

$$f\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right);$$

y de este modo se llega á obtener el valor de b por la primera ecuacion.

145. Así mismo se puede fijar el límite de la altura á la cual cabe, rasando la cresta de un parapeto, tocar en un punto dado del terraplen.

Sean a y b las coordenadas de la cresta del parapeto, d la distancia horizontal desde el punto del terraplen á dicha cresta y h la altura de la cresta sobre el terraplen; las coordenadas de este punto serán $(a'=a+d,\ b'=b-h)$ y por tanto tendremos las ecuaciones siguientes.

$$b = a \operatorname{tang.} \theta - \frac{g\,a^2}{2\,V_1^2} f\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right)$$

$$b-h = a' \operatorname{tang.} \theta - \frac{g\,a'^2}{2\,V_1^2} f\left(\frac{a'}{c},\ V_0^2\right),$$

que restados dan

$$h = \frac{g}{2\,V_1^2}\left\{a'^2 f\left(\frac{a'}{c},\ V_0^2\right) - a^2 f\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right)\right\} - (a'-a) \operatorname{tang.} \theta,$$

ó bien

$$\frac{2\,r^2}{g}\left\{h+(a'-a)\operatorname{tang.}\theta\right\} \times V_0^2 = a'^2 f\left(\frac{a'}{c},\ V_0^2\right) - a^2 f\left(\frac{a}{c},\ V_0^2\right);$$

y llamando, como anteriormente, M, al factor que acompaña á V_0^2, y observando que

$$f\left(\frac{a'}{c}, V_0^2\right) = (1 + V_0^2)\,\psi_1\left(\frac{a'}{c}\right) - V_0^2,$$

y

$$f\left(\frac{a}{c}, V_0^2\right) = (1 + V_0^2)\,\psi_1\left(\frac{a}{c}\right) - V_0^2,$$

se tiene finalmente

$$V_0 = \sqrt{\frac{a'^2\,\psi_1\left(\frac{a'}{c}\right) - a^2\,\psi_1\left(\frac{a}{c}\right)}{M - \left\{a'^2\,\psi_1\left(\frac{a'}{c}\right) - a^2\,\psi_1\left(\frac{a}{c}\right)\right\} + (a'^2 - a^2)}}$$

y de la misma manera que antes hemos procedido, al conocer V_0, V y el valor de la funcion; se obtiene el de b por la ecuacion de la trayectoria.

El tiro por sumersion ha adquirido una importancia estraordinaria, aplicándose lo mismo para enfilar y demoler, que para abrir brecha, mas principalmente desde que con la adopcion de la artillería rayada ha aumentado la potencia de este arma, por lo que en el lugar correspondiente nos ocuparemos de su estudio con la detencion que su importancia exige.

146. No parece necesario proceder á la resolucion de ejemplos numéricos que se reducen sencillamente á la sustitucion de los datos en todas cuantas cuestiones acaban de tratarse, y aún menos necesario ha de considerarse si para la mas pronta resolucion de los problemas sobre el tiro se hace uso de las fórmulas que se derivan de considerar la trayectoria como una curva de tercer grado; esto no obstante indicaremos la manera de determinar en estas condiciones la velocidad inicial, conocidos que sean el ángulo de proyeccion y el alcance.

Se llegará al resultado que se desea por medio de sustituciones sucesivas sin que por esto, como veremos inmediatamente, se alargue el cálculo, pués ántes al contrario, se facilita la determinacion de la velocidad que se busca en el hecho de tomar para su primer valor uno que aproximadamente la práctica del tiro hace conocer por analogía.

Sean

$$\theta = 10^{0} \text{ y } X = 2000^{m}$$

y la pieza con que se hace fuego el cañon de 15c/m : para mayor facilidad en los cálculos conviene multiplicar por 10^{10} las ecuaciones que nos han de servir para la determinacion que se desea y que son en este caso

$$\frac{10^{10}}{V^2} = \frac{10^{10} \operatorname{sen.} 2\theta}{gX} - 10^{10} \, C X \quad \text{y} \quad 10^{10} C = \frac{2570}{\frac{P}{d^2} \times V^{\frac{2}{5}}}$$

De esta última se deduce

$$\log. 10^{10} C X = \log. \frac{2570 \, X}{\frac{P}{d^2}} - \frac{2}{5} \log. V.$$

Supongamos que se asigna á V, como primer valor prudencial el de 360^{m}; el valor de 10^{10} sen. 2θ es 174320 y sustituyendo en la segunda fórmula por el peso y diámetro del proyectil sus valores $11^{kg},50$ y $1^{dm},52$, se tiene

$$\frac{10^{10}}{V^2} = 174320 - 10^{10} C X$$

de la primera y de la segunda

$$\log. 10^{10} C X = 6{,}01373 - \frac{2}{5} \log. 360 = 4{,}99121;$$

de donde

$$10^{10} C X = 97997;$$

por lo que

$$\frac{10^{10}}{V^2} = 76323$$

y de aquí

$$10-2\log. V=4,88265 \quad \text{y} \quad V=361,97;$$

los que nos dice que el valor de V está comprendido entre 360^m y $361^m,97$ este valor será pues el que sustituyamos ahora y tendremos

$$\log. 10^{10} C X=6,01373-\frac{2}{5}\log. 361,97=4,99026 \qquad \text{y}$$

$$10^{10} C X=97783;$$

por lo que

$$\frac{10^{10}}{V^2}=76537 \quad \text{y} \quad V=361^m,46:$$

la velocidad ahora está comprendida entre $361^m,46$ y $361^m,97$, creyendo inútil continuar los cálculos.

CAPÍTULO 7.º

Irregularidades de la trayectoria.

147. Siendo el objeto general de la Balística enseñar los medios que deben emplearse para conseguir que el proyectil toque un punto dado, es evidente que aquél se cumpliría, siempre que éste, durante su trayecto, solo estuviera sometido á las acciones de la pesantez y de la resistencia del aire, obrando esta última tangencialmente á la direccion del movimiento. La cuestion reducida á tan sencillas proporciones es del dominio de la Mecánica y ha sido anteriormente resuelta, determinándose para una velocidad inicial, dada en magnitud y direccion, la trayectoria que aquellas fuerzas obligarian á recorrer al proyectil. Mas no sucede así: cuando se desciende á la práctica del tiro, si se dispara repetidamente sobre un blanco, con una misma pieza y en iguales condiciones teóricas, el punto, que se llama punto de *impacto* medio, alrededor del cual todos los tiros hieren simétricamente, no se confunde en general con el determinado por las fórmulas balísticas correspondientes: la trayectoria *real* ó *accidental* difiere pues de la *normal* ó *media* que es la que ha sido calculada, y es preciso por tanto que al existir una causa, que la modifica, sea ésta conocida, pudiendo así regularizarse su influencia ó aminorar al ménos sus efectos.

148. A esta causa ó á las causas que obligan al proyectil á separarse de la trayectoria normal se les denomina fuerzas desviatrices,

y á sus efectos desviaciones. Robins parece ser el primero que, observando diferencias en los alcances y desvíos laterales en disparos de una misma arma, á pesar de igualar las circunstancias de carga y elevacion y emplear cuidadosamente el mismo sistema de carga, atribuyó estas desviaciones de la trayectoria normal, á la resistencia del aire y á la rotacion del proyectil, sin poderse suponer debidos á una desviacion inicial de aquel porque no son proporcionales á los alcances: la coexistencia pues de los movimientos de traslacion y rotacion, producido éste por el rozamiento del proyectil sobre las paredes del ánima y tambien por su escentricidad, como luego veremos, habia de producir á su vez cierta desigualdad en la presion ejercida por el aire y por consiguiente una desviacion hácia el lado en que aquella fuera menor.

Un viento escesivo en el ánima, desigual accion en la fuerza de la pólvora, falta de coincidencia entre los centros de gravedad y de figura del proyectil, ó sea su excentricidad, rozamiento del aire sobre el proyectil, animado éste de un movimiento de rotacion, fueron considerados como causas de los hechos observados; y si bien es cierto que ellos pueden ocasionar irregularidades en la trayectoria, no lo es ménos que no bastan para producir aquellos en proporciones tan considerables como se presentan en la práctica y hasta tal punto que, considerándolos, como Otto y Poisson, debidos solamente al rozamiento, la teoría conduce á resultados en abierta contradiccion con los hechos que trata de esplicar.

149. La resistencia del aire y la rotacion del proyectil, que modifica aquella, son verdaderamente las causas de los grandes desvíos, causas denominadas *posteriores* por oposicion á las *iniciales* que, como la fuerza que se aplica para producir la explosion, la vibracion del arma por efecto del disparo, el trazado imperfecto de la línea de mira, la escentricidad de la pieza, el viento, las desigualdades naturales en las cargas del mismo género, debidas bien al proyectil, bien á la pólvora, los choques contra las paredes del ánima, tienen, como toda otra circunstancia por insignificante que parezca, influencia sobre la irregularidad que en los tiros se observa, haciendo unas veces variar la velocidad y otras el ángulo de proyeccion.

150. Admitido pues que la causa principal de los grandes desvíos

es el movimiento de rotacion que el proyectil adquiere dentro del ánima, parece lógico dar á conocer el motivo de esta rotacion.

Supóngase un proyectil esférico y homogéneo, descansando sobre la generatriz inferior del ánima; al existir un viento, una vez inflamada la carga, los gases escaparán por él, causando una presion del proyectil sobre la generatriz de su punto de contacto, por lo que el movimiento será retardado en la parte mas baja de aquel con respecto al de la mas alta, que será á su vez acelerado, ocasionándose de esta suerte una rotacion alrededor de un eje horizontal, cuyo sentido será de arriba á bajo en el hemisférico anterior, rotacion que puede modificarse por consecuencia de repetidos golpes que el proyectil dá en su marcha dentro del ánima. Y así sucede en efecto; el paralelógramo, formado por las dos resultantes de las acciones que los gases ejercen, una para hacer marchar al proyectil en direccion del eje, otra compriméndolo sobre la pared inferior del ánima, dá del mismo modo una resultante dirigida hácia dicha pared, por lo que el efecto de ésta será de la misma naturaleza que el causado por la segunda de las dos componentes espresadas, formándose por esta accion, al cabo de algun tiempo una cavidad que toma el nombre de *asiento de la bala*: el desarrollo de la reaccion consiguiente dá lugar á que la bala salga en direccion de la tangente á la generatriz del ánima, ya curvilínea, yendo á chocar con la pared superior y marcando en ella otra impresion denominada *golpe*; lo cual puede repetirse un número de veces que dependerá de la longitud de la pieza. Por cada uno de estos golpes el proyectil adquiere un movimiento de rotacion, dirigiéndose su hemisferio anterior hácia el punto en que el choque se ha verificado, por lo que considerando dos de estos movimientos consecutivos puede ocurrir que la velocidad de rotacion en el primero se modifique hasta el punto de cambiar de sentido, y tambien de anularse, aunque en general solamente variará su magnitud: estos saltos del proyectil y las oscilaciones que esperimenta determinan su salida segun una direccion distinta de la del eje de la pieza y con una rotacion adquirida.

Mas aunque no existiera el viento en las piezas, no por esto los proyectiles dejarian de adquirir un movimiento de rotacion debido á su escentricidad, que no es posible hacer que desaparezca, dependiente como es, de la falta de homogeneidad en la materia, la que puede provenir de defectos en la colada y tambien de desigualdad de espesores si de proyectiles huecos se trata. Evidentemente, sea C el centro de figura (fig. 64) del proyectil y G el de gravedad; admitiendo que el viento se ha anulado, los gases obrarán sobre el hemisferio posterior, solamente dando una resultante que pasará por el punto C y cuya direccion coincide con el eje de la pieza: el centro de gravedad toma por consiguiente en cada instante un movimiento de traslacion segun el eje y el cuerpo gira alrededor de otro que pasa por aquel punto. El momento de rotacion es en cada instante igual al producto de la resultante de la accion de los gases por la perpendicular C G, esto es, el momento del par; claro es por tanto que éste varía con las posiciones de los centros de gravedad y figura relativamente al eje; pero cualquiera que éstas sean, á no encontrarse ambos sobre el eje mismo, el movimiento de rotacion, aunque á veces pueda ser poco marcado, subsiste al salir de la pieza el proyectil. Si se examinan diversas posiciones relativas de ambos centros se deduce, que si el de gravedad está sobre el de figura, el proyectil adquiere un movimiento de rotacion de abajo arriba é inverso si es contrária su disposicion; y por igual manera girará á la derecha ó á la izquierda si el centro de gravedad se halla á una ú otra de ambas regiones marcadas por el plano vertical que pasa por el eje de la pieza.

151. Estos dos movimientos de rotacion que provienen del viento y de la excentricidad, dan lugar á una rotacion única, resultante de su composicion, la cual puede ser conocida por médio de la experiencia: para ello basta hacer una señal en la extremidad del diámetro del proyectil paralelo al eje de la pieza y observar la cantidad que se desvía este punto de su posicion inicial en un pequeño trayecto, al estremo del cual se coloca una masa fácilmente penetrable. De experiencias asi ejecutadas se ha deducido, que si la excentricidad no es mayor que la centésima parte del rádio, tanto en proyectiles macizos como huecos, la influencia del viento domina en el movimiento de rotacion; y si escede, este es debido á aquella.

Segun lo que se acaba de exponer, claro és que haciendo la excentricidad bastante marcada podrá conseguirse imprimir al proyectil un movimiento de direccion y sentido determinados.

152. Veamos ahora como ésta rotacion del proyectil, producida

en el interior del ànima, y que subsiste fuera de ella, esplica los cambios de direccion que aquel esperimenta y las desviaciones del plano de tiro, que en general se observan.

Las presiones que el aire ejerce, modificando la resistencia que este opone al proyectil, cuando marcha animado de un movimiento de rotacion, han sido objeto de numerosas investigaciones, entre las que figuran en primer término las de Magnus, admitidas hoy con general aceptacion (1).

No pudiéndose experimentar con el proyectil animado de su ordinario movimiento, Magnus establece la hipótesis, que si un proyectil se mueve á través del aire las presiones de este flúido sobre aquel se ejercen del mismo modo, que si el proyectil permaneciera inmóvil y el aire se dirigiera contra él, siendo las velocidades de la bala y del flúido iguales respectivamente: y esta hipótesis es admisible, porque aunque se crea que detrás de un proyectil, que marcha á través del aire se hace el vacío, y en la disposicion que al proyectil dá Magnus esto no sucede, en la realidad tampoco este vacío se verifica, atendiendo á la gran velocidad con que el aire se precipita en la huella del proyectil y al corto espácio, por las pequeñas dimensiones de éste, que ha de recorrer para llegar á ella.

Magnus observó desde luego que cuando se hace girar á un cuerpo alrededor de un eje fijo, este cuerpo arrastra en su movimiento de rotacion el aire que le rodea, aun cuando su forma sea perfectamente esférica y su eje coincida con un diámetro: para asegurarse de ello basta aproximar la mano á un cuerpo en estas condiciones, esperimentándose una marcada sensacion debida al aire en movimiento, y este fenómeno se hace mas sensible siendo escéntrico el movimiento del cuerpo: si al mismo tiempo que gira, se dirige contra él una corriente de aire, la velocidad de este será mayor en el lado de la esfera en que el aire de la corriente y el arrastrado por el movimiento de aquella tengan la misma direccion, y menor en el opuesto, en que las direcciones de ambas partes se encuentran: esta diferencia de velocidades es causa de una diferencia de presiones, como experimentalmente se demuestra de la manera siguiente.

---

(1) Sur la deviation des proyéctiles, par G. Magnus.

El aparato (fig. 65) ideado á este efecto consiste en un cilindro M, que puede recibir un movimiento de rotacion, ya sea alrededor de su eje ó ya segun otro paralelo á éste y á una distancia cualquiera de él. A ambos lados del cilindro están colocadas dos veletas muy movibles A y B equidistantes de aquel eje: la corriente de aire al cilindro se inyecta por medio del ventilador F. Se emplea el cilindro en sustitucion de una esfera, á causa de que por el movimiento de rotacion de la esfera y debida á la fuerza centrífuga, se establecia una corriente de aire del ecuador á los polos, que era causa á su vez de incertidumbre en los resultados. Si, permaneciendo el cilindro en reposo, se inyecta la corriente de aire, las veletas, por su impulsion, quedan en direccion de aquella, pero si el cilindro gira, la veleta, del lado en que el movimiento de rotacion y la corriente tienen el mismo sentido, se aproxima al cilindro, separándose de él la otra, como indica la (fig. 66); es pues evidente que, en la primera region, la presion ha disminuido, miéntras que ha aumentado en la segunda; porque para aproximarse la veleta se hace necesario que la presion del aire interpuesta entre ella y el cilindro sea menor que la que ántes tenia y ejercia tambien sobre aquel, así como para que la otra se separe, es preciso que esperimente mayor presion que la soportada cuando el cilindro estaba en reposo, sufriéndola éste mayor al propio tiempo. En las aristas del cilindro situadas en el plano diametral perpendicular á la corriente, estos fenómenos se manifiestan con mas intensidad. Del mismo modo, se observa que siendo muy grande la velocidad de la corriente comparada con la del aire puesto en movimiento por la rotacion del cilindro, las veletas se desviaban poco de su posicion primitiva; pero si ambas velocidades están en relacion, las desviaciones son muy sensibles y rápidas.

153. La esplicacion de estos hechos debida tambien á Magnus, está fundada en que si un fluido penetra con cierta velocidad en una masa de la misma naturaleza, la presion que ejerce sobre esta, perpendicularmente á la direccion del movimiento, es menor que la correspondiente á cada punto de la masa en reposo.

Admitido este principio, la desviacion de los proyectiles esféricos se deduce inmediatamente, porque marchando una bala á través del aire con movimiento de rotacion alrededor de un eje vertical, si éste suponemos que sea de izquierda á derecha, colocado el observador detrás de la pieza y mirando la parte anterior del proyectil, es evidente que en el costado derecho de éste, el aire, por él arrastrado, tiene la misma direccion que el que se opone á la traslacion, por lo que la velocidad será mayor que en el costado opuesto en que por chocar ambas masas de aire la velocidad disminuye, existiendo por lo tanto un aumento de presion en esta parte, que hará desviar al proyectil hácia la opuesta: si la rotacion se verifica de derecha á izquierda, análogo razonamiento esplica que el desvío se verifica hácia la izquierda.

Si el eje de rotacion es perpendicular al plano de tiro ó al plano osculador de la trayectoría, si es ésta de doble curvatura, no habrá desviacion lateral; pero el efecto de la rotacion se traducirá en aumento ó disminucion de alcance; porque si gira la parte superior del proyectil de atrás adelante, la presion mayor será por lo dicho en la parte superior y el proyectil bajará, disminuyendo el alcance y al contrario cuando el movimiento sea inverso: solo hay un caso en que no se producen desviaciones laterales ni longitudinales y és si el eje de rotacion permanece constantemente tangente á la trayectoria, pues que entonces no hay diferencia de presiones en los hemisferios laterales ni en los superior é inferior. Resultado de lo expuesto es que el proyectil desvía siempre en el mismo sentido que se verifica la rotacion, lo que está en perfecto acuerdo con las experiencias verificadas en Segovia con proyectiles excéntricos y á los que por esta circunstancia se les daba un movimiento de rotacion, de antemano conocido.

154. Faltaba solo á Magnus hacer ver que esta diferencia de presiones era suficiente para producir las desviaciones observadas; idea emitida por Didion y que aquel demuestra por medio de un aparato (fig. 67) que consiste en un ligero cilindro, hueco, de cobre A B, sumamente movible alrededor de un eje, colocado dentro de un anillo, como se vé en la figura, y cuyo anillo está sujeto á una palanca de madera P P′, suspendida de su punto medio por un hilo metálico H H′; en el estremo de la palanca hay un contrapeso *p*, cuyo objeto es equilibrar el anillo. Dos tirantes T T impiden el cabeceo de la palanca, y otro hilo H″ asegura más la debida posicion de ella: en la garganta G se arrolla un hilo de seda, por el cual,

tirando de él rápidamente, se imprime un movimiento de rotacion al cilindro cuya duracion es de 2' á 3': la corriente de aire se inyecta por medio del ventilador V y su direccion es siempre paralela á la palanca; y para que ella obre constantemente del mismo modo sobre el cilindro el ventilador está colocado sobre una plataforma F en cuyo estremo hay un contrapeso S.

Al hacer girar solamente el cilindro, sin que obre la corriente de aire, aquel no varía de posicion y lo mismo sucede cuando obra solo la corriente sin tener movimiento de rotacion el cilindro; pero cuando á la par que éste gira, obra sobre él la corriente se vé que inmediatamente el cilindro arrastra á la palanca, desviando en el mismo sentido en que la rotacion tiene lugar, y sucede, que haciendo girar al propio tiempo la plataforma F, para que el ventilador acompañe al cilindro en su movimiento adquirido, éste se prolonga miéntras la rotacion tenga suficiente intensidad, habiéndose dado el caso de dar una vuelta entera el cilindro: si la rotacion se verifica en sentido contrario el movimiento lateral del cilindro es tambien el correspondiente é inverso del anterior.

Si girando el cilindro y obrando sobre él la corriente se dá una impulsion á la palanca de tal modo que adquiera un movimiento lateral contrário al que segun las experiencias anteriores debe adquirir, se vé que en un principio cede á la impulsion; pero al cabo de poco tiempo, perdida su intensidad, el cilindro se detiene y cambia el sentido de su movimiento, obedeciendo ya á la accion de la corriente; bien entendido que al ventilador se le ha de obligar á seguir de contínuo al cilindro.

155. Esto demuestra cierta desviacion, al parecer estraña, que se observa en el movimiento de los proyectiles, como es, salir por ejemplo, desviando lateralmente á la izquierda y repentinamente hacerlo á la derecha: si el proyectil, en su último bote, chocó contra la pared lateral derecha del ánima, en virtud de esta impulsion saldrá hácia la izquierda, y si llevaba una rotacion adquirida de izquierda á derecha en el momento que cese el efecto de la impulsion cederá al de la rotacion, desviando á la derecha. Las observaciones expuestas permiten concluir que el movimiento lateral del cilindro es solo debido á la rotacion bajo el influjo de la corriente de aire y si se tiene en cuenta que las velocidades de traslacion y rotacion de

un proyectil son muy superiores á las producidas en el aparato, fa-.cilmente se concibe que la diferencia de presiones es causa bastante para determinar el desvio de los proyectiles.

156. Aun cuando esplicada suficientemente la desviacion de los proyectiles debida á su rotacion por las esperiencias referidas, Ruztky ha dado otra que difiere algun tanto y vamos á exponer someramente por la importancia de la materia y lo completo de su teoría (1).

Supongamos que á un cilindro C (fig. 68) se dá un movimiento de rotacion alrededor de un eje proyectado en O y cuyo sentido sea el indicado en la figura, cilindro capaz al mismo tiempo de una traslacion en la direccion O A: el aire situado delante experimenta un aumento de densidad, tratando á la vez de correrse, por su movilidad y dilatacion, por los costados B y D. En virtud de la rotacion del cilindro el deslizamiento del aire no se verifica de igual modo que si aquel no girase: la fuerza centrífuga hace que las moléculas del aire próximas al cilindro sean impulsadas en direccion de los planos tangentes á la superficie cilíndrica. Sean B F, *a b*, *c d*,..,.. D E, las direcciones de planos tangentes al cilindro trazados en la parte de la superficie expuesta á la resistencia del aire, y los cuales marcan las de las moléculas de el fluido impulsadas por el movimiento de rotacion, y es evidente que las que de ellas se hallen en contacto con la parte B H, por ser la rotacion hácia adelante, son impelidas contra la masa, B M, de aire, situada delante del cilindro con una fuerza proporcional á su masa y al cuadrado de la velocidad de rotacion, y que las situadas en la parte H D son impelidas á su vez hácia abajo y hácia atras.

Para su deslizamiento hácia atrás tendrán las moléculas más facilidad cuanto mayor sea su proximidad al punto D, sucediendo lo contrario en el límite opuesto B y se desprende que el aire en el espácio B H A N tiene más densidad que en el H D M A; á cuya mayor densidad, que depende de las velocidades de traslacion y rotacion del cilindro, corresponde mayor fuerza elástica y mayor presion, debiendo ser por el contrario, la presion relativamente pe-

(1) Teoría y práctica de la construccion de proyectiles y espoletas.=Viena—1871—Traduccion del ilustrado Capitan del cuerpo D. Camilo Vallés.

queña en la parte cilíndrica H D que gira hácia abajo. La presion máxima corresponderá al punto mas elevado B, yendo en disminucion hasta el punto D, que será mínima.

De aquí se deduce, que en un cilindro con movimiento de traslacion á través del aire, la direccion de la resultante de todas las presiones será tal como la R R', que no tendrá ni la direccion de la traslacion ni cortará al eje del cilindro por deber naturalmente aproximarse á las presiones parciales de mayor valor relativo, formando con la direccion O A, un ángulo α, funcion de ambas velocidades y tanto mayor cuanto lo sea la diferencia de presiones mencionada. Descompuesta esta resultante en dos, una paralela á la traslacion y otra perpendicular, los valores de estas componentes serán $F = R\cos.\alpha$ y $F' = R\,\text{sen.}\,\alpha$; de las cuales, la primera no coincidirá en general, con la direccion O A, ni cortará por tanto al eje del cilindro, del que se hallará á una distancia d: tampoco la segunda encontrará á dicho eje y siendo d' su distancia al mismo, $F d$ y $F' d'$ son los momentos de estas fuerzas que tienden á hacer girar al cilindro en sentido contrario, y se verificará $R \times D = F'd' - Fd$, siendo D la distancia de la resultante al eje con relacion al cual se toman los momentos.

Las fuerzas F y F' trasladadas á un punto del eje del cilindro, aumentadas de los pares correspondientes, producirán, la primera que se denomina *resistencia directa del aire,* una retardacion en el movimiento de traslacion; y la segunda, que es perpendicular á ésta y se llama *fuerza desviatriz de la resistencia del aire,* una desviacion del cuerpo, hácia aquella parte á la cual giran los puntos anteriores del mismo: los pares modifican la rotacion, haciendo variar la velocidad y la posicion del eje.

Los anteriores razonamientos son igualmente aplicables á un cuerpo cualquiera de revolucion, que girando alrededor de un eje, esté animado de un movimiento de traslacion perpendicular á la direccion de aquel: basta para ello considerar el cuerpo dividido en discos de altura suficientemente pequeña para que estas diversas partes constituyan verdaderos cilindros: solo deberá tenerse en cuenta que por ser de distintos rádios estos discos, la velocidad de rotacion será en ellos distinta, siendo por tanto diferentes en cada uno los efectos de retardacion y desviacion; y como la resistencia en cada disco ha sido descompuesta en dos, y trasportadas éstas al eje, tendremos dos sistemas de fuerzas paralelas que darán las F y F′, y éstas á su vez la resultante

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2}$$

157. Para estudiar los desvios por la rotacion, como quiera que ésta puede verificarse alrededor de cualquiera eje que pase por el centro de gravedad, conviene distinguir algunas determinadas posiciones de aquel: sean estas, perpendicular al plano de tiro, perpendicular á la direccion inicial del movimiento, estando situado en el plano de tiro y tambien en este plano, coincidiendo con la direccion inicial del movimiento. En todo caso, colocado el observador detrás del arma, podrán distinguirse dos sentidos contrarios en las rotaciones; en el primero, mirando siempre al hemisferio anterior, rotacion de abajo arriba y rotacion de arriba abajo; en el segundo, rotacion lateral derecha y rotacion lateral izquierda; cuyos tres casos vamos á considerar separadamente.

Sea el primero de ellos, y desde luego se vé, que el proyectil no podrá desviar sino en el mismo plano de tiro: si la rotacion es de abajo arriba, la fuerza desviatriz de la resistencia del aire obra en este mismo sentido; la trayectoria pues, pasará por encima de la trayectoria normal, siendo la separacion de ambas curvas tanto mayor cuanto mas avance el proyectil y el alcance habrá aumentado: por esta misma causa la trayectoria es más rasante y el ángulo de caida menor que el dado por el cálculo. Si la rotacion es inversa, la presion producida por la fuerza desviatriz de la resistencia del aire obra constantemente de arriba abajo, que es causa de menor alcance, por mayor curvatura de la trayectoria, y de ángulos de caida mayores que los de la normal.

Asimilando, como hace Ruztky, la rotacion de abajo arriba y de arriba abajo, á un aumento ó disminucion respectivamente del ángulo de tiro, se comprende que bajo el ángulo de elevacion con el cual la bala, sin rotacion, dá el máximo alcance, el proyectil, ya gire hácia arriba, ya hácia abajo, alcanzará ménos que cuando no tiene rotacion alguna; porque en ambos casos se separa del ángulo de máximo alcance. Con ángulos superiores á éste puede suceder que con la rotacion de abajo arriba alcance ménos que con la de arriba abajo, porque con la primera se separa más el ángulo de el de máximo alcance, mientras que con la segunda se aproxima á él por el contrario.

Cuando el proyectil gira de abajo arriba la fuerza desviatriz de la resistencia del aire (fig. 69) está contenida en el plano de tiro y es perpendicular á la direccion del movimiento, y descompuesta en dos, una en direccion de la pesantez y otra perpendicular á ella, llamando α el ángulo variable que la direccion de la trayectoria forma con la horizontal, los valores de aquellos serán $T = F' \cos. \alpha$ y $T' = - F' \operatorname{sen}. \alpha$; esta última produce la retardacion del movimiento y la primera una disminucion de la pesantez, y como podemos suponer que sea menor, igual ó mayor que aquella accion, en el primer caso sucederá que el proyectil tardará mas en tocar al terreno que si no tuviera rotacion; pero siendo mayor el peso, siempre el desvío de su direccion inicial se verificará hácia el terreno y la trayectoría volverá á él su concavidad: en el segundo caso por equilibrar dicha componente á la pesantez, el proyectil seguirá la direccion de una línea recta; pero más tarde, por disminuir de contínuo la componente á causa de la accion de la resistencia del aire, llegará á dominar la accion de la pesantez; desde cuyo punto la trayectoria presentará su concavidad hácia el terreno; y por último cuando la componente sea mayor que la accion de la pesantez, por su accion subirá el proyectil en un principio, presentando su convexidad al terreno el aumento de α y la resistencia del aire hacen disminuir la componente T, llegándose á un punto en que equilibre á la pesantez y el proyectil entonces marchará un trayecto en línea recta; y cuando sucesivamente disminuya descenderá el proyectil; presentando su concavidad tambien al terreno.

Si el eje de rotacion está contenido en el plano de tiro y es perpendicular á la direccion inicial del movimiento, cuando la rotacion sea lateral derecha el proyectil desviará tambien á este lado, siendo cada vez menor el desvío por la constante disminucion de la resistencia del aire y por el aumento del ángulo que el eje forma con la tangente á la trayectoria; así puede suceder cuando se tira con grandes ángulos de proyeccion que el eje, que formaba en su principio un ángulo de 90° llegue á ser de 180° y en este momento no habrá desviacion alguna por hacerse nula la fuerza desviatriz de la resistencia del aire; y si el ángulo aumenta, pasando ésta á ser negativa, es decir, á obrar en el hemisferio opuesto, el proyectil se acercará al plano de tiro, resultando un desvio total menor que el producido cuando no se verifique aquel cámbio de signo, en el cual influye el ángulo de elevacion. Análogas deducciones se desprenden al considerar la rotacion lateral izquierda.

Y por último; si el eje de rotacion coincide en un principio con la direccion del movimiento, permaneciendo despues paralelo á ella, en los primeros instantes no habrá desviacion alguna; pero comenzará desde el momento en que dicho eje forme un ángulo con la tangente á la trayectoria; porque entónces la resistencia tangencial del aire descompuesta, da lugar á una fuerza en direccion del eje y á otra perpendicular á esta, siendo la última la que origina la fuerza desviatriz de la resistencia del aire y la cual, aumentando con el ángulo que el eje del proyectil forma con la tangente, hará que el desvío sea cada vez mayor: es evidente que si la rotacion es de izquierda á derecha, en la parte inferior el desvio será á la derecha y á la izquierda en el caso contrario, deduciéndose finalmente, que un proyectil con rotacion derecha desvia á la izquierda é inversamente, siendo siempre menores estos desvios laterales que los hasta ahora considerados, porque solo una parte de la resistencia total del aire es la causa de la fuerza desviatriz, pues aunque crecen con el ángulo que forma el eje de rotacion con la tangente, como al mismo tiempo disminuye la velocidad y por tanto la resistencia, el aumento en los desvios será pequeño.

158. Las desviaciones que experimentan los proyectiles esféricos escéntricos se verifican á igualdad de rotacion y situacion de eje, de la misma manera que en los concéntricos, siendo mayores en los primeros porque la resistencia del aire obra análogamente á un choque.

159. Como yá se ha indicado hay otra porcion de causas que producen irregularidades en el tiro, modificando unas veces el ángulo de proyeccion y otras la velocidad inicial; tales son la imperfecta posicion de la línea de mira; la no coincidencia del eje del ánima con el de figura de la pieza, así como su falta de rectitud; las variaciones de los proyectiles en peso y diámetro, variaciones indis-

pensables por las tolerancias de fabricacion; la dificil igualdad en el peso de las cargas, el golpeo mayor ó menor que éstas puedan haber sufrido y que es causa de que teniendo los granos de pólvora distinta colocacion, dejen entre ellos intersticios mas ó menos grandes, que tanto influyen en la inflamacion; el estado variable de la pólvora, que puede estar húmeda, contener polvorin y ser sus granos de diferentes tamaños; la desigual resistencia que los proyectiles esperimentan de las paredes del ánima, ya sea al abandonar la posicion primitiva ó bien por consecuencia de los choques; hasta la manera de disponer la carga y verificarla tienen influencia marcada sobre la regularidad del tiro. Bueno será á éste propósito recordar lo que yá dijimos al determinar la velocidad inicial de los proyectiles, que la magnitud del ángulo de proyeccion no tiene influencia sobre la velocidad inicial.

Se ha supuesto tambien que la proximidad al suelo la tiene sobre la forma de la trayectoría, atribuyéndola á que en el momento de salir el proyectil de la boca de la pieza puede ser rechazado hácia arriba por los gases de la pólvora que, habiéndose escapado por el viento con mayor velocidad que él, al encontrar el terreno, por ser éste un obstáculo para su espansion, se reflejan, chocando contra el proyectil; pero por la gran velocidad de que éste se halla animado es indudable que aun cuando aquella reflexion exista no encontrarán ya el proyectil. Tampoco es cierto que tenga influencia la forma del terreno comprendido entre la pieza y el punto que se bate, que se atribuía á que comprimido el aire por el paso del proyectil reaccionaba sobre éste aumentando su elevacion, error que dió origen á la vulgar idea de que *el valle atrae la bala*: ya las esperiencias verificadas en Metz, en 1846, demostraron claramente no existir esta influencia.

Parece natural que tan solo un efecto de óptica sea la verdadera causa de esta preocupacion, pues que el apreciar las distancias á través de un valle es originado á errores, mirándolos de ordinario menores que son en realidad. Esta preocupacion no ha desaparecido completamente: en la última campaña de Crimea sucedió muchas veces, al recorrer los alrededores de Sebastopol y encontrar gran cantidad de proyectiles en las quebraduras del terreno, oir la citada version, siendo muy lógico esplicar este efecto por haberse acumulado en los puntos más bajos los proyectiles caidos en las pendientes del mismo.

160. Otra causa de desviacion es el efecto que produce el viento atmosférico: cualquiera que sea la direccion de éste, su accion puede descomponerse en dos, contenida la una en el plano de tiro y perpendicular á este la otra; causará aquella una elevacion ó depresion del proyectil y la segunda un desvio lateral, que es el que más importa conocer.

Si llamamos W la velocidad del viento, tomada perpendicularmente al plano de tiro puede admitirse que la resistencia debida á éste es análoga, en cuanto á la forma de su espresion, á la de la resistencia del aire; mas como quiera que nunca su influencia sea escesiva, en vez de tomar la fórmula dependiente del cuadrado y cuarta potencia de la velocidad, que como vimos era apropiada para velocidades inferiores á 376 métros, simplifica la cuestion tomar la ley de Newton, en cuyo caso

$$\rho = A\pi R^2 W^2;$$

y entonces la presion por unidad de masa será

$$\rho_1 = \frac{Ag\pi R^2 W^2}{p}.$$

Suponiendo constante la accion de la fuerza el espacio recorrido durante el tiempo t, puede considerarse igual á $\frac{1}{2} g t^2$, por lo que en este caso será

$$e = \frac{1}{2} \rho_1 t^2 = \frac{1}{2} \frac{Ag\pi R^2 W^2}{p} \times t^2,$$

no quedando más que sustituir por t su expresion formular segun se tome para el cálculo de la trayectoria una ú otra ley de la resistencia del aire.

La velocidad del viento no pasa generalmente de 10^m por $1''$;

con una de 5^m, la tabla siguiente da una idea de la desviacion que esta causa hace experimentar á los proyectiles.

Piezas.	Peso del proyectil.	Peso de la carga.	Inclinacion.	Velocidad inicial.	Desviacion.
Cañones de sitio.	$12^{kg.}$	4	La necesaria para alcanzar 600^m	500	1,57
	8	2,667		505	1,86
Id. de campaña.	6	1,958		488	2,14
	4	1,224		486	2,53
Morteros.					
De 22	23	La necesaria para alcanzar 600^m	60°	96,6	17,20
27	50		45°	82,3	6,82
32	75		45°	82	6,17

161. Recapitulando lo anteriormente dicho, se distinguen dos especies de causas influyendo en las irregularidades de la trayectoría y en los desvios de los proyectiles; las unas que podemos llamar fortuitas ó irregulares propiamente, y las otras permanentes ó regulares: obran las primeras indiferentemente yá sean en un sentido, yá en otro, y las segundas siempre en el mismo, llamándose por consecuencia á las alteraciones que producen aquellas *desviaciones accidentales* y á las que dependen de las últimas *desviaciones permanentes*; y bien se alcanza la ventaja de que todas pudieran hacerse de este último género, porque siendo constantes, entónces sus efectos podrían ser tenidos en cuenta.

Se forma una idea exacta de esta division considerando, que si se tira sobre un blanco y se mide la distancia horizontal de el punto de impacto al centro del blanco, sumadas con sus signos todas estas distancias y dividida la suma por el número de tiros que háyan dado en el blanco, podrá suceder que se obtenga un valor nulo ó muy pequeño, ó uno determinado; en el primer caso ha habido al cabo de vários disparos un equilibrio entre los desvios horizontales á la derecha y á la izquierda; las causas que han influido sobre el tiro son pues fortuitas, porque habiéndose ejercido indiferentemente en un sentido ó en otro han llegado á compensarse; mas si por el contrario no se establece esta compensacion, preciso es concluir que existen una ó varias causas permanentes que han motivado aquel desvío medio, de valor y sentido determinados; claro es que lo mismo puede decirse con respecto á los desvíos verticales. Así pues, si no existieran más que causas permanentes, no se producirian sino desviaciones constantes para cada distancia y el tiro sería de una gran precision; pero esto no sucede nunca en los proyectiles esféricos por presentarse aquellas causas acompañadas de las fortuitas.

Debe tenerse presente que las circunstancias pueden hacer que causas fortuitas se conviertan en permanentes; tal sucede si se considera la posicion defectuosa de la línea de mira, que es causa fortuita en un grupo de piezas, cada una de las cuales puede presentar aquella con una inclinacion distinta; pero es causa permanente mirando solo cada una de las piezas aisladas.

162. Mas cualquiera que sea la naturaleza de las causas que influyen como yá hemos dicho en la velocidad inicial y en el ángulo de proyeccion, esta influencia es distinta en los diversos géneros de tiro; así, por ejemplo, en el tiro directo dominan las variaciones debidas al ángulo de proyeccion, porque como las velocidades iniciales son muy grandes, aun cuando éstas varien algo, su alteracion es menos sensible sobre el tiro. En el vertical, ó por grandes ángulos de proyeccion, son menos sensibles las pequeñas diferencias en el ángulo, razon por la que debe procurarse uniformar en lo posible la velocidad; y por último, en el tiro por sumersion tienen influencia semejante ambos elementos, porque lo mismo un aumento ó disminucion en la velocidad que en el ángulo de proyeccion conducen á errores en direccion y en el alcance.

163. La division hecha de las causas fortuitas y permanentes, y la ventaja de estas últimas, hizo conocer la conveniencia de obligar á los proyectiles en su movimiento á estar sometidos á las segundas: el medio que primeramente ocurre es darles una escentricidad marcada, porque entonces convenientemente colocados dentro del ánima pueden, como ya sabemos, obtener una rotacion de antemano conocida y un desvío por lo tanto apreciado desde luego su sentido, idea

puesta en práctica por la Artillería de algunos paises, pero que no satisfizo las exigencias del servicio, porque la excentricidad aumenta la resistencia del aire; la precisa colocacion de la bala, siempre igual, es una dificultad que crece cuando las circunstancias exijen preferentemente celeridad en los disparos, y éste médio es contra producente en el instante que se considera que la falta de igual colocacion del proyectil es á su vez causa de mayores errores por ser tambien mayores los desvios que con motivo de la excentricidad se producen. En tal caso, lo mismo bajo este punto de vista, que tratándose simplemente de reconocer proyectiles la excentricidad debe ser conocida y el procedimiento mas sencillo es valerse del escentrímetro de Terssen, cuyo aparato consiste en una balanza de brazos desiguales, de los que el más corto sostiene una vitola para la colocacion del proyectil y un plato el más largo destinado á recibir pesos.

Colocado el proyectil en un baño de mercurio se marca el punto más alto que será el polo ligero ó sea el estremo del diámetro vertical que pasa por el centro de gravedad; fácil es despues marcar el otro polo. Hecho esto se coloca el proyectil en la vitola, de manera que el diámetro polar quede paralelo, á los brazos de la palanca y su polo ligero delante del centro de gravedad, con relacion al eje de rotacion de la balanza: si llamamos p los pesos que se hayan situado en el plato para obtener la horizontalidad de la balanza; e la excentricidad; P el peso del proyectil y d la distancia desde el eje de suspension al centro de la vitola, se verificará que $(d-e)\,\mathrm{P}=p\,\mathrm{D}$, siendo D la distancia del eje de rotacion al punto de suspension del platillo: haciendo girar media vuelta al proyectil alrededor de su eje vertical y si llamamos p' á los pesos necesarios para el equilibrio en este caso, tendremos tambien $(d+e)\,\mathrm{P}=p'\,\mathrm{D}$; y de ambas ecuaciones

$$e=d\,\frac{p'-p}{p'+p}.$$

Puede igualmente determinarse la escentricidad de un proyectil sin necesidad de aparato alguno: para ello (fig. 70) despues de marcado en el baño de mercurio el polo ligero a se le aumenta un peso p en un punto cualquiera, y se marca el punto a' correspondiente al estremo del diámetro vertical en esta nueva posicion de equilibrio en la que la línea que une el centro de gravedad y el de figura, habrá tomado la posicion $a'Cg$: el conocimiento de la magnitud $a\,a'$ permitirá así mismo el del ángulo $aCa'=\alpha$; por existir el equilibrio se verifica la ecuacion $P\times Co=p\times o'b$ y de aqui

$$Co=\frac{p\times o'b}{P}$$

cantidad conocida porque $o'b$ puede medirse: el triángulo Cog dá $Co=Cg\,\text{sen.}\,\alpha$ y

$$Cg=\frac{Co}{\text{sen.}\,\alpha}=\frac{po'b}{P\,\text{sen.}\,\alpha}$$

que es la escentricidad.

164. Saint Robert, á fin de dar tambien á los proyectiles un movimiento de rotacion conocido, propuso la adopcion de un cañon curvo hácia abajo, de seccion elíptica, en el que á causa de la presion que ejerce constantemente la pared superior del ánima contra el proyectil, obliga á este á adquirir un movimiento de aquella naturaleza: tambien fué idea suya la de emplear piezas con recámaras escéntricas, en las que, chocando escentricamente los gases de la pólvora contra la bala, la harian girar; pero todos estos médios dejaron de ser estudiados en el momento que apareció la artillería rayada, en la que los proyectiles tienen siempre una rotacion marcada.

Inútil parece por lo demás advertir que para aminorar las causas de las otras desviaciones estudiadas, no puede hacerse otra cosa que igualar las circunstancias todas del tiro á escepcion de las que, como la fuerza del viento, pueden ser tomadas en consideracion.

extremo del diámetro vertical en esta nueva posicion de equilibrio en la que la línea que une el centro de gravedad y el de figura, habrá tomado la posicion aCg: el conocimiento de la magnitud aa' ó paralela, dará así mismo el del ángulo $aCa' = \alpha$; por existir el equilibrio se verifica la ecuacion $P \times Co = p \times o'b$, y de aquí

$$Co = \frac{p \times o'b}{P}$$

cantidad conocida porque $o'b$ puede medirse: el triángulo Cog da $Co = Cg \operatorname{sen}. \alpha$ y por consiguiente

$$Cg = \frac{Co}{\operatorname{sen}. \alpha} = \frac{p\, o'b}{P \operatorname{sen}. \alpha}$$

que es la excentricidad.

161. Saint Robert, á fin de dar tambien á los proyectiles un movimiento de rotacion conocido, propuso la adopcion de un cañon curvo hácia abajo, de seccion elíptica, en el que, á causa de la presion que ejerce constantemente la pared superior del ánima contra el proyectil, obliga á este á adquirir un movimiento de aquella naturaleza; tambien fué idea suya la de emplear piezas con recámaras excéntricas, en las que, chocando excéntricamente los gases de la pólvora contra la bala, la harian girar; pero todos estos medios dejaron de ser estudiados en el momento que apareció la artillería rayada, en la que los proyectiles tienen siempre una rotacion marcada.

Inútil parece por lo demás advertir que para aminorar las causas de las otras desviaciones estudiadas, no puede hacerse otra cosa que igualar las circunstancias todas del tiro á excepcion de las que, como la fuerza del viento, puedan ser tomadas en consideracion.

CAPÍTULO 8.°

Cargas y punterías.

165. Las cargas de las piezas de Artillería han disminuido á medida que los progresos hechos en la fabricacion de la pólvora han aumentado sus efectos balísticos, no debiendo sin embargo perderse de vista la conveniencia de que sean las mayores posibles para de este modo obtener mayor fuerza viva en el choque y trayectorías mas rasantes; así como se concibe bien, que los desvios serán menores, expuesto menos tiempo el proyectil á las causas que los originan; que, aun cuando la distancia al blanco no se aprecie con estremada exactitud, como la influencia sobre el ángulo de proyeccion será muy pequeña, tambien lo será la diferencia por elevacion, ó por depresion de la trayectoria y puede conseguirse, á pesar de ello, tocar en el blanco; y que tambien, á medida que sean grandes, para así obtener aquel mayor efecto útil, las diferencias en el peso de ellas serán menos sensibles: resultando de aquí la conveniencia de emplear cargas grandes, limitadas sin embargo, por los destructores efectos que producen.

Otras consideraciones obligan tambien á fijar límites á las cargas: experiencias verificadas por Hutton demostraron que no llegaba al peso del proyectil el de la carga, que producia efecto máximo, notándose que al esceder de la mitad de dicho peso, si bien el efecto crecia no era en relacion tan grande que compensara el mayor nocivo que causaba á la pieza, por lo que bien puede mirarse éste como un valor que no es debido traspasar. A pesar de esto, el peso de la carga empleada en nuestros cañones de bronce es un tercio de el de la bala que arroja, carga que se aproxima á la límite, que hemos considerado, teniendo la ventaja de causar menor efecto perjudicial; tan solo llega á ser igual á aquel límite cuando se necesita abrir brecha en muros muy resistentes: á aquella se la denomina carga ordinaria.

Para aumentar el efecto útil pudiera aumentarse el peso del proyectil, dejando la misma carga ó aumentar ambos factores de la fuerza viva: en el primer caso disminuirá la velocidad aumentando en el segundo; pero las grandes velocidades, consecuencia de grandes cargas, solo se obtienen, como hemos dicho, hasta cierto límite, el cual se relaciona con la longitud del ánima de la pieza y con la resistencia del aire, toda vez que ésta es funcion de la velocidad y crece en mayor razon que su primera potencia; es claro pues que para apreciar el verdadero efecto útil del proyectil, del aumento que permite el de la velocidad hay que quitar el correspondiente á la mayor resistencia que esperimenta en su movimiento.

166. No es aplicable la carga de los cañones á los obuses de bronce porque estos necesitarian mucho mayor espesor, perdiendo así su movilidad y sufririan mas los montajes, por aumentar la accion destructora sobre estos con la disminucion del peso de la pieza; y como además la granada deberia tener mayor espesor para adquirir la velocidad inicial que le habia de imprimir esta carga, teniendo tambien en cuenta que el alcance no guarda con la velocidad inicial la misma relacion que en los cañones, por ser la resistencia del aire inversamente proporcional á las masas de los cuerpos sobre que obra; de aquí el que, existiendo los inconvenientes espresados de dar aumento á la velocidad y no creciendo los alcances por este aumento, no haya ventaja en el empleo de la carga ordinaria, reduciéndose esta á $\frac{1}{7}$ y á $\frac{1}{6}$ del peso de la granada.

167. La menor resistencia del hierro colado, obliga á reducir las cargas en las piezas de este metal construidas, razon por la que tambien, además de la carga ordinaria que se emplea solamente cuando se disparan proyectiles sólidos, se les asigna otra carga lla-

mada reducida para los tiros de metralla y granada y aun para los de bala para cortas distancias y cuando los objetos que se baten no sean muy resistentes. Un cuarto y un sesto del peso de la bala, son los límites en que varian las cargas ordinarias de los cañones de hierro, siendo menores las reducidas.

168. Si el tiro es por sumersion, entonces como vimos ya al resolver los distintos problemas, se daban dos puntos por donde la trayectoria habia de pasar, ó bien un punto y la inclinacion que en él debia tener la tangente, deduciéndose, en su consecuencia el ángulo de proyeccion y la velocidad inicial y como de ésta depende la carga, claro es que queda asi mismo determinada.

169. En cuanto al tiro de morteros, ya se ha dicho, que en general, segun los efectos que se desean obtener, aquellos se disparan por 30°, 45° y 60°, ya se quiera aprovechar el resultado de la explosion de la bomba, bien obtener grandes alcance y velocidad remanente, ó bien que sea considerable su fuerza viva en el instante del choque; disparándose tambien tan solo por 10° ó 15° en el tiro llamado de rebote. Cualquiera que sea la clase de las enumeradas á que el tiro de mortero pertenezca, la inclinacion permanece constante, haciendo solo variar la carga, corrigiéndola por la observacion de los resultados; carga por otra parte, cuyo valor primero nos será dado por la resolucion del problema ó por deducciones experimentales obtenidas en ensayos análogos.

Antiguamente, y como el ángulo de máximo alcance es próximamente el de 45°, y por ángulos fuertes una corta diferencia en los de proyeccion no la produce grande en los alcances, por la que aquel proporcionaba la mayor economia en las cargas, los morteros estaban dispuestos con aquella inclinacion fija; hoy sin embargo, merced á haberse rebajado los coginetes y á la colocacion del tornillo de puntería, puede hacerse el disparo hasta por 10°; mas á pesar de esto, dado el especial servicio del mortero, es mas cómodo, en cada género de tiro de los que hemos enumerado, variar la carga, antes que tocar á la inclinacion.

170. La preparacion y arreglo de las cargas de pólvora exige ciertos cuidados y precauciones que siempre deben guardarse para prevenir accidentes desgraciados y tambien muy principalmente para igualar las condiciones de los tiros y reducir los motivos de

error hasta hacer fácil las correcciones: nos ocuparemos por tanto de la manera de disponer las cargas y del receptáculo ó saquete en que se coloca la pólvora que entra en ellas.

En los cañones, que hemos dicho hacen fuego con carga constante, ésta vá encerrada en un saquete cilíndrico, de lanilla, sin que en las costuras ni atado entren hilo, ó algodon ni otra sustancia, de fácil combustion, la cual podría verificarse al hacer la carga por algun resíduo de la anterior incandescente todavia; resíduos que deben extraerse con todo cuidado, cualquiera que sea por otra parte la sustancia de que esté formado el cartucho, porque el gran peligro para los sirvientes de una pieza proviene de los pedazos de saquete carbonizado que permanecen en ella y á los cuales se adhieren el sulfuro de potásio producido por la reaccion de los elementos de la pólvora: y como este sulfuro es eminentemente combustible y una vez inflamado al contacto del aire contínua ardiendo con energia, se esplica la necesidad, antes de proceder á cargar la pieza, de pasar el escobillon hasta asegurarse de no dejar materia alguna en su interior, debiéndose tener la indispensable precaucion de que el fogon esté bien tapado durante la limpieza y carga á fin de que al salir aquel, la corriente de aire que marcharía del fogon al ánima no avivase la combustion. Cuando se dispara con bala, experimentando, los gases de la pólvora, una resistencia grande por parte de ella, arrastran con mas facilidad los resíduos de la combustion del cartucho, no sucediendo así cuando ya en simulacros ó en salvas y saludos se dispara sin proyectil, razon por la que exige esta carga mas cuidado en la limpieza del ánima, conviniendo, siempre que las circunstancias lo permitan introducir la pólvora en los cañones, llevándola á granel hasta la recámara y poner un taco sobre ella.

De lo anteriormente expuesto se deduce cuanto conviene asegurarse de la buena calidad de la tela empleada en la confeccion de cartuchería de cañones: para su reconocimiento basta poner, como media onza, ó menos de una disolucion de $\frac{1}{10}$ de potasa cáustica, en una pequeña cápsula ó cacerola, introduciendo en ella un fragmento de la tela, que trata de ensayarse. Colocando la cápsula á un fuego lento, en poco tiempo, si es lana pura, queda completamente disuelta, convirtiéndose en un líquido negruzco; y como esta misma operacion hecha con tela de algodon ó de hilo no llega á disolver éstas, fácilmente se reconoce cuando la ensayada contiene ó no alguna de estas sustancias. La seda, tampoco deja residuo alguno, sometida á este procedimiento y es tambien sustancia de que pueden construirse los cartuchos. La Artillería sarda, en 1834, la adoptó para el servicio de sus piezas de campaña, fabricándose de filoseda de la borra de peor calidad, que una vez tejida se prensa á fin de igualarla, hacerla unida y cerrar los pequeños vacíos, que deja la fabricacion.

Segun el mayor de Artillería Hergro las ventajas que reune la filoseda son las siguientes: no ser atacada por los insectos, lo que facilita su conservacion; tener fuerza suficiente para resistir sin rasgarse á los rozamientos y estiramientos á que están sujetos los cartuchos durante marchas largas y difíciles; ser su tejido tan apretado, que impide salga al través de los intervalos que dejan los hilos, el polvorin, que siempre se forma en los trasportes; ofrecer gran seguridad en el fuego, por no conservarlo y carbonizarse, propiedad que posee en mas alto grado que la lanilla, por no contener sustancia grasa; y por último, ser su precio menor. Experiencias verificadas en Bélgica confirmaron estas conclusiones por lo que éste pais adoptó la filoseda en 1854. Tambien fueron en parte confirmadas estas ventajas por las ejecutadas entre nosotros en 1861, ordenándose en consecuencia, que siempre que se encuentren en el comercio, en buenas condiciones de precio y bondad, se emplee para la confeccion de los cartuchos, siendo sustituida por la lanilla, cuando su adquisicion no sea posible en tales condiciones.

171. Esto no obstante, en las baterías estables, como son las de sitio, plaza y costa, pueden emplearse con economía notable cartuchos de papel, que son los que se emplean siempre en los morteros por la circunstancia de ser variables sus cargas, siendo sin embargo, práctica general en este tiro verificarla á granel; debiendo recomendarse las mayores precauciones para la limpieza y colocacion de la bomba sobre la pólvora en que descansa, pues los granos de sílice que aquella puede tener adheridos del terreno en que estuvo colocada ó el golpe violento del proyectil sobre la masa explosiva pudieran ser causa de su inflamacion. Antiguamente, sobre la carga

de pólvora de los cañones se colocaba un taco, que se apretaba contra ella, introduciéndose luego la bala y un nuevo taco, habiéndose creido, que de esta manera aumentaba la velocidad inicial del proyectil: Hutton dedujo de experiencias á este objeto encaminadas que la carga hecha de este modo, comprimiendo los tacos, no tenia influencia en la velocidad; y así se comprende que sea, porque si bien por este motivo se aumenta la resistencia del proyectil á ponerse en marcha, dándose lugar á la formacion de mayor cantidad de gases, no es menos cierto, que por el hecho de comprimirse la carga, la velocidad de inflamacion de ésta disminuye: pero aun cuando semejante influencia existiese, siendo muy pequeña, puede considerarse su efecto como el que produce la desigualdad natural de las cargas por la imposibilidad material de hacerlas absolutamente iguales. Esta misma ocurre con los tacos, que ofrecen otra causa de irregularidad al no ser igualmente comprimidos, teniendo al própio tiempo la desventaja de alargar la operacion de la carga y tener á los artilleros que la ejecutan por mas tiempo espuestos al fuego enemigo cuando las piezas se dirigen por cañoneras: por todas estas razones se ha prescindido luego de la colocacion del taco, siendo, sin embargo, conveniente y necesario, cuando en el ánima haya algun asiento en el sitio que ha de ocupar la bala y que puede salvarse por el aditamento del taco entre ella y la pólvora, y cuando sea preciso tirar por depresion para, con su empleo, evitar que la bala se corra.

Los tacos para ser buenos han de llenar ciertas condiciones, cuales son: ligereza, compresibilidad, impermeabilidad, incombustibilidad, baratura, ocupar poco espacio y ser susceptibles de buena conservacion; entre nosotros se emplean los de filástica hechos de dos formas, llamados de anillo y de clavellina. Constrúyense los primeros, arrollando sobre un cilindro acanalado várias vueltas de filástica, las que al tener el espesor suficiente se las sujeta por medio de unas ligaduras, formando al mismo tiempo una cruz en su hueco para la facilidad de su manejo y extraccion de la pieza por medio del sacatrapos; la colocacion de los de esta forma se hace siempre sobre el proyéctil. Los de clavellina son cilíndricos y se hacen con vários pequeños haces de filástica que se unen y sujetan con ligaduras en los estremos, formándose de ello un asa para el mismo objeto que llevan la cruz los anteriores, estos se colocan entre la pólvora y el proyectil y son los que se emplean para los tiros de salva.

172. En los obuses largos, á fin de centrar la espoleta no pudiéndose colocar la granada en su sitio con la mano, como se hace en los cortos, se emplea el *salero,* que no es otra cosa que un trozo de madera, cilíndrico ó tronco-cónico, rebajada una de sus bases en forma apropiada para recibir la granada, que queda sujeta á él, por dos bandas de hoja de lata cruzadas; salero que tambien puede emplearse para unir el proyectil á la carga, en las piezas de campaña, simplificándose así la operacion de cargar, si en la superficie lateral de aquél se abre una garganta donde se aloge la atadura que hace constituya así un solo cuerpo la pólvora y la bala unidas por el salero. Tambien en los obuses largos es necesario aumentar la longitud del cartucho de pólvora con un cilindro de madera ó *suplemento* de algo menor diámetro que el cartucho, siendo su altura la necesaria para que al recorrer éste el ánima, no se atore ó gire, situándose hácia atrás la atadura del saquete, que pudiera corresponder con el fogon y dificultaría la trasmision del fuego á la carga. Tanto los saleros como los suplementos tienen el inconveniente de poder ofender si son própias á las tropas situadas en el campo de tiro de las piezas.

173. Pueden los cartuchos tener un diámetro menor que el del ánima ó recámara en que han de alojarse, resultando de esto que el efecto nocivo sobre la pieza disminuye á causa del mayor espacio que tienen los gases para dilatarse, y si bien ésta ventaja es indudable, no lo es ménos que el efecto útil del proyectil disminuirá á la vez por la mayor absorcion de calor, que influirá en la tension de los gases.

174. Tanto las bombas como las granadas llevan en su interior una carga de pólvora llamada explosiva, cuyo objeto es hacer que el proyectil estalle en el caso que el efecto útil que se trata de obtener consista en que obre de esta suerte; es necesario pues calcular la menor carga capaz de producir el resultado que se desea, y aun cuando es independiente de la que lleva la pieza, no parece fuera de lugar tratar aqui esta cuestion.

Para mayor facilidad, podemos admitir que el hueco interior de los proyectiles sea siempre una esfera concéntrica á la esterior, en cuyo hueco, una vez inflamada la carga crece rápidamente la tension de los gases hasta producir la rotura, siendo los cascos entónces lanzados en todos sentidos. Si suponemos que el proyectil no tiene orificio para la colocacion de la espoleta, llamado boquilla y que su masa sea homogénea, llamando d y d' los diámetros exterior é interior, p la tension de los gases y T la tenacidad del metal, teniendo además en cuenta, que el espesor de las paredes no es grande, la Resistencia de Materiales dá la relacion siguiente:

$$\frac{\pi d'^2}{4} \times p = \pi \frac{(d^2 - d'^2)}{4} \times \mathrm{T},$$

no verificándose la rotura hasta tanto que la tension de los gases no sea superior á la dada por esta ecuacion, de la que

$$p = \frac{d^2 - d'^2}{d'^2} \times \mathrm{T};$$

pero como siempre el proyectil tiene boquilla para recibir la espoleta, los círculos máximos que pasan por ella, son menos resistentes que los demás por lo que, con este valor de p debe seguramente verificarse la rotura: como tampoco puede admitirse la homogeneidad de la matería, la rotura no se verifica de una manera uniforme alrededor del eje de la boquilla; generalmente tiene principio en esta, prolongándose segun arcos de círculo máximo, que no llegan hasta el polo opuesto, destacándose la parte situada en la proximidad de ésta en forma de casquete esférico terminando por una línea irregular y ondulosa.

Cuando se emplean espoletas de percusion permanece la boquilla cerrada hasta el momento de verificarse la rotura y es aun fácil determinar la menor carga que la produce, siempre que se suponga que su combustion es completa. Sea para ello g el peso en gramos de la carga, c la capacidad interior del proyectil en centímetros cúbicos y ρ la densidad de los gases; por ser, como hemos dicho, completa la combustion se verifica

$$\rho = \frac{g}{c}.$$

Rumford obtuvo por medio de experiencias la siguiente ecuacion, entre la densidad de los gases y su tension, supuesta la total gasificacion de la masa

$$\frac{p}{\rho} = 10^{3,23035 + 0,904\,\rho + 0,25\,\rho^2},$$

cuyas dos relaciones en union de la

$$p = \left(\frac{d^2}{d'^2} - 1\right)\mathrm{T}$$

resuelven la cuestion, porque conocidas las dimensiones del proyectil, asi como la tenacidad de su metal obtendremos en la última el valor de p, que sustituido en la anterior nos dará el de ρ y yá el de g por medio de la primera.

175. Para facilitar el cálculo del valor de ρ puede hacerse uso de la tabla inserta á continuacion

Densidad de los gases ρ	Presiones sobre 1.ᵉ cuadrado P	Diferencias	Densidad de los gases ρ	Presiones sobre 1.ᵉ cuadrado P	Diferencias	Densidad de los gases ρ	Presiones sobre 1.ᵉ cuadrado P	Diferencias
0,01	17,3	18,1	0,20	527,4	39,4	0,40	1714	88
0,02	35,4	18,9	0,21	566,8	41,0	0,41	1802	92
0,03	54,3	19,6	0,22	607,8	42,7	0,42	1894	96
0,04	73,9	20,5	0,23	650,5	44,4	0,43	1990	99
0,05	94,4	21,4	0,24	694,9	46,3	0,44	2089	103
0,06	115,8	22,2	0,25	741,2	48,1	0,45	2192	108
0,07	138,0	23,2	0,26	789,3	50,2	0,46	2300	113
0,08	161,2	24,1	0,27	839,5	52,2	0,47	2413	117
0,09	185,3	25,2	0,28	891,7	54,4	0,48	2530	122
0,10	210,5	26,1	0,29	946,1	57	0,49	2652	127
0,11	236,6	27,4	0,30	1003	59	0,50	2779	132
0,12	264,0	28,4	0,31	1062	61	0,51	2911	137
0,13	292,4	29,7	0,32	1123	64	0,52	3048	143
0,14	322,1	30,8	0,33	1187	67	0,53	3191	149
0,15	252,9	32,1	0,34	1254	69	0,54	3340	156
0,16	385,0	33,5	0,35	1323	72	0,55	3496	162
0,17	418,5	34,9	0,36	1395	75	0,56	3658	168
0,18	453,4	36,2	0,37	1470	78	0,57	3826	175
0,19	489,6	37,8	0,38	1548	81	0,58	4001	183
0,20	527,4		0,39	1629	85	0,59	4184	191
			0,40	1714		0,60	4275	

176. Generalmente la boquilla se abre en el momento en que la inflamacion empieza por abrirse el canal de la espoleta, la que pronto es escupida; y entonces, si bien la prolongacion de la com-

bustion aumenta la densidad de los gases, la fuga de ellos por la boquilla disminuye dicho aumento, siendo el problema que resolver en este caso determinar la menor de las cargas capaz de producir la densidad ρ, que deben tener los gases para que el proyectil estalle, debiéndose notar que en el momento de empezar la combustion los gases y la masa no comburada se mezclan y reparten en todo el hueco interior del proyectil.

Sea al fin del tiempo t, contado cuando la inflamacion se verifica, Δ la densidad media de la mezcla y v la velocidad de salida por la boquilla: la densidad Δ muy diferente de la de los gases, decrece constantemente: si d'' es el diámetro de la boquilla y t_1 el tiempo necesario para la rotura,

$$\frac{\pi d''^2}{4} \times \Delta v \, d t$$

será el peso de la pequeña masa, que durante el tiempo $d t$ ha salido por la boquilla y

$$\frac{\pi d''^2}{4} \int_0^{t_1} \Delta v \, d t,$$

el de la masa total escapada durante el tiempo t_1; la parte de carga, que queda en el proyectil en el momento de su rotura estará representada en peso por

$$g - \frac{\pi d''^2}{4} \int_0^{t_1} \Delta v \, d t,$$

la que debe gasificarse enteramente, si la cantidad de pólvora empleada es la menor posible, en cuyo caso la densidad de los gases es

$$\frac{g - \frac{\pi d''^2}{4} \times \int_0^{t_1} \Delta v \, d t}{c}$$

que debe ser igual á ρ; y como $c = \frac{1}{6} \pi d'^3$, se tiene

$$\rho = \frac{g}{c} - \frac{3}{2}\frac{d''^2}{d'^3}\int_0^{t_1} \Delta v \, dt:$$

admitiendo que la velocidad de salida sea constante

$$\int_0^{t_1} \Delta v \, dt = v \int_0^{t_1} \Delta \, dt$$

mas como Δ decrece de contínuo y solo es igual á ρ en el momento que se produce la rotura

$$\int_0^{t_1} \Delta \, dt$$

tiene un valor mayor que $\rho \, t_1$, por lo que dicha integral puede representarse por $A \rho t_1$, siendo A un coeficiente mayor que la unidad, resultando así

$$\rho = \frac{g}{c} - \frac{3}{2}\frac{d''^2}{d'^3} A v \rho t_1;$$

Segun el principio de la semejanza, como los valores de

$$\frac{g}{c} \text{ y } \frac{d''}{d'}$$

permanecen los mismos, el tiempo t_1 necesario para obtener la densidad ρ debe ser proporcional á d'; despreciando pues las pequeñas variaciones que puede experimentar el número A, la ecuacion anterior puede ponerse bajo la forma

$$\rho = \frac{g}{c} - N \rho \frac{d''^2}{d'^2} \quad \text{ó bien} \quad \frac{g}{c} = \rho\left(1 + N \frac{d''^2}{d'^2}\right) \quad (1)$$

en la cual N es un coeficiente constante.

Hemos llegado á esta relacion suponiendo constante la velocidad y como, realmente, crece con la presion, el valor del coeficiente N, en cuya formacion entra la velocidad, debe crecer con ella ó lo que es lo mismo con ρ, pudiendo determinarse experimentalmente.

Si se atiende á las experiencias verificadas en Metz hechas con granadas de 16cm, de fundicion gris de buena calidad, cuya tenacidad T=1350kg por centímetro cuadrado

$$d = 16^{cm},28;\quad d' = 11^{cm},32;\quad d'' = 2^{cm},26 \;\text{ y }\; C = 759^{cm},5,$$

se ve que con la carga de 345gm estallaron siempre y nunca con la de 340grm, pudiendo por tanto considerarse aquella como la carga mínima de rotura. El valor de N se calcula pues considerando que

$$\frac{g}{c} = \frac{345}{759,5} = 0,454;$$

la ecuacion

$$p = \left(\frac{d^2}{d'^2} - 1\right) T$$

por la sustitucion de los valores correspondientes, dá $p = 1442$, que á la vez sustituido en la de Rumford, resulta $\rho = 0,3665$; y cuyo valor, en union de los de

$$\frac{g}{c} \;\text{ y }\; \frac{d''}{d'}$$

yá conocidos, dan en la ecuacion (1)

$$N = 5,996.$$

Una segunda série de experiencias con granadas de las mismas condiciones, excepcion hecha de la fundicion cuya tenacidad no era mas que de 1140kg, y en los que 310gm puede considerarse como carga mínima de rotura, condujo á los siguientes resultados:

$$\frac{g}{c} = 0,4082;\quad p = 1218;\quad \rho = 0,335 \;\text{ y }\; N = 5,482,$$

valor menor que el anterior por corresponder á menor tension. De lo expuesto se deduce que $\frac{N}{\rho}$ es igual á 16,36 cuyo valor puede considerarse como constante y por lo tanto

$$\frac{g}{c}=\rho+16,36\left(\frac{d''}{d'}\right)^2\rho^2,$$

ecuacion que con

$$\frac{p}{\rho}=10^{3,23035+0,904\rho+0,25\rho^2} \text{ y } p=\left(\frac{d^2}{d'^2}-1\right)\mathrm{T}$$

resuelven la ecuacion del mismo modo, que lo hemos hecho anteriormente. Si no concuerdan en un todo los resultados experimentales con los obtenidos por medio de estas fórmulas, las diferencias provienen de que en la práctica los límites de la tenacidad del metal son mas ámplios que los señalados de 1350 y 1140 kilógramos; no debiendo perderse de vista que conviniendo aprovechar la mayor tension con carga mínima capaz de producir el efecto, sería absurdo cargar las bombas y granadas con pólvoras averiadas ó deterioradas, que no las harian estallar violentamente en gran número de cascos irregulares.

La tenacidad del metal puede ser determinada, conocida que sea por la experiencia la carga de rotura; para ello y con objeto de simplificar hagamos

$$\mathrm{N}=\frac{1}{16,36}\times\frac{d'}{d''^2}$$

y resolviendo la última ecuacion con relacion á ρ se tiene

$$\rho=-\frac{\mathrm{N}}{2}+\sqrt{\frac{\mathrm{N}g}{c}\times\frac{\mathrm{N}^2}{4}}$$

valor que sustituido en la fórmula de las experiencias de Rumford, hará conocer el de p, con el que se obtendrá el de T por medio de la ecuacion

$$p=\left(\frac{d^2}{d'^2}-1\right)\mathrm{T}.$$

177. Empleando este procedimiento, las experiencias de Metz, con granadas de 22 centímetros y cuyo diámetro interior era variable, dieron el resultado que manifiesta la tabla siguiente:

Diámetro esterior d.	Diámetro de la boquilla d''.	Diámetro interior d'.	Carga media de rotura, esperimental g.	Tenacidad de la fundicion, calculada f.
Centímetros.	*Centímetros.*	*Centímetros.*	*Gramos.*	*Kilógramos.*
		14,52	625	933
		15,78	635	925
22,02	2,56	16.76	635	993
		17,66	625	968
		18,48	565	941

950 kilógramos, puede pues tomarse como valor medio de la tenacidad y calculando con éste las cargas de rotura se obtuvo:

		Diámetro interior d'.				
		14,52	15,78	16,76	17,66	18,48
Carga de rotura en gramos.........	Calculada....	632	648	621	616	567
	Observada ..	625	635	635	625	565
	Diferencia...	+7	+13	—14	— 9	+2

Debe considerarse que la determinacion experimental de las cargas de rotura dejan siempre la incertidumbre de algunos gramos.

Dedúcese de la tabla anterior que en un principio crece la carga de rotura con el diámetro interior, decreciendo luego, por lo que no son las paredes de mayor espesor las que, á igualdad de diámetro exterior, exigen mas cargas.

En cuanto al número de cascos y su velocidad, en igualdad de condiciones, puede decirse que aquellos aumentan con la carga y disminuyen, cuando el espesor de las paredes ó la resistencia que se ha de vencer aumenta: no conviniendo que aquel número sea tan grande que la masa sea muy pequeña, ni tan corto que el efecto útil buscado en el número casi se anule.

178. Cargada la pieza, se procede á la operacion de apuntar y para ello recordaremos que anteriormente se ha resuelto el problema de, dada la velocidad inicial ó sea la carga y la posicion de un punto que se ha de batir, determinar el ángulo de proyeccion necesario para conseguirlo, ó lo que es igual para que la trayectoria pase por él, haciéndose por lo tanto preciso colocar la pieza en las condiciones necesarias á este fin, objeto único de la puntería. Como hemos admitido que la trayectoría está contenida en el plano vertical del tiro, claro es que la cuestion se reduce á dar direccion al eje de la pieza para que el plano vertical que éste determina pase por el punto sobre que se quiere disparar, dando luego al mismo eje la inclinacion que los datos del problema exijen. La primera parte de estas dos se consigue fácilmente: basta para ello hacer que la línea que pasa por los puntos mas altos del brocal y de la culata, línea contenida en el plano vertical del eje contenga tambien el punto que se bate: para llenar el otro objeto solo será menester emplear una escuadra (fig. 71) A. B. C, cuyo lado A. B, se ajusta á la boca de la pieza, haciéndose girar á esta hasta tanto que el ángulo A B M marcado por la plomada sea el de elevacion calculado, en cuyo caso habrá tomado la pieza la inclinacion deseada. La figura (72) indica otra posicion de la escuadra, que conduce al mismo resultado.

Se consigue mayor exactitud en la fijacion del ángulo, sirviéndose de la escuadra de nivel (fig. 73), que consiste en una plancha de laton graduada, á la que rodea un marco del mismo metal, que estando en escuadra y siendo planos los lados de dicho marco sirven para adosarlos á la boca de la pieza ó bien al plano que puede haber en la culata: alrededor del centro del cuadrante graduado, gira un nivel, en su estremo lleva un nónio, y por la parte posterior hay un tornillo de presion que sirve para fijar el nivel marcando la inclinacion que ha de tener la pieza. El uso de la escuadra, fácilmente se desprende de su descripcion, y es aplicable á todas las piezas.

179. A pesar de lo anteriormente expuesto, se emplea con prefe-

rencia el instrumento llamado alza, que consiste en un pié con su montante, sobre el cual resbala un ocular, que constituye el punto de mira posterior, del que en breve nos ocuparemos; por este médio la direccion y la graduacion de la pieza se hacen simultáneamente, reuniendo además la gran ventaja de medirse los ángulos necesarios en círculos de rádio mucho mayor que los correspondientes á las escuadras ántes mencionadas, circunstancia que aumenta la exactitud.

Recordando que ángulo de proyeccion es el formado por el primer elemento de la trayectoria con la horizontal, y que este primer elemento no coincide, en general, con el eje del ánima, llamaremos inclinacion del arma al ángulo θ_1 formado por su eje con la horizontal; estos ángulos, como siempre teóricamente se ha supuesto, se confunden; pero realmente son distintos por las causas esplicadas en el anterior capítulo. La visual, que determina la puntería, se dirige por dos puntos situados sobre el arma, los que unidos constituyen una línea, llamada de *mira*, estando siempre uno de ellos fijo en aquella, y el cual puede ser, bien el punto mas alto de la boca, ó bien un apéndice, que se llama *guion:* el otro punto es movible, siempre en un plano perpendicular al eje del ánima, cuyo plano toma el nombre de *plano de alzas.* Si desde el primer punto se baja una perpendicular sobre este plano, su pié es el origen de alzas, y la distancia desde este punto al de mira posterior, esto és, al segundo de los que se acaban de fijar, se denomina alza teórica, la que es positiva, en el caso de estar el punto de mira posterior por encima del origen, y negativa en el caso escepcional de ser contraria su colocacion.

Si la pieza tiene una inclinacion lateral y por esta causa el orígen de alzas no está en el plano vertical de tiro, se cuenta el alza en direccion del rádio que pasa por el orígen, denominándosela entonces alza práctica; pero como quiera que para las buenas condiciones del tiro no hemos de admitir dicha inclinacion en la pieza ó ha de correjirse el alza teórica, como veremos luego, si aquella existe, en lo sucesivo solo nos ocuparemos de la primeramente definida: haremos notar sin embargo que pudiendo suceder que el orígen de alzas caiga en el interior del metal, en este caso se contaría el alza práctica á partir del punto, en que el rádio que pasa por el orígen encuentra á la faja alta de la culata.

Llámase *ángulo de posicion* Σ el formado con la horizontal por la línea que une el centro de la boca de la pieza con el punto sobre el cual se dirige la visual y línea de posicion la recta por ambos puntos determinada: se denomina *referencia* á este punto que se mira, el cual no es preciso que coincida con el punto á batir ó blanco: ángulo de mira es el formado por la línea de tiro, eje de la pieza, con la línea de posicion y su espresion es por tanto $\theta_1 - \Sigma$.

180. Para comprender el alza supongamos una pieza A B (fig. 74), con la que se trata de batir el punto M; si la carga está dada y por lo tanto la velocidad, se habrá determinado la inclinacion necesaria para alcanzar el objeto; si pues en la figura consideramos la pieza con dicha inclinacion la trayectoria pasará por el punto M: uniendo este punto con el C y prolongando esta recta hasta que encuentre á la prolongacion del rádio A O, que es en donde suponemos colocada el alza, es claro que conociendo su altura A D, si hacemos girar á la pieza, alrededor del eje de muñones, hasta tanto que la línea D C, que es la de mira, prolongada, encuentre el punto M, la trayectoria pasará por dicho punto, resultando de aquí que la teoría del alza se reduce á la cuestion, puramente geométrica de determinar distintas alturas análogas á la A D, para diversas colocaciones del punto que se ha de batir toda vez que en el tiro de cañon la carga es fija y solo varía la elevacion.

Como ya se ha indicado no es indispensable dirigir la visual sobre el blanco, porque si suponemos la pieza con la inclinacion dada por el cálculo, como anteriormente, y unimos el punto R que es el de referencia, con el punto anterior de mira obtendremos una altura A D' de alza, con la que, apuntando á dicha referencia se conseguirá que la trayectoria pase del mismo modo por el punto M, porque es evidente que la inclinacion de la pieza en nada ha variado por esto. Veremos en seguida que la altura de alza tiene por valor muy aproximado el de la tangente del ángulo de mira, que se obtiene por su empleo, dirigiendo la visual á una referencia cualquiera, tangente de un arco cuyo rádio es la longitud l de la línea de mira. Cualquiera que sea la referencia que se escoja resulta que para dar al arma la inclinacion necesaria basta restar de esta, el ángulo de posicion correspondiente á esta referencia y dirigir luego la visual á ella con una altura de alza igual á la tangente de esta diferencia.

En el caso en que la referencia coincida con el blanco, el ángulo de mira, segun la difinicion dada, es el formado por el eje de la pieza con la línea que une el centro de la boca á dicho blanco y el que, al tratar de la resolucion de los problemas balísticos, vimos ser en los casos ordinarios de la práctica, independiente de la altura del objeto sobre la horizontal de la boca; propiedad de trascendental ventaja para las alzas, porque merced á ella se simplifica la construccion de tablas por no tener que ocuparse para ello más que de la distancia del punto batido.

181. Fácilmente se determina la relacion entre el alza y el ángulo de mira $\theta_1-\Sigma$ y sea á este fin (fig. 75), R la referencia; siendo R a b la línea de mira, b c será el alza teórica: si por el punto a trazamos una línea $a\,g$ paralela á la línea de posicion d R, se tiene

$$c\,a\,g=f\,d\,\mathrm{R}=\theta_1-\Sigma.$$

La altura $h=b\,c$ de alza tiene por valor

$$h=c\,g+b\,g=a\,c\ \mathrm{tang.}\,(\theta_1-\Sigma)+b\,g=l\ \mathrm{tang.}\,(\theta_1-\Sigma)+b\,g,$$

llamando l la longitud $a\,c$ de la línea de mira.

En los triángulos semejantes $a\,g\,b$ y $a\,d$ R, se tiene

$$\frac{b\,g}{a\,d}=\frac{a\,g}{d\,\mathrm{R}},\ \text{siendo por lo tanto}\ b\,g=\frac{a\,g\times a\,d}{d\,\mathrm{R}}=\frac{a\,g\times r}{d\,\mathrm{R}},$$

por ser $a\,d=r$, rádio de la pieza.

Los valores de $a\,g$ y d R los obtendremos respectivamente de los triángulos rectángulos $a\,g\,c$ y $d\,m$ R y son

$$a\,g=\frac{a\,c}{\cos.(\theta_1-\Sigma)}=\frac{l}{\cos.(\theta_1-\Sigma)}\qquad d\,\mathrm{R}=\frac{d\,m}{\cos.\Sigma}=\frac{d}{\cos.\Sigma}$$

despues de llamar d á la distancia $d\,m$: con estos valores resulta el de

$$b\,g=\frac{r\,l}{d}\times\frac{\cos.\Sigma}{\cos.(\theta_1-\Sigma)}$$

que sustituida en la fórmula del alza dá el valor final de esta

$$h = l \tan g. (\theta_1 - \Sigma) + \frac{r\,l}{d} \times \frac{\cos. \Sigma}{\cos. (\theta_1 - \Sigma)}$$

fórmula en la que el segundo término es de tan escasa importancia, que no se toma en consideracion, atendiendo á que en el numerador, aun en el caso de suponer á $\Sigma = 0$ las cantidades r y l son muy pequeñas relativamente al denominador en el que d siempre tiene valores grandes; sin embargo, cuando las distancias son pequeñas, entonces el valor de

$$\frac{\cos. \Sigma}{\cos. (\theta_1 - \Sigma)}$$

se aproxima mucho á la unidad por la pequeñez del ángulo θ_1 y el segundo término tiene verdaderamente por valor $\frac{r\,l}{d}$; bien entendido que lo dicho es aplicable cuando la referencia se confunde con el blanco, pero no es así caso de tomarse la referencia próxima á la boca, porque estonces el segundo término, dependiente como lo es de ella, habrá de calcularse segun los valores de todas las cantidades que entran en su espresion. En virtud de lo que antecede las fórmulas de alzas serán respectivamente

$$h = l \tan g. (\theta_1 - \Sigma) + \frac{r\,l}{d} \ \text{y} \ h = l \tan g. (\theta_1 - \Sigma),$$

para tiros de precision y para la práctica ordinaria.

182. Para calcular pues una tabla de alzas, las dimensiones l y r son conocidas como datos de la pieza y si por otra parte el blanco coincide con la referencia, y sabemos que

$$\text{sen.} (\theta_1 - \Sigma) = \frac{g}{a} \int_0^{x} dx \int_0^{x} \overline{\mathrm{F}}(x, \mathrm{V})\, dx,$$

dependiendo el ángulo de la distancia, por los diversos valores que de ésta se consideren, se obtendrán los correspondientes de las alzas: si además se calculan varios valores de $\frac{rl}{d}$ para algunas de aquellas mismas distancias, y cuyo número dependerá de la precision que se desee, se completarán las tablas para este caso; pero cuando la referencia no coincida con el blanco, será preciso en las fórmulas dadas, sustituir los valores ángulares de los de proyeccion y posicion relativos al caso particular que se resuelva.

183. Cabe aun hacer mas completas las tablas comprendiendo en ellas la fórmula que permite calcular el número de vueltas que es preciso dar al tornillo de puntería, para que apuntando á un blanco con alza distinta de la que corresponde á la distancia á que aquel se encuentre pase la trayectoria por este punto, caso posible en la práctica á no tener disponible, por cualquier accidente, el alza perteneciente á la pieza con que se dispara.

Sea en efecto $h=a\,d$ (fig. 76) el alza necesaria para la distancia de que se trata y $h'=a\,b$ la que es forzoso emplear; si con esta se dirige la puntería al blanco R, la línea de mira tomará la posicion $b\,c$ R, siendo evidente que para que la trayectoria pase por el punto dado será necesario que la verdadera línea de mira $d\,c\,m$ se confunda con la $b\,c$ R, lo que se conseguirá haciendo girar la pieza un ángulo igual al $d\,c\,b$, cuyo ángulo tambien habrá girado el eje y si éste, en la posicion primera tenía la inclinacion θ'_1 y ha pasado á tener θ_1 el ángulo de giro del sistema será

$$(\theta_1-\theta'_1);$$

y si ahora se llama δ la distancia del eje de muñones al punto de apoyo de la culata sobre el tornillo de puntería, el arco A descrito por este punto será:

$$A=\frac{(\theta_1-\theta'_1)^{\circ}\times 2\pi\delta}{360^{\circ}}$$

y atendiendo á la pequeñez de la diferencia de estos ángulos puede sin error sensible admitirse que la cantidad que ha descendido el tornillo de puntería para determinar aquel giro de la pieza es igual al arco A: y si es p el paso del tornillo y N el número de vueltas preciso para el espresado descenso.

$$A = N p = \frac{(\theta_1 - \theta'_1)^{\circ} \times 2\pi\delta}{360^{\circ}} \text{ de donde } N = \frac{\pi\delta(\theta_1 - \theta'_1)}{180\, p}$$

fórmula de fácil aplicacion por deber las tablas de alzas contener las inclinaciones de la pieza correspondientes á las magnitudes de aquellas, paso del tornillo y dimensiones necesarias al objeto.

184. Si la pieza tuviese dos guiones ó puntos de mira anteriores fácil es pasar del alza h relativa á una longitud l de la línea de mira al alza h' necesaria para dar en el mismo blanco: para ello, como la pieza ha de tener la misma inclinacion las fórmulas de las alzas serán

$$h = l \text{ tang. } (\theta_1 - \Sigma)$$

$$h' = l' \text{ tang. } (\theta_1 - \Sigma)$$

de donde

$$\frac{h}{h'} = \frac{l}{l'} \text{ y de aquí } h' = \frac{l'}{l} \times h:$$

una aplicacion de esto, por su analogía, aunque tratándose de puntos de mira posteriores, se encuentra en nuestras armas portátiles, en las que hasta cierta distancia el alza está tendida sobre el cañon, elevándose con la distancia sobre los escalones hasta quedar vertical, siendo así la línea de mira variable.

185. Si conocida la altura h de alza para dar en un punto, dirigiendo la visual sobre una referencia R, se desea saber la h' para que apuntando sobre la referencia R′ pase la trayectoria por el mismo punto, bastará llamando Σ, d, Σ', d' los ángulos de posicion y las distancias relativas á las referencias, establecer las dos ecuaciones siguientes, siendo θ_1 la inclinacion constante del arma

$$h = l \text{ tang. } (\theta_1 - \Sigma) + \frac{r\, l}{d}$$

$$h' = l \text{ tang. } (\theta_1 - \Sigma') + \frac{r\, l}{d'}$$

de la primera de las que deduciremos el valor de θ_1 y de la segunda el de h': inútil es decir que una de las referencias puede confundirse con el blanco.

186. Supongamos (fig. 77) que sea b el blanco y como la figura indica ac es el alza necesaria para este caso; si en lugar de esta, no tuvieramos mas que la ac' es evidente que dirigiendo la puntería con ella al punto b', la trayectoría continuaría pasando por el b; la cuestion que se presenta es determinar la cantidad bb' igual E en funcion de $cc'=e$, esto es: la distancia del blanco al punto á que hay que dirigir la visual, distancia contada sobre la vertical, para que, empleándose un alza diferente á la que corresponde, toque la trayectoría en el punto deseado. Para conseguirlo, por el punto b trazaremos la línea bd paralela á la ac y los triángulos semejantes cfc' y fdb, dan

$$\frac{bd}{cc'=e}=\frac{fb}{fc'};$$

fb es sensiblemente igual á

$$\frac{x}{\cos.(\Sigma-\varphi)}$$

considerando á x como su proyeccion, al propio tiempo que es distancia al blanco contada desde la boca de la pieza;

$$cf=\frac{af=l}{\cos.(\theta_1-\Sigma+\varphi)}$$

por ser hipotenusa del triángulo rectángulo afc y el ángulo

$$cfa=fhg,$$

siendo este por otra parte externo del triángulo hgb, igual á la suma de los

$$hgb=\theta_1-\Sigma \text{ y } hbg=\varphi;$$

valores que sustituidos en la fórmula anterior dan

$$bd=\frac{ex}{l}\times\frac{\cos.(\theta_1-\Sigma+\varphi)}{\cos.(\Sigma-\varphi)}$$

El triángulo $bb'd$ dá á su vez

$$\frac{b\,d}{b\,b'=\mathrm{E}}=\frac{\text{sen. } b'}{\text{sen. } d}$$

pero el ángulo

$$b'=f\,b\,m-\theta;\ f\,b\,m=\varphi+g\,b\,m=\varphi+90^\circ-\Sigma$$

y por tanto

$$b'=90^\circ+\varphi-\Sigma-\theta,\ \text{y sen. } b'=\cos.\,(\Sigma-\varphi+\theta):$$

ahora

$$d=\theta+d\,b\,m-f\,b\,m=\theta+d\,b\,m-\varphi-90^\circ+\Sigma=\theta+180^\circ-\theta_1-\varphi-90^\circ+$$

$$+\Sigma=90^\circ-(\theta_1+\varphi-\Sigma-\theta)\ \text{y sen. } b'=\cos.\,(\theta_1+\varphi-\Sigma-\theta),$$

por lo que

$$b\,d=\mathrm{E}\,\frac{\cos.\,(\Sigma-\varphi+\theta)}{\cos.\,(\theta_1+\varphi-\Sigma-\theta)}$$

y por último

$$\mathrm{E}=\frac{e\,x}{l}\ \frac{\cos.\,(\theta_1-\Sigma+\varphi)\cos.\,(\theta_1-\Sigma+\varphi-\theta)}{\cos.\,(\Sigma-\varphi)\cos.\,(\Sigma-\varphi+\theta)};$$

la cuestion queda así resuelta, aunque los cálculos serian demasiado largos sin reportar un esceso de precision dados los valores que en la práctica tienen los ángulos, puesto que φ es siempre sumamente pequeño y Σ y θ lo son tambien por cuyo motivo la fórmula reducida á

$$\mathrm{E}=\frac{e\,x}{l}\cos.^2\theta_1$$

sustituye con ventaja á la anterior, siendo aun de notar que por no ser, en general, grandes los ángulos de inclinacion en los cañones, cabe prescindir del valor de $\cos.^2\theta_1$, quedando la fórmula mas sencilla y de aplicacion práctica:

$$\mathrm{E}=\frac{e\,x}{l}$$

187. Resuelto esto podemos determinar la variacion de la elevacion del punto de impacto en el blanco, debida á una variacion de alza bajo el supuesto de permanecer constante el punto á que se dirige la visual: si éste y el de impacto se hallan sobre la misma vertical y llamamos R el punto que se mira, h el alza para la distancia á que éste se encuentra; h' la empleada para dar en R', mirando á R; $h'+e$, el alza aumentada y R″ el punto de impacto por consecuencia de este alza, tendremos por lo dicho anteriormente

$$RR'=\frac{(h'-h)x}{l},\quad RR''=\frac{(h'+e-h)x}{l},$$

y de aquí

$$E=R'R''=\frac{ex}{l}.$$

Si el punto sobre que se dirige la visual no está en la misma vertical, la fórmula anterior sigue siendo aplicable: para demostrarlo es preciso primeramente hacer ver que si se aumenta el alza permaneciendo el mismo el punto que se mira, la distancia vertical desde la posicion primera del guion á la nueva línea de mira es menor de $\frac{3}{2}$ de la variacion del alza: la (fig. 78) evidencia que la mas corta distancia $m\,d$, entre la primera posicion del guion y la nueva línea de mira mR es menor que la variacion de alza cb; ahora bien, aun en el caso desfavorable de tener la línea mR una inclinacion de 45°, la distancia vertical dn seria igual á $dm\times\sqrt{2}$ y toda vez que $\sqrt{2}$ es menor que

$$\frac{3}{2},\ dn<\frac{3}{2}\,dm$$

y con mayor razon $dn<\frac{3}{2}\,bc$.

Esto sentado supongamos (fig. 79) que dirigiendo la visual al punto b se háya dado en el R' y determinemos la variacion de altura R' R″ resultando de un aumento e en el alza, siempre dirigiendo la visual al punto b: mirando sobre éste, segun la línea de mira ab, vemos al mismo tiempo el punto ideal R, que está en la vertical de R'; sí pues continuáramos mirando al punto R despues de aumentada el alza, la fórmula

$$R'R'' = \frac{ex}{l}$$

nos daría el aumento de altura en el blanco: rigorosamente hablando en el momento que la visual se dirigiera al punto R, dejaríamos de haberla dirigido al punto b y lo habriamos hecho al b'; pero la distancia bb' es despreciable, porque aun suponiendo el caso estremo en que la referencia se tomara á doble distancia del blanco se verificaría $bb' = aa'$ y como acabamos de demostrar que $aa' < \frac{3}{2}\ e$; bb' en este caso, aun tan desfavorable, sería una magnitud sin importancia. De todo lo anteriormente expuesto se deduce, que la referencia puede ser cualquiera, aun fuera de la vertical del punto y que el aumento de altura en el blanco permanece el mismo, como si la visual se dirigiese precisamente á él, por lo que las fórmulas

$$E = \frac{ex}{l} \text{ y } e = \frac{El}{x}$$

dan el aumento ó disminucion E de la altura de un tiro en el blanco, debido á un aumento ó disminucion de la altura e del alza, y recíprocamente permiten conocer la variacion de alza capaz de producir otra determinada en la altura del tiro, bien entendido que la visual se dirija siempre al mismo punto: fórmula por lo tanto que sirve para corregir un tiro y claro es que esta correccion se verificará fácilmente si las tablas contienen las cantidades $0^m, 001\ \frac{x}{l}$, que espresan las variaciones de altura en el tiro sobre un blanco por cada milímetro de variacion de alza: esta correccion puede hacerse no tan solo cuando se observen los puntos de impacto en un blanco, sino tambien cuando los observados sean los puntos de caida, lo que siempre es fácil en las piezas lisas por no ser escesivos los alcances;

y para ello, si el tiro ha sido, por ejemplo, corto, se aumentará el alza para que primeramente se toque el pie del blanco, cuestion tambien sencilla si las tablas contienen la variacion de alcance horizontal por milímetro de alza, y una vez esto conseguido, basta hacer la correccion anteriormente indicada para que el proyectil pase á la altura que en el blanco se desee.

188. Si en las piezas hay guion y el alza es fija, es preciso que el eje de muñones permanezca horizontal para establecer la puntería como se ha dicho; pero si esto no sucede, al dirigir la visual al objeto que se bate, se comete un error, y se hace preciso determinar la correccion que es consecuencia de la inclinacion lateral del arma. Supongamos en efecto (fig. 80) que la pieza haya girado alrededor de su eje, un ángulo α, de tal manera, que el muñon izquierdo se haya elevado; la trayectoría por esto no habrá cambiado ni el punto a de interseccion de la línea de mira con el eje de la pieza, y aquella seguirá pasando por el blanco M; pero la línea de mira variará de posicion, trasladándose el punto b al b' y su estremo M al M′, habiendo descrito un ángulo M M′ igual al α, que ha girado la pieza: es pues evidente que para que la trayectoria pase por el punto M debe apuntarse al M′, que dista del M la distancia vertical c M y la horizontal c M′, cuyas cantidades son las que han de determinarse para hacer la espresada correccion.

La indicada figura hace ver que

$$c\,\mathrm{M}=\mathrm{A\,M}-\mathrm{A}c=\mathrm{A\,M}-\mathrm{A\,M'}\cos.\alpha=\mathrm{A\,M}(1-\cos.\alpha)$$

y $$c\,\mathrm{M'}=\mathrm{A\,M}\times\mathrm{sen}.\,\alpha:$$

los triángulos

$$\mathrm{D\,C\,B} \text{ y } \mathrm{B}oa,$$

dan $$\frac{\mathrm{D\,C}}{\mathrm{D\,B}}=\frac{o\mathrm{B}}{oa}$$

ó lo que es igual

$$\frac{h}{l}=\frac{r}{oa} \text{ y } oa=\frac{rl}{h};$$

así mismo de los D C B y a F M, se deduce

$$\frac{\mathrm{F\,M}}{a\,\mathrm{F}}=\frac{\mathrm{D\,C}}{\mathrm{D\,B'}}$$

pero $$\mathrm{F\,M}=\mathrm{A\,M} \text{ y } a\,\mathrm{F}=o\,\mathrm{F}-o\,a;$$

y si llamamos a al alcance que está aquí representado por o F, despejando F M=A M será

$$\mathrm{A\,M}=\frac{(a-oa)h}{l}=\frac{a\,h}{l}-r,$$

resultando finalmente las correcciones respectivamente iguales á

$$\left(\frac{a\,h}{l}-r\right)(1-\cos.\,\alpha)=\left(\frac{a\,h}{l}-r\right)2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$$

y $$\left(\frac{a\,h}{l}-r\right)\text{sen.}\,\alpha;$$

ó bien, á causa de la pequeñez de r relativamente á $\frac{a\,h}{l}$

$$\frac{a\,h}{l}\times 2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha \text{ y } \frac{a\,h}{l}\times\text{sen.}\,\alpha;$$

y si bien esta simplificacion es importante para el recuerdo de las correcciones, no debe perderse de vista que si se tratara de calcular tablas que las contuviesen para alcances ó inclinaciones várias, la aproximacion sería mayor tomando las primeras fórmulas. En unas y otras y en todas las relativas á alzas, hemos supuesto que el punto de mira anterior se proyectaba sobre el punto mas elevado de la faja alta, punto que hemos dicho constituye el origen de alzas; así sucede efectivamente en las piezas en que por tener guion, se anula el *vivo de metales*, diferencia entre los rádios de la culata y del brocal; pero no siendo así, como sucede generalmente en nuestras piezas lisas, el punto mas alto de la boca, que sustituye al guion, se proyecta sobre el rádio del círculo, interseccion del plano de tiro con el de alzas, y en un punto comprendido entre los estremos de dicho rádio, punto que será el orígen de alzas; y como, á pesar de esto, las alzas se cuentan desde la extremidad superior del rádio, todas están disminuidas en la cantidad constante, vivo de metales; cuyo orígen no es otro sinó la antigua creencia de que al darlo á las piezas, estas alcanzaban más y en proporcion que aumentase aquél, sin considerar que si los alcances eran de esta suerte mayores se debía al aumento que asi daban al ángulo de proyeccion. En efecto, supongamos (fig. 81) una pieza, que con una carga dada, ha de batir el punto A, pieza apuntada precisamente por la línea de mira natural *ab*; para conseguir el objeto es necesario que la inclinacion de la pieza sea la *mon* segun los datos del problema balístico y es evidente que si el vivo de metales es tal que la línea de mira, colocada horizontalmente pasa por el punto A, se consigue que el ángulo de proyeccion sea el correspondiente á la carga y al alcance. Pero en este caso, el ángulo *mon* es igual al *abc*, que es el de mira natural y el cual depende del vivo de metales *ac*; por lo que haciendo este mayor ó menor conseguian no que la pieza alcanzara más, sino poder apuntar por el raso de metales á un punto más ó ménos lejano: la práctica usual era construir las piezas con un ángulo de mira natural en relacion con el objeto á que se las destinaba; así en la pieza de 24, hoy de 15, que en la guerra de sitios se colocaba á una distancia comprendida entre 600^m y 700^m se hizo que el ángulo de mira fuera de 12', 50''; con lo que, horizontal la línea de mira, se obtiene el alcance propuesto.

189. Conocida más tarde la teoria de las alzas, la existencia del vivo de metales no tenia razon de ser, así és que se ha anulado en la moderna artillería por medio del indicado guion, que se coloca bien en la boca de la pieza ó bien á la altura de los muñones: es conveniente la primera posicion porque alejando los puntos que determinan la línea, esta es más fija; pero si las piezas tienen bastante longitud puede colocarse á la altura de los muñones. Si hay vivo de metales y suponemos la pieza con una inclinacion dada y carga fija, prolongada la línea de mira natural encontrará á la trayectoria en dos puntos; el primero, por su mucha proximidad á la pieza, no se toma en consideracion; el segundo dá nombre á la distancia *de punto en blanco*: es evidente que para dirigir la visual á puntos de la misma

trayectoria situados mas allá del de punto en blanco, es necesario que el alza esté colocada en la culata; mas si por el contrario se quisiera apuntar á los que se encuentran entre aquel y la pieza, sería preciso que el alza estuviera en el brocal, en cuyo caso se denomina negativa; lo cual está conforme con lo dicho en un principio, por cuanto dada la inclinacion á la pieza y uniendo el punto que se quiera batir con el brocal determinaría una altura de alzas, en el plano de estas, que se habia de contar por debajo del orígen: fácilmente se concibe, la desventaja de la referida colocacion, que dificulta el servicio, y por cuya razon cuando estas se necesitaban, eran sustituidas por procedimientos empíricos, que permitian cierta aproximacion juzgada suficiente. Tal era, dirigir el eje de la pieza al blanco, operacion fácil, mirando por un costado de aquella, en el que puede concebirse una paralela á su eje; lo que es igual á suponer que la trayectoria es rectílinea en la corta estension de la distancia á que se tiraba (como menor de la de punto en blanco, que es siempre pequeña, en relacion con la magnitud del vivo de metales): tambien se procedia, dirigiendo sencillamente la visual por el raso de metales al blanco, con lo que el tiro necesariamente sería algo corto pero susceptible, dada la pequeña distancia, de ser corregido al segundo disparo.

180. Para facilitar el manejo del alza y precisar las punterías se usan alzas de distintas formas, variándose su colocacion, que puede ser central ó lateral, segun su eje se sitúe en el plano vertical que pasa por el de la pieza ó bien se coloque á una ú otra region, en cuyo caso determina con el punto de mira un plano paralelo á aquel. Las alzas, cualesquiera que sean sus formas, pueden ser fijas ó movibles; estas (fig. 82) tienen su base cóncava y de la misma curvatura que la faja alta de la culata para adaptarse á ella; del estremo superior de la regla graduada pende una plomada que tiene por objeto colocar el alza vertical, haciendo que el hilo á plomo marque el plano en que deberá situarse el eje de la abertura longitudinal: á lo largo de la regla resbala una corredera *a*, que colocada con anterioridad á la altura que el tiro exija, sirve de ocular, para por este y el punto mas alto de la boca dirigir la puntería. Las alzas fijas, que se adoptaron á causa de no poder dar la necesaria estabilidad á las movibles, se colocan á derecha ó á izquierda del cascabel, para lo cual, en la culata se abre una ranura que se cubre con una pieza

llamada caja de alza, dentro de la que, alojándose aquella, puede subir y bajar; y teniendo el ocular en la parte mas alta se conseguirá ponerlo en la posicion necesaria á su objeto, en la cual se fija mediante un tornillo de presion. La (fig. 83) representa el alza y caja: en la cara de aquella están marcadas las alturas en milímetros y algunas de las distancias á que estas corresponden ó bien lleva dos graduaciones, ó más, relativas á tiros con cargas de pólvora distintas ó con bala y metralla. Inútil parece decir que la pieza en este caso está dotada de su correspondiente guion.

Las alzas fijas exijen que el eje de muñones esté horizontal pues que por construccion el guion y el eje del alza determinan un plano perpendicular al de muñones, si así no fuese, seria preciso, ó bien variar la situacion de la pieza ó bien hacer la correccion anteriormente indicada.

181. En el procedimiento seguido para la puntería de morteros, (toda vez que en estos la inclinacion es fija para cada clase de tiro, variando la carga, y son servidos detrás de un espaldon, que en general impide la vista del objeto sobre que se dispara) dada que sea esta inclinacion por medio de la escuadra, resta solo hacer que el meridiano vertical sea á la vez el plano de tiro para lo que se empezará por colocar sobre el espaldon las pínulas, (fig. 84) que no son otra cosa sino dos varillas situadas en el mismo plano, y haciendo que estas marquen uno vertical que contenga al blanco, hacer que con este coincida aquel meridiano. A este fin, el sirviente encargado de apuntar se colocará detrás del mortero y mediante una plomada hará mover la pieza hasta conseguir, que el plano vertical del eje del mortero sea el mismo que fijan las pínulas y la plomada.

Se ve desde luego que la exactitud de este tiro depende, en cuanto á su direccion, de el trazado del plano vertical que las pínulas deben determinar, ó lo que es lo mismo, de la buena construccion de estas, importando poco que sean ó no verticales con tal que estén en un plano que lo sea: conviene, si, que no sea entre ambas muy pequeña la separacion para que la visual sea de longitud proporcionada, así como, que sea horizontal el emplazamiento de ellas en el espaldon. No será ocioso marcar la colocacion del mortero sobre la esplanada despues de haber hecho la puntería con todo esmero, y así se facilitan los siguientes disparos, no teniendo que hacer ya otra cosa que llevar el mortero á la posicion señalada; y lo cual es indispensable para el fuego de noche, posible en buenas condiciones solo desde el momento que algunas señales previamente establecidas permiten darle la direccion necesaria; ordinariamente esta se fija por medio de dos listones que se sujetan á la esplanada ó bien, valiéndose de dos piquetes que sostienen una cuerda situada en el plano de las pínulas y que retirada al verificar el disparo vuelve á su anterior situacion y marca la posicion que debe tener el eje del mortero.

CAPÍTULO 9.°

Division de la Artillería y diversas clases de tiro.

182. Siendo muy diversos los objetos que la artillería se propone, diversas son tambien las bocas de fuego que se emplean así como los tiros que con ellas se dirigen. No remontándonos á tiempos antiguos, por considerar que el conocimiento y descripcion de las piezas entónces usadas, no presenta mas que un interés puramente histórico, nos ceñiremos á las que hoy constituyen la artillería reglamentaria, que son los cañones, morteros y obuses, y en las que segun el uso á que se destinan varian sus calibres. A pesar de las grandes variaciones que han esperimentado las piezas, en general, en su trazado, variaciones que siempre han estado en armonia con los adelantos sucesivos en todos aquellos ramos que se ligan con su fabricacion, y con el conocimiento de los fenómenos verificados en la inflamacion de la pólvora, marcha del proyectil dentro del ánima etc. podemos decir, al contraernos á piezas lisas, que no han perdido su primitiva sencillez, reduciéndose siempre á un tubo cilíndrico, que sirve de receptor á la carga, taladrado en sus paredes con objeto de comunicar el fuego á aquella por medio de este taladro; sin ocuparnos de su verdadero trazado, para lo que seria necesario el estudio detenido de los espesores de metales, longitud de las piezas, forma y dimensiones de la recámara, fogon y grano, preponderancia, muñones y su colocacion, centro de gravedad, peso y calibre; por no considerarlo de este lugar.

183. Dos son en general los sistemas en que se dividen las piezas, segun que con ellas se lancen proyectiles sólidos ó huecos; se llaman las primeras cañones, y morteros las segundas, así como balas los proyectiles disparados con los cañones, y bombas las que se disparan con los morteros. Con los cañones se imprimen á los proyectiles grandes velocidades iniciales para lo cual, debiendo emplearse fuertes cargas, se hace preciso que sus espesores sean grandes en relacion con el proyectil que disparan; las trayectorias descritas por estos son en general rasantes: con los morteros se disparán bombas en general bajo grandes ángulos de elevacion con objeto de aprovechar la fuerza viva adquirida en su caida, además de los efectos destructores al reventar aquellas por la explosion de la carga que llevan en su interior, y como el efecto de la pieza contra el montaje aumenta con el ángulo de elevacion, de aqui la necesidad de que sus afustes sean sumamente resistentes. En algun tiempo se fundian los morteros unidos á una placa con respeto á la cual tenia el eje del mortero 45° de inclinacion, y esta placa se sujetaba al afuste de madera; llamábanse morteros de placa, y bastaba que la explanada fuese horizontal para que el mortero quedase apuntado con dicha inclinacion de 45° que como sabemos ya, es la que se aproxima al ángulo de máximo alcance y era el tiro habitual de estas piezas. Por estar dispuesto así, se hacia necesario variar la inclinacion de la explanada para tirar bajo otros ángulos de proyeccion, por lo que se volvieron á colocar los muñones y por medio de cuñas se variaba dicho ángulo; en la actualidad tiene el afuste en su parte anterior un tornillo que facilita la operacion de graduar el mortero. El exagerado peso que resulta para estas piezas, así como la forma de su afuste, las escluyó de poder constituir artillería de batalla, pero siendo sin embargo reconocida la ventaja de fuegos curvos, y de la explosion de los proyectiles huecos, se buscó el procedimiento para poder emplear piezas, que dotadas de movilidad suficiente para su empleo en acciones campales, disparasen proyectiles huecos lanzados con grandes ángulos de proyeccion, viniendo entonces á la adopcion de los obuses que cumplen con estas condiciones. La diferencia esencial entre cañones y obuses consiste en ser el espesor de metales de los primeros mayor que en los segundos, por necesitarse mayores cargas en aquellos que en estos, así como las bombas

se diferencian de los proyectiles empleados en los obuses, que se llaman granadas, en tener las bombas diferente espesor, formando un culote colocado en el estremo del diámetro que pasa por la boquilla, y en las granadas el espesor es igual, careciendo de boquilla y no teniendo mas que el taladro para la colocacion de la espoleta. Fueron los obuses en un principio unos morteros que tenian los muñones adelantados siendo el efecto nocivo, que causaban sobre el montaje causa de la reduccion de sus calibres. Durante largo tiempo se emplearon tan solo obuses cortos, porque desconocido el atacador de cabeza cóncava y el ensalerado de la granada, se hacia preciso que el brazo del artillero alcanzase hasta la recámara, para colocar la granada en el obus y centrarla por médio de estaquillas, haciendo que la espoleta quedase en direccion del eje del ánima, sin lo cual era fácil que al ponerse en movimiento, chocase contra sus paredes; pero vencida ésta dificultad se construyeron obuses largos, aumentándose asi la certeza y alcance de esta pieza y disminuyéndose al mismo tiempo el efecto destructor contra el montaje en el acto del disparo por el consiguiente aumento de su peso.

Los obuses participan por lo tanto de las propiedades de los cañones y de los morteros, por servirse como los primeros y disparar proyectiles análogos á los de los segundos.

184. Divídense tambien las piezas, con relacion al servicio en que se emplean, en artillería de sitio y plaza, artillería de costa y artillería de campaña: en la primera se hallan comprendidas todas las que se destinan al ataque y defensa de las plazas y está constituida por las tres clases ya mencionadas de cañones, obuses y morteros: aunque en esta artillería no sea la movibilidad su principal carácter distintivo, no debe sin embargo dejar de tener alguna, puesto que la de plaza, convendrá en ocasiones variarla de lugar, segun el sitio en que el ataque se verifique con mayor energía, y bien se concibe la necesidad de la prontitud en tal operacion: y en cuanto á la de sitio, aun con mayor razon, por deber ser trasportada hasta conseguir su conveniente instalacion: y ya que no sea posible evitar el considerable peso que siempre resulta en un tren de sitio, debe aminorarse cuanto se pueda, bien entendido sin embargo que debe subordinarse la cuestion de movilidad, á la de procurar obtener con ella el mayor efecto posible, lo que se consigue

merced á grandes masas y velocidades iniciales en los proyectiles, que dependen á su vez de gruesos calibres y fuertes cargas, siendo su objeto como és, destruir en el ataque y defensa de las plazas los medios de defensa de todo género que oponga el enemigo y, muy especialmente, obras cubiertas de diferentes materiales, muros y parapetos de considerable espesor á veces.

Las piezas de costa deben tener alcance y precision y sus proyectiles mucha fuerza en el choque, para causar el mayor efecto destructor posible, condiciones únicamente satisfechas por la artillería de mayor calibre, el que solo debe ser limitado, porque el servicio y manejo de las piezas se dificulten demasiado ó exijan mucho tiempo. El efecto causado por una pieza de pequeño calibre sobre el costado de un buque, no pudiendo ser considerable, será susceptible de pronta reparacion, y así en efecto la esperiencia demuestra, que varios cañones de este género, disparando sobre un mismo objeto, no consiguen lo que una sola pieza de grueso calibre en el mismo objeto batido. Siendo además el efecto del choque proporcional al cuadrado de la velocidad, se concibe la necesidad de grandes cargas para conseguir sea máximo este factor de quien el choque depende. Comprende esta artillería por lo espuesto, cañones y obuses de los mayores calibres.

La artillería de campaña tiene por objeto poner fuera de combate las tropas enemigas, destruir carruajes, montajes y obras de madera; derribar muros ó parapetos de poca resistencia y allanar los demás obstáculos que de este género se presenten; debe salvar con facilidad los accidentes que se opongan á su marcha, siguiendo á las tropas en todos sus movimientos y aun algunas veces adelantarse á ellas; razones todas que obligan imperiosamente á que su movilidad sea grande con preferencia á toda otra circunstancia, pues solo de esta manera puede conseguirse que la artillería sea en las batallas un arma de utilidad grandisima, y nunca un obstáculo para el desarrollo de las operaciones de las otras armas: se emplean cañones y obuses y se divide en artillería montada y de montaña, en la 1.ª de las cuales las piezas van en carruajes arrastradas por mulas ó caballos; trasportándose la 2.ª á lomo en mulos fuertes y de no gran alzada, é indicando ya su mismo nombre el preferente uso de ella en acciones y encuentros que se verifican en paises montuosos.

El empleo de la artillería en acciones campales no parece tuvo lugar hasta fines del siglo XV, porque hasta entonces todas las piezas carecian de la movilidad requerida.

Parece inútil manifestar que la adopcion de la artillería rayada, ha introducido grandes variaciones, y que de ellas preferentemente hemos de ocuparnos en el lugar correspondiente.

195. Respecto á los diversos tiros empleados en la artillería, parece lógico que su primera division sea en tiros directos é indirectos, siendo despues estos á su vez divididos en otros. La distincion de estos tiros se ha apreciado de muy diversas maneras; se ha dicho por algunos que se llama generalmente fuego curvo ó vertical, todo tiro ejecutado por medio de piezas susceptibles de grandes elevaciones en los disparos, y fuego directo, el ejecutado con cañones cuyos proyectiles tan solo por medio de trayectorias rasantes dén en el blanco: segun esto depende la clasificacion hecha solo de la naturaleza de la trayectoria y deja cierta incertidumbre en su determinacion. Dícese tambien, que el fuego se llama directo cuando los proyectiles hieren en un blanco vertical visible y con trayectorias rasantes, tiro propio de los cañones siempre y en algunos casos de los obuses, y que es fuego indirecto cuando este se hace precisamente contra objetos ocultos por medio de obstáculos colocados delante de ellos: la definicion, sin embargo, que parece determinar mas la especie de estos tiros, es la siguiente: tiro directo es aquel en que la trayectoria está determinada solamente por dos puntos que son la boca de la pieza y el objeto que se bate, é indirecto aquel en que la trayectoria exige para su determinacion no solamente los dos puntos anteriormente espresados, si que tambien otro tercero, que es la cresta de la masa que cubre el punto de impacto deseable.

196. El tiro directo se emplea contra tropas y obstáculos más ó menos resistentes, y es el usado desde los primeros tiempos de la artillería: se divide á su vez en tiro de enfilada, para desmontar y de brecha.

197. El tiro de enfilada puede emplearse con toda clase de piezas y es su objeto batir una cara de cualquier obra defensiva, colocándose la batería, en direccion perpendicular á la prolongacion de la cara que trate de batirse, y produciendo en ella su efecto, bien sea en bajas personales, ó bien en el material de artillería que contenga;

exige en general fuertes cargas y las distancias máximas á que debe tirarse siendo con piezas de 15^c ó de 12^c es la de 1350^m; en general deberán las distancias á que se dispara estar comprendidas en la de los alcances eficaces de las piezas con que se ejecute el fuego.

198. En concepto de algunos, el tiro para desmontar solo tiene por objeto inutilizar la artillería enemiga desmontando sus piezas; no es así sin embargo; su accion se estiende igualmente á las obras que el enemigo ponga para su defensa y su efecto es por tanto paralizar ó impedir los trabajos del enemigo ó desmontar su artillería. Las piezas que se deben emplear se subordinan á la resistencia de los objetos que deseen inutilizarse, pudiendo por lo mismo en muchos casos hacerse uso de pequeños calibres por ser suficientes para conseguir el efecto deseado. Bueno será á este propósito dar á conocer un proyectil llamado *para desmontar* que como dice Muller, pudo considerarse como uno de los triunfos raros de la artillería lisa. Repetidas veces se habia ensayado tirar proyectiles oblongos con las piezas lisas y siempre se observó en ellos, que al salir del ánima, el proyectil daba la vuelta; lo que hacia, que durante su trayecto en el aire, la resistencia que este le oponia, ejerciéndose de una manera muy irregular, fuese causa de ser el tiro sumamente incierto: en 1847 el Capitan americano Thistle propuso un proyectil que en su superficie tenía formadas unas rayas helicoidales y con el que realmente se consiguió un movimiento de rotacion alrededor de el eje mayor; pero tal movimiento era poco regular y los alcances obtenidos en consecuencia muy variados. Cuando posteriormente fueron conocidas las piezas rayadas y pudo apreciarse la mayor certeza y alcance que tenian, volvió á recibir nuevo impulso en Prusia la cuestion que nos ocupa, haciéndose en 1852 un nuevo ensayo; la razon que para ello habia era: que si tenia gran certeza el tiro del cañon rayado de 12^c debia ser atribuida únicamente al movimiento helicoidal del proyectil y á la regularidad de la velocidad de rotacion de que estaba animado; lo que permitia creer que sería posible trasmitir una parte de esta certeza á las piezas lisas dando á sus proyectiles una forma que engendrase un movimiento de rotacion análogo al que tenian los proyectiles de los cañones rayados. Vários fueron los modelos que se presentaron para que adquiriese el proyectil un rápido movimiento de rotacion, y que esta

fuese debida á la resistencia del aire. En los dos primeros modelos el fundamento era en uno, el mismo que el de un volante y en el otro el de las turbinas: el primero era cilindro cónico con un hueco posterior y en la superficie tenia ocho aletas que marchaban de delante atras en toda su superficie cilíndrica, y el segundo presentaba en su parte anterior un hueco tronco cónico que se prolongaba segun una canal cilíndrica, y terminaba en otras cuatro de doble curbatura inclinadas hacia atras y hacia el costado, las que desembocaban sobre la superficie cilíndrica esterior del proyectil: ambos proyectiles manifestaron ya á los 375^m tendencia á girar alrededor del eje menor, cuya principal causa era la resistencia del aire, adquiriendo el proyectil dentro del ánima, otra rotacion, que originada por los gases de la pólvora, era contraria á la que se deseaba obtener.

Era pues forzoso trazar el proyectil bajo la idea de que el movimiento de rotacion se engendrára precisamente dentro del ánima y con la energía mayor posible: ambos proyectiles ensayados introducidos al reves en el cañon debian dar este resultado, y así fué que con el segundo proyectil descrito, la certeza del tiro fué mucho mayor: sucesivos ensayos y modificaciones hicieron al fin fijar el proyectil definitivo que recibió el nombre de proyectil-turbina, con el que siempre se trató de obtener certeza mayor que con las balas ordinarias hasta la distancia de 600^m que era con la artillería lisa, la misma á que se colocaban las baterias, para desmontar, de la primera paralela: la parte cilíndrica del proyectil presentaba una série de ranuras paralelas de seccion triangular-rectangular, su cabeza era cónica formando las generatrices un ángulo muy obtuso; todos estaban dotados de cuatro canales cuyo orígen tenia lugar en el contorno del macizo anterior, siendo conveniente que la inclinacion de estas canales fuese grande, así como la abertura del hueco posterior. Tomaron el nombre de proyectiles para desmontar, tan solo con el objeto de no llamar la atencion del estranjero, siendo la esplicacion del movimiento adquirido, la de que los gases de la pólvora que se precipitan en el hueco posterior y de él en las canales helicoidales comunican el movimiento de rotacion al proyectil; al salir de estas canales encuentran las paredes del ánima y la reaccion que resulta aumenta la energía de la rotacion adquirida: los calibres que se emplearon fueron los de 12c y 15c y su adopcion definitiva se verificó en 1857; las mayores cargas fueron respectivamente para dichos calibres de 1k, 4 y 2k, 5. Estos proyectiles por lo tanto, en la clase de tiro que nos ocupa, permitieron aumentar la esfera de accion de las piezas citadas.

199. El tiro en brecha directo, tiene por objeto destruir una parte del parapeto de una fortificacion, haciendo que el revestimiento y tierras que lo constituyen, al caer formen una rampa accesible á las columnas de asalto. Esto se consigue formando en el muro una cortadura horizontal y varias verticales; el resúmen de las siguientes esperiencias, pone de manifiesto la mejor manera de ejecutar este tiro, siendo inútil recordar la conveniencia de calibres grandes para la pronta realizacion de la brecha; y si bien la mayor parte de los autores están de acuerdo con la idea de abrir primeramente la cortadura horizontal y despues las verticales como hemos dicho, con esta idea no está conforme nuestro ilustre Morla que opina debe hacerse al contrario; suponiéndose tambien por algunos ser preferible en los proyectiles mucha masa y poca velocidad. Las esperiencias verificadas en Spandan en 1832, demostraron claramente los inconvenientes de tal procedimiento; en ellas además se vió que la pieza de 15c por su mucha carga era la mas propia para este tiro, deduciéndose la ventaja de asignar á cada una un cierto espacio para batirlo, y que no conviene tirar por salvas. La superioridad del cañon de 15c fué nuevamente demostrada en Colonia, en las esperiencias verificadas en 1845, pero las más importantes llevadas á cabo para deducir la práctica mejor de este tiro son las de Metz de 1834, en las que se vió la ventaja de hacer la cortadura horizontal, á una tercera parte de la altura de la escarpa ó muralla, apuntando las piezas de modo, que los puntos de choque de los proyectiles distasen entre si un metro, ó metro y medio.

En Bapaume, año 1847, tambien se hicieron pruebas en grande escala, deduciéndose las principales conclusiones siguientes: la batería debe estar colocada de manera que la direccion del tiro forme un ángulo de 50° á 90° con la direccion de la escarpa que haya de ser batida: el calibre de 15c, es el más eficaz, siendo además suficiente la carga de $\frac{1}{3}$ del peso del proyectil: la cortadura horizontal debe ser abierta á $\frac{1}{3}$ de altura desde su pié; conviene asignar á cada pieza un cierto espacio para batirlo, y debe verificarse el fuego, procurando que cada proyectil dé en el espacio comprendido entre dos de los tiros anteriores: si la muralla es muy resistente, y muy oblícua por necesidad la direccion del tiro, será necesario abrir la brecha apuntando todas las piezas á un mismo punto: una vez terminada la abertura de la cortadura horizontal, se practican en general dos verticales colocadas en sus estremos, para lo que se destina á cada una la mitad de las piezas disponibles, empezando los tiros por la parte baja y no subiendo hasta tanto que se haya atravesado próximamente un metro de altura: si verificadas estas cortaduras se viera no se derribaba el muro, conviene tirar algunos proyectiles al espácio que media entre las verticales, los que le harán caer, no siendo necesario en general hacer nuevas cortaduras: si al caer el revestimiento de piedra no lo hiciera igualmente la tierra colocada detrás, se practica una cortadura en la parte inferior tirando con débiles cargas; si los tiros se verifican contra muros acasamatados, se forma la cortadura horizontal á la altura de las cañoneras ó inmediatamente debajo de ellas. Es conveniente el tiro oblícuo siempre que las escarpas estén reforzadas con contrafuertes ó formadas de muros en descarga: de esta suerte, y en vista de los resultados obtenidos, puede concluirse que hasta á la distancia de 300 metros la brecha puede abrirse en buenas condiciones.

Los siguientes datos pueden servir de norma para este tiro: una brecha de 20^{m} de anchura, verificada en buena mamposteria de $3^{m}, 7$ de espesor á la distancia de 60^{m} necesitó para ser hecha 580 balas de 12^{c}, con $\frac{1}{3}$ de carga, disparadas en seis horas y media, y 280 balas de 15 disparadas en cinco horas: á los 252 disparos cayó el muro, siendo los demás dirigidos contra los contrafuertes. Entre nosotros las piezas destinadas esclusivamente á este servicio, han sido las de 15^{c} y 13^{c} á las que son en un todo, aplicables cuantas reglas acaban de darse.

200. Dos clases de tiros pueden considerarse en la segunda division que se ha hecho; es decir, en el tiro indirecto; uno llamado

de rebote y otro indirecto contra objetos verticales para la destruccion de mamposterías. Llámase de rebote el tiro que, pasando rasante por la cresta de un parapeto, tiene por objeto inutilizar la artillería colocada en la cara de la fortificacion que se bate, para lo que debe procurarse que sea pequeño el ángulo de caida del proyectil en la esplanada; porque de este modo, rebotando en ella várias veces, se estiende su efecto destructor á una cierta longitud de la cara. Para librar de este tiro á las piezas en ella colocadas, estarán á veces resguardadas por medio de traveses situados en direccion paralela á los ejes de aquellas y en este caso, se hace preciso que el proyectil los salve ó inutilice.

Tambien se llama tiro de rebote aquel que, ántes de dar en el blanco, choca en el terreno ó en la superficie del mar: claro es que si el proyectil ántes de dar en el blanco, choca contra el terreno, pierde una parte considerable de su fuerza viva utilizable, razon por la que es de aplicacion muy limitada esta clase de tiro. Es ventajoso en acciones campales cuando no se conozca bien la distancia á que se encuentra el enemigo; porque estónces, tirando corto, se aprovecharán los rebotes del proyectil, quien conservará fuerza suficiente para sacar hombres fuera de combate y aun para inutilizar objetos poco resistentes, siendo conveniente en este caso verificar el fuego de tál manera, á la que por otra parte se presta muy bien la artillería lisa por rebotar sus proyectiles bajo muy buenas condiciones: el ángulo de caida no debe esceder de 10°. Aun se verifica mejor el rebote en el agua, en la que el proyectil pierde ménos fuerza por su choque en ella, y entonces el ángulo de incidencia no debe esceder de 4°, ó 5°. El ángulo de proyeccion debe ser tanto menor cuanto menor sea la altura de los objetos que se batan, porque de este modo, siendo la trayectoria muy rasante, lo son igualmente los rebotes, quedando en su consecuencia dentro de su esfera de accion mayor número de objetos: bien se concibe el efecto aterrador de este tiro, en masas profundas de tropas, cuando los botes sean muy tendidos.

201. El segundo tiro que podemos llamar de sumersion en brecha ha adquirido en la actualidad una grandísima importancia con la adopcion de la artillería rayada, y si bien es cierto que los resultados obtenidos en las esperiencias con las piezas lisas han quedado sin empleo práctico directo, es indudable que dichas esperiencias no fueron un trabajo perdido, atendiendo á que en ellas puede decirse tuvo orígen el perfeccionamiento que este tiro ha llegado á adquirir con la nueva artillería: fueron hechos los primeros ensayos para el empleo de esta clase de tiro en Wolwich por órden de Wellington, jefe entonces de la artilleria, año **1823**; se emplearon cañones de grueso calibre que despues de **2100** disparos y á la distancia de **457**^{m} lograron la destruccion de un muro: el príncipe Augusto, de acuerdo con la comision de esperiencias, deseó se renovasen las de Wolwich, y en ellas se propusieron determinar la mayor carga y la menor inclinacion que permitan obtener á diversas distancias y con probabilidades de dar en el objeto, proporcionales, la destruccion de revestimientos situados á distintas profundidades. No se ocultaba por entonces que no era fácil obtener una verdadera brecha en objetos ocultos, sinó en circunstancias muy favorables, es decir, con pequeños ángulos de caida, no pudiendo por otra parte contar sinó con una destruccion irregular, por lo que, tomó el nombre de tiro de demolicion. Determinando en Coblenza, año **1856**, los efectos que se podian conseguir con este tiro, batiendo un reducto de mampostería (en estas esperiencias el pié de la mampostería no podia ser tocado sinó con un ángulo de caida de 7°) se tiraron á 450^{m} con un obus de 23^{c},400 granadas escéntricas, de las que un 38 por 100 dió en el reducto, el cual quedó completamente inutilizado para servirse de él como medio defensivo: la comision emitió su parecer, diciendo, que la certeza del tiro era satisfactoria, pudiendo el tiro de demolicion poner fuera de defensa, muros aspillerados y baterías y reductos acasamatados; pero no se puede obtener la destruccion de bóvedas y pies derechos, sino con un inmenso consumo de municiones, deduciendo finalmente la posibilidad de ejecutar el tiro de demolicion contra mamposterías cubiertas.

202. Si para la division de los tiros se toma en consideracion la posicion del eje de la pieza, estos se llaman *tiro horizontal, por elevacion* y *por depresion*, segun que el eje esté horizontal, elevado, ó inclinado hacia el terreno: el primero es de muy escasa aplicacion y solo tiene lugar cuando se bate á cortas distancias, siendo el de elevacion el más generalmente empleado.

203. Las diversas especies de proyectiles ó artificios que pueden emplearse, dan tambien lugar á la division de *tiro de bala, granada, metralla, granada de metralla, bala roja, bombas y cohetes.*

204. El tiro con bala es el más certero y eficaz contra blancos y objetos de alguna resistencia y su éxito es tanto más probable, cuanto menor sea el ángulo de proyeccion y la trayectoria por lo tanto más rasante.

205. Las granadas se disparan con obuses y bomberos, y son preferibles en muchos casos á las balas; bien se concibe que su efecto al reventar es considerable. Empleadas contra buques de madera, siempre que tengan fuerza suficiente para penetrar el costado del buque, son de efecto notable, como prueban las esperiencias, citadas por el ilustrado Brigadier Barrios, que se verificaron en Portsmouth el año 1838 lanzando granadas de un buque contra otro situado á la distancia de 600^{m}. Se dispararon 16 granadas de 20^{c} y 14 de 16^{c}, reventando en el buque que servia de blanco, nueve de las primeras y cinco de las segundas: su efecto en general fué, penetrando en el costado del buque, destruir sus cascos los mamparos de la cámara, rompiendo piezas de hierro de bastante espesor, arrancando pernos, haciendo saltar astillazos á distancias bastante grandes; y de ellas, una de 16^{c} penetró en un costado por bajo de la línea de flotacion á una distancia de 26^{c} y aunque no reventó, el agujero que hizo daba acceso al agua con tal violencia, que se consideraba imposible el taparlo. Las granadas se emplean tambien y muy especialmente contra masas profundas de Caballería ó Infantería, por los efectos destructores de sus cascos, y cuando se disparan sobre tierras, penetrando en ellas, causan al reventar el efecto de una fogata.

206. La metralla está formada por várias balas sólidas de hierro colado de pequeño calibre, encerradas, bien sea en un saquillo ó bien en un bote de plancha de hierro, conociéndose en su consecuencia con los nombres de saquillo ó bote de metralla: el número de granos varía con el calibre de la pieza que los dispara. Antiguamente se componia de piedras pequeñas y pedazos de hierro ú otros metales en general, pero su marcha no era regular y además sufría mucho la pieza. Se emplea el tiro de metralla contra tropas á cortas distancias, pudiendo su efecto ser algunas veces superior al de las balas, si se verifica en buenas condiciones: chocando las balas

entre sí y contra la superficie interior de la pieza, forman al salir un conoide achatado en sentido vertical y marcan en el terreno un óvalo irregular, hacia cuya mitad dá el mayor número de granos: sepáranse poco estos en un principio y á los 300^m se abren ya suficientemente para que su efecto sea considerable, llegando á alcanzar el máximo á los 400^m, desde cuya distancia empieza á disminuir su efecto: pasando de 600^m, no debe en general esperarse un gran resultado, material ni moral, contra las tropas. Debe contarse tambien con la forma del terreno para esta clase de tiro; si es favorable para los rebotes de los granos, puede sin inconveniente usarse hasta 800^m con buen resultado: en circunstancias favorables se calcula que en el frente de medio batallon dará un tercio de las balas ó granos y un médio en el de un escuadron desplegado. Como quiera que tanto influye en los resultados de este tiro el momento preciso de verificar el disparo (no solo para no esceder los límites de las distancias marcadas, sino para dar lugar á que se hayan abierto suficientemente los granos y sea mas estensa su esfera de accion) se hace indispensable por parte de quien manda el fuego mucho cuidado y prudencia para no precipitarse, pues que repetimos, en circunstancias favorables, es de gran efecto, como puede concebirse el que se producirá sobre escuadrones de Caballería que ataquen un cuadro, en los que no solamente causará la pérdida de hombres y caballos, si que tambien la confusion y desorganizacion que es consiguiente.

207. La granada de metralla es una granada ó bala hueca, rellena de pequeñas balas de plomo y pólvora y dotada de su correspondiente espoleta para que estalle en el momento oportuno, pudiendo en consecuencia decirse que su objeto es llevar el efecto de la metralla á largas distancias: su espesor es tan solo el suficiente para que no rompan por la accion de los gases de la pólvora que constituye la carga de la pieza, siendo muy conveniente separar la carga de pólvora de la granada de metralla, de las balas de plomo, encerrándola en un pequeño receptor, pues de no ser así es fácil en marchas y trasportes su completa trituracion.

Los Shrapnells ó granadas de metralla debidos al Coronel de artillería Boxer, han merecido la preferencia, y consisten en una granada esférica, debilitada en sentido de cuatro planos meridianos por ranuras interiores: un tubo de palastro contiene la carga de pólvora y comunica con la boquilla: el efecto de la carga interior es abrir la granada, sin reventar por las ranuras, lanzando las balas con fuerza suficiente para sacar hombres fuera de combate. Para que este tiro sea de efecto satisfactorio se hace necesario que la esplosion se verifique momentos ántes de llegar á la línea sobre que se dispara, debiendo estar el proyectil animado de gran velocidad; si la esplosion se verifica despues de terminar su movimiento, el efecto es muy pequeño y de aquí se desprende la necesidad imperiosa de espoletas de gran precision. Su empleo es naturalmente análogo al que hemos dicho tiene la metralla.

208. El tiro con bala roja tiene por objeto incendiar, siendo yá desde hace mucho tiempo de muy escasa aplicacion: se hace con bala ordinaria calentada en un hornillo hasta el rojo cereza, despues de lo cual se verifica la carga y su empleo es contra edificios ú obras que se quieran incendiar: generalmente hay un hornillo especial para calentar la bala, pudiendo en caso de no haberlo, hacerse una escavacion de poca profundidad en la que se echa el carbon, y poniendo encima una parrilla, sobre ella se colocan las balas. Como se comprende, la ejecucion de este tiro exige los mayores cuidados y precauciones: empléanse cargas menores que la ordinaria con objeto de que el proyectil no atraviese el blanco y si solo penetre; el cartucho es de papel cartulina ó pergamino, el que se introduce limpiando ántes la pieza con gran esmero y procurando no vierta la carga ningun grano de pólvora, que, si así sucediese, pudiera quedar en el ánima; se coloca despues un taco de heno ó yerba seca y sobre él uno de filástica de tres decímetros de largo, procurando éntre muy ajustado: siendo muy conveniente colocar sobre ambos tacos un disco de greda del diámetro del ánima. La bala sacada del hornillo se lleva en un cargador cilíndrico y con el atacador se la acompaña hasta quedar en contacto con el resto de la carga: puede emplearse el cartucho de lanilla, aumentando su longitud por médio de un suplemento de madera.

209. El tiro de bombas se emplea, en el ataque y defensa de las plazas y costas, pudiendo como sabemos ser disparadas bajo grandes ángulos de proyeccion y exigiendo siempre blancos de alguna consideracion para conseguir la certeza del disparo. En algunas oca-

siones se han disparado bombas y granadas con cañones de menores calibres, sujetándolas á la boca de manera que la obturen; fácilmente se alcanza la ineficacia y poquísima certeza de esta clase de tiro. Esperiencias verificadas en Glatz en 1816, demostraron que la mayor penetracion de las bombas en las tierras era $1^m,35$, admitiendo por lo tanto que un recubrimiento de tierra de $1^m,30$ en una obra blindada impediría la rotura de las vigas que formen el techo de la obra. En Coblenza (1856) tuvo tambien lugar un ensayo contra un reducto, cuya bóveda tenía de espesor $0^m,90$. Se hizo el tiro á la distancia de 450^m por un ángulo de 75°, alcanzaron las bombas una altura de 556^m, siendo su velocidad final de 106^m, y el efecto sobre la bóveda recubierta de tierra fué nulo: deduciéndose de estas esperiencias, que bóvedas de esta especie están casi al abrigo de estos tiros y muy particularmente cuando están recubiertas de tierra, poniéndose además en evidencia la débil certeza de los tiros á grandes elevaciones, pues fueron muy pocas las bombas que dieron en el reducto. Por último en 1869 se hicieron tambien esperiencias con morteros de 28^c en Casel y Erfut, tirando sobre locales recubiertos de rails y en ellas se vió que tales obras están tambien al abrigo de este tiro.

Si los morteros son de pequeño calibre, empleados en la defensa, puede hacerse uso de ellos hasta 600^m y de los de grueso calibre hasta 900^m; si es para el ataque y se baten objetos de reducidas dimensiones las distancias citadas se reducen respectivamente á 200 y 300^m.

210. Sobre el tiro de cohetes hay muy variadas opiniones, concediéndole algunos ventajas muy grandes, y cuya consideracion parece exagerada al ménos, atendiendo al estado actual de adelanto de este artificio; pero tampoco en cambio cabe considerarle tan inútil como otros le suponen; y es lo cierto, que ha sido muy empleado, particularmente en la guerra de Abisinia por los Ingleses, los que continúan ocupándose mucho de esta cuestion, á la que no debe dejar de concederse importancia. Prescindiendo de su fabricacion y de los distintos sistemas de cohetes por pertenecer este estudio á la Industria militar nos ocuparemos esclusivamente de citar algunas esperiencias que demuestran los efectos de esta clase de tiro. El cohete es un aparato destructor que lleva en sí el elemento

motor. Congreve introdujo su uso en Inglaterra, haciendo ver las variadas aplicaciones de que era susceptible; pero el haber pretendido la sustitucion de los cañones y armas portátiles por este artificio, fué causa de la resistencia que en todas partes hubo para su adopcion.

211. Si, encerrada en un tubo, se inflama una materia capaz de producir gases en abundancia, estos gases verificarán presiones iguales en las paredes del receptor; mas, en el momento que la cubierta tenga un orificio, el equilibrio cesa, y no pudiendo causar presion los gases sobre la parte opuesta, la cubierta ó receptor adquiere un movimiento debido á este esceso de presion: si pues la formacion de los gases es contínua durante un cierto tiempo, el movimiento continuará tambien con velocidad creciente hasta que, equilibrándose la resistencia del aire con la aceleracion debida á la contínua formacion de los gases, el movimiento se haga sensiblemente uniforme. Tal es la causa del movimiento de los cohetes, marcándose así la esencial diferencia entre ellos y los proyectiles de artillería: estos últimos reciben su accion del motor, constituido por el conjunto de pieza y carga, accion que cesa desde el momento en que el proyectil abandona la pieza; miéntras que los cohetes que forman una verdadera máquina de reaccion, llevan consigo durante casi todo su movimiento el elemento motor, siendo conveniente que la forma esterior del cartucho sea cilíndrica prolongada, para presentar así superficie más reducida á la resistencia del aire. La necesidad de que los gases se desarrollen con la mayor abundancia posible, pero teniendo en cuenta además la poca resistencia de las paredes del cartucho, ha hecho que en la composicion inflamable, se abra un vacío tronco-cónico, llamado ánima; de este modo, en el momento que empieza la combustion, que es generalmente por el orificio, se propaga rápidamente al través del ánima, quemándose por capas concéntricas, y como sabemos, espesores iguales de estas capas en tiempos iguales; por lo que, aumentando sucesivamente estas capas, la produccion de gases aumentará tambien y permaneciendo constante el orificio, la velocidad del móvil será creciente, por serlo tambien la de salida de los gases; y de aquí la conveniencia de estrechar el orificio, pero siempre contando con que la tension resultante no sea superior á la resistencia del cartucho.

212. La determinacion analítica exacta de la medida de la tension de los gases no es posible, al ménos hasta ahora, puesto que además de las dificultades que siempre se presentan para esta determinacion en el interior de las bocas de fuego, se aumentan en los cohetes, porque el móvil cambia, en su movimiento en cada instante, tanto de peso, como de situacion el centro de gravedad; las cantidades de gases desarrolladas, en aumento constantemente como hemos visto, lo verifican segun leyes que no son conocidas, y las capas de gas, marchando hácia el orificio para su salida, ocupan espacios tambien crecientes, y obedeciendo tambien á distintas leyes; de aquí la necesidad de apelar á procedimientos esperimentales para determinar esta tension; procedimientos que son dinamométricos, y por los que no es posible tampoco obtener el resultado exacto, por variar las circunstancias reales, pues que en ellos queda sujeto el cohete y no en movimiento como debiera suceder.

La aplicacion de las leyes conocidas de balística para la determinacion de la trayectoria de los cohetes, se hace igualmente imposible, por las distintas causas que producen el movimiento en los proyectiles y en los cohetes: impresa una velocidad inicial á los primeros por la accion de los gases de la pólvora, la trayectoria depende de esta velocidad, de la direccion inicial del movimiento de la resistencia del aire y de la pesantez, resultando además algunas desviaciones en el móvil, cuando adquiere un movimiento de rotacion. No es así en los cohetes, la causa del movimiento es contínua, marcha con el móvil; de modo, que si por cualquiera circunstancia toma una direccion distinta de la inicial ó diferente en general de la que en un tiempo dado ocupe sobre una trayectoria, y adquiere un movimiento de rotacion alrededor de un eje vertical por ejemplo, claro es que la presion de los gases cambiará tambien de direccion y el cohete se desviará enseguida de la trayectoria primitiva y llegará hasta describir una curva várias veces replegada sobre sí misma, si la rotacion persiste: de aquí tambien se desprende la poca certeza de este tiro, siendo una de las causas principales su forma, que como hemos visto, debe ser prolongada llegándolo á ser hasta nueve veces el calibre y presentándose por lo mismo á la accion de la resistencia del aire superficies muy variables, circunstancia que tanto modifica el movimiento y lo que no se evita mientras no se consiga que el cohete, durante todo su trayecto en el aire, marche en direccion de la tangente á la trayectoria. La rabiza tiende á conseguir este efecto, porque actúando la resistencia del aire, siempre opuesta al movimiento, por debajo del centro de gravedad, trasportada á este punto, habrá que aumentar un par, cuya accion es aproximar el móvil á la tangente.

213. El viento ejerce una marcada influencia sobre el movimiento de los cohetes y fácilmente se concibe que para conseguir el efecto antes enunciado, conviene que el centro de gravedad diste bastante del de resistencia y siendo así, se hace que el sistema ceda fácilmente á cualquiera accion esterior aplicada á este último punto. Si el viento viene por la derecha, la accion del aire será oblícua sobre la direccion del cohete y hará cambiar su direccion, haciendo que la rabiza gire hácia la izquierda y la cabeza del cohete á la derecha, y como la accion de los gases marcha con ésta, su direccion cambiará tambien hácia la derecha, marchando el cohete en este sentido: claro es que el viento arrastrará algo al cohete hácia la izquierda; pero siendo mas grande la accion debida á los gases, que la debida al viento, el resultado será consecuencia de la primera: este hecho se espresa vulgarmente diciendo que *los cohetes dominan al viento*. Si el viento viene por delante, durante toda la rama ascendente, la accion del aire sobre la rabiza tiende á levantarla y baja la cabeza por lo que pierde en alcance; en la rama descendente sucede lo contrario, aumentándolo; pero siendo de mucha menor estension la segunda que la primera, el resultado último es disminucion de alcance: lo contrario sucede cuando la direccion del viento sea opuesta al caso considerado.

214. Los cohetes además del cartucho y rabiza, llevan la parte llamada armadura, que es la que constituye el agente destructor, y puede estar constituida: para aprovechar el efecto de estallar, por granadas; para esparcir aún más este efecto, aún cuando con ménos intensidad, por metralla; para producir incendios, por cajas incendiarias, necesitando además el cohete llevar una pequeña granada para evitar la aproximacion y su destruccion antes de causar su efecto: para remover tierras, tanto en la defensa como en el ataque, por cajas esplosivas llenas de pólvora; y por último para iluminar, por cajas de iluminacion: entre estos últimos cohetes los hay que

tienen la caja suspendida por una cadena á un para-caidas, sosteniéndose así mayor tiempo en el aire.

215. En el año 1840 se verificaron en Metz algunas esperiencias lanzando cohetes sobre una batería de brecha, una contrabatería, una cabeza de zapa, un caballero de trinchera y un blokaus: la batería de brecha estaba construida con todas las condiciones necesarias de solidez, revestida por una parte con salchichones, y por la otra con gaviones; los cohetes lanzados llevaban cajas esplosivas y 36 bastaron para hacerla inservible, destruyéndola por completo con 14 mas y deduciéndose, que con 50 se destruirá fácilmente una batería de brecha, sin esponer para ello si no un reducido número de hombres. Resultado análogo se obtuvo sobre la contrabatería cuya destruccion se consiguió con menor número de cohetes; las distancias á que estaban situadas del punto en que estos se disparaban eran respectivamente de 41 y 50^m. Contra la cabeza de zapa se lanzaron cohetes esplosivos ó incendiarios en pequeño número, consiguiendo su destruccion é incendiando algunos gaviones, siendo de suponer que hubiera habido necesidad por parte de los zapadores de renunciar á sus trabajos. En el caballero de trinchera se vió, que su completa destruccion exigía un gran número de cohetes; y por último se construyó una cara de un blokaus de madera de encina, de 0^m,44 de espesor, 5^m de longitud y 2,60 de alta, la que tambien fué completamente destruida, deduciéndose que tienen potencia suficiente para destruir blokaus construidos en las mejores condiciones.

Los siguientes hechos prácticos demuestran la utilidad que puede obtenerse de los cohetes, en diversas circunstancias. En 1857 en la campaña de Kabilie, por la necesidad que un dia hubo de reservar para momentos mas precisos las cargas de las piezas de montaña, se hizo uso de ellos con resultados satisfactorios, así como en algunos parajes, que inaccesibles para el ganado y de difícil instalacion para las piezas, lo eran sin embargo para hombres que llevaban los cohetes y aún los montajes para dispararlos. En 1855 lanzaron los franceses en Crimeu cohetes contra un gran parque que contenía sobre dos mil carruajes del ejército Ruso; la mitad fueron esplosivos y la otra mitad incendiarios, y apesar de la gran distancia que mediaba, se vió el enemigo en la necesidad de levantar el parque: este hecho, dice el autor de quien tomamos este estracto, está consignado por Constantinoff, que si bien es cierto, que fué el organizador de los cohetes en Rusia, y defensor por lo tanto de ellos, no lo es menos, que el parecer de los que sufrieron sus efectos, es de mas peso, que el de los enemigos que los arrojaron. Tambien en Sebastopol, se emplearon para provocar incendios, cuya estincion se hizo difícil por haberse hecho converger en el punto incendiado los disparos de vários morteros: se emplearon igualmente y con buen resultado sobre puestos avanzados; prudujeron tambien lanzados sobre masas compactas el desórden entre ellas, y se emplearon muy particularmente para ayuda en la dispersion de tropas de caballería. Dedúcese como juicio final de tales hechos: ser el cohete de guerra un artificio no indispensable, ni capaz de reemplazar á las piezas de artillería, pero sí accesorio muy útil en várias circunstancias; presentando en resúmen las ventajas, de su fácil trasporte y poder ser conducidos á donde un solo hombre pueda llegar, no exigir en campaña aparatos para su direccion, y de exigirlos, ser tan fácilmente trasportables como los cohetes; poder ser disparado bajo todos los ángulos de proyeccion; ser de efecto notable sobre masas y muy particularmente sobre caballería á lo que contribuye el ruido que hace al marchar: facilidad de improvisar una batería, esposicion de pocos hombres para su servicio, estar dotado de bastante potencia esplosiva y mucha incendiaria: hay en cambio incertidumbre en su tiro aunque esté en calma la atmósfera, influencia grande sobre él del viento, que si bien puede tomarse en consideracion cuando es regular, no siéndolo, constituye al cohete en un artificio lanzada tan solo á la casualidad; su efecto destructor es inferior al de un proyectil destinado al mismo servicio, y es necesario que los hombres dedicados á su manejo, tengan una instruccion particular en el tiro; ofrecen dificultad en su fabricacion pronta para renovar el gran consumo que de ellos cabe hacer en poco tiempo y son muy caros.

216. Sin entrar en detalles de los adelantos de este artificio manifestaremos sin embargo que Halle introdujo uno de importancia, comunicándoles un movimiento de rotacion que les hace semejantes á los proyectiles lanzados con cañones rayados; sin em-

bargo de esto, las desviaciones continuan siendo muy irregulares lo que debe depender de la poca velocidad de rotacion, que permite un movimiento oscilatorio á la cabeza del cohete. Macdonald los modificó con objeto de aumentar la velocidad inicial y la de rotacion: aumenta la primera disminuyendo el diámetro de los orificios que dán salida á los gases y para conseguir lo segundo, hace que la cabeza del cohete comunique con el tubo en que se desarrollan aquellos, haciendo en ella orificios que corresponden con los de la rabiza: se impidió así el movimiento irregular de la cabeza aumentando su velocidad y obteniéndose con un ángulo de proyeccion de 10° tanto alcance como con el cohete Halle bajo 15.° Tambien el aumento de calibre arrastra consigo dificultades de construccion, siendo una la compresion uniforme de tanta cantidad de misto: el inventor para salvar este inconveniente y construir cohetes de sitio que llama torpedos terrestres, cargados con pólvora fulmicoton ó dinamita, sustituye al único tubo hasta entónces empleado ocho iguales de mucho menor calibre; asegurando que sus cohetes perfeccionados de grueso calibre podrán reemplazar en los sitios á las baterías de brecha. En Shoeburyness se han hecho esperiencias con una nueva granada cohete cargada con 1,36^k de algodon pólvora y provista de espoleta de percusion, cuyo misto era capaz de arder en pocos segundos: disparada contra una obra de tierra penetró hasta una profundidad de 4^m,572 ántes de reventar y el embudo formado por la esplosion fué de 3^m,657 de diámetro y 1^m,524 de profundidad; lo que demuestra el gran valor que puede tener dicha pólvora en la apertura de brechas y la posibilidad de dilatar la esplosion hasta que el proyectil haya alcanzado la penetracion debida. No cabe negar despues de lo dicho, la importancia de este artificio como auxiliar de la artillería en todas cuantas circunstancias se haga indispensable ligereza y movilidad.

217. Tambien con las piezas lisas se disparaban proyectiles de iluminacion, que se dividian en dos clases, balas de iluminacion y carcasas, disparándose las primeras con los cañones y obuses cortos y con los morteros las segundas; su diferencia especial estriba solo en las dimensiones, si bien es cierto que á la carcasa se dá generalmente la forma de elipsoide y la bala es esférica: la carga que se emplea necesita ser pequeña para que no se deshaga el artificio y

esto unido á su poco peso hace que los alcances sean muy pequeños, por lo que generalmente se consigue un efecto opuesto al que se desea, es decir, iluminar el propio campo y no el del enemigo.

218. Un proyectil empleado muy particularmente contra las arboladuras de los buques consistia en dos semi-esferas unidas por una barra ó una cadena la que al salir de la pieza toma un movimiento de rotacion, que le permite estenderse; se concibe la poca certeza de este tiro, á la par que su buen efecto contra los mástiles: su alcance era solamente los $\frac{2}{3}$ del ordinario. Con este mismo objeto existia un proyectil formado de cinco barras unidas á una argolla y para cargarlo se plegaban las barras formando un haz, que al salir se estiende y constituye una estrella siendo por lo tanto mayor su esfera de accion.

219. Por último, tambien se ha hecho uso de proyectiles esféricos para lanzar cuerdas á un buque en peligro por el mal tiempo pero si la cuerda fuese unida directamente al proyectil se romperia con la fuerte sacudida que en el principio de su movimiento tiene. Para evitar esto, el proyectil lleva atornillada una barra de $0^m,80$ de larga á cuyo estremo vá unida la cuerda; para la carga la barra se coloca hacia delante, al salir se vuelve, y durante el tiempo del trayecto la cuerda toma progresivamente la velocidad del proyectil, pudiendo así resistir la tension considerable á que se la somete. En Inglaterra tenian los almacenes dotacion de esta clase de proyectiles, dispuestos para ser disparados.

220. El procedimiento anteriormente indicado, tiene varios inconvenientes, siendo el mayor que existe el peligro de que el proyectil caiga en el barco. El Capitan Delvigne propuso el siguiente sistema de porta amarra de salvacion. Consiste sencillamente en formar un proyectil de la misma cuerda arrollada en forma de canilla prolongada, é introducida en un cilindro hueco de madera. Al ser disparado por una pieza, la cuerda se desenvuelve rápidamente, y el cilindro hueco conduce su estremo al buque: aun cuando el tiro no fuese certero, constituye el cilindro una boya, que si no se halla muy distante permite que se alcance la cuerda.

Está el cilindro cerrado por uno de sus estremos con una tapa de madera, que tiene un agujero en su centro y por el otro con un cono sólido, tambien de madera, taladrado segun su eje al que van unidos cuatro gárfios de hierro, para que se claven en tierra, cuando sea disparado desde el buque: dentro del cilindro se coloca la canilla hecha con cuerda de cáñamo sin embrear, uno de cuyos estremos sale por el vértice del cono, en donde se hace un nudo, y el otro por el agujero de la base opuesta, atando este estremo á un alambre y este á su vez á otra cuerda, que puede estar igualmente arrollada dentro de otro cilindro. Tiene por objeto el alambre unir ambas cuerdas y siendo este quien queda dentro del ánima cuando está cargado el mortero no hay esposicion á que pueda quemarse la cuerda en el acto del disparo: de la segunda canilla, que queda fuera, debe desarrollarse previamente alguna parte con lo que se facilita la marcha del proyectil y no esperimenta la cuerda tan fuerte sacudida.

Las canillas de cuerda se forman, enrollándola sobre un huso tronco-cónico de madera, que colocado horizontalmente sobre dos soportes, recibe movimiento de rotacion por medio de una manivela, colocándose várias capas de cuerda, pero siempre en número impar con objeto de que los estremos de la cuerda salgan por ambas bases del cilindro, no debiendo apretarse mucho la primera capa para su mejor desarrollo.

Para cargar la pieza se coloca primeramente la pólvora en cantidad de $\frac{1}{30}$ ó $\frac{1}{40}$ del peso del proyectil; sobre ella un culote de madera con un pequeño reborde, y en seguida el porta-amarra, doblando el alambre de modo, que un estremo quede dentro del proyectil y el otro fuera de la pieza en comunicacion con la segunda canilla, de la que se desarrollan 15 ó 20^m de cuerda, asegurando su estremo á un piquete clavado en tierra: la segunda canilla no es indispensable; bastará dejar la cuerda en el suelo, pero es fácil se enrede y por otra parte no se almacena en tan buenas condiciones.

La velocidad moderada del proyectil y su poca masa, son causas por las que, aun cuando caiga en el buque no origine desgracias, y mucho ménos en personas, porque se apercibirán de su llegada.

Pruebas ejecutadas en Lorient hicieron ver, que lanzado el porta-amarra con un mortero de 13^c bajo un ángulo de 25° tuvo un alcance de 250^m. Los comisarios de regatas del Havre hicieron ejecutar la esperiencia de hacer zozobrar una barquilla, quedando á nado los marineros, y lanzando el hilo del proyectil Delvigne sobre el fondo de la embarcacion, puedieron los náufragos por su medio llegar á tierra.

CAPÍTULO 10.

Penetraciones de los proyectiles.

221. Además de los problemas enunciados y resueltos anteriormente, otro muy principal de balística, y que se presenta en la práctica, es determinar la penetracion de los proyectiles en los médios resistentes, que tales como tierras, maderas, mampostería hierros etc. son los materiales que entran en la formacion de los obstáculos elevados para interceptar su paso. Realmente no es solo el número de proyectiles que dén en un blanco lo que puede ser la medida de el trabajo útil de un sistema (pieza y carga); para apreciarlo es menester tambien comparar los efectos sobre el blanco producidos, los que dependiendo de la resistencia, que opone á ser penetrado, exigen el conocimiento prévio de la funcion que espresa esta resistencia, merced á lo cual serán posibles las aplicaciones numéricas en un caso concreto. La multitud de esperiencias encaminadas á conseguir este resultado han conducido á admitir: que, un proyectil; que se mueve en un médio cualquiera, esperimenta dos clases de resistencias: una de ellas la que proviene de tener que vencer la cohesion de las moléculas que se oponen á su paso, abrirselo á través de ellas y destruir su rozamiento, y otra que resulta del movimiento que imprime el proyectil á las moléculas del médio.

En cuanto á la primeramente enumerada, si se tiene en cuenta que cualquiera que sea la velocidad del proyectil, tiene que separar las moléculas para que permitan su paso, originada únicamente por la fuerza de cohesion del médio, puede considerarse como indipendiente de la velocidad: la segunda por el contrario, toda vez que las moléculas que cierran el paso al proyectil adquieren cierta velocidad, actuando sobre las moléculas cercanas por la fuerza viva adquirida á espensas de la del proyectil, y se separan mas prontamente á medida que esta fuerza viva sea mayor, hay que considerar la resistencia debida á la inercia proporcional al cuadrado de la velocidad del móvil.

Segun la naturaleza del médio, así predomina una ú otra de dichas dos resistencias: desde luego, si el médio que se atraviesa es muy consistente, la fuerza de cohesion tendrá la mayor influencia en el resultado y de ella dependerá esencialmente la resistencia total; al paso que si se oponen á la marcha del proyectil fluidos aeriformes, la resistencia debida á la cohesion es pequeña y la total dependerá principalmente de la velocidad, tanto más, cuanto mayor sea esta.

222. De lo espuesto resulta que la espresion de la resistencia contendrá dos partes, representando cada una otra de las resistencias señaladas; sin embargo, si la espresion que se desea de la resistencia que los médios oponen á los cuerpos que los atraviesan ha de comprender todos los casos, siendo así verdaderamente general, hay que tener en cuenta que si se trata de medios gaseosos, tan compresibles como el aire atmosférico, la densidad del fluido puesto en movimiento por el cuerpo que marcha, es en la parte anterior de este mayor que la correspondiente al fluido de igual naturaleza en equilibrio, siendo, por el contrario, menor que esta la del que vá quedando en la parte posterior: tomando en consideracion este hecho Piobert y Duchemin introdujeron en la espresion de la resistencia un término proporcional al cubo de la velocidad; hecho que apreciado anteriormente por Euler habia dado lugar á una fórmula análoga; pero sustituida por la cuarta potencia de la velocidad aquella tercera, con lo que indudablemente se evita el inconveniente de que cambie el valor de la resistencia cuando la velocidad cambie de signo.

La esperiencia ha hecho ver, que dentro de los límites de la velocidad con que queda el cuerpo una vez que empieza la penetracion en materias de gran cohesion, la resistencia es siempre proporcional á la proyeccion del móvil sobre un plano perpendicular á la direccion del movimiento, y en el caso particular de un proyectil esférico lo es por tanto al área de su círculo máximo. Y así debe ser en efecto, por que al fin del movimiento, los términos proporcionales á la velocidad son de pequeñísima influencia y el hueco que el proyectil produce difiere muy poco de ser cilíndrico, por lo que la resistencia, ejerciéndose sobre los puntos de una semi-esfera, debe ser proporcional á su área. Entre los límites de velocidades que ofrecen los proyectiles de artillería en su movimiento, la resistencia está pues representada por la fórmula

$$\rho = \pi R^2 (\alpha + \beta v^2 + \gamma v^4).$$

El coeficiente γ, segun repetidas esperiencias para la determinacion de las penetraciones en médios resistentes, tiene un valor nulo, por lo que el valor de ρ para un medio sólido está representado por

$$\rho = \pi R^2 (\alpha + \beta v^2),$$

siendo πR^2 el área del círculo máximo de la esfera, α y β dos coeficientes, que dependen de la naturaleza del medio, y que es necesario determinar esperimentalmente, y v la velocidad variable durante la penetracion.

223. Llamando P al peso del proyectil, V la velocidad remanente en el momento del choque y v el valor particular de la velocidad, despues de haber penetrado el proyectil una cantidad de, siendo el tiempo dt, se tendrá por el teorema de fuerzas vivas,

$$-\pi R^2 (\alpha + \beta v^2)\, de = \frac{P}{2g}\, d(v^2 - V^2)$$

ó bien

$$-\frac{P}{g} v\, dv = \pi R^2 (\alpha + \beta v^2) de \quad \text{y} \quad de = -\frac{P}{2\pi R^2 g \beta} \times \frac{2\beta v\, dv}{\alpha + \beta v^2},$$

despues de multiplicar y dividir por 2β, preparando así la integracion, de donde se obtiene ya

$$e = -\frac{P}{2\pi R^2 g \beta}\, l.(\alpha + \beta v^2) + C$$

y determinando la constante por la condicion de ser $v=V$, cuando $e=o$, se tiene finalmente

$$e=\frac{P}{2\pi R^2 g \epsilon}\, l.\left(\frac{\alpha+\epsilon V^2}{\alpha+\epsilon v^2}\right)=\frac{P}{2\pi R^2 g \epsilon}\times 2{,}3026 \log.\left(\frac{\alpha+\epsilon V^2}{\alpha+\epsilon v^2}\right),$$

la que permite conocer la penetracion total, con solo hacer v igual á cero y su expresion es por tanto

$$E=\frac{2\,R\,D}{3\,g\,\epsilon}\times 2{,}3026 \log.\left(1+\frac{\epsilon}{\alpha}V^2\right),$$

sustituyendo por P su valor

$$\frac{4}{3}\pi R^3 D.$$

La simple inspeccion de la fórmula manifiesta, que si se lanzan contra el mismo obstáculo diferentes proyectiles animados de la misma velocidad, las penetraciones son proporcionales al producto del calibre por la densidad del proyectil, así como á las densidades ó á los calibres si estos ó aquellas son iguales.

En los médios sólidos, conforme á lo anteriormente expuesto, el término independiente de la velocidad domina sobre el otro; y para pequeñas velocidades, se puede, comparado con este, considerar nulo el proporcional al cuadrado de la velocidad, por lo que muy fácilmente puede en este caso determinarse la penetracion total. Así, siendo esta E, se verificará

$$2\pi R^2 \alpha E=\frac{P}{g}V^2 \quad \text{ó bien} \quad E=\frac{2}{3}\ \frac{R\,D}{g\,\alpha}\times V^2,$$

fórmula, que si bien conviene á velocidades pequeñas, dá penetraciones considerables para velocidades mayores.

224. Si se desea conocer el tiempo empleado por el proyectil en recorrer todo el espacio que atraviesa al penetrar, de la ecuacion

$$-\frac{P}{g}v\,dv=\pi R^2(\alpha+\epsilon v^2)\,de$$

se deduce

$$-\frac{P}{g}\,d\,v=\pi\,R^2\,(\alpha+\varepsilon v^2)\,d\,t$$

siendo $v=\frac{d\,e}{d\,t}$, de la que

$$d\,t=-\frac{P}{\pi R^2 g}\times\frac{d\,v}{\alpha+\varepsilon v^2}=-\frac{P}{\pi R^2 g}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\;\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\times\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\,d\,v}{1+\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\,v\right)^2}$$

$$\text{y}\qquad t=-\frac{P}{\pi R^2 g\varepsilon}\times\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\;\text{arc. tang.}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\;v+C,$$

determinándose la constante por la condicion de ser $v=V$ para $t=0$, resultando así para el valor de t

$$\frac{P\times\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}{\pi R^2 g\varepsilon}\left(\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\;V-\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\;v\right)$$

y para la duracion total será $v=0$, por lo que

$$T=\frac{P\times\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}{\pi R^2 g\varepsilon}\;\text{arc. tang.}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}\;V,$$

tiempo que es siempre sumamente pequeño.

225. Los valores de los coeficientes α y ε se han hallado por esperiencias, observando las penetraciones de proyectiles iguales y animados de distinta velocidad, en el mismo medio resistente. Por ser iguales los proyectiles se verifica

$$\frac{E}{E'}=\frac{\log.\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\,V^2\right)}{\log.\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\,V'^2\right)}$$

de donde puede deducirse el valor de $\frac{\beta}{\alpha}$, el que sustituido en la fórmula que espresa el de la penetracion total, conocida ésta experimentalmente, permite deducir el de β y ya á su vez el de α.

La siguiente tabla contiene el valor de los coeficientes de la resistencia á la penetracion en diferentes medios para sustituir en las fórmulas halladas.

Naturaleza del medio resistente.	Valor de α.	Valor de $\frac{\beta}{\alpha}$
Arena con mezcla de casquijo.	435000	0,000200
Tierra con mezcla de arena y de casquijo.	600000	0,000200
Tierra gredosa con mitad de arena y mitad de casquijo.	104500	0,000035
Tierra vegetal y asentada, ó recien removida con mezcla de greda y arena..	700000	0,000060
Tierra gredosa, mitad de greda y mitad de arena. . .	461000	0,000060
Tierra gredosa.	345000	0,000080
Greda de alfarero lijeramente húmeda.	266000	0,000080
Id. humedecida.	91700	0,000080
Tierra lijera de parapeto antiguo.	304000	0,000200
Id. recien removida.	265000	0,000200
Mamposteria de buena calidad.	5520000	0,000015
Id. mediana..	4400000	0,000015
Id. ladrillo.	3160000	0,000015
Roca calcárea oolítica.	12000000	
Madera de encina..	2085000	0,00002
Id. de fresno y haya.	2085000	0,00002
Olmo.	1600000	0,00002
Alamo blanco.	1090000	0,00002
Abedul y pino.	1160000	0,00002

226. Los efectos de los proyectiles en las sustancias que chocan, no se miden exclusivamente por sus penetraciones, sino tambien por las conmociones que producen y el fraccionamiento de las fibras, que ocasionan en todos sentidos. Sumariamente vamos á exponer los resultados mas notables de las esperiencias dirigidas á conocer los efectos de los proyectiles sobre los diversos materiales empleados en las armas defensivas, siguiendo principalmente á Piobert en ésta enumeracion.

En general, los efectos de un proyectil varian con la dureza de los cuerpos contra que se dispara, aumentando la resistencia que el