# LECCIONES

DE

# MATEMÁTICAS ELEMENTALES

Tomás Mallo
López

# LECCIONES

DE

# MATEMÁTICAS ELEMENTALES

POR

**D. Tomás Mallo López**

Catedrático numerario por oposición de dicha asignatura
en el Instituto de segunda enseñanza de León.

**SEGUNDO CURSO.—GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.**

Tomás Mallo López



— LEON: —
Imp. de Herederos de Miñón.
1893.

Es propiedad

# Erratas más notables que deben corregirse

| Pág.ª | Línea. | Dice. | Debe decir. |
|---|---|---|---|
| 9 | 9 | Geometría cuyos | Geometría que estudia las figuras cuyos |
| 12 | —10 | CDE | GDE |
| 12 | —9 | la | le |
| 15 | 8 | AOH | AOF |
| 15 | —9 | AEO | AOE |
| 16 | 4 | corten | cortan |
| 17 | 12 | arbitrarias | arbitraria |
| 18 | 3 y—2 | A'C' conocida | que A'C' coincida |
| 19 | —8 | A'B'C | A'B'C' |
| 24 | —2 | sus lados | un lado |
| 26 | —2 | terminan en un | terminen en su |
| 27 | 1 y 2 | iguales tienen sus pies equidistantes | cuyos pies equidisten |
| 27 | 2 | perpendicular | perpendicular son iguales |
| 27 | 2 y 3 | Las oblícuas | La oblícua |
| 27 | 3 | desiguales el | cuyo |
| 27 | 3 | de la mayor dista | diste |
| 27 | 4 | demás | demás, es la mayor |
| 29 | 1 | DA=DA | DA=DB |
| 33 | 8 | y DGH | y DGE |
| 35 | —6 | DGH | CGH |
| 36 | 1 | Escolio | Escolio 1.º |
| 36 | 5 | Escolio | Escolio 2.º |
| 52 | 12 | CDA | CAD |
| 53 | 9 | LNP | NLP |
| 53 | —13 | en un | en su |
| 53 | —11 | sean | serán |
| 57 | 14 | por | en |
| 69 | 7 | (50) | (50 Es.º) |
| 69 | —5 | con diez | son diez |
| 69 | —4 | (90, Es.º) | (91, Es.º) |
| 70 | —5 | (50) | (50 Es.º) |
| 80 | 14 | (71) | (70, Es.º 2.º) |

| Pág.ª | Lineas. | Dice. | Debe decir. |
|---|---|---|---|
| 80 | —14 | (90, Es.º) | (91, Es.º) |
| 81 | 7 | (71) | (70, Es.º 2.º) |
| 81 | —1 | (90, Es.º) | (91, Es.º) |
| 87 | 6 | PM'N | PM'N' |
| 87 | 9 | OAB' | OA'B' |
| 87 | 10 | AB' | A'B' |
| 88 | 8 | CO' | C'O |
| 88 | —11 | (90, Es.º) | (91, Es.º) |
| 89 | —7 | (90) | (91) |
| 93 | —9 | esta | $n$ |
| 95 | 4 | EG | CG |
| 95 | —3 | y 337 | y 333 |
| 96 | 3 | AB | A y B |
| 96 | —4 | $7\alpha=\alpha_1$ | $7\alpha=a_1$ |
| 99 | 3 | un | su |
| 100 | —4 | COA | COB |
| 153 | —13 | pósito | aditivo |
| 155 | 7 | $\frac{r^2}{2}$ | $\frac{r^2}{4}$ |
| 155 | —3 | $=\frac{r^2}{4}(4+6)\,2\sqrt{5}$ | $=\frac{r^2}{4}(4+6)-2\sqrt{5}$ |
| 156 | 2 | y $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | y $\frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ |
| 160 | 11, —10 y —9 | AFD | AFO |
| 162 | 1 | *inserta* | *inscrita* |
| 171 | 4 | isoperímetros, | , |
| 172 | —4 | llamemos | llamemos C, |
| 172 | —1 | menos | menor |
| 173 | —16 | recta | línea |
| 173 | —3 | habría | habría más |
| 213 | 9 | VF | DF |
| 213 | 10 | V'F' | D'F' |
| 223 | —15 | DG | O |
| 230 | 18 | un | su |
| 240 | —13 | y ADD | y ADD' |
| 251 | —6 | y ABD | y ABV |
| 307 | —2 | para | por |
| 355 | —8 | pero | pues |

Los números de las líneas que van precedidos de una rayita, indica que debe principiarse á contar por la parte inferior de la página.

# PRÓLOGO

Las sesenta lecciones de que consta este volumen constituyen el segundo curso de MATEMÁTICAS ELEMENTALES, comprendiendo la Geometría y Trigonometría con arreglo á lo dispuesto en el Plan de segunda enseñanza vigente. Está dividido en dos partes, que con las tres del primer curso completan las cinco partes, en que entendemos deben dividirse las MATEMÁTICAS ELEMENTALES, con arreglo á los razonamientos expuestos en la primera lección del primer curso; siendo por tanto, la cuarta y quinta parte las que aquí exponemos.

La parte cuarta—**Aspecto particular de la Geometría**—contiene una lección preliminar y dos secciones. En la lección preliminar, se exponen los conocimientos indispensables para comprender la división razonada en dos secciones, y los convenios necesarios para la más fácil comprensión de las mismas, así como la división de cada una de ellas en dos libros, y cada libro en dos capítulos. La sección primera—**Planimetría**—trata de las figuras cuyos elementos se encuentran todos en un plano, está dividida en dos libros y cada libro en dos capítulos; el libro primero comprende las figuras geométricas planas, conteniendo el primer capítulo la línea recta, y el segundo la circunferencia; el libro segundo comprende la medida de las figuras geométricas planas, conteniendo el primer capítulo las longitudes y áreas y el segundo la semejanza: para terminar esta sección nos ocupamos de la determinación de la medida de la circunferencia y el círculo, así como de los máximos y mínimos de las figuras planas, concluyendo con las aplicaciones más notables de la misma. La sección segunda—**Estereometría**—trata de las figuras cuyos elementos no se encuentran todos en un plano, está dividida en dos libros y cada libro en dos capítulos; el libro primero comprende las figuras geométricas no planas, conteniendo el primer capítulo rectas y planos, y el segundo superficies no planas; el libro segundo comprende la medida de las figuras geométricas no planas, conteniendo el primer capítulo áreas y volúmenes, y el segundo la semejanza: para terminar esta sección nos ocupamos de los máximos y mínimos de las figuras no planas, concluyendo con las aplicaciones más notables de la misma.

La parte quinta—**Aspecto general de la Geometría**—contiene una lección preliminar y tres libros. En la lección preliminar, se exponen los conocimientos indispensables para comprender la división razonada en tres libros. El libro primero, trata de las líneas trigonométricas; está dividido en dos capítulos, conteniendo el primero las relaciones entre las líneas trigonométricas, y el segundo las tablas trigonométricas. El libro segundo, trata de la Trigonometría rectilínea; está dividido en dos capítulos, conteniendo el primero los triángulos rectángulos, y el segundo los triángulos oblicuángulos. El libro tercero, trata de la Trigonometría esférica; está dividido en dos capítulos, conteniendo el primero los triángulos rectángulos y rectiláteros, y el segundo los triángulos oblicuángulos: terminamos esta parte con las aplicaciones más notables de la misma.

Expuesto concisamente el plan de este segundo curso de MATEMÁTICAS ELEMENTALES, nos resta manifestar, que nuestro objeto ha sido, como ya digimos en el prólogo del primer curso, armonizar el plan científico con el didáctico; procurando así, hacer más fácil y agradable tanto el estudio como la enseñanza de las MATEMÁTICAS ELEMENTALES. Si siquiera hemos dado un paso para que esto se consiga, quedarán completamente satisfechas nuestras aspiraciones.

franqueza oficiosa y leal constituirán tanta parte [illegible] las apreciaciones más detalladas de la misma.

Empero, [illegible] ahora [illegible] que [illegible] segundo caso de [illegible] nos [illegible] tentar que ninguno objete [illegible] M. Vidal, [illegible] en el prólogo del [illegible] y con [illegible] con el [illegible] procurando [illegible] fácil y agradable [illegible] el estilo como la [illegible] de las Matemáticas [illegible]. Si [illegible] hemos dado un paso para [illegible] completamente [illegible] nuestras aspiraciones.

# INDICE,

Lecciones | Páginas

## ASPECTO PARTICULAR DE LA GEOMETRÍA



## PLANIMETRÍA

### LIBRO I.—**Figuras geométricas planas**



### LIBRO II.—**Medida de las figuras geométricas planas**



## ESTEREOMETRIA

### LIBRO I.—**Figuras geométricas no planas**

# PARTE CUARTA.

## Aspecto particular de la Geometría.

### LECCIÓN 1.ª

#### Nociones preliminares.

**1.** GEOMETRÍA, *es la parte de las matemáticas que tiene por objeto el estudio de la extensión.*

**2.** EXTENSIÓN, *es toda porción determinada del espacio.*

Para aclarar estas definiciones, es preciso tener en cuenta (8, 28, 81, 1.$^{er}$ Curso) que al tratar de determinar una porción de espacio es cuando nos encontramos con el objeto de la *Geometría;* por tanto la extensión así concebida, ha de tener los caracteres del espacio del que forma parte integrante, y además las que necesariamente han de resultar de la limitación que es esencial, en la mayor parte de los casos, para la determinación. Esto hace, que nos veamos precisados á considerar en la extensión, además de la *magnitud,* porque tenga mayor ó menor espacio, la *posición,* por la manera de estar en él, y la *figura,* por el modo de estar terminada. Por otra parte, aún cuando el espacio al ser infinito es extenso en todos los sentidos, para determinar una porción cualquiera de él, basta considerarle extenso en tres sentidos, á que se llaman *dimensiones,* que son *longitud* ó *largo, latitud* ó *ancho,* y *profundidad* ó *grueso* ó *altura* ó *espesor.* Mas es preciso observar, que en la vida real necesitamos determinar: 1.º el espacio que ocupan los cuerpos materiales que nos rodean, á lo que se llama *cuerpo geométrico,* siendo necesarias las tres dimensiones; 2.º el espacio que separa un cuerpo del que él no ocupa, ó el límite de un cuerpo, á lo que se dá el nombre de *superficie*, bastando solo dos dimensiones; 3.º el espacio que separa una superficie de otra ó el límite de una superficie, á lo que se denomina *línea*, en cuyo caso es suficiente una sola dimensión; por último necesitamos en ocasiones determinar el espacio que separa una línea de otra ó el límite de una línea, á lo que se llama *punto*, que es el límite elemental de la extensión y que por lo tanto no tenemos necesidad para su determinación de considerar ninguna dimensión. Bien se comprende por lo expuesto que ni el *cuerpo geométrico*, ni la *superficie*, ni la *línea* ni el *punto* tienen existencia real: sin embargo, en virtud de una facultad de nuestra inteligencia, que se denomina abstracción, es fácil adquirir un concepto claro de estas tres clases de extensión; pues para el *cuerpo geométrico*, nos bastará hacer abstracción de la materia de cualquier cuerpo físico, para la *superficie* será suficiente hacer abstracción de una de las dimensiones del cuerpo geométrico; para la *línea*, hacer abstracción de una de las dimensiones de la superficie; y para el *punto*, hacer abstracción de la única dimensión de la línea. Como ejemplo; de un *cuerpo geométrico*, el espacio que ocupa este libro; de una *superficie*, una hoja del mismo que aunque tiene las tres dimensiones la tercera es tan desproporcionada que sin gran esfuerzo podemos hacer abstracción de ella; y de una *línea*, un hilo fino que aun cuando tienen las tres dimensiones, las dos últimas son tan desproporcionadas con respecto á la primera longitud, que no necesitamos tampoco hacer gran esfuerzo para hacer abstracción de ellas. Que necesitamos en la vida real determinar cuerpos geométricos, superficies, líneas y hasta puntos, es tan evidente que un ejemplo sencillo nos lo pondrá de manifiesto: así, si quisiésemos averiguar la cantidad de trigo necesaria para llenar una panera, tendríamos necesidad de considerar, el largo, el ancho, y la altura de la panera; mas si solo necesitáramos saber la cantidad de hule necesaria para cubrir el suelo de la panera, para nada necesitaríamos conocer su altura; aún más; si deseáramos saber la distancia de la panera al mercado del grano, cualquiera que fuera el camino que hubiéramos de seguir, para nada necesitaríamos ni el ancho ni menos la altura; por último, si deseáramos saber en qué punto de la panera sería más conveniente colocar un objeto, claro está que no necesitaríamos para nada ninguna de las dimensiones de la panera. Esto entendido, nos vemos precisados á estudiar tres clases de extensión, que son, el *cuerpo geométrico*, la *superficie* y la *línea*, una vez que, el *punto, es el límite elemental de la extensión.*

**3.** CUERPO GEOMÉTRICO, *es el espacio que ocupa un cuerpo físico.*

**4.** SUPERFICIE, *es el límite de un cuerpo.*

**5.** LÍNEA, *es el límite de una superficie.*

**6.** Todas las extensiones—cuerpos geométricos, superficies y líneas,—son *penetrables*, *movibles* y *limitadas;* y por tanto, solo pueden diferenciarse en su *posición*, en su *figura* y en su *magnitud.*

**7.** POSICIÓN DE UNA EXTENSIÓN, *es su manera de estar colocada en el espacio.*

**8.** FIGURA DE UNA EXTENSIÓN, *es su modo de ser por su limitación.*

**9.** MAGNITUD DE UNA EXTENSIÓN, *es el mayor ó menor espacio que contenga.*

**10.** Como el punto es el límite elemental de la extensión, y no se concibe ninguna parte del espacio sin ser movible, de aquí el que si consideramos un punto moviéndose en el espacio, dos posiciones consecutivas limitarán un elemento lineal y la continuación de elementos lineales, dará lugar á una línea: una línea moviéndose en el espacio, dos posiciones consecutivas limitarán un elemento superficial y la continuación de elementos superficiales dará lugar á una superficie: una superficie moviéndose en el espacio, dos posiciones consecutivas limitarán un elemento corpóreo, y la contiuuación de elementos corpóreos dará lugar á un cuerpo. De modo que; una línea se compone de elementos lineales, pudiéndose considerar en ella un número indefinido de puntos; una superficie se compone de elementos superficiales, pudiéndose considerar en ella un número indefinido de líneas; y un cuerpo se compone de elementos corpóreos, pudiéndose considerar en él un número indefinido de superficies.

**11.** Figuras geométricas, *son las construcciones gráficas en que se representa un sistema de puntos, de líneas ó de superficies.* Se dividen en *lineales, superficiales* y *sólidas ó corpóreas,* según que sus elementos estén en una línea, en una superficie, ó en el espacio.

Las figuras geométricas como extensiones que son, solo pueden diferenciarse en su *posición, figura* y *magnitud* (6).

**12.** Figuras geométricas iguales, *son las que tienen la misma posición, figura y magnitud.* El concepto de igualdad geométrica responde al de identidad dado (42, 433, 1.er Curso). Las figuras iguales siempre se las puede hacer coincidir en toda su extensión, por superposición, es decir, llevando convenientemente una sobre otra, lo que siempre podemos hacer en virtud de la movilidad (6).

**13.** La superposición y las construcciones gráficas son medios propios y exclusivos de la Geometría. La superposición se divide en *directa* é *inversa;* es directa cuando—suponiendo que toda figura geométrica tiene dos caras, el anverso y el reverso, ó bien el derecho y el revés—coinciden las caras del distinto nombre mediante un movimiento de traslación ó rotación ó los dos; es inversa cuando coinciden las caras del mismo nombre y entonces se necesita además de los movimientos de traslación y rotación, otro de rebatimiento ó de revolución. Las construcciones gráficas son tan variadas, que cada proposición tiene su construcción adecuada, como tendremos ocasión de ver.

**14.** Figuras geométricas simétricas, *son las que tienen distinta posición, é igual figura* y *magnitud.* Estas figuras, si mediante la movilidad se las dá la misma posición, se las puede hacer coincidir, en el caso contrario no: de aquí, el que se consideren dos clases de figuras geométricas simétricas; las de *posición,* que se las puede hacer coincidir, y las de *figura,* que nunca pueden coincidir.

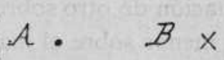
**15.** Figuras geométricas equivalentes, *son las que tienen distinta figura, é igual posición y magnitud.* El concepto de equivalencia geométrica responde al de igualdad dado (42, 433, 1.er Curso.)

**16.** FIGURAS GEOMÉTRICAS SEMEJANTES, *son las que tienen distinta magnitud, é igual posición y figura.*

**17.** Todos los puntos son iguales; una vez que, siendo el punto el límite elemental de la extensión, todos tienen la misma figura y magnitud, pudiéndoseles dar la misma posición, en virtud de la movilidad.

Se representan gráficamente los puntos por los puntos de la escritura ó por la intersección de dos rayitas que se corten como en la figura 1.ª y se les expresa por letras que se ponen á su lado. Así diremos el punto *A*, el punto *B*.

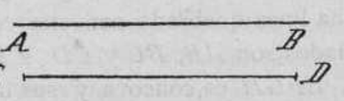
Fig. 1.ª




**18.** Existen indefinidas líneas; una vez que (10), son también indefinidas las leyes á que puede obedecer el movimiento del punto generador: unas se distinguen de otras por la figura; puesto que, se las puede dar la misma posición, y respecto de la magnitud, atendiendo á su generación es siempre indefinida. De aquí el que se las divida en; *rectas*, *quebradas*, *curvas* y *mixtas*.

**19.** *Línea recta, es la menor distancia entre dos puntos.* Se representa por el trazo contínuo que deja en el papel el lápiz, la pluma ó el tira-líneas, cuando se les hace resbalar por el borde de una regla bien construida; y se expresa poniendo dos letras encima ó debajo de dos cualesquiera de sus puntos, como la recta *AB* de la figura 2.ª

Fig. 2.ª




Las rectas marcan siempre una *dirección* única, de modo que una recta tiene todos sus elementos en una misma dirección; por tanto una recta no se diferencia de otra mas que en la posición, teniendo por lo mismo todas la misma figura y magnitud, y cuando se las dá, en virtud de la movilidad, la misma posición, son iguales.

*Segmento de recta*, es una porción limitada de recta. Se representa marcando los puntos extremos, y se expresa poniendo en cada uno una letra, como el segmento de recta *CD* de la figura 2.ª Los segmentos de rectas pueden prolongarse en uno y otro sentido; y también se les llama rectas. Se expresa la magnitud de una recta poniendo una letra en uno de sus extremos.

*Prolongar una recta*, es aumentar su magnitud sin variar su dirección.

Los segmentos de recta, se suman llevando uno á continuación de otro sobre una recta indefinida; y se restan llevando el menor sobre el mayor.

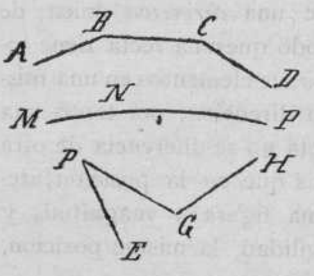
De la definición de línea recta se deducen los siguientes

COROLARIOS. 1.º *Dos puntos determinan la posición de una recta, es decir, por dos puntos puede pasar una recta pero nada más que una;* 2.º *Dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su extensión;* 3.º *Dos rectas no pueden tener más que un punto común.* Este punto se llama punto de *intersección*.

ESCOLIO.—En Geometría siempre que empleamos la palabra distancia sin ningún calificativo, se sobreentiende mínima distancia, de modo que: *la distancia entre dos puntos es la recta que las une.*

**20.** LÍNEA QUEBRADA, *es la que se compone de rectas consecutivas que no forman una sola recta.* Las rectas que forman la línea quebrada se llaman sus *lados*. La línea quebrada se llama *convexa* cuando prolongando uno de los lados no corta á los demás; en el caso contrario se llama *cóncava*. La línea *ABCD* de la figura 3.ª es una línea quebrada convexa cuyos lados son *AB*, *BC* y *CD*. Y la línea *EFGH* es cóncova y sus lados son *EF*, *FG* y *GH*.

Fig. 3ª




**21.** LÍNEA CURVA, *es la que ni es recta ni se compone de líneas rectas*, como la *MNP* de la fig. 3.ª

*Arco*, es una porción limitada de línea curva.

Las líneas curvas se llaman *regulares*, si su generación obedece á una ley, en caso contrario se llaman *irregulares*.

**22.** LÍNEA MIXTA *es la que se compone de rectas y curvas.*

Como la *ABCDEFGH* de la figura 4.ª

Fig. 4.ª


ESCOLIO.—En esencia no hay más que dos clases de líneas, que son, las *rectas* y las *curvas*, pues las quebradas y mixtas como hemos visto, son combinaciones de rectas y curvas.

**23.** Existen indefinidas superficies; una vez que son también indefinidas (10, 18), tanto las generatrices como las leyes á que puede obedecer su movimiento: unas se distinguen de otras por la figura; puesto que se las puede dar la misma posición, en virtud de la movilidad, y respecto de la magnitud, atendiendo á su generación, es siempre ilimitada. De aquí que se las divida en *regladas*, *curvas* y de *revolución*.

**24.** SUPERFICIES REGLADAS, son las que la generatriz es una recta: *curvas*, la que la generatriz es una curva: y *de revolución*, las que se engendran por el movimiento de rotación de una línea al rededor de una recta llamada *eje*.

Las superficies regladas se dividen en *planas*, *desarrollables* y *alabeadas*.

**25.** SUPERFICIE PLANA Ó PLANO, *es la reglada con la cual coincide una recta aplicada á dos cualesquiera de sus puntos.*

**26.** SUPERFICIE DESARROLLABLE, *es la reglada que dos posiciones consecutivas de la generatriz están siempre en un plano.*

**27.** SUPERFICIE ALABEADA, *es la reglada que dos posiciones consecutivas de la generatriz no están en un plano.*

**28.** Se llaman; *superficies quebradas*, la continuación de planos que no forman un solo plano; y *mixtas*, las que se componen de planas y no planas.

ESCOLIO. En esencia no hay más que dos clases de superficies, las *planas*, y las *no planas* que son todas las demás de que hemos hablado.

La representación de las superficies se hacen por las líneas que las limiten, ó por las generatrices y alguna otra línea; como ya veremos.

**29.** La Geometría elemental no estudia más líneas, que la *recta* y la *circunferencia*, ni más superficies que las limitadas ó engendradas por esas líneas; ni más cuerpos que los limitados ó engendrados por esas superficies. Mas estas líneas, superficies y cuerpos que estudia la Geometría elemental al hacerlo, tiene que considerar su posición, figura y magnitud: las proposiciones que se refieren á la posición, para estudiarlas no necesita otro auxilio que el de las construcciones gráficas; pero para las que se refieren á la figura y magnitud, necesita además determinar esta última, es decir, medirla: de suerte que el principal fin de la Geometría es la medida de las extensiones; y que en estas estudiaremos primero la *igualdad*, después la *simetría*, después la *equivalencia* y por último la *semejanza*.

LONGITUD, *es la medida de una línea.*

AREA, *es la medida de una superficie.*

VOLUMEN, *es la medida de un cuerpo.*

**30.** Puesto que el objeto de la Geometría es la extensión, y esta se divide en lineal, superficial y corpórea, el aspecto particular de la Geometría debiera dividirse en tres partes; una que se ocupara de las líneas, otra de las superficies y otra de los cuerpos. Mas como las líneas solo pueden estudiarse en las superficies en que se encuentren, y los cuerpos no podemos estudiarlos sin estudiar las superficies que les limita; de aquí el que la división de las superficies sirva de fundamento á la división de la Geometría; y como hemos visto (28), que en esencia no hay más que dos clases de superficies, *planas* y *no planas*, el aspecto particular de la Geometría se dividirá en dos partes; la primera se llamará, *Geometría plana* ó bien, atendiendo á su fin, *Planimetría*, y la segunda *Geometría no plana* ó *Estereometría:* ocupándonos primero, en cada una de ellas, de las figuras y después de su medida. Por tanto, el cuadro sintético de la división del aspecto particular es el siguiente:

## Aspecto particular de la Geometría.

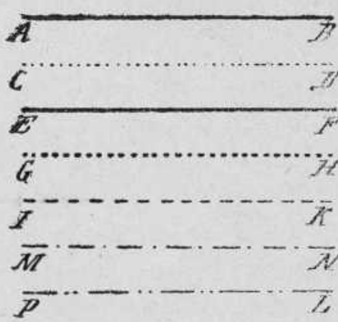
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Planimetría | Figuras geométricas planas. Medida de las figuras geométricas planas. | Aplicaciones | Estereometría | Figuras geométricas no planas. Medida de las figuras geométricas no planas. | Aplicaciones |

**31.** PLANIMETRÍA, *es la parte de la Geometría que estudia las figuras cuyos elementos se encuentran todos en un plano.*

**32.** ESTEREOMETRÍA, *es la parte de la Geometría* ~~*cuyos*~~ que estudia las figuras cuyos *elementos no se encuentran todos en un plano.*

**33.** Las construcciones gráficas, que hemos visto, es uno de los medios propios de la Geometría (13), se hacen siempre sobre un plano, esto hace que para evitar confusiones y poder conocer á primera vista los datos y resultados de cualquiera construcción, así como también las líneas que haya sido preciso trazar para llegar al fin que nos propongamos, se haya convenido en representar; por un trazo continuo y delgado los datos cuando se ven, lo que sucede siempre en Planimetría, como *AB* figura 5.ª; por puntos finos los datos cuando no se ven, lo que sucede con frecuencia en Estereometría, como *CD;* por un trazo contínuo y grueso los resultados que se ven, como *EF*; por puntos gruesos los resultados que no se ven, como *GH*; y por trazos ó trazo y punto ó trazo y dos puntos las líneas auxiliares de construcción, como *IK*, *MN*, *PL*.

Fig. 5.ª




Por otra parte, es preciso tener en cuenta que aquí las letras que empleamos para expresar las construcciones gráficas no representan ninguna cantidad, como en Aritmética y Álgebra; pues esta se halla ya representada por la misma construcción, así que las letras no sirven más que para dar nombre á toda ó parte de la construcción que necesitemos emplear, con el fin de no confundirla con ninguna otra ó con las restantes partes de la misma: esto no impide que nos valgamos ya de las cifras que hemos empleado en el aspecto particular de la Aritmética, ya de las letras que hemos empleado en el aspecto general de la misma y en Álgebra, pero entónces representarán tanto las cifras como las letras las medidas de las extensiones representadas en las construcciones gráficas. De aquí el que haya proposiciones para cuya demostración no se necesiten más que construcciones gráficas, y otras en que se necesite el empleo del cálculo Aritmético ó Algebráico; á las primeras se las denomina *gráficas*, á las segundas *numéricas*, una vez que las cifras como las letras han de representar la medida de la extensión, y la medida una vez efectuada es siempre un número (36, 1.$^{er}$ Curso).

# SECCIÓN PRIMERA.

## PLANIMETRÍA.

# LIBRO PRIMERO.

## Figuras geométricas planas.

### CAPÍTULO PRIMERO.

### *Línea recta.*

#### LECCIÓN 2.ª

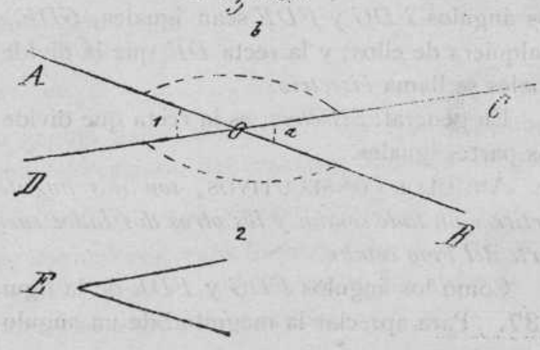
#### Ángulos en general.

**34.** Las rectas no pueden tener más que dos posiciones en un plano: que se corten ó que no se corten, en el primer caso sabemos que no pueden cortarse más que un punto (19. C.º 3.º)

RECTAS CONCURRENTES, *son las que tienen un punto común.* Estas rectas se llaman *convergentes*, cuando se las considera acercándose al punto de intersección, y *divergentes*, si se las considera alejándose de ese punto. Dos rectas concurrentes dividen al plano en que se encuentren en cuatro partes, que se llaman ángulos rectilíneos.

**35.** ÁNGULO RECTILÍNEO, *es toda porción de plano indefinido, comprendido entre dos rectas que terminan en su comun intersección.* Las rectas se llaman *lados*, y el punto de intersección *vértice*.

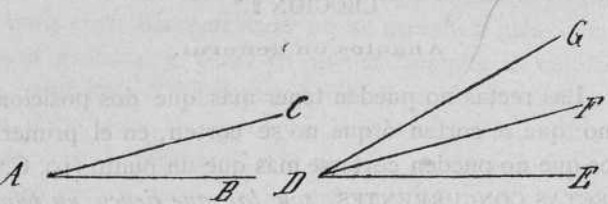
Fig. 6.ª




Un ángulo se expresa con tres letras, una de cada lado y la del vértice en medio; cuando está solo se puede expresar por la letra del vértice; también se puede expresar un ángulo por un número ó por una letra que se colocan en un arco trazado entre los lados del ángulo: así, en la figura 6.ª tenemos los ángulos *AOD* ó *1*, *DOB* ó *2*, *BOC* ó *a*, *COA* ó *b*, y ángulo *E*.

**36.** ÁNGULOS IGUALES, *son los que llevando el uno sobre el otro de modo que coincidan los vértices y uno de los lados, coincidan los otros dos lados, siempre que caigan hacia la misma parte*

Fig. 7ª




*del lado comun.* Así, el ángulo *BAC* figura 7.ª será igual al *FDG* si llevando el *BAC* sobre *FDG* de modo que coincidan los vértices *A* y *D*, y el lado *AB* con el *DF*, coincidan los lados *AC* y *DG* por caer los dos por encima de *DF*; pero si *AC* tomase la posición de *DE* por caer hácia distinta parte de *DF* que *DG*, se formaría el ángulo *GDE*, que sería la suma de los dos ángulos *FDG* y *FDE*; siendo por tanto cualquiera de ellos la diferencia entre el ángulo *GDE* y el otro: en el caso especial de que los dos ángulos *FDG* y *FDE* sean iguales, *GDE* será el duplo de cualquiera de ellos; y la recta *DF* que lo divide en dos ángulos iguales se llama *bisectriz*.

En general; *bisectriz*, es la recta que divide á una figura en dos partes iguales.

ÁNGULOS CONSECUTIVOS, *son dos ángulos que tienen el vértice y un lado común y los otros dos lados caen hacia distinta parte del lado común.*

Como los ángulos *FDG* y *FDE* de la figura 7.ª

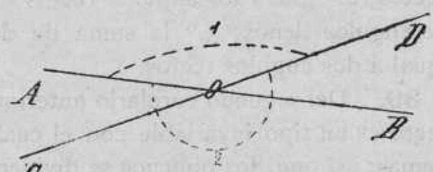
**37.** Para apreciar la magnitud de un ángulo, se concibe engendrado por el movimiento de una recta alrededor de un punto de otra con la cual ha coincidido antes de empezar el movimiento, como la pierna de un compás al abrirlo que gira alrededor de su eje. De modo que el ángulo *A* de la figura 7.ª se ha engendrado por el movimiento de su lado *AC*, que estando superpuesto con el *AB*, giró alrededor del vértice *A*, hasta tomar la posición que tiene. Bien se comprende que á medida que se va verificando la rotación del lado móvil forma con el lado fijo un ángulo que va aumentando de una manera contínua. Por tanto, la magnitud de un ángulo, no depende de la longitud de sus lados sinó de la mayor ó menor superficie plana indefinida que contenga; y ella determina la posición relativa de sus lados á que se denomina *inclinación* ó *desviación* de los mismos; dando por último el aumento continuo de magnitud, lugar á la clasificación de los ángulos en *llanos*, *convexos* y *cóncavos*.

**38.** ÁNGULO LLANO, *es el que sus lados son prolongaciones opuestas de una recta, con relación á un punto de ella considerado como vértice.*

Como el ángulo *AOB* de la figura 8.ª Dos ángulos llanos siempre son superponibles y por tanto iguales.

*Ángulo convexo*, es el menor que un ángulo llano; como *AOD*, y *ángulo cóncavo* es el

Fig. 8.ª




mayor que un ángulo llano; como $\widehat{AOD}$ en que ponemos un arco encima para diferenciarle del convexo; también se podría llamar al convexo *AOD*, 1 y al cóncavo $\widehat{AOD}$, 2.

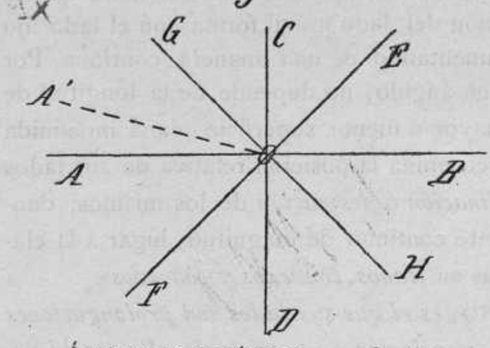
Los cuatro ángulos convexos formados por dos rectas que se cortan *AB* y *CD* figura 8.ª, considerados dos á dos se dividen en *adyacentes* y *opuestos por el vértice.*

ÁNGULOS ADYACENTES, *son dos ángulos consecutivos con-*

*vexos, cuyos lados no comunes están en línea recta.* Como *AOD* y *DOB*, *DOB* y *BOC*, *BOC* y *COA*, *COA* y *AOD*.

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE, *son dos ángulos convexos en que, con respecto al vértice, los lados del uno son prolongaciones opuestas de los del otro.* Como *AOD* y *BOC*, *AOC* y *BOD*. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales porque sumados con un mismo ángulo adyacente nos dan un llano.

Fig. 9ª




ÁNGULOS RECTOS *son los ángulos adyacentes iguales.* Como *AOC* y *COB*, fig. 9.ª

ÁNGULOS OBLÍCUOS, *son los ángulos adyacentes desiguales.* Como *AOE* y *EOB*.

De estas dos definiciones se deducen los siguientes

COROLARIOS: 1.º Un ángulo llano es igual á dos ángulos rectos; 2.º todos los ángulos rectos son iguales, como mitades de ángulos llenos; 3.º la suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.

**39.** Del segundo corolario anterior se deduce que el ángulo recto es un tipo invariable con el cual se pueden comparar los demás: así que, los oblícuos se dividen en *obtusos* y *agudos*.

ÁNGULO OBTUSO, *es el mayor que un recto.* Como *AOE* figura 9.ª

ÁNGULO AGUDO, *es el menor que un recto.* Como *EOB*.

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS, *son dos ángulos cuya suma literal es igual á un ángulo recto.* Como *BOE* y *COE*, *GOB* y $(-GOC)$, $\widehat{GOB}$ y $(-GOD)$.

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS, *son dos ángulos cuya suma literal es igual* á *dos ángulos rectos.* Como *AOE* y *BOE*, $\widehat{GOB}$ y $(-BOH)$.

COROLARIOS: 1.° Los ángulos adyacentes son suplementarios; 2.° cuando uno de los ángulos, de los cuatro que forman dos rectas concurrentes, es recto ú oblícuo, serán rectos ú oblícuos los tres restantes; pues si las rectas fuesen las *AB* y *CD* y el ángulo *AOC* es recto lo serán sus adyacentes *BOC* y *AOD*, así como también su opuesto por el vértice *BOD*, y si fuesen las rectas *AB* y *EF* y el ángulo *AOE* obtuso, lo será también su opuesto por el vértice *BOF* y los adyacentes *BOE* y *AO*~~*E*~~*F* serán agudos; 3.° los ángulos que tienen el mismo complemento ó suplemento son iguales.

**40.** Dos ángulos convexos consecutivos, cuando son suplementarios son adyacentes.

En efecto, fig. 9.ª sean los ángulos *AOE* y *BOE*, que por hipótesis son suplementarios, si *OA* no es prolongación de *OB* lo sería otra recta tal como la *OA'*, y entonces tendríamos que los ángulos *AOE* y *A'OE* serían iguales por tener el mismo suplemento *BOE*, lo que es absurdo; luego la recta *OA* es prolongación de la *OB*.

**41.** La suma de todos los ángulos consecutivos formados á un lado de una recta valen dos rectos. En efecto, figura 9.ª, sean los ángulos consecutivos *AOA'*, *A'OG*, *GOC*, *COE* y *EOB*; desde luego los dos primeros componen el ángulo *AOG*, este y el tercero el ángulo *AOC*, este y el cuarto el ángulo ~~*AEO*~~ *AOE* que como es adyacente del último valen dos rectos.

COROLARIO.—La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto valen cuatro rectos; una vez que los que están á un lado de *AB* valen dos rectos y los que están al otro otros dos, luego la suma de todos valdrá cuatro.

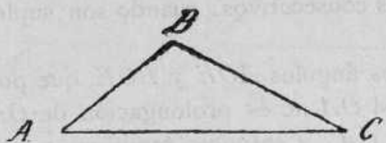
ESCOLIO.—Es conveniente observar que los ángulos nulos y de cuatro rectos tienen la misma significación, así como los que valgan un número impar de veces dos rectos.

## LECCIÓN 3.ª

### Triángulos en general.

**42.** TRIÁNGULO, *es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan dos á dos.*

*Fig. 10*



*Vértices*, son los puntos en que se corten las rectas; y *lados*, son los segmentos de rectas comprendidos entre los vértices; así, la figura 10 es un triángulo cuyos vértices son *A*, *B* y *C;* y los lados *AB*, *BC* y *CA;* los ángulos formados por cada dos lados, son ángulos del triángulo cuyos vértices son los del triángulo. De modo que los elementos de un triángulo son; tres lados y tres ángulos, opuestos respectivamente.

BASE DE UN TRIÁNGULO, *es el lado sobre el cual se le considera insistiendo.* De modo que puede ser un lado cualquiera.

*Ángulos adyacentes á un lado*, son los que tienen ese lado común.

**43.** Los triángulos se clasifican atendiendo á sus lados y á sus ángulos; atendiendo á sus lados se dividen en, *equiláteros, isósceles* y *escalenos;* y atendiendo á los ángulos en, *rectángulos*, *obtusángulos* y *acutángulos.* Triángulos; *equiláteros*, son los que tienen los tres lados iguales; *isósceles*, son los que tienen dos lados iguales; y *escalenos*, son los que tienen los tres lados desiguales. En el triángulo isósceles, el lado desigual se toma siempre como base. Triángulos; *rectángulos*, son los que tienen un ángulo recto y los otros dos agudos; *obtusángulos*, son los que tienen un ángulo obtuso y los otros dos agudos; y *acutángulos*, son los que tienen los tres ángulos agudos. En el triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos*, y el opuesto *hipotenusa*.

**44.** Un lado cualquiera de un triángulo, es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

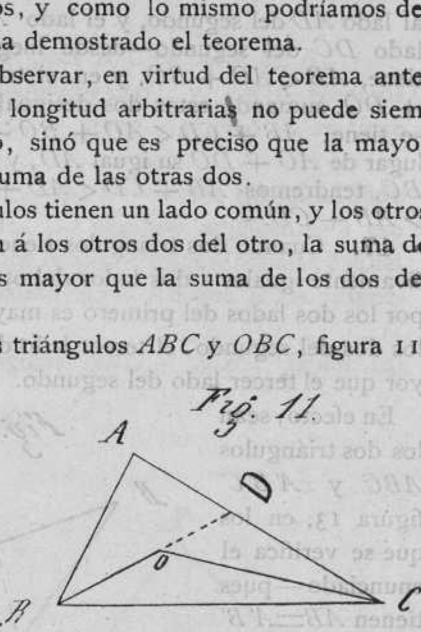
En efecto, en el triángulo $ABC$ (figura 10) se tiene que cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos, en virtud de la definición de línea recta (19), y respecto de la segunda parte tendremos, que si $AC$ es el mayor de lados, $AC < AB + BC$, y restando de los dos miembros $AB$, $AC - AB < BC$; es decir, que el menor de los lados es mayor que la diferencia de los otros dos, y como lo mismo podríamos demostrar de los demás, queda demostrado el teorema.

ESCOLIO.—Hay que observar, en virtud del teorema anterior, que con tres rectas de longitud arbitrarias no puede siempre construirse un triángulo, sinó que es preciso que la mayor de ellas sea menor que la suma de las otras dos.

**45.** Cuando dos triángulos tienen un lado común, y los otros dos lados del uno envuelven á los otros dos del otro, la suma de los dos lados del primero es mayor que la suma de los dos del segundo.

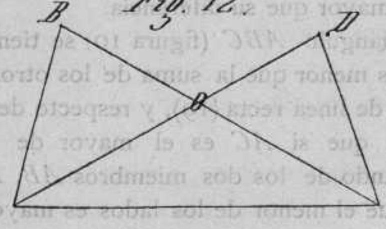
En efecto, sean los dos triángulos $ABC$ y $OBC$, figura 11, en los que se verifica el enunciado, — pues tienen $BC$ común, $AB$ y $AC$ envuelven á $BO$ y $OC$, — si prolongamos $BO$ hasta que encuentre $AC$, tendremos; $OC < OD + DC$, $BO + OD < AB + AD$, y sumando estas desigualdades, $OC + BO + OD < OD + DC + AB + AD$, de donde restando $OD$ de los dos miembros y poniendo en lugar de $AD + DC$ su igual $AC$, $OC + BO < AB + AC$, ó bien $AB + AC > BO + OC$.

Fig. 11.




**46.** Cuando dos triángulos tienen un lado común, y los otros dos lados del primero corta el uno y el otro no á los otros dos del segundo, la suma de los lados que se cortan es mayor que la suma de los que no se cortan.

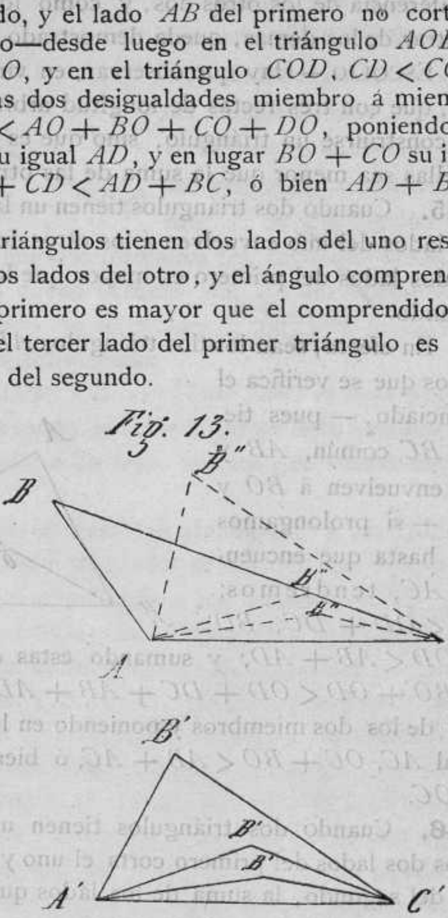
Fig. 12.




En efecto, sean los dos triángulos los $ABC$ y $ADC$, figura 12, en los que se verifica el enunciado— —pues tienen el lado $AC$ común, el lado $BC$ del primero corta al lado $AD$ del segundo, y el lado $AB$ del primero no corta al lado $DC$ del segundo—desde luego en el triángulo $AOB$ se tiene, $AB < AO + BO$, y en el triángulo $COD$, $CD < CO + + DO$, sumando estas dos desigualdades miembro á miembro se tiene, $AB + CD < AO + BO + CO + DO$, poniendo en lugar de $AO + DO$ su igual $AD$, y en lugar $BO + CO$ su igual $BC$, tendremos $AB + CD < AD + BC$, ó bien $AD + BC > > AB + CD$.

**47.** Cuando dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales á dos lados del otro, y el ángulo comprendido por los dos lados del primero es mayor que el comprendido por los dos del segundo, el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo.

Fig. 13.




En efecto, sean los dos triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ figura 13, en los que se verifica el enunciado—pues tienen $AB = A'B'$ $AC = A'C'$ y el ángulo $BAC$ mayor que el $B'A'C'$ —llevemos el triángulo $A'B'C'$ sobre el $ABC$ de modo que $A'C'$ ~~con~~ coincida con su igual $AC$, y que el lado

$A'B'$ caiga en el interior del ángulo $BAC$: pueden presentarse tres casos según que el punto $B''$, posición que toma el punto $B'$ después de la superposición, caiga fuera del triángulo $ABC$, en el lado $BC$, ó en el interior del triángulo $ABC$. En todos los casos después de la superposición bastará demostrar que $BC$ es mayor que $B''C = B'C'$.

En el primer caso en los triángulos $ABC$ y $AB''C$ tenemos (46), $BC + AB'' > AB + B''C$ y como $AB'' = AB$, se tiene $BC > B''C$.

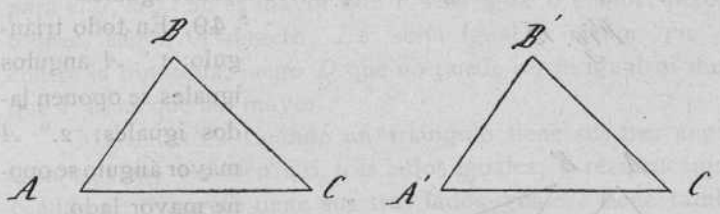
En el segundo es evidente, pues $B''C$ es parte de $BC$.

En el tercer caso en los triángulos $ABC$ y $AB''C$. tenemos (45) $AB + BC > AB'' + B''C$, y como $AB = AB''$, se tiene $BC > B''C$.

**48.** Dos triángulos son iguales: 1.° cuando tienen un lado igual y respectivamente iguales los ángulos adyacentes á ese lado; 2.° cuando tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido; 3.° cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

En efecto, sean los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ figura 14:

Fig. 14.



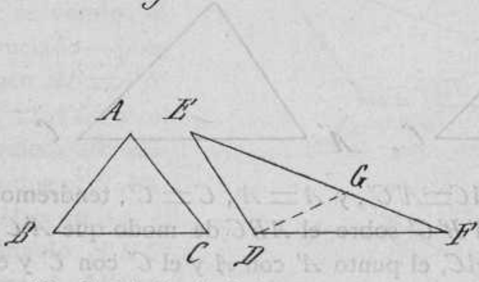

1.° Si se verifica que $AC = A'C'$, y $A = A'$, $C = C'$, tendremos llevando el triángulo $A'B'C'$ sobre el $ABC$ de modo que $A'C'$ coincida con su igual $AC$, el punto $A'$ con $A$ y el $C'$ con $C$ y el $B'$ que caiga hacia la misma parte de la $AC$ que está el punto $B$, los lados $A'B'$ y $C'B'$ coincidirán respectivamente con $AB$ y $CB$ por la igualdad de los ángulos $A$ y $A'$, $C$ y $C'$, entonces el punto $B'$ que tiene que estar en las dos rectas $AB$ y $CB$, coincidirá con su intersección única $B$; por tanto habiendo coincidido exactamente los dos triángulos, son iguales.

2.º Si se verifica que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, y $A = A'$, tendremos llevando el triángulo $A'B'C'$ sobre el $ABC$ de modo que coincidan los ángulos iguales $A$ y $A'$, el punto $B'$ coincidirá con $B$ por ser iguales los lados $AB$ y $A'B'$ y el punto $C'$, coincidirá con $C$ por ser iguales los lados $AC$ y $A'C'$; por tanto habiendo coincidido exactamente las dos triángulos, son iguales.

3.º Si se verifica que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$, tendremos que el ángulo $A$ del primer triángulo tiene que ser igual al $A'$ del segundo, porque si fuesen desiguales, tendrían que serlo también los lados $BC$ y $B'C'$ opuestos á $A$ y $A'$ (47) contra la hipótesis; por tanto los triángulos son iguales según el caso anterior.

ESCOLIOS. 1.º Los triángulos iguales tienen sus seis elementos respectivamente iguales, pero según los casos de igualdad basta que tengan tres de los seis iguales para que se verifique la igualdad de los restantes, con tal de que entre los elementos iguales haya por lo menos un lado. 2.º Los lados iguales de los triángulos iguales se oponen á ángulos iguales y vice-versa: se llaman lados *homólogos* los opuestos á ángulos iguales y ángulos homólogos los opuestos á lados iguales.

Fig. 15.




**49.** En todo triángulo: 1.º A ángulos iguales se oponen lados iguales; 2.º A mayor ángulo se opone mayor lado.

En efecto, figura 15: 1.º Sea el triángulo $ABC$, en que se verifica la hipótesis de la 1.ª parte del enunciado, es decir que los ángulos $B$ y $C$ son iguales, vamos á demostrar que sus lados opuestos $AC$ y $AB$ lo son también; para ello como el triángulo $ABC$ coincidirá consigo mismo, haciéndole girar de modo que $B$ coincida con $C$, $C$ con $B$, $BA$ con $CA$, $CA$ con $BA$, puesto que entonces $A$ coincidirá necesariamente con $A$, tendremos que los lados $AB$ y $AC$ cuyos extremos han coincidido son iguales: 2.° Sea el triangulo $DEF$, en que se verifica que $D$, es mayor que $F$, vamos á demostrar que $EF$ es mayor que $DE$; para ello tracemos por el punto $D$ una recta tal como la $DG$ que forme con la $DF$ un ángulo $GDF$ igual al $F$, en ese caso en el triángulo $DFG$ los lados $FG$ y $DG$ que se oponen á ángulos iguales serán iguales; ahora bien, en el triángulo $DGE$ se tiene, $ED<EG+$ $+DG$, ó bien $ED<EG+FG$, y como $EG+FG=EF$, $ED<EF$ ó lo que es lo mismo $EF>DE$.

**50.** Recíproco. —En todo triángulo: 1.° A lados iguales se oponen ángulos iguales; 2.° A mayor lado se opone mayor ángulo.

En efecto, figura 15: 1.° Sea el triángulo $ABC$ en que se verifica que los lados $AB$ y $AC$ son iguales, vamos á demostrar que los ángulos opuestos $C$ y $B$ también lo son; para ello, si $C$ no es igual á $B$ será mayor ó menor pero entonces, según el directo, $AB$ sería mayor ó menor que $AC$ contra la hipótesis, luego $C$ que no puede ser mayor ni menor que $B$ tendrá que ser igual; 2.° Sea el triángulo $DEF$ en que se verifica que $EF$ es mayor que $DE$, vamos á demostrar que $D$ es mayor que $F$; para ello, si $D$ no es mayor que F será igual ó menor; pero entonces, según el directo, $EF$ sería igual ó menor que $DE$, contra la hipótesis, luego $D$ que no puede ser ni igual ni menor que F tiene que ser mayor.

Corolario.—Cuando un triángulo tiene sus tres ángulos iguales, tiene también sus tres lados iguales; y recíprocamente cuando un triángulo tiene sus tres lados iguales, tiene también sus tres ángulos iguales: ó más brevemente, todo triángulo equiángulo es equilátero y recíprocamente.

Escolio.—Ya sabemos, (242. Es.° 1.er Curso) lo que son teoremas directos recíprocos y contrarios, así como también que cuando un teorema directo y su recíproco son ciertos, lo es también su contrario, y cuando el directo y el contrario son ciertos lo es también el recíproco. Pero ahora nos conviene hacer observar que el procedimiento de demostración que hemos seguido en el recíproco que concluimos de demostrar, es muy frecuente en Geometría, y para evitarnos su empleo establecemos la siguiente

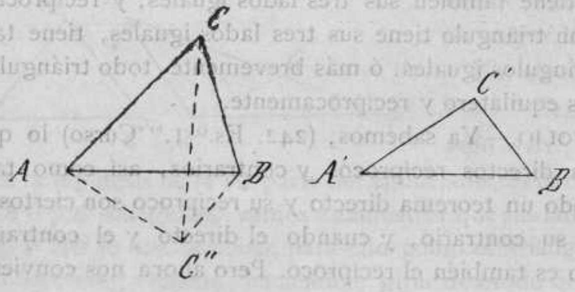
REGLA.—*Siempre que en una proposición ó en una serie de proposiciones, se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre el mismo sujeto, y cada una de las hipótesis ha conducido á conclusiones diferentes que mútuamente se excluyan, las recíprocas de las proposiciones establecidas son verdaderas; y su demostración se hace siempre por el procedimiento del absurdo, que consiste en suponer que no es cierto lo que vamos á demostrar y de ahí deducir algo que se oponga á la hipótesis ó algún teorema ya demostrado.*

Teniendo en cuenta los teoremas (47 y 48) y la regla anterior vemos que: cuando dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, el tercer lado del primer triángulo es menor, igual ó mayor que el tercer lado del segundo, según que el ángulo opuesto del primer triángulo es menor, igual ó mayor, que el ángulo opuesto del segundo. De donde recíprocamente: cuando dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, el ángulo comprendido en el primer triángulo será menor, igual ó mayor, que el ángulo comprendido en el segundo, según que el tercer lado del primer triángulo sea menor, igual ó mayor que el tercer lado del segundo.

**51.** Cuando dos triángulos tienen un lado igual y los otros dos lados del primero son mayores respectivamente que los otros dos del segundo, el ángulo comprendido por los dos lados del primero es menor que el comprendido por los del segundo.

En efecto, sean los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ figura 16, en que $AB = A'B'$, $AC > A'C'$, $BC > B'C'$, vamos á demostrar

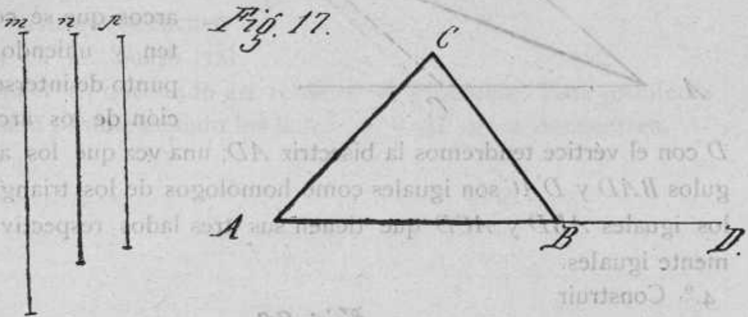
Fig. 16.



que el ángulo $ACB$ es menor que el $A'C'B'$, para esto llevemos el triángulo $A'B'C'$ sobre el $ABC$ de modo que $A'B'$ coincida con su igual $AB$ y que el punto $C'$ caiga hacia distinta parte de $AB$ que el punto $C$, como en $C''$, de modo que el triángulo $A'B'C'$ habrá tomado la posición $ABC''$, ahora bien, si trazamos la recta $CC''$, en el triángulo $ACC''$ como $AC$ es mayor que $AC''$, el ángulo $ACC''$ es menor que el $AC''C$, por la misma razón en el triángulo $BCC''$, el ángulo $BCC''$ es menor que el $BC''C$, luego el ángulo $ACB$, suma de los $ACC''$ y $C''CB$, será menor que el $AC''B = A'C'B'$ suma de los $AC''C$ y $BC''C$.

**52.** PROBLEMAS. 1.º Construir un triángulo dados los tres lados.

Fig. 17.




Sean los lados $m$, $n$, y $p$, figura 17: tómese sobre una recta indefinida $AD$, una parte $AB$ igual á $m$, y haciendo centro en $A$ y $B$ con los radios $n$ y $p$ trácense dos arcos encima de $AD$, y el punto de intersección $C$ de esos arcos se une con los $A$ y $B$, quedando así construido el triángulo.

Para que el problema sea posible es preciso se verifique el teorema (44).

2.º Construir un ángulo igual á otro dado.

Sea el ángulo A figura 18: trácese la recta $BC$ que corte á los lados del ángulo y constrúyase un triángulo igual á $ABC$.

3.º Trazar la bisectriz de un ángulo.

Fig. 18.

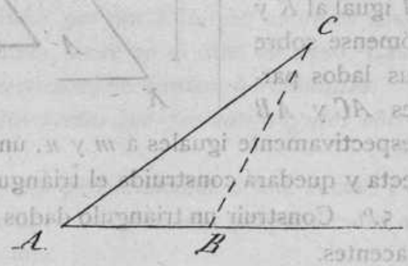
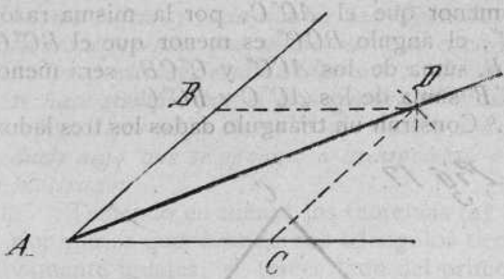


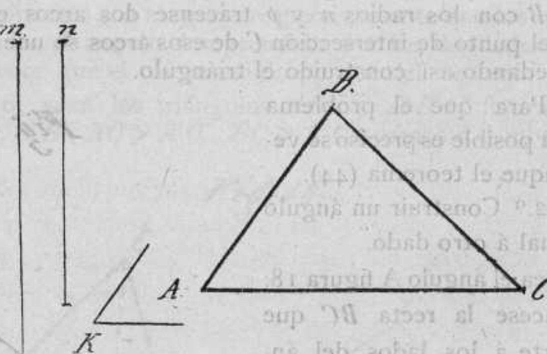
Fig. 19.




Sea el ángulo $A$ figura 19: tómense partes iguales en los lados del ángulo como $AB$ y $AC$ y haciendo centro en $B$ y $C$ con el mismo radio trácense dos arcos que se corten y uniendo el punto de intersección de los arcos $D$ con el vértice tendremos la bisectriz $AD$; una vez que los ángulos $BAD$ y $DAC$ son iguales como homólogos de los triángulos iguales $ABD$ y $ACD$ que tienen sus tres lados respectivamente iguales.

4.° Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.

Fig. 20.

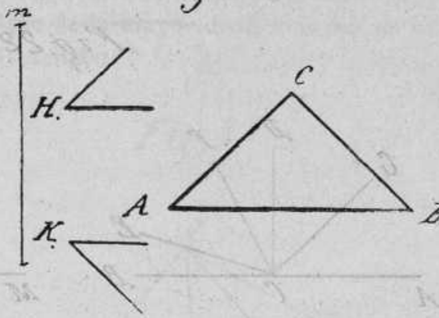



Sean los lados $m$ y $n$ y el ángulo $K$ figura 20: constrúyase un ángulo $A$ igual al $K$ y tómense sobre sus lados partes $AC$ y $AB$ respectivamente iguales á $m$ y $n$, únanse los puntos $BC$ por una recta y quedará construida el triángulo

5.° Construir un triángulo dados ~~sus~~ un lado~~s~~ y los ángulos adyacentes.

Sean el lado $m$ y los ángulos $H$ y $K$ figura 21: sobre una recta indefinida $AD$ tómese una parte AB igual á $m$, constrúyase en $A$ y $B$ ángulos respectivamente iguales á $H$ y $K$, y prolónguense sus lados hasta que se encuentren en un punto tal como el $C$, quedando así resuelto el problema. Este problema no será posible cuando los lados $AC$ y $BC$ no se encuentren.

Fig. 21.




## LECCIÓN 4.ª

### Perpendiculares y oblícuas.

**53.** RECTAS PERPENDICULARES, *son las rectas que forman ángulos rectos.*

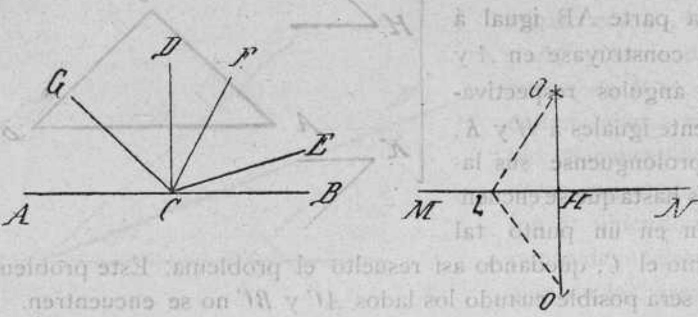
Es preciso no confundir las rectas *perpendiculares* con las *verticales,* pues estas son siempre la dirección de la gravedad (81, 1.er Curso) y se determinan por un hilo que estando suspendido por uno de sus extremos, lleve en el otro un peso. Las rectas perpendiculares á las verticales se llaman *horizontales.*

RECTAS OBLÍCUAS, *son las rectas que forman ángulos oblícuos.*

**54.** Un punto determina una perpendicular á una recta, es decir, por un punto puede siempre trazarse una perpendicular á una recta pero nada más que una.

Pueden suceder dos casos que el punto esté en la recta ó fuera de ella, figura 22: 1.° si el punto está en la recta tal

Fig. 22




como el $C$, y suponemos que la recta $CE$ después de coincidir con la $CB$, ha girado alrededor del punto $C$ para formar sucesivamente con la $AB$ ángulos adyacentes, tales como los $BCE$ y $ECA$, $FCB$ y $FCA$, $DCB$ y $DCA$, $GCB$ y $GCA$, resultará que el ángulo que la recta que gira $CE$, forma con $CB$ va constantemente aumentando mientras que el que forma con la $CA$ va contínuamente disminuyendo y por tanto habrá una posición única tal como la $CD$ en que los ángulos serán iguales, de modo que ella será perpendicular y no habrá más que ella.

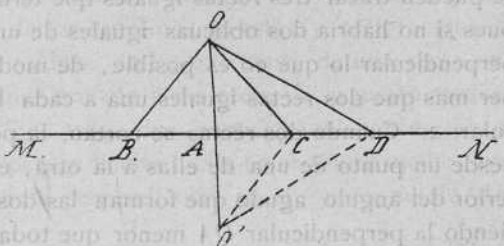
2.° Si el punto está fuera de la recta tal como el $O$, doblando la figura por la recta $MN$ hasta que el punto $O$ que está encima de la recta se rebata en su parte inferior en un punto tal como el $O'$, tomando después un punto cualquiera de la recta $MN$ tal como el $L$ y uniéndolo con $O$ y $O'$ se formarán los ángulos $OLN$ y $O'LN$ iguales porque superpuestos coinciden, pero en el caso de ser rectos los lados $OL$ y $O'L$ estarían en línea recta y como entre $O$ y $O'$ no puede haber más que una sola recta tal como la $OHO'$, esta será la perpendicular y no habrá más que ella.

**55.** Si desde un punto tomado fuera de una recta, se trazan á ella la perpendicular y varias oblícuas que terminan en un punto de intersección con dicha recta, se verifica: 1.° La percuyos pies equi- disten

pendicular es la distancia á la recta: 2.º Las oblícuas ~~iguales tienen sus pies equidistantes~~ son iguales del de la perpendicular: 3.º Las oblícuas ~~desiguales, el~~ cuyo pie ~~de la mayor~~ diste más del de la perpendicular que el de las demás. es mayor. mayor

En efecto, figura 23, sean la recta $MN$ y el punto $O$ fuera de ella doblemos la figura por la recta $MN$ hasta que el punto $O$ se rebata en $O'$, tracemos la recta $OO'$ que sabemos es perpendicular á la $MN$, tomemos desde el pie $A$ de la perpendicular distancias iguales á uno y otro lado sobre la recta $MN$ tales como $AB$ y $AC$, tomemos por último una distancia $AD$ mayor que las anteriores y tracemos las rectas $OB$, $OC$, $OD$, $O'C$ y $O'D$, hecho esto tendremos: 1.º Que siendo iguales en virtud de la superposición $OA$ y $O'A$, así como $OC$ y $O'C$ y además $OA + O'A$ menor que $OC + O'C$, evidentemente tendremos que $OA < OC$, y como lo que hemos demostrado de la oblícua $OC$ la podríamos igualmente demostrar de cualquiera otra, vemos que la menor recta que se puede trazar entre $O$ y $MN$ es la perpendicular $OA$; que es por tanto, la distancia de $O$ á $MN$: 2.º Siendo $AB = AC$, los triángulos rectángulos $ABO$ y $ACO$ son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego $OB = OC$: 3.º Siendo $AD > AB$, podremos tomar sobre $AD$ á partir de $A$ una parte $AC = AB$ y por tanto como $OC$ y $O'C$ así como $OD$ y $O'D$ son iguales y además (45) $OD + O'D > OC + O'C$, $OD > OC$.

Fig. 23



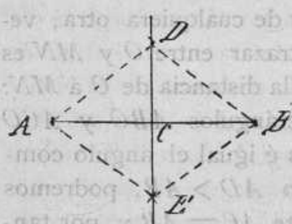

RECÍPROCOS. 1.º Si una recta es la distancia de un punto á otra recta, las dos son perpendiculares: 2.º Las oblícuas iguales que van desde un punto á una recta, distan sus pies

igualmente del de la perpendicular trazada desde el mismo punto que ellas: 3.º Las oblícuas desiguales que van desde un punto á una recta, el pie de la mayor dista más que el de las demás, del de la perpendicular trazada desde el mismo punto que ellas.

Estas recíprocas se demuestran por el procedimiento de la regla (50 Es.º)

COROLARIOS. 1.º Desde un punto fuera de una recta no se pueden trazar tres rectas iguales que terminen en dicha recta; pues si no habría dos oblícuas iguales de un mismo lado de la perpendicular lo que no es posible, de modo que no puede haber más que dos rectas iguales una á cada lado de la perpendicular: 2.º Cuando dos rectas se cortan, la perpendicular trazada desde un punto de una de ellas á la otra, está situada en el interior del ángulo agudo que forman las dos rectas; puesto que siendo la perpendicular $OA$ menor que toda oblícua $OB$, el ángulo $OBA$ que se opone á la perpendicular es menor que el recto $OAB$ que se opone á la oblícua y en el cual está situada la perpendicular. Luego los dos ángulos de un triángulo rectángulo que no sean el recto son agudos.

Fig. 24




**56**. Todo punto de la perpendicular que biseca á una recta, equidista de los extremos de esa recta.

En efecto figura 24, sea el segmento de recta $AB$ y su punto medio $C$, si se traza la perpendicular $DE$ que pase por $C$, tendremos que las rectas $DA$ y $DB$ son iguales por oblícuas cuyos pies están equidistantes del de la perpendicular y lo mismo sucede con $EA$ y $EB$ y con las que trazáramos desde un punto cualquiera de la perpendicular á los extremos de la recta.

**57**. RECÍPROCO. - Todo punto que equidiste de los extremos de una recta, está en la perpendicular que biseca á esa recta.

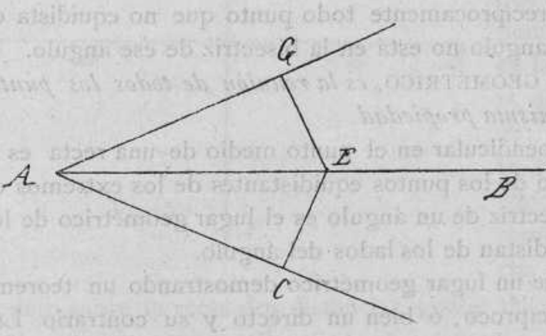
En efecto, figura 24, por ser $DA = DB$, $A$ y $B$ equidistarán del pie de la perpendicular trazada desde $D$ á la recta $AB$, luego el pie de esa perpendicular tiene que ser $C$ punto medio de la recta $AB$, de donde $D$ pertenece á la perpendicular trazada en el punto medio de la recta $AB$.

**58.** Demostrados el directo y el recíproco los contrarios son ciertos, (242 Escolio 1.er Curso) de modo que: Todo punto que no está en la perpendicular trazada á una recta en su punto medio, no equidista de los extremos de esta; y recíprocamente todo punto que no equidiste de los extremos de una recta, no está en la perpendicular trazada á esa recta en su punto medio.

**59** Toda recta que tenga dos puntos equidistantes de los extremos de otra es perpendicular á ella en su punto medio; una vez que tendría con la perpendicular en el punto medio dos puntos comunes.

**60.** Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de este ángulo.

Fig. 25.




En efecto, figura 25, sea el ángulo $A$ y su bisectriz $AB$ vamos á demostrar que todo punto de la bisectriz tal como el $E$ equidista de los lados $AG$ y $AC$ del ángulo, para lo cual bastará demostrar que las perpendiculares $EG$ y $EC$ trazadas á los lados desde el punto $E$ son iguales; ahora bien, los triángulos rectángulos $AGE$ y $ACE$ son iguales, pues doblando la figura por $AB$, la recta $AG$ coincidirá con $AC$, la $EG$ con $EC$ (54) y el punto $G$ con el $C$, (19 Cor.o 3.o) luego E equidista de $AG$ y $AC$.

Corolario.—Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo iguales.

**61.** Recíproco.—Todo punto que equidista de los lados de un ángulo, está en la bisectriz de ese ángulo.

En efecto, figura 25, si $EG$ y $EC$ son iguales vamos á demostrar que la recta $AE$ es bisectriz del ángulo $GAC$; desde luego los triángulos rectángulos $AGE$ y $ACE$ son iguales pues doblando la figura por la recta $AE$, $EG$ coincidirá con $EC$ (54) la $GA$ con la $CA$, porque los ángulos $G$ y $C$ son iguales por rectos y el punto $A$ de la recta $GA$ coincidirá con el $A$ de la $CA$ sin lo cual la misma oblícua $EA$ distaría desigualmente del pie de la perpendicular, luego los ángulos $GAE$ y $CAE$ que superpuestos han coincidido son iguales, ó lo que es lo mismo $AE$ es bisectriz del ángulo $GAC$.

Corolarios. 1.º Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen la hipotenusa y un cateto iguales. 2.º Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares; pues forman un ángulo recto.

**62.** Por la misma razón que en (58): Todo punto que no está en la bisectriz de un ángulo no equidista de los lados de este ángulo; y recíprocamente todo punto que no equidista de los lados de un ángulo no está en la bisectriz de ese ángulo.

**63.** Lugar geométrico, *es la reunión de todos los puntos que tienen una misma propiedad.*

Así; la perpendicular en el punto medio de una recta es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de esa recta: la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Se establece un lugar geométrico demostrando un teorema directo y su recíproco, ó bien un directo y su contrario. Los dos lugares geométricos citados los hemos establecido demostrando la directa y la recíproca y no la directa y la contraria; pues para demostrar esta hubiéramos necesitado nueva figura como ya dijimos (242 E.º 1.er Curso).

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas que se cortan, se compone de las dos bisectrices, perpendiculares entre sí, de los cuatro ángulos convexos que formen dichas rectas.

**64.** PROBLEMAS. 1.° Dividir un segmento de recta en dos partes iguales. Sea la recta $AB$, figura 26, hagamos centro en $A$ y $B$ y tracemos dos arcos que se corten por la parte superior é inferior, y uniendo los puntos $C$ y $D$ de intersección por medio de una recta, el punto $O$ en que la recta $CD$ corta á la $AB$ es el punto medio de esta (59).

Fig. 26.

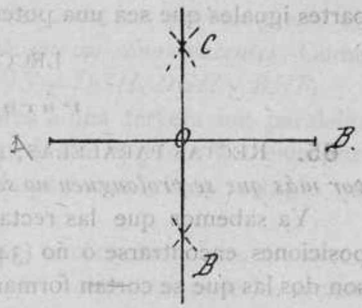



Fig. 27.


2.° Trazar una perpendicular á una recta por un punto dado.

Pueden ocurrir dos casos que el punto dado esté en la recta ó fuera de ella, figura 27: 1.° Sea la recta $AB$ y el punto dado en ella $O$, tomemos á derecha é izquierda de ese punto sobre la recta dos distancias iguales tales como $OD$ y $OE$, hagamos centro en $D$ y $E$ y tracemos dos arcos que se corten hacia una de las partes de la recta $AB$, como en el punto $F$ y uniendo $O$ y $F$ por medio de una recta queda resuelto el problema (59): 2.° Sea el punto dado fuera de la recta $C$, hagamos centro en él y tracemos un arco que corte á la recta $AB$ en dos puntos como el $DE$, haciendo centro ahora en los puntos $D$ y $E$ trácense dos arcos que se corten en un punto tal como el $F$ y uniendo $F$ con $C$ queda resuelto el problema (59).

3.° Trazar una recta que equidiste de dos puntos dados.

Únanse los puntos por una recta y trácese la perpendicular en su punto medio (63). 4.° Dividir una recta en un número de partes iguales que sea una potencia de dos.

## LECCIÓN 5.ª

### Paralelas.

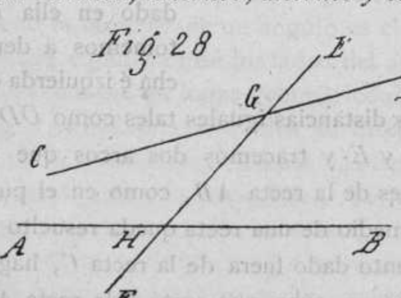
**65.** Rectas paralelas, *son las que trazadas en un plano por más que se prolonguen no se encuentran.*

Ya sabemos que las rectas no pueden tener más que dos posiciones encontrarse ó no (34), también sabemos que cuando son dos las que se cortan forman cuatro ángulos ó dividen al plano en que se encuentran en cuatro partes ó regiones, pudiendo las rectas cortarse perpendicular ú oblícuamente (53) y por último hemos visto que cuando eran tres las rectas que se cortaban dos á dos terminando en los puntos de intersección se formaba un triángulo (42); pues bien, cuando las rectas no se cortan se llaman paralelas conforme á la definición dada, y si dos rectas son cortadas por una tercera, siendo las dos primeras paralelas ó no, siempre formará esta con cada una de las primeras cuatro ángulos y con las dos ocho, que reciben nombres especiales por el uso frecuente que de ellos se hace. Estos nombres, con relación á estas rectas y á la tercera que por cortarlas se llama *secante*, son: *internos*, *externos*, *alternos* y *correspondientes*.

**66.** Secante, *es la recta que corta á otras dos.* Como la $EF$ de la figura 28 que corta á las $AB$ y $CD$.

Ángulos internos *son los 4 comprendidos entre las rectas que corta la secante*. Como $AHG$, $BHG$, $CGH$ y $DGH$.

Fig. 28



ÁNGULOS EXTERNOS, *son los 4 no comprendidos entre las rectas que corta la secante.* Como $AHF$, $BHF$, $CGE$ y $DGE$.

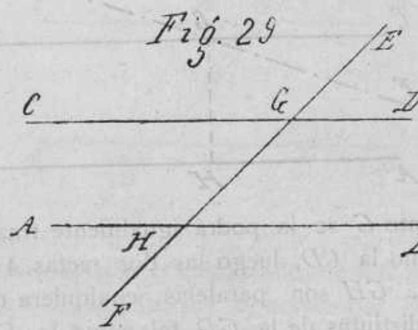
ÁNGULOS ALTERNOS, *son dos, internos ó externos, de distinto lado de la secante que no son adyacentes.* Como $AHG$ y $DGH$, $BHG$ y $CGH$, $AHF$ y $DGE$, $BHF$ y $CGE$.

ÁNGULOS CORRESPONDIENTES, *son uno interno y otro externo del mismo lado de la secante que no son adyacentes.* Como, $AHG$ y $CGE$, $CGH$ y $AHF$, $BHG$ y $DGH$, $DGH$ y $BHF$.

**67.** Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas.

En efecto, si se encontrasen desde el punto del encuentro se podrían trazar dos perpendiculares á una misma recta, lo que es imposible (54).

**68.** Dos rectas son paralelas, si cortadas por una tercera forman: 1.° los ángulos internos del mismo lado de la secante suplementarios; 2.° los externos del mismo lado de la secante suplementarios; 3.° los alternos iguales; 4.° los correspondientes iguales.

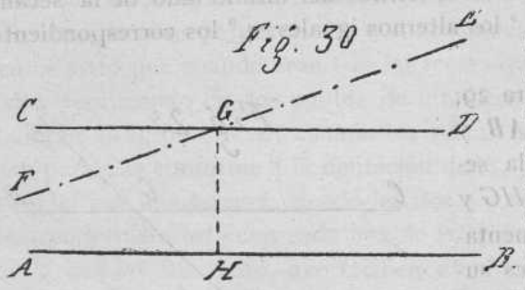



En efecto, figura 29, sean las rectas $AB$ y $CD$ cortadas por la secante $EF$: 1.° si $BHG$ y $DGH$ son suplementarios, como $CGH$ es suplemento de $DGH$ y $AHG$ de $BHG$, se deduce que los cuatro ángulos internos valen cuatro rectos, pero como por hipótesis $BHG$ y $DGH$, valen dos rectos, también valdrán otros dos rectos $AHG$ y $CGH$, de modo que cuando dos ángulos internos de un lado de la secante valen dos rectos, lo mismo sucede con los otros dos del otro lado de la secante; ahora bien, si de una parte de la secante se encontraran las rectas $AB$ y $CD$, también tendrían que encontrarse de la otra y entónces las rectas $AB$ y $CD$ serían una sola recta contra la hipótesis: 2.° si $BHF$ y $DGE$ son suplementarios, como $BHG$ es suplemento de $BHF$, y $DGH$ de $DGE$, tendremos que $BHG$ y $DGH$ son suplementarios y por tanto las rectas $AB$ y $CD$ no podrán encontrarse: 3.º si dos ángulos alternos tales como $BHG$ y $CGH$ son iguales, al ser $DGH$ suplemento de $CGH$ lo será de su igual $BHG$, y por tanto las rectas $AB$ y $CD$ no pueden encontrarse: 4.º si dos correspondientes son iguales tales como $BHG$ y $DGE$, al ser $DGH$ suplemento de $DGE$ lo será de su igual $BHG$, y por tanto las rectas $AB$ y $CD$ son como en los demás casos paralelas.

**69**. Postulado de Euclides.—*Una perpendicular y una oblícua á una recta se encuentran.* El encuentro se verifica hacia el lado de la secante en que forma con la oblícua un ángulo interno agudo.

Corolarios. 1.º Un punto determina una paralela á una recta, es decir, por un punto se puede trazar una paralela á una recta pero nada más que una.

Fig. 30

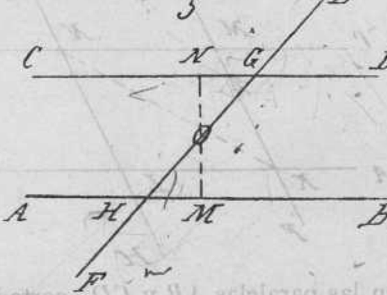



Desde luego si la recta es $AB$ y el punto $G$, figura 30, se podrá por este punto trazar una perpendicular á la recta (54), tal como la $GH$ y á esta en el punto $G$ se la podrá igualmente trazar una perpendicular tal como la $CD$, luego las dos rectas $AB$ y $CD$ perpendiculares á la $GH$ son paralelas, cualquiera otra recta que pase por $G$ distintas de la $GD$ tal como la $EF$ será oblícua á la $GH$ y por tanto encontrará á la AB: 2.º Si una recta corta á una de dos paralelas cortará á la otra; pues si no la cortara desde el punto que corte á la primera se podrían trazar dos paralelas á la otra: 3.º Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas lo será á la otra; pues sinó en el punto en que corte á esta se la podrá trazar una perpendicular y tendríamos dos paralelas desde ese punto á la recta primera. Esta proposición se puede enunciar diciendo: Las rectas paralelas tienen sus perpendiculares comunes: 4.° Las rectas paralelas á una misma recta son paralelas entre sí; pues las perpendiculares de esta recta lo son de ellas: 5.° Las rectas perpendiculares á paralelas son también paralelas; pues serán perpendiculares á una misma recta: 6.° Las rectas perpendiculares á rectas que se encuentran también se encuentran; pues si fuesen paralelas también lo serían sus perpendiculares contra la hipótesis.

**70.** *Recíproco del 68.*—Dos rectas paralelas cortadas por una tercera forman: 1.° los ángulos internos del mismo lado de la secante suplementarios; 2.° los externos del mismo lado de la secante suplementarios; 3.° los alternos iguales; 4.° los correspondientes iguales.

En efecto, figura 31, sean las rectas paralelas $AB$ y $CD$ cortadas por la secante $EF$, tomemos el punto $O$ medio del segmento de recta $GH$ y tracemos por ese punto una perpendicular á la $AB$, que lo será á su paralela $CD$ (69, C.° 3.°), tal como la $MN$, tendremos así los triángulos rectángulos $OMH$ y $ONG$ iguales, por tener las hipotenusas iguales como mitades de $GH$ y los ángulos agudos $MOH$ y $NOG$ iguales por opuestos por el vértice, luego los ángulos homólogos $MHO$ y $NGO$ iguales y por tanto: 1.° Como los ángulos $DGH$ y $CGH$ son suplementarios, tambien lo serán $DGH$ y $BHG$ igual á $CGH$; 2.° Como $BHF$ y $BHG$ son suplementarios, también lo serán $BHF$ y $DGE$ puesto que $DGE$ es igual á $CGH$ por opuestos por el vértice y este hemos visto es igual á $BHG$; 3.° los ángulos que hemos demostrado son iguales $BHG$ y $CGH$ son los alternos; 4.° como $BHG$ es igual á $CGH$ tambien será igual á su opuesto por el vértice $DGE$. Por tanto quedan demostradas las cuatro partes del teorema.

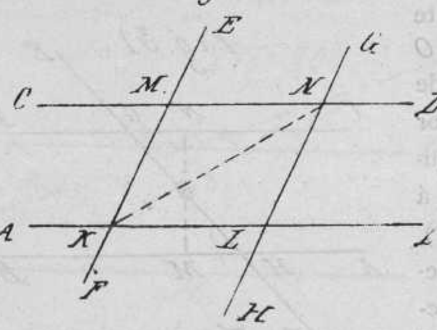
Fig. 31



ESCOLIO. 1.° Podría haberse demostrado con la figura 29, diciendo, la recta que por $G$ forma con la $EF$ ángulos internos del mismo lado suplementarios &.ª tiene que ser paralela á $AB$ según el directo, luego coincidirá con $CD$ (69).

ESCOLIO. 2.° Las contrarias de las proposiciones 68 y 70 son ciertas (242 Es.° 1.er Curso) así: Dos rectas no son paralelas si cortadas por una tercera no forman; 1.° los ángulos internos del mismo lado de la secante suplementarios; 2.° los externos del mismo lado de la secante suplementarios; 3.° los alternos iguales; 4.° los correspondientes iguales. Dos rectas no paralelas cortadas por una tercera no forman; 1.° los ángulos internos del mismo lado de la secante suplementarios; 2.° los externos del mismo lado de la secante suplementarios; 3.° los alternos iguales; 4.° los correspondientes iguales.

Fig. 32



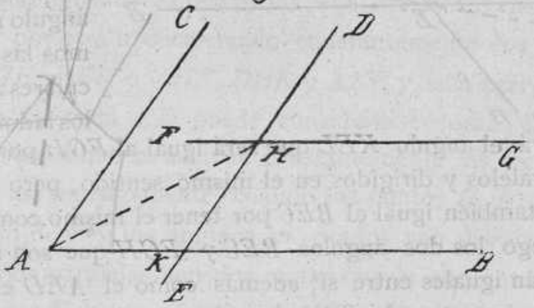

**71.** Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales. En efecto, figura 32 sean las paralelas $AB$ y $CD$, cortadas por las paralelas $EF$ y $GH$, si trazamos la $KN$, tendremos que los triángulos $MNK$ y $LNK$ son iguales por tener el lado $KN$ común y los ángulos adyacentes iguales, los $MNK$ y $LKN$ por alternos entre las paralelas $AB$ y $CD$ siendo la secante $KN$, y los $MKN$ y $LNK$ por alternos entre las paralelas $EF$ y $GH$ siendo la misma secante; luego los lados homólogos $KM$ y $LN$ iguales, así como los $KL$ y $MN$.

COROLARIOS. 1.° Todos los puntos de una recta equidistan de su paralela; una vez que las distancias de estos puntos á la paralela son las perpendiculares trazadas desde ellos á la recta, y son iguales por partes de paralelas comprendidas entre paralelas: 2.° El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta es una paralela á esta distancia de la recta.

**72.** Dos ángulos que tengan sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios.

En efecto, figura 33, sean los ángulos *BAC* y *GHD*

Fig. 33.

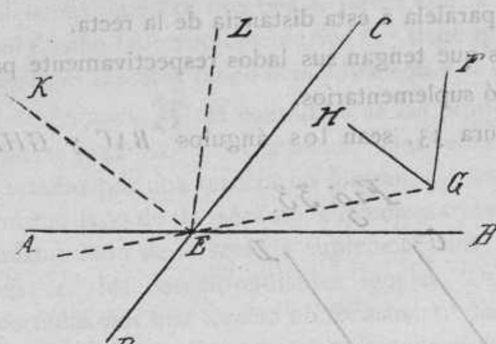



que tienen sus lados *AB* y *HG* paralelos, así como los *AC* y *HD*, como los ángulos *BAC* y *BKH* son iguales, por correspondientes entre las paralelas *AC* y *DE* siendo la secante *AB*, así como los ángulos *GHD* y *BKH*, tambien por correspondientes entre las paralelas *AB* y *FG* siendo la secante *DE*, se deduce que los ángulos *BAC* y *GHD* iguales los dos al *BKH* son iguales entre sí; además como *FHE* es igual al *GHD* por opuestos por el vértice, resulta que los ángulos *BAC* y *FHE* son tambien iguales, y los adyacentes al *GHD* que son *DHF* y *GHE* por ser suplementarios del *GHD* lo serán de su igual *BAC*.

Escolio.—Es conveniente observar que los ángulos iguales al *BAC* tienen los lados en la misma ó distinta región de la recta que determina los vértices mientras que los suplementarios tienen dos en la misma región y los otros dos en distinta.

**73.** Dos ángulos que tengan sus lados respectivamente perpendiculares son iguales ó suplementarios.

Fig. 34.




En efecto, figura 34, sean los ángulos *BEC* y *FGH* que tienen los lados *BE* y *FG* perpendiculares así como los *EC* y *GH*, si en el vértice *E* del ángulo *BEC* trazamos las perpendiculares *EL* y *EK* á los lados *BE* y *EC*, se formará el ángulo *KEL* que será igual al *FGH* por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, pero el ángulo *KEL* es también igual al *BEC* por tener el mismo complemento *CEL*, luego los dos ángulos *BEC* y *FGH* que son iguales al *KEL* serán iguales entre sí; además como el *AED* es igual al *BEC* por opuestos al vértice, resulta que los ángulos *AED* y *FGH* son también iguales, y los adyacentes al *BEC* que son el *BED* y *AEC*, por ser suplementarios del *BEC* lo serán de su igual *FGH*.

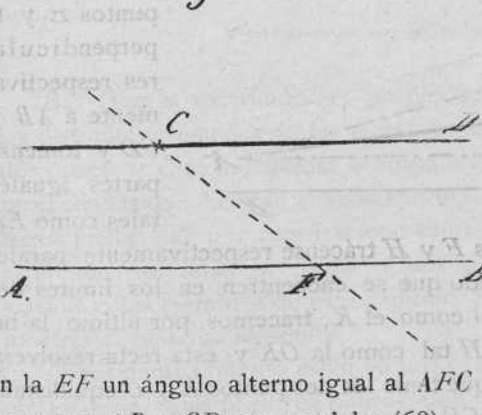
ESCOLIO.—Es conveniente observar que los ángulos iguales al *FGH* tienen dos lados en la misma región y los otros dos en distinta de la recta que determina los vértices de los ángulos mientras que los suplementarios tienen sus lados ó en la misma región ó región distinta de la misma recta.

**74.** ESCOLIO GENERAL.—Si tenemos dos rectas paralelas *AB* y *CD* y por un punto E de esta se traza una perpendicular EF y varias oblícuas hacia la misma región de *EF* como *EG*, *EH*, *EK* de modo que cada vez sus

Fig. 35.

pies disten más del de la perpendicular, vemos que á medida que los pies de las oblícuas se apartan más del de la perpendicular los ángulos que estas forman con las paralelas tales como *DEG* y *AGE*, *DEH* y *AHE*, *DEK* y *AKE*, iguales por alternos entre las paralelas siendo las secantes respectivas las oblícuas, son cada vez menores: por tanto pudiendo; por una parte ir creciendo constantemente las distancias *FG*, *FH*, *FK* y así sucesivamente, y por otra ir decreciendo constantemente los ángulos *DEG* ó *AGE*, *DEH* ó *AHE*, *DEK* ó *AKE* y así sucesivamente resulta que la recta *CD* puede considerarse como el límite (268 1.$^{er}$ Curso) á que se acercan constantemente las rectas *EG*, *EH*, *EK* y así sucesivamente, cuando los puntos *G*, *H*, *K*, & se van alejando de *F* y los ángulos ya citados van disminuyendo: por tanto, dos paralelas son dos rectas que se encuentran en el infinito formando entre sí un ángulo nulo.

Fig. 36




**75.** PROBLEMAS. 1.° Trazar por un punto una paralela á una recta.

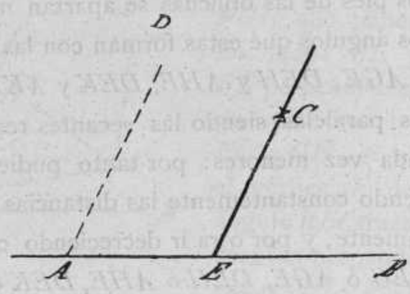
Sea el punto *C* y la recta *AB*, figura 36, trácese por el punto *C* una recta *EF* que corte á la *AB*, y otra que forme con la *EF* un ángulo alterno igual al *AFC* tal como la *CD*, las dos rectas *AB* y *CD* son paralelas (68).

Se hubiera podido por *C* trazar una perpendicular á *AB* y por el mismo punto otra perpendicular á la trazada (67).

2.° Trazar por un punto una recta que forme un ángulo dado con otra.

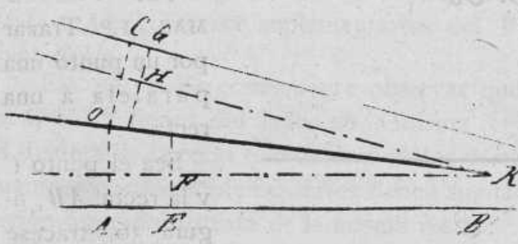
Sea la recta $AB$ y el punto $C$, figura 37, si en un punto cualquiera de la $AB$, tal como el $A$, formamos un ángulo $BAD$ igual al dado, y por el punto $C$ se traza una paralela á la $AD$, la recta $CE$ resuelve el problema; pues los ángulos $BAD$ y $BEC$ son iguales por correspondientes entre las paralelas $AD$ y $EC$ siendo la secante $AB$.

Fig. 37.




3.° Trazar la bisectriz del ángulo formado por dos rectas concurrentes que no se encuentran en los límites del dibujo.

Fig. 38.

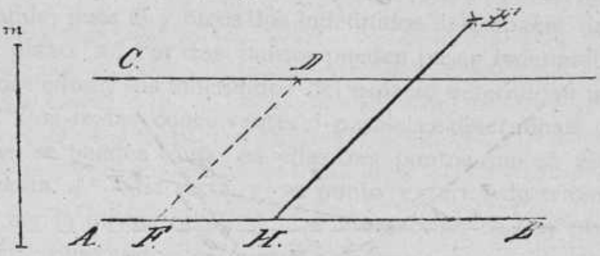



Sean las rectas $AB$ y $CD$, figura 38, trácense en los puntos $E$ y $G$ perpendiculares respectivamente á $AB$ y $CD$ y tómense partes iguales tales como $EF$ y $GH$, por los puntos $F$ y $H$ trácense respectivamente paralelas á $AB$ y $CD$ de modo que se encuentren en los límites del dibujo en un punto tal como el $K$, tracemos por último la bisectriz del ángulo $FKH$ tal como la $OK$ y esta recta resolverá el problema, una vez que tiene los dos puntos $K$ y $O$ equidistantes de las rectas $AB$ y $CD$ y por tanto todos.

4.° Trazar por un punto una secante á dos paralelas que la parte interceptada por ellas sea igual á una recta dada.

Sea el punto dado $E$, las paralelas $AB$ y $CD$ y la recta dada $m$, figura 39, trácese por un punto cualquiera tal como el

Fig. 39.




$D$ de la recta $CD$ una secante $DF$ igual á la recta dada $m$, y por $E$ trácese una paralela á $DF$ tal como la $EH$, esta recta resolverá el problema (72).

Este problema será imposible si la recta dada es menor que la distancia entre las paralelas.

## LECCIÓN 6.ª

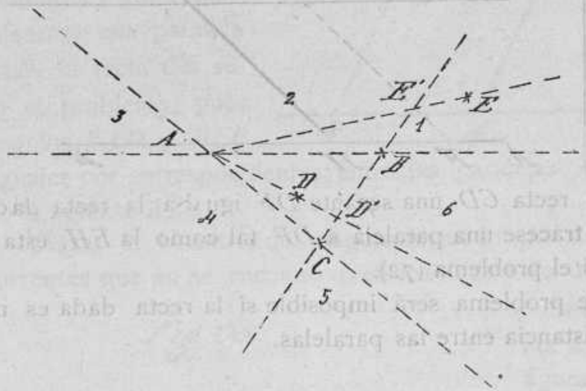
### Polígonos en general.

**76.** Hemos estudiado las propiedades, que resultaban de las distintas posiciones de las rectas en un plano, cuando eran dos ó tres, y eran indefinidas ó limitadas, réstanos estudiar las propiedades que resultan cuando son más de tres, ó aun siendo tres aquellas que por necesitar conocimientos prévios no hemos estudiado; de estas propiedades nos vamos á ocupar en esta lección y las restantes de este capítulo. Más antes vamos á demostrar el teorema siguiente:

Tres puntos que no estén en línea recta determinan un plano, es decir, que por tres puntos que no estén en línea recta puede pasar un plano pero no dos ó más.

En efecto, figura 40, sean los tres puntos que no estén en línea recta $A$, $B$ y $C$, si los unimos por las rectas $AB$, $AC$ y

Fig. 40




$BC$, estas dividirán el plano en siete regiones, la $ABC$ cerrada y las 1, 2, 3, 4, 5 y 6 abiertas: ahora bien (25): 1.º por la recta $AB$ podemos hacer pasar un p.ano, que si lo hacemos girar alrededor de ella en el espacio necesariamente pasará por $C$, luego por tres puntos que no están en línea recta puede pasar un plano: 2.º supongamos que por los tres puntos $A$, $B$ y $C$ pueda pasar otro segundo y que un punto cualquiera de la región cerrada tal como el $D$ es de ese plano y no del primero, trazando la recta $AD$ estará en ese plano y cortará á la $BC$ en un punto tal como el $D'$, puesto que $B$ y $C$ están hácia distinta parte de $AD$, luego esta recta que tiene los puntos $A$ y $D'$ en el primer plano está toda ella en él, de modo que todos los puntos de la región cerrada del segundo plano lo son también del primero; supongamos también que un punto cualquiera de una de las regiones abiertas tal como el $E$, que está hacia distinto lado de la recta $BC$ que el $A$, es del segundo plano y no del primero, trazando la recta $AE$ cortará á la $BC$ en un punto tal como el $E'$, luego tiene dos puntos en el primer plano y por tanto está toda ella en él, de modo que todos los puntos de las regiones abiertas del segundo plano lo son del primero, es decir que los dos planos son uno sólo y por tanto el teorema es cierto.

COROLARIOS. 1.° Por un punto pueden pasar indefinidos planos; pues él y otros dos indefinidos del espacio determinan un plano. 2.° Por dos puntos pueden pasar indefinidos planos; pues ellos y los indefinidos del espacio determinan un plano; 3.° Dos rectas concurrentes ó paralelas determinan un plano; pues se pueden tomar en ellas tres puntos que no estén en línea recta. 4.° Una recta y un punto exterior determinan un plano, por la misma razón. 5.° La intersección de dos planos es una recta; pues todos los puntos comunes tienen que estar en la misma dirección. 6.° Todos los planos son superponibles; pues teniendo 3 puntos comunes coinciden.

**77.** POLÍGONO, *es la porción de plano limitado por tres ó más rectas que se cortan dos á dos, de manera que cada recta corta á la siguiente y la última á la primera.*

*Vértices*, son los puntos en que se cortan las rectas; *lados*, son los segmentos de recta comprendidos entre los vértices; *contorno*, es la línea quebrada formada por sus lados; *perímetro*, es la medida de su contorno; *diagonales*, son los segmentos de recta comprendidos entre dos vértices no consecutivos; *ángulos*, son los formados interiormente por cada dos lados consecutivos; *ángulos adyacentes*, son dos ángulos que tienen un lado del polígono común; *ángulo externo*, es el formado por un lado y la prolongación de otro.

Los elementos esenciales de un polígono son los *lados* y los *ángulos*, y atendiendo á ellos se les clasifica; por sus lados, en convexos y cóncavos; por sus ángulos, en triángulos, cuadrángulos ó cuadriláteros, pentágonos, exágonos, eptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, pentedecágonos, &.ª Todo polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos y podría por tanto hacerse la misma clasificación que hemos hecho por los ángulos, por los lados.

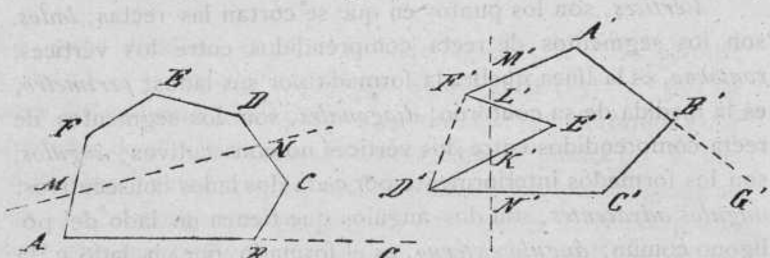
POLÍGONOS CONVEXOS, *son los que su contorno es una línea convexa (20).* Las propiedades de los polígonos convexos que se deducen de lo que llevamos expuesto son; que todos los ángulos son convexos (38), que todas las diagonales son interiores, y que una recta no puede cortar á su contorno en más de dos puntos.

POLÍGONOS CÓNCAVOS, *son los que su contorno es una línea cóncava (20)*. Las propiedades de los polígonos cóncavos que se deducen de lo que llevamos expuesto son; que tienen algún ángulo cóncavo (38), que tienen alguna diagonal exterior, y que una recta puede cortar á su contorno en más de dos puntos.

**78.** Los TRIÁNGULOS, tienen tres ángulos ó tres lados, los *cuadrángulos ó cuadriláteros*, tienen cuatro ángulos ó cuatro lados, y en general los *n-ángulos* ó *n-láteros*, tienen $n$ ángulos ó $n$ lados.

La figura 41, representa dos polígonos; el $ABCDEF$ con-

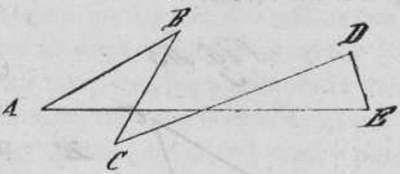
Fig. 41.




vexo, puesto que la línea quebrada que le forma es convexa; el $A'B'C'D'E'F'$ cóncavo, puesto que la línea quebrada que le forma es cóncava; los dos son exágonos, puesto que tienen seis ángulos y seis lados; son ángulos adyacentes al lado $AB$ los $A$ y $B$ que tienen ese lado comun, así como al $A'B'$ los $A'$ y $B'$ que tienen ese lado comun; los ángulos $CBG$ y $C'B'G'$, formados respectivamente por el la $BC$ y la prolongación del $AB$, por el lado $B'C'$ y la prolongación del $A'B'$, son externos de los respectivos polígonos $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$; en el polígono $ABCDEF$, la diagonal $FD$ es interior como cualquiera otra que se trazara, todos los ángulos son convexos, y una recta cualquiera tal como la $MN$ no corta más que en dos puntos al contorno; en el polígono $A'B'C'D'E'F'$, la diagonal $F'D'$ es exterior, el ángulo $\widehat{D'E'F'}$ es cóncavo, y la recta $M'N'$ corta en más de dos puntos al contorno.

ESCOLIO. —Como los polígonos pueden formarse, además del procedimiento que se deduce de su definición, uniendo por rectas una serie de puntos, de manera que cada uno se una con el siguiente y el último con el primero; se comprende que haya polígonos cóncavos cuyos contornos se corten, como el pentágono $ABCDE$, de la figura 42.

Fig. 42




**79.** Los polígonos por último, se dividen por la igualdad de sus lados y ángulos; en equiláteros equiángulos, regulares é irregulares.

POLÍGONO EQUILÁTERO, *es el que tiene sus lados iguales.*

POLÍGONO EQUIÁNGULO, *es el que tiene todos sus ángulos iguales.*

POLÍGONO REGULAR, *es el que tiene todos sus lados y ángulos iguales.*

POLÍGONO IRREGULAR, *es el que no tiene todos sus lados y ángulos iguales.*

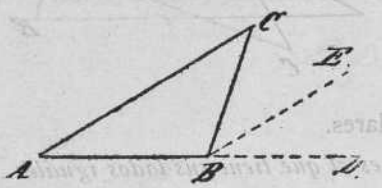
**80.** El número total de diagonales de un polígono es igual á la mitad del número de lados multiplicado por el número de lados menos tres; puesto que desde cada vértice se podrán trazar tantas diagonales como lados, tenga el polígono menos tres, y como cada diagonal une dos vértices, todas ellas serán la mitad del producto del número de lados por este número menos tres.

COROLARIO. —La recta indefinida determinada por un lado de un polígono, cortará á todos los lados prolongados del polígono menos tres en puntos que no son vértices, por tanto existirán un número de puntos de intersección de los lados de un polígono que no sean vértices igual á la mitad del producto del número de lados por este número menos tres.

**81**. El polígono más sencillo es el triángulo, del cual hemos estudiado ya algunas propiedades que nos han facilitado la exposición de las perpendiculares oblícuas y paralelas; vamos ahora á estudiar las que necesitamos como fundamento de las que nos proponemos estudiar de los polígonos; una vez que, un polígono siempre le podemos considerar como compuesto de triángulos.

La suma de los angulos de un triángulo cualquiera, es igual á dos rectos.

Fig. 43




En efecto, figura 43, sea el triángulo *ABC*, si prolongamos el lado *AB* y trazamos por el vértice *B* una paralela al lado opuesto *AC*, tendremos; que la suma de los ángulos consecutivos formados en *B* valen dos rectos (41), pero el ángulo *ABC* es del triángulo y los ángulos *DBE* y *EBC*, son respectivamente iguales á los *A* y *C* del triángulo, los primeros como correspondientes entre las paralelas *AC* y *BE* siendo la secante *AD*, y los segundos como alternos entre las mismas paralelas siendo la secante *BC*; luego la suma de los tres ángulos del triángulo propuesto valen dos rectos, y como lo mismo podríamos demostrar de otro cualquiera el teorema es cierto.

COROLARIOS. 1.º Todo ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los internos no adyacentes á él; pues el ángulo externo *CBD* se compone de los ángulos *DBE* y *EBC* que hemos visto son respectivamente iguales á los *A* y *C* del triángulo.

2.º Un triángulo no puede tener más que un ángulo recto ó un obtuso, pues si tuviese dos rectos ó dos obtusos ó un recto y un obtuso, la suma de los ángulos interiores del triángulo valdría más de dos rectos.

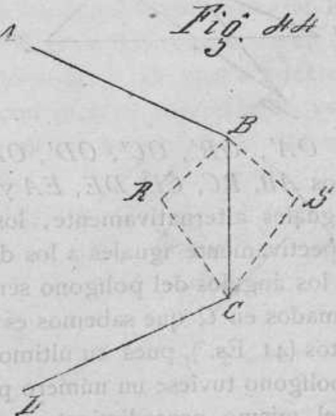
3.° Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo valen un recto; una vez que el ángulo recto vale ya un recto, luego entre los otros dos tendrán que valer otro recto.

4.° Cuando dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los terceros ángulos son también iguales; por tener el mismo suplemento.

5.° Cuando dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, sus ángulos serán respectivamente iguales; puesto que sabemos (72 y 73), que los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, son iguales ó suplementarios; suplementarios los tres del uno de los tres del otro no pueden ser, pues su suma valdría seis rectos y no 4; dos del uno de dos del otro tampoco, pues solo entre los 4 valdrían 4 rectos y por tanto la suma de los seis más de 4; por tanto, dos del uno tienen que ser iguales á dos del otro y por consecuencia los tres.

**82.** La suma de los ángulos interiores de un polígono, cuyo contorno no se corte, es igual á tantas veces dos rectos como lados tenga el polígono menos dos.

Fig. 44



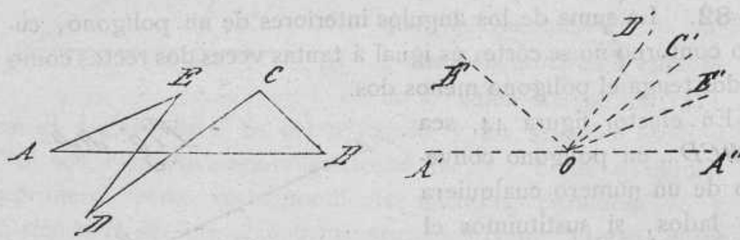

En efecto, figura 44, sea $ABCD$... un polígono convexo de un número cualquiera de lados, si sustituimos el lado $BC$ de este polígono por los dos lados $BS$ y $CS$ tendremos un polígono convexo de un lado más, y si lo sustituimos por los dos lados $BR$ y $CR$, tendremos un polígono cóncavo de un lado más; pero en uno y otro caso si aumenta la suma de los ángulos del polígono en dos rectos, una vez que en el primer caso se tiene, $(ABS+BSC+SCD)-(ABC+BCD)=CBS+$

$BSC+SCB$ que sabemos valen dos rectos, y en el segundo $(ABR+\widehat{BRC}+RCD)$ $(ABC+BCD)=4$ rectos $-(BRC+RBC+RCB)=2$ rectos, una vez que el ángulo cóncavo $\widehat{BRC}$ es igual á 4 rectos menos el convexo $BRC$ y que la suma de los ángulos del triangulo $RBC$ valen dos rectos: luego puesto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos, la suma de los del cuadrángulo ó cuadrilátero valdrá dos veces dos rectos, la del pentágono tres veces dos rectos, y en general la de un polígono cualquiera, cuyo contorno no se corte, tantas veces dos rectos como lados tenga el polígono menos dos.

**83**. La suma de los ángulos interiores de un polígono, cuyo contorno se corte, es igual á un número impar ó par de veces dos rectos según que el número de sus lados sea impar ó par.

En efecto, figura 45, sea el pentágono $ABCDE$ cuyo contorno se corta, si desde un punto tal como el $O$ se trazan parale-

Fig. 45




las $OA'$, $OB'$, $OC'$, $OD'$, $OE'$ y $OA''$ respectivamente á los lados $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA$ y $AB$, en direcciones contrarias é iguales alternativamente, los ángulos formados en $O$ son respectivamente iguales á los del polígono (72); luego la suma de los ángulos del polígono será igual á la suma de los ángulos formados en $O$ que sabemos es un número impar de veces dos rectos (41 Es.º), pues su último lado es opuesto al primero. Si el polígono tuviese un número par de lados hallaríamos siguiendo el mismo procedimiento un ángulo que el último lado tendría la misma dirección que el primero y por tanto sería nulo ó valdría un cierto número de veces 4 rectos.

**84**. La suma de los ángulos exteriores de un polígono cual quiera convexo, es igual á cuatro rectos. Porque cada ángulo interno con su adyacente externo vale dos rectos, luego los internos y externos sumados valdrán tantas veces dos rectos como lados tenga el polígono, pero solo los internos valen tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos, es decir, tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono, menos cuatro rectos; luego los externos valdrán solo cuatro rectos. Así si llamamos $n$ el número de lados de un polígono la suma de todos los ángulos estará representada por $2n$, y la de los interiores por $2(n-2)=2n-4$ luego $2n-(2n-4)=2n-2n+4=$ $=4$ rectos.

ESCOLIOS. 1.° Es conveniente notar que un polígono convexo no puede tener más que tres ángulos agudos: así como también que en los polígonos equiángulos se puede determinar el valor de los ángulos por el número de ellos, es decir, dividir $2n-4$ por $n$, lo que nos dará $2-\frac{4}{n}$; lo que dice que á medida que aumenta el número de lados aumenta el valor del ángulo. 2.° Como la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale 4 rectos, si es equiángulo cada uno valdrá un recto. 3.° Por último la diferencia entre la suma de los ángulos exteriores de los ángulos convexos y la de los exteriores de los cóncavos, en un polígono cóncavo cuyo contorno no se corte, es igual á 4 rectos; puesto que cada ángulo convexo con su adyacente externo vale 2 rectos, y cada ángulo cóncavo menos su adyacente externo vale 2 rectos.

## LECCIÓN 7.ª

### Cuadriláteros.

**85**. Los polígonos de cuatro ángulos ó lados, cuadrángulos ó cuadriláteros, tienen sus ángulos y lados opuestos, es decir, á cada ángulo se opone otro ángulo y á cada lado otro lado, á diferencia del triángulo que á cada ángulo se opone un lado; esto hace que se dividan los cuadriláteros por la respectiva posición de sus lados opuestos, en *paralelógramos, trapecios* y *trapezoides*

**86.** *Paralelógramo, es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.* Se dividen los paralelógramos, atendiendo á la igualdad ó desigualdad de los ángulos y lados contiguos, en *romboides*, *rombos*, *rectángulos* y *cuadrados*. *Base* es cualquiera de sus lados.

ROMBOIDE, *es el paralelógramo cuyos ángulos* y *lados contiguos son desiguales.* Como es el paralelógramo más general, cuando se dice simplemente paralelógramo se sobreentiende romboide.

ROMBO, *es el paralelógramo cuyos ángulos contiguos son desiguales* y *los lados contiguos iguales.*

RECTÁNGULO, *es el paralelógramo cuyos ángulos contiguos son iguales* y *los lados contiguos desiguales.*

CUADRADO, *es el paralelógramo cuyos ángulos* y *lados contiguos son iguales.*

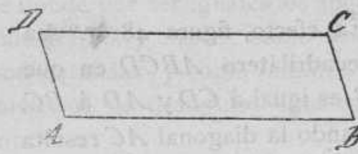
El romboide es un polígono irregular, el rombo es un polígono equilátero, el rectángulo es un polígono equiángulo, el cuadrado es un polígono regular (79).

**87.** TRAPECIO, *es el cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos* y *los otros dos no.* Los lados paralelos se llaman *bases*, y se llaman *rectángulos* si los ángulos que forma uno de los lados no paralelos con las bases son rectos, é *isósceles* si los lados no paralelos son iguales.

TRAPEZOIDE, *es el cuadrilátero cuyos lados opuestos no son paralelos.* Como es el cuadrilátero más general, cuando se dice simplemente cuadrilátero, se sobreentiende trapezoide.

**88.** De la definición de paralelógramo se deduce 1.° Que los lados opuestos son iguales; por partes de paralelas comprendidas entre paralelas: 2.° Que los ángulos opuestos son iguales; por tener sus lados paralelos y en distinta dirección: 3.° Que los ángulos adyacentes son suplementarios, por internos del mismo lado entre paralelas. Así, figura 46, en el paralelógramo $ABCD$, los lados $AB$ y $CD$, $AD$ y $BC$ son iguales; los ángulos $A$ y $C$, $B$ y $D$ también lo son; y los

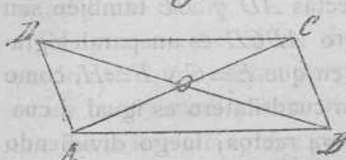
Fig. 46



ángulos $A$ y $D$ son suplementarios, pues son internos entre las paralelas $AB$ y $DC$ cortadas por la secante $AD$, y lo mismo los $A$ y $B$, los $B$ y $C$, los $C$ y $D$.

**89.** Los diagonales de todo paralelógramo se cortan mutuamente en dos partes iguales.

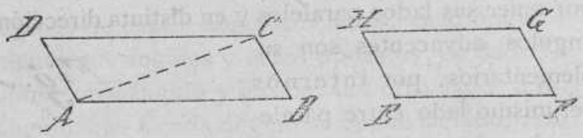
Fig. 47

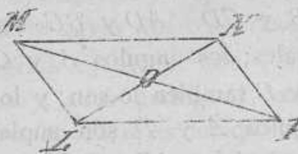


En efecto, figura 47, los triángulos $AOB$ y $DOC$ son iguales, por tener un lado igual $AB=DC$ como lados opuestos de paralelógramo y los ángulos adyacentes respectivamente iguales como alternos entre paralelas $AB$ y $CD$ cortadas respectivamente por las secantes $AC$ y $BD$; luego $AO=CO$, $BO=DO$, por lados homólogos de triángulos iguales.

**90.** Un cuadrilátero es paralelógramo: 1.° Cuando los lados opuestos son respectivamente iguales: 2.° Cuando los ángulos opuestos son respectivamente iguales: 3.° Cuando los ángulos adyacentes son suplementarios: 4.° Cuando dos lados opuestos son iguales y paralelos: 5.° Cuando las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.

Fig. 48.




En efecto, figura 48, 1.º sea el cuadrilátero $ABCD$ en que $AB$ es igual á $CD$ y $AD$ á $BC$, trazando la diagonal $AC$ resulta que los triángulos $ABC$ y $ACD$ son iguales (48) por tener sus tres lados respectivamente iguales, una vez que $AC$ es comun y $AB = CD$ y $AD = BC$ por hipótesis, luego los ángulos alternos $CAB$ y $DCA$ son iguales como homólogos de triángulos iguales, pero son alternos, de donde las rectas $AB$ y $DC$ son paralelas, lo mismo sucede con los ángulos $ACB$ y $CAD$ de modo que las rectas $AD$ y $BC$ también son paralelas, y por tanto el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelógramo; 2.º sea el cuadrilátero $EFGH$ en que $E=G$ y $F=H$, como la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro rectos, tendremos que $2E+2F=4$ rectos, luego dividiendo por dos los dos miembros de esta igualdad resulta $E+F=2$ rectos, de donde las rectas $EH$ y $FG$ son paralelas, por la misma razón, $E+H=2$ rectos, de donde las rectas $EF$ y $GH$ son paralelas, por tanto la figura $EFGH$ es un paralelógramo; 3.º sea el cuadrilátero como antes $EFGH$, siendo los ángulos $E+F$ 2 rectos y $E+H=2$ rectos, es como hemos visto un paralelógramo; 4.º sea el cuadrilátero $ABCD$, trazando la diagonal $AC$, resulta que los triángulos $ABC$ y $ACD$ son iguales (48) por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, una vez que el lado $AC$ es comun los lados $AB$ y $CD$ iguales y como son también paralelos por hipótesis, los ángulos $BAC$ y $DCA$ son también iguales, por tanto los ángulos homólogos de triángulos iguales $ACB$ y $DAC$ que son alternos nos dan el paralelismo de los lados iguales, por homólogos de triángulos iguales, $AD$ y $BC$, siendo por consecuencia el cuadrilátero un paralelógramo; 5.° sea el cuadrilátero $LMNP$ en el que $MO = OP$ y $LO = NO$, tendremos que los triángulos $MON$ y $LOP$ son iguales (48) por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, los lados iguales por hipótesis y el ángulo comprendido por opuestos por el vértice, de donde por ser iguales los ángulos homólogos, de triángulos iguales $NLP$ y $MNL$, como son alternos, las rectas $LP$ y $MN$ son paralelas, y como también son iguales estos lados como homólogos de triángulos iguales, la figura $LMNP$ es paralelógramo.

**91.** Las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente en partes iguales.

En efecto figura 49, sea el rombo $ABCD$; por ser iguales $AB$ y $BC$, el punto $B$ equidista de $A$ y $C$, y por ser iguales $AD$ y $DC$, el punto $D$ equidista de $A$ y $C$, luego (59), la recta $BD$ es perpendicular á la $AD$ en su punto medio.

Fig. 49

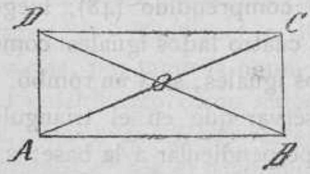

Recíprocamente, si las diagonales de un cuadrilátero, se cortan perpendicularmente en ~~un~~ su punto medio, será un rombo; puesto que los cuatro triángulos rectángulos $AOB$, $AOD$, $DOC$ y $BOC$ ~~sean~~ serán iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido (48), luego el cuadrilátero $ABCD$ que tiene sus cuatro lados iguales como hipotenusas de triángulos rectángulos iguales, será un rombo.

Escolio.—Es conveniente observar que en el triángulo $ABC$ isósceles la recta $BO$ es; 1.° perpendicular á la base; 2.° bisectriz de ella; 3.° bisectriz del ángulo opuesto; y 4.° bisectriz del triángulo. Pero como una recta queda determinada por dos condiciones y la recta $BO$ cumple con cuatro, basta que satisfaga á dos para que queden satisfechas las restantes; por tanto, podremos enunciar y demostrar tantos teoremas diferentes como combinaciones binarias se pueden formar con cuatro elementos, que según sabemos (410, 1.$^{er}$ Curso) son los seis siguientes:

En todo triángulo isósceles se verifica; 1.° La perpendicular á la base y bisectriz de ella, lo es también del ángulo y del triángulo; 2.° La perpendicular á la base y bisectriz del ángulo opuesto, es bisectriz de ella y del triángulo; 3.° La perpendicular á la base y bisectriz del triángulo, es bisectriz de ella y del ángulo opuesto; 4.° La bisectriz de la base y del ángulo opuesto, es perpendicular á ella y bisectriz del triángulo; 5.° La bisectriz de la base y del triángulo, es perpendicular á ella y bisectriz de su ángulo opuesto; 6.° La bisectriz del ángulo opuesto á la base y del triángulo, es perpendicular á ella y su bisectriz. Todos estos teoremas se demuestran por la igualdad de los triángulos $AOB$ y $BOC$, teniendo además en cuenta el teorema (56). Por tanto, para en adelante estableceremos la siguiente regla: *Siempre que, en virtud de un teorema, una línea cumpla con más condiciones que las necesarias para su determinación, toda línea de la misma naturaleza que cumpla con las condiciones necesarias para su determinación, cumplirá también con las restantes.*

**92.** Las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en partes iguales.

Fig. 50

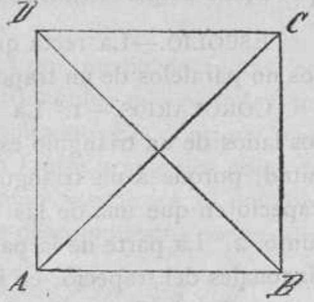



En efecto, figura 50, sea el rectángulo $ABCD$; los triángulos $ABC$ y $ABD$ son iguales como rectángulos que tienen los dos catetos iguales, luego las hipotenusas que son las diagonales del rectángulo son también iguales.

Recíprocamente, si las diagonales de un cuadrilátero son iguales y se cortan en partes iguales será rectángulo; puesto que por cortarse las diagonales en partes iguales será paralelógramo y entonces los triángulos $ABC$ y $ABD$ serán iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales, luego los ángulos $A$ y $B$ del cuadrilátero son iguales.

COROLARIO.—Las diagonales del cuadrado, son iguales y se cortan perpendicularmente en su punto medio.

Fig. 51

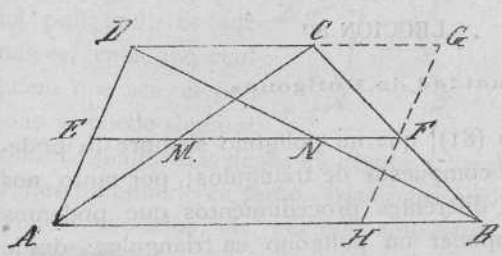



En efecto, figura 51, sea el cuadrado *ABCD*, por tener los ángulos contiguos iguales las diagonales son iguales y por tener los lados contiguos iguales las diagonales se cortan perpendicularmente en su punto medio.

Recíprocamente, si un cuadrilátero tiene sus diagonales iguales y se cortan perpendicularmente en su punto medio, es cuadrado; puesto que por ser iguales y cortarse en su punto medio los ángulos contiguos son iguales y por cortarse perpendicularmente en su punto medio los lados contiguos son también iguales.

**93.** La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela á las bases é igual á su semisuma.

Fig. 52




En efecto figura 52, sea el trapecio *ABCD* y *EF* la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, si por el punto *F* medio de la *BC* se traza una paralela al lado *AD* hasta que encuentre á las bases, tal como la *HG*, la figura *ADGH* será un paralelógramo y los lados *AD* y *HG* iguales; ahora bien, los triángulos *BFH* y *CFG* son iguales (48) por tener $BF=CF$, $HFB=GFC$, y $GCF=HBF$, luego $FG=FH$, por tanto *FG* igual y paralela á $ED$ y $FH$ igual y paralela á $EA$, luego las figuras $EFGD$ y $EAFH$ son paralelógramos, de donde la $EF$ es paralela á $DC$ y á $AB$, además $EF=DC+CG$, $EF=AB-BH$, sumando estas igualdades y teniendo en cuenta que $CG=BH$, como lados homólogos de triángulos iguales, se tiene $2EF=DC+AB$, de donde dividiendo por dos tenemos, $EF=\frac{DC+AB.}{2}$

ESCOLIO.—La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio se llama paralela media.

COROLARIOS.—1.° La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado é igual á su mitad; porque á un triángulo se le puede considerar como un trapecio en que una de las bases se anula ó se convierte en un punto. 2.° La parte de la paralela media comprendida entre las diagonales del trapecio, es igual á la semi-diferencia de las bases; pues en la figura 51, $MN=EN-EM$, y como $EN$ es la mitad de $AB$ y $EM$ la mitad de $DC$ según el corolario anterior, tenemos demostrado el teorema: 3.° Las rectas que unen sucesivamente los puntos medios de los cuatro lados de un cuadrilátero forman un paralelógramo; porque trazando las diagonales del cuadrilátero los lados opuestos del nuevo cuadrilátero serán iguales como mitades de las diagonales y por tanto será paralelógramo.

## LECCIÓN 8.ª

### Igualdad de Polígonos.

**94.** Hemos dicho (81), que un polígono siempre lo podemos considerar como compuesto de triángulos; por tanto nos conviene conocer los diferentes procedimientos que podemos emplear para descomponer un polígono en triángulos: desde luego trazando las diagonales posibles en un polígono (80) resultan varios triángulos, pero solo las trazadas desde un vértice á los demás no contiguos á él son las que forman triángulos que sumados componen el polígono: si tomamos un punto en el contorno que no sea vértice y le unimos por medio de rectas con los vértices que no estén en el lado en que se encuentre el punto, también resultarán varios triángulos que sumados componen el polígono: si en lugar de tomar este punto en el contorno lo tomamos en el interior del polígono y lo unimos con todos los vértices por medio de rectas, todavía resultan varios triángulos que sumados componen el polígono; por último si tomamos el punto fuera del polígono y le unimos por medio de rectas con todos los vértices, resultan varios triángulos que restados nos dan por diferencia la superficie del polígono. En el primer caso queda descompuesto el polígono en tantos triángulos como lados tiene el polígono menos dos, como sucede en el polígono *ABCDE* de la figura 53 que quedan descompuestos por las diagonales *AD* y *AC* ~~por~~ en los tres triángulos *ABC*, *ACD* y *ADE* que componen el polígono y en el cual hemos trazado las demás diagonales posibles de trazos, puesto que si hubiésemos de considerar todos los triángulos compondrían más superficie que la del polígono; es además evidente que cualquiera que sea el polígono se puede siempre, trazando diagonales desde un vértice á los demás no contiguos á él, descomponerle en tantos triángulos como lados tenga el polígono menos dos, una vez que solo habrá dos triángulos que tengan dos lados del polígono—los que tengan los lados que parten del vértice de descomposición—y los restantes uno. En el segundo caso queda descompuesto el polígono, como se vé en el polígono *ABCDE* en tantos triángulos como lados tiene el polígono menos uno, una vez que habrá dos triángu-

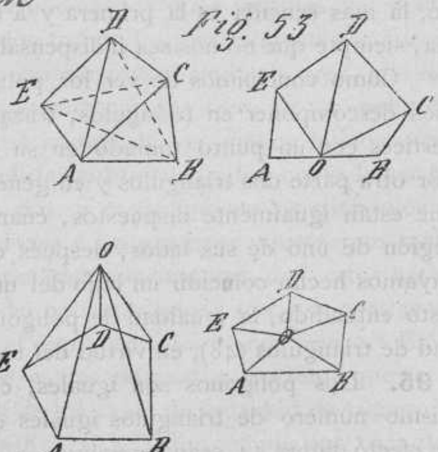


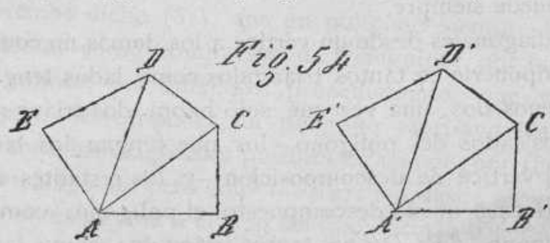
Fig. 53

los que tendrán un lado y parte de otro—los que tengan los dos lados en que queda descompuesto el lado del polígono en que se toma el punto de descomposición—y los restantes un lado. En el tercer caso queda el polígono $ABCDE$, por las rectas trazadas desde su punto interior $O$ á los vértices en tantos triángulos como lados tiene el polígono; puesto que cada triángulo tiene un lado del polígono. Por último en el cuarto caso queda también descompuesto el polígono $ABCDE$, por los rectas trazadas desde su punto exterior $O$ á los vértices, en tantos triángulos como lados tiene el polígono por la misma razón que en el caso anterior, pero de los triángulos $OEA$, $OAB$ y $OBC$, hay que restar los $OED$ y $ODC$, para obtener la superficie del polígono. De todas estas descomposiciones como se vé, la más sencilla es la primera y á ella daremos la preferencia, siempre que no nos sea indispensable alguna de las demás.

Como concluimos de ver los polígonos siempre los podemos descomponer en triángulos, trazando rectas que unan sus vértices con un punto tomado en su contorno ó fuera de él. Por otra parte dos triángulos y en general dos polígonos se dice que están igualmente dispuestos, cuando están hácia la misma región de uno de sus lados, después que por la superposición hayamos hecho coincidir un lado del uno con un lado del otro. Esto entendido, la igualdad de polígonos se funda en la igualdad de triángulos (48), en virtud del teorema siguiente.

**95.** Dos polígonos son iguales, cuando se componen del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos. En efecto, figura 54, sean los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$,

Fig. 54




en que se verifica que el primero se compone de los triángulos

$ABC$, $ACD$ y $ADE$, iguales respectivamente é igualmente dispuestos a los $A'B'C'$, $A'C'D'$, y $A'D'E'$ de que se compone el segundo; llevemos el polígono $A'B'C'D'E'$ sobre el $ABCDE$ de modo que el lado $A'B'$ coincida con su igual $AB$ y que la restante parte del polígono caiga hacia la misma región de la recta comun, entonces el triángulo $A'B'C'$ coincidirá con su igual $ABC$ y habiendo ya coincidido la recta $A'C'$ con su igual $AC$ el triángulo $A'C'D'$ coincidirá con el $ACD$ y por último habiendo coincidido las rectas $A'D'$ y $AD$ el triángulo $A'D'E'$ coincidirá con el $ADE$: los dos polígonos que superpuestos han coincidido en toda su extensión son iguales.

ESCOLIOS. 1.° Los polígonos iguales tienen todos sus elementos respectivamente iguales, y como el número de elementos es el duplo del número de lados ó de ángulos, se deduce que así como para que dos triángulos fuesen iguales no necesitábamos (48 Esc.°) todos sus elementos sino solo tres, que es el duplo de los lados y los ángulos menos tres, en los polígonos sucede lo mismo, pues concluimos de ver que no hemos necesitado más que la igualdad de tantos triángulos como lados tengan los polígonos menos dos, y como uno de los triangulos necesitaría solo tres condiciones y los restantes, que serian tantos como lados tuviesen los polígonos menos tres, dos; estos necesitarían el duplo de lados del polígono menos seis, que con las tres del primero, tendríamos el duplo de lados menos tres. 2.° En los triángulos digimos que de los tres elementos uno tenía que ser un lado y lo deducíamos allí de los casos de igualdad de triángulos; ahora, como ya sabemos (81, c.° 4.°), que cuando dos triangulos tienen dos ángulos iguales los terceros lo serán también, se vé con claridad que dar tres ángulos es lo mismo que si solo se diesen dos: esto mismo sucede en los polígones, porque cuando se conocen todos los ángulos menos uno se conoce el otro con tal de que el contorno no se corte (82), de modo que entre los elementos que se nos den no pueden entrar más ángulos que los que tenga el polígono menos uno. 3.° En los polígonos, como en los triángulos, los lados y ángulos respectivamente iguales así como los vértices de estos, se llaman, *lados homólogos*, *ángulos homólo-*

*gos*, y *vértices homólogos*. 4.° En los polígonos, además de sus elementos esenciales lados y ángulos, hay otras rectas que se pueden trazar en ellos, como las bisectrices de lados y ángulos, las diagonales y otras de que ya nos ocuparemos: en los triángulos aunque no hay diagonales (80), hay las perpendiculares trazadas desde cada vértice al lado opuesto, que reciben el nombre de *alturas;* las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto, que se llaman *medianas;* y como en los polígonos las bisectrices de lados y angulos: en los cuadriláteros hay además de las consideradas en los polígonos, las *alturas*, en los paralelógramos y trapecios que son las distancias entre los lados paralelos: Todas las rectas de que hemos hablado aunque no son elementos esenciales, son elementos accidentales que pueden reemplazar á los esenciales; originando por tanto diferentes casos de igualdad de polígonos, triángulos y cuadriláteros, algunos de los cuales vamos á enunciar, pues su demostración se hace siempre por superposición; mas antes vamos á demostrar que bastan siempre los elementos que hemos dicho para que dos polígonos sean iguales.

**96.** Dos polígonos son iguales, siempre que tengan tantos elementos iguales é igualmente dispuestos como el duplo de sus lados menos tres, con tal de que á lo sumo sean iguales todos los ángulos menos uno.

En efecto, hemos visto (48 y 95) que el teorema se verifica para el triángulo y para el pentágono, vamos á demostrar que el teorema es general;—seguiremos para conseguirlo, un procedimiento de demostración que hemos seguido varias veces en el primer curso, y consiste en suponer que si lo que nos proponemos demostrar es cierto para un número cualquiera de lados de los polígonos lo será para cuando tengan uno mas - supongamos que sea cierto el teorema cuando los polígonos tengan $n—1$ lados, decimos que lo será cuando tengan $n$ lados, ahora bien, cuando pasamos de los polígonos de $n-1$ lados á los polígonos de $n$ lados lo que hacemos es sustituir un lado por dos y por tanto aumentar un triángulo á cada polígono, que estando como suponemos igualmente dispuestos, para que sean iguales solo necesitan dos elementos más, pero siendo cierto el teorema para cuando tenían los polígonos $n-1$ lados el número de elementos necesarios es $2(n-1)-3=2n-2-3=2n-5$, de donde sumando dos tendríamos $2n-3$. Mas puesto que el teorema es cierto para el triángulo lo será para el cuadrilátero y siéndolo para este lo será para el pentágono y así sucesivamente.

**97.** Dos polígonos del mismo número de lados son iguales. 1.° Cuando tengan iguales é igualmente dispuestos, todos los lados y todos los ángulos menos tres consecutivos. 2.° Cuando tengan iguales é igualmente dispuestos, todos los lados menos uno y todos los ángulos comprendidos por estos lados. 3.° Cuando tengan iguales, é igualmente dispuestos, todos los lados menos dos y todos los ángulos menos el comprendido por esos dos lados. 4.° Cuando tengan iguales é igualmente dispuestos, todos los lados y las diagonales trazadas desde un mismo vértice. 5.° Cuando tengan iguales é igualmente dispuestos, un lado y los ángulos que este forma con los lados adyacentes y con las diagonales trazadas por sus extremos. 6.° Cuando tengan iguales é igualmente dispuestos, un lado y las distancias de sus extremos á los demás vértices.

La demostración de todos estos casos puede hacerse ó por superposición como hemos hecho la del teorema fundamental (95), ó bien refiriéndonos á él, demostrar que en todos los casos, todos los triángulos que resulten son iguales y están igualmente dispuestos.

COROLARIOS. 1.° Dos cuadriláteros son iguales, en los seis casos anteriores: 2.° Dos trapecios, como tienen ya la condición de tener dos lados paralelos, serán iguales en los mismos casos anteriores pero suprimiendo una condición: 3.° Dos paralelógramos, como tienen dos condiciones, que son, las del paralelismo de los lados opuestos, serán iguales en los mismos casos pero suprimiendo dos condiciones: 4.° Dos rombos, como tienen tres condiciones las dos del paralelógramo y la de tener todos los lados iguales, serán iguales en los mismos casos pero suprimiendo tres condiciones: 5.° Dos rectángulos, como se hallan en el caso de los rombos por tener todos los ángulos iguales, serán iguales en los mismos casos pero suprimiendo tres condiciones: 6.º Dos cuadrados, como además de las tres condiciones del rombo tienen la condición de tener sus ángulos iguales, serán iguales en los mismos casos pero suprimiendo cuatro condiciones, es decir, que no necesitan más que una y esta ha de ser un lado ó su diagonal: 7.º Lo mismo sucede en los triángulos rectángulos, isósceles y equiláteros; pues en ellos hay que suprimir las condiciones que se nos dan; y los polígonos regulares, equiángulos y equiláteros.

Escolio.—Existen más casos de igualdad de polígonos considerando otros elementos accidentales, algunos los pondremos como problemas: las obras de problemas traen la mayor parte de ellos.

**98.** Problemas. 1.º Construir un polígono igual á otro dado. Se descompone el polígono en triángulos y se van construyendo sucesivamente triángulos iguales é igualmente dispuestos (52). 2.º Construir un paralelógramo dada una diagonal y dos lados. Se construye un triángulo con esos elementos y por los extremos del lado igual á la diagonal se trazan paralelas á los otros dos lados 3.º Construir un rombo dadas las diagonales. Se traza á una recta igual á una de las diagonales una perpendicular en su punto medio y se toman desde el punto de intersección dos distancias iguales á la mitad de la otra diagonal, las rectas que unan los extremos formarán el rombo.

Los siguientes se resuelven por un procedimiento análogo.

4.º Construir un rectángulo dada la diagonal y un lado.

5.º Construir un paralelógramo dados, un ángulo, un lado y una diagonal.

6.º Construir un paralelógramo dados, un lado y las diagonales.

7.º Construir un cuadrado dada la diagonal.

8.º Construir un trapecio dados sus lados.

# CAPÍTULO II.

## *Circunferencia.*

### LECCIÓN 9.ª

#### Circunferencia en general.

**99.** Estudiadas ya las figuras geométricas formadas por la línea recta, en todo aquello que no se refiere á su medida; réstanos, para terminar este 1.er libro, estudiar las figuras geométricas formadas por la circunferencia y la recta; únicas líneas, que ya hemos dicho estudia, la Geometría elemental.

CIRCUNFERENCIA, *es una curva cerrada* y *plana cuyos puntos equidistan de uno interior llamado* CENTRO. La figura 55 representa una circunferencia cuyo centro es *O*.

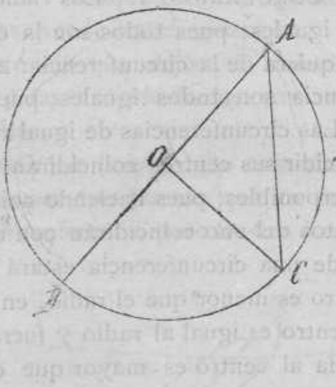
CÍRCULO, *es la porción de plano limitado por la circunferencia.* Se acostumbra á llamar también círculo á la circunferencia, lo que no tiene importancia con tal de que no confundamos la superficie limitada por la circunferencia con esta línea. En la figura 55, la porción de plano limitado por la circunferencia es un círculo.

RADIO, *es la recta que partiendo del centro termina en cualquier punto de la circunferencia*, como el *OC* de la figura 55.

CUERDA, *es toda recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.* Como *AC* de la figura 55.

DIÁMETRO, *es la cuerda que pasa por el centro.* Como *AB* de la figura 55.

Fig. 55

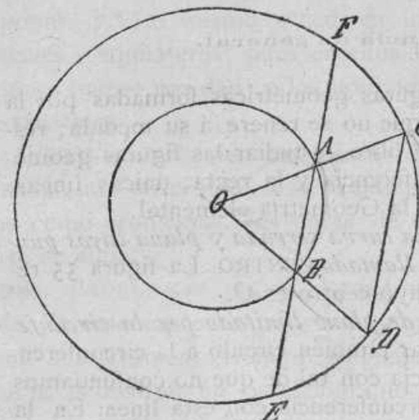



SECTOR CIRCULAR *es la porción de círculo comprendida entre un arco y los radios que van á sus extremos.* Como *BOC* de la figura 55.

SEGMENTO CIRCULAR, *es la porción de círculo comprendida entre un arco y la cuerda que une sus extremos.* Como *ADC* de la figura 55.

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS, *son las que tienen el mismo centro.* Como las de la figura 56 que tienen el mismo centro $O$. Las que no tienen el mismo centro se llaman *excéntricas.*

Fig. 56




CORONA Ó ANILLO, *es la porción de círculo comprendido entre dos circunferencias concéntricas.* Como la porción círculo comprendido entre las dos circunferencias de la figura 56.

TRAPECIO CIRCULAR, *es la porción de corona comprendida entre dos arcos y los segmentos de los radios que unen sus extremos.* Como el $ABCD$ de la figura 56. A los arcos del trapecio circular se llaman *bases.*

FAJA CIRCULAR, *es la porción de círculo comprendido entre dos cuerdas paralelas y los arcos limitadas por ellas.* Como $CDEF$ de la figura 56.

De las definiciones anteriores se deducen los siguientes

COROLARIOS. 1.º Los radios de una circunferencia son todos iguales; pues todos son la distancia del centro á un punto cualquiera de la circunferencia: 2.º Los diámetros de una circunferencia son todos iguales; pues se componen de dos radios: 3.º Las circunferencias de igual radio son iguales; pues haciendo coincidir sus centros coincidirán: 4.º Los arcos de igual radio son superponibles; pues haciendo coincidir sus centros todos los elementos del uno coincidirán con el otro: 5.º Todo punto del pla no de una circunferencia estará en el círculo si su distancia al centro es menor que el radio, en la circunferencia si su distancia al centro es igual al radio y fuera de la circunferencia si su distancia al centro es mayor que el radio. La recíproca es cierta

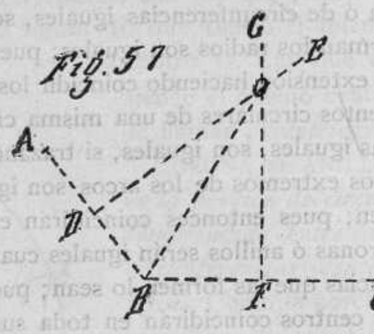
(50 Es.º): 6.º Los sectores circulares de una misma circunferencia ó de circunferencias iguales, son iguales si los ángulos que forman los radios son iguales; pues entonces coincidirán en toda su extensión haciendo coincidir los ángulos iguales: 7.º Los segmentos circulares de una misma circunferencia ó de circunferencias iguales, son iguales, si trazando los radios que van á parar á los extremos de los arcos son iguales los sectores que se formen; pues entonces coincidirán en toda su extensión: 8.º Las coronas ó anillos serán iguales cuando los radios de las circunferencias que las formen lo sean; pues entonces haciendo coincidir los centros coincidirán en toda su extensión: 9.º Los trapecios circulares de una misma corona ó de coronas iguales serán iguales, cuando los ángulos que formen los radios lo sean; pues entonces haciendo coincidir los ángulos coincidirán los trapecios circulares en toda su extensión: 10.º Las fajas circulares de un mismo círculo ó de círculos iguales serán iguales, cuando lo sean los segmentos circulares formados por cada cuerda respectivamente: 11.º El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otro en un plano, es la circunferencia trazada haciendo centro en este punto con un radio igual á la distancia comun.

Escolio.—Es conveniente observar, que así como dos rectas siempre son superponibles y una vez superpuestas se las puede hacer resbalar la una sobre la otra sin que dejen de coincidir, así también las circunferencias siempre son superponibles cuando tienen igual radio y se las puede hacer girar, una vez superpuestas, alrededor del centro sin que dejen de coincidir. Estas propiedades de las rectas y las circunferencias son notables, porque son exclusivas de ellas.

**100.** Tres puntos que no estén en línea recta determinan una circunferencia, es decir, que por tres puntos que no estén en línea recta puede pasar una circunferencia pero no dos ó más.

En efecto, figura 57, sean los tres puntos $A$, $B$ y $C$: 1.° Si los unimos por las rectas $AB$ y $BC$ y trazamos las perpendiculares $DE$ y $FG$ en los puntos medios de estas rectas se encontrarán (69, C.° 6.°) en un punto tal como el $O$ que equidistará de los $A$, $B$ y $C$ (56); luego la circunferencia que se traza haciendo centro en $O$ con un radio igual á $OB$ pasa por los tres puntos $A$, $B$ y $C$: 2.° Cualquiera otra circunferencia que pase por los tres puntos $A$, $B$ y $C$ tendrá por cuerdas las rectas $AB$ y $BC$ y el centro tendrá que estar en las perpendiculares que bisecan las cuerdas y por tanto en su intersección $O$ (57); luego todas las circunferencias que pasen por los tres puntos $A$, $B$ y $C$, tendrán por centro único $O$, y por radio $OB$ y por tanto coincidirán en una sola. Si los tres puntos están en línea recta las perpendiculares serán paralelas, y la circunferencia de radio indefinido la podemos considerar como una línea recta y viceversa.

Fig. 57




COROLARIOS. 1.° Una circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta; pues si los tuvieran las perpendiculares que bisecan las cuerdas que uniesen esos tres puntos serían paralelas (67), y no tendríamos ningún punto equidistante de ellos: si suponemos (74), que dos paralelas se encuentran en el infinito, se puede considerar á toda recta como un arco de circunferencia cuyo centro se halla en el extremo de cualquiera perpendicular indefinida trazada en un punto de ella y cuyo radio sea indefinido. 2.° Una recta y una circunferencia no pueden tener más que dos puntos comunes; una vez que la circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta: 3.° Dos circunferencias distintas no pueden tener más que dos puntos comunes; porque si tuviesen tres coincidirían. 4.° Por un punto pueden pasar un número indefinido de circunferencias; porque ese punto y dos cualesquiera de los indefinidos del espacio determinan una

circunferencia (76); 5.° Por dos puntos pueden pasar un número indefinido de circunferencias; porque esos dos puntos y uno cualquiera de los indefinidos del espacio determinan una circunferencia (76). 6.° El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasen por dos puntos es la perpendicular en el punto medio de la recta que une esos dos puntos (63). 7.° Las perpendiculares en los puntos medios de los tres lados de un triángulo se encuentran en un punto que equidista de los vértices: 8.° Las tres alturas de un triángulo se encuentran en un punto; pues son perpendiculares que bisecan á los lados del triángulo formado por las paralelas trazadas desde cada vértice del triángulo dado al lado opuesto (69, C.° 3.° y 93 C.° 1.°).

**101.** Todo diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales, llamadas respectivamente semicircunferencias y semicírculos.

En efecto, figura 58, sea un diámetro *AB* si doblamos la figura por el diámetro, la parte *ACB* coincidirá con la *ADB* sin lo cual los radios de una circunferencia no serían iguales; luego la circunferencia queda dividida en dos arcos iguales y el círculo en dos segmentos iguales.

Fig. 58

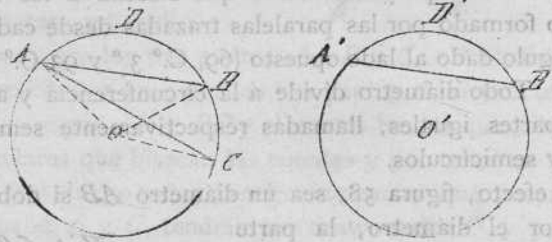

COROLARIO.—Toda cuerda tal como la *AC* que no sea diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes desiguales; puesto que evidentemente, el arco *AC* es menor que la semicircunferencia *ACB* y el arco *ADC* es mayor que la semicircunferencia *ADB*, así como el segmento *AEC* es menor que el semicírculo *ACB* y el segmento *ADC* es mayor que el semicírculo *ADB*.

ESCOLIO.—Debemos observar que á todo arco corresponde una cuerda, pero que á toda cuerda, que no sea diametro, corresponden dos arcos desiguales; por tanto cuando en adelante hablemos de cuerdas *correspondientes* á arcos entenderemos que nos referimos á los arcos menores á menos que no digamos expresamente lo contrario. A las cuerdas correspondientes á arcos también se dice que *subtienden* á esos arcos.

**102.** En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales: 1.° A arcos iguales corresponden cuerdas iguales: 2.° A mayor arco corresponde mayor cuerda.

En efecto, sean las circunferencias iguales $O$ y $O'$ figura 59,

Fig. 59.




y los arcos $ADB$ y $A'D'B'$ iguales vamos á demostrar que las cuerdas correspondienses $AB$ y $A'B'$ también son iguales; desde luego si llevamos la circunferencia $O'$ sobre la $O$ de modo que coincidan los centros y el punto $A'$ con el $A$, coincidirán las circunferencias, pero como el arco $A'D'B'$ es igual al $ADB$ el punto $B'$ coincidirá con el $B$ y las cuerdas $A'B'$ y $AB$ cuyos extremos han coincidido son iguales: por otra parte si el arco $ADC$ es mayor que el $A'D'B'$, podremos tomar á partir del punto $A$, un arco tal como el $ADB$ igual al $A'D'B'$, cuyas cuerdas $AB$ y $A'B'$ como concluimos de ver son iguales, de modo que si demostramos que la cuerda $AC$ del arco $ADC$ es mayor que la $AB$ quedará demostrado lo que nos proponemos, pero trazando los radios $OA$, $OB$ y $OC$, como el punto $B$ tiene que estar comprendido entre $A$ y $C$, el ángulo $AOB$ es menor que el $AOC$, y los triángulos $AOB$ y $AOC$ que tienen el lado $AO$ comun, los lados $BO$ y $CO$ iguales por radios de una misma circunferencia y el ángulo comprendido por $AO$ y $CO$, mayor que el comprendido $AO$ y $BO$ (47), tendrán $AC$ mayor que $AB$.

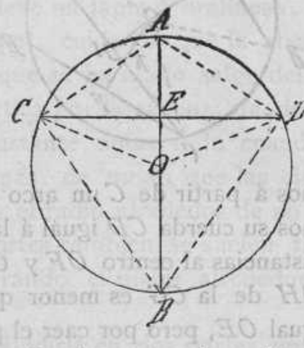
Escolio.—Es conveniente observar que en la segunda parte del teorema si en lugar de tomar los arcos menores correspondientes á las cuerdas tomáramos los mayores, resultaría que á mayor arco correspondería menor cuerda.

Recíproco.—En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales: 1.° A cuerdas iguales corresponden arcos iguales: 2.° á mayor cuerda corresponde mayor arco ~~(50)~~. (90 Es.°)

**103.** El diámetro perpendicular á una cuerda biseca á la cuerda y á los arcos correspondientes.

En efecto, figura 60, sea el diámetro $AB$ perpendicular á la cuerda $CD$, trazando los radios $OC$ y $OD$ como son iguales, $E$ será el punto medio de la recta $CD$ (55, 2.°); ahora bien, trazando las cuerdas $AC$ y $AD$, $BC$ y $BD$, serán respectivamente iguales (54, 2.°) luego $A$ es el punto medio del arco $CAD$, y $B$ el punto medio del arco $CBD$.

Fig. 60



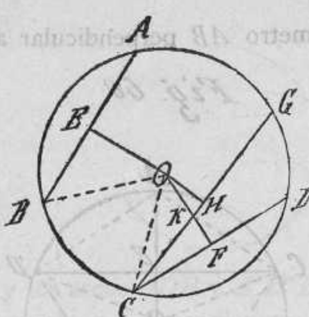

Escolios. 1.° Debemos hacer notar que la recta $AB$ cumple con cinco condiciones que son; 1.ª pasa por el centro; 2.ª es perpendicular á la cuerda $CD$; 3.ª pasa por el punto medio de esa cuerda; 4.ª pasa por el punto medio del arco $CAD$; 5.ª pasa por el punto medio del arco $CBD$. Pero como una recta queda determinada por dos condiciones y la $AB$ cumple con cinco, basta que satisfaga á dos para que queden satisfechas las restantes; por tanto, podremos enunciar y demostrar tantos teoremas diferentes como combinaciones binarias se puedan formar con cinco elementos, que según sabemos (410, 1.er Curso) son ~~con~~ diez, cuyos enunciados son fáciles, como ya hemos visto (90, Es.°), así como las demostraciones. 2.° Se llama sagita la parte de diámetro comprendida entre los puntos medios del arco y su cuerda.

Corolario.—El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas, es el diámetro perpendicular á dichas cuerdas (69, C.° 3.°)

**104.** En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales: 1.° Las cuerdas iguales equidistan del centro: 2.° Las desiguales la mayor se aproxima más al centro.

En efecto, figura 61: 1.° Sean las cuerdas $AB$ y $CD$ iguales, tracemos desde el centro las $OE$ y $OF$ respectivamente perpendiculares á $AB$ y $CD$ y los radios $OB$ y $OC$; tendremos que los triángulos rectángulos $OEB$ y $OFC$ son iguales por tener las hipotenusas y un cateto iguales, las hipotenusas por radios y los catetos $BE$ y $CF$ por mitades de cuerdas iguales, luego $OE = OF$: 2.° Sean ahora las cuerdas $AB$ y $CG$ en que se verifica que $CG$ es mayor que $AB$, tomemos á partir de $C$ un arco igual al subtendido por $AB$ y tracemos su cuerda $CD$ igual á la $AB$; según concluimos de ver sus distancias al centro $OF$ y $OE$ son iguales, luego si la distancia $OH$ de la $CG$ es menor que $OF$ también será menor que su igual $OE$, pero por caer el punto $D$ entre $C$ y $G$ el punto medio de la $CD$ caerá hacia distinta parte de la $CG$ que el centro $O$, de modo que la $OF$ tiene que cortar á $CG$ en un punto tal como el $K$ y como $OK$ es oblicua y $OH$ perpendicular á la $CG$, se tiene $OH < OK$ y con mayor razón $OH < OF$.

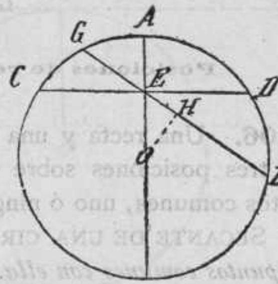
Fig. 61




Recíproco.—En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales: 1.° Las cuerdas que equidistan del centro son iguales: 2.° Las cuerdas que distan desigualmente del centro, la que dista menos es la mayor ~~(50)~~. (SOEs.º)

Corolarios. 1.° El diámetro es la mayor de las cuerdas; pues no dista nada del centro. 2.° Por un punto del círculo, la mayor cuerda que se puede trazar es el diámetro y la menor la perpendicular al diámetro en ese punto; pues trazando el diámetro que pasa por el punto $E$, figura 62, y la cuerda $CD$ perpendicular á ese diámetro, cualquiera otra tal como la $FG$ que pase por $E$, distará menos del centro, una vez que $OE$ es mayor que $OH$ por ser esta perpendicular y la $OE$ oblícua á $FG$.

Fig. 62




**105.** PROBLEMAS. 1.° Trazar una circunferencia igual á otra dada. Tómese con el compás un radio igual al de la circunferencia dada y fijando una de las piernas del compás en un punto cualquiera como centro, se hace girar la otra que lleve un lapiz ó tiralíneas, apoyándola constantemente en el papel, cuidando que la abertura del compás no varíe, ni la punta que se ha fijado salga del centro. El compás se suple en la práctica por la cadena, la cinta ó la cuerda tensa y de longitud constante, sobre todo cuando el radio excede del alcance del compás: de modo que las circunferencias se trazan, haciendo girar el radio alrededor de un punto sobre un plano fijo, y en las artes también se suelen trazar permaneciendo fijo el radio y girando el plano alrededor del centro.

2.° Dada una circunferencia dividirla en dos partes iguales. Se traza uno de sus diámetros (101).

3.° Dado un arco trazar otro igual. Trácese un arco indefinido con el radio del arco dado, tómese con el compás la cuerda del arco dado y llevemos sus extremos sobre el arco indefinido; el arco que estos limitan es igual al dado (102, Rec.°). De aquí se deduce que se pueden sumar y restar arcos de igual radio.

4.° Dados tres puntos que no estén en línea recta, trazar la circunferencia que pasa por ellos. Se unen los tres puntos por dos rectas, se trazan á estas rectas las perpendiculares que las bisequen, el punto en que se encuentren será el centro y el radio la distancia de él á cualquiera de los puntos; quedando reducido el problema al 1.° (100) y (64, 1.°)

5.° Dado un arco dividirle en dos partes iguales. Trácese la perpendicular que biseque la cuerda del arco dado (103 y 64, 1.°)

## LECCIÓN 10.

### Posiciones de rectas y circunferencias.

**106.** Una recta y una circunferencia no pueden tener más que tres posiciones sobre un plano que son; que tengan dos puntos comunes, uno ó ninguno (100, C.° 2.°)

SECANTE DE UNA CIRCUNFERENCIA, *es la recta que tiene dos puntos comunes con ella.* De modo que una cuerda prolongada por sus dos extremos, es una secante.

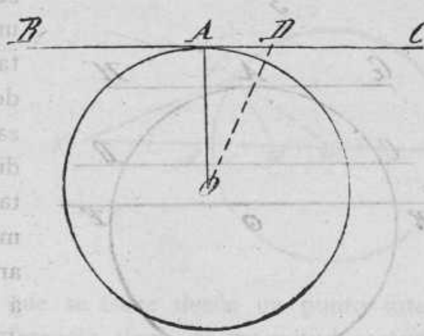
TANGENTE DE UNA CIRCUNFERENCIA, *es la recta que tiene un punto común con ella llamado punto de contacto.* De modo que una secante que gire alrededor de uno de sus puntos de intersección con la circunferencia hasta que el segundo punto de intersección se confunda con el primero, es una tangente. Esta manera de considerar á la tangente es aplicable á todas las curvas y por tanto: Se llama á una curva ó un arco de curva *convexo*, cuando esa curva ó arco de curva está en la misma región con respecto á cada una de sus tangentes; puesto que dos puntos muy próximos (10) determinan un elemento lineal, y á la tangente así considerada la podemos considerar como prolongación de uno de los elementos lineales de la curva, lo que justifica la definición (20). Así, pues, la propiedad que goza la circunferencia de no ser cortada por una recta más que en dos puntos es propiedad comun á toda línea convexa.

RECTA EXTERIOR Á UNA CIRCUNFERENCIA, *es la que no tiene ningún punto común con ella.* Todas las rectas que disten más del centro que el radio serán exteriores (99, C.° 5.°)

**107.** Toda tangente á la circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

En efecto, figura 63, sea la recta $BC$ tangente en $A$ á la circunferencia $O$, trazando el radio al punto de contacto $OA$; tendremos que las rectas que se tracen desde el centro á la recta $BC$ tal como la $OD$ serán mayores que el radio (99, C.º 5.º), luego puesto que la menor recta que se puede trazar desde el centro á la recta

Fig. 63




$BC$, es el radio $OA$, este es perpendicular á la recta $BC$, ó bien $BC$ es perpendicular á $OA$ (54, 1.º y 39, C.º 2.º)

RECÍPROCO.—Toda perpendicular á un radio en el punto en que este corta á la circunferencia; es tangente á la circunferencia en ese punto.

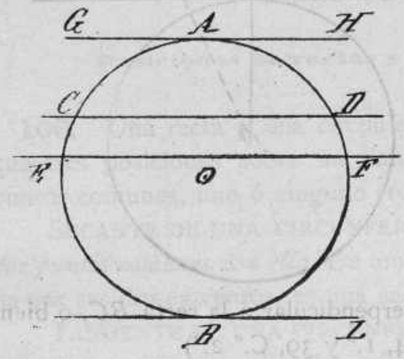
En efecto, si la recta $BC$ es perpendicular al radio $OA$ en el punto $A$, será tangente á la circunferencia en ese punto; puesto que todos los puntos de la recta $BC$, excepto el $A$ están fuera de la circunferencia por distar como el $D$ más que el radio (99, C.º 5.º)

COROLARIOS. 1.º Siempre se puede trazar una tangente en un punto de una circunferencia, pero nada más que una (54). 2.º Toda tangente es paralela á las cuerdas que el diámetro que pasa por el punto de contacto divide en dos partes iguales (103, C.º). 3.º El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á una recta en un punto, es la perpendicular á la recta en ese punto. 4.º El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á una recta trazadas con un mismo radio, es la paralela trazada á la recta á la distancia del radio.

**108.** Dos rectas paralelas interceptan en la circunferencia arcos iguales.

En efecto, figura 64, para que las rectas intercepten arcos es preciso que sean las dos secantes, una secante] y una tangente, ó las dos tangentes 1.° Si son las dos secantes *CD* y *EF* trazando el diámetro perpendicular *AB* á las dos rectas (69, E.° 3.°); tendremos (103), arco *EA* igual arco *FA* y arco *CA* igual á arco *DA*, de donde $EA - CA = FA - DA$ ó bien $EC = FD$: 2.° Si son la secante *CD* y la tangente *GH*, trazando el diámetro *AB* que pasa por el punto de contacto *A*, se tiene $CA = DA$: 3.° Si son las dos tangentes *GH* y *KL*, trazando los radios *OA* y *OB* á los puntos de contacto serán prolongación uno del otro (69, E.° 3.°).

Fig. 64

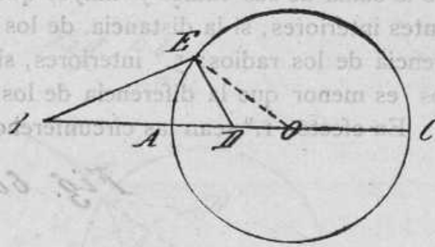



ESCOLIO. El recíproco de este teorema es cierto suponiendo que las rectas que interceptan arcos iguales no se cortan en el círculo.

**109.** NORMAL Á UNA CURVA EN UN PUNTO, *es la perpendicular trazada en ese punto á la tangente correspondiente.* Toda recta que no es normal á una curva se llama *oblícua;* pues normal y perpendicular se usan con la misma significación.

La normal á una circunferencia en un punto, es el radio que pasa por ese punto; de donde todas las normales de las circunferencias pasan por el centro: por tanto, por un punto de la circunferencia, se puede siempre trazar una normal á ella y nada más que una, mientras que por un punto interior ó exterior á la circunferencia se pueden trazar dos que tienen la misma dirección. Así en la figura 65, por el punto $D$ interior podemos trazar las normales $DA$ y $DC$, y por el punto $B$ exterior las normales $BA$ y $BC$, tanto las unas como las otras tienen la misma dirección.

Fig. 65




**110.** La oblícua que se trace desde un punto interior ó exterior, á una circunferencia tiene su magnitud comprendida entre la de las normales trazadas desde el mismo punto.

En efecto, figura 65: 1.º sea un punto $D$ interior á la circunferencia, si trazamos la oblícua $DE$ y las normales $DA$ y $DC$, vamos á demostrar que, $DA < DE < DC$, desde luego trazando el radio $OE$ tendremos en el triángulo $DEO$, $DE >$ $> OE - OD$, ó $DE > OA - OD = DA$, y $DE < OE + OD$: ó $DE < OC + OD = DC$, de modo que, $DA < DE < DC$: 2.º sea un punto $B$ exterior á la circunferencia, si trazamos la oblícua $BE$ y las normales $BA$ y $BC$, vamos á demostrar que, $BA < BE < BC$; trazando como antes el radio $OE$, en el triángulo $BOE$ se tiene $BE < BO + OE = BC$ y $BE > BO -$ $- OE = BA$, luego tenemos como antes, $BA > BE > BC$.

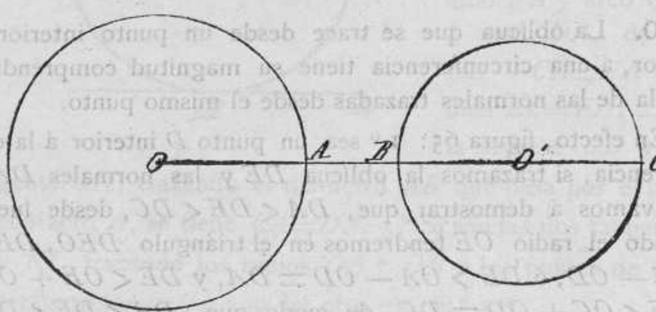
Escolio.—El corolario 5.º del número 99 queda aquí otra vez plenamente demostrado.

**111.** Dos circunferencias no pueden tener sobre un plano más que cinco posiciones que son; no tener ningún punto comun, estando una fuera de la otra, ó ser *exteriores*, tener un punto común exteriormente ó ser *tangentes exteriores*, tener dos puntos comunes ó ser *secantes*, tener un punto común interiormente ó ser *tangentes interiores*, y no tener ningún punto comun estando la una dentro de la otra ó ser *interiores* (100, C.º 3.º)

Dos circunferencias son; 1.º exteriores, si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios; 2.° tangentes exteriores, si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios; 3.° secantes si la distancia de los centros es menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia; 4.° tangentes interiores, si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios; 5.° interiores, si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.

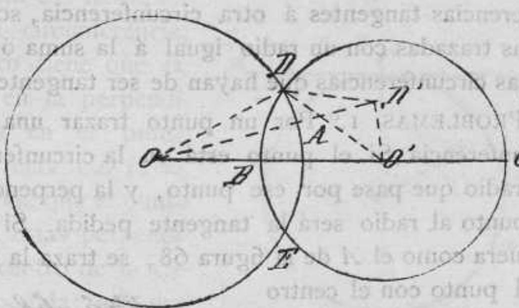
En efecto: 1.° sean las circunferencias $O$ y $O'$, figura 66, en

Fig. 66




que se verifica que $OO' > AO + BO'$, desde luego de esta desigualdad se deduce restando de los dos miembros $BO'$, $OO' - BO' > AO$, ó bien $OB > AO$, de donde la circunferencia $O'$ es exterior á la $O$, pues el punto más próximo es $B$: 2.° si en la misma figura se tuviese, $OO' = AO + BO'$, restando de los dos miembros de esta igualdad $BO'$, se tiene, $OO' - BO' = AO$, es decir, que el punto $B$ está en la circunferencia $O$, y como sabemos por el teorema anterior, que es el más próximo no tendrá más puntos comunes con la $O$ la circunferencia $O'$: 3.° si en la misma figura se tuviese, $AO - BO' < OO' < AO + BO'$, restando, de los dos miembros de la desigualdad $OO' < AO + BO'$, $BO'$ se tiene $OO' - BO' < AO$, ó bien $OB < AO$, y sumando, á los dos miembros de la desigualdad $AO - BO' < OO'$, $BO'$ se tiene, $AO < OO' + BO$, ó bien, $AO < OC$; luego los puntos $B$ y $C$ están el primero dentro y el segundo fuera de la circunferencia $O$, que será cortada por la circunferencia $O'$ en dos puntos el de entrada y el de salida. Debemos demostrar que estos dos puntos tienen que estar necesariamente á distinto lado de la recta de los centros; desde luego figura 67, si al mis-

Fig. 67.



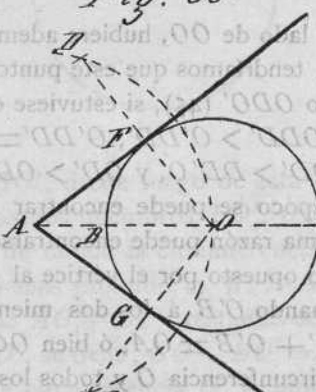
mo lado de $OO$, hubiere además del punto $D$, otro tal como el $D'$, tendríamos que este punto no podría estar dentro del triángulo $ODO'$ (45), si estuviese en el ángulo $O'OD$, será el ángulo $ODD' > O'DD'$, $O'DD' = DD'O'$, $DD'O > DD'O'$, luego $ODD' > DD'O$, y $OD' > OD$ contra la hipótesis, de modo que tampoco se puede encontrar en el ángulo $O'OD$, ni por la misma razón puede encontrarse en el ángulo $DO'O$, ni en el ángulo opuesto por el vértice al $ODO'$: 4.º si $OO' = OA - O'B$, sumando $O'B$ á los dos miembros de esta igualdad, se tiene $OO' + O'B = OA$, ó bien $OC = OA$, luego el punto $C$ está en la circunferencia $O$ y todos los demás son interiores á ella: 5.º si $OO' < OA - O'B$, sumando á los dos miembros de esta igualdad $O'B$, se tiene $OO' + O'B < OA$, ó bien $OC < OA$, luego todos los puntos de la circunferencia $O'$ están dentro de la circunferencia $O$.

RECÍPROCO.—Cuando dos circuuferencias son: 1.º exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios: 2.º tangentes exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los radios: 3.º secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia: 4.° tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios: 5.° interiores, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios (50).

COROLARIOS. 1.° El lugar geométrico de las circunferencias tangentes á otra en un punto, es el radio prolongado que pasa por ese punto. 2.° El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á otra circunferencia, son las circunferencias trazadas con un radio igual á la suma ó á la diferencia de las circunferencias que hayan de ser tangentes.

**112.** PROBLEMAS. 1.° Por un punto trazar una tangente á una circunferencia. Si el punto está en la circunferencia, se trazará el radio que pase por ese punto, y la perpendicular en el mismo punto al radio será la tangente pedida. Si el punto estuviese fuera como el $A$ de la figura 68, se traza la recta $AO$ que une el punto con el centro y encuentra en los puntos $B$ y $C$ á la circunferencia, luego haciendo centro en $A$ con el radio $AO$ se traza un arco indefinido y se toma sobre este arco á partir de $O$, arcos cuyas cuerdas sean el diámetro $BC$, tales como $OD$ y $OE$, trazando las cuerdas correspondientes, las rectas $AF$ y $AG$ que unen el punto dado con los puntos en que las cuerdas $OD$ y $OE$ cortan á la circunferencia resuelven el problema. Si el punto fuese interior á la circunferencia el problema sería imposible. De modo que el problema tiene una solución cuando el punto está en la circunferencia; dos cuando el punto es exterior, estas soluciones son iguales por serlo los triángulos rectángulos $AFO$ y $AGO$ (61, C.°); y ninguna solución cuando el punto es interior.

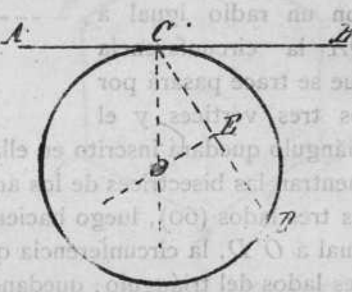
Fig. 68



2.º Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar una circunferencia que sea tangente á la recta en un punto de ella y pase además por el punto dado.

Desde luego el centro de la circunferencia que haya de ser tangente á la recta *AB* en el punto *C* y pasar por el punto *D* figura 69, ha de estar en la perpendicular trazada á la recta *AB* en el punto *C* (107, C.º 3.º), además la recta *CD* ha de ser cuerda de la circunferencia, luego el centro tiene que estar también en la perpendicular trazada en el punto medio de la recta *CD* (100, C.º 6.º), de modo que el punto común *O* de estas perpendiculares es el centro de la circunferencia pedida; así que haciendo centro en *O* con un radio igual á *OC* se traza una circunferencia y quedará el problema resuelto.

Fig. 69




## LECCIÓN 11.

### Polígonos inscritos y circunscritos.

**113**. POLÍGONO INSCRITO, *es aquel cuyos vértices están en el contorno de otro, ó de una curva.*

POLÍGONO CIRCUNSCRITO, *es aquel cuyos lados pasan por los vértices de otro, ó son tangentes á una curva.*

Cuando una figura está inscrita en otra, esta está circunscrita á la primera; y recíprocamente.

**114.** Un triángulo se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro. En efecto figura 70, sea un triángulo cualquiera $ABC$; 1.º el punto $O$, en que se encuentran las perpendiculares que bisecan los lados, equidista de los vértices (100, C.º 7.º), luego haciendo centro en $O$ con un radio igual á $OA$ la circunferencia que se trace pasará por los tres vértices y el triángulo quedará inscrito en ella: 2.º el punto $O'$ en que se encuentran las bisectrices de los ángulos $A$ y $C$ (70) equidista de los tres lados (60), luego haciendo centro en $O'$ con un radio igual á $O'D$, la circunferencia que se trace será tangente á los tres lados del triángulo, quedando por tanto circunscrito.

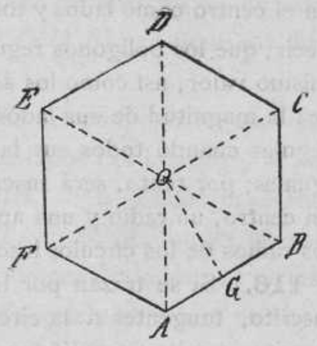

COROLARIO.—Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un mismo punto.

ESCOLIOS. 1.º Es conveniente observar que siendo únicos los puntos $O$ y $O'$, son también únicos los círculos circunscritos é inscritos. 2.º En el triángulo isósceles los centros $O$ y $O'$, están en la bisectriz del ángulo opuesto á la base (90 Es.º); y si el triángulo es equilátero, los círculos son concéntricos. 3.º Prolongando los lados $BA$ y $BC$ y trazando las bisectrices de los ángulos externos $A$ y $C$ se encontrarán en un punto $O''$, equidistante de los tres lados del triángulo; de modo que la circunferencia que se trace, haciendo centro en $O''$ con un radio igual á la distancia á cualquiera de los lados, será tangente á los lados del triángulo, pero ni el triángulo queda circunscrito, ni por consecuencia el círculo inscrito en él, ni por último este círculo es único, puesto que lo mismo sucedería prolongando los lados $AC$ y $AB$, así como los $CA$ y $CB$; de aquí que á estos nuevos círculos tangentes á los tres lados del triángulo, cuando se les considera prolongados, se les llame círculos *exinscritos.*

**115.** Un polígono regular se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro.

En efecto, figura 71, sea un polígono regular cualquiera *ABCDEF;* 1.º trazando las bisectrices de los ángulos *A* y *B* se encontrarán en un punto tal como el *O* (70), el triángulo *AOB* será isósceles, pues los lados *OA* y *OB* son iguales por oponerse á ángulos iguales, si ahora se traza la bisectriz del ángulo en *C*, encontrará á la del ángulo en *B* en el mismo punto *O*, una vez que el nuevo triángulo que formen las bisectrices de los ángulos *B* y *C* sobre ser isósceles es igual al *AOB*, por tener un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales, de modo que teniendo que tener los lados homólogos respectivamente iguales no puede cortar la bisectriz del ángulo en *C* á la del ángulo en *B* en otro punto más que en el *O*, por la misma razón pasarían todas las demás bisectrices del polígono por el mismo punto y todos los triángulos que en él se formen son iguales é isósceles, así que la circunferencia que se trace haciendo centro en *O* con un radio igual á *OA* pasará por todos los vértices del polígono y éste quedará inscrito en el círculo; 2.º los triángulos isósceles é iguales que se forman en *O* tienen sus alturas iguales, por tanto la circunferencia que se trace haciendo centro en *O* con un radio igual á *OG* será tangente á los lados del polígono y éste quedará circunscrito al círculo.

Fig. 71



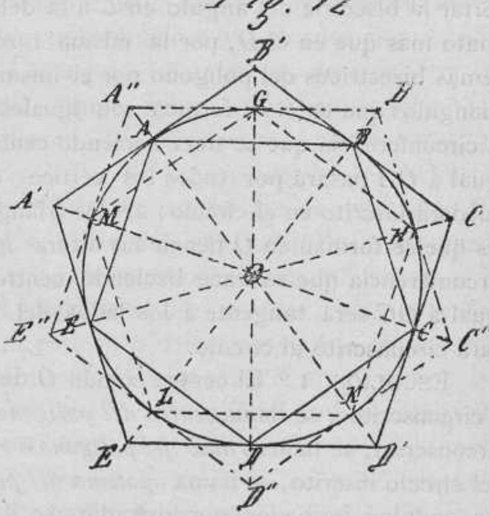

ESCOLIOS. 1.º El centro común *O* de los círculos inscritos y circunscritos, se llama *centro del polígono:* el radio del círculo circunscrito, se llama *radio del polígono* ó *radio oblícuo:* el radio del círculo inscrito, se llama *apotema del polígono* ó radio recto: los ángulos formados por los radios se llaman *ángulos en el centro del polígono* y las apotemas son sus bisectrices (90, Es.º):

la sagita de cada uno de los arcos subtendidos por sus lados es la diferencia entre los dos radios (103, E.° 2.°). 2.° Llamando $n$ el número de lados de un polígono regular la suma de los ángulos interiores está representada en ángulos rectos por $2n—4$ y la de un ángulo por $2 - \frac{4}{n}$ (84, E.° 1.°): como hay tantos ángulos en el centro como lados y todos son iguales uno valdrá $\frac{4}{n}$, es decir, que los poligonos regulares, tienen todos sus ángulos el mismo valor, así como los ángulos en el centro, cualquiera que sea la magnitud de sus lados. 3.° Una línea quebrada se llama regular cuando todos sus lados y ángulos son respectivamente iguales; por tanto, será inscriptible y circunscriptible, teniendo un centro, un radio y una apotema, que son el centro común y los radios de los círculos inscrito y circunscrito.

**116.** Si se trazan por los vértices de un polígono regular inscrito, tangentes á la circunferencia del círculo en que esté inscrito, resulta un polígono regular circunscrito de igual número de lados que el inscrito.

En efecto, figura 72, sea $ABCDE$ el polígono regular inscrito, si se trazan las tangentes en los vértices resulta el polígono $A'B'C'D'E'$ que tiene; 1.° los ángulos iguales como ángulos homólogos de los cuadriláteros iguales $AOBB'$, $BOCC'$, $CODD'$, $DOEE'$ y $EOAA'$, que tienen dos lados y tres ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos (97, C.° 1.°);

Fig. 72



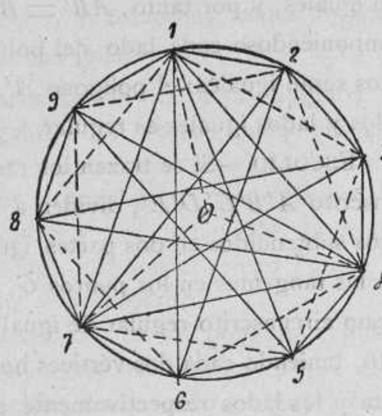

2.° los lados iguales, pues siendo iguales los cuadriláteros, como los lados del polígono inscrito les divide en dos triángulos respectivamente iguales y además isósceles (112, 1.º), de modo que los triángulos isósceles $AB'B$, $BC'C$, $CD'D$, $DE'E$, $EA'A$ son iguales, y por tanto, $AB' = B'B = BC' = C'C' =$..........; componiéndose cada lado del polígono circunscrito de dos de estos serán iguales: el polígono $A'B'C'D'E'$ que tiene sus ángulos y lados iguales es regular.

ESCOLIO.—Si se trazan los radios del polígono regular circunscrito $A'B'C'D'E'$, dividen á los lados del inscrito y á los arcos subtendidos en dos partes iguales (103), si además se trazan las tangentes en los puntos $G$, $H$, $K$, $L$, $M$, resulta un polígono circunscrito regular de igual número de lados que el inscrito, teniendo cada dos vértices homólogos y el centro en línea recta y los lados respectivamente paralelos (59, 72 y 112 1.º).

**117.** ESCOLIO GENERAL.—La construcción de polígonos regulares se puede hacer dividiendo el plano en tantas partes iguales como lados haya de tener el polígono ó bien dividiendo la circunferencia en tantos arcos iguales como lados haya de tener el polígono; una vez que un número determinado de triángulos isósceles iguales y que tengan el vértice común, forman un polígono regular de tantos lados como triángulos haya, y dividiendo la circunferencia en un número determinado de partes iguales, trazando las cuerdas respectivas y los radios se forman igual número de triángulos isósceles iguales que el de partes en que hayamos dividido la circunferencia. La división de la circunferencia en un número de partes iguales que esté representada por un número primo, en general no puede hacerse por procedimientos elementales, á menos que el número primo disminuido en una unidad sea una potencia de dos: como 3, 5, 17, &.ª

Existen polígonos regulares de diferentes especies; pues al dividir la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo 9, fig. 73, se pueden unir los puntos de división de 1 en 1, dando lugar al polígono del género 9 ó de nueve lados regular inscrito, siendo de la especie primera por no necesitar más que dar una vuelta á la circunferencia para cerrarse, también se pueden unir de 2 en 2 los puntos de división, dando lugar al polígono regular inscrito tambien del género 9 especie segunda. del mismo modo se pueden unir de 3 en 3, dando

Fig. 73




lugar al polígono regular inscrito del género 3, especie primera, por último se pueden unir de 4 en 4, dando lugar á un polígono regular inscrito del género 9 especie 4.ª: no se pueden unir los puntos de división de 5 en 5; pues sería lo mismo que de 4 en 4, una vez que la cuerda de las cuatro novenas partes de la circunferencia subtiende también á las cinco novenas partes restantes. De modo que la división de la circunferencia en $n$ partes iguales dará lugar á tantos polígonos regulares como sean los divisores simples y compuestos del número $n$, excepto el mismo número y su mitad si es par; y los primos con él ó que tengan algún factor común, puesto que todos los divisores simples y compuestos de un número y los primos con él ó que tengan algún factor comun están comprendidos en la serie, 1, 2, 3..... $\frac{n-1}{2}$; ó 1, 2, 3,..... $\frac{n-2}{2}$ en el caso de ser par, y como unir de $n$ en $n$ es no moverse de un mismo punto, y si $n$ es par, unir de $\frac{n}{2}$ en $\frac{n}{2}$ es trazar siempre la misma recta y no hay polígono: es evidente que no hay más polígonos regulares que resulten de dividir una circunferencia en $n$ partes iguales: 1.º que el número de divisores simples y compuestos del número *n*, excepto el mismo número y su mitad si es par, de las series citadas, siendo del género ó número de lados igual á *n* dividido por el divisor y de especie primera ó convexos; 2.° que el número de números primos con *n* de las mismas series, siendo del género *n* y de la especie indicada por el número primo con *n*; 3.° que los que sin ser divisores ni primos con *n* de las expresadas series, tengan algún factor común, siendo del género indicado por el cociente de dividir *n* por el m. c. d. de *n* y ese número y la especie por el cociente de dividir ese número por el citado m. c. d. Así en el ejemplo puesto en la figura 73, la serie es 1, 2, 3, 4: 1.° los divisores de $n=9$ son 1 y 3, dando lugar á dos polígonos regulares el primero del género 9 y el segundo del género $9:3=3$, y de la 1.ª especie: 2.° los primos con 9, son 2 y 4 que dan lugar á dos polígonos regulares del género 9 especies 2 y 4: 3.° en la serie no hay ningún número que sin ser divisor ni primo con 9 tenga algún factor común como sucedería si fuese $n=15$, porque entonces la série sería 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 6 ni es divisor ni primo con 15 y daría lugar á un polígono regular del género $15:3=5$, y de la especie $6:3=2$. Los polígonos de especie superior á la primera se llaman *extrellados* por la forma que afectan y son cóncavos cuyos contornos se cortan: son como los convexos inscriptibles y circunscriptibles y los centros de los círculos inscritos y circunscritos que son uno solo son centro de los polígonos, por más que esta denominación no convenga en general más que á los que tienen un número par de lados, pues en ellos se verifica: *que toda recta que pasa por ese punto y termina en su contorno, queda dividida por el punto en dos partes iguales.* No obstante los centros de los polígonos regulares de un número impar de lados si no gozan de la propiedad anterior, tienen como el de la figura 73, del género 9, 1.ª especie, la propiedad que trazando un número de radios igual al número por quien haya que multiplicar un número primo impar para que nos dé *n*, queda dividido el polígono en tantas partes iguales como expresa el citado número: así sucede que trazando tres radios, número por quien hay que multiplicar tres para que nos dé 9, tales como 01, 04, 07, queda descompuesto en 3 polígonos iguales (97, 1.°)

# LECCIÓN 12

## Figuras simétricas.

**118**. Ya sabemos que las figuras simétricas no se diferencian más que en la posición (14) de sus elementos; mas para apreciar la diferente posición de los elementos que componen una figura geométrica, necesitamos referirlos á un punto ó á una recta que se encuentra en el plano de la figura.

De aquí el que tengamos que considerar figuras simétricas con respecto á un punto, y figuras simétricas con respecto á una recta.

CENTRO DE SIMETRÍA, *es un punto que tiene la propiedad de que toda recta que pase por él y termine en el contorno de una figura, queda dividida por ese punto en dos partes iguales.* La definición de centro que hemos dado en la lección anterior es análoga á esta, en virtud de que las figuras que tienen centro propiamente tal, ese centro es un centro de simetría.

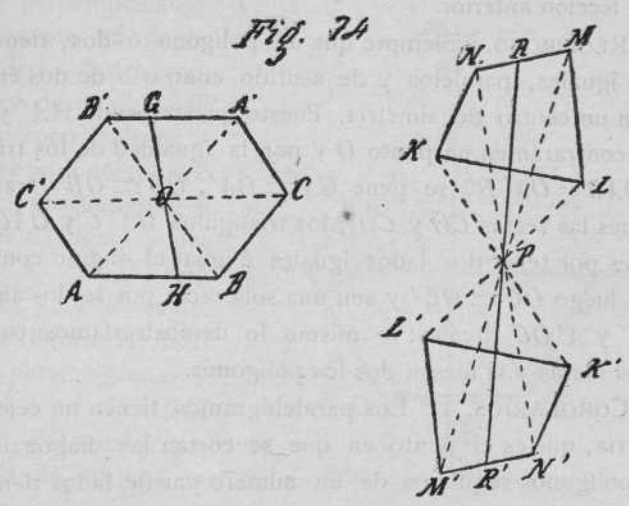
En particular se dice que dos puntos son simétricos respecto á un centro cuando la recta que los une queda bisecada por ese centro.

EJE DE SIMETRÍA, *es una recta perpendicular y bisectriz de las que unen de dos en dos los puntos del contorno de una figura.*

En particular se dice que dos puntos son simétricos respecto á un eje cuando la recta que los une es perpendicular al eje y queda bisecada por él.

**119.** Siempre que los vértices de un polígono ó de dos, están situados, de dos en dos, en rectas que pasen por un mismo punto y quedan bisecadas en él, se verifica: 1.º Que los lados del polígono ó de los dos polígonos, son iguales, paralelas y de sentido contrario: 2.º Que toda recta que pase por el punto de concurso y termine en dos lados opuestos, queda bisecada por dicho punto, que es un centro de simetría.

En efecto, figura 74, sea el polígono $ABCA'B'C'$ ó los




dos polígonos $KLMN$ y $K'L'M'N'$, en que las rectas $AA'$, $BB'$, $CC'$ del polígono pasan por el punto $O$ y quedan bisecadas en él; lo mismo que $KK'$, $LL'$, $MM'$ y $NN'$ pasan por el punto $P$ y quedan bisecadas en él, tendremos: 1.° los triángulos $OAB$ y $OA'B'$ del polígono, así como los $PMN$ y $PM'N'$ de los dos polígonos, son respectivamente iguales, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego los lados $AB$ y $A'B'$ iguales, los ángulos $OAB$ y $OA'B'$ iguales y por tanto las rectas $AB$ y $A'B'$ paralelas á distinto lado de $AA'$, lo mismo sucede respecto de $MN$ y $M'N'$. 2.° los triángulos $OAH$ y $OA'G$ del polígono así como los $PRM$ y $PR'M'$ de los dos polígonos, son respectivamente iguales, por tener un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales; luego $OH = OG$ y $PR = PR'$, de modo que $O$ y $P$ son centros de simetría, pues lo que demostramos de $GH$ y $RR'$ demostraríamos lo mismo de otras rectas cualesquiera que pasen respectivamente por $O$ y $P$ y terminen en dos lados opuestos.

COROLARIO.—Para que un polígono tenga centro de simetría es preciso que tenga un número par de lados. Lo que está conforme con lo que hemos dicho respecto al centro en general en la lección anterior.

RECÍPROCO.—Siempre que un polígono ó dos, tienen los lados iguales, paralelos y de sentido contrario de dos en dos, tienen un centro de simetría. Puesto que trazando $AA'$ y $BB'$ se encontrarán en un punto $O$ y por la igualdad de los triángulos $OAB$ y $OA'B'$ se tiene $OA = OA'$, $OB = OB'$, trazando después las rectas $CO$ y $C'O$, los triángulos $OA'C$ y $OAC'$ son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego $OC = OC'$ y son una sola recta por ser los ángulos $AOC'$ y $A'OC$ iguales: lo mismo lo demostraríamos para las demás rectas y si fuesen dos los polígonos.

COROLARIOS. 1.° Los paralelógramos tienen un centro de simetría, que es el punto en que se cortan las diagonales. 2.° Los polígonos regulares de un número par de lados tienen un centro de simetría que es el centro del polígono.

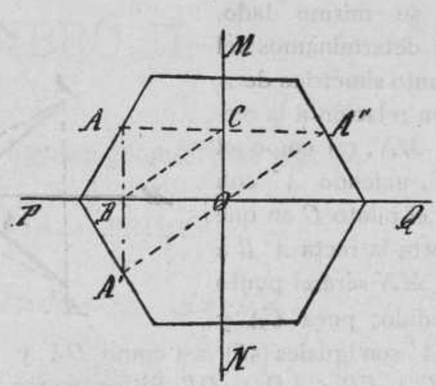
ESCOLIO.—Es conveniente observar que las figuras simétricas con respecto á un centro son siempre superponibles directamente, sin más que hacerlas girar alrededor de su centro.

**120.** Toda recta que divida á una figura en dos partes iguales pero de distinto sentido es un eje de simetría y la figura es simétrica respecto á ese eje. Así la bisectriz del ángulo opuesto á la base en el triángulo isósceles es un eje de simetría (94, E.°), la bisectriz de un ángulo es un eje de simetría (60), los diámetros de las circunferencias son ejes de simetría (103), la recta de los centros de dos circunferencias es un eje de simetría (111). Todas las figuras simétricas respecto á un eje son superponibles por rebatimiento, es decir, por superposición inversa. Como hay figuras simétricas que tienen más de un eje nos conviene demostrar el teorema siguiente.

**121.** Siempre que una figura tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, tiene por centro de simetría el punto de intersección de dichos ejes.

En efecto, sea la figura 75 que tiene los dos ejes $MN$ y $PQ$ perpendiculares, si tomamos un punto cualquiera $A$ del contorno y desde él trazamos perpendiculares á los ejes tales como $AA'$ y $AA''$, tendremos que por ser $CO$ igual y paralela á $AB$ lo será también á $A'B$, es decir, la figura $A'BOC$ es un paralelógramo y por tanto $A'O = BC$, por ser $BO$ igual y paralela á $AC$ lo será también á $A''C$, siendo también un paralelógramo $BOA''C$ y por consecuencia $A''O = BC$; las dos rectas $A'O$ y $A''O$ iguales y paralelas á la misma recta $BC$ son iguales entre sí y prolongación la una de la otra (69, C.° 1.°). De modo que el punto $O$ que divide en dos partes iguales á cualquier recta que pase por él y termine en el contorno de la figura es el centro de simetría de esa figura.

Fig. 75



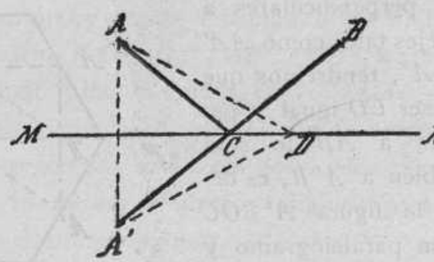

ESCOLIOS. 1.° Los dos ejes perpendiculares dividen á la figura en cuatro partes superponibles, las adyacentes por rebatimiento y las opuestas por rotación; de modo que las figuras simétricas con respecto á un centro son superponibles directamente, y las simétricas con respecto á un eje son superponibles inversamente. Estas son las figuras que propiamente se llaman simétricas.

2.° Un rombo tiene dos ejes que son sus diagonales (99): Un rectángulo dos ejes que bisecan perpendicularmente sus lados opuestos: Un cuadrado tiene cuatro: un círculo tiene un número indefinido, pues lo son todos sus diámetros. Todas las figuras simétricas se pueden considerar compuestas de triángulos isósceles con un eje común.

**122**. PROBLEMAS. 1.° Dada una recta y 2 puntos fuera de ella, determinar un punto en la recta tal que la suma de las distancias á los puntos dados sea un mínimo.

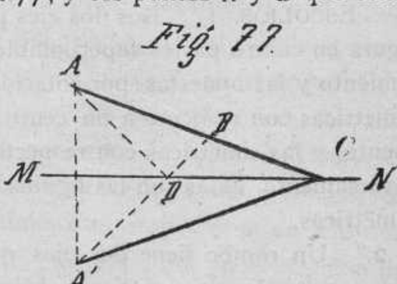
Sea la recta $MN$ figura 76 y los puntos $A$ y $B$ que están á su mismo lado, si determinamos el punto simétrico de $A$ con relación á la recta $MN$, tal como el $A'$, uniendo $A'$ con $B$ el punto $C$ en que corta la recta $A'B$ á la $MN$ será el punto pedido; pues $CA$ y $CA'$ son iguales (56), así como $DA$ y $DA'$ y se tiene $A'B$ ó $AC + CB < AD + DB$. Si los puntos fuesen $A'$ y $B$ que están á distinto lado evidentemente $A'C + CB < A'D + DB$. Luego el punto $C$ resuelve el problema en los dos casos. Es notable que los ángulos $ACM$ y $BCN$ son iguales por ser los dos iguales con el $MCA'$. 2.° Dada una recta y dos puntos fuera de ella, determinar un punto en la recta tal que la diferencia de las distancias á los puntos dados sea un máximo.

Fig. 76




Sea la recta $MN$, figura 77, y los puntos $A$ y $B$ que están á un mismo lado de la recta, si trazamos la recta $AB$ hasta que corte á $MN$ en $C$, se tiene $AC - BC = AB$, pero uniendo otro punto cualquiera de la recta con los puntos dados tal como el $D$, se tiene $AD - DB < AB$. Si los puntos estuviesen á distintos lados como $A'$ y $B$ determinando el punto $A$ simétrico de $A'$ se tiene también $A'C - BC = AB$, y $A'D - DB < AB$ Luego el punto $C$ resuelve el problema.

Fig. 77



# LIBRO II.

## Medida de las figuras geométricas planas.

### CAPÍTULO PRIMERO.

### *Longitudes y Areas.*

### LECCIÓN 13.

#### Medida de la recta y ángulos centrales.

**123**. Ya sabemos (30, 1.er Curso) que, medir una recta es determinar la totalidad de veces que contiene á otra constante que se toma por unidad

Las unidades lineales del sistema de mensuración legal son (87, 1.er Curso) el metro con sus múltiplos y divisores.

Las mediciones en general se efectúan por dos procedimientos que se denominan *directo* é *indirecto:* consiste el directo, en llevar la unidad sobre la cantidad que se haya de medir todas las veces que se pueda: consiste el indirecto, en medir directamente cantidades que mediante las relaciones que las ligan con la que nos proponemos medir, vengamos á conocer su medida. El primer procedimiento es pocas veces aplicable, pero bien se comprende que es el fundamento del segundo y que por tanto es el primero que tenemos que estudiar.

La medición directa de las rectas se efectúa llevando alguna de las diferentes unidades lineales, del sistema de mensuración que empleemos, sobre la recta desde uno de sus extremos, todas las veces consecutivas posibles; y si queda algún resto, se lleva sobre él alguno de los divisores de la unidad, continuando así hasta que no quede resto alguno, ó sea un resto inapreciable.

En la práctica se hace uso para medir las rectas, si no son de gran magnitud, de el doble decímetro de boj ó de marfil dividido en centímetros y milímetros; ya llevando la magnitud de la recta tomada con un compás sobre la regla, ó bien la regla sobre la recta, de cualquier modo el número de divisiones de la regla será la longitud de la recta.

Cuando las rectas tienen gran magnitud, se miden con un metro, de boj ó de cualquiera otra sustancia, compuesto de diez piezas articuladas de un decímetro y divididas en centímetros y milímetros: también se emplean reglas de dos ó tres metros, la cadena de agrimensor de un decámetro ó dos, ó la cinta barnizada; estando divididas en unidades que sean divisores de la que se tome en ellas como principal.

Según tuvimos ocasión de decir (287, 1.^er Curso) rara vez se ejecuta una medición con exactitud, y como quiera que, la medición en general de las extensiones se funda en la medición directa de la recta, de aquí que esta medición que á primera vista parece sencilla y fácil de ejecutar—cuando no hay inconveniente en despreciar los errores debidos tanto á los instrumentos como á la habilidad del operador—no lo es cuando se desee una gran exactitud, como sucede en la mayor parte de las Matemáticas mixtas, y entonces los procedimientos que se emplean no son elementales y solo el procedimiento debido al Matemático español Núñez tiene ese carácter y consiste, en un aparato que lleva el nombre de Nonius compuesto de dos reglas; una fija dividida en partes iguales que pueden ser milímetros, y otra movible sobre la fija y de una longitud igual á un número de partes de la regla fija igual á la parte alícuota que deseemos apreciar de la unidad en que se halle dividida la recta fija, menos una, de modo que si queremos apreciar décimas de milímetro tomaremos la regla movible ó reglilla de una longitud igual á 9 milímetros y la dividiremos en diez partes iguales, entónces estas partes serán 0'9 de milímetro y si hacemos coincidir el cero de la regla y la reglilla la 1.ª división de la reglilla se diferenciará de la de la regla en 0'1, la 2.ª en 2 y así sucesivamente hasta la décima y novena que coincidirán y se diferenciarán en un milímetro. Con el Nonius pues, podemos apreciar décimas de milímetro pues si una recta llevada sobre el Nonius tiene 8 partes de la regla y no llega á 9, se corre la reglilla hasta que coincida con el extremo de la recta y entonces la división de la reglilla que coincida con una de las de la regla nos dará las décimas de milímetro, si por ejemplo es la 4, la recta tendrá de longitud 8'4 de milímetro.

ESCOLIOS. 1.º No nos detenemos en más detalles, porque esto como el uso de la regla, el compás, la escuadra y demás instrumentos de uso frecuente en Matemáticas, es preferible á toda descripción y dibujo, el presentar á la vista de los alumnos los objetos y enseñarles á operar con ellos; trabajo exclusivo, en nuestro entender, del Profesor.

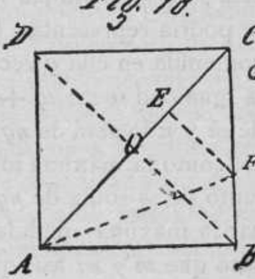
2.º Las rectas una vez medidas sus longitudes son números que se someten al cálculo; no obstante el resultado del cálculo puede obtenerse, en la mayor parte de los casos por medios elementales, gráficamente como ya hemos visto respecto de la suma y diferencia de rectas y como ya veremos respecto de las demás operaciones del cálculo.

**124.** La determinación de la máxima medida común de dos rectas (80 y 155, 1.er Curso), que podemos representar su magnitud por $m$ y $n$, se verificará llevando la $n$ sobre la $m$ — suponiendo $m > n$ — todas las veces que se pueda y en el caso de que $n$ esté contenida un número exacto de veces en $m$, $n$ ~~esta~~ será la máxima medida común, pero si hubiese un resto se podría representar la magnitud de $m$ suponiendo que $n$ esté contenida en ella $q$ veces y no $q + 1$ y llamando el resto $r$, por la igualdad $m = nq + r$; pero como la medida máxima común de $m$ y $n$ lo será de $nq$ y por tanto de $r$ diferencia entre $m$ y $nq$, así como la máxima medida común de $n$ y $r$ lo será de $nq$ y por tanto de $m$ suma de $nq$ y $r$, queda el caso reducido á determinar la máxima medida común de $n$ y $r$ que están en el mismo caso que $m$ y $n$; así que para determinar la máxima medida común de dos rectas se puede seguir la misma regla dada (156, 1.er Curso) para determinar el máximo común divisor de dos números enteros, sin más que en lugar de decir se divide el mayor por el menor y este por el resto, si lo hay, y así sucesivamente, aquí se dirá se lleva la menor sobre la mayor, el resto si lo hay sobre la menor y así sucesivamente hasta que no haya resto, lo cual sucedía siempre en los números enteros y aquí cuando las rectas son comensurables, pero no cuando son incomensurables. Así que como ya digimos (330, 1.er Curso) siempre que queramos determinar la relación entre dos cantidades homogéneas puede suceder que el resultado sea un número entero, ó un número fraccionario ó un número incomensurable, en el primer caso la segunda será la máxima medida común de las dos, en el segundo la parte alícuota de la segunda indicada por el denominador del número fraccionario será también la máxima medida común, pero en el tercero no hay máxima medida común ó lo que es lo mismo son incomensurables.

ESCOLIO.—En la práctica al aplicar el procedimiento expuesto nunca llegaríamos á no terminar la operación, dada la imperfección de nuestros sentidos y de los instrumentos; pero en teoría así como hemos demostrado la existencia de los números incomensurables mediante el cálculo (270, 1.er Curso), se demuestra gráficamente la existencia de las rectas incomensurables por el teorema que sigue. La diagonal y el lado de un cuadrado son dos rectas incomensurables entre sí.

En efecto, figura 78, el lado $AB$ es menor que la diagonal $AC$ y mayor que su mitad $AO$, de modo que llevando $AB$ sobre $AC$ obtendremos un resto tal como $EC$ menor que $AB$: para continuar el procedimiento tendremos que llevar el resto $EC$ sobre $AB$ ó su igual $BC$, pero si trazamos $EF$ paralela á $BD$, resulta el triángulo $CEF$ rectángulo en $E$, isósceles, puesto que los ángulos $ECF$ y $EFC$ son iguales los

Fig. 78.



dos al $CBO$, y además por la igualdad de los triángulos rectángulos $ABF$ y $AEF$ (60, C.°), se tiene $BF = EF$ y como $EF = EC$, tenemos que $BC$ contiene dos veces á $EC$ y queda un resto $CG$ menor que $EC$. Resultado que podemos enunciar diciendo: *en todo triángulo isósceles rectángu lo el cateto contiene dos veces la diferencia entre la hipotenusa y el cateto, mas un resto menor que esa diferencia.* De suerte que $EC$ contendrá dos veces á $CG$ más un resto menor que él, así podríamos continuar sin llegar nunca á un resto nulo, es decir, que la operación expuesta en el procedimiento anterior no tendrá término.

**125.** Como los ángulos son porciones indefinidas de superficies planas (35), es imposible el poderlos medir directamente; tenemos por consiguiente que apelar al procedimiento indirecto para medirlos. Pero como el procedimiento indirecto consiste (123), en medir directamente cantidades que tengan una relación tal con la que nos proponemos medir, que podamos inmediatamente conocer su medida; de aquí, el que antes de entrar en la medición indirecta de los ángulos, nos ocupemos —puesto que todas las mediciones indirectas tienen el mismo fundamento—de dar á conocer el procedimiento general para verificar las medidas indirectas basado en lo expuesto (248 y 249, 1.er Curso); una vez que las cantidades proporcionales nos proporcionan siempre las relaciones que necesitamos para obtener con toda la exactitud posible la medida de las cantidades que no podamos obtener directamente.

Las cantidades proporcionales, con arreglo al principio de proporcionalidad, son directamente proporcionales ó simplemente proporcionales, é inversamente proporcionales, cuando se trata de dos cantidades hetereogéneas; pero tratándose de dos cantidades homogéneas además hay la proporcionalidad recíproca en virtud del teorema fundamental y su recíproco de las igualdades fraccionarias ó proporciones geométricas (241, 242, y 337, 1.er Curso).

Así siendo $A$ y $B$ dos cantidades hetereogéneas si obedecen al principio de proporcionalidad tendremos, llamando $a$ y $a_1$ á dos valores de $A$; y $b$ y $b_1$ á los valores correspondientes de $B$; proporcionalidad directa $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, proporcionalidad inversa $\frac{a}{a_1}=\frac{b_1}{b}$: pero si $AyB$ son cantidades homogéneas para que sean proporcionales basta que $aa_1=bb_1$, pues sabemos que entónces tendremos $\frac{a}{b}=\frac{b_1}{a_1}$ y las siete restantes que de ella se deducen (242, C.º 1.er Curso); de modo que las proporciones geométricas distintas con los cuatro números, $a$, $a_1$, $b$, y $b_1$, son, $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, $\frac{a}{a_1}=\frac{b_1}{b}$ y $\frac{a}{b}=\frac{b_1}{a_1}$; la 1.ª expresa la proporcionalidad directa, la segunda la inversa y la tercera la recíproca. Aunque en geometría se nos presentan las tres clases de proporcionalidad la más interesante es la directa, por lo que nos conviene estar seguros de cuándo dos cantidades son directamente proporcionales, lo que se consigue mediante el siguiente teorema.

**126.** Dos cantidades son proporcionales, cuando á dos valores cualesquiera iguales de la primera corresponden dos valores iguales de la segunda, y cuando á la suma de dos valores cualesquiera de la primera corresponde un valor que sea la suma de los valores correspondientes de la segunda.

En efecto, conservando la notación anterior, supongamos que la relación $\frac{a}{a_1}$ sea $\frac{4}{7}$; ó lo que es lo mismo, que $a$ sea los $\frac{4}{7}$ de $a_1$; designando por $\alpha$ la séptima parte de $a_1$, se tiene, $a=4\alpha$ y $a_1=7\alpha$: Llamando ahora $\beta$ el valor de $B$ correspondiente á $\alpha$, se verifica por hipótesis que á los valores, $\alpha+\alpha=2\alpha$, $2\alpha+\alpha=3\alpha$,......, $6\alpha+\alpha=7\alpha$, corresponden respectivamente los valores $\beta+\beta=2\beta$, $2\beta+\beta=3\beta$,..., $6\beta+\beta=7\beta$. Pero los valores de $B$ que según el supuesto corresponden á $4\alpha=a$ y $7\alpha=a_1$, son $4\beta=b$ y $7\beta=b_1$; luego $\frac{b}{b_1}=\frac{4}{7}=\frac{a}{a_1}$: Si la relación $\frac{a}{a_1}$ fuese incomensurable estará expresada (330, 1.er Curso) por la limitación $\frac{p}{q}<\frac{a}{a_1}<\frac{p+1}{q}$, ó lo que es lo mismo $\frac{p}{q}a_1<a<\frac{p+1}{q}a_1$;

designando por $\alpha$ la $q$ ésima parte de $a_1$, se tiene, $p\alpha < a < (p+1)\alpha$ y $a_1 = q\alpha$: Llamando $\beta$ el valor de $B$ correspondiente á $\alpha$, á los valores $p\alpha$, $(p+1)\alpha$, $q\alpha$, de $A$ corresponderán respectivamente los $p\beta$, $(p+1)\beta$, $q\beta$ de $B$; y como por hipótesis á mayor valor de $A$ corresponde mayor valor de $B$, se tendrá, $p\beta < b <$ $< (p+1)\beta$, $b_1 = q\beta$, de donde $\frac{p}{q} b_1 < b < \frac{p+1}{q} b_1$ ó bien $\frac{p}{q} < \frac{b}{b_1} < \frac{p+1}{q}$, las dos relaciones $\frac{a}{a_1}$ y $\frac{b}{b_1}$ que están expresadas por la misma limitación son iguales (331, 1.er Curso).

RECÍPROCO.—Si dos cantidades son proporcionales se verifica, que á valores iguales de la primera corresponden valores iguales de la segunda, y que á la suma de dos valores cualesquiera de la primera corresponde la suma de los valores correspondientes de la segunda.

En efecto, si $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ evidentemente cuando $a = a_1$ tiene que ser $b = b_1$, además (243, C.° 5.° 1.er Curso) $\frac{a + a_1}{a_1} =$ $= \frac{b + b_1}{b_1}$, luego queda demostrado el teorema.

ESCOLIO.—Es conveniente observar que para poder comparar dos cantidades es preciso que su igualdad y adición se puedan definir de un modo exacto, y para que pudiéndolas comparar sean proporcionales se necesita haya correspondencia en la igualdad y en la suma; pues cualquiera que falte ya no serán proporcionales como sucede por ejemplo con el arco y su cuerda que hay correspondencia en la igualdad (102), pero evidentemente no la hay en la suma y por tanto no son proporcionales.

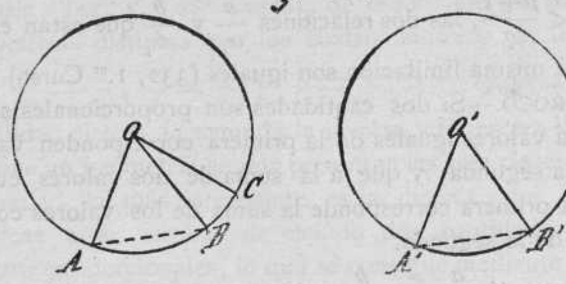
**127**. Dos radios de un círculo forman siempre un ángulo cuyo vértice está en el centro, de aquí el que á esos ángulos se les llame *centrales*, y aquellos que se hallen en el plano del círculo y cuyo vértice no esté en el centro del círculo se les dá el nombre de *excéntricos*.

**128**. En un mismo círculo ó en círculos iguales, se verifica:

1.° Dos ángulos centrales iguales, interceptan arcos iguales: 2.° Si un ángulo central es la suma de otros dos, el arco interceptado por aquel es la suma de los arcos interceptados por estos.

En efecto, figura 79, sean los círculos iguales $O$ y $O'$ en

Fig. 79.




los que se verifica que los ángulos centrales $AOB$ y $A'O'B'$ son iguales, vamos á demostrar; 1.° que $AB$ y $A'B'$ son también iguales, una vez que trazando las cuerdas $AB$ y $A'B'$, los triángulos $AOB$ y $A'O'B'$ son iguales, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego los lados homólogos $AB$ y $A'B'$ serán iguales, y por tanto los arcos subtendidos (102, R.°); 2.° que $AC$ es la suma de los arcos $BC$ y $A'B'$, si el ángulo $AOC$ es la suma de los ángulos $A'O'B'$ y $BOC$, una vez que llevando el círculo $O'$ sobre el $O$ de modo que coincidan los centros, el radio $O'B'$ con el $OB$ y el $O'A'$ caiga á distinto lado de $OB$ que $OC$, tomará el ángulo $A'O'B'$ la posición del $AOB$ y como son iguales, los arcos $A'B'$ y $AB$ son iguales, así como el ángulo $AOC$ es la suma de los $A'O'B'$ y $BOC$, pero el arco que intercepta el ángulo $AOC$ se compone de $AB = A'B'$ y $BC$, luego cuando un ángulo es la suma de otros dos, el arco interceptado por ese ángulo es la suma de los arcos interceptados por los dos.

Corolarios. 1.° Los ángulos centrales de un círculo ó de círculos iguales son proporcionales á los arcos interceptados ó arcos correspondientes; pues satisfacen á las condiciones necesarias para ello (126, E.º).

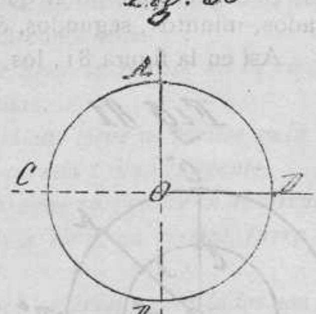
2.º Todo ángulo central tiene la misma medida que ~~un~~ su arco correspondiente, siempre que se tome por unidad de ángulos el ángulo central cuyo arco correspondiente sea el arco elegido para unidad de arcos; pues llamando $A$ un ángulo central y $B$ la unidad angular, así como $a$ y $b$ respectivamente los arcos interceptados de un mismo círculo ó de círculos iguales, se tiene con arreglo al teorema $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, cuyo primer miembro es la medida del ángulo y el segundo la del arco correspondiente.

ESCOLIOS.—1.º Se llama arco correspondiente á un ángulo el interceptado entre sus lados y descrito desde su vértice como centro: con un radio arbitrario y ángulo correspondiente á un arco el formado por los radios trazados á los extremos. Un ángulo tiene un número indefinido de arcos correspondientes; pero un arco no tiene más que un ángulo correspondiente.

2.º El corolario segundo se enuncia abreviadamente diciendo: *todo ángulo central tiene por medida el arco correspondiente.*

3.º Como ya hemos visto que la unidad de ángulos, á quien hemos referido hasta ahora los demás para determinar su magnitud, es el ángulo recto la unidad de arcos será su arco correspondiente que es un cuadrante; pues si trazamos el arco correspondiente del ángulo recto $AOB$ figura 80, y completamos la circunferencia después de prolongar sus lados se tiene que los diámetros perpendiculares $AD$ y $BC$ dividen la circunferencia en cuatro partes iguales, y por tanto cada una será un cuadrante.

Fig. 80




**129.** PROBLEMAS. 1.º Trazar el arco correspondiente á un ángulo dado. Se hace centro en el vértice y con un radio arbitrario se traza el arco pedido.

2.° Trazar el ángulo correspondiente á un arco. Se traza por el centro del arco dado los radios que van á parar á sus extremos.

3.° Construir un ángulo igual á otro dado. Se traza el arco correspondiente al ángulo dado, se construye un arco igual á él (105, 3.°) y se traza su ángulo correspondiente.

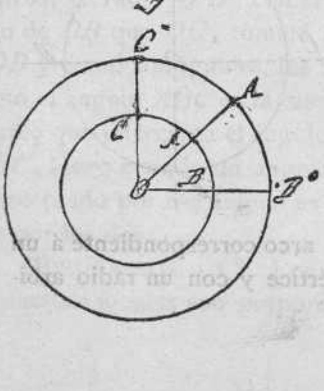
4.° Dividir un ángulo en dos partes iguales Se traza su arco correspondiente, se divide este arco en dos partes iguales (105, 5.°) y uniendo el vértice con el punto medio del arco queda resuelto el problema.

5.° Hallar la máxima medida común de dos ángulos. Se trazan sus arcos correspondientes con igual radio y se sigue el mismo procedimiento que para hallar la máxima medida común de dos rectas.

**130.** ESCOLIO GENERAL.—Ya sabemos que las unidades angulares en los distintos sistemas de mensuracion son: (87, 1.er Curso) circunferencia, dos ángulos llanos; angulo llano, dos ángulos rectos; ángulo recto, 90 grados; grado, 60 minutos; minuto, 60 segundos &.a; en la division sexagesimal, y en la centesimal, ángulo recto, 100 grados; grado, 100 minutos; y minuto 100 segundos &.a; siendo esta menos usada: claro está, que estas divisiones se refieren á los arcos correspondientes á los ángulos y no á los ángulos mismos. Como hemos visto que un ángulo tiene un número indefinido de arcos todos concéntricos, es conveniente notar que todos tienen el mismo número de grados, minutos, segundos, &.a

Así en la figura 81, los arcos $AB$ y $A'B'$ descritos entre los lados del mismo ángulo, tienen el mismo número de grados, minutos, segundos, &.a; una vez que la relación de $AB$ al cuadrante $BC$, es la misma que la de $A'B'$ al cuadrante $B'C'$, pues es la misma que la que existe entre el ángulo $AOB$ y el recto $COB$ en los dos casos.

Fig 81



Cuando decimos que un ángulo tiene 24° -- 32′ -- 17″, entendemos que el arco correspondiente cualquiera que él sea, contiene esas divisiones de la circunferencia ó del cuadrante.

Cuando conocido el número de grados, minutos y segundos de un ángulo se quiere conocer su razón con el ángulo recto, se divide ese número de grados, minutos y segundos por 90° (125, 1.er Curso) $\frac{24^{\circ}-32'-17''}{90^{\circ}}=\frac{88337}{324000}$.

Para conocer el número de grados de un ángulo ó para construir un ángulo cuyo número de grados se conozca, se emplea un instrumento llamado *trasportador* ó semicírculo graduado, dividido en grados y medios grados y para apreciar los minutos, lleva un nonius circular. Este instrumento lo llevan todos los estuches de matemáticas y su simple inspección hace conocer con una breve explicación su manejo.

## LECCIÓN 14.

### Medida de los ángulos excéntricos.

**131.** Los ángulos excéntricos se dividen en; inscritos, semi-inscritos, interiores, exteriores y circunscritos.

ÁNGULO INSCRITO, *es el que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son dos cuerdas.*

ÁNGULO SEMI-INSCRITO, *es el que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son una cuerda y una tangente.*

ÁNGULO INTERIOR, *es el que tiene su vértice en el círculo.*

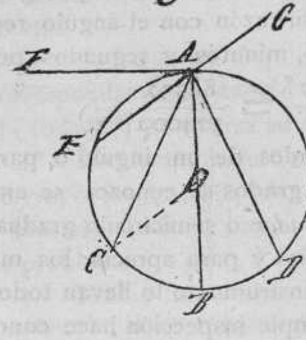
ÁNGULO EXTERIOR, *es el que tiene su vértice fuera del círculo y de la circunferencia.*

ÁNGULO CIRCUNSCRITO, *es el exterior cuyos lados son dos tangentes.*

**132.** La medida de un ángulo inscrito, es la misma que la de la mitad del arco comprendido entre sus lados.

En efecto, figura 82, sea el ángulo $BAC$ en que uno de los lados pasa por el centro, si trazamos el radio $OC$, se forma el triángulo $OAC$ isósceles cuyo ángulo externo $COB$ es igual á la suma de los ángulos $A$ y $C$ del triangulo y como son iguales, será el doble de uno de ellos $A$ (81, C.° 1.°); pero ese ángulo como central tiene por medida el arco comprendido entre sus lados, luego el ángulo propuesto que es su mitad tendrá por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados; cuando ninguno de los lados pasa por el centro puede este estar en el ángulo ó fuera, en el primer caso como el ángulo $CAD$ se compone de la suma de los $CAB$ y $BAD$, luego su medida será la mitad del arco $CB$ mas la mitad del arco $BD$ ó bien la mitad del arco $CBD$ comprendido entre sus lados; lo mismo sucede en el segundo caso con el ángulo $CAE$, pues es la diferencia de los ángulos $EAB$ y $CAB$, y por tanto tendrá por medida la mitad de $BE$ menos la mitad de $CB$, es decir, la mitad del arco $CE$ comprendido entre sus lados.

Fig. 82




COROLARIOS. 1.° La medida de un ángulo semi-inscrito, es la misma que la de la mitad del arco comprendido entre sus lados: pues se puede considerar la tangente $AF$ como el límite de la cuerda $AE$ cuando gira alrededor de $A$ hasta que $E$ se confunda con $A$, ó bien tener en cuenta que el ángulo $FAB$ es recto y tiene por medida un cuadrante, y en el caso de que el centro no esté en la cuerda se compondrá el ángulo semi-inscrito de un inscrito y el recto $FAB$ ó de este menos un inscrito. 2.° La medida de un ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra tal como el $DAG$, es igual á la semisuma de los arcos subtendidos por las cuerdas; una vez que el ángulo $DAG$ y su adyacente $DAE$, tienen por medida una semicircunferencia, pero solo $DAE$ vale la mitad de $EBD$, luego $DAG$ valdrá la mitad de la restante parte de la circunferencia que son los arcos sub-

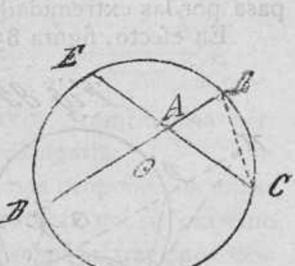
tendidos por las cuerdas. 3.° Todos los ángulos inscritos en el mismo segmento,—es decir,—que tengan el vértice en un arco y los lados pasen por las extremidades de la cuerda son iguales; pues tienen la misma medida. 4.° Todo ángulo inscrito en uno de los dos segmentos determinados por una cuerda, es suplemento de cualquier ángulo inscrito en el otro segmento; porque entre los dos tienen por medida la mitad de la circunferencia. 5.° Un ángulo inscrito en un segmento será agudo, recto ú obtuso según que el segmento sea mayor, igual ó menor que un semicírculo; una vez que el arco comprendido en el primer caso es menor que media circunferencia, en el seguudo igual y en el tercero mayor. 6.° Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito convexo son suplementarios.

SEGMENTO DE CÍRCULO CAPAZ DE UN ÁNGULO DADO, *es aquel que todos los ángulos inscritos en él son iguales al dado.* Así el segmento capaz de un ángulo recto es un semicírculo.

**133.** La medida de un ángulo interior, es igual á la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

En efecto, figura 83, sea el ángulo $BAC$, prolonguemos sus lados y tracemos la cuerda $DC$ y tendremos que por ser el ángulo $BAC$ externo del triángulo $DAC$ es igual á la suma de los internos no adyacentes á él, que son los ángulos inscritos $BDC$ y $DCE$, cuyas respectivas medidas son, la mitad de $BC$ y la mitad de $ED$, luego el ángulo $BAC$ tiene por medida la mitad del arco $BC$ mas la mitad del arco $ED$, que es la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

Fig. 83

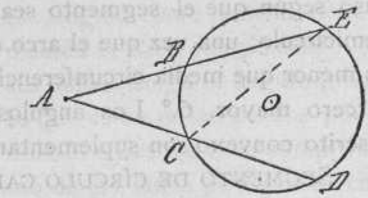



ESCOLIO.—Es conveniente observar que si los arcos $BC$ y $ED$ fuesen iguales el ángulo $BAC$ tendría por medida el arco comprendido entre sus lados; lo cual prueba que de que un ángulo tenga por medida el arco comprendido entre sus lados no se deduce que tenga su vértice en el centro.

**134.** La medida de un ángulo exterior, es igual á la semi-diferencia entre los arcos cóncavo y convexo comprendidos entre sus lados.

En efecto, figura 84, sea el ángulo *DAE*, tracemos la cuerda *EC* y tendremos que por ser el ángulo *ECD* externo del triángulo *ACE* es igual á la suma de los internos no adyacentes á él, *A* y *E*, por tanto *A* es la diferencia entre *ECD* y *E* cuyas medidas respectivas, como inscritos, son la mitad de *ED* y la mitad de *BC;* luego la medida del ángulo *A* será la mitad del arco cóncavo *ED* menos la mitad del arco convexo *BC*.

Fig. 84

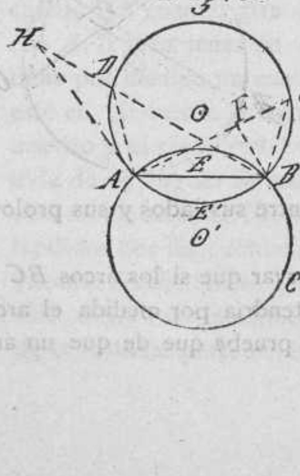



ESCOLIOS. 1.° Si hacemos girar uno de los lados ó los dos al rededor del vértice *A* hasta que se conviertan en tangentes á la circunferencia el teorema subsistirá, ya una de las secantes sea tangente ó ya el ángulo sea circunscrito.

2.° El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se vé una recta bajo un ángulo dado, es un arco de circunferencia que pasa por las extremidades de la recta.

En efecto, figura 85. sea *C* un punto del lugar y *ADCBE* la circunferencia determinada por los tres puntos *A*, *B* y *C*, desde luego se tiene que, desde cualquier punto del *ADCB* tal como el *D*, se vé la recta *AB* bajo un ángulo igual al *ACB* (132, C.° 3.°); desde cualquier punto interior del segmento *ADCB* tal como el *F*, se ve la recta *AB* bajo un ángulo *AFB* mayor que el *ACB* (133); desde todo punto exterior al segmento

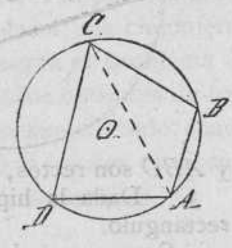
Fig. 85



*ADCB*, situado encima de la recta *AB* tal como *H*, se ve la recta bajo un ángulo *AHB* menor que el *ACB* (134): luego el arco *ADCB* es el lugar geométrico. Si se dobla la figura por la recta *AB* el arco *AC'B* es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve la recta *AB* bajo el ángulo dado. De aquí se deduce que: *el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una recta bajo un ángulo dado se compone de dos arcos de círculo iguales entre sí que pasan por las extremidades de dicha recta.* Los dos arcos *AEB* y *AE'B* son el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve la recta *AB* bajo un ángulo suplementario del ángulo dado. En el caso particular de ser el angulo dado recto los arcos *ACB* y *AC'B* serían semicircunferencias y la recta *AB* el diámetro de la circunferencia que compondrían: de modo que; *el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una recta bajo un ángulo recto es la circunferencia descrita sobre la recta como diámetro.*

3.° Cuando los ángulos opuestos de un cuadrilátero convexo son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible; pues que la circunferencia determinada por tres vértices tiene que pasar por el cuarto *D* figura 86, porque desde él se ve la cuerda *AC* bajo un ángulo suplementario del *B* y el arco *ADC* es el lugar de los puntos del plano que tienen esa propiedad. El rectángulo y cuadrado son inscriptibles.

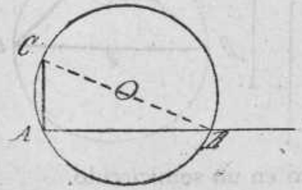
Fig. 86




**135.** PROBLEMAS. 1.° Dada una recta, trazarla una perpendicular en uno de sus extremos sin prolongarla.

Sea la recta *AB* figura 87, á la cual nos proponemos trazar una perpendicular en su extremo *A*, para conseguirlo tracemos desde un punto fuera de la recta tal como el *O* como centro, y con un radio igual á *OA* una circunferencia que pasará por *A* y cortará á la recta en otro punto tal como el *B*, trazando el diámetro *BC* que pasa

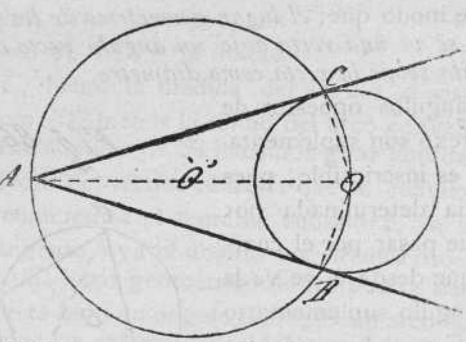
Fig. 87



por $B$, la recta que une el punto $A$ con el extremo $C$ del diámetro es la perpendicular pedida; pues el ángulo $BAC$ es recto por estar inscrito en un semicírculo. 2.º Por un punto trazar una tangente á una circunferencia.

Este problema resuelto (112, 1.º) en los dos casos de que el punto esté en la circunferencia ó fuera de ella, en la hipótesis de que los radios podían prolongarse, vamos á resolverlo ahora suponiendo que los radios no pueden prolongarse. Estando el punto en la circunferencia, se traza el radio á dicho punto y la perpendicular en el mismo, según el problema anterior será la tangente pedida. Cuando el punto está fuera como el $A$ de la figura 88, se traza sobre la recta $AO$ como diámetro la circunferencia $O'$ que cortará á la dada en los puntos $B$ y $C$ (111 R.º 3.º); cada uno de estos puntos unido con el punto $A$ determina una tangente, puesto que trazando los radios $OB$ y $OC$, los ángulos $ACO$ y $ABO$ son rectos, por inscritos en semicírculos.

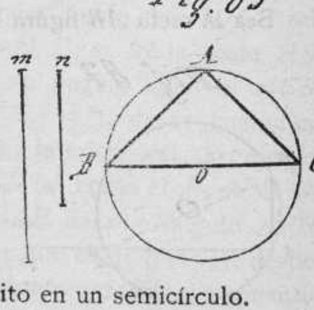
Fig. 88.




3.º Dada la hipotenusa y un cateto construir un triángulo rectángulo.

Sean $m$ y $n$, la hipotenusa y el cateto dados figura 89, tómese sobre una recta indefinida una recta $BC$ igual $m$ y trácese sobre esa recta como diámetro una circunferencia, desde $B$ como centro con un radio igual á $n$ trácese un arco que cortará en $A$ á la circunferencia y uniendo el punto $A$ con los $B$ y $C$, el triángulo $BAC$ resuelve el problema, por estar el ángulo $A$ inscrito en un semicírculo.

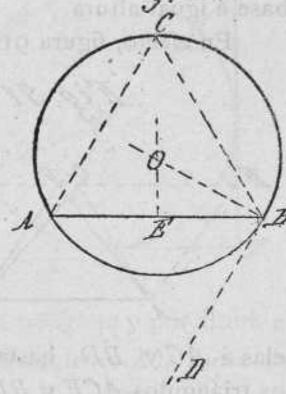
Fig. 89



4.° Construir sobre una recta dada un segmento capaz de un ángulo dado.

Sea la recta *AB* figura 90, y supongamos que el segmento pedido sea *ACB*, si trazamos la tangente *BD* en el punto *B*, formará con *AB* un ángulo semi-inscrito *ABD* que tiene la misma medida que los inscritos en el segmento *ACB*; por tanto para resolver el problema bastará trazar en *B* una recta que forme con la *AB* un ángulo *ABD* igual al dado, y trazar después las perpendiculares *EO* y *BO* respectivamente á *AB* en su punto medio y á *BD* en el punto *B*, trazando desde el punto *O* de encuentro con un radio igual á *OB* una circunferencia, el segmento *ACB* resuelve el problema.

Fig. 90




ESCOLIO.—Como las tangentes trazadas á una circunferencia desde un punto exterior son iguales según el problema segundo, tendremos que: las sumas de los lados opuestos de todo cuadrilátero inscrito son iguales; y recíprocamente todo cuadrilátero cuyas sumas de los lados opuestos son iguales es circunscriptible. El rombo y el cuadrado son circunscriptibles.

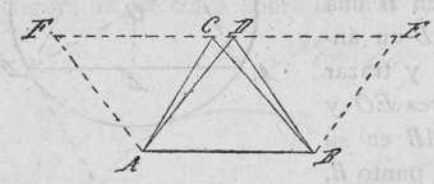
## LECCIÓN 15.

### Figuras equivalentes.

**136.** Dos triángulos son equivalentes, cuando tienen igual base é igual altura.

En efecto, figura 91, sean los triángulos $ABC$ y $ABD$ que tienen la base $AB$ común y los vértices opuestos $C$ y $D$ están en una paralela $CD$ á la base teniendo por tanto la misma altura, si trazamos $BE$ y $AF$ respectivamente paralelas á $AC$ y $BD$, hasta que corten á la $CD$; tendremos, que los triángulos $ACF$ y $BDE$ son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, pero si de la figura total $ABEF$, se resta el triángulo $ACF$ queda el paralelógramo $ABEC$, y si se resta el triángulo $BDE$ queda el paralelógramo $ABDF$; luego los paralelógramos $ABEC$ y $ABDF$ son equivalentes, pero los triángulos $ABC$ y $ABD$ son mitad respectivamente de esos paralelógramos, luego son también equivalentes.

Fig. 91



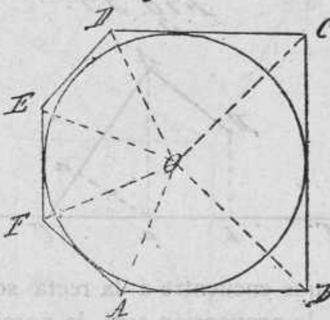

COROLARIOS. 1.° Dos paralelógramos son equivalentes, cuando tienen igual base é igual altura; pues como hemos visto los paralelógramos $ABEC$ y $ABDF$ que tienen la base común $AB$ y los lados opuestos en una paralela $CD$ á la base son equivalentes; ó bien porque todo paralelógramo es doble de un triángulo de la misma base y la misma altura.

2.° Dos trapecios de iguales bases é igual altura, son equivalentes; pues los trapecios $ABCF$ y $ABED$ se componen respectivamente de dos triángulos equivalentes: siendo por tanto cada uno de ellos la suma de los triángulos que le componen.

**137.** Todo polígono circunscrito á un círculo es equivalente á un triángulo que tenga por base el contorno del polígono y por altura el radio del círculo inscrito.

En efecto, figura 92, sea el polígono circunscrito $ABCDEF$ si trazamos las rectas que unen el centro con los vértices queda descompuesto el polígono en seis triángulos que tienen el vértice en $O$ y cuyas bases son los lados del polígono; luego todos tendrán la misma altura, que es el radio del círculo inscrito: de modo que el triángulo que tuviese por base el contorno—suma de las bases da los triángulos en que ha quedado descompuesto el polígono—del polígono y por altura el radio del círculo inscrito en él será equivalente á la suma de los triángulos en que hemos descompuesto el polígono, que para sumarlos. por tener la misma altura, bastará sumar las bases, si bien teniendo en cuenta que en los triángulos de opuesto sentido deben tomarse las bases en opuesto sentido.

Fig. 92

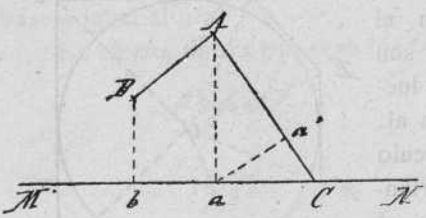



COROLARIOS 1.° Todo círculo es equivalente á un triángulo que tenga por base la circunferencia y cuya altura es el radio. Desde luego la superficie de un polígono circunscrito á un círculo se aproximará tanto más á la del círculo cuantos más puntos de contacto tenga el contorno del polígono con la circunferencia y en el límite, es decir, cuando el contorno del polígono toca á la circunferencia en todos sus puntos se confundirá con ella y las dos superficies la del polígono y el círculo serán iguales: luego en virtud del teorema queda demostrado lo que nos proponíamos.

2.° Todo sector circular es equivalente á un triángulo que tenga por base el arco y por altura el radio. Por la misma razón del corolario anterior.

**138.** *Proyección de un punto sobre una recta*, es el pié de la perpendicular trazada desde dicho punto á la recta. Así la proyección de $A$ sobre la recta $MN$ figura 93, es $a$.

Fig. 93.



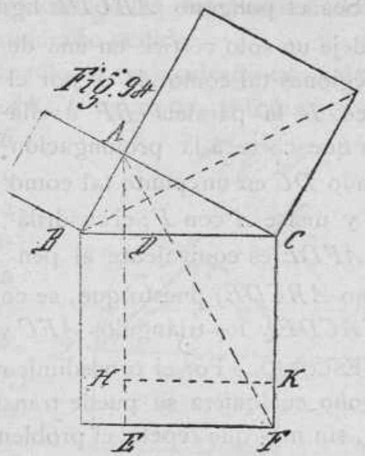

PROYECCIÓN DE UNA RECTA SOBRE OTRA, *es la porción de recta comprendida entre las proyecciones de sus extremos*. Así la proyección de la recta $AB$ es $ab$: en el caso que la recta que haya de proyectarse encuentre á la recta sobre la cual se proyecte, como $AC$, la proyección será la porción de recta comprendida entre el punto de encuentro y la proyección del otro extremo, es decir, la proyección de $AC$ es $Ca$; de aquí se deduce que la proyección en un triángulo rectángulo de la hipotenusa sobre un cateto es ese cateto; y que la proyección de cualquiera de los catetos sobre la hipotenusa será la porción de hipotenusa comprendida entre el punto pue el cateto corta á la hipotenusa y la proyección del vértice del ángulo recto sobre ella, es decir, que la proyección de $Ca$ es $Ca'$ y la $Aa$ es $Aa'$: si la recta que se ha de proyectar fuese perpendicular aquella sobre la cual se ha de proyectar la proyección sería el punto de encuentro; como la proyección de $Aa$ sobre $MN$ es $a$

Cuando decimos; 1.° *cuadrado de una recta*, entendemos el cuadrado construido sobre ella; 2.° *rectángulo de dos rectas*, entendemos el rectángulo cuyos lados contiguos son iguales respectivamente á las rectas dadas.

**139.** Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular á la hipotenusa se verifica; 1.° el cuadrado de un cateto es equivalente al rectángulo de la hipotenusa y su proyección sobre ella; 2.° el cuadrado de la hipotenusa es equivalente á la suma de los cuadrados de los catetos; 3.° el cuadrado de la perpendicular es equivalente al rectángulo de las proyecciones de los catetos.

En efecto, figura 94, sea el triángulo rectángulo $ABC$, si desde el vértice $A$ del ángulo recto se traza la perpendicular $AD$ á la hipotenusa y se prolonga hasta que encuentra en $E$ al cuadrado de ella, queda descompuesto este cuadrado en dos rectángulos, el uno de las rectas $BC$ y $DC$ y el otro de las rectas $BC$ y $BD$; pero el primero, trazando las rectas $AF$ y $BG$, es doble del triángulo $ACF$, y el cuadrado de $AC$ es doble del triángulo $BCG$, además los triángulos $ACF$ y $BCG$ son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido: luego el rectángulo y el cuadrado son equivalentes, y como lo mismo demostraríamos del rectángulo de $BC$ y $BD$ y el cuadrado de $AB$, queda demostrada la primera y segunda parte del teorema. Para demostrar la tercera parte, hay que tener en cuenta que puesto que el cuadrado de la hipotenusa es equivalente á la suma de los cuadrados de los catetos, el cuadrado de un cateto será igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto; por tanto, el cuadrado de $AD$ se obtendrá restando del cuadrado $AC$ el de $DC$, pero como el cuadrado de $AC$ es equivalente al rectangulo de $BC$ y $DC$ y el cuadrado de $DC$ es evidentemente $DCKH$; tendremos que el cuadrado de $AD$ será equivalente al rectángulo $EFKH$ de $DC$ y $BD$.

Fig. 94

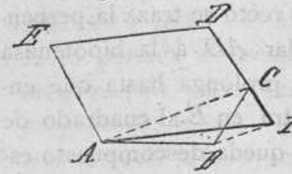



Escolio.—Este teorema se acostumbra á llamar teorema de Pitágoras si bien algunos autores solo aplican esta denominación á la parte segunda.

140 Problemas. 1.° Transformar un polígono en otro equivalente de un lado menos.

Sea el polígono *ABCDE* figura 95, trácese una diagona que deje un solo vértice en una de sus regiones tal como *AC* y por el vértice *B* la paralela *BF* á ella hasta que corte á la prolongación del lado *DC* en un punto tal como el *F* y únase *A* con *F;* el cuadrilátero *AFDE* es equivalente al pentágono *ABCDE;* puesto que, se componen del cuadrilátero común *ACDE* y los triángulos *AFC* y *ABC* equivalentes.

Fig. 95




ESCOLIO. —Por el procedimiento del problema anterior un polígono cualquiera se puede transformar un triángulo equivalente, sin más que repetir el problema hasta llegar al triángulo.

2.° Dados dos triángulos construir otro equivalente á la diferencia de los dados.

Sean los dos triángulos *ABC* y *ADE* figura 96, si se unen los vértices *C* y *D*, se trazan las rectas *EF* y *FG* respectivamente paralelas á *AD* y *CD* y se unen los puntos *C* y *G*, *D* y *F*, tendremos; los triángulos *ADF* y *AGC* equivalentes porque se componen del triángulo común *AFG* y los equivalentes *DFG* y *CFG*, pero *ADF* también es equivalente á *ADE;* luego la diferencia entre *ABC* y *ADE*, es la misma que entre *ABC* y *AGC*, que es evidentemente *BCG*.

Fig. 96.


3.° Construir un cuadrado equivalente á la suma de otros dos.

Se construye un triángulo rectángulo cuyos catetos sean los lados de los cuadrados dados; la hipotenusa de ese triángulo será el lado del cuadrado buscado.

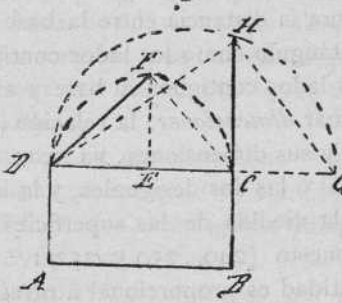
4.° Construir un cuadrado equivalente á la diferencia de otros dos.

Se construye un triángulo rectángulo en que la hipotenusa y uno de los catetos sean los lados de los cuadrados dados; el otro cateto será el lado del cuadrado pedido.

5.° Transformar un rectángulo en un cuadrado equivalente.

Sea el rectángulo dado $ABCD$ figura 97, si tomamos sobre el lado $DC$ una parte $DE$ igual $DA$ sobre $DC$ como diámetro se construye una semicircunferencia y la perpendicular en $E$ á $DC$ hasta que encuentre á la semicircunferencia en un punto tal como el $F$, uniendo $F$ con $D$, $FD$ es el lado del cuadrado buscado; una vez que por ser recto el ángulo $DFC$, el cuadrado de $FD$ es equivalente al rectángulo de $DC$ y $DE = DA$.

Fig. 97




También se puede resolver este problema tomando en la prolongación de $DC$ una parte $CG$ igual $CB$ trazando sobre $DG$ como diámetro una semicircunferencia y en el punto $C$ una perpendicular á $DG$ hasta que corte á la semicircunferencia en un punto tal como el $H$, la recta $CH$ es lado del cuadrado pedido; puesto que el ángulo $DHG$ es recto y el cuadrado de $CH$ es equivalente al rectángulo de $DC$ y $CG = BC$.

COROLARIO.—Si desde un punto de una semicircunferencia se traza una perpendicular al diámetro se verifica; 1.° que el cuadrado de una de las cuerdas que unen dicho punto con los extremos del diámetro, es equivalente al rectángulo del diámetro y la proyección de la cuerda sobre él; 2.° el cuadrado del diámetro es equivalente á la suma de los cuadrados de las cuerdas; 3.° el cuadrado de la perpendicular es equivalente al rectángulo de las proyecciones de las cuerdas sobre la hipotenusa.

Puesto que las cuerdas con el diámetro forman un triángulo rectángulo.

## LECCIÓN 16.

### Medida de las superficies.

**141.** Hemos visto (95, E.° 4.°), que un lado cualquiera de un paralelógramo se puede tomar por base, siendo entonces la altura la distancia entre la base y su lado opuesto; pero en el rectángulo como los lados contiguos son perpendiculares, serán dos lados contiguos su base y altura, á lo que se acostumbra á llamar *dimensiones*, la relación entre las áreas de dos rectángulos y sus dimensiones, ya sean estas, las dos iguales, una sola igual ó las dos desiguales, y la lección anterior es el fundamento de la medida de las superficies: debiendo tener en cuenta lo expuesto (249, 250 y 252 1.er Curso) respecto á cuando una cantidad es proporcional á otras varias.

**142.** Dos rectángulos de igual base é igual altura son iguales: y si tres rectángulos tienen la misma base y la altura de uno de ellos es la suma de las alturas de los otros dos, ese rectángulo será la suma de los otros dos.

En efecto, figura 98, los rectángulos $ABEF$ y $A'B'E'F'$

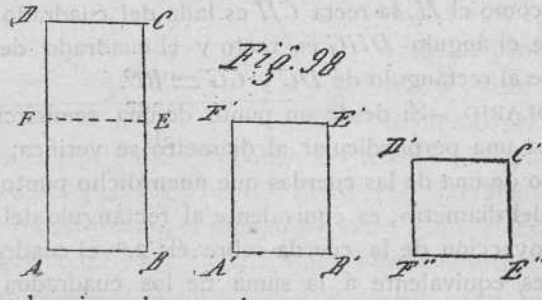



Fig. 98

que tienen la misma base y altura, son evidentemente superponibles y por tanto iguales: los tres rectángulos $ABCD$, $A'B'E'F'$ y $D'C'E''F''$, que tienen sus bases $AB$, $A'B'$ y $E''F''$ iguales, y en que la altura $AD$ del 1.° es la suma de las $A'F'$ y $D'F''$ de los otros dos; si tomamos en $AD$ una parte $AF = A'F'$ se tendrá $FD = D'F''$, y por tanto $ABEF = A'B'E'F'$,

$DCEF = D'C'E''F''$; de donde $ABCD = A'B'E'F' + D'C'E''F''$.

COROLARIOS. 1.º Dos rectángulos de igual base son proporcionales á sus alturas; pues hay correspondencia en la igualdad y en la suma (126, E.º)

2.º Dos rectángulos de igual altura son proporcionales á sus bases; pues se pueden tomar las bases por alturas y las alturas por bases. Esta proposición y la anterior pueden enunciarse diciendo: dos rectángulos que tienen una dimensión igual son proporcionales con la otra dimensión.

3.º Dos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; pues según los corolarios anteriores, si representamos por $R$ y $R'$ dos rectángulos cualesquiera y sus dimensiones respectivas por $a$ $b$ y $a'$, $b'$, decimos que $R : R' = ab : a'b'$; desde luego si representamos por $R''$ un tercer rectángulo cuyas dimensiones sean $a$ y $b'$, se tiene $R : R'' = b : b'$, y $R'' : R' = a : a'$, luego multiplicando ordenadamente estas dos igualdades y suprimiendo el factor común $R''$ de los dos términos del primer miembro se obtiene, $R : R' = ab : a'b'$.

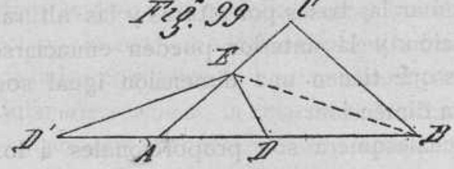
4.º Dos paralelógramos que tengan la misma base son proporcionales á sus alturas: si tienen las mismas alturas son proporcionales á sus bases: y si tienen distintas bases y alturas son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas. Puesto que los rectángulos son paralelógramos y dos paralelógramos cualesquiera de la misma base y altura son equivalentes (136, C.º 1.º)

5.º Dos triángulos que tengan la misma base, son proporcionales á sus alturas: si tienen la mismas alturas, son proporcionales á sus bases: y si tienen distintas bases y alturas, son proporcionales á los productos de las bases por las alturas. Puesto que un triángulo es mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.

También se puede decir que su razón es igual, al producto de la razón de sus bases por la razón de sus alturas. Una vez que si llamamos $T$ y $T'$ á los triángulos $b$ y $a$ á la base y altura del primero y $b'$ y $a'$ á la base y altura del segundo se tiene $T : T' = ab : a'b' = (b : b')(a : a')$

**143**. Dos triángulos que tengan un ángulo igual ó suplementario, son proporcionales á los productos de los lados que forman dicho ángulo.

En efecto, figura 99, sean; 1.º los triángulos $ABC$ y $ADE$ que tienen el ángulo en $A$ común, si trazamos la recta $EB$, tendremos, los triángulos $ABC$ y $ABE$ que tienen el mismo vértice $B$ y las bases $AC$ y $AE$ en la misma recta, luego tendrán la misma altura y por consecuencia $ABC : ABE = AC : AE$, por la misma razón los triángulos $ABE$ y $ADE$ tienen la misma altura, luego $ABE : ADE = AB : AD$; multiplicando ahora estas dos igualdades ordenadamente y suprimiendo el factor común á los dos términos del primer miembro $ABE$, obtendremos $ABC : ADE = AB \times AC : AD \times AE$; 2.º los triángulos $ABC$ y $AD'E$ cuyos ángulos en $A$ son suplementarios, según hemos visto se tiene, $ABC : ABE = AC : AE$, y $ABE : AD'E = AB : AD'$, luego multiplicando y suprimiendo como antes el factor común, $ABC : AD'E = AB \times AC : AD' \times AE$.




Corolarios. 1.º Dos triángulos que tengan un ángulo igual y otro suplementario, la relación de los lados opuestos á los ángulos iguales es igual á la de los lados opuestos á los suplementarios. Puesto que si los triángulos $ABC$ y $AED'$ tienen los ángulos $B$ y $E$ iguales y los en $A$ suplementarios, tendremos: $\frac{ABC}{AED'} = \frac{AB \, . \, AC}{AE \, . \, AD'} = \frac{AB \times BC}{AE \times ED'}$, de donde si dividimos por $\frac{AB}{AE}$ la igualdad $\frac{AB \times AC}{AE \times AD'} = \frac{AB \times BC}{AE \times ED'}$ resulta $\frac{AC}{AD'} = \frac{BC}{ED'}$.

2.º Dos paralelógramos que tengan un ángulo igual ó suplementario, son proporcionales á los productos de los lados que forman dicho ángulo. Puesto que un paralelógramo es doble de un triángulo de la misma base y altura.

**144.** Las unidades de superficie en todos los sistemas de mensuración son, por regla general, cuadrados que tienen por lados las unidades lineales (85, 1.$^{er}$ Curso); una vez que el cuadrado es el cuadrilátero regular, y para su determinación es suficiente conocer su lado (97, C.° 6.°), además como paralelógramo conocemos las relaciones (142, C.° 4.°) con sus lados.

La relación de una superficie con la unidad superficial, expresa su medida, ó lo que es lo mismo (29), su *área;* y como la investigación del área de una figura se reduce á saber cuántos cuadrados, cuyo lado sea una unidad lineal, contiene; de aquí que se llame *cuadratura* de una figura al resultado de esa investigación.

ESCOLIO.—En todo lo que vamos á exponer entenderemos que se trata de los números que expresan las rectas después de medidas, siempre que expresemos sólo el nombre de las rectas; pues de otra suerte tendríamos que emplear muchas más palabras, que sobre llevar más tiempo complicarían la breve y clara exposición de las áreas.

**145.** El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura. Puesto que si llamamos $R$ al rectángulo cuyas dimensiones sean $a$ y $b$, y $C$ al cuadrado unidad cuyas dimensiones sean 1 y 1; tendremos (142, C.° 3.°), $R : C = ab : 1$, pero $R : C$ es el área del rectángulo ó simplemente el rectángulo; luego el área de un rectángulo es igual al producto de sus dimensiones.

COROLARIOS. 1.° El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura. Pues en virtud de (142, C.° 4.°), podemos hacer el mismo razonamiento anterior.

2.° El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado. Pues el cuadrado es un rectángulo en que los lados contíguos ó dimensiones son iguales.

3.° El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura: pues todo triángulo es mitad de un paralelógramo de la misma base y altura (136).

4.° El área de un trapecio es igual á la semisuma de las bases ó de la paralela media (93, E.°), por su altura. Puesto que el trapecio es equivalente á dos triángulos que tienen por bases las del trapecio y la misma altura (136, C.° 2.°)

5.° El área de un polígono circunscrito es igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito. Pues (137) es equivalente á un triángulo cuya base sea su contorno y cuya altura sea el radio del círculo inscrito.

6.° El área de un polígono regular es igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito. Pues todo polígono regular es circunscriptible (115).

7.° El área de un círculo es igual á la mitad de la circunferencia por el radio. Pues un círculo es equivalente á un triángulo que tenga por base la circunferencia y cuya altura sea el radio (137, C.° 1.°).

8.° El área de un sector circular es igual á la mitad del arco por el radio. Pues es equivalente á un triángulo cuya base es el arco y que tiene por altura el radio (137, C.° 2.°)

9.° El área de un segmento circular, se determina evidentemente restando del área del sector correspondiente la del triángulo, si el segmento es menor que un semicírculo; y sumando las dos áreas si es mayor.

10.° El área de una corona, se determinará restando las áreas de los círculos que la forman.

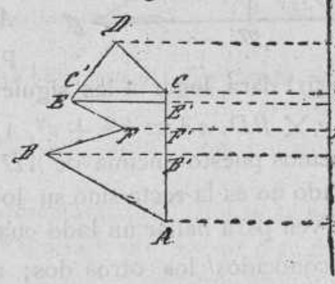
11.° El área de un trapecio circular, se determinará restando las áreas de los sectores correspondientes.

12.° El área de una faja circular se determinará restando las áreas de los segmentos correspondientes.

**146.** El área de un polígono irregular se determinará descomponiéndole en triángulos ó figuras cuya área conozcamos y sumando ó restando las figuras en que se haya descompuesto. También puede obtenerse, cuando no se puede penetrar en el polígono circunscribiéndole un rectángulo y restando de su área la parte comprendida entre este y el polígono. Por último podremos obtener también su área, trazando paralelas por sus vértices en una dirección cualquiera, y multiplicando la parte interior al polígono de cada una de ellas por la distancia entre la paralela siguiente y la precedente, teniendo en cuenta de tomar la mitad de la suma de los productos hallados.

En efecto, figura 100, sea el polígono $ABCDEF$ si trazamos las paralelas desde sus vértices $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$, $Ee$ y $Ff$, y la perpendicular á cualquiera de ellas que lo será á todas (69, C.° 3.°); quedará descompuesto el polígono en los tres trapecios $BB'FF'$, $EFF'E'$ y $CC'EE'$, y los dos triángulos $ABB'$ y $CDC'$ : pero el área del trián-

Fig. 100



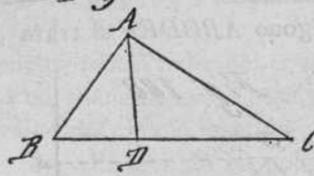
gulo $ABB'$ es igual á $\frac{1}{2}\ BB' \times ab$, la del trapecio $BB'FF' = \frac{1}{2}(BB' + FF') \times bf$, la del $EE'FF' = \frac{1}{2}(FF' + EE')\ ef$ la del $CC'\ EE' = \frac{1}{2}(EE' + CC')\ ec$, y por último la del triángulo $CDE' = \frac{1}{2}\ CC' \times cd$; luego sumando se tiene,

$$ABCDEF = \frac{1}{2}(BB' \times af + FF' \times be + EE' \times fc + CC', \times ed).$$

**147.** Escolio general.—Las áreas que hemos hallado se expresan mediante fórmulas y como sabemos (388, 1.$^{er}$ Curso), que en una fórmula se puede conocer una cualquiera de las cantidades que entran en ella conocidas las restantes, se tiene en la fórmula del rectángulo, que llamando $R$ al área y $a$ y $b$ á la medida de sus dimensiones, $R = ab$, se tendrá para la altura, $a = b : R$, y para la base, $b = a : R$, teniendo en cuenta que el producto de las longitudes $a$ y $b$ nos darán el número $R$ de cuadrados ó unidades superficiales que contiene el rectángulo. Lo mismo diríamos de las demás.

En los triángulos se acostumbra á representar las longitudes de sus lados por las letras minúsculas de los ángulos opuestos, de modo que si tenemos figura 101, el triángulo rectángulo $ABC$, en cuyo caso se acostumbra á poner la letra $A$ en el vértice del ángulo recto, la longitud de la hipotenusa será $a$, la del cateto $AC$, $b$ y del $AB$, $c$; por tanto según lo expuesto, el teorema de Pitágoras (139) dará lugar á las siguientes fórmulas: $b^2 = a \times DC$, $c^2 = a \times BD$, $a^2 = b^2 + c^2$, $\overline{AD}^2 = BD \times DC$,: la rayita que hemos puesto encima de $AD$ indica que lo que se eleva al cuadrado no es la recta sinó su longitud. Las fórmulas halladas nos sirven para hallar un lado cualquiera de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos; así, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Como la diagonal del cuadrado le divide en dos triángulos rectángulos isósceles si llamamos $l$ á la longitud del lado de un cuadrado y $d$ á la de su diagonal tendríamos, $d = \sqrt{2\,l^2} = l\sqrt{2}$, por tanto $d : l = \sqrt{2}$, número incomensurable (270, 1.er Curso), es decir que la razón de la diagonal de un cuadrado á su lado es un número incomensurable lo que ya habíamos demostrado gráficamente (124, E.º). En un triángulo equilátero si llamamos á la longitud de su lado $l$, su altura será $\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}l^2} = \frac{1}{2}\,l\sqrt{3}$, y su área $\frac{1}{4}\,l^2\sqrt{3}$.

Fig. 101.



# CAPÍTULO II.

## *Semejanza.*

### LECCIÓN 17.

#### Triángulos semejantes.

**148.** TRIÁNGULOS SEMEJANTES, *son los que tienen dos ángulos iguales.*

Los triángulos semejantes por tanto, son equiángulos (81, C.° 4.°)

Las figuras geométricas semejantes (16), tienen la misma posición y figura pero distinta magnitud; por eso se dice de dos cosas que son semejantes cuando la una es en pequeño lo que la otra es en grande: esto unido á la definición de triángulos semejantes nos enseña que es necesaria la igualdad de los ángulos para la igualdad en la figura, y que la distinta magnitud tiene que depender, por consecuencia de los lados.

**149.** En los triángulos semejantes se llaman; *lados homólogos*, los opuestos á ángulos iguales; *ángulos homólogos*, los ángulos iguales; *vértices homólogos*, los correspondientes á ángulos homólogos; y *razón de semejanza*, á la razón entre dos lados homólogos.

**150.** Los triángulos semejantes tienen sus lados homólogos proporcionales.

En efecto, sean $ABC$ y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes, sus lados homólogos serán respectivamente $a$ y $a'$, $b$ y $b'$, $c$ y $c'$ (147 y 149). Pero (143) la relación de las áreas de los dos triángulos es igual á la de los productos de los lados de los ángulos homólogos, es decir; $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ab}{a'b'} = \frac{ac}{a'c'} = \frac{bc}{b'c'}$, de donde dividiendo por $\frac{a}{a'}$ los dos miembros de la igualdad $\frac{ab}{a'b'} = \frac{ac}{a'c'}$, resulta $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, y dividiendo por $\frac{c}{c'}$ los dos miembros de la igualdad $\frac{ac}{a'c'} = \frac{bc}{b'c'}$, resulta, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; y por tanto $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, conforme al teorema.

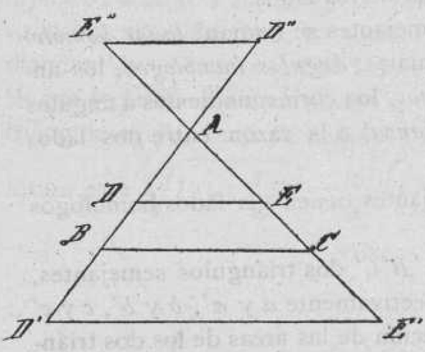
**151.** Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los lados homólogos.

En efecto, como en el teorema anterior tendremos, $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ab}{a'b'} = \frac{ac}{a'c'} = \frac{bc}{b'c'}$; pero como concluimos de demostrar que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, se tiene $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2}$, conforme al teorema.

**152.** Si se traza una paralela á uno de los lados de un triángulo el triángulo que resulta es semejante al propuesto.

En efecto, figura 102, sea el triángulo $ABC$ tracemos una paralela al lado $BC$, que podrá tomar una de las tres posiciones $DE$, $D'E'$, $D''E''$ según que corte á los lados $AB$ y $AC$ ó á sus prolongaciones por debajo ó por encima de $A$, y tendremos que los triángulos $ABC$ y $ADE$ son equiángulos, por tener el ángulo $A$ común los en $D$ y $B$ iguales por correspondientes entre paralelas y los en $E$ y $C$ iguales por la misma razón; lo mismo diremos de los triángulos $ABC$ y $AD'E'$, $ABC$ y $AD''E''$.

Fig. 102



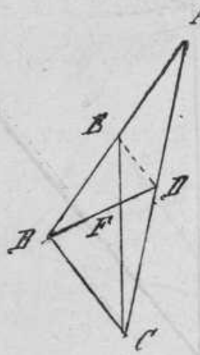

Corolarios. 1.° Si se traza una paralela á uno de los lados de un triángulo, los otros dos lados quedan divididos en partes proporcionales. Puesto que por ser los triángulos $ABC$ y $ADE$ semejantes, se tiene: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ y (243, C.° 5.° 1.er Curso)

$\frac{AB-AD}{AD}=\frac{AC-AE}{AE}$, $\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}$: en los triángulos $ABC$ y $AD'E'$ se tiene $\frac{AB}{AD'}=\frac{AC}{AE'}$ y $\frac{AD'-AB}{AD'}=\frac{AE'-AC}{AE'}$, $\frac{BD'}{AD'}=\frac{CE'}{AE'}$: y en los triángulos $ABC$ y $AD''E''$ se tiene $\frac{AB}{AD''}=\frac{AC}{AE''}$ y $\frac{AB+AD''}{AD''}=\frac{AC+AE''}{AE''}$, $\frac{BD''}{AD''}=\frac{CE''}{AE''}$. En el primer caso los puntos $D$ y $E$ dividen á los lados $AB$ y $AC$ en dos segmentos aditivos, porque sumados componen respectivamente los lados; en los otros dos casos los puntos $D', E'$ y $D'', E''$ les dividen en dos segmentos sustractivos, porque restados resultan los lados.

2.º Si se trazan dos rectas paralelas que corten á los lados de un ángulo las partes de las paralelas comprendidas por los lados del ángulo son directamente proporcionales á sus distancias desde los puntos en que cortan á los lados al vértice. Puesto que en los triángulos $ABC$ y $ADE$ semejantes se tiene $\frac{AB}{AD}=$ $=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$. La recíproca es cierta.

3.º Cuando dos segmentos que parten de un mismo punto se dividen, según la razón $m:n$, los segmentos que unen sus puntos de división con sus extremos opuestos quedarán divididos entre sí, según la razón $m:m+n$. Puesto que, figura 103, si los segmentos son $AB$ y $AC$ que quedan divididos en $E$ y $D$ según la razón $m:n$, se tiene $AE:BE=AD:CD=m:n$, y por tanto las rectas $BC$ y $DE$ son paralelas y nos dan $DE:BC=$ $=AE:AB=m:m+n$.

Fig. 103




En particular las medianas de un triángulo tal como el $ABC$, se encuentran en un punto y se dividen mútuamente según la razón de 1 : 2. Al punto de encuentro de las medianas se llama *centro de gravedad* del triángulo.

4.º La relación de los segmentos de todas las rectas que parten de un punto y terminan en dos paralelas es la misma. Puesto que si desde $A$ trazásemos más rectas siempre resultarían triángulos semejantes. Recíprocamente cuando varias secantes cortan á dos paralelas en partes proporcionales concurren en un punto. Pues sinó no se verificaría la hipótesis.

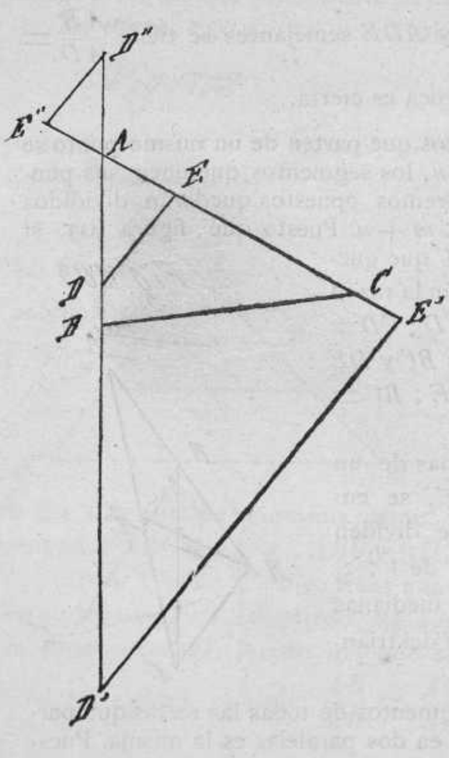
5.° Toda paralela á las bases de un trapecio divide á los otros dos lados en partes proporcionales. Puesto que trazando una diagonal queda dividido en dos triángulos á los cuales se aplica el teorema. En el caso de que las partes de uno de los lados sean iguales, las del otro también lo serán.

**153.** RECTAS ANTIPARALELAS, son las que trazadas entre los lados de un ángulo forman ángulos iguales cada una con cada lado.

Si se traza una antiparalela á uno de los lados de un triángulo el triángulo que resulta es semejante al propuesto.

En efecto, figura 104, sea el triángulo $ABC$, tracemos una antiparalela al lado $BC$, que podrá tomar una de las tres posiciones $DE$, $D'E'$, $D''E''$ según que corte á los lados $AB$ y $AC$ ó á sus prolongaciones por abajo ó por encima de $A$, y tendremos que los triángulos $ABC$ y $ADE$ son semejantes por tener el ángulo $A$ común y el ángulo en $B = E$; lo mismo diremos de los triángulos $ABC$ y $AD'E'$, $ABC$ y $AD''E''$.

Fig. 104




COROLARIOS. 1.° Si se traza una antiparalela á uno de los lados de un triángulo, los otros dos lados quedan divididos en partes inversamente proporcionales. Puesto que por

la semejanza de los triángulos $ABC$ y $ADE$ se tiene $\frac{AB}{AE} =$

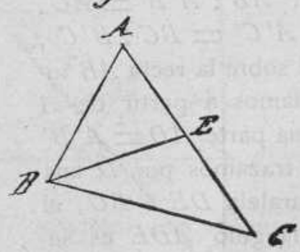
$= \frac{AC}{AD}$; lo mismo diríamos de los triángulos $ABC$ y $AD'E'$, $ABC$ y $AD''E''$.

2.° Si se trazan dos rectas antiparalelas que corten á los lados de un ángulo las partes de las antiparalelas comprendidas por los lados del ángulo son inversamente proporcionales á sus distancias desde los puntos que corten á los lados al vértice. Puesto que en los triángulos semejantes $ABC$ y $ADE$ se tiene $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$. La recíproca es cierta.

3.° El producto de los segmentos de dos rectas que parten de un punto y terminan en dos antiparalelas es el mismo. Puesto que de $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ se tiene $AB \times AD = AC \times AE$.

4.° Cuando dos rectas antiparalelas con respecto á un ángulo se cortan sobre uno de los lados de este ángulo, la distancia de este punto al vértice es media proporcional entre las distancias de los puntos en que el segundo lado del ángulo corta á las antiparalelas al vértice. Puesto que, figura 105, los triángulos $ABC$ y $ABE$ son semejantes y se tiene $AC : AB = AB : AE$.

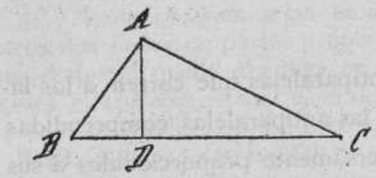
Fig. 105




5.° Cuando dos rectas antiparalelas con respecto á un ángulo se cortan sobre uno de los lados, la relación de los cuadrados de las rectas es igual á la relación de los dos segmentos del otro lado. Pues en los triángulos semejantes $ABC$ y $ABE$ se tiene $ABC : ABE =$ $= AC : AE = \overline{BC}^2 : \overline{BE}^2$.

6.° Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular á la hipotenusa se verifica; 1.° cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella; 2.° el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos; 3.° la perpendicular es media proporcional á los segmentos en que divide á la hipotenusa. Pues; 1.° las rectas $CA$ y $DA$ son antiparalelas con respecto al ángulo $B$ de donde, $BC : AB = AB : BD$, y $BA$ y $DA$ son antiparalelas con respecto al ángulo en $C$ de donde, $BC : AC = AC : CD$; 2.° de las proporciones anteriores se deduce $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ y $\overline{AC}^2 = BC \times CD$, sumando ordenadamente estas dos igualdades se tiene, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + CD) = \overline{BC}^2$; 3.° los triángulos $ABD$ y $ADC$ son semejantes, porque son rectángulos y equiángulos con $ABC$, luego, $BD : AD = AD : DC$. Esta proposición es el teorema de Pitágoras (139) demostrado mediante las relaciones métricas.

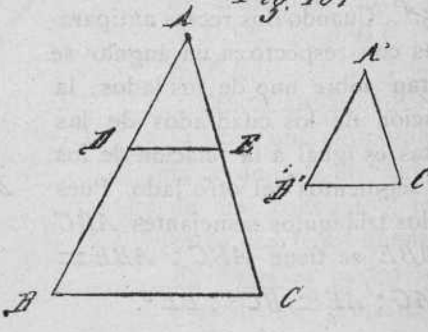
Fig. 106




**154.** Dos triángulos son semejantes: 1.° si tienen sus tres lados proporcionales: 2.° si tienen un ángulo igual y los lados que le forman proporcionales: 3.° si tienen sus tres lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.

En efecto, figura 107, sean los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ en los que se verifica: 1.° $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$, si sobre la recta $AB$ tomamos á partir de $A$ una parte $AD = A'B'$ y trazamos por $D$ una paralela $DE$ á $BC$, el triángulo $ADE$ es semejante á $ABC$ (152); luego si demostramos

Fig. 107

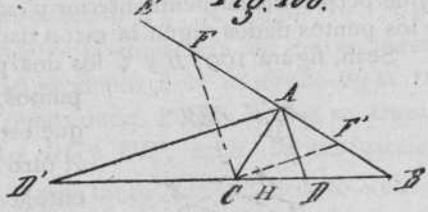


que los triángulos $ADE$ y $A'B'C'$ son iguales quedará demostrado que los propuestos son semejantes; pero los triángulos $ADE$ y $A'B'C'$, tienen los lados $AD$ y $A'B'$ iguales por construcción, y por la semejanza de los triángulos $ABC$ y $ADE$ $AB : AD = AC : AE = BC : DE$, de modo que las dos proporciones, $AB : A'B' = AC : A'C'$ y $AB : AD = AC : AE$ cuyos tres primeros términos son iguales tendrán los cuartos términos iguales, es decir, $AE = A'C'$, por la misma razón $DE = B'C'$, por tanto los triángulos $ADE$ y $A'B'C'$ son iguales, y los $ABC$ y $A'B'C'$ semejantes: 2.º los ángulos $A$ y $A'$ iguales y $AB : A'B' = AC : A'C'$ trazando como antes la recta $DE$, los triángulos $ADE$ y $A'B'C'$ son iguales por tener un ángulo igual y los lados que le forman respectivamente iguales; pues $AD = A'B'$ por construcción y $AE = A'C'$ por cuartos términos de dos proporciones que tienen los otros tres iguales; luego los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son semejantes: 3.º los lados respectivamente paralelos ó perpendiculares; sabemos (81, C.º 5.º) que los triangulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares son equiángulos; luego son semejantes.

**155.** La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos proporcionales á los lados adyacentes; y la de un ángulo exterior en dos segmentos sustractivos proporcionales á los lados adyacentes.

En efecto, figura 108 sea el triángulo $ABC$ y $AD$ y $AD'$ las bisectrices de los ángulos $BAC$ y $EAC$, si trazamos las rectas $CF$ y $CF'$ respectivamente paralelas á $AD$ y $AD'$; se tiene, por ser paralelas $AD$ y $CF$ $CD : BD = BA : AF$,

Fig. 108.




pero $AF = AC$ por ser el triángulo $ACF$ isósceles, una vez que los ángulos $ACF$ y $AFC$ son respectivamente iguales á $DAB$ y $DAC$, (70) que son iguales por hipótesis, luego $CD : BD =$

$CA : AB$: por ser paralelas $AD'$ y $CF'$ y se tiene $BD' : CD' = AB : AF'$, pero $AF' = AC$ por ser isósceles el triangulo $ACF'$, una vez que los ángulos $ACF'$ y $AF'C$ son respectivamente iguales á $CAD'$ y $EAD$, (70) que son iguales por hipótesis, luego $BD' : CD' = AB : AC$.

RECÍPROCO.—Si una recta que parte del vértice de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes, esta recta es bisectriz del ángulo ó de su adyacente externo según que corte al lado ó á su prolongación.

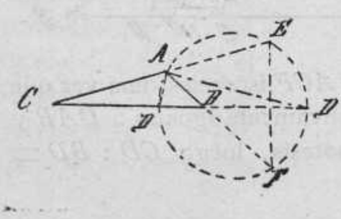
Puesto que si se verifica que $CD : BD = CA : AB$ ó $CD' : BD' = CA : AB$, las rectas $AD$ y $AD'$ son bisectrices de los ángulos $BAC$ y $EAC$; pues sino lo sería otra que cortaría á la recta $BC$ en otro punto tal como el $H$ y tendríamos según el directo $CH : BH = CA : AB$, y por tanto $CH : BH = CD : BD$, de donde $CH \times BD = BH \times CD$, igualdad absurda porque $CH < CD$ y $BD < BH$.

COROLARIOS. 1.° Los lados de un ángulo de un triángulo y las bisectrices de ese ángulo y su externo determinan en el lado opuesto cuatro segmentos, dos aditivos y dos sustractivos, cuyas relaciones son iguales. Puesto que de las proporciones, $CD : BD = CA : AB$ y $CD' : BD' = CA : AB$ se deduce $CD : BD = CD' : BD'$. Cuando una recta tal como la $BC$ está dividida por dos puntos tales como $D$ y $D'$, de manera que los segmentos aditivos son proporcionales á los segmentos sustractivos, se dice que los dos puntos dividen *armónicamente* á la recta $BC$ ó son *conjugados armónicos* con respecto á ella; así como los $B$ y $C$ son *conjugados armónicos* con respecto á la recta $DD'$.

2.° El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos están en una razón dada, es una circunferencia que divide perpendicularmente interior y exteriormente, al segmento de los puntos dados según la razón dada.

Sean, figura 109, $B$ y $C$ los dos puntos dados, $D$ y $D'$ los puntos, entre los que se buscan, que están sobre la recta $BC$; y $A$ otro de los puntos restantes: entónces tendremos $DC : DB = D'C : D'B = AC : AB$, que es la razón dada; y por tanto $AD$ y $AD'$ son bisectrices de los ángulos $CAB$ y $EAB$, y por consecuencia el ángulo $DAD'$

Fig. 109.

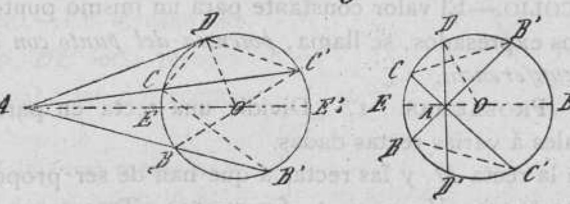


recto (61, C.° 2.°), hallándose $A$ sobre la circunferencia descrita sobre $DD'$ como diámetro (134, E.° 2.°). Si la razón dada es uno, $D$ será el punto medio de $BC$, el punto $D'$ estará indefinidamente distante y la circunferencia de radio indefinido se habrá convertido en una línea recta (100).

**156.** Cuando desde un punto se trazan rectas que terminen en una circunferencia, los productos de cada dos segmentos, cuya suma ó diferencia sea una cuerda, son iguales entre sí.

En efecto, figura 110, 1.° si el punto es exterior al círculo

Fig. 110




trazando las secantes $ABB'$ y $ACC'$ quedan divididas por la circunferencia en dos segmentos cuya diferencia $AB' - AB = BB'$, y $AC' - AC = CC'$, y trazando las cuerdas $BC'$ y $B'C$ son antiparalelas con respecto al ángulo en $A$, y por consecuencia (153, C.° 3.°) $AB' \times AB = AC' \times AC$; 2.° si el punto es interior, los segmentos $AB' + AB = BB'$ y $AC' + AC = CC'$, y trazando las cuerdas $BC'$ y $B'C$ son antiparalelas con respecto al ángulo $A$, por consecuencia $AB' \times AB = AC' \times AC$.

COROLARIOS. 1.° Cuando la diferencia de los segmentos es una cuerda, el valor del producto es el cuadrado de la tangente al círculo desde el punto dado. Puesto que si se traza la tangente $AD$ y las cuerdas $DC$ y $DC'$, estas son antiparalelas con relación al ángulo $A$, y por tanto $\overline{AD}^2 = AC' \times AC$.

2.° Cuando la suma de los segmentos es una cuerda el valor del producto es el cuadrado de la mitad de la cuerda mínima que pasa por el punto. Puesto que si se traza el diámetro $EE'$ que pasa por $A$, la cuerda $DD'$ perpendicular en $A$ al diámetro es la la mínima (104, C.º 2.º) y por tanto $\overline{AD}^2 = AC' \times AC$, ó bien $(\frac{1}{2} DD')^2 = AC' \times AC$.

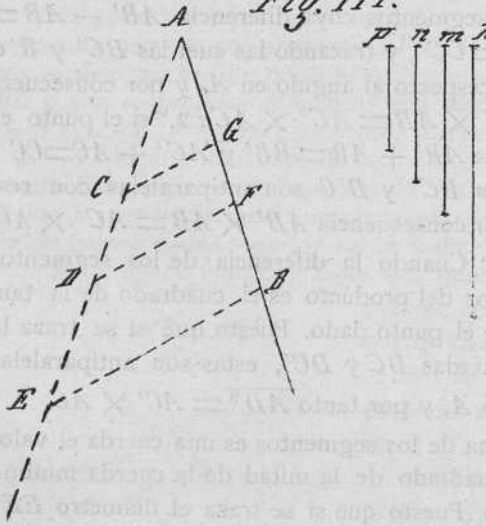
3.º El producto constante es siempre igual al producto de las normales trazadas desde dicho punto, y también á la diferencia entre el cuadrado de la distancia desde dicho punto al centro del círculo y el cuadrado del radio del mismo. Puesto que $\overline{AD}^2 = AE' \times AE$, y trazando el radio $OD$ en el triángulo rectángulo $AOD$, se tiene $\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OD}^2$, cuando el punto es exterior, y en el caso de ser interior $\overline{AD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{AO}^2$.

ESCOLIO.—El valor constante para un mismo punto de los productos expresados, se llama, *potencia del punto con respecto á la circunferencia.*

**157.** PROBLEMAS. 1.º Dividir una recta en partes proporcionales á varias rectas dadas.

Sea la recta $M$, y las rectas á que han de ser proporcionales las partes de $M$, $m$, $n$, $p$, figura 111. Trácese un ángulo sobre uno de sus lados tómese $AB = M$, y sobre el otro $AC = m$, $CD = n$, y $DE = p$; únase $E$ con $B$ y trácense por $D$ y $C$ las paralelas $DF$ y $CG$: las partes $AG$, $GF$, y $FB$ resuelven el problema (152, C.º 1.º)

Fig. 111.

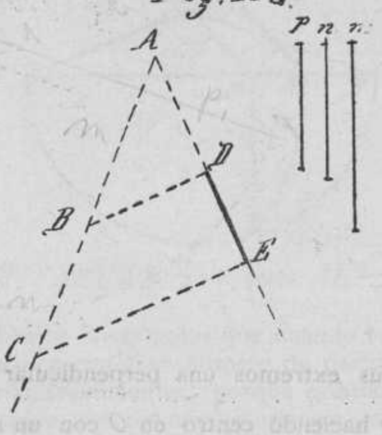



ESCOLIO.—En el caso especial que las rectas á que las partes hayan de ser proporcionales sean iguales, la recta quedará dividida en partes iguales.

2.° Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas.

Sean las rectas $m, n, p$, figura 112; trácese un ángulo y sobre uno de sus lados se toma $AB = m$, $BC = n$, y sobre el otro $AD = p$; únase $B$ con $D$ y trazando la paralela á $BD$ por el punto $C$, $DE$ será la cuarta proporcional pedida.

Fig. 112.

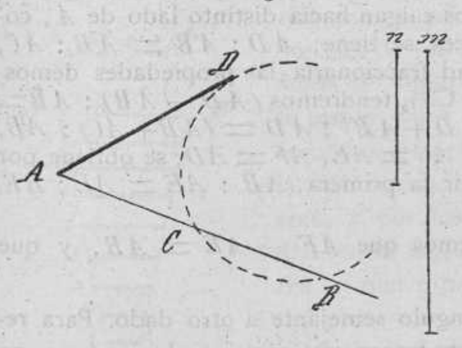



ESCOLIO.—En el caso de ser $n = p$, $DE$ sería tercera proporcional á las dos rectas $m$ y $n$.

3.° Hallar una media proporcional á dos rectas dadas.

Sean las rectas $m$ $n$, figura 113; sobre una recta indefinida se toma una parte $AB = m$, y otra $AC = n$, sobre $BC = m-n$ considerada como cuerda, trácese una circunferencia: la tangente $AD$ trazada desde $A$ á la circunferencia resuelve el problema (156, C.° 1.°)

Fig. 113.



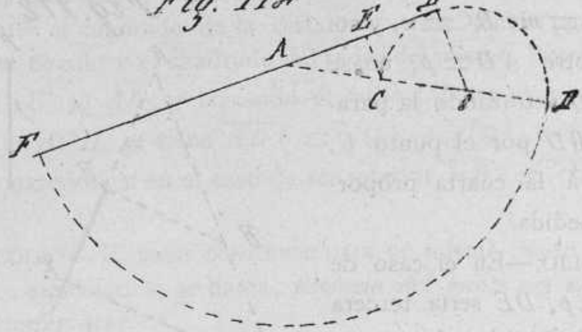

ESCOLIO.—Este problema podría haberse resuelto fundándose (140, 5.° C.°), así como los anteriores fundándose (152, C.$^{os}$ 2.° y 3.° y 156.)

4.° Dividir en media y extrema razón una recta dada.

Una recta está dividida en *media y extrema razón*, cuando una parte de ella es media proporcional entre la otra parte y la recta entera.

Sea la recta limitada $AB$ figura 114; tracemos en uno de

Fig. 114




sus extremos una perpendicular tal como la $BO = \frac{1}{2} AB$, y haciendo centro en $O$ con un radio igual á $BO$ trácese una circunferencia únase el extremo $A$ con el centro $O$ y los segmentos $AC$ y $AD$ determinados por la intersección con la circunferencia de la recta $AO$ resuelven el problema: en efecto, llevemos sobre la recta $AB$ las rectas $AC$ y $AD$, de modo que las intersecciones de los arcos caigan hacia distinto lado de $A$, como en $E$ y $F$, y entónces se tiene; $AD : AB = AB : AC$, aplicando á esta igualdad fraccionaria las propiedades demostradas (243, C.º 2.º 1.er C.º), tendremos $(AD - AB) : AB = (AB - AC) : AC$, $(AD + AB) : AD = (AB + AC) : AB$, pero por ser $CD = AB$, $AC = AE$, $AF = AD$; se obtiene por último después de invertir la primera; $AB : AE = AE : BE$, y $AB : AF = AF : BF$.

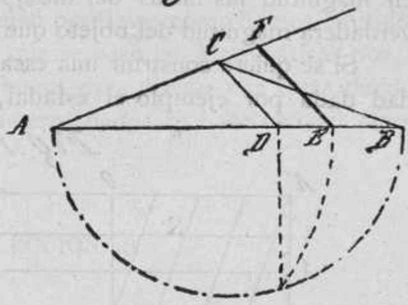
Escolio.—Observemos que $AF - AE = AB$, y que $AF \times AE = \overline{AB}^2$.

5.º Construir un triángulo semejante á otro dado. Para resolver este problema basta trazar una recta cualquiera que no sea igual á ninguno de los lados del triángulo dado, y considerándola como lado homólogo de uno de los del triángulo dado, construir en sus extremos ángulos iguales á los adyacentes al lado homólogo del triángulo dado.

6.º Construir un triángulo que sea igual á uno de dos dados y semejante al otro.

Sean los triángulos dados $ABC$ y $ADC$, figura 115, se trata de construir un triángulo igual al $ABC$ y semejante al $ADC$; para conseguirlo hallemos una media proporcional $AE$ á las rectas $AB$ y $AD$ (140, 5.º C.º) y trácese $EF$ paralela á $DC$ el triángulo $AEF$ resuelve el problema: pues tenemos (142, C.º 5.º) $AEF : ABC = (AE : AB)(AF : AC) = (AE : AB)(AE : AD) = 1$, pues $\overline{AE}^2 = AB \times AD$.

Fig. 115



ESCOLIO GENERAL.—Debemos hacer notar que cuando tenemos que dividir una recta pequeña en gran número de partes iguales, los medios dados serían insuficientes; porque estarían tan próximos los puntos de división que nos confundiríamos con gran facilidad; para evitarlo se sigue el procedimiento siguiente que sirve de base á la escala de reducción ó de trasversales, fundado en (152, C.º 2.º)

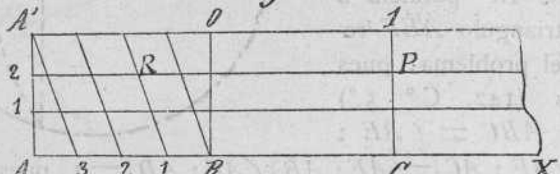
Supongamos, figura 116, que quisiéramos dividir la recta $AB$ en 10 partes iguales; trazaríamos por uno de sus extremos una recta indefinida tal como la $AC$, y á partir de $A$ se toman sobre ella diez distancias consecutivas iguales se une el extremo $C$ de la última con el otro extremo $B$ de la recta y por los otros nueve puntos de división se trazan paralelas á $AB$: entónces las nueve paralelas tendrán de longitud 1, 2, 3,..... 9 décimas de la recta $AB$ según lo indican los números respectivos.

Fig. 116

ESCALA, es una recta dividida en partes iguales, que sirve para medir las distancias en el papel. Cada parte de la escala representa una unidad lineal de cualquier sistema de mensuración. Todos los planos, mapas y dibujos llevan, por regla general, una escala con arreglo á la cual están construidas en magnitud las líneas del dibujo para así poder conocer la verdadera magnitud del objeto que representan.

Si se quiere construir una escala de reducción con una unidad dada por ejemplo el estadal, se traza, figura 117, una

Fig. 117




recta $AX$ y sobre ella se toman distancias iguales $AB$, $BC$, &.ª que representarán cada una un estadal, y luego para apreciar varas y piés, se trazan en los puntos de división $A$, $B$, $C$, &.ª perpendiculares; en una de estas perpendiculares se toman tres distancias consecutivas iguales y por los puntos de división se trazan tres paralelas á la recta $AX$: después se divide $AB$ en cuatro partes iguales, el primer punto de división se une con $A'$ por $A'$ 3, y por los demás se trazan paralelas á esta oblícua; por último se numeran correlativamente las perpendiculares las oblícuas y las paralelas á la recta $AX$: en el supuesto que hemos hecho, la primera numeración corresponde á los estadales, la segunda á las varas y la tercera á los piés.

Si con esta escala quisiéramos conocer la longitud de una recta, se tomaría con el compás y se llevaría sobre una de las paralelas, de modo que un extremo se halle en una perpendicular y otro en una oblícua; hecho esto, el número de la perpendicular sería los estadales, el de la oblícua las varas, y el de la paralela los piés, que contendría la recta. Así la distancia $PR$ constará de 1 estadal, 1 vara y 2 piés.

Si por el contrario quisiéramos tomar en la escala una recta que tuviese de longitud 1 estadal, 1 vara y 2 piés, se colocaría una de las piernas del compás en el punto de intersección de la paralela dos y la perpendicular uno y la otra en la intersección de la oblícua uno con la misma paralela.

También debemos observar que en la práctica para obtener una parte alícuota de una distancia dada se usa el *compás de reducción*, cuya descripción omitimos como hemos omitido la de los demás instrumentos que se usan en Matemáticas por las razones ya expuestas. Así como para dividir una recta dada en partes proporcionales á números dados se hace uso del *compás de proporción*.

## LECCIÓN 18.

### Polígonos semejantes.

**158.** POLÍGONOS SEMEJANTES, *son los que se componen de igual número de triángulos semejantes é igualmente dispuestos*. (94)

En los polígonos semejantes se llaman; *lados homólogos*, los lados homólogos de los triángulos semejantes que componen los polígonos; *vértices homólogos*, los comunes á cada dos lados homólogos; *ángulos homólogos*, los formados por lados homólogos; *diagonales homólogas*, las que unen vértices homólogos; *puntos homólogos*, los colocados de igual modo en el plano de los dos polígonos, ó lo que es lo mismo, los que unidos con lados homólogos de igual modo forman triángulos semejantes é igualmente dispuestos; *rectas homólogas*, las que unen de dos en dos puntos homólogos; y *razón de semejanza*, la razón de dos lados homólogos.

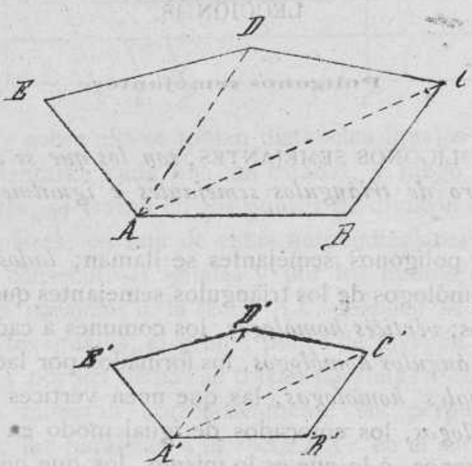
ESCOLIOS. 1.º Es conveniente notar que los polígonos semejantes cuya razón de semejanza sea la unidad son iguales; puesto que si son dos triángulos tales como $ABC$ y $A'B'C'$, sabemos (150) $a : a' = b : b' = c : c' = 1$, y por tanto, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, y si son dos polígonos semejantes cualesquiera, según la definición se compondrán del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos y por tanto serán iguales (95). De aquí el que Euclides llame á las figuras iguales, figuras iguales y semejantes.

2.° Dos polígonos semejantes á un tercero son semejantes entre sí; pues es evidente para dos triángulos semejantes, y por tanto, según la definición, lo será para dos polígonos semejantes cualesquiera.

**159.** Los polígonos semejantes tienen, los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales.

En efecto, figura 118, sean los polígonos semejantes

*Fig. 118.*




$ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$; por ser semejantes los $ABC$ y $A'B'C'$ $ACD$ y $A'C'D'$, $ADE$ y $A'D'E'$ se deduce: 1.° que los ángulos $B$ y $B'$ son iguales como homólogos de triángulos semejantes, $C = C'$ por componerse cada uno de dos ángulos respectivamente iguales como homólogos de triángulos semejantes, y lo mismo diríamos de los demás ángulos homólogos de los polígonos semejantes: 2.° que los lados homólogos de los triángulos semejantes nos darán las siguientes razones iguales; $AB : : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$, $AC : A'C' = DC : : D'C' = AD : A'D'$, y $AD : A'D' = DE : D'E' = AE :$

: $A'E'$, de donde suprimiendo las razones comunes á estas series, tendremos por último, $AB : A'B' = BC : B'C' = CD :$ $: C'D' = DE : D'E' = AE : A'E'$.

ESCOLIO.—Debemos hacer notar que la demostración dada es aplicable á las diferentes descomposiciones de los polígonos en triángulos (94).

RECÍPROCO.—Dos polígonos son semejantes cuando tienen, los lados proporcionales y los ángulos iguales é igualmente dispuestos.

En efecto, supongamos los dos polígonos descompuestos en triángulos por rectas trazadas desde los vértices de dos ángulos iguales $A = A'$. Como por hipótesis tenemos; $AB : A'B'$ $= BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = AE : A'E'$, y además $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$, $E = E'$; los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ semejantes por tener un ángulo igual y los lados que le forman proporcionales (154, 2.°), por la misma razón son semejantes también $ACD$ y $A'C'D'$, así como $ADE$ y $A'D'E'$; luego los polígonos son semejantes.

**160.** Dos polígonos son semejautes, siempre que cumplan con tantas condiciones como el duplo de sus lados menos cuatro, con tal de que á lo sumo sean iguales todos los ángulos menos uno y estén igualmente dispuestos.

En efecto, hemos visto (154 y 159), que el teorema se verifica para el triángulo y para el pentágono, para demostrar que es general supongamos que se verifica el teorema cuando los polígonos tengan $n—1$ lados, decimos que se verificará cuando tengan $n$ lados; puesto que cuando pasamos de los polígonos de $n—1$ lados á los de $n$, lo que hacemos es sustituir un lado por dos, y por tanto aumentar un triángulo á cada polígono, que estando como suponemos igualmente dispuestos para que sean semejantes necesitan dos condiciones más; pero siendo el teorema cierto para cuando tenían los polígonos $n—1$ lados, el número de condiciones necesarias es $2(n—1)—4 = 2n—2—4 =$ $= 2n—6$, de donde sumando dos tendríamos $2n—4$. Mas puesto que el teorema es cierto para el triángulo lo será para el cuadrilátero y siéndolo para este lo será para el pentágono y así sucesivamente.

**161.** En dos polígonos semejantes, las rectas homólogas son proporcionales á los lados homólogos.

En efecto, figura 119, sean $MN$ y $M'N'$ dos rectas ho-

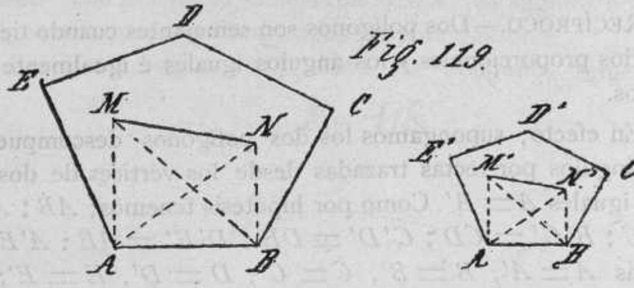



Fig. 119

mólogas, entónces (158) los triángulos $AMN$ y $A'M'N'$, $ABN$ y $A'B'N'$ son semejantes, y por tanto tendremos, $AM : A'M' = MN : M'N' = AN : A'N'$, y $AN : A'N' = AB : A'B'$, de donde $MN : M'N' = AB : A'B'$, conforme al teorema.

**162.** Dos polígonos del mismo número de lados son semejantes. 1.° Cuando estando igualmente dispuestos tienen todos los lados proporcionales y todos los ángulos iguales menos tres consecutivos. 2.° Cuando estando igualmente dispuestos, tienen todos los lados menos uno proporcionales é iguales todos los ángulos comprendidos por estos lados. 3.° Cuando estando igualmente dispuestos, tienen todos los lados menos dos proporcionales y todos los ángulos iguales menos el comprendido por esos dos lados. 4.° Cuando estando igualmente dispuestos, tienen proporcionales todos los lados y las diagonales trazadas desde un mismo vértice. 5.° Cuando estando igualmente dispuestos, tienen un lado proporcional é iguales los ángulos que este forma con los lados adyacentes y con las diagonales trazadas por sus extremos. 6.° Cuando estando igualmente dispuestos, tienen un lado proporcional y las distancias de sus extremos á los demas vértices.

La demostración de todos estos casos se hace descomponiendo los polígonos en triángulos y demostrando que son semejantes y están igualmente dispuestos.

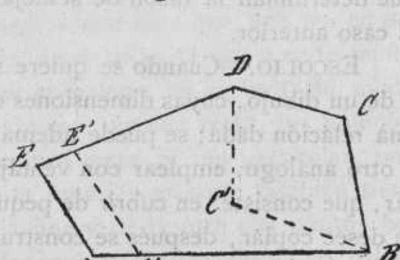
COROLARIOS. 1.° Dos cuadriláteros son semejantes en los seis casos anteriores: 2.° Dos trapecios, en los mismos casos pero suprimiendo una condición: 3.° Dos paralelógramos, en los mismos casos suprimiendo dos condiciones: 4.° Dos rombos ó dos rectángulos, en los mismos casos suprimiendo tres condiciones: 5.° Dos cuadrados como dos polígonos regulares del mismo número de lados siempre son semejantes: 6.° En los triángulos isósceles y rectángulos, así como los polígonos equiángulos ó equiláteros tendremos también que suprimir las condiciones que se nos dan.

ESCOLIO.—Debemos hacer notar que aun cuando los triángulos al ser equiángulos tienen sus lados homólogos proporcionales y recíprocamente, no sucede lo mismo en los demás polígonos; puesto que el rectángulo y el cuadrado son equiángulos y no tienen sus lados proporcionales, y el rombo y el cuadrado son equiláteros y no son equiángulos.

Dos polígonos pueden ser equiangulos y no tener sus lados proporcionales.

En efecto, figura 120, si en el polígono *ABCDE* se traza la recta *A'E'* paralela a la *AE*; resulta el polígono *A'BCDE'* equiángulo con el *ABCDE*, pero sus lados no son proporcionales.

Fig. 120




RECÍPROCO.—Dos polígonos pueden ser equiláteros, sin ser equiangulos.

En efecto, si haciendo centro en *B* y *D* trazamos dos arcos con los radios respectivos *BC* y *DC* y unimos el punto *C'* con *B* y *D*; tendremos que los polígonos *ABCDE* y *ABC'DE* son equiláteros pero no equiángulos.

**163.** Los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales á sus lados homólogos, y sus áreas á los cuadrados de esos lados.

Como son proporcionales los lados homólogos de dos polígonos semejantes, podemos formar con ellos una serie de fracciones iguales, cuyos numeradores sean los lados del uno, y los denominadores sus homólogos en el otro (260, 1.er Curso); y por tanto la suma de todos los lados del uno ó su perímetro dividida por la suma de todos los lados del otro ó su perímetro, es igual al cociente que resulta de dividir un lado del uno por su homólogo en el otro. Del teorema (151) se deduce inmediatamente la segunda parte del teorema.

**164.** PROBLEMAS. 1.° Construir sobre una recta dada, un polígono semejante á otro dado.

Sea figura 117, $A'B'$ la recta dada y $ABCDE$ el polígono dado; trácense por $A$ las diagonales $AC$ y $AD$ y quedará descompuesto el polígono $ABCDE$ en tres triángulos: constrúyase sobre $AB'$ un triángulo $A'B'C'$ semejante al $ABC$, sobre $A'C'$ un triángulo semejante al $ACD$ tal como el $A'C'D'$ y por último sobre $A'D'$ un triángulo $A'D'E'$ semejante al $ADE$. El polígono $A'B'C'D'E'$ resuelve el problema (158).

2.° Construir un polígono semejante á otro dado, conocida la razón de semejanza. Para resolver este problema basta hallar una cuarta proporcional $A'B'$ á $AB$ y á las dos rectas dadas que determinan la razón de semejanza, y entonces estamos en el caso anterior.

ESCOLIO.—Cuando se quiere sacar una copia de un plano ó de un dibujo, cuyas dimensiones estén con las del original en una relación dada; se puede además del procedimiento anterior ú otro análogo, emplear con ventaja el método de las *cuadrículas*, que consiste: en cubrir de pequeños cuadrados la figura que se desee copiar, después se construirá en el papel en que haya de quedar la copia, un rectángulo cuyos lados guarden con los del primero la relación dada; este rectángulo se dividirá en cuadrados como el primero, y no habrá ya más que poner en cada uno de estos los puntos que se hallen en los correspondientes del original, lo cual se hace á ojo, si los cuadrados son pequeños y no es necesaria gran exactitud. Si se quiere referir exactamente cada punto se hace uso del compás de reducción (157, E.° g.)

Este procedimiento lo emplean con frecuencia los artistas para hacer ampliaciones y reducciones de dibujos y para hacer copias iguales; pues entonces la razón es la unidad. También se emplea el instrumento llamado *pantógrafo*.

3.° Construir un polígono semejante á otro dado, y cuyo perímetro sea igual á una recta dada.

Determínese una cuarta proporcional al perímetro del polígono dado, á la recta dada y á un lado del polígono dado, y así encontraremos el lado homólogo del polígono buscado, lo que refiere este problema al primero.

## LECCIÓN 19.

### Figuras semejantes y consecuencias.

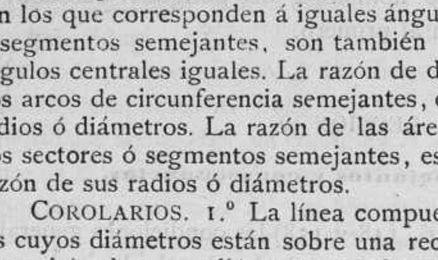
**165.** Ya sabemos (16, 148 y 158) las condiciones generales de las figuras semejantes, y en particular las de los polígonos semejantes, mas como las figuras planas pueden también estar limitadas por curvas, de aquí el que cuando esto suceda tengamos necesidad de conocer las condiciones que han de cumplir para que sean semejantes. Desde luego para que una sea en pequeño lo que la otra es en grande se necesita que á cada punto de una figura corresponda su homólogo en la otra; de modo que si tres puntos de una figura caen en una recta, los homólogos de la otra caen también en una recta. Si, en particular, una figura tiene un centro (117), la figura semejante también tiene un centro; y los centros de la una y de la otra son puntos homólogos de ambas. Cuando los puntos de una figura se hallan en una curva, los puntos homólogos de la figura semejante se halla en una curva semejante á la primera; una cuerda de una de las curvas tiene su homóloga en la otra; y si una de ellas desaparece lo mismo le sucede á la otra: esto quiere decir que la tangente á una curva en uno de sus puntos, tiene su homóloga en la otra en el punto homólogo al primero (106). A un polígono inscrito ó circunscrito respecto de la una, corresponde otro polígono semejante, inscrito ó circunscrito respecto de la otra; y si uno de estos polígonos, por hacerse indefinido el número de sus puntos comunes, coincide con la primera, coincidirá también con la otra el polígono correspondiente semejante. De donde la razón de arcos correspondientes de curvas semejantes es igual á la de sus cuerdas correspondientes; y la razón de las áreas correspondientes es igual al cuadrado de la razón de las cuerdas homólogas, ó segmentos rectilíneos homólogos.

Dos círculos son figuras semejantes; un arco de uno de ellos puede considerarse como correspondiente á un arco semejante cualquiera del otro. Arcos de circunferencia semejantes, son los que corresponden á iguales ángulos centrales, y sectores y segmentos semejantes, son también los que corresponden á ángulos centrales iguales. La razón de dos circunferencias, ó de dos arcos de circunferencia semejantes, es igual á la razón de sus radios ó diámetros. La razón de las áreas de dos círculos ó de dos sectores ó segmentos semejantes, es igual al cuadrado de la razón de sus radios ó diámetros.

COROLARIOS. 1.° La línea compuesta de varios semicírculos cuyos diámetros están sobre una recta, es igual en longitud al semicírculo cuyo diámetro sea la suma de los de los semicírculos que componen la línea.

Puesto que los semicírculos $AEB$, $BFC$ y $CGD$ figura 121, son entre sí como sus diámetros y tendremos; $AEB : AB = BFC : BC = CGD : CD$, de donde $(AEB + BFC + CGD) : (AB + BC + CD) = AHD : AD)$ pero los denominadores son iguales luego los numeradores también.

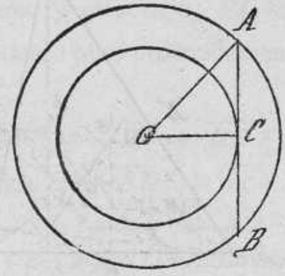
Fig. 121




2.° El área de un anillo, es igual á la del círculo cuyo diámetro es una tangente al círculo interior, limitada por el exterior.

Puesto que figura 122, las áreas de los círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, y en el triángulo rectángulo $ACO$ se tiene por el teorema de Pitágoras, $\overline{AO}^2 - \overline{CO}^2 = \overline{AC}^2$.

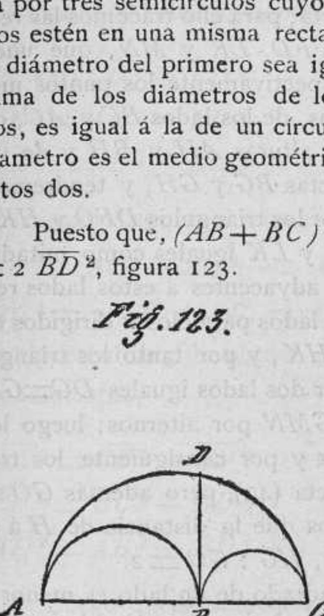
Fig. 122




3.° El área de la superficie limitada por tres semicírculos cuyos diámetros estén en una misma recta, y que el diámetro del primero sea igual á la suma de los diámetros de los otros dos, es igual á la de un círculo cuyo diametro es el medio geométrico entre estos dos.

Puesto que, $(AB+BC)^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = 2\,AB.\,BC = 2\,\overline{BD}^2$, figura 123.

Fig. 123.

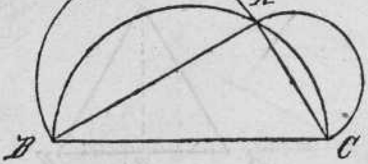



4.° El área de las lunulas limitadas por los semicírculos trazados sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, es igual al área del triángulo.

Pues, la suma de los semicírculos sobre los catetos es igual al semicírculo sobre la hipotenusa; y restando los segmentos de este último, resulta evidente la proposición, figura 124.

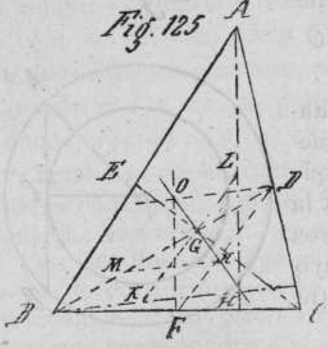
**166.** En todo triángulo el punto de las alturas (100, C.° 8.°), el centro de gravedad (152, C.° 3.°), y el punto de las perpendiculares que bisecan los lados, se hallan sobre una misma recta, y la distancia del primero al segundo es doble de la del segundo al tercero.

Fig. 124



En efecto, sea el triángulo $ABC$ figura 125, $H$ el punto de las alturas, $G$ el centro de gravedad, y $O$ el punto de las perpendiculares que bisecan los lados, vamos á demostrar que estos tres puntos están en línea recta; para ello tracemos las rectas $FD$, $LK$ y $MN$, que unen respectivamente los puntos medios, de los lados $BC$ y $AC$, de las alturas $AH$ y $BH$ y de las rectas $BG$ y $GH$, y tendremos: que los triángulos $DFO$ y $HKL$ son iguales por tener los lados $DF$ y $LK$ iguales como mitades de $AB$ (93, C.° 1.°) y los ángulos adyacentes á estos lados respectivamente iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en distinto sentido, de donde $DO = HK$, y por tanto los triángulos $DGO$ y $GMN$ iguales por tener dos lados iguales $DG = GM$ $DO = MN$ y el ángulo $GDO = GMN$ por alternos; luego los ángulos $MGN$ y $DGO$ son iguales y por consiguiente los tres puntos $H$, $G$ y $O$ están en línea recta (40), pero además $GO =$ $= GN = NH$, con lo cual tenemos que la distancia de $H$ á $G$ es doble que la de $G$ á $O$, es decir, $HG : GO = 2$.

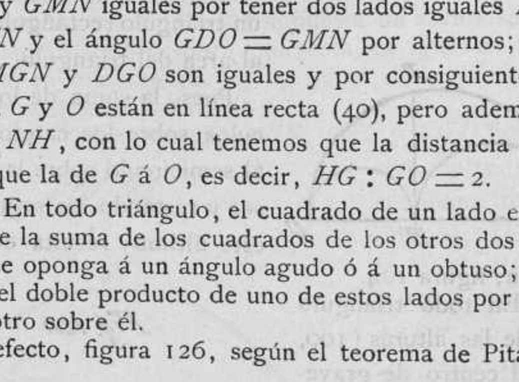
Fig. 125




**167.** En todo triángulo, el cuadrado de un lado es menor ó mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, según que se oponga á un ángulo agudo ó á un obtuso; y la diferencia es el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

En efecto, figura 126, según el teorema de Pitágoras, se

Fig. 126



tiene en los dos triángulos; $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$, y además $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$, pero $BD = AB - AD$ en el primer triángulo que el ángulo $B$ es agudo, y en el segundo en que $B$ es obtuso $BD = AD - AB$, y en uno y otro caso, $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,AB \times AD$, sumando pues ordenadamente las tres igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \\ \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 \\ \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,AB \times AD\end{array}\right\} \begin{array}{l}\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = \\ = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \\ - \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \\ - 2\,AB \times AD\end{array}$$

suprimiendo los términos comunes á los dos miembros y reduciendo se tiene, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AD$, y $(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2) - \overline{BC}^2 = 2\,AB \times AD$: en el segundo triángulo el lado $AC$ que se opone al ángulo obtuso $B$, nos dá, haciendo los mismos razonamientos,

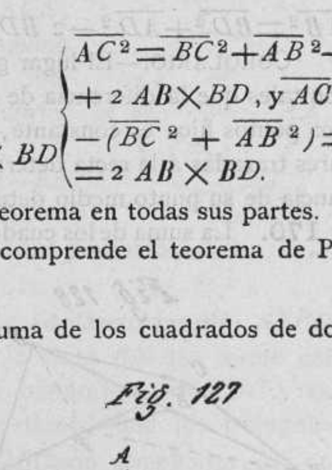
$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 \\ \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 \\ \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,AB \times BD\end{array}\right\} \begin{array}{l}\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + \\ + 2\,AB \times BD, \text{ y } \overline{AC}^2 \\ - (\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2) = \\ = 2\,AB \times BD.\end{array}$$

Luego queda demostrado el teorema en todas sus partes.

ESCOLIO.—El recíproco que comprende el teorema de Pitágoras es cierto (50).

**168.** En todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados, es igual al doble del cuadrado de la mitad del tercer lado, mas el doble del cuadrado de su mediana.

Fig. 127




En efecto, figura 127, si en el triángulo $ABC$ trazamos la mediana correspondiente al lado

$BC$ y proyectamos sobre este lado los otros dos, tendremos según el teorema anterior.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-2\ BD\times DE\\ \overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AD}^2+2\ DC\times DE\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\ \overline{BD}^2+2\ \overline{AD}^2\\ \text{sumando y teniendo en}\\ \text{cuenta que } BD=DC.\end{array}$$

COROLARIO.—El lugar geométrico de todos los puntos que son tales, que la suma de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos es constante, es una circunferencia cuyo centro está en el punto medio de la distancia de los dos puntos y cuyo radio se determina por el teorema.

**169.** En todo triángulo, la diferencia de los cuadrados de dos lados, es igual al doble del tercer lado multiplicado por la proyección sobre él de su mediana.

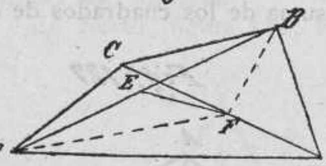
En efecto, si en las igualdades obtenidas en el teorema anterior en lugar de sumarlas las restamos y tenemos en cuenta que $BD=CD=\frac{1}{2}\ BC$, obtendremos lo que nos proponemos en la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC}^2=\overline{DC}^2+\overline{AD}^2+2\ DC\times DE\\ \overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-2\ BD\times DE\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=4\ DC\times\\ \times\ DE=2\ BC\times DE.\end{array}$$

COROLARIO.—El lugar geométrico de todos los puntos que son tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos es constante, es el sistema de dos perpendiculares trazadas á la recta determinada por esos puntos, á una distancia de su punto medio determinada por el teorema.

**170.** La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un cuadrilátero, es igual á la de los cuadrados de sus diagonales, mas el cuadrado del doble de la recta que une sus puntos medios.

Fig. 128.




En efecto, figura 128 en los triángulos $ABC$ y $ADC$ se tiene 168;

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\ \overline{AF}^2+2\ \overline{BF}^2\\ \overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\ \overline{AF}^2+2\ \overline{DF}^2\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\\ =4\ \overline{AF}^2+2\ \overline{BF}^2+2\ \overline{DF}^2,\end{array}$$

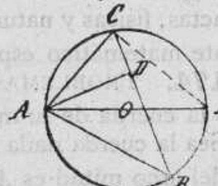
pero en el triángulo $BDF$, se tiene; $2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{DF}^2 = 4\,\overline{DE}^2 + 4\,\overline{EF}^2$, por tanto poniendo el valor que de $2\,\overline{BF}^2 + 2\,\overline{DF}^2$ nos dá esta igualdad en la anterior, y teniendo en cuenta que $4\,\overline{EF}^2 = (2\,\overline{EF})^2$ y $4\,\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2$ y $4\,\overline{DE}^2 = \overline{BD}^2$ obtendremos por último: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + (2\,\overline{EF})^2$, conforme al teorema.

COROLARIO.—La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelógramo, es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales: puesto que la recta que une los puntos medios de ellas se anula.

**171.** El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto del diámetro del círculo circunscrito por la altura sobre el tercer lado.

En efecto, figura 129, sea $ABC$ un triángulo $AE$ el diámetro del círculo circunscrito y $AD$ la altura del lado $BC$, si trazamos la recta $CE$, los triángulos rectángulos $ABD$ y $ACE$, son semejantes por tener los ángulos agudos $ABD$ y $AEC$ iguales (132), luego; $AB : AE = AD : AC$, y por tanto, $AB \times AC = AE \times AD$.

Fig. 129




**172.** TEOREMA DE PTOLOMEO.—En todo cuadrilátero inscrito, el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos.

En efecto, figura 130, sea el cuadrilátero inscrito $ABCD$, tracemos la recta $BE$ que forme con la $AB$ un ángulo igual al $DBC$ y entónces se tiene, que los triángulos $ABE$ y $DBC$ son semejantes, así como los $EBC$ y $ABD$ por equiángulos (132), luego; $AB : DB = AE : CD$, y $BC : BD = CE : AD$, lo que nos dá las siguientes igualdades, $AB \times$

Fig. 130

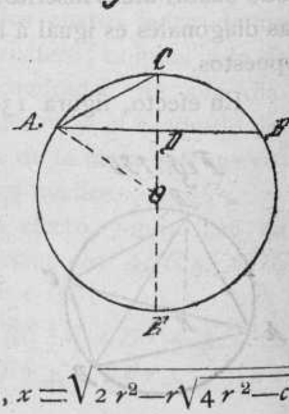
$\times CD = DB \times AE$, y $BC \times AD = BD \times CE$, que sumadas miembro á miembro y sacando factor común á $BD$, se tiene por último $AB \times CD + BC \times AD = BD\ (AE + CE) = BD \times AC$, conforme al teorema.

**173.** ESCOLIO GENERAL.—Es preciso observar que el completo desarrollo de las figuras semejantes, pertenece á la Geometría superior, ó á lo que algunos autores llaman, introducción á la Geometría superior, en ella se estudia: la teoría de las trasversales que da lugar á las *razones proporcionales*, *anarmónicas* y *armónicas;* la *homografía*, *involución*, *las polares*, *la homología*, *la homotecia* y las *figuras en perspectiva*. Algunos autores incluyen las razones proporcionales, otros la posición en perspectiva, y otros en apéndices las exponen con la extensión que entienden necesitan los alumnos á quien se dedica la obra: nosotros preferimos indicar que no son teorías elementales y que los alumnos que deseen ampliar estos conocimientos, pueden estudiar los artículos—publicados en los tomos 16, 17 y 18 de la Revista de los progresos de las ciencias exactas, físicas y naturales,—magistralmente escritos por el eminente matemático español D. José Echegaray.

**174.** PROBLEMAS. 1.° Dada la cuerda de un arco, determinar la cuerda de su mitad.

Sea la cuerda dada figura 31, $AB$ que representaremos por $c$, la del arco mitad es $AC$ que representaremos por $x$, y en virtud del teorema (167), se tiene; $x^2 = 2r^2 - 2r \times OD$, una vez que el ángulo $AOC$ es agudo y que al radio lo representamos por $r$, pero en el triángulo rectángulo $AOD$ por el teorema de Pitágoras, se tiene, $OD = \sqrt{r - \frac{c^2}{4}}$; luego poniendo en la igualdad anterior en lugar de $OD$ su valor, y extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, obtenemos, $x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}}$

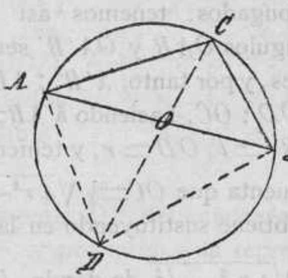
Fig. 131



2.° Dadas las cuerdas de dos arcos, hallar la cuerda de su suma.

Sean las cuerdas dadas, figura 132, $AC$ y $BC$, la cuerda cuyo valor buscamos es $AB$; si trazamos el diámetro $CD$ y las cuerdas $AD$ y $BD$, llamando al radio $r$ y teniendo en cuenta el teorema (172), tendremos: $c \times 2r = b \times BD + a \times AD$, una vez que en el triángulo $ABC$, la longitud de sus lados se representan como sabemos por $a$, $b$, $c$; pero por ser rectángulos los triángulos $ACD$ y $BCD$ se tiene, $BD = \sqrt{4r^2 - a^2}$,

Fig. 132.




y $AD = \sqrt{4r^2 - b^2}$, luego sustituyendo estos valores de $BD$, y $AD$ en la igualdad anterior, y despejando á $C$, obtenemos,

$$c = \frac{b}{2r}\sqrt{r^2 - a_2} + \frac{a}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

3.° Dada la cuerda de un arco, hallar la cuerda del duplo del arco.

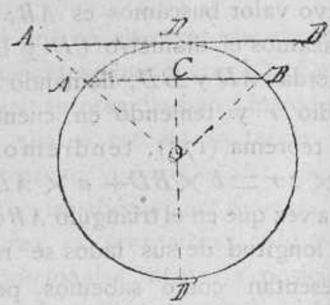
Sea la cuerda dada, figura 131, $AC$, la del arco duplo es $AB$, si trazamos la cuerda $BC$ tenemos como antes el triángulo $ABC$, á quien podemos aplicar la fórmula anterior haciendo

$$b = a, \text{ por tanto, } c = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

4.° Dado el lado de un polígono regular inscrito hallar el lado del semejante circunscrito, y su radio.

Sea $AB$, figura 133, el lado del polígono regular inscrito el lado del semejante circunscrito es como sabemos $A'B'$, que se obtiene trazando el diámetro $DD'$ perpendicular á $AB$ y la tangente en $D$ hasta que encuentre á los radios $OA$ y $OB$ prolongados; tenemos así los triángulos $OAB$ y $OA'B'$ semejantes, y por tanto, $A'B' : AB = OD : OC$, haciendo á $AB = l$, $A'B' = l'$ $OD = r$, y teniendo en cuenta que $OC = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$ se obtiene sustituyendo en la igualdad fraccionaria; $l' : l = r : \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$, de donde, $l' = \dfrac{2lr}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$. Si llamamos al radio $OA'$ del polígono circunscrito $r'$, se tiene, por ser semejantes los triángulos $OA'D$ y $OAC$; $r' : r = r : \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$, de donde, $r' = \dfrac{2r^2}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$.

Fig. 133




LECCIÓN 20.

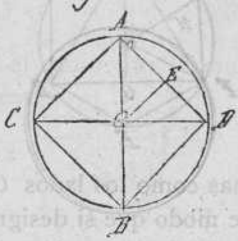
### Valores de los lados de los polígonos regulares.

**175.** Para terminar la Planimetría nos resta determinar: el valor de la circunferencia en unidades rectilíneas, para de esta suerte determinar el valor del círculo que sabemos es igual á la mitad de la circunferencia por el radio (145, C.º 7.º); y además los máximos y mínimos de las figuras planas. Mas teniendo en cuenta lo expuesto en los números (115, 117 y 145) necesitamos para ello préviamente conocer el valor de los perímetros de los polígonos regulares y por consecuencia de sus lados, que es de lo que nos vamos á ocupar.

El lado del cuadro inscrito, es igual al radio multiplicado por raiz de dos.

En efecto, figura 134, si trazamos en el círculo $O$, dos diámetros perpendiculares y unimos los extremos por las cuerdas, $AC$, $CB$, $BD$ y $AD$; tendremos evidentemente el cuadrado $ADBC$ inscrito, y si llamamos $l_4$ al lado del cuadrado y $r$ al radio, tendremos en el triángulo rectángulo $AOD$, $l^2_4 = 2r^2$, y extrayendo la raiz de los dos miembros obtendremos por último: $l_4 = r\sqrt{2}$.

Fig. 134



ESCOLIOS. 1.° Trazando la apotema $OE$ del cuadrado vemos que es igual á la mitad del lado, y por tanto si la representamos por $a_4$, se tiene; $a_4 = r\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.° Si trazásemos las tangentes en los puntos $A$, $D$, $B$ y $C$, tendríamos el cuadrado circunscrito cuya apotema sería igual al radio, y por tanto si representamos por $l_4'$ el lado del cuadrado circunscrito, tendríamos, $l_4' = 2r$, es decir, que el lado del cuadrado circunscrito es igual al diámetro.

3.° Si tomamos por unidad de longitud el radio, las fórmulas anteriores se expresan en la forma siguiente;

$$l_4 = \sqrt{2},\ a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ l_4' = 2.$$

4.° Las áreas de los cuadrados inscrito y circunscrito se expresarán respectivamente, por $2r^2$ y $4r^2$, ó bien siendo el radio la unidad por 2 y 4.

5.° Teniendo en cuenta los problemas 3.° y 4.° de la lección anterior podemos determinar los lados y por consecuencia las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 8 lados, 16, 32, y en general de $2^n$.

**176.** El lado del exágono regular inscrito, es igual al radio.

En efecto, figura 135, sea $AB$ el lado del exágono regular inscrito en el círculo $O$, si trazamos los radios $OA$ y $OB$, el ángulo $O$ del triángulo $AOB$ vale la sexta parte de la circunferencia ó sea $60°$, pero como la suma de los tres ángulos del triángulo valen $180°$, los ángulos $A$ y $B$ valdrán $180° - 60° = 120°$, y como son iguales cada uno valdrá $60°$; luego el triángulo $AOB$ es equiángulo y por tanto equilátero,

Fig. 135


mas como los lados $OA$ y $OB$ son radios $AB$ también lo será, de modo que si designamos por $l_6$ el lado del exágono regular inscrito y por $r$ el radio del círculo, tendremos por último $l_6 = r$.

ESCOLIOS. 1.° El lado del triángulo equilátero inscrito es igual al radio multiplicado por raiz de tres; pues si representamos por $l_3$ el lado del triángulo equilátero, y ponemos en la fórmula del problema 3.° de la lección anterior, en lugar de $a$, $r$, se obtiene; $l_3 = \frac{r}{r}\sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$;

2.° El lado del triángulo equilátero circunscrito, es doble del inscrito; pues si representamos por $l_3'$ el lado del triángulo equilátero circunscrito y ponemos en la forma del problema 4.° de la lección anterior, en lugar de $l$, $r\sqrt{3}$, se obtiene;

$l_3' = \frac{2r\sqrt{3}.r}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3}$: y el del exágono circunscrito; $l_6' = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

3.° La apotema $OH$ del triángulo equilátero inscrito, es igual á la mitad del radio; puesto que la figura $ABOF$ es un rombo. La altura $BG$ es por tanto igual á radio y medio, la apotema y altura del circunscrito, serían respectivamente el radio y tres radios: y la apotema del exágono inscrito $\frac{r\sqrt{3}}{2}$;

una vez que es un cateto de un triángulo rectángulo en que la hipotenusa es el radio y el otro cateto su mitad.

4.° Las áreas del triángulo equilátero y de el exágono regular inscrito, se expresarían respectivamente, por

$$\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} \text{ y } \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}.$$

5.° Si tomamos por unidad de longitud el radio, las fórmulas anteriores se expresan en la forma siguiente:

$$l_3 = \sqrt{3},\ l_3' = 2\sqrt{3},\ l_6' = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$l_6 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_3' = 1$, $a_6' = \sqrt{3}$, y las áreas del triángulo equilátero y el exágono regular, $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ y $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

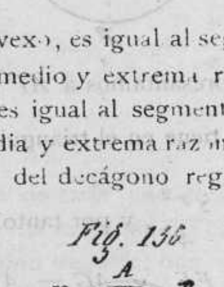
6.° Teniendo en cuenta los problemas 3.° y 4.° de la lección anterior podemos determinar los lados y por consecuencia las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 12, 24, 48 y en general de $3 \times 2^n$ lados.

7.° Se inscribe un exágono regular llevando el radio seis veces sobre la circunferencia.

**177.** El lado del decágono regular convexo, es igual al segmento aditivo ~~positivo mayor~~ del radio dividido en medio y extrema razón: y el del decágono regular estrellado, es igual al segmento sustractivo menor del radio dividido en media y extrema razón.

En efecto, figura 136, sea $AB$ el lado del decágono regular inscrito convexo, y $AD$ el lado del decágono regular inscrito estrellado, si trazamos los radios $OA$, $OB$ y $OD$: el ángulo en $O$ del triángulo $ABO$, vale la décima parte de la circunferencia ó sea 36°, pero como la suma de los ángulos del triángulo valen 180°, los angulos $A$ y $B$ valdrán, $180° - 36° = 144°$, y como son iguales, cada uno valdrá 72°, es

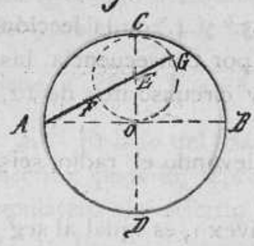
Fig. 136



decir, el doble del ángulo en $O$; ahora bien, el ángulo en $O$ del triángulo $ADO$, vale 108°, y por ser iguales los ángulos $A$ y $D$, valdrán cada uno 36°: luego los triángulos $ABM$, $AMO$ y $DMO$, son isósceles, y por tanto, $AB = AM = MO$, y $DM = DO = BO$; además la recta $AM$ es bisectriz del ángulo $BAO$, de donde, $AO : MO = AB : BM$, ó bien, $BO : MO = MO : BM$, lo cual dice que la recta $AD$ divide el radio $BO$ en media y extrema razón (155 y 157, 4.°), y que el segmento mayor aditivo $MO = AB$, y el menor sustractivo $MO + BO = AD$.

ESCOLIOS. 1.° Se inscribirían los decágonos regulares dividiendo el radio en media y extrema razón y llevando diez veces el segmento mayor aditivo quedaría inscrito el convexo, y el estrellado llevando diez veces el segmento menor sustractivo en la forma siguiente: sea el círculo $O$, figura 137, si trazamos dos diámetros perpendiculares, tales como $AB$ y $CD$, y haciendo centro en $E$, punto medio del radio $CO$, trazamos una circunferencia; las rectas $AF$ y $AG$ determinadas por la intersección de la recta $AE$ con esa circunferencia, son respectivamente los lados del decágono regular convexo y el estrellado, inscritos en el círculo $O$. Si

Fig. 137




represantamos á $AF$ por $l_{10}$, á $AG$ por $L_{10}$, y al radio por $r$; se tiene en el triángulo rectángulo $AOE$, $\overline{AE}^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$, y por tanto, $AE = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, pero como $AF = AE - EF$, y $AG = AE + EG$, sustituyendo en lugar de $AE$, $EF$ y $EG$, sus valores se obtiene:

$$AF = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \text{ y } AG = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

2.° Se inscribirá el pentágono regular convexo, uniendo de dos en dos los vértices del decágono regular convexo, y uniéndoles de cuatro en cuatro tendríamos el pentágono regular estrellado. Si representamos por $l_5$ y $L_5$ estos lados y por $r$ el radio, teniendo en cuenta la fórmula del problema 3.º de la lección anterior tendremos, poniendo en lugar de $a$, $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ y $\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$, respectivamente; y en lugar de $c$, $l_5$ y $L_5$; después de poner $a$, debajo del radical, la fórmula es, $c = \frac{1}{r}\sqrt{4r^2a^2 - a^4}$, y teniendo en cuenta que $a^2 = \frac{r^2}{4}(6 \mp 2\sqrt{5})$ y $a^4 = \frac{r^4}{16}(56 \mp 24\sqrt{5})$, tomando el signo menos para el convexo y el más para el estrellado, sustituyendo valores en la fórmula así modificada se obtiene:

$$l_5 = \frac{1}{r}\sqrt{r^4(6 \cdot 2\sqrt{5}) - \frac{r^4}{16}(56 - 24\sqrt{5}} = \frac{r}{2}$$

$$\sqrt{24 - 8\sqrt{5} - 14 + 6\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$\text{y } L_5 = \frac{1}{r}\sqrt{r^4(6 + 2\sqrt{5}) - \frac{r^4}{16}(56 + 24\sqrt{5})} = \frac{r}{2}$$

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Es notable que el cuadrado del lado de cada uno de los pentágonos regulares, es igual al cuadrado del radio mas el cuadrado del lado correspondiente del decágono regular; una vez que, $l_5^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{4}(4 + 6 - 2\sqrt{5}) = r^2 + \frac{r^2}{4}$ $(6 - 2\sqrt{5})$, y $L_5^2 = \frac{r^2}{4}(10 + 2\sqrt{5}) = r^2 + \frac{r^2}{4}$ $(6 + 2\sqrt{5})$.

3.° Las apotemas de los decágonos regulares se expresarían respectivamente por, $\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $y \frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$:

y las de los pentágonos por, $\frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$, y $\frac{r}{4}$

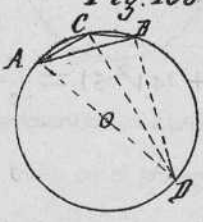
$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}.$$

4.° Se puede como en los teoremas anteriores, obtener las áreas de los polígonos convexos pentágono y decágono regular, así como los valores de los lados y las áreas de los polígono regulares inscritos y circunscritos de 20, 40 y en general de $5 \times 2^n$ lados; y obtener las fórmulas tomando por radio la unidad.

**178.** El lado del pentedecágono regular inscrito convexo, es igual á la cuerda de la diferencia de los arcos subtendidos respectivamente por el lado del exágono y por el lado del decágono.

En efecto, figura 138, si en el círculo $O$ llevamos á partir del punto de la circunferencia el radio $AB$, y la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón $AC$, los arcos correspondientes valdrán respectivamente 60° y 36°, y por tanto el arco que subtiende la cuerda $BC$, que es la diferencia de los subtendidos respectivamente por las $AB$ y $AC$, valdrá, $60° - 36° = 24° = 360° : 15°$ es decir, que el arco subtendido por la cuerda $BC$ es la quinceava parte de la circunferencia y por tanto el lado del pentedecágono regular inscrito.

Fig. 138.




ESCOLIOS. 1.° Se inscribiría el pentedecágono regular convexo, llevando quince veces la cuerda, de la diferencia de los arcos subtendidos por el radio y por la parte mayor del radio dividida en media y extrema razón. Si trazamos el diámetro $AD$ y las rectas $BD$ y $CD$, en la figura 138, tenemos el cuadrilátero inscrito $ADBC$, cuyos lados son; $AC$ lado del decágo-

no regular convexo, $AD$ el diámetro, $BD$ el lado del triángulo equilátero, y $BC$ el lado del pentedecágono, además las diagonales son, $AB$ igual al radio y $CD$ lado del pentágono estrellado; por tanto en virtud de los teoremas anteriores y el de Ptolomeo, tendremos, $AC = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, $AD = 2r$, $BD = r\sqrt{3}$, $BC = l_{15}$, $AB = r$, $CD = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, y $AB \times CD = AC \times BD + BC \times AD$, ó sustituyendo los valores anteriores, $r \times \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) \times r$

$$\sqrt{3} + l_{15} \times 2r, \; l_{15} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{r}{4}$$

$$(\sqrt{5}-1)\sqrt{3} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right).$$

Una vez inscrito el pentedecágono regular convexo, se inscribirán los tres estrellados, uniendo los puntos de división de 2 en 2, de 4 en 4, y de 7 en 7 que es lo mismo que de 8 en 8; y por tanto si quisiéramos obtener sus valores en función del radio nos bastaría aplicar la fórmula del problema 3.° de la lección anterior.

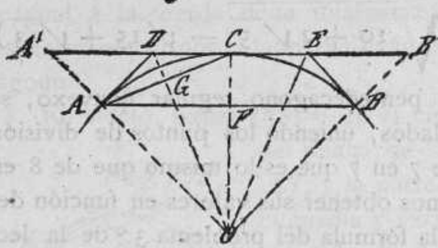
2.° Se puede como en los teoremas anteriores, obtener el área del pentedecágono regular convexo, y del mismo modo obtener los lados, perímetros y áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 30, 60 y en general de $3 \times 5 \times 2^n$ lados; y obtener las fórmulas cuando el radio es la unidad.

**179.** Escolio general.—Puesto que sabemos inscribir polígonos regulares y circunscribirlos de un número de lados expresado por; $2^n$, $3 \times 2^n$, $5 \times 2^n$, y $3 \times 5 \times 2^n$, claro está que podremos dividir la circunferencia en tantas partes iguales, como expresen los números comprendidos en las expresiones anteriores. Esto no nos dá el medio de dividir el cuadrante en 90 partes iguales ó en 100, según que adoptemos la división sexagesimal ó la centesimal; una y otra división se hacen aproximadamente; 1.ª dividiendo la circunferencia en 15 partes iguales, cada una de estas en 8, y cada una de las 120 en 3, pero si bien las dos primeras divisiones se hacen con exactitud la última solo se puede hacer elementalmente por aproximación; 2.ª dividiendo la circunferencia en 25 partes iguales para lo cual se lleva la cuarta parte del radio 25 veces sobre la circunferencia lo que nos dará esa división aproximada, y luego cada una de esas en 16 que ya sabemos hacer con exactitud.

**180.** PROBLEMAS.—Dados los perímetros de dos polígonos regulares semejantes uno inscrito y otro circunscrito, hallar los perímetros de los polígonos regulares semejantes, circunscrito é inscrito de duplo número de lados.

Sea $AB$, figura 139, el lado conocido del polígono inscrito, $A'B'$ el lado conocido del circunscrito, $AC$ el lado del polígono inscrito de duplo número de lados, $DE$ el lado del circunscrito de duplo número de lados; si suponemos que los polígonos dados tienen $n$ lados, podemos representar los perímetros y los radios respectivamente por; $P_n = n\,AB$, $P'_n = n\,A'B'$, $P_{2n} = 2\,n\,AC$, $P_{2n}' = 2n\,DE$, $AO = r$, $A'O = r'$. Esto supuesto, los perímetros de los polígonos dados sabemos son proporcionales á sus radios, luego, $P'_n : P_n = r' : r$, pero en el triángulo $A'OC$ por ser $OD$ bisectriz del ángulo $AOC$, $A'D : DC = r' : r$, y como esta proporción y la anterior tienen una razón común se tiene, $P'_n : P_n = A'D : DC$, de donde (243, C.º 5.º 1.er Curso), $(P'_n + P_n) : P_n = A'C : CD$, ó bien duplicando los denominadores, $(P'_n + P_n) : 2\,P_n = A'C : DE$, que multiplicando los dos términos de la segunda razón por $2n$, y sustituyendo en lugar del resultado sus valores, nos dá $(P'_n + P_n) : 2\,P_n = P'_n : P'_{2n}$, y por tanto tendremos; $P'_{2n} = 2\,P_n\,P'_n : (P'_n + P_n)$.

Fig. 139.



Para determinar ahora el perímetro del inscrito de duplo número de lados, consideremos los triángulos $ACF$ y $CGD$ semejantes por tener sus lados perpendiculares, luego, $CG : CD = AF : AC$, que multiplicando por $4n$ los términos de la primera razón y por $2n$ los de la segunda, nos dá, $4nCG : 4nCD = 2nAF : 2nAC$, ó bien, $2nAC : 2nDE = nAB : 2nAC$, y sustituyendo; $P_{2n} : P'_{2n} = P_n : P_{2n}$, de donde por último se obtiene: $P_{2n} = \sqrt{P'_{2n} P_n} = P_n \sqrt{2 P'_n : (P'_n + P_n)}$, poniendo en lugar de $P'_{2n}$ su valor.

ESCOLIO.—Las fórmulas que acabamos de obtener, nos dan, $P_{2n} > P_n$ y $P'_{2n} < P'_n$; una vez que tenemos, $P_{2n} = \sqrt{P'_{2n} P_n} > \sqrt{P_n P_n} = P_n$, (45), es decir, $P_{2n} > P_n$; además $P'_{2n} = 2 P_n P'_n : (P'_n + P_n)$ la podemos escribir, $P'_{2n} = P'_n \times \dfrac{2 P_n}{P'_n + P_n} < P'_n$, puesto que $2 P_n < P'_n + P_n$, (45).

De modo que los perímetros de los polígonos regulares inscritos á un mismo círculo van aumentando, y las de los circunscritos disminuyendo á medida que se duplica el número de sus lados.

2.º Dados el radio y la apotema de un polígono regular, hallar el radio y la apotema de otro polígono regular, que tenga el mismo perímetro y doble número de lados que el primero.

Sea $AB$, figura 140, el lado del polígono regular inscrito en el círculo $O$, si trazamos el radio $OC$ perpendicular á $AB$, tendremos que $OC$ y $OG$ son el radio y la apotema dados, que designaremos respectivamente por $r$ y $a$; si se trazan las cuerdas $AC$ y $BC$, la recta que une sus puntos medios $DE$, es el lado del polígono regular isoperímetro, pues es la mitad de $AB$, y puesto que el ángulo $DOE$ es mitad del ángulo $AOB$, el punto $O$ será el centro del círculo circunscrito á este polígono, y por

Fig. 140

tanto $OD$ y $OF$ su radio y apotema respectivamente, que designaremos por $r'$ y $a'$. Ahora bien, como $F$ es el punto medio de $CG$, se tiene, $OF = \frac{1}{2}(OC + OG)$, ó sustituyendo; $a' = \frac{1}{2}(a + r)$. Por otra parte, en el triángulo rectángulo $ODC$, se tiene, $\overline{OD}^2 = OC \times OF$, que sustituyendo nos dá por último; $r' = \sqrt{ra'} = \sqrt{\frac{r}{2}(a+r)}$, poniendo en lugar de $a'$ su valor.

Escolio.—De la fórmula, $a' = \frac{1}{2}(a + r)$, se deduce, puesto que $a < r$; $a' > a$: y de la fórmula, $r' = \sqrt{ra'}$, se deduce, puesto que $a' < r$; $r' < r$. Lo que dice que el radio del segundo polígono es menor que el del primero, mientras que la apotema del segundo es mayor que la del primero: por tanto la diferencia entre el radio y la apotema disminuye indefinidamente á medida que aumenta el número de lados,

3.° Dadas las áreas de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito, hallar las áreas de los polígonos regulares de duplo número de lados.

Ya vimos, figura 139, que $AC$ y $DE$ son los lados de los dos polígonos cuyas áreas se buscan; ahora si representamos por $S_n$ y $S'_n$, las áreas dadas, en el supuesto que el número de lados de los polígonos dados sea $n$, y $S_{2n}$ y $S'_{2n}$, las áreas que vamos á determinar, se tiene; $S_n = 2n\, AFO$, $S'_n = 2n\, A'CO$, $S_{2n} = 2n\, ACO$, $S'_{2n} = 2n\, ADCO$; pero las áreas de los triángulos, $A'CO$, $ACO$ y $AFO$, por ser $AF$ paralela á $A'C$, nos dan (143, y 157 C.° 1.°), $A'CO : ACO = ACO : AFO$, ó bien; puesto que las relaciones $A'CO : ACO$, y $ACO : AFO$, son iguales respectivamente á, $S'_n : S_{2n}$ y $S_{2n} : S_n$, tendremos $S'_n : S_{2n} = S_{2n} : S_n$, luego, $S_{2n} = \sqrt{S_n \times S'_n}$: además en el triángulo $A'CO$ se tiene, por ser $OD$ bisectriz del ángulo $A'OC$; $A'D : DC = OA' : OC$, y los dos triángulos $A'DO$ y $CDO$ que tienen la misma altura nos dan, $A'DO : CDO = A'D : DC$, así como los $ACO$, y $AFO$ nos dan también $ACO : AFO = OC : OF = OA' : OA$; resulta pues de estas tres igualdades por ser $AO$ y $OC$ iguales, que, $A'DO : CDO =$

$= ACO : AFO$, y por consiguiente, $(A'DO + CDO) : CDO =$ $= (ACO + AFO) : AFO$, de donde duplicando los consecuentes y teniendo en cuenta la figura, así como la relación de los triángulos y cuadriláteros con los polígonos, tendremos; $A'OC : ADCO = (ACO + AFO) : 2AFO$, ó bien, $S_n' : S'_{2n} =$ $= (S_{2n} + S_n) : 2\ S_n$; luego, $S'_{2n} = 2\ S_n \times S'_n : (S_{2n} + S_n)$, ó bien $S'_{2n} = 2\ S_n \times S'_n : (S_n + \sqrt{S_n \times S'_n})$, poniendo en lugar de $S_{2n}$ su valor.

ESCOLIO.—Según las fórmulas que acabamos de obtener, se tiene, $S_{2n} > S_n$, y $S'_{2n} < S'_n$; una vez que, tenemos

$$\sqrt{S_n \times S'_n} > \sqrt{S_n \times S_n} = S_n,$$

es decir, $S_{2n} > S_n$; además la expresión,

$$2\ S_n \times S'_n : (S_{2n} + S_n) = S'_n \times \frac{2\ S_n}{S_{2n} + S_n} < S'_n,$$

puesto que $2\ S_n < S_{2n} + S_n$.

De modo que las áreas de los polígonos regulares inscritos en un mismo círculo van aumentando, y las de los circunscritos disminuyendo, á medida que se duplica el número de sus lados.

## LECCIÓN 21.

### Ciclometría.

**181.** La CICLOMETRÍA, se ocupa de determinar la medida de la circunferencia y el círculo.

Como la medida del círculo depende, según hemos visto (145, C.º 7.º), de la de la circunferencia; esta es la medida que nos interesa determinar, en primer término: pero para medir cualquier cantidad, se necesita una unidad de la misma especie con quien compararla, y los diferentes sistemas de mensuración no tienen unidades lineales más que rectilíneas; por tanto, no podremos medir directamente la circunferencia que es una línea curva, con esta clase de unidades y aún para la medida indirecta es preciso convenir—una vez que, nunca una curva puede ser igual, sinó equivalente, á una recta (12 y 15)—en que: *La longitud de una curva, es el límite hácia el cual tiende el perímetro* *de una línea quebrada* ~~*inserta*~~ inscrita *en ella, cuando sus lados tienden hacia cero.* Hecho este convenio, podemos considerar á la circunferencia; *como el perímetro de un polígono regular de indefi.do número de lados tan pequeños como se desee*; y por tanto, al círculo; *como un polígono regular de indefinido número de lados tan pequeños como se desee.*

Como sabemos que todo polígono regular se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro (115), y además que conocido el lado de un polígono regular se puede conocer no sólo el del polígono regular de doble número de lados y de igual perímetro ó isoperímetro con él, sinó que también el radio y apotema de este conocidos el radio y apotema del primero (180, 2.º); es fácil ver la gran analogía que existe entre los polígonos regulares y el círculo, así como también entre los perímetros de los polígonos regulares y la circunferencia.

Desde luego, si consideramos el polígono regular más sencillo, es decir, el triángulo equilátero, y dividimos mentalmente cada uno de sus lados en dos partes iguales, podríamos formar con ellas un exágono regular isoperímetro del triángulo equilátero: haciendo lo mismo con los lados del exágono, formaríamos el dodecágono regular; y continuando de la misma manera, iríamos formando polígonos regulares isoperímetros cada vez de duplo número de lados, siendo cada lado respectivo la mitad del anterior; por tanto, después de una serie indefinida de divisiones de cada lado en dos partes iguales, los lados de los polígonos llegarían á ser inapreciables por su excesiva pequeñez, y la diferencia entre los radios y apotemas sería sensiblemente nula (180, 2.º, E.º); en tal caso, el polígono tomará sensiblemente la forma de un círculo; y el perímetro el de una circunferencia isoperímetra con los diferentes polígonos regulares.

Hemos visto además (180, 1.º y 3.º E.os); 1.º que los perímetros y las áreas de los polígonos regulares inscritos en un círculo van aumentando, á medida que se duplica el número de sus lados; pero por la simple inspección de la figura 139, se vé que los diferentes perímetros son siempre menores que la circunferencia y los polígonos menores que el círculo (45); 2.º que los perímetros y las áreas de los polígonos regulares circunscritos en un círculo, van disminuyendo á medida que se duplica el número de sus lados; viendo como antes por la simple inspección de la figura 139, que los diferentes perímetros son siempre mayores que la circunferencia y los polígonos mayores que el círculo. Si demostramos ahora que la diferencia entre los perímetros, así como entre las áreas de dos polígonos regulares semejantes uno inscrito y otro circunscrito al mismo círculo, es menor que cualquiera cantidad por pequeña que esta sea: tendremos que; *la circunferencia es el límite común de los perímetros de los polígonos regulares inscritos* y *circunscritos; y el círculo es el límite común de las áreas de dichos polígonos.* Pero en primer lugar (180, 1.º), tenemos; $P_n' : P_n = r' : r$, de donde, $(P_n' - P_n) : P_n' = (r' - r) : r'$, y por tanto; $P_n' - P_n =$ $= \frac{P_n'}{r'}(r' - r)$; y como $r' - r$, tiende anularse á medida que se van duplicando los lados de los polígonos lo mismo le sucederá á $P_n' - P_n$: en segundo lugar tenemos; $S_n' = \frac{1}{2} P_n' r'$, y $S_n =$ $= \frac{1}{2} P_n r$, ó bien $S_n' - S_n = \frac{1}{2} P_n' r' - \frac{1}{2} P_n r$; y como de, $P_n' : P_n = r' : r$, se deduce, $P_n = P_n' \frac{r}{r'}$, sustituyendo este valor se obtiene; $S_n' - S_n = \frac{1}{2} P_n' r' - \frac{1}{2} P_n'$

$$\frac{r^2}{r'} = \frac{P_n'}{2r'}(r'^2 - r^2) = \frac{P_n'}{2r'}(r' + r)(r' - r);$$

y como la sagita $r' - r$, tiende anularse lo mismo le sucederá á $S_n' - S_n$. Así pues, atendiendo á lo expuesto (268 y 271, 1.er Curso), y á lo que acabamos de exponer la diferencia entre el perímetro de un polígono regular circunscrito y la circunferencia, ó entre esta y el perímetro de un polígono regular inscrito semejante al circunscrito, es menor que la diferencia entre ellos, y lo mismo decimos de las áreas de los polígonos y el círculo, quedando por tanto justificado lo que nos proponíamos.

**182.** La razón de cualquiera circunferencia á su diámetro, y la de cualquier círculo al cuadrado de su radio, tienen siempre el mismo valor. Este valor, igual para las dos razones, es un número incomensurable, comprendido entre tres y cuatro, que se representa por la letra griega $\pi$. De modo que la expresión de cualquier circunferencia sería, $\pi$ diámetros, y la de cualquier círculo $\pi$ radios cuadrados.

En efecto, sean $P$ y $P_1$ las circunferencias, $r$ y $r_1$ los radios, y $S$ y $S_1$ las áreas de los círculos respectivos: por la semejanza de los círculos tenemos (165); $P : P_1 = 2r : 2r_1$, y $S : S_1 = r^2 : r_1^2$, de donde; $P : 2r = P_1 : 2r_1$, y $S : r^2 = S_1 : r_1^2$. Lo que demuestra la primera parte del teorema. Si llamamos ahora $\pi$ á la razón de la circunferencia al diámetro, se tendrá; $P = 2\pi r$, y como $S = \frac{1}{2} Pr$, sustituyendo en lugar de $P$ su valor, se tiene; $S = \pi r^2$, y $S : r^2 = \pi$. Es decir, que la relación de la circunferencia al diámetro y la del círculo al cuadrado del radio, es la misma. Por último, la circunferencia es mayor que el perímetro del exágono regular inscrito, y como este vale tres diámetros, resulta que $\pi > 3$: además el área del círculo es menor que la del cuadrado circunscrito á él, que vale 4 radios cuadrados; luego $\pi < 4$.

ESCOLIOS. 1.° Se ha demostrado por Lambert, que $\pi$ es un número incomensurable, y aunque este número se puede determinar con la aproximacion que se desee, todavía no se ha hallado un procedimiento para encontrar una recta igual á la circunferencia, ni un cuadrado igual al círculo.

2.° De las fórmulas obtenidas, $P = 2\pi r$, y $S = \pi r^2$; se deducen, $r = P : 2\pi$, y $r = \sqrt{S : \pi}$; las que nos dicen, que el radio de cualquiera circunferencia es igual, á la longitud de su mitad dividida por $\pi$, ó bien la raiz de dividir el área del círculo por $\pi$.

3.° La longitud de la mitad de la circunferencia ó de 180°, es $\pi r$; luego la longitud del arco de un grado será $\pi r : 180$, y por consecuencia la longitud de un arco de $\alpha$ grados será; $\pi r \alpha : 180$, de modo que llamando $l$ á la longitud de un arco de radio $r$, tendremos la siguiente fórmula; $l = \pi r \alpha : 180$, de la cual se deducen, $\alpha = 180\, l : \pi r$, y $r = 180\, l : \pi \alpha$.

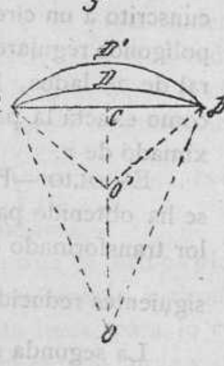
4.° Los arcos de circunferencia pueden medirse de dos maneras, ó bien refiriéndose al cuadrante tomado por unidad, en cuyo caso se expresa en grados (128, C.° 3.° y 130), ó bien determinando la razón entre el arco rectificado (181) y el radio tomado por unidad. Esto quiere decir (128, C.° 2.°); que si se dejan arbitrarias la unidad de longitud y la angular, un ángulo tiene por medida la relación de las longitudes de los arcos correspondientes á el ángulo y el ángulo unidad. Si en lugar de ser arbitrarias las dos unidades, se fija la angular sin establecer correspondencia entre las dos, y tomamos por unidad angular el ángulo que intercepta un arco igual al radio; entonces, un ángulo tiene por medida la relación de la longitud de su arco correspondiente al radio; ó bien, la longitud del arco es igual al ángulo multiplicado por el radio.

5.° Como los arcos semejantes (165), son proporcionales á sus radios; es evidente que, la relación de un grado de una circunferencia, con un grado de otra de distinto radio, es la misma que la de los radios respectivos; es decir, que el grado de una circunferencia cuyo radio es 7, vale 7 : 10, del de la circunferencia cuyo radio es 10: por más que uno y otro sean la misma parte alícuota de la circunferencia á que pertenecen.

6.° Dos arcos, menores en longitud que una semicircunferencia y situados ó no en la misma región respecto de una cuerda común, es menor el que tiene el centro más distante del punto medio de la cuerda.

Sea $O$ el centro del arco $ADB$, figura 141, y $O'$ el centro del arco $AD'B$; supongamos $OC > O'C$; resulta $OA > O'A$, y por tanto $AOB < AO'B$; de modo que la relación del ángulo $AOB$ con el ángulo recto, es menor que la del ángulo $AO'B$ con el ángulo recto; ó lo que es lo mismo arco $ADB <$ arco $AD'B$.

Fig. 141




Este teorema se puede enunciar de un modo general diciendo: *si se tiene una serie de arcos de circunferencia terminados en las extremidades de una cuerda común, el menor de todos es el que vuelve su convexidad á todos los demás.*

**183.** PROBLEMAS. 1.° Determinar el valor de $\pi$, ó sea la relación de la circunferencia al diámetro, ó bien la relación del círculo al cuadrado del radio.

Los tres problemas de la lección anterior nos dan otros tantos procedimientos para la determinación de $\pi$, teniendo en cuenta lo expuesto en esta lección. El primer problema de la lección anterior nos dá el procedimiento llamado de los perímetros, que consiste en determinar, partiendo por ejemplo del exágono regular, y suponiendo el diámetro igual á uno los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 6, 12, 24, y en general de $3 \times 2^n$, haciendo el cálculo por decimales y tomando como exacta la parte decimal común; tendremos el valor aproximado de $\pi$. El segundo problema de la lección anterior nos dá el procedimiento llamado de los isoperímetros, que consiste en determinar, partiendo por ejemplo del exágono regular cuyo lado sea un tercio, el radio y la apotema de los polígonos regulares isoperímetros con él, de $3 \times 2^n$, haciendo el cálculo por decimales y tomando como exacta la parte decimal comun, se tendrá el valor aproximado de $1 : \pi$ y dividiendo uno por el número así hallado se obtiene el valor aproximado de $\pi$. El tercer problema de la lección anterior nos dá el procedimiento llamado de las áreas que consiste en determinar, partiendo por ejemplo de los cuadrados inscrito y circunscrito á un círculo cuyo radio sea la unidad, las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 8, 16 y en general de $2^n$ lados, haciendo el cálculo por decimales y tomando como exacta la parte decimal común; tendremos el valor aproximado de $\pi$.

ESCOLIO.—Por cualquiera de los procedimientos expuestos se ha obtenido para valor aproximado de $\pi$, 3'14159 y este valor transformado en fracción contínua (339, 1.$^{er}$ Curso), dá las siguientes reducidas; $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{9208}{2931}$.........

La segunda reducida, la obtuvo Arquímedes por el procedimiento de los perímetros y está aproximada hasta centésimas; y la cuarta debida á Mecio está aproximada hasta millonésimas: son las que más se usan por su sencillez; pues aunque la de Mecio, tiene tres cifras en el numerador y otras en el denominador, es fácil retenerla en la memoria, si se observa que escribiendo repetidas las tres primeras cifras impares en esta forma, 113355 dividiendo las tres últimas 355 por las tres primeras 113, se obtiene dicha relación.

Además debemos observar que un círculo de radio uno, el lado del triángulo equilátero inscrito vale $\sqrt{3}$ y el del cuadrado inscrito $\sqrt{2}$; pero calculada la suma de estos valores por decimales nos dá; $\sqrt{3}+\sqrt{2}=3'146......$, expresión tan aproximada como la razón de Arquímedes. Por otros medios se ha obtenido el valor de $\pi$ con 154 cifras decimales.

2.° Determinar el arco cuya longitud es igual al radio.

La fórmula, $\alpha=\dfrac{180^\circ l}{\pi r}$, nos dá por ser

$$l=r;\ \alpha=\frac{180^\circ}{\pi}=180^\circ\times 0'3183=57^\circ-17'-24''.$$

3.° Determinar la longitud de la circunferencia cuyo radio sea diez metros.

La fórmula, $P=2\pi r$, nos dá,

$$P=2\times 3'14159\times 10=2\times 31'4159=62'8318 \text{ metros.}$$

4.° Rectificar la semicircunferencia.

Ya hemos dicho, que no hay ningún medio de encontrar una recta igual á la circunferencia, de modo que este problema sólo puede resolverse aproximadamente. Y el procedimiento más sencillo, consiste en tomar una recta igual á tres radios más la décima parte del lado del cuadrado inscrito en la circunferencia que nos propongamos rectificar; pues, suponiendo el radio la unidad, la recta valdría, $3+\dfrac{1}{10}\sqrt{2}=3'141$, es decir, el valor de $\pi$ en menos de una diez milésima.

**184.** Escolio general.—Como nosotros ya hemos dicho que no estudiamos más curvas que la circunferencia, es conveniente sepamos la clase de curvatura de esta línea; para lo cual es preciso tener en cuenta que; siempre que en una curva y desde uno cualquiera de sus puntos tomamos arcos de igual longitud y trazamos en los puntos de división tangentes, si al determinar el ángulo que cada tangente forma con su anterior, todos son iguales, por pequeños que sean los arcos iguales; entonces la dirección de la curva variará uniformemente desde el punto elegido, y tendrá *curvatura invariable*. Pero si dichos ángulos son desiguales, entonces la dirección de la curva no variará con uniformidad, y tendrá *curvatura variable*.

La circunferencia es de curvatura invariable; porque el ángulo de las tangentes en los extremos de un arco es igual al ángulo central correspondiente; y á arcos iguales corresponden ángulos iguales.

CURVATURA DE UNA CIRCUNFERENCIA, *es el ángulo que forman las tangentes en los extremos de un arco cuya longitud sea la unidad*. Es decir, que la curvatura de la circunferencia sería igual á la relación entre la unidad y el radio (182, E.º 4.º); porque aquel ángulo es igual al ángulo céntrico. Por tanto, en una circunferencia cuyo radio sea $r$, varía la dirección en la $r$.ª parte de ($180^\circ : \pi$), cuando el arco varíe en una unidad; y por consecuencia esta circunferencia tiene la $r$.ª parte de curvatura que la que tenga por radio la unidad. De aquí se deduce que la curvatura de una circunferencia será infinita cuando el radio desaparezca y la circunferencia se reduzca á su centro; y la curvatura de una circunferencia desaparecerá, cuando el radio se haga infinito y la circunferencia se confunda con una de sus tangentes.

## LECCIÓN 22.

### Máximos y mínimos.

**185.** Hemos tenido ocasión de ver que las áreas de las figuras planas dependían de los perímetros; si bien en los polígonos era necesario se pudiesen circunscribir, es verdad que el triángulo se puede siempre circunscribir á un círculo y que todo polígono se puede transformar en triángulo (140, 1.º E.º); pero puesto que las áreas del triángulo y cuadrilátero las hemos obtenido independientemente de su perímetro y los máximos y mínimos de que nos vamos á ocupar se refieren á los perímetros y áreas de las figuras planas, vamos á obtener una fórmula que nos dé el área del triángulo en función de sus lados. Para ello si tenemos en cuenta lo expuesto (147) la figura 101, y llamamos $h$ á $AD$ altura correspondiente al lado $a$ y $S_3$ al área del triángulo $ABC$, sabemos (145, C.° 3.°) que: $S_3 = \frac{1}{2} ah$, y multiplicando por 4 los dos miembros de esa igualdad y elevando al cuadrado, se tiene; $16\ S_3^2 = 4a^2h^2$, pero (167); $(a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2 \times \overline{CD}^2$, y además, $b^2 = h^2 + \overline{CD}^2$, luego $16\ S_3^2 + (a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2h^2 + 4a^2 \times \overline{CD}^2 = 4a^2(h^2 + \overline{CD}^2) = 4a^2b^2$; y por tanto (305, 5.° 1.er Curso) $16\ S_3^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$; dividiendo por 16 y extrayendo la raiz de los dos miembros se obtiene por último;

$$S_3 = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)},$$

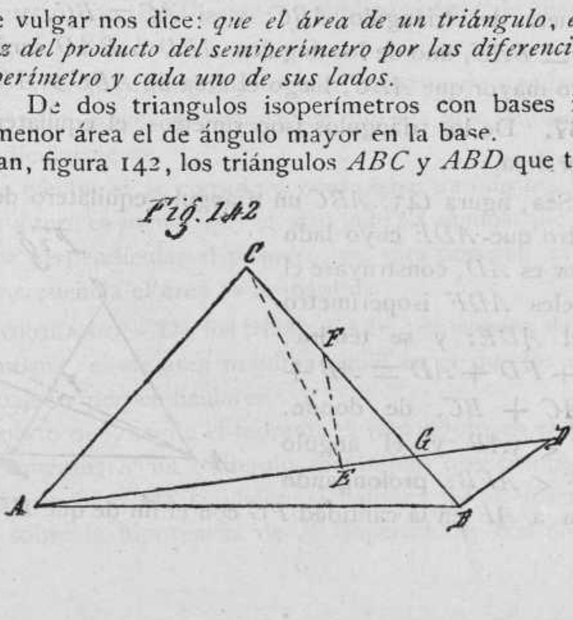
fórmula que nos dá el área de un triángulo en función de los lados y que podemos modificar llamando $2p$ al perímetro; pues entónces tendremos, $a+b+c=2p$, $a+b-c=2(p-c)$, $a-b+c=2(p-b)$, $b+c-a=2(p-a)$, y por tanto,

$S_3 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; fórmula que traducida al lenguaje vulgar nos dice: *que el área de un triángulo, es igual á la raiz del producto del semiperímetro por las diferencias entre el semiperímetro y cada uno de sus lados.*

**188.** De dos triangulos isoperímetros con bases iguales, tendrá menor área el de ángulo mayor en la base.

Sean, figura 142, los triángulos $ABC$ y $ABD$ que tienen la

Fig. 142



misma base é igual perímetro, es decir, $AC+BC=AD+BD$; si el ángulo $ABD$ es mayor en la base, será el área de $ABD<ABC$.

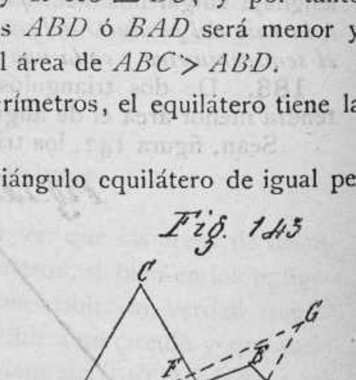
En efecto, por ser el ángulo $ABD > ABC > BAC$, tiene que ser el ángulo $BAC > BAD$; pues sinó caería $C$ en el triángulo $ABD$ y no se verificaría la igualdad de la hipótesis (45); por tanto, $AD$ y $BC$ se cortan en segmentos aditivos en un punto $G$, de modo que $BG < AG$ (49): tomando ahora á partir de $G$ sobre $GA$ y $GC$ respectivamente partes iguales á $GB$ y $GD$, tales como $GE$ y $GF$, uniendo $E$ con $F$ y con $C$, tendremos; $EF = BD$ por ser iguales los triángulos $EFG$ y $BDG$, y por tanto $AE + EF + FG + BG = AE + BD + GD + + EG = AD + BD = AC + BC$; pero $AC < AE + EC$, y por consecuencia, $AC + BC < AE + EC + CF + FB$, luego $AE + EF + FG + BG < AE + EC + CF + FB$, luego $EF + FG < EC + CG$; de donde resulta que el triángulo $EFG$ es parte del triángulo $ACG$, y por último que $BDG < ACG$ y $ABD < ABC$.

Corolario.—De los triángulos construidos sobre la misma base isoperímetros, el isósceles tiene la mayor área. Puesto que, siendo por hipótesis, $AC + BC = AD + BD$, el punto $D$ cae fuera del triángulo $ABC$; y si $AC = BC$, y por tanto $ABC = BAC$, uno de los ángulos $ABD$ ó $BAD$ será menor y el otro mayor que $ABC$; luego el área de $ABC > ABD$.

**187.** De los triángulos isoperímetros, el equilátero tiene la mayor área.

Sea, figura 143, $ABC$ un triángulo equilátero de igual perímetro que $ADE$ cuyo lado mayor es $AD$, constrúyase el isósceles $ADF$ isoperímetro de el $ADE$; y se tendrá, $AF + FD + AD = AB + + AC + BC$, de donde, $3AF < 3AB$ y el ángulo $ABF < AFB$; prolongando

Fig. 143

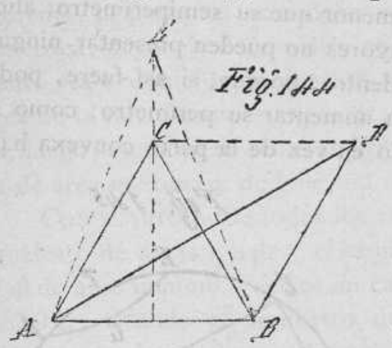



ahora á $AF$ en la cantidad $FG$ con el fin de que $BFG$ y $BDF$

tengan igual perímetro, será el ángulo $DBF > BFG$, y por consecuencia el área de $BDF < BFG$; luego $ADE < ABC$.

**183.** De los triángulos construidos sobre la misma base ~~isoperímetros,~~ el isósceles tiene el menor perímetro cuando las áreas son iguales.

Sean, figura 144, los triángulos $ABC$ y $ABD$ equivalentes, y el triángulo isósceles $ABE$ isoperímetro con el $ABD$; entónces el área de $ABD < ABE$, y $ABC < < ABE$; por tanto, como $ABC$ tiene menor perímetro que $ABE$, también lo tiene menor que el isoperímetro de este $ABD$.




Corolario.—De los triángulos que tengan la misma área, el equilátero tiene menor perímetro. Puesto que, si $ABC$ y $ABD$ tienen la misma área y $ABC$ es equilátero, trazaríamos como antes el triangulo $ABE$ isoperímetro con $ABD$, que es evidentemente de mayor perímetro que $ABC$.

**189.** De los triángulos en que la suma de dos lados es la misma, tiene mayor área aquel en que los dos lados se cortan perpendicularmente.

En efecto, si se considera como base uno de los lados dados, la altura es menor que el otro lado, á menos que este otro lado sea perpendicular al primero; en esta posición la altura y por consecuencia el área es la máxima.

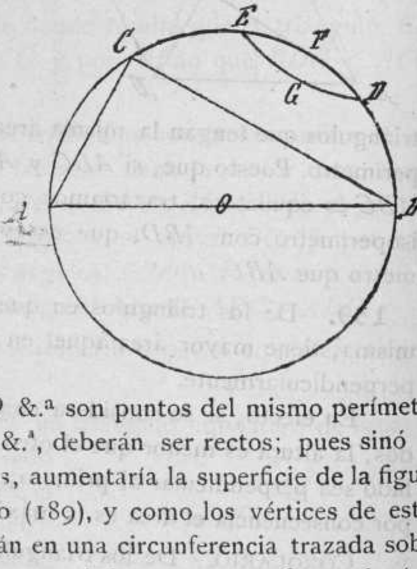
Corolario.– De los triángulos en que la suma de los lados es la misma, es de área máxima aquel en el que los dos lados son iguales y perpendiculares.

Puesto que, según el teorema el rectángulo es el de mayor área; llamemos $R$ un triángulo rectángulo que cumpla con las condiciones y no sea isósceles, si llamamos $I$ al isósceles construido sobre la hipotenusa de $R$ isoperímetro con él, y $R_1$ el rectángulo isoperímetro con $I$; tendremos $R < I$, y $I < R_1$; luego $R < R_1$.

**190.** De las figuras isoperímetras, el círculo es la de área máxima; y de las figuras equivalentes, el círculo es la de perímetro mínimo.

Desde luego las figuras de perímetro dado, no pueden comprender superficies de magnitud arbitraria; puesto que cualquiera de sus diagonales es menor que su semiperímetro: ahora bien, de estas figuras las mayores no pueden presentar ninguna convexidad miradas desde dentro; porque, si así fuere, podría aumentarse su superficie sin aumentar su perímetro: como sucedería, figura 145, tomando en vez de la parte convexa hácia el interior, $DGE$, su igual cóncava $DFE$. Esto sentado, sean $A$ y $B$ dos puntos que bisecan el perímetro de una figura máxima, la recta $AB$ bisecará su superficie; pues, de lo contrario, sin que su perímetro aumentase, podría aumentar la superficie de la figura, haciendo la parte mayor igual á la otra.

Fig. 145




Además, si $C$, $D$ &.ª son puntos del mismo perímetro los ángulos $ACB$, $ADB$ &.ª, deberán ser rectos; pues sinó lo fueran, haciendo los rectos, aumentaría la superficie de la figura sin aumentar su perímetro (189), y como los vértices de estos triángulos rectángulos están en una circunferencia trazada sobre la recta $AB$ como diámetro, se deduce que, una figura de área máxima, dado su perímetro, tiene que ser un círculo.

Para demostrar la segunda parte del teorema, llamemos $C$ al círculo equivalente á una figura $F$, y $C_1$ al círculo isoperímetro con $F$; tendremos, $F < C_1$ y por tanto $C < C_1$, de donde $C$ tiene menos perímetro que $F$.

**191.** Cuando el perímetro de una figura se compone de una recta ilimitada, y una línea arbitraria, si se nos dá la longitud de la línea, ó el área de la figura; esta área será máxima, ó la longitud de la línea mínima, cuando la figura es un semicírculo.

En efecto, toda figura que esté en las condiciones de este teorema, la podemos considerar como la mitad de una figura simétrica, cuyo eje de simetría sea la recta dada y cuyo perímetro sea el doble de la longitud dada también; ahora bien, el área de la mitad es necesariamente máxima si la figura entera lo es; luego, según el teorema anterior, el semicírculo será la figura de área máxima y de longitud mínima.

COROLARIO.—De todos los segmentos de círculo de arcos iguales ó de áreas iguales, el semicírculo es el de área máxima y el de arco mínimo. Pues es un caso particular del teorema.

**192.** Cuando el perímetro de una figura se compone de una recta y de una línea arbitraria, si se nos dá la longitud de la línea, ó el área de la figura; esta área será máxima, ó el perímetro mínimo, cuando la figura sea un segmento de círculo.

En efecto, representemos por $m$ la longitud de la recta dada y por $l$ la longitud de la ~~recta~~ linea arbitraria, cuyas longitudes sumadas compongan el perímetro de la figura; siempre podremos construir sobre $m$ un segmento de círculo cuyo arco tenga la longitud $l$, quedando situados la línea y el arco en la misma región de la recta $m$; ahora bien, si completamos el círculo y designamos por $l'$ la longitud del arco complementario, el círculo cuyo perímetro sea $l + l'$ es de mayor área que la figura limitada por la línea de longitud $l$ y el arco $l'$; y el perímetro será mínimo en igualdad de áreas.

COROLARIOS. 1.° De las figuras cuyos perímetros estén compuestos de dos rectas cuyas longitudes sean $m$ y $n$, y una ó dos líneas arbitrarias; el segmento circular tendrá el área máxima, ó el perímetro mínimo, según que sea dado el perímetro de la figura ó el área de la misma. Pues no habría más que adicionar el segmento circular correspondiente, como en el teorema.

2.° De los polígonos compuestos por lados determinados, tienen mayor área los que pueden ser inscritos en un círculo y no tienen contorno plegado. Pues podríamos aplicar la misma demostración.

**193.** De los polígonos del mismo número de lados, el regular convexo tiene el área mayor, á igual perímetro; y el perímetro menor á igual área.

En efecto, todo polígono puede transformarse en otro mayor, del mismo número de lados é igual perímetro, con tal de que dos lados consecutivos sean desiguales (186, C.°); por consecuencia, de los polígonos isoperímetros del mismo número de lados, el mayor tiene que ser equilátero. Pero, de los polígonos construidos por lados determinados es el mayor, como concluimos de ver, aquel que puede ser inscrito en un círculo; luego queda demostrada la primera parte del teorema.

La segunda se demuestra del mismo modo que el teorema (188).

**194.** Las áreas de los polígonos regulares isoperímetros, forman desde el triángulo hasta el círculo, una serie creciente; y los perímetros de los polígonos regulares equivalentes, forman desde el triángulo hasta el círculo una serie decreciente.

En efecto, el polígono regular de $n$ lados puede considerarse como un polígono irregular de $(n+1)$ lados, en el cual hay un ángulo de 180°; pero el polígono irregular de $(n+1)$ lados, tiene menor superficie que el polígono regular de igual número de lados y del mismo perímetro; luego á medida que aumenta el número de lados de los polígonos regulares isoperímetros crece el área: y decrece el perímetro en igualdad de áreas (188).

# Aplicaciones.

## LIBRO PRIMERO.

1.° Construir un triángulo dados dos lados *a* y *b*, y el ángulo opuesto á uno de ellos *A*. Constrúyase un ángulo igual al dado, tómese en uno de sus lados una parte igual á *b*, y haciendo centro en el extremo de *b* con un radio igual á *a* trácese un arco que podrá cortar al otro lado en dos puntos, ó tocarle en uno ó no cortarle; de aquí el que el problema, siendo $A < 90°$, tenga; dos soluciones cuando $a < b$ pero mayor que la distancia del extremo de *b* á *c*, una cuando *a* sea igual á esa distancia, y ninguna si es menor.

2.° Construir un triángulo conociendo los puntos medios de los tres lados. Si se supone el problema resuelto y se unen entre sí los puntos dados se verá inmediatamente que el triángulo que así se forme, tendrá sus lados paralelos á los del que se nos pide; luego para resolver el problema no habrá más que construir el triángulo cuyos vértices sean los puntos dados y trazar por cada vértice una paralela al lado opuesto.

3.° Construir un triángulo conociendo un ángulo, su bisectriz y la altura correspondiente al lado opuesto al ángulo dado. Suponiendo el problema resuelto, la bisectriz y la altura formarán con el segmento interceptado por ellas del lado opuesto al ángulo dado un triángulo rectángulo en que se conocerán la hipotenusa y un ángulo agudo, que sabemos construir, una vez construido se forman á uno y otro lado de la hipotenusa ángulos iguales á la mitad del dado y prolongando el cateto que no es dato, queda resuelto el problema.

4.° ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual pueden trazarse 27 diagonales? $\frac{x(x-3)}{2}=27$, de donde,

$$x^2-3x-54=0,\ x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+54}=\frac{3\pm 15}{2}=$$

$=9$, (460, 1.er Curso).

5.° ¿Cuál es el polígono equiángulo, cuyo ángulo vale $\frac{3}{2}$ de un recto?. $\frac{2(n-2)}{n}=\frac{3}{2}$, $n=8$.

6.° Se desea reunir alrededor de un punto polígonos regulares iguales, de modo que no queden huecos adyacentes á dicho punto: ¿con qué polígonos regulares puede hacerse? Como es necesario que $4 : \frac{2n-4}{n}$ sea un número entero; sólo con triángulos, cuadrados, y exágonos regulares puede resolverse el problema. También podría hacerse con dos octógonos regulares y un cuadrado, ó con dos dodecágonos y un triángulo equilátero.

7.° Trazar una tangente común á dos circunferencias dadas. Suponiendo el problema resuelto y trazando los radios á los puntos de contacto, se vé inmediatamente que para resolver el problema bastará hacer centro en uno de los centros dados, trazar una circunferencia con un radio igual á la suma ó diferencia de los radios dados, y desde el otro centro trazar las tangentes y los radios á los puntos de contacto que en los puntos en que corten á la circunferencia dada concéntrica con las trazadas son los puntos de contacto de las tangentes pedidas.

El problema, pues, tiene cuatro soluciones; pero puede tener tres, dos, una ó ninguna según las distintas posiciones de las circunferencias dadas.

8.° Dados dos círculos, trazar una secante tal, que las cuerdas interceptadas tengan longitudes dadas. Inscríbanse en los círculos dados cuerdas iguales á las longitudes dadas; trácese una circunferencia concéntrica tangente, á cada cuerda y las tangentes comunes á estas dos circunferencias serán las soluciones del problema.

9.° Determinar el punto en que debe tocar á una de las bandas de una mesa de billar, una bola para que después de haber tocado en las demás bandas vaya á chocar con otra bola. Se determina el punto simétrico del que ocupa la bola con relación á una de las barandas, del punto encontrado se determina el simétrico con respecto á la baranda siguiente, del encontrado con la siguiente, y del encontrado con la última; este último se une con el punto que ocupa la otra bola y el punto en que corte á la baranda con el anterior obtenido, el punto en que corte á la baranda siguiente con el anterior obtenido, hasta llegar á la última baranda que será el punto pedido (122).

## LIBRO II.

10. Se desea saber el número de rollos de papel que se necesitan para empapelar una sala rectangular de 17'35 metros de largo, 10'25 de ancho: la altura es de 5'56 metros pero el artesón tiene 0'36. Cada rollo de papel tiene 9'2 metros de largo y 0'6 de ancho. Teniendo en cuenta que la altura de cada rectángulo es de 5'2 metros y que hay 4, dos que tiene por base 17'35 metros y otros dos de 10'25; determinándolas y dividiendo la suma por 0'6 y el resultado por 9'2, veremos que se necesitan 52 rollos de papel.

11. Una habitación tiene 12 metros de largo y 4'33 de ancho, se la quiere embaldosar con baldosas que sean exágonos regulares de un decímetro de lado: ¿Cuántas baldosas se necesitan?

Determinando el área del suelo de la habitación y dividiéndola por el área de una baldosa, se encuentra 2.000 número de baldosas.

12. Dado un ángulo, trazar por un punto situado en su plano, una recta tal, que las partes en que el segmento comprendido en dicho ángulo queda dividido por el punto dado, estén entre sí en la relación de dos rectas dadas. Se traza por el punto dado una paralela á uno de los lados del ángulo dado y se determina una cuarta proporcional á las dos rectas dadas y al segmento de recta comprendido entre el vértice del ángulo y el punto en que al otro lado corta la paralela; esta cuarta

proporcional se lleva sobre ese lado á partir de ese punto, y uniendo el punto que así se determina con el dado queda resuelto el problema.

13. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que dividen en la razón constante de dos rectas dadas, á las que unen un punto dado con todos los de una circunferencia dada? Se resuelve el problema uniendo el punto dado con el centro de la circunferencia dada y determinando una cuarta proporcional á esta recta y las dos dadas; viendo de este modo que los puntos buscados están en una circunferencia cuyo centro está en la recta que une el punto dado con el centro de la circunferencia dada.

14. Dadas tres rectas concurrentes, trazar por un punto dado una recta tal, que las partes interceptadas por dichas rectas, estén en la relación de dos rectas dadas. Trácese una recta, por un punto cualquiera de una de las tres rectas dadas que cumpla con las condiciones del problema y por el punto dado una paralela á esa recta.

15. Dado un triángulo, hallar en su interior un punto tal, que uniendo dicho punto con los vértices por medio de rectas, los triángulos que resulten sean proporcionales á tres rectas dadas. Suponiendo el problema resuelto se ve que conociendo dos alturas de los triángulos que se buscan, no habría más que trazar paralelas á las distancias indicadas á los lados respectivos para determinar el punto: lo cual se consigue determinando previamente los lados de los cuadrados equivalentes á los triángulos buscados y hallando después terceras proporcionales á cada uno de esos lados y el lado correspondiente del triángulo dado.

16. Dados tres puntos hacer pasar por ellos tres rectas que formen el mayor triángulo equilátero posible. Puesto que cada ángulo del triángulo equilátero vale 60°; basta para resolver el problema unir los puntos dados por medio de rectas y trazar sobre dos de ellas el arco capaz de 60°; determinaremos de este modo un punto de intersección y trazando una cuerda común por ese punto paralela á la recta de los centros quedará resuelto el problema.

# SECCIÓN SEGUNDA.

## ESTEREOMETRÍA.

# LIBRO PRIMERO.

## Figuras geométricas no planas.

### CAPÍTULO PRIMERO.

### *Rectas y planos.*

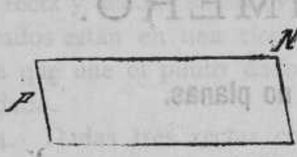
#### LECCIÓN 23.

#### Posiciones de rectas y planos.

**195.** Ya sabemos (76) que tres puntos que no están en línea recta determinan un plano; y por consecuencia que queda determinado también; por dos rectas que se cortan; por dos rectas paralelas; y por una recta y un punto fuera: de donde un plano puede considerarse engendrado; por una recta como *generatriz* que se mueve paralelamente á sí misma sobre otra recta como *directriz;* por una recta como *generatriz* que se mueve sobre otras dos como *directrices*, ya estas se corten ó sean paralelas; y por una recta como *generatriz*, que pasando siempre por un punto fijo *director*, se mueve sobre una recta fija *directriz.* En la definición, determinación y generación del plano, se fundan los hechos que con frecuencia vemos realizarse en las artes de construcción, como aplicar el borde de una regla sobre una superficie para saber si es ó nó plana, los trípodes, la manera de construir superficies planas, &.ª

Los planos para su representación se les considera limitados y se acostumbra á representarlos por rectángulos que en el papel ó el tablero tengan la forma de romboides, teniendo siempre en cuenta que son ilimitados, y se les expresa por dos letras que se ponen en dos vértices opuestos ó por una letra cuando están solos: como el plano *M N* ó *P* de la figura 146.

Fig. 146

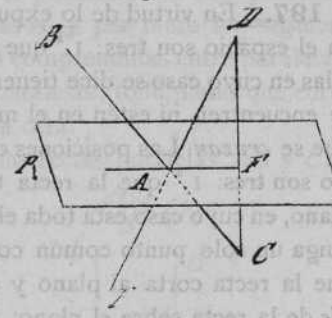



Como las figuras en Estereometría no tienen todos sus elementos en un mismo plano, es preciso para representarlas hacer convenios mediante los cuales conozcamos inmediatamente que no todos los elementos están en el plano del dibujo. Con este fin se emplea el método que se conoce con el nombre de *Perspectiva caballera*, que consiste en representar con su verdadera figura los límites de los cuerpos que son paralelos al plano del dibujo; representando los que no lo son con distinta figura, si bien conservando en el dibujo el paralelismo de las rectas, que en el cuerpo que deseemos representar lo sean, variando solo la dirección y la longitud de las que no sean paralelas. Este método aunque ventajoso para resolver teóricamente las cuestiones geométricas; porque nos permite prescindir de construcciones inútiles y hacer lo que más convenga para la demostración de que se trate; en la práctica no puede emplearse, pues sobre sufrir metamórfosis algunas partes de los cuerpos, no hay medio de fijar bien las construcciones. Estos inconvenientes se salvan; en la práctica construyendo modelos, y en la ciencia con las ramas de las Matemáticas denominadas *Geometría descriptiva* y *Perspectiva*.

**196.** Cuando dos planos tienen un punto común, tienen una recta común que pasa por este punto.

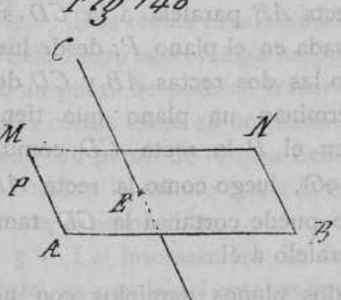
En efecto, figura 147, sea el punto común de los dos planos *A* y tracemos por este punto dos rectas *BC* y *DE* que estén en uno de los planos que llamaremos *Q*: en el caso de que una de esas rectas tuviese común con el plano *P* otro punto distinto del *A*, estaría toda ella contenida en este plano y el teorema quedaría demostrado (25); sinó las rectas cortarán al plano *P* en el punto *A*: ahora bien los puntos *D* y *C* que se hallan á distinto lado del plano *P*, determinan una recta que corta en *F* á este plano; pero la recta *DC* que tiene dos puntos comunes con el plano *Q*, está toda ella en ese plano; luego *F* es otro punto común de los dos planos, y la recta *AF* una recta común á ellos. Fuera de esta recta no tienen los planos ningún punto común; pues si lo tuviesen coincidirían.

Fig. 147




ESCOLIOS. 1.º Cuando dos rectas están en el espacio de un modo cualquiera pueden, ó no, estar en un mismo plano. Pues si las rectas son, figura 148, *AB* y *CD*; haciendo pasar un plano *P* por *AB* y un punto *E* de la *CD*, puede cortar á esta ó contenerla: en el primer caso no hay ningún plano que contenga á las dos rectas *AB* y *CD*; pues el que las contuviese tendría comunes con el *P* la recta *AB* y el punto *E*, es decir, coincidiría con *P* contra el supuesto; luego en el espacio puede haber rectas que ni se corten ni sean paralelas.

Fig. 148

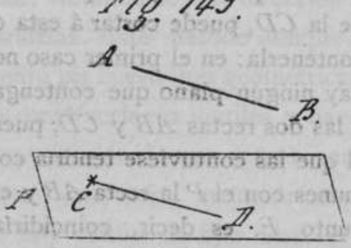



2.º Por un punto no se puede trazar en el espacio más que una paralela á una recta. Pues si el punto es *M* y la recta *AB* figura 148, la recta *MN* paralela á *AB* está en el plano *P* determinado por el punto y la recta (65) y en tal caso no hay más que una paralela (69, C.° 1.°)

**197.** En virtud de lo expuesto. Las posiciones de dos rectas en el espacio son tres: 1.ª que se encuentren; 2.ª que sean paralelas en cuyo caso se dice tienen la misma *dirección;* y 3.ª que no se encuentren ni estén en el mismo plano, en cuyo caso se dice que se *cruzan.* Las posiciones de una recta y un plano en el espacio son tres: 1.ª que la recta tenga dos puntos comunes con el plano, en cuyo caso está toda ella contenida en él; 2.ª que la recta tenga un solo punto común con el plano, en cuyo caso se dice que la recta corta al plano y el punto de intersección se llama *pie* de la recta sobre el plano; 3.ª que la recta no tenga ningún punto común con el plano, en cuyo caso se dice que la recta es paralela al plano. Las posiciones de dos planos en el espacio son dos: 1.ª que los planos se corten, en cuyo caso la intersección es una recta común á los dos planos y á esta recta común se llama *traza* de un plano sobre otro; 2.ª que no tengan ningún punto común, en cuyo caso se llaman paralelos, ó se dice que tienen la misma *postura.*

**198.** Cuando una recta es paralela á otra situada en un plano, es paralela al plano.

Fig. 149.



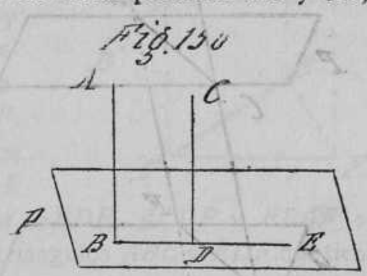

En efecto, figura 149, sea la recta *AB* paralela á la *CD* situada en el plano *P;* desde luego las dos rectas *AB* y *CD* determinan un plano que tiene con el *P* la recta *CD* común (196), luego como la recta *AB* no puede cortar á la *CD*, tampoco corta á el plano *P* ó será paralelo á él.

**199.** Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son rectas paralelas. Puesto que están en un mismo plano, que es el plano secante, y además no se encuentran por estar en planos paralelos.

COROLARIO.—Los segmentos de dos paralelas comprendidas entre una recta y un plano paralelos, ó entre dos planos paralelos, son iguales: Puesto que el plano de las dos paralelas corta según paralelas en los dos casos, y por tanto los segmentos iguales por partes de paralelas comprendidas entre paralelas.

**200.** Cuando dos rectas son paralelas, todo plano que corte á una de ellas cortará también á la otra.

En efecto, figura 150; sean las rectas paralelas $AB$ y $CD$, y el plano $P$ que corta á la recta $AB$ en $B$; puesto que los $P$ y $ABCD$ tienen un punto $B$ común, tendrán una recta $BE$ común (196), y esta que corta á $AB$ cortará también á su paralela $CD$ (69, C.° 2.°); por tanto, $CD$ tiene un punto común con el plano $P$, y no tendría más, pues entónces coincidiría con $BE$ y no sería paralela á $AB$.




COROLARIOS. 1.° Cuando dos rectas son paralelas, todo plano que contenga á la primera ó que le sea paralelo, contendrá á la segunda ó será paralelo á ella. Pues de lo contrario, cortaría á esta segunda recta, y por tanto á la primera contra la hipótesis.

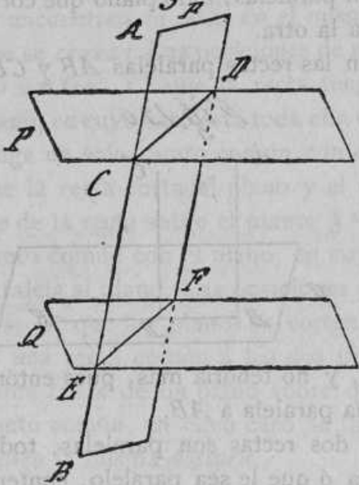
2.° Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí. Desde luego estas rectas no pueden encontrarse sin lo cual desde un punto se podrían trazar dos paralelas á una recta; ahora estas rectas están en un plano, porque el plano que contenga á una y un punto de la otra tiene que contener á esta sin lo cual la cortaría lo mismo que á la recta á quien son paralelas las dos, lo que es imposible.

3.° La intersección de dos planos paralelos á una misma recta, es paralela á esta recta. Pues si por un punto de la intersección se traza una paralela á la recta, esta paralela estará contenida en los dos planos, según el corolario 1.° Y por tanto, también podremos decir que la intersección de dos planos que pasan por dos rectas paralelas, es paralela á ellas.

**201.** Cuando dos planos son paralelos, toda recta que corte al primero corta también al segundo; y todo plano que corte al primero corta al segundo.

En efecto, figura 151, sean los planos paralelos $P$ y $Q$, y $AB$ la recta que corta en $C$ al plano $P$; si por un punto cualquiera $F$ del plano $Q$ y la recta $AB$ hacemos pasar el plano $R$, como este tiene un punto común con cada uno de los dados les cortará según las paralelas $CD$ y $EF$ (196 y 199), y como $AB$ corta á $CD$ cortará también á su paralela $EF$ y por tanto al plano $Q$.

Fig. 151.




En el caso de que el plano $R$ corte al $P$ según $CD$, tracemos una recta por $C$ tal como la $AB$ que no sea paralela á la $CD$, cortando esta recta al plano $P$, cortará según concluimos de ver, al $Q$; luego el plano $R$ corta al $Q$.

Corolorios. 1.° Cuando dos planos son paralelos, toda recta paralela al primero ó contenida en él, es paralela al segundo ó está contenida en él. Pues si cortase al segundo plano, cortaría al primero.

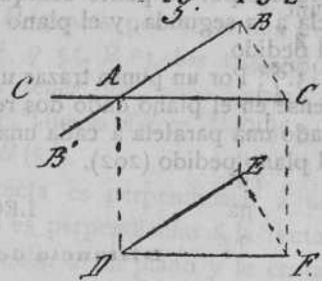
2.° Cuando dos planos son paralelos, todo plano paralelo al primero lo es también al segundo ó coincide con él. Pues si cortase á este segundo plano cortaría al primero.

3.° El lugar geométrico de las paralelas trazadas por un punto exterior á un plano, es el plano paralelo trazado por ese punto á ese plano. Pues toda paralela trazada por el punto dado al plano dado, tiene que estar en el plano que por ese punto se trace paralelo á ese plano ó ser paralela á él, y tiene que suceder lo primero porque esa recta tiene ya un punto común con ese plano.

**202.** Si dos ángulos rectilíneos tienen sus lados respectivamente paralelos hallándose en distintos planos, son iguales ó suplementarios, y sus planos son paralelos.

En efecto, figura 152, sean $BAC$ y $EDF$ los ángulos rectilíneos que tienen sus lados $AB$ y $ED$ $AC$ y $DF$ respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido; si unimos los vértices $A$ y $D$ por una recta y trazamos por $B$ y $C$ rectas paralelas á la $AD$ hasta que encuentren á los lados $DE$ y $DF$, tales como $BE$ y $CF$, y unimos por último los puntos $B$ y $C$, $E$ y $F$; tendremos que las figuras $ABDE$, $ACDF$ y $EBCF$ son paralelógramos y por tanto los triángulos $ABC$ y $EDF$ que tienen sus tres lados respectivamente iguales son iguales; de donde los ángulos homólogos $BAC$ y $EDF$ son iguales, como el $B'AC'$ es igual al $BAC$ será también igual al $EDF$ y como el $BAC'$ es suplementario del $BAC$ lo será también del $EDF$. De modo que son iguales cuando tienen los lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido ó en sentido contrario; y suplementarios cuando tienen dos lados dirigidos en el mismo sentido y otros dos en sentido contrario.

Fig. 152




Los planos son paralelos en virtud del corolario 3.° del teorema anterior.

ESCOLIO.—Cuando se nos dan dos rectas en el espacio con posición y sentido determinados, *se llama ángulo de dos rectas que se cruzan*, el ángulo que se forma trazando por un punto cualquiera del espacio una paralela á cada una de las rectas y en el mismo sentido. Según el teorema anterior la magnitud del ángulo así obtenido es independiente de la posición que ocupe en el espacio el punto por el cual se tracen las paralelas.

Cuando el ángulo de dos rectas que se cruzan es recto se dice que las rectas son perpendiculares.

**203.** PROBLEMAS. 1.° Por un punto trazar una recta paralela á un plano.

Trácese en este, una recta cualquiera y por el punto dado una paralela á ella en el plano determinado por la recta y el punto (198).

2.° Por una recta trazar un plano paralelo á otra recta. Trácese por un punto cualquiera de la primera recta una paralela á la segunda, y el plano determinado por esas dos rectas es el pedido.

3.° Por un punto trazar un plano paralelo á otro dado. Trácense en el plano dado dos rectas que se corten, y por el punto dado una paralela á cada una de esas rectas, que determinarán el plano pedido (202).

## LECCIÓN 24.

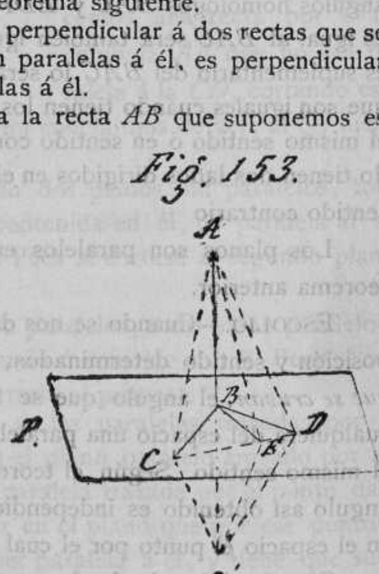
### Distancia de rectas y planos.

**204.** RECTA PERPENDICULAR Á UN PLANO, *se llama, á la que es perpendicular á todas las del plano y paralelas á él.* Para conocer cuando una recta es perpendicular á un plano nos basta saber que es perpendicular á dos que estén en el plano ó sean paralelas á él; en virtud del teorema siguiente.

**205.** Cuando una recta es perpendicular á dos rectas que se corten, de un plano ó que sean paralelas á él, es perpendicular á las demás del plano y paralelas á él.

En efecto, figura 153, sea la recta $AB$ que suponemos es perpendicular á dos rectas que se corten del plano $P$ ó paralelas á él; cualquiera posición que tengan las rectas en el plano siempre podemos por el pie $B$ de la recta trazar paralelas, tales como $BC$ y $BD$ á las rectas dadas, de modo que si por el mismo pie trazamos una recta paralela á otra cualquiera del plano ó paralela á él, tal como la $BE$, y demostramos que la recta $AB$ es perpendicular

Fig. 153.



también á esta recta, quedará demostrado el teorema: para esto si trazamos una recta que corte á las $BC$, $BD$ y $BE$ en los puntos $C$, $D$ y $E$, prolongamos la $AB$ hacia el otro lado del plano y tomamos en su prolongación una parte $BA' = AB$, uniendo por último los puntos $A$ y $A'$ con los $C$, $D$ y $E$ se tiene; los triángulos $ACD$ y $A'CD$ iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales (48 y 55 R.º), los triángulos $ACE$ y $A'CE$ también iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido (48 E.º) luego $AE = A'E$, y por tanto $BE$ perpendicular á $A'A$ en $B$ (57).

ESCOLIOS. 1.º Cuando una recta es perpendicular á un plano se dice también que el plano es perpendicular á la recta: 2.º Toda recta que no es perpendicular á un plano y le corta, se dice que es oblícua al plano ó el plano oblícuo á la recta: 3.º Todo plano que sea perpendicular á la vertical de un punto se llama *horizontal;* como el que determinen dos rectas perpendiculares á la vertical en un mismo punto, ó sean dos *horizontales* (53); cuando se desea que un plano tenga la posición horizontal se emplean los aparatos llamados *niveles*, siendo uno de los más sencillos el llamado de albañil, que consiste esencialmente en tres reglas que forman un triángulo rectángulo isósceles de cuyo vértice se hace bajar una plomada, y su uso es sencillísimo: 4.º La recta que sea perpendicular á dos que se corten, de un plano ó paralelas á él, no puede ser paralela al plano; pues sinó trazando desde un punto del plano paralelas á las tres tendríamos en un mismo plano dos perpendiculares á una recta, lo que es imposible (54).

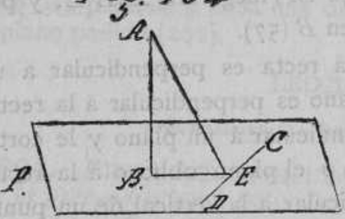
COROLARIOS. 1.º Cuando dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular á la primera lo es á la segunda; puesto que toda recta del plano ó paralela á él es perpendicular á la primera, y por consiguiente á la segunda (202, E.º). 2.º Cuando dos planos son paralelos, toda recta perpendicnlar al primero, lo es al segundo; puesto que toda recta del primer plano ó paralela á él, está en el segundo ó es paralela á él (201, C.º 1.º).

Estos dos corolarios pueden enunciarse diciendo: Las rectas paralelas tienen sus planos perpendiculares comunes, y los planos paralelos tienen sus perpendiculares comunes.

**206.** Un punto determina una perpendicular á un plano, es decir, por un punto puede siempre trazarse una perpendicular á un plano pero nada más que una.

Pueden suceder dos casos, que el punto esté en el plano ó fuera de él, figura 154: 1.º si el punto esta en el plano tal como el *B*, tracemos por ese punto una perpendicular *BE* á la recta *DC* situada en el plano, por el pié *E* de esta otra perpendicular *EA* á la *DC*, y ahora si en *B* y en el plano *AEB* trazamos una perpendicular *BA* á la recta *BE*, vamos á demostrar que es perpendicular al plano *P*; para ello, puesto que la *CD* es perpendicular al plano *AEB*, por serlo á las rectas *BE* y *EA* por construcción, será perpendicular á *AB*, y por tanto esta recta que es perpendicular á las *BE* y *CD* del plano *P* es perpendicular á ese plano: 2.º si el punto está fuera del plano tal como el *A*, tracemos *AE* perpendicular á la recta *DC* situada en el plano, por su pie *E* y en el plano dado *P*, otra perpendicular á la *DC* tal como *EB*, y ahora la perpendicular que desde *A* se trace á la *EB*, lo será también al plano *P*; para evidenciarlo no hay más que repetir la anterior demostración. Demostrado que por un punto se puede siempre trazar una perpendicular á un plano, es evidente que por un mismo punto sólo se puede trazar una; pues si fuese posible que pasasen dos, la traza del plano, determinada por ellas, sobre el plano *P*, sería perpendicular á ambas, lo que es imposible (54).

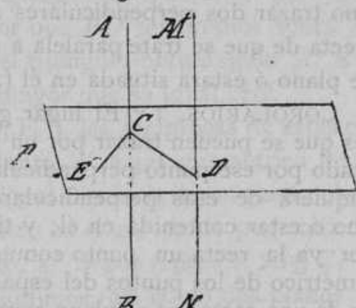
Fig. 154




**207.** Un punto determina un plano perpendicular á una recta, es decir, por un punto puede siempre trazarse un plano perpendicular á una recta pero nada más que uno.

Pueden suceder dos casos que el punto esté en la recta ó fuera de ella, figura 155: 1.° si el punto está en la recta tal como el $C$ de la recta $AB$; tracemos por ese punto y en planos diferentes las perpendiculares $CD$ y $CE$ á la recta $AB$, que determinan el plano $P$ perpendicular á la recta $AB$ (205, E.° 1.°) además no puede haber otro plano distinto del $P$, perpendicular á la recta $AB$ en $C$ puesto que todo plano perpendicular

Fig. 155




á la $AB$ en $C$, tiene que cortar al plano $ACD$ según la perpendicular $CD$ á la $AB$, y al $ACE$ según la perpendicular $CE$ á $AB$, luego es el mismo plano $P$: 2.° si el punto está fuera de la recta tal como el $D$, tracemos por ese punto una paralela $MN$ á la $AB$, y como las rectas paralelas tienen sus planos perpendiculares comunes; una vez que por el punto $D$ no se puede trazar más que un solo plano perpendicular a la $MN$, tampoco por ese punto se podrá trazar más que un plano perpendicular á su paralela $AB$.

**208.** Dos rectas perpendiculares á un mismo plano son paralelas ó coinciden.

En efecto, figura 155, si las rectas $AB$ y $MN$ perpendiculares al plano $P$, tuviesen un punto común, coincidirían; pues desde un punto no se puede trazar más que una perpendicular á un plano: si las rectas $AB$ y $MN$ no tienen ningún punto común la paralela que por un punto $D$ de la $MN$ se trace á la $AB$, será perpendicular al plano $P$, puesto que las paralelas tienen los planos perpendiculares comunes, luego tiene que coincidir con $MN$, una vez que desde el punto $D$ no se puede trazar más que una perpendicular al plano $P$.

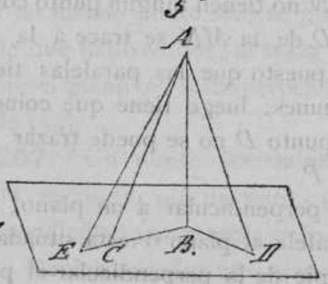
**209.** Cuando una recta es perpendicular á un plano, toda perpendicular á la recta es paralela al plano ó está situada en él: Puesto que trazando por el pie de la perpendicular al plano una paralela á la perpendicular á la recta de que se trate, esta paralela que será perpendicular también á la recta tendrá que estar en el plano, sin lo cual por un punto se podrían en un plano trazar dos perpendiculares á una recta; por tanto siendo la recta de que se trate paralela á una del plano, será paralela á este plano ó estará situada en él (200, C.º 1.º)

COROLARIOS. 1.º El lugar geométrico de las perpendiculares que se pueden trazar por un punto á una recta, es el plano trazado por ese punto perpendicular á la recta: Puesto que una cualquiera de esas perpendiculares tiene que ser paralela al plano ó estar contenida en él; y tiene que ser esto último, por tener ya la recta un punto común con el plano. 2.º El lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de los extremos de una recta, es el plano perpendicular á ella en su punto medio: Puesto que, en un plano cualquiera que pase por la recta dada, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de esa recta es la perpendicular trazada á ella en su punto medio; y como acabamos de ver que el lugar de las diversas perpendiculares trazadas á una recta en un punto, es el plano perpendicular á la recta en ese punto, el lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de los extremos de una recta, es el plano perpendicular á ella en su punto medio.

**210.** Si desde un punto tomado fuera de un plano, se trazan á él la perpendicular y varias oblícuas que terminen en su punto de intersección con dicho plano se verifica: 1.º La perpendicular es la distancia del punto al plano: 2.º Las oblícuas cuyos piés equidisten del de la perpendicular son iguales: 3.º La oblícua cuyo pie diste más del de la perpendicular que el de las demás, es la mayor.

En efecto, figura 156, sean el plano $P$ y el punto $A$, tracemos la perpendicular $AB$ y las oblícuas $AC$, $AD$ y $AE$ cuyos piés uniremos por las rectas $BD$ y $BE$ y tendremos: 1.º Que en el triángulo rectángulo $ABD$, $AD > AB$, ó $AB < AD$, y como lo que demostramos de $AD$ lo demostraríamos de cualquiera otra oblícua, vemos que la

Fig. 156



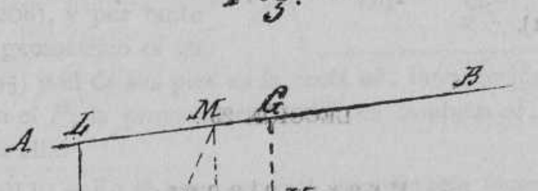
menor recta que se puede trazar desde $A$ al plano $P$ es la perpendicular $AB$; que es por tanto la distancia de $A$ al plano $P$: 2.° Si tomamos $BC = BD$, los triángulos rectángulos $ABC$ y $ABD$ que tienen los catetos iguales son iguales, y por tanto $AC = AD$: 3.° Si $BE$ es mayor que $BD$ tomaremos sobre $BE$ una parte $BC = BD$, y en el triángulo obtusángulo $ACE$ se tiene, $AE > AC$; y por tanto mayor que su igual $AD$.

ESCOLIOS. 1.° Según (50, E.°), las recíprocas de estas proposiciones son ciertas; y por tanto, el lugar geométrico de los puntos de un plano situados á igual distancia de un punto dado, es una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular trazada desde ese punto al plano. 2.° Según (199, C.° 205, C.° 2.° y 208), una recta y un plano paralelos, así como dos planos paralelos equidistan; y por tanto, distancia de una recta á un plano paralelo, es la de un punto cualquiera de la recta al plano; así como distancia entre dos planos paralelos, es la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro.

**211.** Las distancias entre dos rectas que se cruzan, es la perpendicular común á ambas.

En efecto, figura 157, sean las rectas que se cruzan $AB$ y

Fig. 157




$CD$, tracemos por un punto $E$ de la $CD$ una paralela á la $AB$; el plano determinado por las dos rectas $CD$ y $EF$ sabemos es paralelo á la recta $AB$, tracemos por un punto $G$ de esta recta una perpendicular al plano $CEF$, tal como la $GH$ por el pie $H$

de esta perpendicular tracemos también una paralela á $EF$ hasta que encuentra á $CD$ en $K$, y por último tracemos por $K$ una paralela á la $GH$, tal como la $KL$ que por ser paralela á la $GH$ es perpendicular al plano $CEF$ y por tanto á $CD$ y $EF$ y á su paralela $AB$, vamos á demostrar que esta recta $KL$ es la distancia entre las dos rectas $AB$ y $CD$ que se cruzan; para ello nos bastará demostrar que cualquiera otra recta que una dos puntos de las dadas tal como la $MN$ es mayor que ella, y como trazando por $M$ una paralela á $KL$, tal como la $MO$ y uniendo $O$ con $M$, en el triángulo rectángulo $MON$ se tiene $MN > MO = LK$, queda demostrado el teorema.

**212.** PROBLEMAS. 1.° Por un punto trazar una perpendicular á un plano. Se resuelve con la doble escuadra ó bien mediante los teoremas (206 y 210 E.° 1.°) haciendo las mismas construcciones que en el primero, ó bien tomando tres distancias iguales desde el punto al plano, hallando el centro de la circunferencia determinada por esos tres puntos y unir el centro con el punto.

2.° Por un punto trazar un plano perpendicular á una recta. Se resuelve empleando el procedimiento seguido (207).

3.° Hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan.

Se resuelve este problema empleando el procedimiento emplado (211).

## LECCIÓN 25.

### Proyecciones.

Ya hemos visto (138), lo que se entendía por proyección de un punto sobre una recta y de una recta sobre otra; más aquí nos conviene hacer notar que las proyecciones de los distintos puntos de una figura, se hacen siempre sobre una superficie cualquiera, mediante líneas que se llaman *proyectantes* con la condición de que corten á esa superficie, que se llama *superficie de proyección*, y obedezcan á una ley establecida: la figura determinada por los puntos que sean las proyecciones de la figura dada, se llama proyección de esta figura.

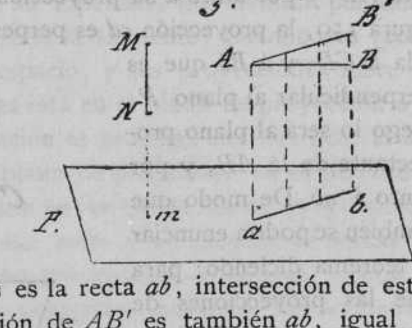
En la geometría elemental se toma como superficie de proyección el plano; y como proyectantes, rectas perpendiculares al plano. Las proyecciones así obtenidas se llaman *proyecciones ortogonales*, *ortográficas*, ó simplemente *proyecciones*.

**213.** PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO, *es el pie de la perpendicular trazada desde ese punto al plano*. La proyección de una línea cualquiera sobre un plano, es el lugar de las proyecciones de los diversos puntos de la línea sobre ese plano.

**214.** La proyección de una recta sobre un plano, es otra recta.

En efecto, figura 158, sea el plano de proyección $P$, y las rectas cuya proyección deseamos obtener $AB$ y $AB'$, la primera oblícua y la segunda paralela al plano; desde luego las proyectantes $Aa$, $Bb$....., trazadas por los distintos puntos de la recta $AB$ son paralelas (208), y por tanto su lugar geométrico es un

Fig. 158




plano (195) y el de sus pies es la recta $ab$, intersección de este plano con el $P$: la proyección de $AB'$ es también $ab$, igual y paralela á ella.

ESCOLIO.—En el caso especial que la recta fuese perpendicular al plano de proyección como la $MN$, la proyección de ella se reduce al punto $m$; pues todas las proyectantes se confunden con ella.

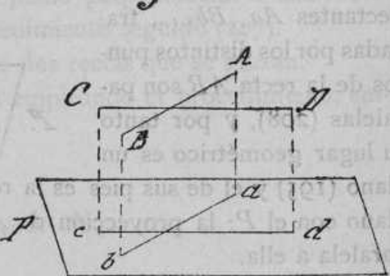
COROLARIOS. 1.° Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un plano, son rectas paralelas: Puesto que los planos proyectantes serían paralelos y sus intersecciones con el plano de proyección rectas paralelas (202 y 179). Claro está, que si las rectas fuesen perpendiculares al plano de proyección, las proyecciones, según el escolio anterior serían puntos; y podrían coincidir cuando los planos proyectantes coincidiesen, aún cuando las rectas paralelas no fuesen perpendiculares al plano de proyección.

2.º Las proyecciones de dos rectas que se cortan sobre un plano, son rectas que se cortan: Puesto que en general se cortarán los planos proyectantes y sus trazas; á menos que no coincidan los planos proyectantes, entonces las proyecciones coincidirán ó son una sola recta.

**215.** Cuando dos rectas se cortan perpendicularmente en el espacio, sus proyecciones sobre un plano se cortarán perpendicularmente, siempre que una de ellas esté en el plano de proyección ó sea paralela á él.

En efecto, en el primer caso; la recta que está en el plano de proyección *CD*, es perpendicular al plano proyectante de la otra *AB*, y por tanto á su proyección *ab* (206) en el segundo; figura 159, la proyección *cd* es perpendicular á *AB* como paralela á *CD*, y á *Bb* que es perpendicular al plano *P*, luego lo será al plano proyectante de la *AB*, y por tanto á *ab*. De modo que también se podría enunciar el teorema diciendo: para que las proyecciones de dos rectas perpendiculares en el espacio se corten perpendicularmente, es preciso que una de ellas sea perpendicular al plano proyectante de la otra.

Fig. 159




RECÍPROCO.—Cuando las proyecciones de dos rectas sobre un plano son perpendiculares, y una de ellas está en el plano de proyección ó es paralela á él, las rectas son perpendiculares en el espacio.

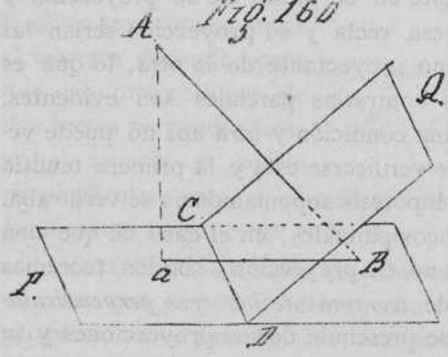
En efecto, en el primer caso; la recta que está en el plano de proyección *CD* es perpendicular al plano proyectante de la otra, y por tanto á ella (206): en el segundo; figura 159, siendo la recta *cd* perpendicular á *ab* y *Bb*, lo será al plano proyectante de la *AB*, y por tanto á ella, luego su paralela *CD* también será perpendicular á *AB*.

ESCOLIOS. 1.° Siempre que como en el teorema anterior y su recíproco, la tesis depende de dos condiciones, cuando se verifique la tesis y una condición de la hipótesis se verificará la otra condición; lo cual dará lugar á tantas proposiciones como combinaciones binarias pueden hacerse con tres cosas que como sabemos (410, 1.er Curso); son tres, que si tenemos en cuenta las parciales contrarias serían nueve, estas parciales contrarias tendrían por hipótesis la afirmación de una de las condiciones y la negación de otra, siendo la tésis la negación de la tercera condición. De las tres proposiciones una la hemos demostrado como directa, otra como recíproca también parcial; puesto que la hipótesis está compuesta de la tesis del directo y una de las condiciones de su hipótesis; nos faltaría por tanto otra recíproca parcial que sería la siguiente: Cuando dos rectas son perpendiculares en el espacio, y sus proyecciones sobre un plano también, una de ellas está en el plano de proyección ó es paralela á él. La demostración es sencilla; una vez que, si una de las rectas no está en el plano de proyección ni es paralela á él, le cortará necesariamente en un punto de su proyección y entónces tendríamos que esa recta y su proyección serían las dos perpendiculares al plano proyectante de la otra, lo que es imposible (206). Las seis contrarias parciales son evidentes; puesto que verificándose una condición y otra no; no puede verificarse la tercera, pues de verificarse esta y la primera tendría que verificarse la que por hipótesis suponíamos no se verificaba. 2.° El directo y los recíprocos parciales, en el caso de que una de las rectas está en el plano de proyección, son los teoremas conocidos con el nombre de *teoremas de las tres perpendiculares*, en cuyos enunciados se prescinde de las proyecciones y se hacen por tanto en la forma siguiente: 1.° Cuando una recta es perpendicular á otra situada en un plano, y se traza una perpendicular al plano desde un punto de la primera, la recta determinada por los pies de la perpendicular á la recta situada en el plano y la perpendicular al plano, es perpendicular á la recta situada en el plano; 2.º Cuando por un punto se traza una perpendicular á un plano y por el pie de esta perpendicular se traza una perpendicular á una recta situada en el plano, la recta que une el pie de esta perpendicular con un punto cualquiera de la trazada al plano es perpendicular á la recta situada en el plano; 3.º Cuando una recta es perpendicular á otra situada en un plano, y por el pie de esta perpendicular se traza en este plano otra perpendicular á la recta situada en él, si desde un punto cualquiera de la primera se traza una perpendicular á la segunda, esta recta será perpendicular al plano. En los tres enunciados la recta situada en el plano es perpendicular á las otras tres (206), y de aquí la denominación del teorema de las tres perpendiculares.

**216.** Cuando una recta es perpendicular á un plano, su proyección sobre otro es perpendicular á la traza del primero sobre el segundo.

En efecto, figura 160, sea la recta *AB* perpendicular al plano *Q*, *Ba* la proyección de *AB* sobre el plano *P*, y *CD* la traza del plano *Q* sobre el *P*; desde luego por ser *AB* perpendicular al plano *Q* será perpendicular á la *CD* de ese plano, y por tanto sus proyecciones *Ba* y *CD* serán perpendiculares.

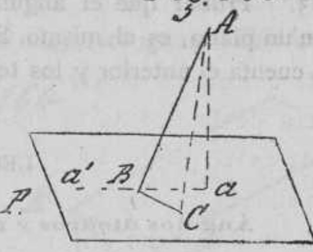
Fig. 160




**217.** Cuando una recta es oblícua á un plano, el ángulo que forma con su proyección sobre ese plano, es menor que el que forme con cualquiera otra recta de ese plano.

En efecto, figura 161, sea la recta $AB$ oblícua al plano $P$ y $Ba$ su proyección sobre él, decimos que el ángulo $ABa$ es menor que el que forme con cualquiera recta tal como el $ABC$; desde luego si tomamos $BC = Ba$, y trazamos la $AC$, tenemos en los triángulos $ABa$ y $ABC$, que tienen un lado común $AB$ y los lados $Ba$ y $BC$ iguales, $Aa < AC$, y por tanto $ABa < ABC$.

Fig. 161



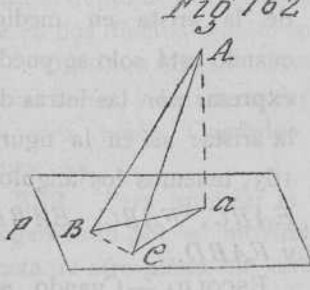

Escolio.—Si hacemos girar á la recta $BC$ alrededor de $B$ de modo que su extremo $C$ recorra todos los puntos de la circunferencia cuyo centro es $B$ y cuyo radio es $Ba$, se vé que el ángulo $ABC$ va aumentando desde $ABa$ hasta $ABa'$, para volver después á disminuir desde $ABa'$ hasta $ABa$; de modo que la recta $AB$ oblícua al plano $P$ forma con su proyección dos ángulos uno mínimo y otro máximo.

**218.** Ángulo de una recta y un plano, *es el agudo que la recta forma con su proyección sobre el plano.*

**219.** El ángulo que forman dos oblícuas á un plano, es menor que el formado por sus proyecciones sobre ese plano.

En efecto, figura 162, sean las oblícuas al plano $P$, $AB$ y $AC$, y sus proyecciones respectivas $aB$ y $aC$; si trazamos la recta $BC$, se tiene que los triángulos $ABC$ y $aBC$, tienen $BC$ común $AB > aB$ y $AC > aC$, luego el ángulo $BAC$ del primero menor $BaC$ del segundo (51).

Fig. 162




**220.** Problemas. 1.° Trazar por un punto una perpendicular á una recta situada en un plano. Se resuelve este problema aplicando el primer enunciado de los teoremas de las tres perpendiculares.

2.° Determinar el ángulo de una recta y un plano. Se resuelve este problema aplicando el teorema (217) y la definición (218).

3.° Probar que el ángulo que forman dos rectas paralelas con un plano, es el mismo. Se resuelve este problema teniendo en cuenta el anterior y los teoremas (214, C.° 1.° y 72).

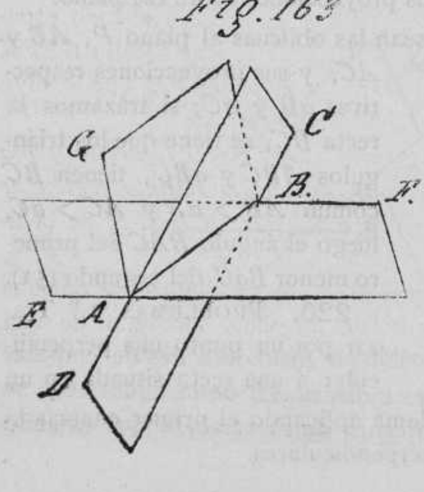
## LECCIÓN 26.

### Ángulos diedros y planos perpendiculares.

**221.** Las posiciones de dos planos en el espacio son dos (197), que se corten ó que no se corten, en el primer caso sabemos que la intersección es una recta. Dos planos que se cortan dividen el espacio en cuatro regiones, que se llaman ángulos diedros. Los planos *secantes* ó que se cortan se llaman *convergentes* ó *divergentes*, según que se les considere acercándose ó alejándose de su intersección.

ÁNGULO DIEDRO, *es toda porción de espacio indefinido comprendido entre dos planos que terminan en su común intersección.* Los planos se llaman *caras* ú *hojas*, y la recta intersección, *arista* ó *canto.*

Fig. 163



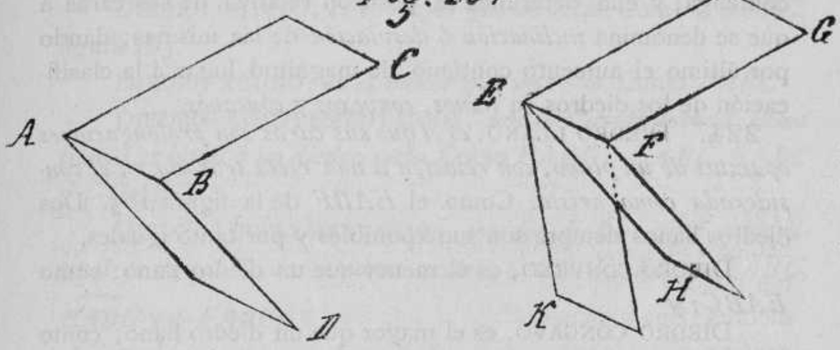

Un ángulo diedro se expresa con cuatro letras, una de cada cara y las dos de la arista en medio; cuando está solo se puede expresar por las letras de la arista: así en la figura 163, tenemos los ángulos *EABC, FABC, EABD* y *FABD.*

ESCOLIO.—Cuando se dice diedro se sobreentiende ángulo diedro.

**222.** DIEDROS IGUALES, *son los que llevando el uno sobre el otro, de modo que coincidan las aristas y una de las caras, coincidan las otras dos caras, siempre que caigan hácia la misma región de la cara común.*

Así, el diedro *CABD*, figura 164, será igual *GEFH*, si

Fig. 164




llevando el *CABD* sobre el *GEFH* de modo que coincidan las aristas *AB* y *EF*, y la cara *AD* con la *FH*, coincidan las caras *AC* y *EG*, por caer las dos encima de *FH;* pero si *AC* tomase la posición de *FK* por caer hácia distinta región de *FH* que *EG*, se formará el diedro *GEFK*, que será la suma de los dos diedros *GEFH* y *HEFK;* siendo por tanto cualquiera de ellos la diferencia entre el diedro *GEFK* y el otro: en el caso especial de que los dos diedros *GEFH* y *HEFK* sean iguales *GEFK* será el duplo de cualquiera de ellos; y el plano *FH* que le divide en dos diedros iguales se llama *plano bisector*.

DIEDROS CONSECUTIVOS, *son los que tienen la arista* y *una cara común*, y las *otras dos caras caen hacia distinta región de la cara común.* Como los diedros *GEFH* y *HEFK* de la figura 164.

**223.** Para apreciar la magnitud de un diedro, se concibe engendrado por el movimiento de un plano alrededor de una recta de otro plano con el cual ha coincidido antes de empezar el movimiento. De modo que el diedro *AB* de la figura 164, se ha engendrado por el movimiento de su cara *AC* que estando superpuesta con la $AD$, giró alrededor de la arista $AB$, hasta tomar la posición que tiene. Bien se comprende que á medida que se va verificando la rotación de la cara móvil forma con la cara fija un diedro que va aumentando de una manera contínua Por tanto, la magnitud de un diedro, no depende de la magnitud de sus caras sinó del mayor ó menor espacio indefinido que contenga; y ella determina la posición relativa de sus caras á que se denomina *inclinación* ó *desviación* de las mismas; dando por último el aumento contínuo de magnitud lugar á la clasificación de los diedros en *llanos*, *convexos* y *cóncavos*.

**224.** DIEDRO LLANO, *es el que sus caras son prolongaciones opuestas de un plano, con relación á una recta trazada en él considerada como arista.* Como el $EABF$ de la figura 163. Dos diedros llanos siempre son superponibles y por tanto iguales.

DIEDRO CONVEXO, es el menor que un diedro llano; como $EABC$; y

DIEDRO CÓNCAVO, es el mayor que un diedro llano; como $\overset{\frown}{EABC}$, en que ponemos un arco encima para diferenciarlo del convexo.

Los cuatro diedros convexos formados por dos planos que se cortan $CD$ y $EF$, considerados dos á dos se dividen en *adyacentes* y *opuestos por la arista.*

DIEDROS ADYACENTES, *son dos consecutivos convexos, cuyas caras no comunes están en un mismo plano.* Como $EABC$ y $FABC$.

DIEDROS OPUESTOS POR LA ARISTA, *son dos diedros convexos en que, con respecto á la arista, las caras del uno son prolongaciones opuestas de las del otro.* Como $EABC$ y $DABF$. Los diedros opuestos por la arista son iguales; porque sumados con un mismo diedro adyacente nos dan un llano.

DIEDROS RECTOS, *son los adyacentes iguales*. Como $EABG$ y $FABG$.

DIEDROS OBLÍCUOS, *son los adyacentes desiguales.* Como $EABC$ y $FABC$.

De estas definiciones se deducen los siguientes

COROLARIOS. 1.° Un diedro llano es igual á dos diedros rectos; 2.° todos los diedros rectos son iguales, como mitades de diedros llanos; 3.° la suma de dos diedros adyacentes es igual á dos diedros rectos.

**225.** Del segundo corolario anterior se deduce que el diedro recto es un tipo invariable con el cual se pueden comparar los demás: así que, los oblícuos se dividen en *obtusos* y *agudos.*

DIEDRO OBTUSO, *es el mayor que un recto.* Como el $EABC$, figura 163.

DIEDRO AGUDO, *es el menor que un recto.* Como $FABC$.

DIEDROS COMPLEMENTARIOS, *son dos diedros cuya suma literal es igual á un diedro recto.* Como $FABC$ y $GABC$, $EABC$ y $(-GABC)$.

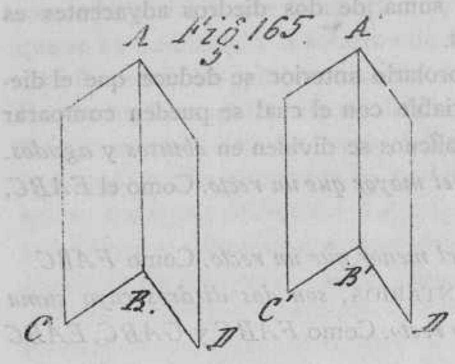
DIEDROS SUPLEMENTARIOS, *son dos diedros cuya suma literal es igual á dos diedros rectos.* Como $EABC$ y $FABC$, $\widehat{EABC}$ y $(-FABC)$.

COROLARIOS. 1.° Los diedros adyacentes son suplementarios; 2.° cuando uno de los diedros de los cuatro que forman dos planos secantes, es recto ú oblícuo, serán rectos ú oblícuos los tres restantes; 3.° los diedros que tienen el mismo complemento ó suplemento son iguales; 4.° Dos diedros convexos consecutivos, cuando son suplementarios son adyacentes (40); 5.° La suma de todos los diedros consecutivos formados hacia la misma región de un plano, valen dos diedros rectos (41); 6.° La suma de todos los diedros consecutivos formados alrededor de una recta, valen cuatro diedros rectos.

**226.** ÁNGULO RECTILÍNEO CORRESPONDIENTE Á UN DIEDRO, *es el formado por dos perpendiculares á la arista en un mismo punto, una en cada cara.* Este ángulo está formado siempre por la intersección de las caras con un plano perpendicular á la arista en un punto; por lo que también se le llama *sección recta* del diedro.

**227.** Cuando dos diedros son **iguales**, sus rectilíneos correspondientes también lo son.

En efecto, figura 165, sean los diedros iguales $AB$ y $A'B'$, y sus rectilíneos correspondientes $CBD$ y $C'B'D'$; si llevamos el diedro $A'B'$ sobre el $AB$ de modo que coincidan sus aristas y que el punto $B'$ coincida con el $B$, la cara $C'A'$ coincidirá con la $CA$, y la $A'D'$ con la $AD$, por ser iguales los diedros,




y entónces necesariamente $B'C'$ coincidirá con $BC$ y $B'D'$ con $BD$ (54); luego los ángulos $C'B'D$ y $CBD$ que superpuestos han coincidido son iguales.

Recíproco.—Cuando los ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros, son iguales los diedros son iguales.

En efecto, llevemos como antes el diedro $A'B'$ sobre el $AB$ de modo que coincidan sus aristas y que el punto $B'$ coincida con el $B$, el ángulo $C'B'D'$ coincidirá con su igual $CBD$, y la cara $A'C'$ coincidirá con $AC$ por haber coincidido ya dos rectas de ellas, y lo mismo coincidirán las caras $A'D'$ y $AD$; luego los diedros $AB$ y $A'B'$ que superpuestos han coincidido son iguales.

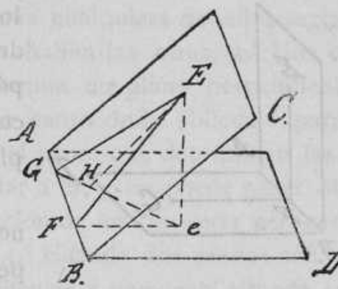
Corolario.—El ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro recto, es también recto (54).

Escolio.—Es conveniente hacer notar, que todas las secciones hechas en un diedro por planos paralelos son iguales (202); y que los diedros serán rectos ú oblícuos según lo sean sus rectilíneos correspondientes.

**228.** Cuando por un punto de una cara de un diedro se trazan varias rectas que corten á la arista, la que forma mayor ángulo con la otra cara es la perpendicular á dicha arista.

En efecto, figura 166, sea el diedro $CABD$, $E$ un punto de la cara $AC$ desde el cual trazamos la perpendicular $EF$ y la oblícua $EG$ á la arista $AB$; proyectamos el punto $E$ sobre el plano $AD$, en cuyo caso las proyecciones de las rectas $EF$ y $EG$ serán respectivamente $eF$ y $eG$, como sabemos por los teoremas de las tres perpendiculares que la recta $eF$ es perpendicular á la $AB$, la $eG$ será oblícua y mayor que $eF$, por tanto si

Fig. 166.




tomamos sobre $eG$ una parte $eH = eF$ y trazamos la recta $EH$; se tiene, que los triángulos rectángulos $EeF$ y $EeH$ son iguales por tener un cateto común y los otros dos iguales por construcción, luego los ángulos $EFe$ y $EHe$ son iguales, pero el ángulo $EHe$ es mayor que el $EGe$ por ser externo del triángulo $EHG$; de donde $EFe > EGe$, y como lo mismo demostraríamos de otra recta cualquiera que parta de $E$ queda demostrado el teorema.

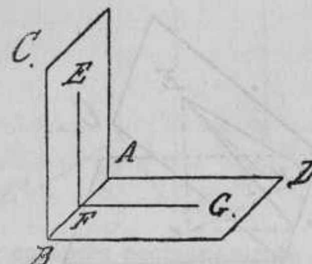
ESCOLIOS. 1.º El ángulo rectilíneo que resulta de cortar un diedro por un plano cualquiera, es un máximo, cuando el plano sea perpendicular á la arista. 2.º Cuando el plano $AD$ es horizontal la recta $EF$ se llama *línea de máxima pendiente* del plano $AC$; porque de todas las rectas que en el plano inclinado $AC$ pueden trazarse por el punto $E$, la más inclinada al horizonte es $EF$.

**229.** PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SÍ, *son los que forman un diedro recto;* y OBLÍCUOS, *los que forman un diedro oblícuo.*

Cuando dos planos son perpendiculares, toda recta perpendicular á la intersección trazada en uno de ellos, es perpendicular al otro.

En efecto, figura 167, sean los dos planos perpendiculares $AC$ y $BD$, y tracemos á su intersección $AB$, la perpendicular $EF$ en el plano $AC$, así como la $FG$ en el plano $BD$; entónces el ángulo $EFG$ es recto por serlo su diedro correspondiente $CABD$ por hipótesis, y siendo la $EF$ perpendicular á las rectas $AB$ y $FG$ del plano $BD$, lo será á este plano.

Fig. 167.




RECÍPROCO.—Cuando dos planos son perpendiculares, toda perpendicular á uno de ellos trazada por un punto de la intersección, estará contenida en el otro.

En efecto, si tenemos los planos perpendiculares $AC$ y $BD$, y trazamos en un punto $F$ de la intersección la recta $FE$ perpendicular al plano $BD$, estará contenida en el plano $AC$, sin lo cual trazando por ese mismo punto y en el plano $AC$ una perpendicular á la intersección $AB$, tendríamos por un punto trazadas dos perpendiculares á un plano lo que sabemos (206) es imposible.

**230.** Cuando una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por esa recta ó sea paralelo á ella, será perpendicular al primero.

En efecto, figura 167, sea la recta $EF$ perpendicular al plano $BD$, y $AC$ un plano que pase por ella; si por el pié $F$ de esa recta se traza una perpendicular á la intersección $AB$ de los dos planos; en el plano $BD$, el ángulo $EFG$ recto, será el rectilíneo correspondiente al diedro $CABD$, que por tanto será recto y los planos $AC$ y $BD$ perpendiculares. Por otra parte en todo plano paralelo á la $EF$ se podría trazar una recta paralela á ella, que al ser perpendicular al plano $BD$, estábamos en el caso anterior.

COROLARIOS. 1.° Cuando dos planos son perpendiculares á un tercero, su intersección será perpendicular á este plano;

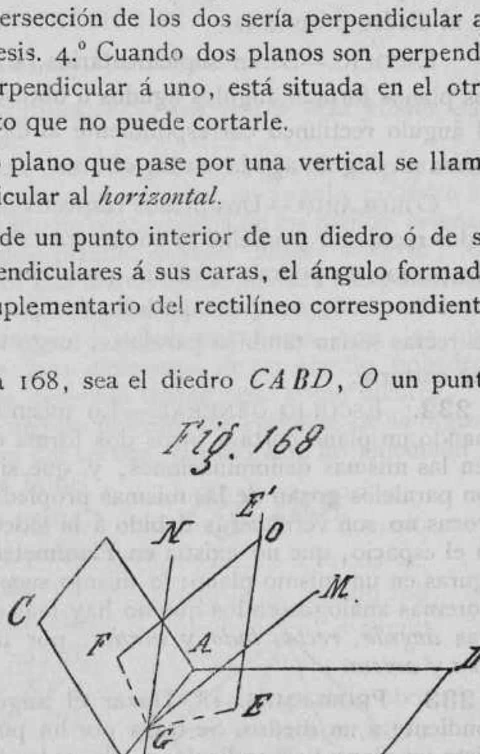
puesto que si en el punto que corta la intersección al tercer plano se traza una perpendicular á este tendrá que estar contenida en los dos planos (229), y por tanto coincidir con su intersección. 2.° Cuando dos planos perpendiculares entre sí, son perpendiculares á un tercero las tres intersecciones son perpendiculares entre sí; puesto que una cualquiera de ellas sería perpendicular al plano en que se hallan las otras. 3.° Una oblícua ó paralela á un plano determina un plano perpendicular á él; puesto que trazando por un punto de la oblícua ó paralela una perpendicular á ese plano, el plano que determinan las dos rectas sabemos es perpendicular á él, y no puede pasar otro plano porque entónces la intersección de los dos sería perpendicular al plano contra la hipótesis. 4.° Cuando dos planos son perpendiculares, toda recta perpendicular á uno, está situada en el otro ó le es paralela; puesto que no puede cortarle.

ESCOLIO.—Todo plano que pase por una vertical se llama *vertical* y es perpendicular al *horizontal*.

**231.** Cuando desde un punto interior de un diedro ó de su arista, se trazan perpendiculares á sus caras, el ángulo formado por ellas es igual ó suplementario del rectilíneo correspondiente al diedro.

En efecto, figura 168, sea el diedro $CABD$, $O$ un punto interior desde el cual se tracen respectivamente las perpendiculares $OE$ y $OF$ á las caras $BD$ y $AC$, y $G$ un punto de la arista en el cual se tracen las perpendiculares $GN$ y $GM$ á los mismos planos; desde luego el plano que contiene todas estas perpendiculares es

Fig. 168



perpendicular á la arista $AB$ en $G$ (209, C.° 1.°), de modo que si unimos con $G$ los pies $E$ y $F$ de las perpendiculares $OE$ y $OF$ se forma el cuadrilátero $OEGF$ en que los ángulos $F$ y $E$ son rectos; y por tanto los $O$ y $G$ son suplementarios, pero el ángulo $FGE$ es el rectilíneo correspondiente del diedro $CABD$, luego teniendo en cuenta que $E'OF$, es suplemento de $EOF$, se tiene que el ángulo que forman las perpendiculares $OE$ y $OF$ es suplementario ó igual del rectilíneo correspondiente al diedro: por otra parte como las rectas $GN$ y $GM$ son respectivamente paralelas á $OE$ y $OF$ (208), los ángulos que forman son también suplementarios ó iguales al rectilíneo $EGF$ correspondiente al diedro propuesto.

ESCOLIO.—Serán suplementarios, si las perpendiculares á los planos forman ángulos agudos ú obtusos con las que formen el ángulo rectilíneo correspondiente al diedro, é iguales si una forma un ángulo agudo y otro obtuso.

COROLARIO.—Dos planos respectivamente perpendiculares á dos rectas no paralelas se encuentran siempre; puesto que los dos planos no podrán coincidir, pues entónces las rectas serían paralelas (208), tampoco podrían ser paralelos; pues entónces las rectas serían también paralelas, luego tienen necesariamente que cortarse.

**232.** ESCOLIO GENERAL.—Lo mismo que en Planimetría, cuando un plano corta á otros dos forma ocho diedros que tienen las mismas denominaciones, y que si los planos cortados son paralelos gozan de las mismas propiedades, si bien las recíprocas no son verdaderas debido á la indeterminación de estar en el espacio, que no existía en Planimetría por estar todas las figuras en un mismo plano: lo mismo sucede respecto de otros teoremas análogos en los que no hay más que sustituir las palabras *ángulo*, *recta*, *lado* y *vértice*, por las de *diedro*, *plano*, *cara* y *arista*.

**233.** PROBLEMAS. 1.° Trazar el ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro. Se traza por un punto cualquiera de su arista un plano perpendicular á ella, y las intersecciones con las caras será el rectilíneo correspondiente.

2.° Trazar el diedro correspondiente á un ángulo rectilíneo. Se traza una perpendicular en el vértice al plano determinado por el ángulo rectilíneo, y los planos determinados por esta perpendicular y cada uno de los lados del ángulo rectilíneo formarán el diedro pedido.

3.° Construir un diedro igual á otro dado.

4.° Sumar dos ó más diedros.

5.° Restar un diedro de otro.

6.° Dividir un diedro en dos partes iguales. Todos estos problemas se resuelven aplicando á los respectivos ángulos rectilíneos correspondientes los procedimientos de Planimetría ya conocidos.

7.° Construir un plano inclinado. Se toman como directrices una de sus horizontales y una de sus líneas de máxima pendiente.

## LECCIÓN 27.

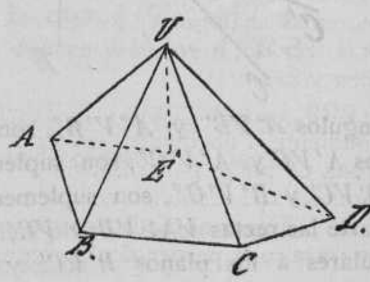
### Ángulos poliedros.

**234.** PLANOS CONCURRENTES, *son tres ó más planos que tengan un punto común.*

ÁNGULO POLIEDRO, *es el espacio indefinido comprendido entre tres ó más planos concurrentes.* En un ángulo poliedro se denomina *vértice*, el punto de concurrencia de los planos; *aristas*, las intersecciones de dos planos; *ángulos planos ó caras*, los rectilíneos formados por dos aristas consecutivas; y *ángulos diedros*, los formados por dos ángulos planos ó caras consecutivas. Se llaman *diedros contiguos* ó *adyacentes á una cara*, los que tienen esa cara común. Los elementos de un ángulo poliedro, son sus caras y diedros, teniendo tantas caras como diedros.

Para expresar un ángulo poliedro tal como el de la figura 169, se expresa la letra del vértice, cuando este no es común á dos ó más, ó bien por la del vértice y una de cada arista: así diremos el ángulo poliedro *V*, ó bien el ángulo poliedro *VABCDE;* sus elementos son las caras *AVB*, *BVC*, *CVD*, *DVE*, y *EVA*, y los diedros *VA*, *VB*, *VC*, *VD* y *VE*.

Fig. 169.




Los ángulos poliedros se clasifican, atendiendo á sus caras y á sus diedros; atendiendo á sus caras se divide en *triedros*, si tienen tres caras. *tetraedros*, si tienen cuatro, y así sucesivamente; y atendiendo á sus diedros en *convexos*, si todos ellos son convexos, y *cóncavos*, si alguno de ellos es cóncavo.

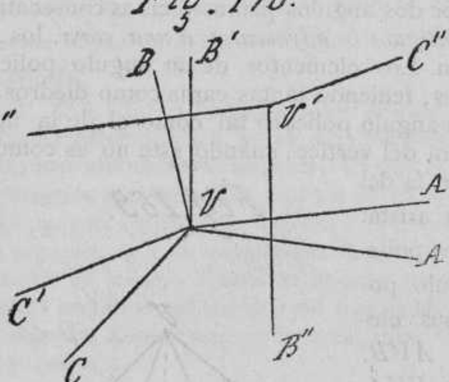
El ángulo poliedro más sencillo es el triedro, de cuyas propiedades nos vamos á ocupar como fundamento de las de los demás ángulos poliedros; una vez que todos los ángulos poliedros los podemos descomponer en tiedros mediante planos determinados por aristas que no estén en una misma cara, á que se llaman *planos diagonales*, de la misma manera que hemos hecho con los polígonos (94); pues si cortamos por un plano todas las aristas de un ángulo poliedro resulta un polígono como el *ABCDE*.

**235.** TIEDROS SUPLEMENTARIOS, *son los que los ángulos planos del uno son suplemento de los rectilíneos correspondientes de los diedros del otro.*

A todo triedro corresponde otro suplementario.

En efecto, figura 170, sea el triedro *VABC*; si desde el vértice *V*, ó desde un punto interior tal como el *V'*, se trazan respectivamente las perpendiculares *VA'* y *V'A"*, *VB'* y *V'B"* *VC'* y *V'C"*, á las caras *BVC*, *AVC* y *AVB*, se tiene (231, E.°) que los ángulos *A'VB'* y *A"V'B"*, son suplementos del diedro *VC*, los *A'VC* y *A"V'C"*, son suplementos del diedro *VB*, y los *B'VC'* y *B"V'C"*, son suplementos del diedro *VA*: por otra parte las rectas *VA*, *VB* y *VC*, son respectivamente perpendiculares á los planos *B'VC'* y *B"V'C"*, *A'VC'* y *A"V'C"*,

Fig. 170.

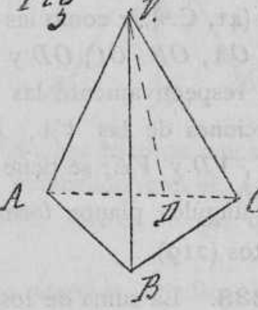


$A'VB'$ y $A''V'C''$, (230, y C.º 1.º); por tanto, $AVB$ será suplemento del rectilíneo del diedro $VC'$ y del $V'B''$, $BVC$ será suplemento del rectilíneo del diedro $VB'$, y del $V'B''$, y $BVC$ será suplemento del rectilíneo del diedro $VA'$ y del $V'A''$, con lo cual queda demostrado el teorema.

**236.** Un ángulo plano de un triedro es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

En efecto, figura 171, sea el triedro $VABC$;—vamos á demostrar que una cara cualquiera tal como la $AVC$ es menor que la suma $AVB + BVC$ de las otras dos y mayor que la diferencia $BVC - AVB$—, para ello, tracemos por $V$ una recta tal como la $VD$ que forme con $AV$ y en la cara $AVC$, un ángulo igual al $AVB$, tomemos $VD = VB$ y tracemos las rectas $AB$, $BC$ y $AC$ que pasa por $D$, entónces tendremos; los triángulos $AVB$ y $AVD$ iguales

Fig. 171



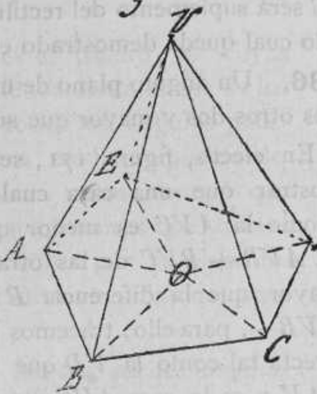

(48), luego $AD = AB$, pero en el triángulo $ABC$ se tiene, $AC < AB + BC$, y restando ordenadamente de los dos miembros de esta desigualdad los de la igualdad anterior, se tiene, $DC < BC$; ahora bien, los triángulos $DVC$ y $BVC$ que tienen dos lados iguales y el tercer lado $DC$ del primero es menor que el $BC$ del segundo nos dan, $DVC < BVC$, y sumando al primer miembro $AVD$ y al segundo su igual $AVB$, teniendo además en cuenta que $AVD + DVC = AVC$; obtendremos por último, $AVC < AVB + BVC$, y aplicado á la cara $BVC < AVC + AVB$, de la cual restando $AVB$ se deduce $BVC - AVB < AVC$, conforme al teorema.

ESCOLIO.—Es conveniente observar que con tres ángulos planos de magnitud arbitraria no se puede construir un ángulo triedro.

**237.** La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo, es menor que cuatro rectos.

En efecto, figura 172, sea el ángulo poliedro convexo *VABCDE*, tracemos un plano que corte á todas las aristas tal como el *ABCDE*, proyectemos sobre ese plano el vértice *V* en un punto tal como el *O* y unamos este punto con los *A*, *B*, *C*, *D*, y *E*; entónces todos los ángulos formados en *O* valen cuatro rectos (41, C.º), y como las rectas *OA*, *OB*, *OC*, *OD* y *OE*, son respectivamente las proyecciones de las *VA*, *VB*, *VC*, *VD* y *VE*; se tiene que los ángulos planos formados en *V*, valen menos de cuatro rectos (219).

Fig. 172.




**238**. La suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.

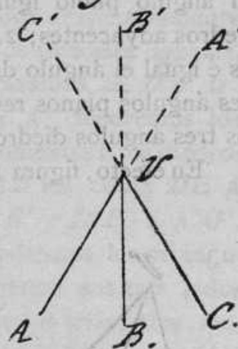
En efecto, construyendo el suplementario del triedro propuesto, y llamando *D* á la suma de los ángulos diedros del triedro propuesto y *P* á la suma de sus ángulos planos del suplementario; se tiene, $D + P = 6$, de donde, $D < 6$, y como $P < 4$, $D > 2$, conforme al teorema.

Escolios. 1.º Es conveniente notar que un ángulo triedro puede ser *rectángulo* ó tener un ángulo diedro recto *birrectángulo* ó tener dos ángulos diedros rectos, y *trirrectángulo* ó tener los tres ángulos triedros rectos. 2.º El exceso de la suma de dos diedros de un triedro sobre el tercero, es menor que dos rectos (235 y 236).

**239**. Cuando un triedro tiene dos ángulos diedros iguales, los ángulos planos opuestos también son iguales.

En efecto, figura 173, sea el triedro, $VABC$, en que se verifica que $VA = VC$, vamos á demostrar que $BVC = AVB$; para ello prolonguemos las aristas en sentido opuesto con relación al vértice $V$, y tendremos el triedro $VA'B'C'$, que tiene respectivamente iguales sus diedros y ángulos planos á los del propuesto, los diedros por opuestos por la arista, y los planos por opuestos por el vértice; ahora bien, si llevamos el triedro $VA'B'C'$, sobre el $VABC$ de modo que coincidan las caras iguales $C'VA'$ y $CVA$, y que las aristas $VB'$ y $VB$ caigan hacia la misma región de la $CVA$, los triedros coincidirán, y el ángulo plano $C'VB'$, que ha coincidido con el $AVB$ será igual á él lo mismo que su igual $BVC$ que es lo que queríamos demostrar.

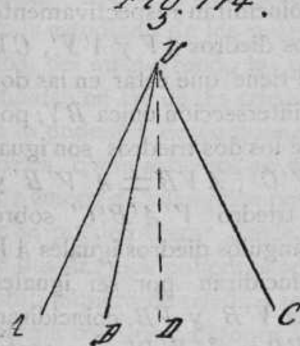
Fig. 173.




**240.** Cuando un triedro tiene dos ángulos driedros desiguales, á mayor ángulo driedro se opone mayor ángulo plano.

En efecto, figura 174, sea el ángulo triedro $VABC$ en que se verifica que $VA > VC$, vamos á demostrar que $BVC > AVB$; para ello tracemos por $VA$ un plano que forme con el $AVC$ un diedro igual al $VC$, este plano cortará á la cara $BVC$ según la recta $VD$, ahora bien, en el triedro $VABD$, la cara $AVB < AVD + BVD$, y como por construcción $AVD = DVC$, se tiene por último, $AVB < DVC + DVB = BVC$, ó bien $BVC > AVB$.

Fig. 174.




RECÍPROCOS.—Cuando un triedro, tiene dos ángulos planos iguales, los ángulos driedros opuestos son también iguales; y si dos ángulos planos son desiguales á mayor ángulo plano se opone mayor ángulo diedro (50).

**241**. Dos ángulos triedros son iguales: 1.° cuando tienen un ángulo plano igual y respectivamente iguales los ángulos diedros adyacentes; 2.° cuando tienen dos ángulos planos iguales é igual el ángulo diedro comprendido; 3.° cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales; 4.° cuando tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales.

En efecto, figura 175, sean los triedros $VABC$ y $V'A'B'C'$

Fig. 175.

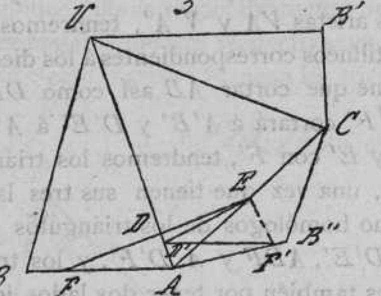

y tendremos: 1.° Si se verifica que $AVC = A'V'C'$, y $AV = A'V'$, $CV = C'V'$ tendremos llevando el triedro $V'A'B'C'$ sobre el $VABC$ de modo que $A'V'C'$ coincida con su igual $AVC$, las caras $A'V'B'$ y $B'V'C'$ coincidirán respectivamente con $AVB$ y $BVC$ por la igualdad de los diedros $AV$ y $A'V'$, $CV$ y $C'V'$, entonces la arista $B'V'$ que tiene que estar en las dos caras $AVB$ y $BVC$ coincidirá con su intersección única $BV$; por tanto habiendo coincidido exactamente los dos triedros son iguales: 2.° Si se verifica que $AVC = A'V'C'$, $AVB = A'V'B'$ y $AV = A'V'$, tendremos llevando el triedro $V'A'B'C'$ sobre el $VABC$ de modo que coincidan los ángulos diedros iguales $AV$ y $A'V'$, las aristas $V'C'$ y $VC$ coincidirán por ser iguales las caras $AVC$ y $A'V'C'$ y las aristas $V'B'$ y $VB$ coincidirán también por ser iguales las caras $AVB$ y $A'V'B'$; por tanto habiendo coincidido los dos triedros son iguales: 3.° Si se verifica que $AVC = A'V'C'$, $AVB = A'V'B'$ y $BVC = B'V'C'$, tendremos tomando las distancias iguales, $VA = V'A' = VB = V'B' = VC = V'C'$, y uniendo los puntos $B$ y $C$ entre sí y con $A$, así como los $B'$ y $C'$ entre sí y con $A'$; que los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales como lados homólogos de triángulos isósceles iguales; ahora bien, si tomamos $VD = V'D'$, y trazamos en $D$ y $D'$ planos perpendiculares á las aristas $VA$ y $V'A'$, tendremos los ángulos $FDE$ y $F'D'E'$ rectilíneos correspondientes á los diedros $VA$ y $V'A'$, pero $DF$ tiene que cortar $AB$ así como $DE$ á $AC$ (69), y por lo mismo $D'F'$ cortará á $A'B'$ y $D'E'$ á $A'C'$, de donde uniendo $E$ con $F$ y $E'$ con $F'$, tendremos los triángulos $DEF$ y $D'E'F'$ iguales, una vez que tienen sus tres lados respectivamente iguales como homólogos de los triángulos rectángulos iguales $ADE$ y $A'D'E'$, $ADF$ y $A'D'F'$, y los triángulos $AEF$ y $A'E'F'$ iguales también por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego $EDF$ es igual $E'D'F'$, y por tanto el diedro $AV = A'V'$, de modo que estamos en el caso anterior y por consecuencia los triedros son iguales: 4.° Si se verifica que, $AV = A'V'$, $BV = B'V'$, y $CV = C'V'$, tendremos trazando los suplementarios correspondientes, que estos serían iguales por el caso anterior; y por tanto los propuestos también porque tendrían todos los elementos iguales.

**242.** ESCOLIO GENERAL.—Así como las propiedades que hemos estudiado de los polígonos se fundan en las de los triángulos, del mismo modo las propiedades de los ángulos poliedros se fundan en las de los triedros; una vez que todo ángulo poliedro lo podemos descomponer en triedros mediante planos diagonales, como sabemos se descomponía un polígono en el menor número de triángulos posibles trazando todas las diagonales que se pueden trazar desde un vértice; por esto podemos decir que dos ángulos poliedros son iguales, cuando se componen del mismo número de triedros iguales é igualmente dispuestos. Por analogía con los polígonos se llama *ángulo poliedro regular*, al que tiene todos los ángulos planos y poliedros iguales.

**243.** PROBLEMAS. 1.° Construir un triedro dados sus tres ángulos planos.

Sean los tres ángulos planos dados los del triedro $VABC$ de la figura 175; para encontrar los tres diedros, ó lo que es lo mismo sus rectilíneos correspondientes (233, 2.°); se trazan los tres ángulos planos consecutivos, figura 176, $AVB$, $AVC$ y $CVB'$ iguales respectivamente á los dados y en su mismo orden, se toman las distancias $VB$, $VA$, $VC$ y $VB'$ iguales á la $VA$ de la figura 175, se trazan las rectas $AB$, $AC$ y $CB'$, con las cuales se construye el triángulo $AB''C = ABC$ del triedro de la figura 175, se toma á partir de $A$ sobre la arista $AV$ una distancia $AD$ igual á la de la figura 175, y por el punto $D$ se traza la perpendicular $EF$ á la $AV$; hecho esto, se toma $AF' = AF$, se traza la recta $EF'$ y el triángulo $AEF'$ será igual al $AEF$ de la figura 175, por último sobre $EF'$ se construye un triángulo $EF'D'$, con los lados $EF'$, $ED' = ED$, y $F'D' = FD$, este triángulo será igual al $EDF$ de la figura 175, y el ángulo $D'$ será el pedido. Del mismo modo se construirían los otros dos ángulos rectilíneos correspondientes á los otros dos diedros. Para que este problema sea posible es preciso que la suma de los ángulos planos dados sea menor que cuatro rectos.

Fig. 176.




2.° Construir un triedro dadas dos caras y el ángulo diedro comprendido.

Sean las dos caras $AVB$ y $AVC$ y el ángulo diedro comprendido $AV$ de la figura 175; para encontrar la otra cara $CVB$, se trazan los dos ángulos planos consecutivos, figura 176, $AVB$ y $AVC$ iguales á los dados, se toman las distancias $VB$, $VA$ y $VC$, iguales á la $VA$ de la figura 175, se trazan las rectas $AB$ y $AC$ y la perpendicular $EF$ á la recta $AV$ en el punto $D$ como en el problema anterior; hecho esto, se construye el triángulo $ED'F'$, con los datos $ED' = ED$, $D' = D$, y $D'F' =$

$= DF$, este triángulo será igual al $EDF$ de la figura 175, se construye después el triángulo $AEF'$, con los datos $AE$, $AF' = AF$, y $EF'$, este triángulo será igual al $AEF$ de la figura 175, por último sobre la $AF'$ prolongada se toma $AB'' = AB$ y se traza la recta $B''C$, y ya no hay más que construir el triángulo $CVB'$ con los datos $VC$, $VB' = VC$ y $CB' = CB''$. Determinada la tercera cara, los otros dos ángulos diedros se hallan como en el problema anterior. Este problema siempre es posible.

3.º Construir un triedro dada una cara y los diedros adyacentes. Determinando los suplementos de los tres datos estamos en el problema anterior.

4.º Construir un triedro dados los tres driedros.

Determinando los suplementos de los rectilíneos correspondientes estamos en el problema primero.

## LECCIÓN 28.

### Poliedros en general.

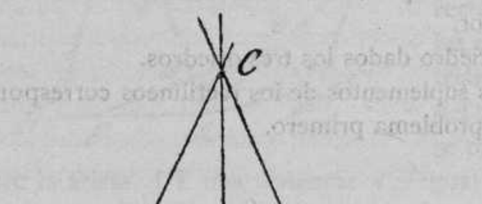
**244**. POLIEDRO, *es toda porción de espacio limitado por polígonos.*

*Caras*, son los polígonos que le limitan; *aristas*, son los lados de las caras, ó las intersecciones de dos caras contiguas, por lo que cada arista corresponde á dos caras; *ángulos diedros*, son los formados por cada dos caras contiguas, siendo sus aristas las del poliedro; *ángulos poliedros*, son los formados por los ángulos de las caras que tengan el vértice común; *vértices*, son los de los ángulos poliedros; *diagonal*, es la recta que una dos vértices que no estén en la misma cara; *plano diagonal*, es el determinado por tres vértices que no estén en la misma cara; *superficie*, es el conjunto de sus caras; *área*, es la medida de su superficie.

Los elementos esenciales de un poliedro son las *caras* y los *ángulos diedros* y *poliedros* que estas forman, y atendiendo á ellos se les clasifica; por sus caras, en *tetraedros*, *pentaedros*, *exaedros, eptaedros, octaedros, enaedros, decaedros, endecaedros, dodecaedros, pentadecaedros* é *icosaedros*, si tienen 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15 y 20 caras, los demás se les llama de 13 caras y en general de *n* caras; por sus ángulos, en convexos y cóncavos, según que todos los ángulos sean convexos ó tengan algún cóncavo.

**245.** El poliedro más sencillo es el tetraedro; una vez que tres planos *VAB, VAC* y *VBC*, figura 177, que tengan un punto común *V*, dividen el espacio en 8 ángulos triedros, que son; *VABC, VA'B'C', VAB'C', VBA'C', VCA'B', VA'BC, VB'AC* y *VC'AB*, ahora si trazamos un plano que no pase por *V* y corte á los tres planos, tal como el *ABC*, uno solo de los ocho triedros no es dividido por este plano, pero sí los siete restantes, de modo que quedará así el espacio dividido en 15 regiones, una de estas *VABC* está completamente cerrada por los cuatro planos, que es el *tetraedro*, y como no hay ángulo poliedro más sencillo que el triedro ni polígono más sencillo que el triángulo, claro está que no hay medio de cerrar espacio por menos de cuatro caras, que tienen que ser necesariamente triángulos.

Fig. 177.



**246.** Cuando á un ángulo poliedro cualquiera se le corta por un plano resulta un poliedro cuyas caras serán, un polígono cualquiera—que resultará de la intersección del plano con el ángulo poliedro,—y las restantes serán necesariamente triángulos con un vértice común; á estos poliedros se les llama *pirámides*.

PIRÁMIDE, *es un poliedro, cuyas caras son, un polígono cualquiera, llamado base, y los restantes triángulos que tienen un vértice común, que se llama vértice de la pirámide*. Las pirámides se clasifican por los lados de su base en triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc. El tetraedro es una pirámide triangular, que como todas las caras son triángulos, cualquiera de ellas puede ser base, y cualquiera de sus vértices, vértice de la pirámide: de las seis aristas del tetraedro pueden tomarse tres pares de ellas que no estén en la misma cara; tales como $VC$ y $AB$, $VB$ y $AC$, $VA$ y $BC$, á las que se las llama *aristas opuestas*.

De los quince espacios ó regiones que digimos en el número anterior, figura 177, que quedaba dividido el espacio, cuando cortábamos á tres planos que pasaban por un punto, por un plano que no pasase por él; cuatro son los triedros, $V, A, B, C$, opuestos por el vértice á los del tetraedro, otros cuatro se apoyan por fuera en cada una de las caras $VAB$, $VAC$, $VBC$ y $ABC$ del tetraedro y unidos á este completan los ángulos triedros del mismo, y por último, los seis espacios restantes se apoyan también por fuera en las seis aristas $VA$, $VB$, $VC$, $AB$, $AC$ y $BC$ del tetraedro y son opuestos á los diedros de este. Las aristas de los triángulos en las pirámides se llaman aristas *laterales*, y las de la base *basicas;* así como á los triángulos *caras laterales*.

**247.** *Pirámide regular*, es aquella cuya base es un polígono regular y las aristas laterales son iguales. En las pirámides, la perpendicular trazada desde el vértice á la base se llama *altura;* la altura de la pirámide regular está determinada por el vértice y el centro de la base (210 E.° 2.°).

*Pirámide truncada*, es la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte á todas las aristas laterales. Cuando el plano secante es paralelo á la base, la pirámide truncada se llama de *bases paralelas.*

La pirámide comprendida entre el vértice y un plano que corte á las aristas laterales se llama *pirámide deficiente.*

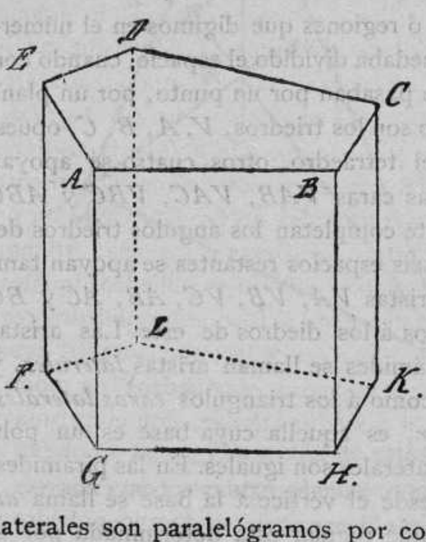
Cuando la pirámide es regular el tronco de bases paralelas se llama también regular.

APOTEMA; de una pirámide regular es la altura de una de las caras laterales; y de un tronco regular es la altura también de una de sus caras laterales.

Toda pirámide se puede descomponer en tetraedros, por planos diagonales.

**248.** Cuando por los vértices de un polígono se trazan rectas paralelas entre sí en el mismo sentido y en distinto plano del polígono, se toman distancias iguales en ellas y se unen los puntos de división por medio de rectas,—como en la figura 178, que hemos trazado paralelas por los vértices $A, B, C, D, E$, del polígono $ABCDE$, hemos tomado $EF = AG = BH = CK = DL$, y hemos unido $F$ con $G$, $G$ con $H$, $H$ con $K$, $K$ con $L$, y $L$ con $F$—resulta un poliedro que se llama *prisma.*

Fig. 178.




PRISMA, *es el poliedro cuyas caras son dos polígonos iguales y paralelos, llamados bases, y las demás son paralelógramos.* Las caras laterales son paralelógramos por construcción (90, 4.°), y las bases son polígonos iguales y paralelos por la misma razón (72, 88, 95 y 202). Los prismas se clasifican por los lados de sus bases, en, triangulares, cuadrangulares, pentagonales, &.ª

A los paralelógramos de un prisma se les llama *caras laterales* y á los lados de ellos que no pertenecen á las bases, *aristas laterales*, así como á los lados de las bases *aristas basicas*. Cuando las aristas laterales de un prisma son perpendiculares á las bases, el prisma se llama *recto*, y en el caso contrario *oblícuo*. A la distancia entre las bases de un prisma, se llama *altura;* en un prisma recto la altura es cualquiera de sus aristas laterales, en el oblícuo la altura es menor que cualquiera de sus aristas laterales.

**249.** PRISMA REGULAR, es el recto cuyas bases son polígonos regulares.

PRISMA TRUNCADO, es la porción de prisma comprendida entre una de las bases y un plano que corte á todas las aristas laterales. Cuando el plano es paralelo á las bases la sección que resulta es un polígono igual á ellas (199 y 202); y por tanto el tronco será un prisma de menor altura. En el prisma truncado cuando el plano corta perpendicularmente á las aristas laterales la sección que resulta se llama *sección recta.* Todo prisma se puede descomponer en prismas triangulares. El prisma cuadrangular cuyas bases sean paralelógramos, se llama *paralelepípedo.*

**250.** POLIEDRO REGULAR, *es el que tiene sus ángulos diedros* y *poliedros iguales*, y *sus caras son polígonos regulares é iguales*. Cuando no cumple con estas condiciones el poliedro se llama *irregular*. Entre las pirámides no hay más que un poliedro regular que es, el tetraedro cuyas caras sean triángulos equiláteros iguales y sus ángulos diedros y poliedros iguales; y entre los prismas no hay tampoco más que un poliedro regular que es, el paralelepípedo cuyas caras sean cuadrados iguales, é iguales también sus ángulos diedros y poliedros: de modo que es preciso no confundir el poliedro regular, con el prisma y la pirámide regular.

**251.** Solo hay cinco poliedros regulares convexos.

En efecto, la suma de las caras de un ángulo poliedro convexo tiene que ser menor que cuatro rectos (237); si las caras son triángulos equiláteros solo pueden reunirse alrededor de un punto para formar ángulo poliedro 3, 4 ó 5; pues seis ángulos valdrían 4 rectos y estarían en un plano: por tanto, el triángulo equilátero dará lugar á tres poliedros regulares convexos que son, el *tetraedro regular*, limitado por cuatro triángulos equiláteros iguales, el *octaedro regular*, limitado por ocho, y el *icosaedro regular*, limitado por veinte. Si las caras son cuadrados solo pueden reunirse alrededor de un punto 3; pues 4 ángulos valdrían 4 rectos y estarían en un plano: por tanto, el cuadrado solo da lugar á un poliedro regular convexo que es, el *exaedro regular* ó *cubo*, limitado por seis cuadrados iguales. Si las caras son pentágonos regulares solo pueden reunirse alrededor de un punto 3; pues el ángulo del pentágono regular vale $\frac{6}{5}$ de recto y por consiguiente 4 valdrían más de 4 rectos: por tanto, el pentágono regular solo da lugar á un poliedro regular convexo que es, el *dadecaedro regular*, limitado por doce pentágonos regulares iguales.

No hay ningún otro poliedro regular convexo, pues el ángulo de un exágono vale $\frac{4}{3}$ de recto y tres valen ya 4 rectos, y como á medida que aumenta el número de lados de un polígono regular aumenta el ángulo (84, E.° 1.°), queda demostrado el teorema.

ESCOLIO.—En las aplicaciones pondremos como problemas, cómo pueden construirse los 5 poliedros regulares convexos, cuyas figuras omitimos, porque es más sencillo mostrárselos á los alumnos de bulto y enseñarles á construirlos.

**252.** En todo poliedro ordinario la diferencia entre la suma del número de sus caras y vértices, y el número de aristas es dos.

En efecto, sea un poliedro que tenga $c$ caras, $v$ vértices y $a$ aristas, decimos que; $c + v - a = 2$. Para esto, suprimamos una cara del poliedro, quedará un espacio abierto que tendrá, $c - 1$ caras, $v$ vértices y $a$ aristas; pues la cara suprimida tiene todos sus vértices y aristas comunes con los vértices y aristas de otras caras: si hecho esto, quitamos otra cara, quedará otro espacio abierto con $c_1 = c - 2$ caras, $v_1 = v$ vértices, y $a_1 = a - 1$ aristas: si de este nuevo espacio abierto suprimimos una cara, quedará otro espacio abierto con $c_2 = c - 3$ caras, ó bien $c_2 = c_1 - 1$ caras, $v_2 = v_1 - m$ vértices, y $a_2 = a_1 - m - 1$ aristas, suponiendo que $m$ sea el número de los vértices no comunes. Continuando así tendríamos la ley siguiente: $c - 1 + v - a = c_1 + v_1 - a_1 = c_2 + v_2 - a_2 = \ldots\ldots$ que es independiente del número de caras. Ahora bien, continuando la supresión de caras, llegaremos necesariamente á una sola cara que tiene tantos vértices como aristas; luego tendremos $c - 1 + v - a = 1$, y por tanto, $c + v - a = 2$.

ESCOLIO.—De este teorema y de la ley de dualidad se deducen teoremas muy curiosos que entendemos no caben en una obra puramente elemental.

## LECCIÓN 29.

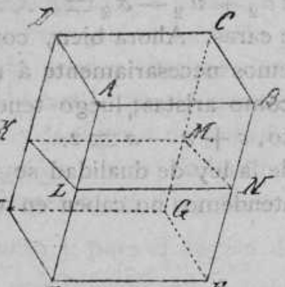
### Paralelepípedos.

**253.** Ya sabemos, que los paralelepípedos son prismas en que las bases son también paralelógramos, que pueden ser rectos ú oblícuos y cuando son rectos las caras laterales necesariamente tienen que ser rectángulos (204); de aquí que los paralelepípedos rectos y oblícuos se clasifiquen atendiendo á la clasificación de los paralelógramos (86); los rectos en; *paralelepípedo recto rectangular*, si todas las caras son rectángulos, *paralelepípedo recto cuadrangular*, si las bases son cuadrados, y *cubo*, si todas las caras son cuadrados iguales; y los oblícuos en, *paralelepipedo romboidal*, si todas las caras son romboides, *paralelepípedo rombal*, si las bases son rombos, y romboedro, si todas las caras son rombos iguales. Así como los lados contíguos de un rectángulo se llaman sus dimensiones, también en los paralelepípedos rectos las tres aristas que concurren en un vértice se las llama *dimensiones* del paralelepípedo recto. Como el paralelepípedo romboidal es el más general de todos cuando se dice simplemente paralelepípedo se sobreentiende romboidal.

**254.** Las caras opuestas de un paralelepipedo son iguales y paralelas.

En efecto, figura 179, sea el paralelepípedo *AG*; sus bases *ABCD* y *EFGH*, son, por definición, paralelógramos iguales y paralelos, de modo que nos bastará demostrar que dos caras laterales opuestas *ABFE* y *DCGH* lo son; pero *AB* y *DC* son iguales y paralelas como lados opuestos de paralelógramo, *FB* y *GC* lo son también, y los ángulos *ABF* y *DCG* son iguales y sus planos paralelos (202), por tanto los dos paralelógramos *ABFE* y *DCGH* son iguales y paralelos, y como lo mismo podríamos demostrarlo de los *ADHE* y *BCGF*, queda demostrado el teorema.

Fig. 179.



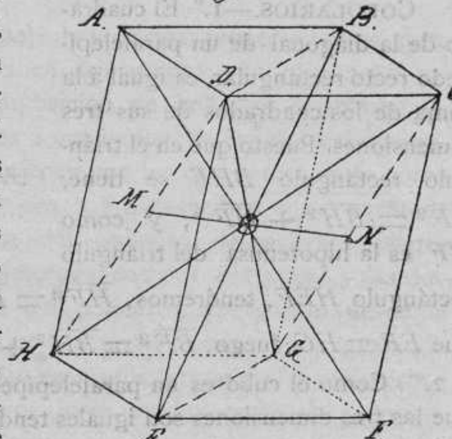

ESCOLIOS – 1.º Hay que observar que un paralelepípedo, según el teorema que concluimos de demostrar, es un prisma limitado por seis paralelógramos, iguales y paralelos dos á dos, y que por tanto (248), se pueden tomar como bases de un paralelepípedo dos caras opuestas cualesquiera. 2.º Dadas tres aristas, que parten de un mismo punto, de un paralelepípedo, se puede construir éste, trazando por cada uno de los extremos de las tres aristas dadas planos paralelos al determinado por las otras dos: de modo que si las aristas son *AD, AB* y *AE*, figura 179, trazaríamos por *D* un plano paralelo al determinado por *AB* y *AE*, por *B* un plano paralelo al determinado por *AD* y *AE*, y por *E* un plano paralelo al determinado por *AD* y *AB*.

COROLARIO.—Toda sección hecha en un paralelepípedo por un plano que corte á dos caras opuestas, es un paralelógramo. Pues si el plano *KLMN* corta á las dos caras opuestas *ADHE* y *BCGF* del paralelepípedo *AG*, figura 179, los lados opuestos *KL* y *MN* así como *LM* y *KN* son paralelos (199) y formarán un paralelógramo.

**255.** Las cuatro diagonales de un paralelepípedo se cortan mútuamente en partes iguales en un mismo punto, que es el centro del paralelepípedo.

En efecto, figura 180, sea el paralelepípedo *AF* y sus cuatro diagonales *AF*, *BE*, *CH* y *DG*; trazando las rectas *BD* y *EG*, la figura *BDEG* es un paralelógramo, por ser *DE* igual y paralela á *BG*, cuyas diagonales *BE* y *DG* se cortan mútuamente en partes iguales en *O*, trazando las rectas *DH* y *CG* la figura *DCGH* es por la misma razón un paralelógramo cuyas diagonales *CH* y *DG* se cortan en partes iguales en el mismo punto *O*, del mismo modo demostraríamos que la cuarta diagonal *AF* pasa también por ~~DG~~ O y queda dividida en ese punto en dos partes iguales. Para demostrar ahora que *O* es el centro del paralelepípedo, tracemos una recta cualquiera tal como la *MN* que pase por *O* y termine en la superficie del paralelepípedo, esta recta queda dividida en *O* en dos partes iguales; puesto que el plano determinado por ella y la diagonal *CH* corta á las dos caras opuestas *ADEH* y *BCFG* según las paralelas *MH* y *CN* (199), y los dos triángulos *OMH* y *ONC* son iguales, por tanto el punto *O* es centro del paralelepípedo (117 y 118).

Fig. 180.

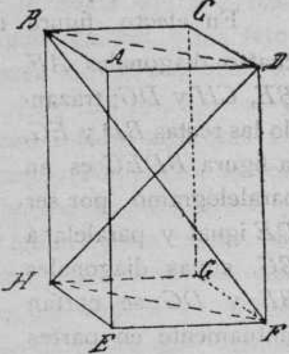



ESCOLIO.—Es fácil demostrar fundándose en (170, C.°), que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelepípedo es igual á la suma de los cuadrados de todas las aristas.

**256.** Las diagonales de un paralelepípedo recto rectangular son iguales.

En efecto, figura 181, sea $AG$ un paralelepípedo recto rectangular; trazando las rectas $BD$ y $FH$ la figura $BHFD$ es un rectángulo, luego sus diagonales $BF$ y $DH$ son iguales, lo mismo lo demostraríamos de las dos restantes.

Fig. 181.




COROLARIOS.—1.° El cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo recto rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones. Puesto que en el triángulo rectángulo $BHF$ se tiene, $\overline{BF}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HF}^2$, y como $HF$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $HEF$, tendremos, $\overline{HF}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{HG}^2$, una vez que $EF = HG$, luego, $\overline{BF}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{HG}^2$.

2.° Como el cubo es un paralelepípedo recto rectangular en que las tres dimensiones son iguales tendremos que; el cuadrado de la diagonal de un cubo es igual al triplo cuadrado de su arista.

**257.** ESCOLIO GENERAL.—Para la *cristalografía*, que se estudia en *Mineralogía*, es de absoluta necesidad el estudio de los paralelepípedos; puesto que, los seis tipos cristalinos á que se acostumbre á reducir todas las formas de los *cristales*, son los seis paralelepípedos que hemos definido, si bien los dividen en dos grupos que son, los tres rectos y los tres oblícuos atendiendo á la manera de cortarse las rectas que unen los centros de las caras opuestas á que se llaman *ejes* de los cristales y que en los rectos se cortan perpendicularmente en el centro del paralelepípedo, siendo los tres ejes iguales en el *cubo*, dos iguales en el *paralelepípedo recto cuadrangular*, y los tres desiguales en el *paralelepípedo recto rectangular;* y en los oblícuos se cortan oblícuamente en el centro del paralelepípedo, siendo los tres iguales en el *romboedro*, dos iguales en el *paralelepípedo oblícuo rombal*, y los tres desiguales en el *paralelepípedo oblícuo romboidal*.

**258.** Terminaremos esta lección exponiendo los procedimientos más convenientes para descomponer un poliedro cualquiera en tetraedros, que como sabemos es el poliedro más sencillo, y esto nos servirá como fundamento de la lección siguiente, igualdad de poliedros, con la cual terminaremos el primer capítulo de este libro, que es el primero de la Estereometría.

Como hemos visto (94), hay varios procedimientos para descomponer los polígonos en triángulos, esto mismo nos sucede respecto de la descomposición de poliedros en tetraedros, si bien nosotros solo vamos á ocuparnos de los dos más principales, por la analogía que tienen con los que hemos dado como tales en los polígonos, que son: 1.º Si tomamos como punto de descomposición un vértice del poliedro, trazaríamos planos diagonales que quedasen determinados por ese punto y las diagonales de todas las caras del poliedro, que partan desde un mismo vértice, menos las que concurren en ese punto; quedando así descompuesto el poliedro en tantos tetraedros con el vértice en ese punto como triángulos haya en las caras del poliedro, menos los que tengan las caras que concurren en ese punto: 2.º Si tomamos un punto interior del poliedro como punto de descomposición, y trazamos planos determinados por ese punto y cada una de las aristas, quedaría descompuesto el poliedro en tantas pirámides, que tendrían el vértice en el punto de descomposición, como caras tuviese el poliedro; hecho esto si desde un mismo vértice de cada cara se trazan diagonales á los demás no adyacentes, quedará dividida la superficie del poliedro en triángulos, y por último trazando planos diagonales por el punto de descomposición y las diagonales trazadas en las caras, quedará descompuesto el poliedro en tantos tetraedros, con el vértice en el punto de descomposición, como triángulos haya en la superficie del poliedro. Así en un paralelepípedo cualquiera; por el primer procedimiento quedará descompuesto —una vez que todos los ángulos poliedros son triedros y cada cara dos triángulos—en seis tetraedros, que tendrán por vértice común el vértice del paralelepípedo que tomemos como punto de descomposición, y cuyas bases serán los seis triángulos que componen las tres caras que no concurren en ese punto; y por el segundo quedará descompuesto en doce tetraedros que como el caso anterior sumados nos darán el paralelepípedo, teniendo todos ellos por vértice común el punto interior tomado como punto de descomposición y por bases los doce triángulos de la superficie del poliedro.

ESCOLIO.—Es conveniente observar que se llaman: *tetraedros exteriores*,—cuando un poliedro se descompone en tetraedros—los que tienen dos ó tres caras en la superficie del poliedro: y *tetraedros interiores*, los que no tienen más que una cara en la superficie del poliedro. Aquí como en los polígonos preferiremos el primer procedimiento, y suponemos mientras no digamos expresamente lo contrario que los poliedros son convexos.

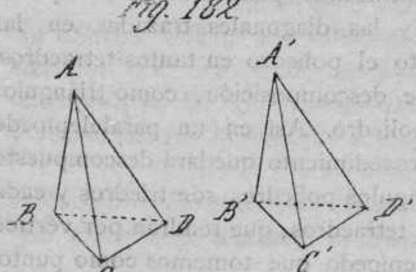
## LECCIÓN 30.

### Igualdad de Poliedros.

**259**. Ya sabemos que dos poliedros, como dos extensiones cualquiera son iguales, cuando superpuestos coinciden, lo cual quiere decir que tendrán todos sus elementos iguales y estarán igualmente dispuestos. Dos tetraedros son iguales cuando tienen: 1.° dos caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas é igual el ángulo diedro comprendido; 2.° una cara igual adyacente á tres ángulos diedros iguales é igualmente dispuestos; 3.° tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.

En efecto, figura 182, sean los tetraedros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ que tienen: 1.° las caras $ABC$ y $A'B'C'$, $ABD$ y $A'B'D'$ iguales é igualmente dispuestas, é igual el ángulo diedro comprendido $AB$ y $A'B'$; si llevamos el tetraedro $A'B'C'D'$ sobre el $ABCD$ de modo que $A'B'$ coin-

Fig. 182



cida con $AB$ y la cara $A'B'C'$ con su igual $ABC$, los dos triedros $A'$ y $A$ coincidirán (241), pero como las aristas del triedro $A'$ son iguales á las del $A$, los vértices $C'$ y $D'$ coincidirán respectivamente con $C$ y $D$; por tanto, los dos tetraedros que superpuestos han coincidido son iguales: 2.° la cara $ABC = A'B'C'$ adyacente á tres ángulos diedros iguales é igualmente dispuestos, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$; si hacemos como antes coincidir la cara $A'B'C'$ con su igual $ABC$, coincidirán también los triedros $A'$ y $A$ (241), y como coincidirán además las caras $B'C'D'$ y $BCD$, coincidirán los tetraedros: 3.° las caras $ABC$, $A'B'C'$, $ADC$, $A'D'C'$ y $BCD$ y $B'C'D'$ iguales é igualmente dispuestas; si llevamos el tetraedro $A'B'C'D'$ sobre el $ABCD$ de modo que coincidan los triedros iguales $A'$ y $A$ (241), coincidirán también los restantes vértices, y por tanto los tetraedros.

COROLARIO —Dos pirámides son iguales, cuando tienen un ángulo triedro igual formado por tres caras iguales é igualmente dispuestas. Pues llevando una pirámide sobre otra de modo que coincidiesen las bases y el ángulo triedro igual, coincidirán todos los vértices de las pirámides y por consecuencia ellas.

**260.** Dos prismas son iguales cuando tienen un ángulo triedro igual formado por tres caras iguales é igualmente dispuestas.

En efecto, cualesquiera que sean los dos prismas que se nos den con las condiciones expresadas en el teorema, llevando el uno sobre el otro de modo que coincida una de las bases y el triedro igual, coincidirán necesariamente tres puntos de las otras dos bases y por tanto todas ellas y los prismas.

COROLARIO. —Dos prismas rectos son iguales, cuando tienen la misma base y la misma altura. Pues, haciendo coincidir las bases, coincidirán las aristas laterales por ser perpendiculares á las bases, y como son iguales coincidirán sus extremos, y por consiguiente los prismas.

**261.** Dos poliedros son iguales, cuando están compuestos de un mismo número de tetraedros iguales é igualmente dispuestos.

En efecto, como los tetraedros que componen los poliedros son adyacentes unos á otros y están igualmente dispuestos, bastará hacer coincidir dos tetraedros para que todos los demás coincidan, y por tanto los poliedros.

**262.** Dos poliedros son iguales, cuando tienen sus caras iguales é igualmente dispuestas, y lo mismo los ángulos diedros.

En efecto, descomponiendo en tetraedros los dos poliedros —por el primer procedimiento (258)—y comparando luego de dos en dos los tetraedros exteriores (258, E.°), veremos que son iguales (259), ya por tener un ángulo diedro igual—de los dos poliedros—formado por dos caras iguales, ya por tener sus tres caras iguales, triángulos homólogos de los poliedros; por tanto, serán iguales las demás partes de los expresados tetraedros: comparando después tetraedros interiores (258, E.°), adyacentes á los anteriores, veremos que también son iguales, por tener un ángulo diedro igual—diferencia entre un ángulo diedro de los poliedros y un ángulo diedro de los tetraedros exteriores iguales—formado por dos caras iguales, que serían una de los poliedros, ó triángulos homólogos de caras iguales, y otra de los tetraedros exteriores. Por tanto los poliedros serán iguales por componerse del mismo número de tetraedros iguales é igualmente dispuestos.

ESCOLIO.—Es conveniente observar que en los poliedros el número de ángulos diedros es siempre mayor que el número de caras, mientras que en los polígonos el número de ángulos es igual al de lados; debido esto á que una misma cara se une á otras varias de un número de lados más ó menos considerable, y ya sabemos que á cada arista corresponde un diedro. También hay que notar que el número de condiciones necesarias para que dos polígonos sean iguales, que determinamos (96), las expondríamos en este lugar análogamente para los poliedros, si no excediese su exposición de los límites elementales.

# CAPITULO II

## *Superficies no planas.*

### LECCIÓN 31.

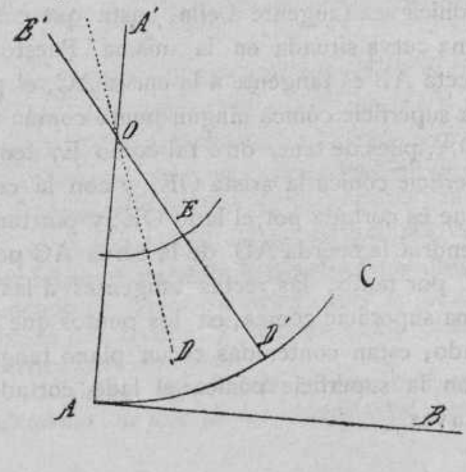
**Superficie cónica y cilíndrica.**

**263**. Entre las superficies de revolución (24), la geometría elemental estudia, la cónica, cilíndrica y esférica, engendradas las dos primeras por una recta, siendo por consiguiente regladas, y la última por una semicircunferencia, siendo por tanto curva.

SUPERFICIE CÓNICA DE REVOLUCIÓN, *es la engendrada por un lado de un ángulo agudo que gira alrededor del otro lado.* Las diferentes posiciones del lado móvil, se llaman *lados* de la superficie cónica, y el punto común de los lados *vértice* ó *centro* de la misma. Si considerásemos la superficie reglada engendrada por una recta que se mueve en el espacio, pasando siempre por un mismo punto; tendríamos la superficie cónica en general, con dos *hojas*, una á cada parte del punto común que sería el centro de la superficie cónica, y los lados las diferentes posiciones de la generatriz.

La figura 183, representa el ángulo agudo AOD, cuyo lado AO al girar al rededor del otro DO engendra una superficie cónica de revolución en que O es el centro y los lados las diferentes posiciones de AO.

*Fig. 183.*




*Paralelos en las superficies de revolución*, son las secciones hechas en ellas por planos que las corten perpendicularmente á sus ejes.

Los paralelos son siempre circunferencias (209, C.º 1.º), cuyos centros están en los ejes.

*Meridianos en las superficies de revolución*, son las secciones hechas en ellas por planos que pasen por los ejes. Los meridianos son siempre líneas iguales y por tanto superponibles con la generatriz.

SUPERFICIE CILÍNDRICA DE REVOLUCIÓN, *es la engendrada por una de dos rectas paralelas que gira alrededor de la otra.* Toda superficie cilíndrica puede considerarse como una superficie cónica cuyo centro está en el infinito. Si se considera la superficie reglada engendrada por una recta que se mueve paralelamente á sí misma, tendremos la superficie cilíndrica en general.

ESCOLIO.—El plano puede considerarse lo mismo como superficie cónica que cilíndrica.

**264.** Todo plano que pase por el centro de una superficie cónica, contiene dos lados de la misma, ó uno, ó ninguno. Si contiene dos lados, el plano corta á la superficie cónica á los dos lados de su centro y la sección es ~~un~~ su ángulo y un opuesto por el vértice; si contiene un lado, el plano es tangente á la superficie cónica á lo largo de ese lado, y la sección es una recta; y sinó contiene ningún lado, el plano corta á todas las aristas de la superficie cónica en su centro, y la sección es un punto.

Para que un plano que pase por el centro de una superficie cónica sea tangente á ella, basta que contenga una tangente á una curva situada en la misma. Puesto que, figura 183, si la recta AB es tangente á la curva AC, el plano OAB no tiene en la superficie cónica ningún punto común fuera de los de la arista OA, pues de tener otro tal como E, tendría común con la superficie cónica la arista OE, y con la curva el punto D′ en el que es cortada por el lado OE; y por tanto el plano OAB contendría la cuerda AD′ de la curva AC pero no su tangente AB. Y por tanto, las rectas tangentes á las curvas contenidas en una superficie cónica, en los puntos que las corta una arista ó lado, están contenidas en un plano tangente que tiene comun con la superficie cónica el lado cortado por las expresadas curvas.

**265**. Todo plano que no pasa por el centro de una superficie cónica, ó es paralelo á dos lados de la superficie cónica, ó á uno, ó á ninguno. Cuando el plano es paralelo á dos lados de la superficie cónica, cortará á todos los demás lados ya en una hoja, ya en la otra; y la sección consta de dos ramas que se extienden indefinidamente en dos direcciones formando la línea denominada *hipérbola*, curva plana que tiene la propiedad de que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos llamados *focos*, es constantemente igual á una recta dada, menor que la distancia entre los focos. Cuando el plano es paralelo á un lado de la superficie cónica, cortará á todos los demás; y la sección resulta abierta en una dirección formando la línea llamada *parábola*, curva plana que tiene la propiedad de que todos sus puntos equidisten de un punto fijo llamado *foco*, y de una recta fija, llamada *directriz*. Cuando el plano no es paralelo á ningún lado les cortará á todos; y la sección cerrada que resulta es una línea denominada *elipse*, curva plana que tiene la propiedad de que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos, á dos puntos fijos llamados *focos*, es constantemente igual á una recta dada, mayor que la distancia entre los focos.

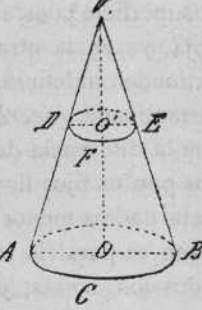
Escolio.—Las secciones planas de una superficie cilíndrica, son en general elípticas; pues la circunferencia puede considerarse como una elipse en que la distancia entre los focos es nula.

**266**. Cono, *es el cuerpo limitado por una superficie cónica y un plano que corta á todos sus lados. Vértice del cono*, es el de la superficie cónica; *base*, es la sección hecha en el cono por el plano que corta á todos los lados de la superficie cónica; y *altura*, es la distancia del vértice á la base.

Cono truncado, es la porción de cono comprendido entre la base y un plano oblícuo ó paralelo á ella; en este último caso se llama cono truncado de bases paralelas; pues la base y la sección se llaman bases del tronco, y el cono comprendido entre la sección y el vértice *cono deficiente*.

Cono recto, *es el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gire alrededor de uno de los catetos*. Asi, en la figura 184, el triángulo rectángulo AOV al girar alrededor del cateto VO engendra el cono recto VOACB, del cual VO es el eje ó altura, el círculo ACB engendrado por el cateto AO, es la base, la superficie cónica engendrada por la hipotenusa AV es la superficie lateral, y las distintas posiciones de AV lados. El cuerpo OACBO′DEF es un tronco de cono cuyas bases paralelas OACB y O′DFE son dos círculos engendrados por las bases del trapecio rectángulo AOO′D al girar alrededor de OO′ que es la altura, y el lado AD engendra la superficie lateral del tronco. Todo plano que pase por el eje determina un triángulo doble del generador como AVB.

Fig 184.




ESCOLIO.—Hay que observar que en el caso de ser la base de un cono un círculo, la recta que une el vértice del cono con el centro del círculo se llama eje, y según que este sea perpendicular ú oblícuo á la base así el cono se llamará recto ó oblícuo.

**267**. CILINDRO, *es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que cortan á sus lados. Bases* del cilindro, son las secciones hechas en el cilindro por los dos planos paralelos que cortan á todos los lados de la superficie cilíndrica; y *altura*, es la distancia entre las bases.

CILINDRO RECTO, *es el cuerpo engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.* Así, en la figura 185, el rectángulo AOO′A′ al girar alrededor del lado OO′ engendra el cilindo recto OACBO′A′C′B′, del cual OO′ es el eje ó altura, los círculos OACB y O′A′C′B′ engendrados por los lados AO y A′O′ son las bases, la superficie cilíndrica engendrada por el lado AA′ es la superficie lateral, y las distintas posiciones de AA′ son los lados, que evidentemente son iguales á la altura. Todo plano que pase por el eje determina un rectángulo doble del generador, como ABB′A′.

Fig 185.

ESCOLIO.— Como en el cono hay cilindro circular recto y oblícuo.

**268.** Dos conos rectos son iguales cuando lo son sus triángulos generadores; y dos cilindros rectos son iguales cuando lo son sus rectángulos generadores. Una y otra proposición se demuestran fácilmente por superposición directa.

COROLARIOS.—1.º La superficie cónica de revolución, es el lugar geométrico de las rectas que pasando por un punto de otra forman con esta un ángulo constante; siendo el vértice el punto fijo de la recta y ésta el eje. Puesto que, figura 184, toda recta que pase por el vértice V, interior á la superficie cónica, forma con el eje VO un ángulo menor que el AVO, y mayor que él si es exterior.

2.º La superficie cilíndrica de revolución, es el lugar geométrico de los puntos del espacio que están á igual distancia de una recta fija; siendo el radio la distancia dada, y la recta fija el eje. Puesto que, figura 185, todos los puntos de la superficie cilíndrica que tenga por radio AO y por eje OO, distan de este eje AO; y los interiores distan menos, así como los exteriores más.

**269.** PROBLEMAS. 1.º Trazar un plano tangente á una superficie cónica por un punto dado en ella. Para resolver este problema se traza por el punto dado A, figura 183, el lado AO, la sección AC y la tangente AB á esta sección; el plano determinado por AO y AB resuelve el problema (264).

2.º Trazar un plano tangente á una superficie cónica, por un punto exterior. Se resuelve este problema trazando por el punto exterior un plano perpendicular al eje, y desde ese punto las tangentes á la circunferencia sección, los planos determinados por cada una de las tangentes y los lados que van á parar á los puntos de contacto resuelven el problema (263 y 264).

3.º Trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica por un punto que esté en ella ó que sea exterior. Este problema en sus dos casos se resuelve por el mismo procedimiento que los dos anteriores.

**270.** ESCOLIO GENERAL.—Las superficies cónica y cilíndrica, así como las secciones cónicas hipérbola, parábola y elipse, tienen grandes aplicaciones en las Matemáticas mixtas fundamento de todas las artes é industrias. Lo mismo sucede con el *óvalo,* curva formada por cuatro arcos de circunferencia, iguales dos á dos, cuando es regular; la *espiral,* curva engendrada por un punto que gira alrededor de otro fijo, llamado *polo,* del cual se aleja constantemente; y la *hélice,* curva que traza la hipotenusa de un triángulo rectángulo, al arrollarse en una superficie cilíndrica, suponiendo que la base del triángulo rectángulo sea igual en longitud á la circunferencia de la base del cilindro. Las construcciones de estas curvas así como de las secciones cónicas las indicaremos en las aplicaciones de la Estereometría; una vez que el estudio de sus propiedades excede de los límites puramente elementales.

## LECCIÓN 32.

### Superficie esférica.

**271.** SUPERFICIE ESFÉRICA, *es la engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor del diámetro que la limita.* De donde, los puntos del espacio que equidistan de un punto dado, están en una superficie esférica, en que el radio de semicircunferencia generadora es la distancia dada.

ESFERA, *es la porción de espacio limitado por la superficie esférica.* Siendo por tanto, engendrada por un semicírculo que gira alrededor del diámetro que le limita. Se acostumbra á llamar también esfera á la superficie esférica, lo que no tiene importancia con tal de que no confundamos el espacio limitado por la superficie esférica con esta superficie. *Centro, radio y diámetro de la esfera,* es el centro, radio y diámetro del semicírculo generador.

ZONA ESFÉRICA, *es la porción de superficie esférica engendrada por un arco, de la semicircunferencia generadora, que no corte al eje.* Las circunferencias engendradas por los extremos del arco, se llaman *bases* de la zona; y *altura* la proyección del arco sobre el eje.

CASQUETE ESFÉRICO, *es la porción de superficie esférica engendrada por un arco, de la semicircunferencia generadora, que corta al eje.* Es por tanto un caso particular de la zona y tiene una sola base.

HUSO ESFÉRICO, *es la porción de superficie esférica comprendida entre las caras de un ángulo diedro cuya arista pasa por el centro.*

CUÑA ESFÉRICA, *es la porción de esfera comprendida por un huso y las caras del diedro que le forma.*

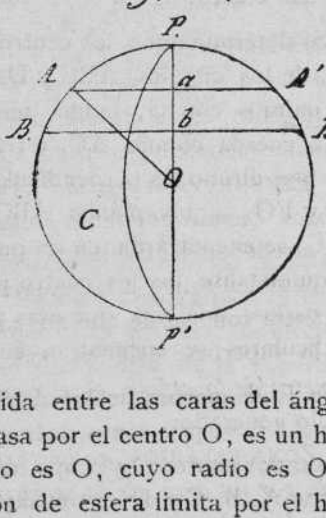
SEGMENTO ESFÉRICO, *es la porción de esfera comprendida entre un casquete y el plano de su base.*

REBANADA ESFÉRICA, *es la porción de esfera comprendida entre una zona y los planos de sus bases.*

SECTOR ESFÉRICO, *es la porción de esfera engendrada por un semisector circular que gira alrededor del radio que le biseca.*

En la figura 186; la semicircunferencia PAP′ al girar alrededor del diámetro PP′ que la limita, engendra la superficie esférica; el semicírculo, engendra la esfera; el arco AB, la zona, cuyas bases son las circunferencias engendradas respectivamente por los puntos A y B, y cuya altura es la proyección del arco AB sobre el eje PP′; el arco PA, el casquete, cuya base es la circunferencia engendrada por A, y cuya altura es *Pa;* la porción de superficie esférica PAP′CP comprendida entre las caras del ángulo diedro APP′C cuya arista PP′ pasa por el centro O, es un huso esférico de la esfera cuyo centro es O, cuyo radio es OP y cuyo diámetro es PP′; la porción de esfera limita por el huso PAP′CP y las caras del ángulo diedro APP′C, es una cuña;

Fig. 186.



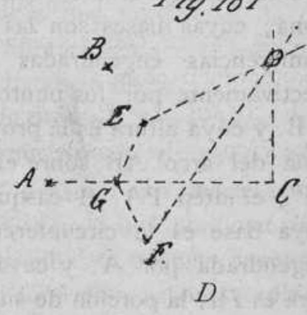
la mitad AOP del sector circular AOA′ al girar alrededor de OP, engendra un sector esférico; la mitad *APa* del segmento circular APA′, al girar alrededor del diámetro PP′ que le biseca, engendra un segmento esférico; y la mitad *AabB* de la faja circular AA′B′B, al girar alrededor del diámetro PP′ que la biseca, engendra una rebanada esférica. Los puntos tales como los P y P′ en que un diámetro corta á la superficie esférica, se acostumbran á llamar *puntos opuestos de la esfera.*

COROLARIOS.—1.° Dos esferas son iguales cuando tienen un mismo radio; pues haciendo coincidir los centros coincidirán las esferas. 2.° Todo plano que pase por el centro de la esfera, corta á la superficie esférica según una circunferencia y á la esfera según un círculo que tienen el mismo centro y radio de la esfera, pues es una consecuencia inmediata de la definición de circunferencia, superficie esférica y esfera.

**272.** Cuatro puntos que no estén en un mismo plano determinan una superficie esférica, es decir, que por cuatro puntos que no estén en un mismo plano puede pasar una superficie esférica pero no dos ó más.

En efecto, figura 187, sean los cuatro puntos A, B, C y D: 1.° Si determinamos los centros E y F, de los círculos ABC y DAC, los unimos con G, punto medio de la cuerda común AC, y trazamos por último las perpendiculares EO y FO, á los planos ABC y DAC, se encontrarán en un punto O equidistante de los cuatro puntos dados; una vez que esas perpendiculares se encuentran en el plano EGF perpendicular á AC en su punto medio G (229 y 69 C.° 6.°); por tanto, la superficie esférica que se trace tomando por centro O y cuyo radio sea OC pasa por los cuatro puntos A, B, C y D: 2.° cualquiera otra superficie esférica que pase por los cuatro puntos A, B, C y D, tendrá su centro en las

Fig. 187

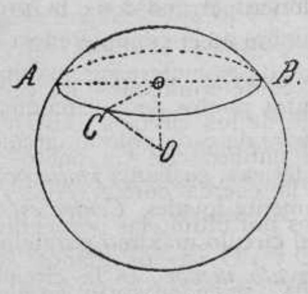


perpendiculares EO y FO á los planos ABC y ADC y por tanto en su intersección O (210, E.° 1.°); luego todas las superficies esféricas que pasen por los cuatro puntos A, B, C y D que no están en un plano, tendrán por centro único O, y por radio OC, teniendo por tanto que coincidir ó ser una sola. Si los cuatro puntos están en un plano las perpendiculares serán paralelas y la superficie esférica de radio indefinido la podemos considerar como un plano y viceversa. Si en particular los cuatro puntos están en una circunferencia, equidistarán de ellos todos los puntos de la perpendicular al círculo en su centro. Y si por último estuviesen en línea recta tendríamos un número indefinido de planos que estarían igualmente distantes de los puntos dados.

**273.** Cuando un plano dista del centro de la esfera una longitud menor que el radio, corta á la misma en un círculo cuyo centro es la proyección del centro de la esfera sobre el plano.

En efecto, figura 188, sea O centro de la esfera, *o* su proyección sobre el plano ABC; tendremos OC > *Oo* y como por hipótesis *Oo* es menor que el radio, *o* caerá dentro de la esfera teniendo el plano ABC con ella un círculo común (210, E.° 1.°). Su superficie esférica tendrá con el plano una circunferencia común.

Fig. 188.




ESCOLIOS. 1.° Los círculos, intersecciones de planos que pasen por el centro, que tienen el mismo centro y radio de la esfera, se llaman *máximos* ó *principales;* los demás se llaman *menores* por tener siempre su radio menor que el de la esfera: los círculos máximos quedan determinados por dos puntos de la superficie esférica que no sean opuestos (100); y los menores por tres: también quedan determinados los maximos por dos puntos y sus opuestos; pues el plano determinado por dos puntos y el centro corta á la esfera según un círculo máximo que contiene los puntos opuestos á los dos tomados. 2.° Todo círculo máximo divide á

la esfera en dos partes iguales, por ser superponibles, que se llaman *hemisferios*. 3.º Los círculos menores que equidistan del centro son iguales y recíprocamente; pues en el triángulo $OoC$ si llamamos $Oo$ distancia del centro de la esfera al plano, $d$, OC, radio de la esfera, R, y $oC$, radio del círculo menor $r$, tendremos por ser rectángulo en $o$, $R^2 = d^2 + r^2$, y para otro círculo menor cuya distancia al centro fuera también $d$, $R^2 = d^2 + r'^2$, lo cual exige que $r = r'$, y en el caso de ser del mismo radio los círculos menores, las igualdades anteriores exigirían que las distancias al centro sean iguales. 4.º La intersección de dos círculos máximos es un diámetro, ó lo que es lo mismo dos círculos máximos de una esfera determinan un punto y su opuesto; puesto que los planos de los círculos máximos tienen común el centro de la esfera, siendo por tanto su intersección un diámetro (196). De donde entre las líneas esféricas las circunferencias máximas, tienen propiedades idénticas á las de las rectas entre las líneas planas. 5.º *Polos* de un círculo de la esfera son los extremos del diámetro perpendicular á ese círculo; y gozan de la propiedad de equidistar de todos los puntos de la circunferencia de ese círculo (210, E.° 1.º). Los arcos de circunferencia máxima que van desde los polos á los distintos puntos de la circunferencia del círculo se llama *radio esférico* de cada polo al círculo: y á las cuerdas de las distancias esféricas, se llama *radio polar*. Unos y otros radios son evidentemente iguales. *Centro esférico de un círculo menor*, es el polo del círculo máximo paralelo al menor. *Tangente esférica de un círculo menor*, es la circunferencia máxima que pase por un punto del círculo y sea perpendicular al radio esférico de este punto.

**274.** Plano tangente á una esfera, *es el que tiene un solo punto común con ella.*

Cuando un plano dista del centro de la esfera una longitud igual al radio, es tangente á la esfera.

En efecto, en la figura 188 se tiene, si $Oo$ fuese igual al radio, que $o$ caerá en la superficie esférica y todos los demás puntos del plano ABC fuera.

COROLARIO.—Cuando un plano dista del centro de la esfera una longitud mayor que el radio, es exterior á la esfera ó no tiene ningún punto común con ella.

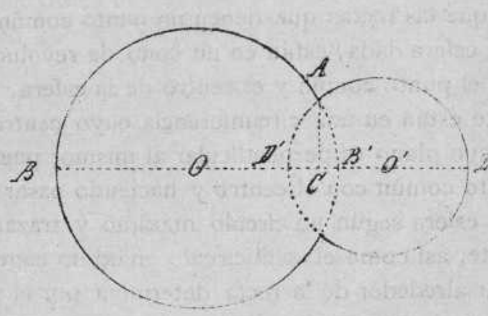
RECÍPROCO.—Cuando un plano es tangente á la esfera, dista de su centro una longitud igual al radio. Puesto que la menor recta que se puede trazar desde el centro de la esfera al plano es el radio.

ESCOLIOS.—Hay que notar: 1.º que por un punto de la superficie esférica solo puede trazarse un plano tangente (207); 2.º que el plano tangente á la superficie esférica en un punto, contiene las tangentes en este punto á todas las curvas que pasando por él puedan trazarse en la superficie (209, C.º 1.º); y 3.º que las rectas que tienen un punto común y son tangentes á una esfera dada, están en un cono de revolución cuyo eje pasa por el punto común y el centro de la esfera, los puntos de contacto están en una circunferencia cuyo centro está en dicho eje y cuyo plano es perpendicular al mismo; puesto que uniendo el punto común con el centro y haciendo pasar un plano, cortará á la esfera según un círculo máximo y trazando á este una tangente, así como el semicírculo máximo engendra la esfera, al girar alrededor de la recta determina por el punto común y el centro, la tangente engendra el cono de revolución, además en todo punto de la expresada circunferencia el cono y la esfera tienen el mismo plano tangente; de donde; por un punto exterior á la esfera, se pueden trazar un número indefinido de planos tangentes; todas las tangentes á la esfera que parten de un mismo punto son iguales; el cono de revolución que así se obtiene se dice que está circunscrito á la esfera; si el punto común se aleja indefinidamente el cono se convierte en un cilindro circunscrito; si el punto común está dentro de la esfera la circunferencia cuyo centro coincide con él es la mínima entre todas las de la esfera que pasen por ese punto (273, E.º 3.º y 104, C.º 2.º); llamando O al centro de la esfera, P y P′ dos puntos opuestos de la misma, R el radio de la esfera y A el punto común tendremos (156), $AP \times AP' = \overline{AO}^2 - R^2$, este producto constante para el punto dado y la esfera dada, se llama *potencia del* *punto respecto de la esfera*, siendo su valor, el cuadrado de una tangente á la esfera trazada por A, cero, ó el cuadrado negativo de la semicuerda mínima cuyo punto medio es A, según que el punto sea exterior á la esfera, este en su superficie ó dentro de ella.

**275.** Cuando dos esferas se cortan, es decir, cuando dos esferas tienen puntos comunes y puntos exteriores la una á la otra, su intersección es un círculo cuyo centro está en la recta que une los centros de las esferas.

En efecto, figura 189, sean O y O′ los centros de las esferas y A uno de los puntos comunes de sus superficies, AC la perpendicular trazada á la recta OO′ de los centros; si hacemos pasar un plano por los tres puntos A, O y O′,

Fig. 189.




determinará en las dos esferas dos círculos máximos AB y AD, cuyas circunferencias tendrán el punto A común, haciendo ahora girar los dos semicírculos ABB′ y ADD′, alrededor del eje común BD, engendrarán las esferas O y O′ y la perpendicular AC un círculo común á ellas cuyo centro C está en la recta de los centros OO′.

ESCOLIO.—Teniendo en cuenta lo expuesto (111): Dos esferas son; 1.° exteriores, cuando la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios; 2.° tangentes exteriormente, si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios; 3.° secantes, si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia; 4.° tangentes interiormente, si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios; y 5.° interiores, si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios. Cuando son tangentes el punto de contacto está en la recta de los centros y el plano tangente en ese punto es común á las dos esferas.

**276.** ANGULO DE DOS CURVAS QUE PASAN POR UN PUNTO, *es el ángulo de sus tangentes en ese punto.* De esta definición se deduce que, el ángulo de dos curvas situadas en la superficie esférica, es el ángulo de sus tangentes en el punto en que se cortan, siendo estas tangentes perpendiculares al radio correspondiente al punto de intersección; puesto que tomando dos puntos en una de las curvas el triángulo formado por la cuerda que los une y los radios que corresponden á los puntos tomados es isósceles y la altura biseca la base, por tanto, cuando los dos puntos se reduzcan á uno, la altura del triángulo se convertirá en radio y la base secante á la curva en tangente.

En el caso particular de que las curvas situadas en la superficie esférica sean arcos de circunferencia máxima, el ángulo que forman se llama *ángulo esférico;* el punto de intersección *vértice,* y los arcos de circunferencia máxima *lados.* Como los círculos máximos son planos cuya intersección es un diámetro, se llama; *diedro correspondiente á un ángulo esférico,* al formado por los planos en que se encuentran los lados del ángulo esférico; y *ángulo esférico correspondiente á un diedro,* el formado por dos arcos de circunferencia máxima que se encuentren en las caras del diedro: el ángulo rectilíneo correspondiente al diedro es igual al ángulo formado por las tangentes en el vértice á los lados del ángulo esférico correspondiente al diedro.

ESCOLIO.—Es conveniente observar que así como el ángulo rectilíneo es porción de plano indefinido, y el diedro porción indefinida del espacio, el esférico es porción limitada de superficie esférica, esto es, el huso correspondiente.

**277.** PROBLEMA.—Determinar el diámetro de una esfera. Para resolver este problema se toma un punto en la superficie esférica y desde él como polo con una abertura de compás esférico arbitraria se describe sobre la superficie esférica una circunferencia, se toman con el compás tres distancias rectilíneas sobre la circunferencia y con ellas se construye en un papel un triángulo del cual se determina el centro del círculo circunscrito, hecho esto, se une el centro con uno de los vértices, á esta recta en el centro determinado se la traza una perpendicular, la cual, limitada por un lado haciendo centro en el vértice tomado con un radio igual al que ha servido para trazar la circunferencia sobre la superficie esférica, y por otro trazando una perpendicular á la recta que resulta de unir el vértice tomado con el punto de interseeción determinado por el arco trazado, será el diámetro de la esfera. También se emplea un instrumento llamado *esferómetro*, que nos dá el radio de la circunferencia y la sagita al polo.

ESCOLIO.—Todo lo expuesto (100 al 112) es aquí aplicable reemplazando, el círculo por el casquete cuyo centro es el esférico de la circunferencia menor que le limita, y las rectas por circunferencias máximas.

## LECCIÓN 33.

### Polígonos esféricos.

**278.** POLÍGONO ESFÉRICO, *es la porción de superficie esférica limitada por tres ó más arcos de circunferencia máxima que se cortan dos á dos, de manera que cada arco corte al siguiente y el último al primero.*

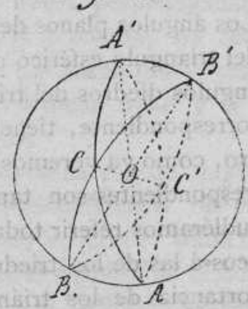
Las denominaciones de; *vértices, lados, contorno, perímetro, diagonales, ángulos, ángulos adyacentes, ángulo externo,* así como la clasificación por sus lados y ángulos es análoga á la expuesta (77, 78 y 79), sin más diferencia que sustituir la recta por la circunferencia máxima y el plano por la superficie esférica.

TRIÁNGULO ESFÉRICO, *es la porción de superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencia máxima.* Es el polígono esférico más sencillo, y si no es siempre convexo, como el triángulo rectilíneo, lo podemos considerar siempre como tal; pues aunque puede haber triángulos esféricos cóncavos—ó que alguno de sus lados sea mayor que una semicircunferencia máxima y alguno de sus ángulos mayor que un llano ó sea un hemisferio—su determinación depende de la de los convexos. Lo mismo decimos de los polígonos esféricos.

Los triángulos esféricos se clasifican como los rectilíneos, si bien, por razón de los lados hay además los *rectiláteros*, que son aquellos que uno de sus lados es un cuadrante, y por razón de los ángulos los *birrectángulos* y *trirrectángulos*, según que tengan dos ángulos rectos ó los tres.

**279.** 1.° Dos puntos de una esfera y sus opuestos, dividen á la circunferencia máxima que pasa por ellos en cuatro arcos, que tienen la propiedad de ser, dos contiguos suplementarios y dos separados iguales. Pues dos contiguos AB y BA′; figura 190, componen una semicircunferencia máxima, y dos separados AB y A′B′ les falta el mismo arco BA′, para componer una semicircunferencia máxima.

Fig. 190.




2.° Tres puntos de la esfera y sus opuestos que no estén sobre una misma circunferencia máxima, determinan tres circunferencias máximas que dividen la superficie esférica en ocho triángulos esféricos. Pues en la figura 190, los tres puntos A, B y C y sus opuestos A′, B′ y C′, dividen la superficie esférica en los ocho triángulos; ABC su opuesto A′B′C′, que tiene según concluimos de ver, sus lados respectivamente iguales á los del primero y sus ángulos también (276); los tres triángulos adyacentes al primero ABC′, ACB′ y BCA′, que tienen iguales con él un lado y los ángulos respectivamente opuestos, siendo suplementarios los otros lados y los otros ángulos, y los tres triángulos opuestos por el vértice al primero, A′B′C, A′C′B y B′C′A, que son los opuestos de los adyacentes.

3.° Un triángulo esférico y su opuesto no son, en general, superponibles; pero lo serán cuando el triángulo sea isósceles. Pues si en la figura 190, llevamos el ángulo C del triángulo ABC, sobre y C′ de su opuesto A′B′C′, los lados CA y CB coincidirán respectivamente con C'B' y C'A'; luego el vértice A no coincidirá con B', ni el B con A', á no ser que sea CA = = C'B' = CB.

4.° La suma de los ángulos de un triángulo esférico, cuyos lados y ángulos sean menores que 180°, es mayor que la mitad de la superficie esférica ó un ángulo llano. Pues en la figura 190, la suma de los ángulos del triángulo ABC, es decir, ABA'C + + BCB'A + CA'C'B' excede á la mitad de la superficie esférica, determinada por la circunferencia máxima AB A'B', donde se halla el punto C, en los triángulos ABC y A'B'C'.

Esta diferencia se llama *exceso* del triángulo esférico.

**280.** *Triedro correspondiente á un triángulo esférico*, es el formado por los radios trazados á los vértices del triángulo; y *triángulo esférico correspondiente á un triedro cuyo vértice es el centro de la esfera*, es el formado por los arcos correspondiente *de circunferencia máxima*, de los ángulos planos del triedro. Los ángulos planos del triedro son proporcionales á los lados del triángulo esférico correspondiente (128, C.° 1.°), y como los ángulos diedros del triedro y los esféricos del triángulo esférico correspondiente, tienen el mismo rectilíneo (276), éste y el diedro, como ya veremos, así como los diedros y sus esféricos correspondientes son también proporcionales. Esto hace el que pudiéramos referir todas las propiedades de los triángulos esféricos á las de los triedros; pero teniendo en cuenta la gran importancia de los triángulos esféricos en Estereometría,—una vez que así como la superficie esférica reemplaza al plano y la circunferencia máxima á la recta de Planimetría, del mismo modo reemplaza el triángulo esférico al rectilíneo; de suerte que siendo esta la figura fundamental de Planimetría, el esférico es la fundamental de Estereometría—demostraremos directamente las propiedades de los triángulos esféricos.

*Ángulo poliedro correspondiente á un polígono esférico*, es el formado por los radios trazados á los vértices del polígono; y *polígono esférico correspondiente á un ángulo poliedro cuyo vértice es el centro de la esfera*, es el formado por los arcos correspondientes, de circunferencia máxima, de los ángulos planos del ángulo poliedro. Aquí como en los triángulos esféricos y sus triedros correspondientes, se verifica que las caras de los ángulos poliedros y los lados de los polígonos esféricos correspondientes son proporcionales, así como también los diedros de los ángulos poliedros y los ángulos de los polígonos esféricos correspondientes.

**281.** *Circunferencia polar de un punto de la superficie esférica y su opuesto*, es la circunferencia máxima en que terminan todos los cuadrantes que se tracen desde ese punto. El punto y su opuesto se llaman *polos* del círculo máximo.

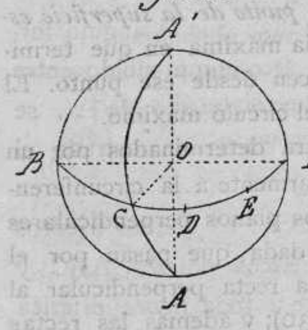
Los círculos máximos de una esfera determinados por un punto y su opuesto cortan perpendicularmente á la circunferencia polar de dicho punto. En efecto, los planos perpendiculares al plano de la circunferencia máxima dada, que pasan por el centro de la esfera, se cortan en una recta perpendicular al plano de la circunferencia máxima (230); y además las rectas perpendiculares á un radio de la esfera que pasan por el centro de esta, están en un plano perpendicular á dicho radio y á los planos que le contengan (208).

ESCOLIOS.—1.º Se determina el polo de un círculo máximo, trazando en un punto cualquiera de la circunferencia de este, una circunferencia máxima perpendicular y en esta se toma desde el punto elegido en cuadrante. 2.º Se determina la circunferencia polar de un punto de la superficie esférica, trazando desde este punto un cuadrante cualquiera, y por el extremo de este cuadrante una circunferencia máxima perpendicular al mismo cuadrante. 3.º Cuando un punto es el polo de un círculo máximo, es la circunferencia máxima la polar del punto. 4.º Cuando varios círculos máximos pasan por un punto, sus polos correspondientes están en una circunferencia máxima, que es la polar de dicho punto; y si varios puntos están en una circunferencia máxima, sus polares correspondientes pasan por un punto que es el polo del círculo máximo respectivo.

**282.** El ángulo formado por dos circunferencias máximas es proporcional al arco comprendido entre los polos de sus círculos, siendo el vértice del ángulo el polo del círculo á que corresponde el arco; y el arco comprendido entre dos puntos de la superficie esférica, es proporcional al ángulo formado por las circunferencias polares de estos puntos, cuyo vértice es el polo del arco.

En efecto, figura 191, si las circunferencias máximas que pasan por A son cortadas en B y C por la polar de dicho punto A, en cuyo caso los lados AB y AC del ángulo que consideramos son cuadrantes, quedará el arco BC perfectamente determinado siendo proporcional á su ángulo central correspondiente BOC (128, C.º 1.º), y por tanto al ángulo de las circunferencias máximas AB y AC (276); tomando ahora sobre la circunferencia polar del punto A, los cuadrantes BD y CE, los puntos D y E serán polos de los círculos AB y AC, y tendremos, BE—
— BD = BE — CE, ó bien DE = BC.

Fig. 191

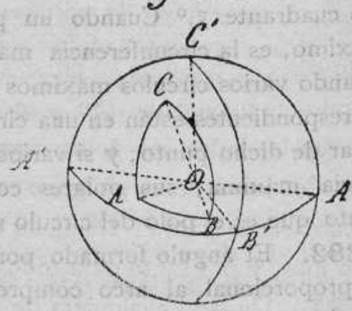



**283.** Triángulos polares, *son dos triángulos esféricos que los vértices del uno son polos de los lados del otro y recíprocamente los lados del uno son polares de los vértices del otro.*

A todo triángulo esférico corresponde un triángulo polar.

En efecto, figura 192, sea ABC el triángulo esférico propuesto, si determinamos el polo A′ de BC, que esté hacía la misma región de BC que A, y del mismo modo los polos B′ de AC, y C′ de AB; uniendo ahora por arcos de circunferencia máxima los puntos A′, B′ y C′, tendremos el triángulo A′B′C′ polar del ABC; pues por ser A′ polo de BC y B′ de AC,

Fig. 192.



cada uno de los arcos CA′ y CB′ será un cuadrante, pudiéndose por tanto describir el arco A′B′ en el sentido de que sea C su polo, y del mismo modo los demás.

Los ángulos de un triángulo esférico son respectivamente los suplementarios de los lados de un triángulo polar.

En efecto, figura 192, sabemos (282), que el ángulo formado por AC y BC es proporcional al arco comprendido entre sus polos B′ y A″; y como A″ es el punto opuesto de A′, se tiene $A'B' + B'A'' = 180^o$; por tanto queda demostrado el teorema.

ESCOLIOS.—Es conveniente observar: 1.° que los triedros correspondientes á los triángulos esféricos polares ABC y A′B′C′, son suplementarios, y 2.° que á toda figura esférica corresponde una figura polar.

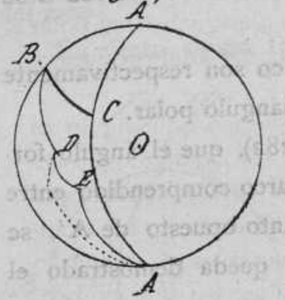
COROLARIOS.—1.° El exceso de un triángulo esférico y el perímetro de un triángulo polar sumados valen 360°. Pues en la figura 192, se tiene en efecto; $A + a' = 180^o$, $B + b' = 180^o$, y $C + c' = 180^o$; y por tanto se obtiene, $(A + B + C - 180^o) + (a' + b' + c') = 360^o$; y como el primer sumando es el exceso del triángulo (279), y el segundo el perímetro del polar. tenemos lo que nos proponíamos.

2.° La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que 360°. Pues según el corolario anterior el perímetro del triángulo con el exceso de su polar suman 360°. 3.° La suma de los ángulos es mayor que 180° y menor que 540°. Pues esta es la suma con los lados del polar correspondiente; y 4.° La suma de todos los lados de un polígono esférico es menor que 360°. Pues siendo cierto para el triángulo lo es para el polígono de un lado más, y por tanto para todos.

**284**. Un lado cualquiera de un triángulo esférico, es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

En efecto, figura 193, sea el triángulo esférico ABC, en el triángulo adyacente A'BC, se tiene según el corolario anterior, $a + (180^\circ - b) + (180^\circ - c) < 360^\circ$; por tanto, $a < b + c$, y $a - b < c$.

Fig. 193.

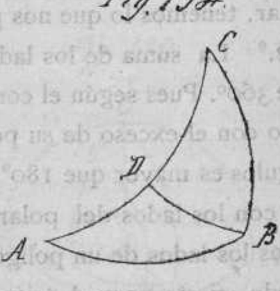



COROLARIOS.—1.º Un ángulo externo de un triángulo esférico, es menor que la suma de los dos ángulos internos no adyacentes al mismo y mayor que su diferencia. Pues en el triángulo A'BC, adyacente del ABC se tiene (279); $A + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) > 180^\circ$, de donde, $180^\circ - C > B - A$, en el triángulo ABC se tiene también; $A + B + C > 180^\circ$, de donde, $180^\circ - C < B + A$; y $A - B + C < 180^\circ$, es decir, la diferencia entre dos ángulos y el tercero es menor que 180º—2.º Un lado cualquiera de un polígono esférico es menor que la suma de todos los demás. Pues en el polígono ABDE trazando la diagonal AD, se tiene, $AB < AD + BD$, y como AD es menor que $DE + EA$, $AB < BD + DE + EA$.

**285.** En todo triángulo esférico: 1.º A ángulos iguales se oponen lados iguales; 2.º A mayor ángulo se opone mayor lado.

En efecto, figura 194; 1.º Sea el triángulo ABC, que suponemos que tiene los ángulos A y B iguales entre sí, entonces coincidirá como ya sabemos (279), con su opuesto A'B'C', coincidiendo A con B' y B con A'; luego $BC = A'C' = AC$; 2.º Si en el mismo triángulo, suponemos que es $B > A$, trazando el arco BD que forma un ángulo $ABD = BAC$, se tiene en el triángulo ABD, $AD = BD$; y como $CD + BD > BC$, resulta, $AC > BC$.

Fig. 194.




RECÍPROCO.—En todo triángulo esférico: 1.º A lados iguales se oponen ángulos iguales. 2.º A mayor lado se opone mayor ángulo. Pues si el triángulo dado tiene; dos lados iguales, su polar tendrá dos ángulos iguales entre sí, y por tanto los ángulos del propuesto iguales: y si son desiguales, su polar dos ángulos desiguales, y por tanto los ángulos del propuesto, será mayor el que se opone á mayor lado.

COROLARIOS.—1.º Todo triángulo esférico equiángulo es equilátero y recíprocamente. 2.º El vértice del triángulo isósceles birrectángulo es polo de la base; y en el trirrectángulo cada vértice es polo del lado opuesto (281). 3.º Cuando en un triángulo esférico, permanecen dos lados invariables y el ángulo que formen aumenta aumentará su lado opuesto; y recíprocamente (47).

**286.** En una misma esfera ó en esferas iguales, dos triángulos esféricos son iguales cuando tienen iguales é igualmente dispuestos: 1.º Dos lados y el ángulo comprendido: 2.º Tres lados: 3.º Un lado y los ángulos adyacentes: y 4.º Los tres ángulos. En el primer caso los triángulos evidentemente coinciden: el segundo se reduce al primero en virtud del recíproco del teorema anterior; y por último el tercero se reduce al primero y el cuarto al segundo, en virtud de los triángulos polares.

COROLARIOS.—1.º Dos triángulos rectángulos son iguales, lo mismo que dos rectiláteros en los mismos casos anteriores, suprimiendo una condición; pues esa se nos dá implícitamente. 2.º Dos polígonos esféricos son iguales en los mismos casos que dos polígonos rectilíneos; pues se dice que son iguales cuando, siendo de una misma esfera ó de esferas iguales, se compongan del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos (95 y 97).

ESCOLIO.—Se llama *tetraedro esférico*, á la porción de esfera limitada por un triángulo esférico y su triedro correspondiente; de modo que dos tetraedros esféricos son iguales cuando lo sean los triángulos esféricos correspondientes. Se llama *pirámide esférica*, á la porción de esfera limitada por un polígono esférico y su ángulo poliedro correspondiente; de modo que dos pirámides esféricas son iguales, cuando lo sean los polígonos esféricos correspondientes.

**287.** La línea más corta que se puede trazar entre dos puntos de una superficie esférica, es el arco menor de circunferencia máxima que los une. Puesto que el arco de circunferencia máxima es menor que el arco de circunferencia menor que uniera dichos puntos (182, E.° 6.°), y menor también que varios arcos de circunferencia máxima que unieran los expresados puntos (284, C.° 2.°); y por consiguiente menor que una línea cualquiera que uniera los referidos puntos, pues se la puede considerar compuesta por un número indefinido de arcos de circunferencia máxima, tan pequeños como se quiera.

ESCOLIO.—A la línea más corta que se puede trazar entre dos puntos de una superficie esférica, se llama *distancia esférica.* En general á la linea más corta que se puede trazar entre dos puntos de una superficie, se llama *línea geodésica.*

**288.** ESCOLIO GENERAL.—Debemos hacer notar que todo lo expuesto (55 al 63), es aplicable aquí reemplazando las rectas por circunferencias máximas. Así como también,—llamando paralelógramo esférico al cuadrilátero que queda dividido por una diagonal en dos triángulos esféricos iguales—todo lo expuesto (88 al 93). Y por último,—llamando polígono esférico inscrito en un círculo menor, al que tiene sus vértices en la circunferencia de ese círculo; y polígono circunscrito al que tiene sus lados tangentes—todo lo expuesto (114 al 118).

**289.** PROBLEMAS.—1.° Dados dos puntos en la superficie esférica, trazar una circunferencia máxima que pase por ellos. Para resolver este problema se trazan dos arcos haciendo centro en los puntos dados como polos con un radio polar igual á la cuerda del cuadrante, el punto obtenido será el polo de la circunferencia máxima pedida (273, E.° 5.°).

2.° Dados un arco de circunferencia máxima y un punto en la superficie esférica, trazar por este punto un arco de circunferencia máxima perpendicular al dado. Desde el punto dado como polo con un radio polar igual á la cuerda del cuadrante se describe un arco y el punto de intersección con el dado será el polo del arco pedido (281).

## LECCIÓN 34.

### Poliedros inscritos y circunscritos.

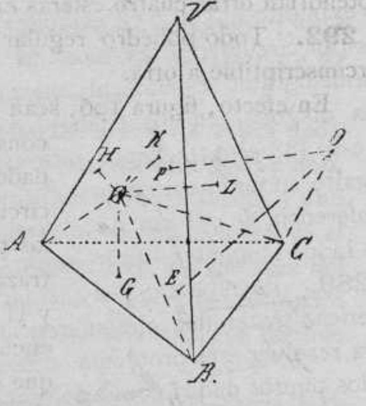
**290.** POLIEDRO INSCRITO EN UNA ESFERA, *es el que tiene sus vértices en la superficie esférica.*

POLIEDRO CIRCUNSCRITO Á UNA ESFERA, *es el que sus caras son tangentes á la esfera.*

**291.** Todo tetraedro es inscriptible á una esfera, y circunscriptible á otra.

En efecto, figura 195, sea un tetraedro cualquiera VABC; 1.°, el punto O, en que se encuentran las perpendiculares á las caras ABC y ACV en los centros de los círculos circunscritos E y F, equidista de los vértices (272), luego la superficie esférica que se trace haciendo centro en C y cuyo radio sea OC pasará por los cuatro vértices y el tetraedro inscrito en ella; 2.° el punto O′ en que se encuentran los tres planos bisectores de los ángulos diedros de la base ABC, equidista de las cuatro caras, pues trazando las cuatro rectas O′G, O′H, O′K y O′L respectivamente perpendiculares á las caras ABC, ABV, ACV y BCV, se tiene que el plano bisector ABO′ es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las caras ABC y ABV (60 y 232), luego O′G=O′H, el O′BC de los puntos equidistantes de ABC y BCV, luego O′G=O′L, y por último, el O′AC el de los puntos equidistantes de ABC y ACV, luego O′G=O′K, de donde, O′G= =O′H=O′K=O′L, y por tanto la esfera que tenga por centro O′ y por radio O′G, pasará por los cuatro puntos

Fig. 195.



G, H, K y L, y será tangente á las cuatro caras (274), quedando el tetraedro circunscrito.

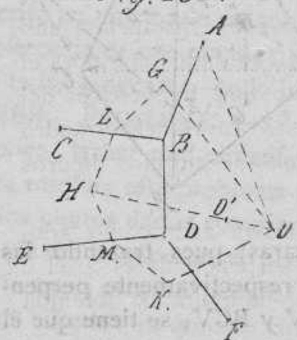
Corolarios.—1.º Las perpendiculares trazadas en los centros de los círculos circunscritos á las cuatro caras de un tetraedro, concurren en un mismo punto; pues la esfera circunscrita al tetraedro es única. 2.º Los planos perpendiculares en los puntos medios de las aristas de un tetraedro, concurren en un punto (209, C.º 2.º). Los seis planos bisectores de los ángulos diedros de un tetraedro, concurren en un punto; pues la esfera inscrita en el tetraedro es única.

Escolio.—Prolongando cada una de las caras de un ángulo triedro hacia distinta región de la cara opuesta, y trazando después los planos bisectores de los ángulos suplementarios, se obtendrían otras cuatro esferas *ex-inscritas* (114, E.º 3.º).

**292.** Todo poliedro regular es inscriptible á una esfera, y circunscriptible á otra.

En efecto, figura 196, sean ABC, CBD y EDF tres caras consecutivas del poliedro regular dado, G, H y K los centros de los círculos inscritos y circunscritos á las tres caras (115, E.º 1.º); si se trazan las perpendiculares en G y H á las caras ABC y CBD se encuentran en un punto O (272) que equidista de los vértices A, B, C y D, de modo que si demostramos que las perpendiculares trazadas á las caras en sus centros pasan todas por un punto, este equidistará de los vértices del poliedro; para ello bastará demostrar que la perpendicular trazada en el centro K de la cara EDF pasa también por el punto O de encuentro de las perpendiculares trazadas en G y H, pues lo mismo lo demostraríamos de las restantes; pero si la perpendicular trazada en K á EDF, no cortara á la trazada en H á la cara CBD, en O, la cortaría en otro punto tal como el O′, y entonces uniendo los puntos me-

Fig. 196.



dios L y M, de las aristas BC y DE con G, H y K, tendríamos los cuadriláteros OGLH y O'HMK iguales, por tener dos lados iguales, como apotemas de polígonos regulares iguales, y tres ángulos también iguales, los en K, H G como rectos y los en M y L como rectilíneos correspondientes á diedros iguales; luego O' tiene que coincidir con O; de donde este punto puede considerarse como el vértice común de una serie de pirámides regulares iguales, que tienen las caras del poliedro por bases, y las rectas que unen el punto O con los centros de las caras por alturas. Por tanto, la esfera que tenga por centro O y por radio OA pasará por todos los vértices del poliedro, y este quedará inscrito en ella; y la que tenga el mismo centro y por radio OG será tangente á todas las caras del poliedro, y este quedará circunscrito á ella.

**293.** PROBLEMAS.—Construir conociendo su arista: 1.º El tetraedro regular: 2.º El cubo: 3.º El octaedro regular: 4.º El dodecaedro regular: y 5.º El icosaedro regular.

1.º Se construye un triángulo equilátero con la arista dada como lado, se traza en su centro una perpendicular á su plano, y en esta perpendicular se toma un punto cuya distancia a uno de los vértices del triángulo sea igual á su lado; entonces el tetraedro que resulta de unir este punto con los vértices del triángulo es el pedido, puesto que las cuatro caras del tetraedro son triángulos equiláteros iguales y todos los ángulos diedros son iguales.

2.º Se construye un cuadrado con la arista dada como lado, se trazan en los cuatro vértices rectas perpendiculares á él é iguales á su lado, se unen sus extremos; y la figura así obtenida es evidentemente el cubo pedido.

3.º Se construye un cuadrado con la arista dada como lado, se traza en su centro una perpendicular á su plano, y se toma sobre ella á uno y otro lado del centro una longitud igual al radio del cuadrado; si se unen los puntos así obtenidos con los vértices del cuadrado resulta el octaedro regular pedido; puesto que, las doce aristas son iguales á la dada, las ocho caras triángulos equiláteros iguales, y los ángulos diedros iguales.

4.° Se construye un pentágono regular con la arista dada como lado, se forman en los vértices de este pentágono ángulos triedros iguales empleando otros cinco pentágonos regulares iguales á este, y así se obtiene un casquete de seis pentágonos regulares iguales é igualmente inclinados, este casquete forma una superficie poliedral abierta, limitada por un decágono alabeado,—puesto que cuatro vértices consecutivos no están en un mismo plano, sin lo cual no habríamos formado ángulos triedros—cuyos vértices corresponden sucesivamente á uno solo y á dos de los cinco pentágonos regulares con los cuales hemos formado los cinco ángulos triedros, y además tiene sus ángulos iguales, por lo cual se le podría dar una vuelta sobre sí mismo, haciendo que el primer vértice se colocara sobre el segundo, éste sobre el tercero y así sucesivamente, sin que dejara de coincidir: hecho esto, si se construye de la misma manera otro casquete idéntico y se le vuelve para presentarle opuestamente al primero, se podrán aplicar, por lo expuesto, uno sobre otro los decágonos alabeados que los limitan, colocando los vértices que no pertenecen más que á un pentágono en el segundo casquete sobre los vértices que corresponden á dos en el primero; ahora bien como los planos de estos pentágonos están ya dispuestos para formar ángulos triedros iguales á los ya formados, se obtendrá el dodecaedro regular pedido.

5.° Se construye un pentágono regular con la arista dada como lado, se traza en su centro una perpendicular á su plano, y en el plano determinado por esa perpendicular y uno de los radios del pentágono, se traza, haciendo centro en el vértice del pentágono á que hayamos trazado el radio, un arco con un radio igual á la arista dada, que cortará á la perpendicular; el punto así determinado se une, con los vértices del pentágono, obteniendo de este modo cinco triángulos equiláteros iguales con el vértice común en el punto determinado; hecho esto, coloquemos en dos vértices consecutivos del pentágono, el vértice de una figura idéntica á la obtenida, de manera que tengan dos caras comunes con la primera y una común entre sí; entonces tendremos un casquete de diez triángulos equiláteros iguales é igualmente inclinados, y los vértices del exágono alabeado—por la misma razón del problema anterior—que le limita pertenecen sucesiva y alternativamente á dos y á tres triángulos, teniendo sus ángulos iguales, por lo cual se le podría dar una vuelta sobre sí mismo, haciendo que el primer vértice se colocara sobre el segundo, éste sobre el tercero y así sucesivamente, sin que dejara de coincidir: hecho esto, si se construye de la misma manera otro casquete idéntico y se le vuelve para presentarle opuestamente al primero, se podrán aplicar, uno sobre otro los exágonos alabeados que los limitan, colocando los vértices que pertenecen á tres triángulos en el segundo casquete, sobre los vértices que corresponden á dos en el primero; ahora bien como los planos de estos triángulos están ya dispuestos para formar ángulos triedros iguales á los ya formados, se obtendrá el icosaedro regular pedido.

ESCOLIO.—Para construir prácticamente un poliedro regular, se traza en una hoja de cartón el desarrollo de todas sus caras, tomando una por base de la construcción, y hecho esto se doblan por las aristas comunes de modo que limiten completamente una porción de espacio.

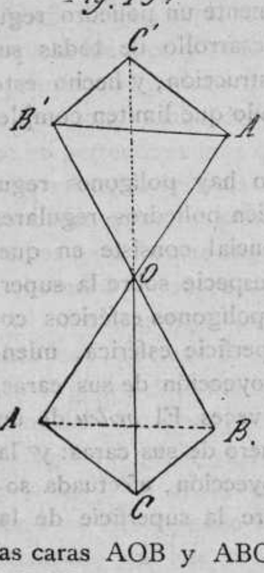
**294.** ESCOLIO GENERAL.—Así como hay polígonos regulares de especie superior (117), hay también poliedros regulares de especie superior; cuya diferencia esencial consiste en que, proyectadas las caras de los de primera especie sobre la superficie esférica por medio de radios, los polígonos esféricos correspondientes cubren sólo una vez la superficie esférica, mientras que en los de especie superior, la proyección de sus caras, cubre á la superficie esférica dos ó más veces. El *orden* de un poliedro regular está indicado por el número de sus caras: y la *especie* por el número de veces que su proyección, efectuada sobre la esfera inscrita ó circunscrita, cubre la superficie de la esfera.

## LECCIÓN 35.

### Figuras simétricas.

**295.** Hemos dicho (14), que las figuras simétricas no se diferenciaban más que en la posición de sus elementos, y que si en virtud de la movilidad se las podía hacer coincidir, la simetría se llamaba *de posición*, y sinó se les podía hacer coincidir, se llamaba *de figura;* también hemos visto (121, E.° 1.°), que en Planimetría no había simetría de figura; pues todas se las podía hacer coincidir mediante la superposición directa ó inversa. Pero en Estereometría existen las dos clases de simetría; una vez que, si trazamos, figura 197, un tetraedro OABC, y tomamos en las prolongaciones opuestas, con relación al vértice O, de sus aristas laterales, las partes OA′ = OA, OB′ = OB, OC′ = OC; tendremos después de unir por las rectas A′B′ A′C′, y B′C′ los puntos A′,B′,C′, el tetraedro OA′B′C′, cuyos elementos, aristas, caras y ángulos diedros y poliedros, son respectivamente iguales á los del OABC, pero dispuestos en órden inverso con relación al punto O; pues si nos colocamos con la espalda en la cara AOB y la cabeza en O, la cara BOC caerá á la derecha y la AOC á la izquierda, mientras que la B′OC′ = BOC caerá á la izquierda y la A′OC′ = AOC á la derecha, además las caras AOB y ABC están debajo, y sus iguales A′OB′ y A′B′C′ encima: por tanto, los diferentes triedros de los dos tetraedros aun cuando tienen todos sus elementos iguales no hay medio de hacerles coincidir, cualquiera que sea la clase de superposición que empleemos; pues no tenemos manera alguna

Fig. 197



por la movilidad, ni aún separando los tetraedros, de conseguir que los elementos estén igualmente dispuestos; luego los tetraedros son simétricos y tienen, sus caras, sus aristas y ángulos diedros iguales, y los ángulos triedros simétricos. De modo, que así como en Planimetría considerábamos como figuras realmente simétricas las que solo podían coincidir por superposición inversa, en Estereometría consideramos solo como figuras simétricas las que no pueden coincidir, es decir, las que como los tetraedros OABC y OA'B'C', así como sus triedros, tienen la simetría de figura.

**296.** TRIEDROS SIMÉTRICOS, *son los que tienen sus elementos iguales é inversamente dispuestos.* Esta definición es aplicable á los triángulos esféricos simétricos; los triedros como los triángulos dejan de ser simétricos, cuando los triedros son isoedros y los triángulo isósceles (239 y 279, 3.º).

TETRAEDROS SIMÉTRICOS, *son los que tienen sus caras, aristas y ángulos diedros iguales, y los ángulos triedros simétricos.*

POLIEDROS SIMÉTRICOS, *son los que pueden descomponerse en igual número de tetraedros simétricos é inversamente dispuestos.*

**297.** De lo expuesto se deduce: 1.º Que un triedro no puede tener más que otro simétrico, lo mismo que un triángulo esférico: 2.º Que un poliedro no puede tener más que un solo simétrico, lo mismo que un polígono esférico.

**298.** Así como en Planimetría para apreciar la disposición inversa de los elementos en las figuras simétricas, necesitábamos referirlos á un punto ó á una recta, aquí podemos referirlos además á un plano. De modo que, consideraremos figuras simétricas respecto á; un punto, una recta, y un plano. El punto, se llama *centro de simetría;* la recta *eje de simetría* (118); y el plano, *plano de simetría*, que es el perpendicular á las rectas que unen de dos en dos los puntos del contorno de una figura, y bisectriz de ellas. En particular se dice que dos puntos son simétricos respecto á un plano, cuando la recta que los une es perpendicular al plano y queda bisecada por él.

**299.** Dos figuras simétricas respecto á un eje, son iguales entre sí. Pues rebatiendo las figuras por el eje coincidirán necesariamente.

COROLARIOS.—En todo poliedro simétrico respecto á un eje. 1.° Toda recta que corta al eje perpendicularmente y termina en su superficie, queda dividida por el eje en dos partes iguales: 2.° Todo plano trazado por el eje, divide al poliedro en dos partes iguales; y 3.° Todo plano perpendicular al eje, determina una sección simétrica respecto del punto de intersección del plano con el eje.

ESCOLIOS.—1.° El prisma recto cuya base sea simétrica respecto de un punto, es el poliedro simétrico más sencillo respecto á un eje. Siendo la base del prisma recto un rectángulo, como dos caras cualesquiera opuestas se pueden tomar por bases, el paralelepípedo rectángulo tendrá tres ejes de simetría, que son las rectas que unen los centros de las caras opuestas. Siendo la base un cuadrado, tendrá además otros dos ejes de simetría que son las rectas que unen los puntos medios de las aristas laterales opuestas. Por último, cuando la base del prisma es un rombo, hay tres ejes de simetría; uno, la recta que une los centros de las bases, y otros dos, las que unen los puntos medios de las aristas laterales opuestas. 2.° La altura de una pirámide regular es un eje de simetría, cuando es par el número de caras laterales. Y 3.° La simetría respecto á un eje, es como en Planimetría simetría de posición; pues según concluimos de ver las figuras son superponibles: pero no sucede lo mismo con la simetría respecto de un punto y de un plano, que tienen á la vez la de posición y la de figura.

**300.** Si tres puntos están en línea recta lo están también: 1.° sus simétricos respecto de un punto: 2.° sus simétricos respecto de un plano.

En efecto: 1.° sean los tres puntos que están en línea recta A, B y C, figura 198, y sus simétricos con relación al punto O, A′, B′ y C′; si unimos el punto B′ con los A′ y C′, por las rectas B′A′ y B′C′, tendremos que, los triángulos OAB y OA′B′ son iguales (48, 2.°), y por tanto las rectas AB y A′B′ paralelas (68, 3.°), por la misma razón son también paralelas BC y B′C′; luego puesto que los tres puntos A, B y C están en línea recta, también lo estarán A′, B′ y C′ (196, E.° 2.°): 2.° sean los tres puntos que están en línea recta A, B y C, figura 199, y sus simétricos con relación al plano P, A′, B′ y C′, los piés *a, b* y *c* de las perpendiculares trazadas por A, B y C al plano P están en línea recta (214), luego rebatiendo la figura por *ac*, los puntos A, B y C coincidirán con A′ B′ y C′.

Fig. 198.

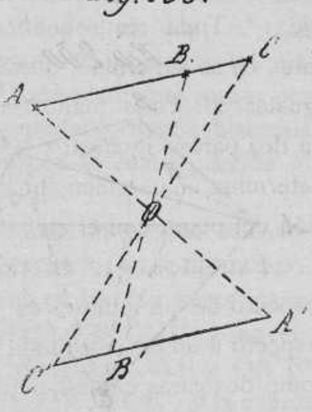
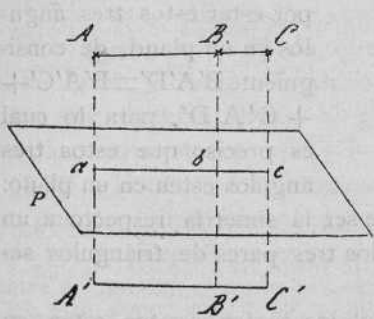



Fig. 199.

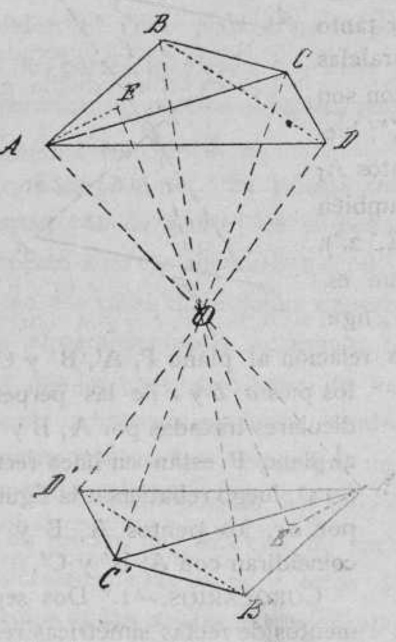



COROLARIOS.—1.° Dos segmentos de rectas simétricas respecto á un centro, son iguales y sus planos paralelos. 2.° Dos triángulos simétricos respecto á un centro, son iguales y sus planos paralelos. 3.° Dos segmentos de rectas simétricas respecto á un plano, forman ángulos iguales con el plano, y prolongadas le encuentran en el mismo punto si no son paralelas. 4.° Dos triángulos simétricos respecto á un plano, son iguales, y sus planos —cuando no son paralelos— encuentran en una misma recta al plano de simetría formando con él ángulos iguales.

**301.** Si cuatro puntos están en un plano, lo están también: 1.° sus simétricos respecto de un punto: 2.° sus simétricos respecto de un plano.

En efecto: 1.° sean los cuatro puntos que están en un pla- A, B, C y D, figura 200, y sus simétricos con relación al punto O, A′, B′, C′ y D′; si construimos los cuadriláteros ABCD y A′B′C′D′, y trazamos las diagonales AC y A′C′, BD y B′D′, tendremos que los tres pares de triángulos ABC y A′B′C′, ACD y A′C′D′, ABD y A′B′D′, son iguales (300, C.° 2.°), luego los ángulos BAC, CAD y BAD, son respectivamente iguales á los B′A′C′, C′A′D′ y B′A′D′, pero BAD = BAC + CAD, por estar estos tres ángulos en un plano, de consiguiente B′A′D′ = B′A′C′ + + C′A′D′, para lo cual es preciso que estos tres ángulos estén en un plano:

Fig. 200.




2.° la demostración en el caso de ser la simetría respecto á un plano, es la misma sin más que los tres pares de triángulos serían iguales (300, C.° 4.°).

ESCOLIO.—En el caso de que los cuatro puntos estén en planos diferentes, sus simétricos también lo están. Pues entonces los dos sistemas de puntos y A, B, C y D, y A′, B′, C′ y D′, figura 200, determinen dos tetraedros ABCD y A′ B′ C′ D′, cuyos ángulos triedros son simétricos, y por tanto ellos.

COROLARIOS.—1.° Dos poliedros simétricos respecto de un centro ó de un plano, tienen sus caras, aristas y ángulos diedros iguales, y simétricos los ángulos poliedros, siendo además simétricos entre sí. Pues es evidente según el escolio anterior, (300 C.$^{os}$), y la definición de poliedros simétricos. 2.° Todo poliedro cuyos vértices de dos en dos son simétricos respecto á un centro, tiene las propiedades siguientes: 1.ª un número par de aristas y caras iguales y paralelas de dos en dos; 2.ª los ángulos planos y diedros son respectivamente iguales, y los ángulos poliedros simétricos entre sí; 3.ª toda recta que pasa por el centro de simetría y termina en la superficie, queda bisecada en el centro; y 4.ª todo plano trazado por el centro, divide al poliedro en dos figuras simétricas entre sí.

Las dos primeras propiedades resultan del escolio anterior y (300, C.$^{os}$); la tercera se demuestra trazando, en la figura 200, la recta EE′ que pase por O y termina en las dos caras paralelas, del poliedro considerado ABCD y A′B′C′D′, y las rectas AE y A′E′, pues entonces los dos triángulos OAE y OA′E′ son iguales (199, y 48, 1.°), y por tanto OE = OE′; y la cuarta resulta de que el plano que pase por el punto O, determina dos poliedros simétricos entre sí, por componerse del mismo número de tetraedros simétricos é inversamente dispuestos.

ESCOLIO.—El poliedro simétrico más sencillo respecto á un centro, es el paralelepípedo, que tiene por centro de simetría el de figura: y como todo plano diagonal de un paralelepípedo pasa por el centro, divide al paralelepípedo en dos partes simétricas entre sí.

**302**. ESCOLIO GENERAL.—Es conveniente observar: que los poliedros simétricos respecto de un punto ó de un plano son simétricos entre sí; y recíprocamente dos poliedros simétricos entre sí, pueden siempre colocarse simétricamente respecto de un punto ó de un plano, pudiendo ser el punto un vértice y el plano una cara común á los dos poliedros: que cuando tenga un poliedro dos planos de simetría perpendiculares entre sí, su intersección es un eje de simetría; y si tiene tres el punto común, es un centro de simetría; y por último que todos los casos de igualdad estudiados en Estereometría se transforman en de simetría cuando los elementos estén dispuestos en orden inverso.

# LIBRO II

## Medida de las figuras geométricas no planas.

### CAPÍTULO PRIMERO

### *Áreas y volúmenes.*

#### LECCIÓN 36.

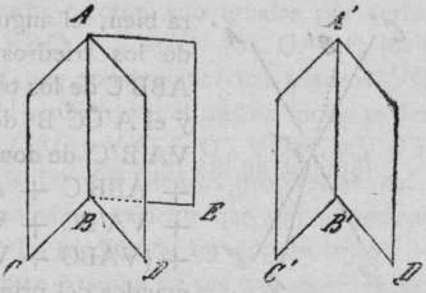
**Medida de los ángulos.**

**303.** Como los ángulos diedros son porciones de espacio indefinido (221), no los podemos medir directamente; tenemos pues, para medirlos que emplear el procedimiento indirecto, que consiste como ya sabemos (123), en medir directamente cantidades que mediante las relaciones que las liguen con los ángulos diedros vengamos á conocer su medida; pero también sabemos (125 y 126), que las cantidades que hayamos de medir directamente han de ser proporcionales á los ángulos diedros y que para que esto suceda se necesita se correspondan en la igualdad y en la suma; luego como ya hemos visto (227), existe correspondencia en la igualdad, entre un ángulo diedro y su rectilíneo correspondiente, tenemos necesidad de demostrar la correspondencia en la suma; pues de esta suerte, como ya sabemos medir los ángulos rectilíneos (128), conocida la medida de los ángulos rectilíneos correspondientes á los diedros, conoceremos la medida de los diedros.

**304.** Cuando un ángulo diedro es la suma de otros dos, su rectilíneo correspondiente es la suma de los correspondientes á los otros dos.

En efecto, figura 201, sea el ángulo diedro CABE, la suma de los diedros C′A′B′D′ y DABE, y sus rectilíneos respectivos CBE, C′B′D′ y DBE; para que se verifique la hipótesis, es preciso que sean iguales los diedros CABD y C′A′B′D′, pero entonces (227), son iguales sus rectilíneos correspondientes CBD y C′B′D′, y como los dos ángulos CBD y BDE están en un plano (209, C.º 1.º), se verifica que CBE = CBD + DBE = = C′B′D′ + DEB, conforme al teorema.

Fig. 201.




Corolarios.—1.º Los ángulos diedros son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes (126 E.º)

2.º Todo ángulo diedro tiene la misma medida que su rectilíneo correspondiente, siempre que se tome por unidad de ángulos diedros el correspondiente al ángulo rectilíneo que se tome por unidad (128, C.º 2.º)

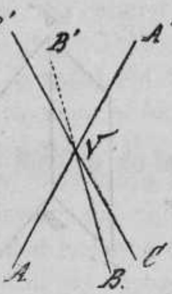
Escolios.—El corolario segundo se enuncia abreviadamente: *Todo ángulo diedro tiene por medida su rectilíneo correspondiente.* 2.º Como ya hemos visto que la unidad de ángulos rectilíneos, es el ángulo recto; la unidad de ángulos diedros será su correspondiente, que es el diedro recto (227, C.º)

**305.** Hemos visto (238), que la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis; mas para determinar la medida de un triedro nos conviene conocer el exceso de los diedros de un triedro sobre dos rectos y que dos triedros simétricos son equivalentes, lo que se consigue por los siguientes teoremas.

1.º La suma de los ángulos diedros de un triedro excede á dos rectos en el triedro y su simétrico.

En efecto, figura 202, sea el triedro VABC; si prolongamos sus aristas en sentido opuesto á V, resulta su simétrico VA'B'C' (295); ahora bien, el ángulo BAA'C se compone de los triedros VABC y VA'BC, el ABB'C de los triedros VABC y VAB'C, y el A'CC'B' de los triedros VA'B'C' y VA'B'C; de donde tendremos, BAA'C + + ABB'C + A'CC'B' = (VABC + + VA'BC + VAB'C + VA'B'C) + + (VABC + VA'B'C'), pero los sumandos del primer miembro son los ángulos diedros del triedro, los cuatro primeros sumandos del segundo miembro que están dentro del primer paréntesis componen evidentemente el ángulo llano ABA'B', y los dos sumandos del segundo miembro que están dentro del segundo paréntesis son el triedro propuesto y su simétrico; luego queda demostrado el teorema.

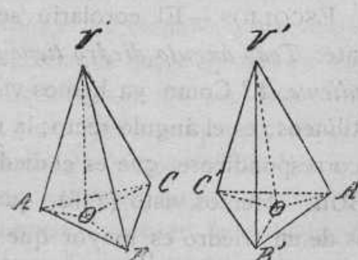
Fig. 202.




2.° Dos triedros simétricos son equivalentes.

En efecto, figura 203, sean los dos triedros simétricos VABC y V'A'B'C', tomemos VA = VB = VC = = V'A' = V'B', = V'C', tracemos los triángulos ABC y A'B'C', y las perpendiculares VO y V'O' á sus planos cuyos pies O y O' sabemos son los centros de los círculos circunscritos á los triángulos (210, E.° 1.°), y por último tracemos las rectas OA, OB, OC, O'A', O'B' y O'C' intersecciones respectivas de los planos ABC y A'B'C' con los planos VOA, VOB, VOC, V'O'A', V'O'B' y V'O'C'; hecho esto, tendremos que los triángulos VAB y V'A'B', VAC y V'A'C', VBC y V'B'C', son respectivamente iguales (48, 2.°), de donde AB = A'B', AC = A'C', y BC = B'C', luego los

Fig. 203.



triángulos ABC y A'B'C' son iguales (48, 3.°), y por tanto $OA = O'A'$, $OB = O'B'$ y $OC = O'C'$, así como $OAB = O'A'B'$; de modo que haciéndoles coincidir, coincidirán también OV y O'V' (206), y como son iguales por serlo los triángulos rectángulos VAO y V'A'O' (61, C.° 1.°), los puntos V y V' coincidirán; por consiguiente los triedros VOAB y V'O'A'B' coincidirán también, y del mismo modo se demostraría que coincidirían VOAC y V'O'A'C', VOBC y V'O'B'C'; estando pues compuestos los dos triedros propuestos, del mismo modo de triedros iguales, es evidente que son equivalentes.

COROLARIOS.—1.° La medida de un ángulo triedro, es la mitad de la diferencia entre la suma de sus tres ángulos diedros y dos rectos. Puesto que, si llamamos T al ángulo triedro y $\alpha$, $\beta$, y $\gamma$ á las medidas de los tres diedros, sabemos por los teoremas anteriores que se tiene, $\alpha + \beta + \gamma = 2 + 2T$; de donde; $T = \frac{(\alpha + \beta + \gamma) - 2}{2}$. Si en lugar de tomar por unidad de medida el diedro recto, tomásemos el triedro trirrectángulo mitad, como acabamos de ver, del diedro recto; entonces la fórmula que expresa la medida es, $T = (\alpha + \beta + \gamma) - 2$, es decir, que la medida de un triedro, es la diferencia entre la suma de sus tres diedros y dos rectos.

2.° La medida de un ángulo poliedro es la mitad la diferencia entre la suma de sus diedros y tantas veces dos rectos como caras tenga menos dos. Puesto que descomponiendo el poliedro por planos diagonales en triedros (234), resultarían tantos triedros como caras menos dos (94). Si la unidad es el triedro trirrectángulo, la medida sería la diferencia entre la suma de sus diedros y tantas veces dos rectos como caras menos dos.

**306.** Teniendo en cuenta la definición de ángulo esférico (276), y además la proporcionalidad que existe entre un ángulo esférico y el arco, de la circunferencia polar de su vértice, comprendido entre sus lados (281 y 282); vemos que es fácil la determinación de la medida indirecta del ángulo esférico (128, C.° 2.°), por tanto.

La medida de un ángulo esférico, es la misma que la del arco de circunferencia máxima comprendido entre sus lados trazado desde su vértice como polo, siempre que se tome por unidad de ángulos esféricos el correspondiente á la unidad de arcos, es decir, que si la unidad de arcos es el cuadrante, la unidad de ángulos esféricos será el ángulo esférico recto ó la mitad de un hemisferio.

**307.** ESCOLIO GENERAL.—Es muy conveniente observar que una vez imaginado *el espacio,* como continuo é infinito, sin que, como es natural,—puesto que nuestra inteligencia es limitada—podamos precisarlo ni representarlo ni por consiguiente medirlo; se puede del mismo modo imaginar *el plano,* como infinito y continuo, gozando de la propiedad de dividir el espacio en dos porciones superponibles, siendo de la misma manera imposible, precisarlo ni representarlo ni por tanto medirlo; y por último podemos imaginarnos *la recta,* como ilimitada y continua, gozando de la propiedad de dividir el plano en dos regiones superponibles, siendo también imposible precisarla ni representarla ni tampoco medirla. De aquí, el que hayamos representado solo; una parte del espacio, del plano y de la recta; siendo estas extensiones las que mide la Geometría; pues aunque también hemos medido el ángulo rectilíneo, y los ángulos diedros y poliedros, realmente lo que hemos determinado es la separación, abertura ó inclinación de las direcciones de las rectas, y las posturas de los planos; comparándolas con la dirección única de la recta,—ángulo llano ó su mitad, ángulo recto — y la postura única del plano—ángulo diedro recto, ó su mitad ángulo recto.—Pero esto no sucede con el ángulo esférico que como completamente limitado, por ser parte de la superficie esférica, le podemos representar y medir con precisión; de modo que no solo determinemos la inclinación de sus lados sinó que también la porción de superficie esférica que limitan,—huso esférico;—comparándolo con la mitad de la superficie esférica, ángulo llano, ó bien con la mitad del ángulo llano, ángulo recto. En estas consideraciones se funda el eminente matemático LEIBNITZ, para dar las definiciones siguientes.

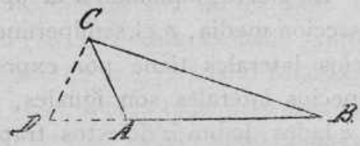
PLANO, *es toda superficie que divide el espacio en dos partes superponibles.*

RECTA, *es toda línea que divide el plano en dos partes superponibles.*

Definiciones, que aunque entendemos son las mejores por no decir las únicas, no hemos aceptado; por ser difíciles de entender al dar los primeros pasos en la ciencia; y hemos preferido, definir el plano por su axioma, y la recta por una proposición que se puede demostrar como (287), sin más que demostrar la primera parte del teorema (44), en la forma siguiente.

Vamos á demostrar, figura 204, que BC es menor que AB + AC, para ello, prolongo AB en una longitud AD = AC, y trazo la recta DC; entonces, en el triángulo isósceles ACD, si tiene ADC = ACD, DCB > ACD = = ADC; luego en el triángulo BCD, BD > BC, ó bien BC < AB + AC.

Fig. 204




## LECCIÓN 37.

### Áreas de los cuerpos.

**308.** ÁREA DE UN CUERPO, *es la medida de su superficie.* En los cuerpos que tienen base ó bases, se llama *área lateral,* á la de su superficie menos la base ó bases; de modo que el área total del cuerpo se compone de la lateral y de la de su base ó bases.

Las áreas de los poliedros no ofrecen dificultad ninguna; pues como su superficie está compuesta por polígonos y sabemos determinar las áreas de los polígonos, nos bastaría determinar el área de cada cara y sumar las áreas obtenidas para obtener la del poliedro: pero como hay algunos poliedros especiales cuyas áreas se pueden obtener con más facilidad; de aquí, el que tengamos que ocuparnos de su determinación.

**309.** El área lateral de una pirámide regular, es igual al producto de la apotema de la pirámide por el semiperímetro de su base.

En efecto, llamando $a$ la apotema de la pirámide y $l$ el lado de la base; el área de uno de los triángulos laterales tiene por expresión $\frac{1}{2} a \times l$. y como todos los triángulos laterales son iguales, suponiendo que la base tenga $n$ lados, habrá $n$ de estos triángulos, de modo que multiplicando por $n$, tendremos para expresión del área lateral de la pirámide $\frac{1}{2} a \times nl = ap$, llamando al perímetro $nl$, $2p$.

**310.** El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas, es igual al producto de la apotema del tronco por el perímetro de la sección hecha á igual distancia de las bases.

En efecto, llamando $a$ la apotema del tronco, $l$ el lado de la sección media, $p$ el semiperímetro; el área de uno de los trapecios laterales tiene por expresión $a \times l$, y como todos los trapecios laterales son iguales, suponiendo que la sección tenga $n$ lados, habrá $n$ de estos trapecios, de modo que multiplicando por $n$, tendremos para expresión del área lateral del tronco, $a \times nl = a \times 2p$.

**311.** El área total de una pirámide regular, es igual al semiperímetro de la base por la suma de las apotemas de la pirámide y de la base. Pues llamando $a'$ la apotema de la base; el área lateral es $a \times p$, y el área de la base $a' \times p$, luego el área total es, $a \times p + a' p = p(a + a')$.

**312.** El área lateral de un prisma, es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de la sección recta.

En efecto, si el prisma es recto una de las bases es la sección recta, y si es oblícua las intersecciones de la sección recta con las caras laterales son las alturas de los paralelógramos que las forman; en uno y otro caso, llamando $a$ la arista lateral y $2p$ al perímetro de la sección recta se obtiene, $a \times 2p$ para expresión del área lateral del prisma.

**313.** El área total de un prisma regular, es igual al producto del perímetro de una de las bases por la suma de la arista lateral y la apotema de la base. Pues llamando $a'$ la apotema de la base; el área lateral es $a \times 2p$, y las áreas de las bases, $a' \times 2p$, luego el área total es, $a \times 2p + a' \times 2p = 2p(a + a')$.

**314.** El area de un poliedro regular, es igual al área de una de sus caras por el número de ellas. Pues los poliedros regulares tienen sus caras iguales y regulares; por tanto, las expresiones para los cinco poliedros regulares en función de su arista que llamaremos $a$, son

$$A_4 = a^2\sqrt{3}, \; A_6 = 6a^2, \; A_8 = 2a^2\sqrt{3},$$

$$A_{12} = a^2 \times \frac{5+\sqrt{5}}{4} \times 3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \; A_{20} = 5a^2\sqrt{3}.$$

**315.** El área lateral de un cono circular recto, es igual al producto del lado por la semicircunferencia de la base. Pues teniendo en cuenta lo expuesto (181), el cono circular recto se le puede considerar como el límite de una pirámide regular que tenga el mismo vértice que el cono y cuya base esté inscrita ó circunscrita á la base del cono, siempre que el número de lados de la base sea tan grande como deseemos; por tanto, en el límite la apotema de la pirámide se convierte en el lado del cono, y el perímetro de la base de la pirámide en la circunferencia de la base del cono, y por último la expresión del área lateral de la pirámide regular en $\pi rl$ expresión del área lateral del cono circular recto de radio $r$ y de lado $l$.

**316.** El área lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas, es igual al producto de su lado por la circunferencia de la sección hecha por un plano á igual distancia de las bases. Pues como en el teorema anterior se puede considerar el tronco de cono como el límite del tronco de pirámide regular de un número indefinido de caras; siendo por tanto su expresión $2\pi rl$, siendo $r$ el radio de la sección media y $l$ el lado del tronco.

**317.** El área total de un cono circular recto, es igual al producto de la semicircunferencia de la base por la suma del lado y el radio de dicha base. Pues la expresión del área lateral es $\pi r l$ y la de la base $\pi r^2$, luego la total será, $\pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$.

**318**. El área lateral de un cilindro recto circular, es igual al producto de su lado por la circunferencia de la base; y la total al producto de la circunferencia de la base por la suma del lado y el radio de la expresada base. Pues al cilindro circular recto se le puede considerar como el límite de un prisma regular de indefinido número de caras; y por tanto la expresión del área lateral es $2\pi r l$, llamando $r$ al radio de la base y $l$ al lado, y la total $2\pi r\, l + 2\pi r^2 = 2\pi r\, (l + r)$.

**319**. El área de la superficie engendrada por un segmento de recta, al girar alrededor de un eje situado en su plano, es igual á la proyección del segmento de recta sobre el eje multiplicada por la circunferencia cuyo radio es la parte de la perpendicular trazada en el punto medio de la recta comprendida entre ese punto y el eje.

En efecto, figura 205, sea el eje MN, el segmento de recta no puede tener más posiciones que, 1.ª la AB paralela al eje; 2.ª la AB′ que sin ser paralela al eje no le encuentra; y 3.ª la AC que encuentra al eje proyectando los segmentos sobre el eje, y trazando las perpendiculares D$d$, EF y GH en sus puntos medios tenemos: en la 1.ª posición AB engendra la superficie lateral de un cilindro circular recto, y $AB = ab$, $Bb = Dd$, por tanto el área será, $AB \times 2\pi Bb = ab \times 2\pi Dd$: en la 2.ª posición AB′ engendra la superficie lateral de un tronco de cono circular recto cuya área es $AB' \times 2\pi Ed$, y como de los triángulos semejantes ABB′ y EF$d$, resulta, puesto que $AB = ab$, $AB' : EF = ab : Ed$, de donde $AB' \times Ed = ab \times EF$, se tiene, $AB' \times 2\pi Ed = ab \times 2\pi EF$: y en la 3.ª posición AC, engendra la superficie lateral de un cono circular recto cuya área es $AC \times \pi Aa$, y como de los triángulos semejantes AC$a$ y CGH resulta, puesto que $CG = \frac{1}{2} AC$, $\frac{1}{2} AC : Ca = GH : Aa$, de donde $AC \times Aa = 2Ca \times GH$, se tiene $AC \times \pi Aa =$

Fig. 205

$= Ca \times 2\pi GH$; luego en todas las posiciones se verifica el teorema.

COROLARIO.—El área de la superficie engendrada por una línea quebrada regular al girar alrededor de un eje que pasa por su centro y está en su plano, es igual á su proyección sobre el eje multiplicada por la circunferencia cuyo radio sea la apotema.

Pues si la línea quebrada regular es ABCDE, figura 206, como todas las apotemas son iguales á OF (115, E.° 3.°), cualquiera que sea la posición que ocupen sus lados respecto del eje, se tendrá para las superficies engendradas por ellos, las expresiones de sus áreas siguientes; la correspondiente á AB, $Ab \times 2\pi OF$, á BC, $bO \times 2\pi OF$, á DC, $dO \times 2\pi OF$, y á DE, $dE \times 2\pi OF$; luego la de la engendrada por toda la línea será, $Ab \times 2\pi OF + bO \times 2\pi OF + dO \times 2\pi OF + dE \times 2\pi OF = 2\pi OF (Ab + bO + dO + dE = 2\pi OF \times AE = AE \times 2\pi OF$.

Fig. 206.


**320.** El área de la zona esférica, es igual á su altura multiplicada por la circunferencia máxima.

En efecto, figura 206, sabemos que la línea quebrada regular ABCDE cuando aumenta indefinidamente el número de sus lados tiene por límite la semicircunferencia ABE (115, E.° 3.° y 181); ahora bien en el límite la apotema OF es igual al radio OG, y el área de la superficie engendrada por una parte de ella tal como BCD sería el área de la zona esférica engendrada por el arco BCD de la semicircunferencia generadora; luego puesto que el área de la superficie engendrada por la parte BCD de línea quebrada regular tiene por expresión, $bd \times 2\pi OF$, la de la zona esférica tendrá por expresión $bd \times 2\pi OG$ conforme al teorema.

COROLARIOS.—1.° El área del casquete esférico, es igual á su altura multiplicada por la circunferencia máxima. Pues no se diferencia de la zona más que en que el arco generador corta al eje, y esto no altera la expresión del área.

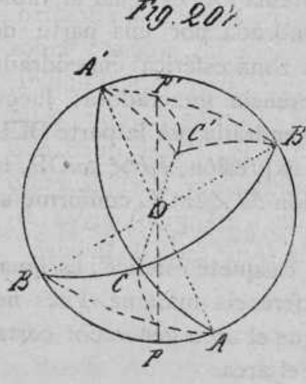
2.° El área de la esfera, es igual al diámetro multiplicado por la circunferencia máxima. Pues se puede considerar la superficie esférica como un casquete cuya altura sea el diámetro; por tanto su expresión será, llaman R al radio de la esfera, $2R \times 2\pi R = 4\pi R^2$, igualdad cuyo primer miembro está conforme con el enunciado, y el segundo nos dice que: el *área de la esfera es cuádruple de la del círculo máximo.*

**321**. El área del huso esférico es igual á la del círculo máximo multiplicada por la relación entre el arco comprendido entre sus lados de la circunferencia polar del vértice y su cuadrante. Puesto que como ya sabemos (276, E.°), el huso esférico no es más que el ángulo esférico, y la medida de este (306), es la misma que la del arco polar de su vértice comprendido entre sus lados; por tanto, siendo la unidad de arcos el cuadrante, la de husos esféricos será el huso recto ó la cuarta parte de la superficie esférica, cuya área sabemos que es la del círculo máximo, de modo que el área del huso esférico será el producto de la del círculo máximo por la relación entre el arco polar del vértice comprendido entre sus lados y su cuadrante: si representamos por R el radio de la esfera y por *a* la relación entre el arco polar del huso y su cuadrante la expresión del área del huso se expresa por $\pi R^2 a$; de suerte que el huso cuyo arco polar tuviese $30^0$, $a = \frac{1}{3}$, y el área $\frac{1}{3}\ \pi R^2$.

**322**. El área de un triángulo esférico, es igual á la mitad del exceso de la suma de sus ángulos sobre dos rectos.

En efecto, figura 207, el exceso del triángulo esférico ABC sabemos que es (279, 4.°), la suma de ese triángulo y su opuesto ó simétrico A′B′C′, pero estos triángulos simétricos son equivalentes; puesto que si trazamos el polo P del círculo menor determinado por los tres vértices A, B y C, le unimos por medio de arcos de circunferencia máxima con los vértices, trazamos el diámetro de la esfera PP′, y unimos del mismo modo el punto P′ con los vértices A′, B′

Fig. 207.



y C′; tendremos que los arcos PA, PB y PC son iguales como radios polares y que P′A′, P′B′ y P′C′ son respectivamente iguales á PA, PB y PC porque sus ángulos correspondientes lo son por opuestos por el vértice, y que los triángulos isósceles PAB y P′A′B′, PAC y P′A′C′ PBC y P′B′C′ son iguales (279, 3.º); luego los triángulos ABC y A′B′C′ que están formados del mismo número y modo de triángulos iguales son equivalentes; por tanto el exceso del triángulo ABC, será dos veces ese triángulo, de modo que si llamamos T al área del triángulo y $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ á la de sus ángulos se tiene, $\alpha + \beta + \gamma = 2 + 2T$, de donde $T = \frac{(\alpha + \beta + \gamma) - 2}{2}$. Si en lugar de tomar como unidad de medida el ángulo esférico recto, tomásemos el triángulo trirrectángulo, que es, según la fórmula, mitad del ángulo esférico recto, el área sería el exceso de la suma de los tres ángulos del triángulo esférico sobre dos rectos.

COROLARIO.—El área de un polígono esférico, es igual á la mitad de la diferencia entre la suma de sus ángulos esféricos y tantas veces dos rectos como lados tenga menos dos. Puesto que descomponiendo el polígono por arcos de circunferencia máxima que partan de un vértice, resultarán tantos triángulos esféricos como lados menos dos. Si la unidad es el triángulo esférico trirrectángulo, el área sería la diferencia entre la suma de sus ángulos esféricos y tantas veces dos rectos como lados menos dos.

**323**. ESCOLIO GENERAL.—Nos conviene observar que la superficie poliedral así como la cónica y la cilíndrica son desarrollables; pues por giros sucesivos alrededor de las aristas y lados comunes se pueden extender sobre un plano sin rotura ni doblez; dando lugar, la superficie lateral de una pirámide regular, á un sector poligonal regular cuyo radio es la arista lateral, quedando la misma la apotema; la del cono, á un sector circular cuyo radio es el lado; y la del cilindro, á un rectángulo cuyas dimensiones son el lado y la circunferencia rectificada de la base.

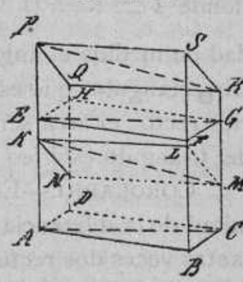
## LECCIÓN 38.

### Figuras equivalentes.

**324.** (Todo prisma oblícuo, es equivalente á un prisma recto que tenga por base la sección recta del oblícuo y por altura su arista lateral.)

En efecto, figura 208, sea el prisma oblícuo AG, su sección recta KLMN, y PQRS un plano paralelo á esa sección trazado por el punto P de la prolongación de la arista lateral AE á una distancia de E, EP = AK; entonces se tiene, que la arista KP del prisma recto KR, es igual á la AE del oblícuo AG, por componerse de la parte común KE y las partes iguales EP y AK, además se componen del tronco KG y del ER el recto, y del mismo tronco KG y del AM el oblícuo; pero los dos troncos ER y AM, son iguales porque haciendo resbalar el primero á lo largo de PA hasta que PQRS coincida con su igual KLMN coincidirán las aristas laterales y como son iguales coincidirán EFGH con ABCD; luego los dos prismas que están compuestos de la misma manera de troncos iguales, son equivalentes.

Fig. 208.




**325.** Cuando se hace pasar un plano por las diagonales paralelas de dos caras opuestas de un paralelepípedo, los prismas triangulares que resulten son equivalentes.

En efecto, figura 208: sea 1.º el paralelepípedo recto KR y hagamos pasar un plano por las diagonales paralelas KM y PR de las caras opuestas KLMN y PQRS; los dos prismas triangulares en que queda descompuesto KMNPQR y KLMPRS son iguales, por tener iguales las bases y las alturas: 2.º el paralelepípedo oblícuo AG cuya sección recta es KLMN y hagamos pasar un plano por las diagonales paralelas AC y EG de las caras opuestas ABCD y EFGH; los dos prismas triangulares en que queda descompuesto ABCEFG y ACDEGH, tienen por secciones rectas respectivas KNM y KLM, luego, según el teorema anterior, son equivalentes á los iguales KMNPQR y KLMPRS, por consecuencia son equivalentes.

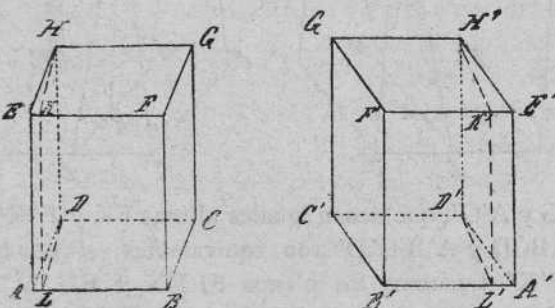
**326**. Dos prismas de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.

Para demostrar este teorema, antepondremos los dos lemas siguientes:

1.° (Dos paralelepípedos rectos de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.)

En efecto, figura 209, sean los dos paralelepípedos rec-

Fig. 209.

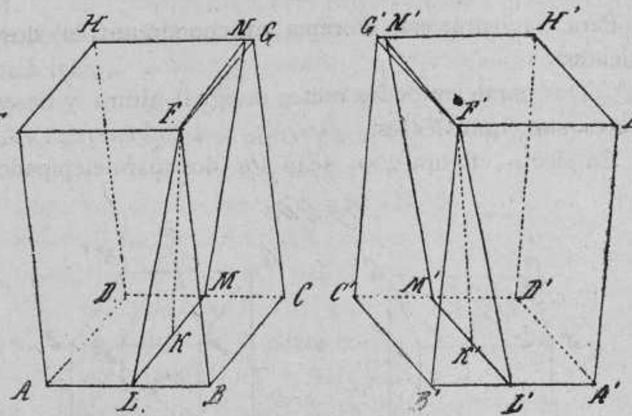



tos AG y A′G, que tienen iguales alturas DH y D′H′, y cuyas bases ABCD y A′B′C′D′ son equivalentes; si por las aristas DH y D′H′ hacemos pasar dos planos DHKL y D′H′K′L′ respectivamente perpendiculares á las aristas DC y D′C′ estos planos serán las secciones rectas de los paralelepípedos oblícuos EC y E′C′, siendo los paralelepípedos propuestos equivalentes á los rectos que tuviesen por bases respectivas DHKL y D′H′K′L′ y por alturas DC y D′C′; pero como DHKL y D′H′K′L′ son rectángulos iguales por tener iguales alturas DH y D′H′, é iguales bases DL y D′L′, como alturas de las bases de los paralelepípedos propuestos, serán iguales los paralelepípedos rectángulos que tienen iguales bases é iguales alturas; por tanto sus equivalentes los paralelepípedos propuestos son equivalentes.

2.° Dos paralelepípedos oblícuos de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.

En efecto, figura 210, sean los dos paralelepípedos oblí-

Fig. 210.




cuos AG y A'G', que tienen iguales alturas FK y F'K', y cuyas bases ABCD y A'B'C'D' son equivalentes; si por las alturas FK y F'K' trazamos los planos FLMN y F'L'M'N', serán las secciones rectas de los paralelepípedos oblícuos EC y E'C', y los paralelepípedos propuestos equivalentes á los rectos que tuviesen por bases respectivas FLMN y F'L'M'N' y por alturas EF y E'F'; pero como FLMN y F'L'M'N' son paralelógramos equivalentes, por tener iguales alturas FK y F'K', é iguales bases LM y L'M' como alturas de las bases de los paralelepípedos propuestos, serán equivalentes los paralelepípedos rectos que tienen iguales alturas y bases equivalentes; por tanto sus equivalentes los paralelepípedos propuestos, son también equivalentes.

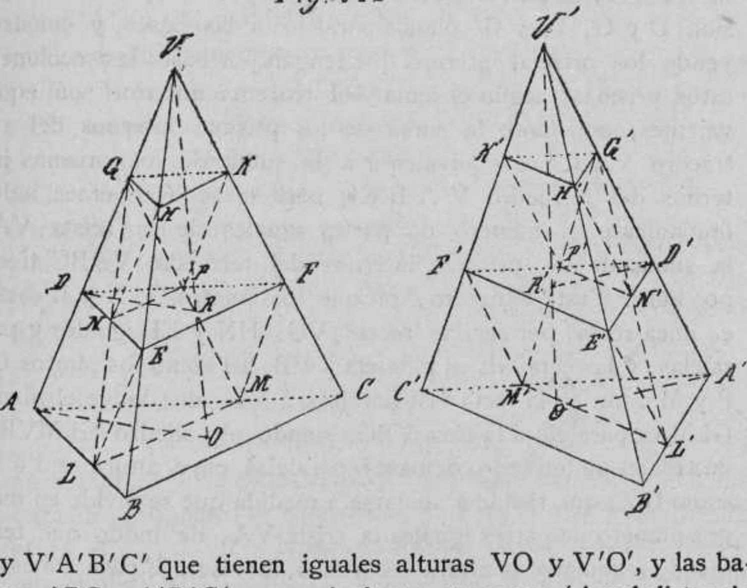
Ahora ya es fácil demostrar el teorema propuesto; una vez que si los prismas son triangulares, serán equivalentes (325), y si no son triangulares—teniendo las bases el mismo número de lados—se les puede descomponer en igual número de prismas equivalentes, siendo por tanto ellos equivalentes. En el caso de que las bases no tuviesen el mismo número de lados se hará que cumplan con esta condición (140, 1.º).

**327.** Dos tetradros de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes. Para demostrar este teorema antepondremos el siguiente

LEMA.—Las secciones hechas en dos tetraedros de igual altura y bases equivalentes por planos paralelos á igual distancia de las bases, son equivalentes.

En efecto, figura 211, sean los dos tetraedros VABC

*Fig. 211*




y V'A'B'C' que tienen iguales alturas VO y V'O', y las bases ABC y A'B'C' son equivalentes, tracemos á igual distancia de las bases planos paralelos que nos den las secciones DEF y D'E'F': entonces estas secciones son triángulos respectivamente semejantes á las bases ABC y A'B'C' (154), y tendremos (151), ABC : DEF $=$ $\overline{AB}^2$ : $\overline{DE}^2$, pero por ser semejantes los triángulos VAB y VDE así como los VAO y VDR,—que resultan uniendo los puntos O y R, en que la altura corta á la base y la sección respectivamente con A y D,—y por tanto $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = \overline{VA}^2 : \overline{VD}^2$, y $\overline{VA}^2 : \overline{VD}^2 = \overline{VO}^2 : \overline{VR}^2$; de estas dos igualdades y la anterior se deduce, $ABC : DEF = \overline{VO}^2 : \overline{VR}^2$, y del mismo modo se obtiene, $A'B'C' : D'E'F' = \overline{V'O'}^2 : \overline{V'R'}^2$, y como en estas dos últimas igualdades los segundos miembros son iguales, resulta la proporción $ABC : DEF = A'B'C' : D'E'F'$, que para que se verifique, siendo equivalentes los antecedentes, es preciso que lo sean también los consecuentes.

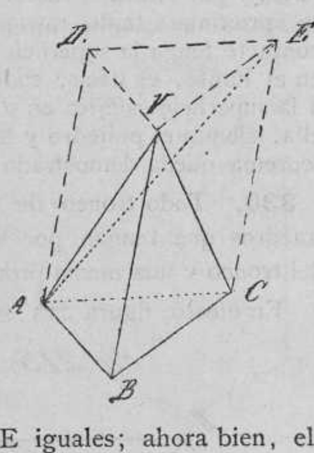
Ahora ya es fácil demostrar el teorema propuesto; una vez que dividiendo las aristas AV y A'V' de los tetradros dados, figura 211, en partes iguales, trazando por los puntos de división D y G, D' y G' planos paralelos á las bases, y construyendo los prismas internos que tengan por bases las secciones, estos prismas, según el lema y el teorema anterior son equivalentes; por tanto la suma de los prismas internos del tetraedro VABC es equivalente á la suma de los prismas internos del tetraedro V'A'B'C'; pero si se hace creer indefinidamente el número de partes iguales de la arista VA, la suma de los prismas internos del tetraedro VABC tiene por límite á este tetraedro, porque los puntos G, N y L están en línea recta, por ser las rectas VG, HN y EL iguales y paralelas, y la recta GL es paralela á VB, así como los puntos G, P y M están en la recta GM paralela á VC, de donde el plano GLM es paralelo á la cara VBC, siendo el poliedro GLMVBC un tronco de tetraedro de bases paralelas cuya altura será á lo sumo GV, que tiende á anularse á medida que se divide en mayor número de partes iguales la arista VA, de modo que tendiendo á anularse la altura del tronco, lo mismo le pasará á este, y como el tronco de tetraedro es evidentemente mayor que la diferencia que existe entre el tetraedro VABC y la suma de los prismas internos construidos en él, esta diferencia tiene cero por límite: del mismo modo demostraríamos que la diferencia entre el tetraedro V'A'B'C' y la suma de los prismas internos construidos en él tiene cero por límite; luego como las dos sumas de prismas son constantemente equivalentes, los tetraedros también lo serán.

COROLARIO.—Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes. Pues si las pirámides son triangulares concluimos de demostrarlo, y en el caso que no lo sean,—teniendo las bases el mismo número de lados—se descomponen en el mismo número de triangulares equivalentes que sumadas formen las propuestas. En el caso de que las bases no tuviesen el mismo número de lados se hará que cumplan con esta condición (140, 1.º).

**328.** Todo tetraedro, es equivalente á la tercera parte de un prisma de la misma base y altura.

En efecto, figura 212, sea el tetraedro VABC, tracemos por los vértices A y C de su base las rectas AD y CE paralelas á VB é iguales á ella, y unamos los puntos D, E y V por las rectas DE, DV y EV; entonces tendremos formado el prisma triangular ABCDEV, de la misma altura y base que el tetraedro propuesto, que se compone del tetraedro VABC y la pirámide cuadrangular VACED; trazando ahora un plano por los puntos V, A y E, dividirá á esta pirámide en dos tetraedros VACE y VADE equivalentes, por tener la misma altura y las bases ACE y ADE iguales; ahora bien, el tetraedro propuesto es equivalente al VADE, por tener iguales bases ABC y DVE y la misma altura; de modo que los tres tetraedros VABC, VACE y VADE en que se halla descompuesto el prisma ABCDEV, son equivalentes; luego el propuesto, que es uno de ellos es equivalente á la tercera parte del prisma de la misma base y altura.

Fig 212



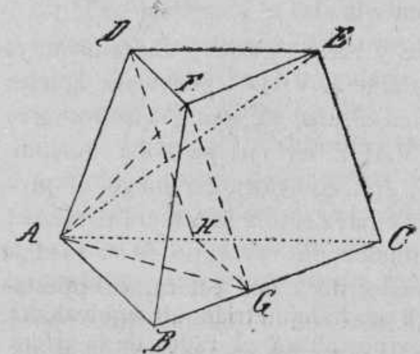

**329.** Todo poliedro circunscrito á una esfera, es equivalente á un tetraedro que tenga por base un triángulo equivalente á la superficie del poliedro y por altura el radio de la esfera inscrita. Puesto que haciendo pasar planos por el centro de la esfera y los vértices del poliedro, queda descompuesto el poliedro en tantas pirámides como caras tenga, teniendo todas ellas el vértice en el centro de la esfera y por bases las caras del poliedro; luego todas tendrán la misma altura que es el radio de la esfera inscrita, de modo que el tetraedro que tuviese por base un triángulo equivalente á la superficie del poliedro—suma de las bases de las pirámides en que ha quedado descompuesto el poliedro—y por altura el radio de la esfera inscrita en él, será equivalente á la suma de las pirámides en que se ha descompuesto el poliedro, que para sumarlas por tener la misma altura, bastará sumar las bases, si bien teniendo en cuenta que en las pirámides de opuesto sentido deben tomarse las bases en opuesto sentido.

COROLARIO.—Toda esfera es equivalente á un tetraedro que tenga por base un triángulo equivalente á la superficie esférica y por altura el radio. Desde luego el poliedro circunscrito se aproximará tanto más á la esfera, cuantos más puntos de contacto tenga la superficie del poliedro con la de la esfera, y en el límite, es decir, cuando la superficie del poliedro toca á la superficie esférica en todos sus puntos se confundirá con ella, siendo el poliedro y la esfera iguales; luego en virtud del teorema queda demostrado lo que nos proponíamos.

**330.** Todo tronco de tetraedro, es equivalente á tres tetraedros que tengan por altura la del tronco y por bases las del tronco y una media proporcional entre ellas.

En efecto, figura 213, sea el tronco de tetraedro ABCDEF, tracemos los planos FAC y FAE que descomponen al tronco en los tres tetraedros FABC, FADE y FAEC, tracemos por FD el plano FDHG paralelo á la recta EC, y por último tracemos las rectas AG y EG; hecho esto, vemos, que los dos tetraedros FABC y FADE tienen por altura la del tronco y por bases respectivas

Fig. 213.



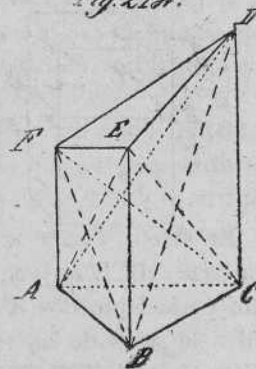
ABC y DEF que son las del tronco, y que el tetraedro FAEC es equivalente al EAGC por tener la misma base ACE y tener los vértices F y G en una paralela á la base, pero el tetraedro EAGC siendo el vértice E y la base AGC, tiene la altura del tronco y la base es media proporcional á las del tronco (143); luego queda demostrado el teorema.

ESCOLIO.—Como un tronco de pirámide se puede descomponer en troncos de tetraedros cuyas bases sumadas nos den las del tronco de pirámide, el teorema es cierto para un tronco de pirámide.

**331.** Todo tronco de prisma triangular, es equivalente á tres tetraedros que tengan por base la del prisma y cuyos vértices sean los de la sección oblícua.

En efecto, figura 214, sea el tronco de prisma triangular ABCDEF, tracemos los planos AEC, AED y EFC, y las rectas BD y BF; hecho esto vemos, que el tronco queda descompuesto en los tetraedros, EABC que tiene por base ABC y por vértice E, EACD equivalente al DABC que tiene por base ABC, y por vértice D, y el tetraedro EADF equivalente al EFAC y este equivalente al FABC que tiene por base ABC y por vértice F; luego queda demostrado el teorema.

Fig. 214.




LECCIÓN 39.

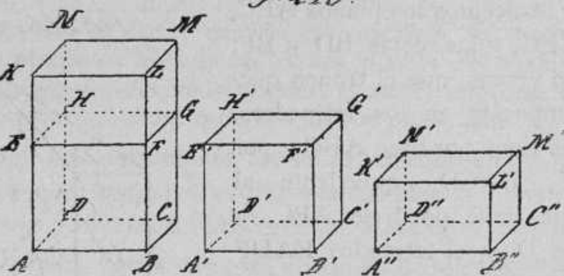
**Medida de los cuerpos.**

**332.** Ya sabemos que volumen de un cuerpo es su medida (29), y que en un paralelepípedo, por tener dos caras opuestas cualquiera iguales, se podría tomar como bases dos caras opuestas, siendo la altura la distancia entre las bases; pero en el paralelepípedo recto rectangular ó paralelepído rectángulo, las tres aristas que concurren en un vértice cualquiera son perpendiculares entre sí, siendo por tanto una de ellas la altura y las otras dos determinan la base, de aquí el que á las tres se acostumbre á llamarlas sus *dimensiones*. La relación entre los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos y sus dimensiones, ya sean estas, tres, dos, una ó ninguna iguales, y la lección anterior, es el fundamento de la medida de los cuerpos; debiendo tener en cuenta lo expuesto (249, 250 y 252 1.$^{er}$ Curso) respecto á cuando una cantidad es proporcional á otras varias.

**333.** Un paralelepípedo rectángulo que tiene igual base que otros dos y cuya altura es la suma de las alturas de los otros dos, es igual á la suma de ellos.

En efecto, figura 215, sea el paralelepído rectángulo AM,

Fig. 215.




cuya base ABCD es igual á las bases A'B'C'D' y A''B''C''D'', de los paralelepípedos A'G' y A''M', y en que la altura AK es igual á la suma de las A'E' y A''K' de los paralelepípedos A'G' y A''M'; si tomamos sobre AK una parte AE igual á A'E', EK será igual á A''K', y trazando por E un plano paralelo á las bases, resulta descompuesto el paralelepípedo AM en dos paralelepípedos AG y EM que tienen respectivamente igual base y altura que los A'G' y A''M'; luego puesto que AG y EM componen AM, este será la suma de A'G' y A''M'.

COROLARIOS.—1.º Dos paralelepípedos rectángulos de igual base, son proporcionales á sus alturas; pues hay correspondencia en la igualdad, y en la suma (126, E.º). También se dice, dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones iguales, son proporcionales á la tercera.

2.° Dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimensión igual, son proporcionales á los productos de las otras dos dimensiones; pues según el corolario anterior, si representamos por P y P′ dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, y sus dimensiones respectivas por $a, b, c$ y $a', b', c'$, decimos que $P : P' = bc : b'c'$; desde luego si representamos por $P''$ un tercer paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones sean $a, b, c'$, se tiene $P : P'' = c : c'$ y $P'' : P'' = b : b'$, multiplicando ordenadamente estas dos igualdades y suprimiendo el factor común $P''$ de los dos términos del primer miembro se obtiene $P : P' = bc : b'c'$.

3.° Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus tres dimensiones; pues según los corolarios anteriores, si representamos por P y P′ los paralelepípedos rectángulos, y sus dimensiones respectivas por $a, b, c$ y $a', b', c'$, decimos que $P : P' = abc : a'b'c'$; desde luego si representamos por $P''$ un tercer paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones sean $a, b, c'$, se tiene $P : P'' = c : c'$, y $P'' : P' = ab : a'b'$, multiplicando ordenadamente estas dos igualdades y suprimiendo el factor común $P''$ de los dos términos del primer miembro se obtiene $P : P'' = abc : a'b'c'$.

4.° Dos prismas que tienen dos dimensiones iguales, son proporcionales á la tercera: si tienen una dimensión igual, son proporcionales al producto de las otras dos: y si no tienen ninguna dimensión igual, son proporcionales al producto de las tres. Puesto que los paralelepípedos rectángulos son prismas, y dos prismas de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.

5.° Dos pirámides que tienen dos dimensiones iguales, son proporcionales á la tercera: si tienen una dimensión igual, son proporcionales al producto de las otras dos: y si no tienen ninguna dimensión igual, son proporcionales al producto de las tres. Puesto que todo tetraedro es equivalente á la tercera parte de un prisma de la misma base y altura, y los tetraedros son pirámides.

**334**. Las unidades de volumen en todos los sistemas de mensuración son, por regla general, cubos que tienen por arista las unidades lineales (85, 1.$^{er}$ curso); una vez que el cubo es el exaedro regular, y para su determinación es suficiente conocèr la arista, además como paralelepípedo conocemos, según concluimos de ver, las relaciones con sus aristas.

La relación de un cuerpo con la unidad de volumen, expresa su medida ó lo que es lo mismo su *volumen;* y como la investigación del volumen de un cuerpo se reduce á saber cuántos cubos, cuyo lado sea una unidad lineal, contiene; de aquí que se llame, *cubatura* ó *cubicación* de un cuerpo el resultado de esa investigación.

**335**. El volumen de un paralelepípedo rectángulo, es igual al producto de sus tres dimensiones ó al producto de su base por su altura. Puesto que si llamamos P al paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones sean $a, b, c,$ y C el cubo cuyas dimensiones sean 1, 1, 1; tendremos (333, C.° 3.°), $P : C = abc : 1$. pero $P : C$ es el volumen del paralelepípedo rectángulo; luego el volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.

COROLARIOS.—1.° El volumen de un cubo, es igual á la tercera potencia de su arista. Pues el cubo es un paralelepípedo rectángulo en que las dimensiones son iguales.

2.° El volumen de un prisma cualquiera, es igual al producto de sus tres dimensiones ó al producto de su base por su altura. Pues en virtud de (333, C.° 4.°), podemos hacer el mismo razonamiento que en el teorema.

3.° El volumen de un tetraedro ó pirámide cualquiera, es igual al tercio del producto de sus tres dimensiones ó al tercio del producto de su base por su altura. Pues toda pirámide es el tercio de un prisma de la misma base y altura (328, y 333, C.° 5.°).

4.° El volumen de un cono circular recto, es igual al tercio de la altura por la base. Pues este cono se puede considerar como una pirámide regular de indefinido número de caras (315).

5.° El volumen de un cilindro circular recto, es igual al producto de su base por su altura. Pues este eilindro se puede