CURSO
MATEMÁTICO.

TOMO I.

CURSO MATEMÁTICO
PARA LA ENSEÑANZA
DE LOS CABALLEROS CADETES
DEL REAL COLEGIO MILITAR
DE ARTILLERÍA.

Por DON PEDRO GIANNINI, *Profesor primero de dicho Colegio, Socio de la Academia del Instituto de Bolonia, &c.*

TOMO I.

MADRID. MDCCLXXIX.

Por D. Joachin Ibarra, Impresor de Cámara de S. M. y de dicho Real Colegio Militar.

Con superior permiso.

PRÓLOGO.

En este primer tomo se contienen los Elementos de Geometría Plana y Sólida; las principales propiedades de los Senos, Cosenos, Tangentes, &c. circulares, y la relacion de estas cantidades con los lados de los triángulos rectilineos; como tambien las propiedades principales de las Secciones Cónicas.

Los Elementos de Geometría son de Euclides el Matemático que floreció en Alexandría, siendo Tolomeo Lago Rey de Egipto, de cuya gracia y familiaridad gozaba. Yo los he compendiado, usando de los signos algebráicos, acortando unas demostraciones, y substituyendo otras mas sencillas, para que con la mayor brevedad puedan mas bien comprenderse. He añadido diferentes nociones, y conocimientos útiles para la mejor inteligencia de los tratados siguientes, como tambien el método moderno de las primeras y últimas razones: método utilísimo para poder adelantar las doctrinas Geométricas, y necesario para la perfecta inteligencia de los nuevos Cálculos Diferencial é Integral. He aplicado dicho método á algunas proposiciones del Libro XII, anteponiéndolo á él de Exhaustion de los Antiguos, á fin de que los jóvenes geómetras aprendan entrambos métodos, de cuya comparacion inferirán facilmente que el moderno es una abreviacion del antiguo, y que uno y otro son igualmente geométricos. He omitido los Libros VII, VIII, IX, y X, porque en los tres primeros trata Euclides de la proporcion de los números, y en el décimo de las magnitudes Conmensurables é Inconmensurables. En lo demas, la Geometría de Euclides no necesita mas elogio que la sola consideracion de que por espacio de cerca de dos mil años ha sido la que únicamente se ha estudiado por todos aquellos que han querido instruirse á fondo en esta facultad, habiendo sin duda habido en este intervalo de tiempo Geómetras de mucho mérito; y que no obstante la multitud de los nuevos cursos de Geometría, que desde el año de 1650 hasta el presente han salido, Newton, Leibnitz y otros insignes Matemáticos posteriores recomiendan vivamente el estudio de aquella.

A continuacion de estos Elementos expongo las principales propiedades de los Senos, Cosenos, Tangentes, &c. circulares, y la relacion de estas cantidades con los lados de los triángulos rectilineos, reservando para otro lugar el método de calcular las Tablas Trigonométricas, y las prácticas que corresponden á estas doctrinas.

Ultimamente en la Teoría de las Secciones Cónicas he demostrado las propiedades principales de la Parábola, Elipse é Hipérbola, ya sean referidas á sus exes, ó á sus diámetros. En los tratados siguientes haré ver otras muchas propiedades de estas tres curvas por medio de los cálculos modernos, los quales serán aplicados á doctrinas útiles é interesantes, para que moviendo de este modo la curiosidad de los jóvenes que estudian, puedan hacerse cargo de los dos métodos Sintético, y Analítico.

En la composicion de estos tratados (que fueron hechos para explicarlos privadamente á los Caballeros Cadetes en el Colegio) me he valido de las Obras Geométricas de Clavio, Tacquet, Barrow, Simson, Grandi y otros, los que cito aquí con la mayor complacencia para manifestar la grande estimacion en que los tengo, y lo que les pertenece.

ERRATAS.

Pág.	*Linea.*	*Errata.*	*Correccion.*
23.	11.	serán	será
36.	4.	paralela á	respectivamente paralelas á las
36.	16.	tírese	tírense
44.	18.	*EC*	*FC*
47. *Fig.* 68.	escríbase la letra *F* en lugar de la *E* en el quadrado *BG*,		
47.	19.	Levántense	Levántese
52.	20.	uno	por uno
52.	21.	por *Fig.*	*Fig.*
72.	15.	Tirada *AC*,	Tiradas *AC* y *BD*,
87.	7.	(195)	(197)
87.	23.	(196)	(198)
93.	6.	en (202)	en él (202)
123. 224.			123. 124
182.	6.	paralelas	paralela
185.	6.	nna	una
190.	2.	*BAD*,	*BAC*,
191.	7.	Si . . . de las	Si son ademas los ángulos $A + B + HCF < 4$ rectos, y de las
200.	4.	en los los	en los
207.	10.	(412)	(409)
254.	14.	*Fig.* 19.	*Fig.* 20.
277.	25.	$+ 2\ Cc. A \times Sc\ DF$	$+ 2 Cc. DA \times Sc. DF$
288.	18.	tienen	tiene
298.	16.17.	será $\overline{KF}^2$ .... luego	será $KF = BF$; pero $BF = 2AF$: luego
299.	1.	$\overline{PM}$	$\overline{PM}^2$
331.	22.23.	de dichos diámetros,	de dicho diámetro,
354.	5.	como el	como la inversa de el
354.	8. 9.	$=\overline{HL}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2$.	$=\overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2$.
374.	23.	$\overline{PL}$.	$\overline{PL}^2$.

LIBRO PRIMERO.

DEFINICIONES.

1 Punto en la magnitud es un signo sin parte alguna.

2 Linea es una longitud sin latitud.

3 Los extremos de la linea son puntos.

4 Linea recta es la que se extiende igualmente entre sus puntos.

5 Superficie es una extension en quien solamente concebimos longitud, y latitud.

6 Los extremos de la superficie son lineas.

7 Superficie plana es la que está igualmente extendida entre sus lineas.

8 Angulo plano es la inclinacion mutua de dos lineas, que se encuentran en un plano, y no tienen una misma direccion.

9 Angulo rectilineo es el formado por dos rectas: estas suelen llamarse lados del ángulo: y el punto de su concurso vértice del ángulo.

Es de notar, que la magnitud de los ángulos, como mas ampliamente verémos despues, no se aprecia por la extension de sus lados, sino por la mayor abertura de ellos. Igualmente se debe advertir, que aunque los ángulos se nombran, ó señalan por una sola letra, que se pone en su vértice, sin embargo quando hay dos, ó mas ángulos con un vértice comun, se nombran para evitar equivocacion con tres letras, estando precisamente en medio la del vértice; por esta razon el ángulo que forman las rectas *CG*, *AG* (*Fig.* 1.) se nombra *CGA*, ó *AGC*.

10 Si una linea recta *CG*, insistiendo sobre otra *AB*, formare los ángulos *CGA*, *CGB* (*Fig.* 1) de uno y otro lado iguales entre sí, se llamarán estos ángulos rectos, y la recta *CG* perpendicular á *AB*.

11 Angulo obtuso es el mayor que un recto; y tal es el ángulo *DGA*. *Fig.* 2.

12 Angulo agudo es el menor que un recto; y tal es el ángulo *DGB*. *Fig.* 2.

13 Término se llama el extremo de alguna cosa.

14 Figura es una extension comprehendida, ó cerrada por uno, ó muchos términos.

15 Círculo es una figura plana comprehendida entre una sola linea *ABCD* (*Fig.* 3), que se llama circunferencia, ó periferia, á la qual todas las rectas *EA*, *EB*, *EC*, &c. tiradas desde un punto *E*, que está dentro de la figura, son iguales entre sí.

16 Dicho punto *E* se llama centro del círculo.

17 Diámetro del círculo es qualquiera recta, que pasando por el centro *E*, se termina por ambas

partes en la circunferencia, y tal es la recta *AEC. Fig.* 3.

Las rectas tiradas desde el centro á la circunferencia, suelen llamarse radios ó semidiámetros; y tales son *EC*, *EB*.

18 Semicírculo es la figura contenida por el diámetro, y la parte de la circunferencia cortada por este; y tal son *ABC*, *ADC*. *Fig.* 3.

19 Figuras rectilineas son las que están comprehendidas entre lineas rectas.

20 Figuras triláteras, que comunmente se llaman triángulos, son las terminadas por tres rectas.

21 Quadriláteras son las que lo están por quatro.

22 Multiláteras, y comunmente polígonos, son las que lo están por mas de quatro rectas. El polígono de cinco lados se llama pentágono, el de seis hexâgono, el de siete heptágono, &c.

23 Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales, como el triángulo *A. Fig.* 4.

24 Triángulo isósceles es el que tiene solo dos lados iguales, como el triángulo *B. Fig.* 5.

25 Triángulo escaleno es el que tiene sus tres lados desiguales, como *C. Fig.* 6.

Estas tres denominaciones son las que tiene un triángulo por la diferencia de sus lados, teniendo tambien por la de sus ángulos estas otras tres.

26 Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, como *D*. *Fig.* 7.

27 Triángulo obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso, como *E*. *Fig.* 8.

28 Triángulo acutángulo es el que tiene los tres ángulos agudos, como *F*. *Fig.* 9.

29 Quadrado es una figura quadrilátera, cuyos quatro ángulos son rectos, y los quatro lados iguales entre sí, como *ABCD*. *Fig.* 10.

Generalmente se llaman equiláteras las figuras que tienen todos sus lados iguales entre sí; y equiángulas las que tienen igualmente todos sus ángulos iguales.

30 Quadrilongo, ó simplemente rectángulo es una figura quadrilátera, que tiene los quatro ángulos rectos, pero no todos los lados iguales, como *EFGH*. *Fig.* 11.

31 Rombo es un quadrilátero, cuyos lados son todos iguales, pero sus ángulos no son rectos, como *K*. *Fig.* 12.

32 Romboyde es un quadrilátero, que tiene los lados opuestos iguales, como *MNOP*. *Fig.* 13.

33 Trapecio es qualquiera figura quadrilátera, que no esté comprehendida en las definiciones anteriores, como *QRST*. *Fig.* 14.

34 Paralelas son las rectas, que estando sobre

Fig. 1.

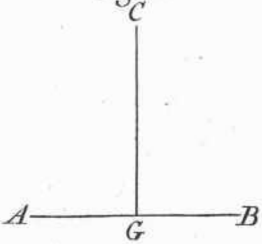


Fig. 2.

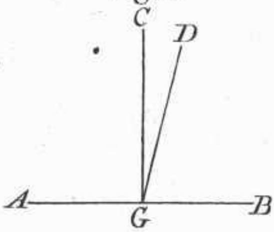


Fig. 3.

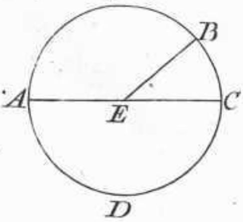


Fig. 4.

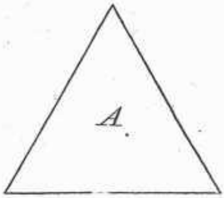


Fig. 5.

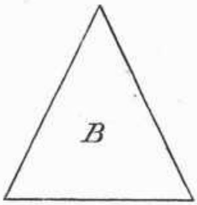


Fig. 6.

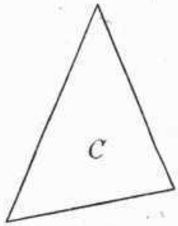


Fig. 7.

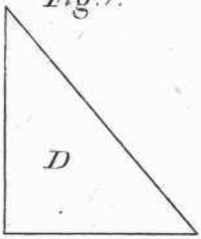


Fig. 8.

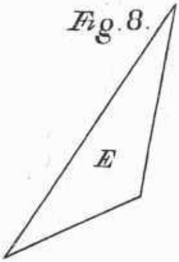


Fig. 9.

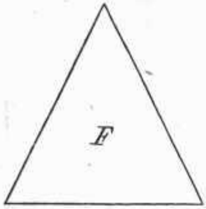


Fig. 10.

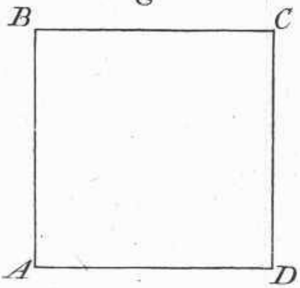


Fig. 11.

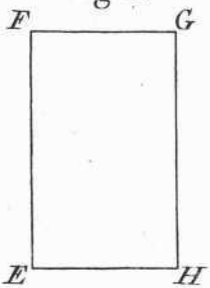
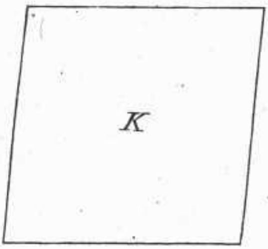
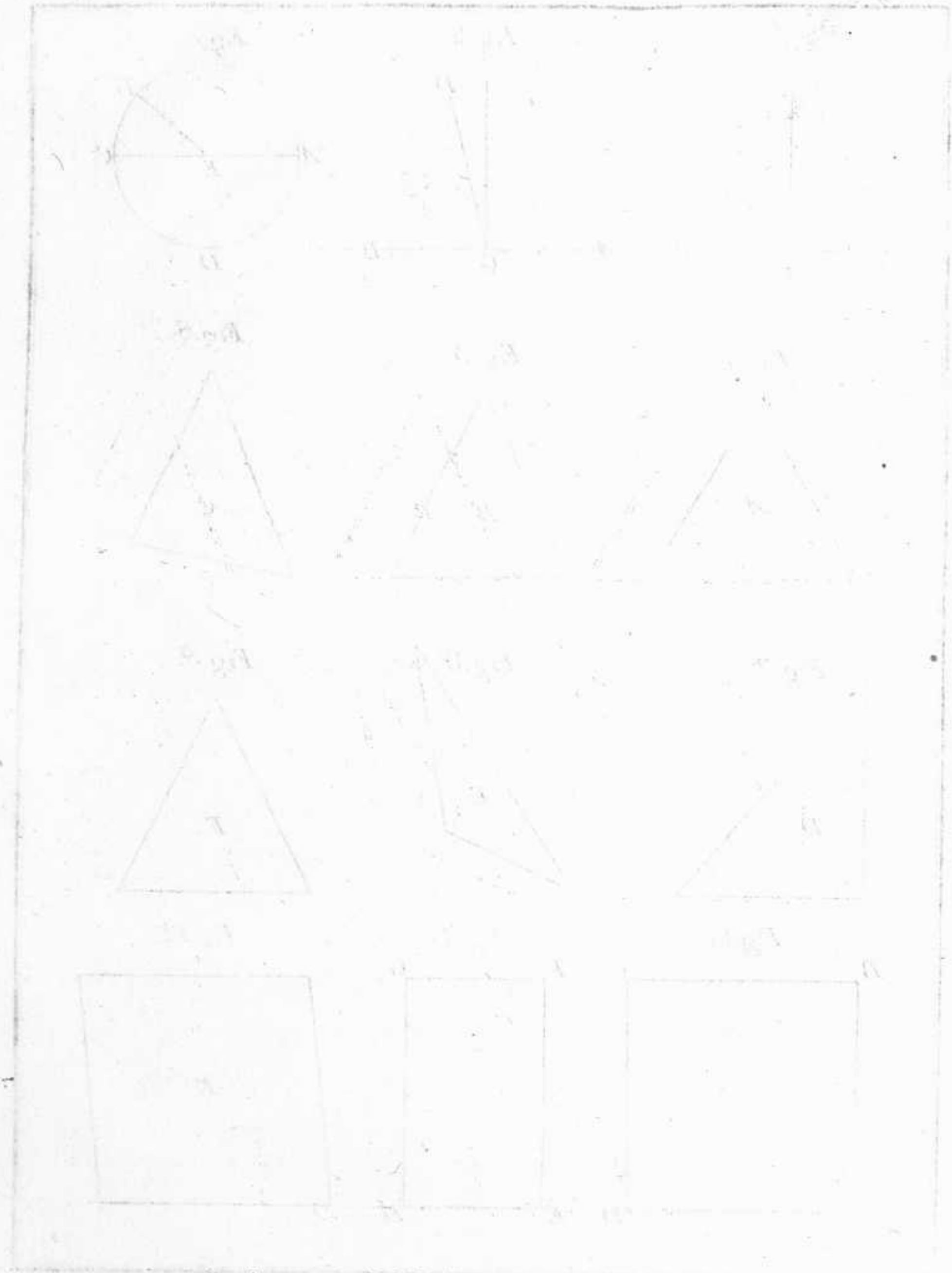


Fig. 12.





un mismo plano , aunque se prolonguen al infinito por uno y otro lado , nunca concurren , y tales son *CD* , *AB*. *Fig.* 15.

35 Paralelogramo es todo quadrilátero, que tiene sus lados opuestos paralelos, como *ABCD* (*Fig.* 16). La recta, que une sus ángulos opuestos , se llama diámetro, ó diagonal , y tal es *BD*. Los paralelogramos se nombran por las quatro letras puestas en sus quatro ángulos , ó solo por dos , que estén en ángulos opuestos.

36 Si en un paralelogramo *AC* (*Fig.* 16) se tira la diagonal *BD* , y por un punto de ella *E* dos rectas *FG* , *HK* paralelas á los lados *AD* , *AB*, dichas dos rectas dividen la figura en quatro paralelogramos , de los quales los dos *FH* , *KG* , por quienes pasa la diagonal , se llaman circadiámetros , y los otros dos complementos.

Postulado se llama una proposicion , por la qual se supone hecha , ó se pide que se haga una operacion evidentemente factible.

Axîoma es una proposicion manifiesta por sus términos.

Theorema se llama una proposicion , que enuncia y demuestra una verdad, ó propiedad del asunto que se trata.

Problema es una proposicion , que enuncia una operacion, que se debe hacer, ó una verdad, que se ha de hallar.

Corolario se llama una conseqüencia, que se infiere facilmente de un theorema demostrado, ó de un problema resuelto.

Lema es una proposicion preparatoria, que sirve para demostrar otra, que directamente pertenece á la materia que se trata. El lema puede ser de la clase de los theoremas, ó de los problemas.

Escolio es una anotacion, que se añade algunas veces al fin de las proposiciones, para ilustrar las doctrinas, que en ellas se enseñan.

POSTULADOS.

37 Que se pueda tirar una recta de un punto á otro.

38 Que se pueda prolongar una recta terminada por qualquier lado quanto se quiera.

39 Que con qualquier centro, é intervalo, que determine el radio, se pueda describir un círculo.

AXIOMAS.

40 Las magnitudes iguales á una tercera son iguales entre sí.

41 Si á magnitudes iguales se añaden otras iguales, los todos serán iguales.

42 Si de magnitudes iguales se quitan magnitudes iguales, los residuos serán iguales.

43 Si á magnitudes desiguales se añaden otras iguales, los todos serán tambien desiguales.

44 Si de magnitudes desiguales se quitan magnitudes iguales, los residuos serán desiguales.

45 Las magnitudes duplas, triplas, &c. de una misma magnitud, ó de otras iguales, son tambien iguales.

46 Las magnitudes, que son mitades, tercios, &c. de otras iguales, ó de una misma, son tambien iguales.

47 Las magnitudes, que sobrepuestas se ajustan exâctamente por todas partes, son iguales.

Este axîoma tiene uso, y vale en rectas, ángulos y superficies; pero el inverso, á saber, que las magnitudes iguales sobrepuestas se ajustan, no vale sino en rectas y ángulos.

48 El todo es mayor que su parte.

49 Dos lineas rectas no tienen un segmento, ó parte comun.

50 Si dos rectas que se tocan en un punto se prolongan, se cortarán necesariamente en dicho punto.

51 Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

52 Si cayendo una recta *BA* (*Fig.* 17), so-

bre otras dos *AD*, *BC*, forma los ángulos internos ácia una misma parte *CBA*, *DAB* menores juntos que dos rectos, prolongadas estas rectas al infinito, vendrán á concurrir por la parte que mira á dichos ángulos.

Este axîoma no es tan claro, que en sentir de la mayor parte de los Geómetras no necesite demostracion: esta se dará en su lugar.

53 Dos lineas rectas no pueden cerrar espacio.

54 Si á magnitudes iguales se añaden desiguales, el exceso de los todos será igual al de las magnitudes añadidas.

55 Si á magnitudes desiguales se añáden iguales, el exceso de las magnitudes que resultan será igual al de las desiguales.

56 Si de magnitudes iguales se quitan desiguales, el exceso de los residuos será igual al de las magnitudes restadas.

57 Si de magnitudes desiguales se quitan iguales, el exceso de los residuos será igual á el de los todos.

58 El todo es igual á todas sus partes juntas.

59 Si de dos magnitudes, dupla una de otra, se restan otras dos, pero de modo que la que se quite de la mayor sea dupla de la que se quite de la menor, tambien será el un residuo duplo del otro.

„ Con el fin de evitar prolixidad , se usará en
„ adelante de algunos signos comunes en las matemáticas , y serán:

„ 1.° Para representar que una magnitud es
„ igual á otra , nos valdrémos del signo de dos líneas paralelas y orizontales en esta forma $=$; así
„ $A=B$ querrá decir, que la magnitud A es igual á B.

„ 2.° Para decir que una magnitud está sumada
„ con otra , usarémos del signo de una cruz , que
„ tenga un brazo orizontal , y otro vertical en esta
„ forma $+$; así $A+B$ querrá decir , la magnitud
„ A añadida, ó sumada con B , y se leerá A mas B.

„ 3.° Para representar que de una magnitud se
„ ha de restar otra , se usará del signo de una recta
„ orizontal en esta forma $-$; así $A-B$ querrá decir,
„ que de A se ha de restar B , y se leerá A menos B.

„ 4.° Para representar la desigualdad de dos
„ magnitudes , se usará de este signo $>$. La cantidad mayor se pone por el lado de la abertura,
„ la menor por el de la punta ; así $A>B$, $B<A$
„ significa que A es mayor que B , ó B menor que A,
„ y se lee A mayor B , ó B menor A.

„ 5.° Para representar un rectángulo se usará de
„ un aspa, ó cruz inclinada, en esta forma $\times$ entre las
„ letras que nombren dos lados contiguos del rectángulo , así $EH \times HG$ significa el rectángulo $EHGF$:

„ lo propio se expresará con un punto, como *EH* . *HG*
„ (*Fig.* 11).

„ 6.º $\overline{AD}^2$ significa el quadrado *ABCD*, que
„ tiene por base *AD* (*Fig.* 10).

PROPOSICION I.

60 Sobre una recta dada *AB* construir un triángulo equilátero. *Fig.* 18.

Haciendo centro en *A*, con el intervalo *AB* descríbase (39) el círculo *ABD*; asimismo haciendo centro en *B*, con el intervalo *BA* descríbase el círculo *BAE*: desde el punto *C*, donde se cortan las circunferencias de dichos círculos, tírense (37) las rectas *CA*, *CB* á los puntos *A*, *B* extremos de la recta dada; y se tendrá formado el triángulo equilátero *ACB*. La recta $AC = AB$ (15) por ser radios de un mismo círculo *ABCD*; pero $AB = BC$ por ser radios de un mismo círculo *BACE*: luego será (40) $AC = AB = BC$; y por consiguiente equilátero el triángulo *ABC* construido sobre la recta dada *AB*. Que es &c.

PROPOSICION II.

61 Desde un punto dado *A* tirar una recta igual á otra dada *CB*. *Fig.* 19.

Tírese (37) la recta *CA*, y constrúyase sobre ella (60) el triángulo equilátero CDA; y haciendo centro en C, con el intervalo CB descríbase (39) el círculo $CBEL$: prolónguese DC (38) hasta encontrar la circunferencia en E: asimismo haciendo centro en D, con el intervalo DE descríbase el círculo DEH: prolónguese DA hasta encontrar la circunferencia en G: y será AG la recta que se pide. Siendo DG, y DE radios del círculo DEH, será (15) $DG = DE$; pero $DA = DC$ (23) por ser el triángulo CDA equilátero (const.): luego será (42) $AG = CE$, y por ser CB, CE radios del círculo CBL, es $CB = CE$: luego será (40) $AG = CB$. Que es &c.

PROPOSICION III.

62 Dadas dos rectas desiguales A y BC cortar de la mayor BC una parte igual á la menor A. *Fig.* 20.

Del punto B tírese (61) la recta $BD = A$; y haciendo centro en B con el intervalo BD, descríbase (39) el círculo BDE, cuya circunferencia cortará la parte BE que se pide. Por ser (15) $BE = BD$, y (const.) $A = BD$, será (40) $BE = A$. Que es &c.

PROPOSICION IV.

63 Si dos triángulos BAC, EDF tienen dos

lados del uno respectivamente iguales á dos del otro, y los ángulos comprehendidos por dichos lados son tambien iguales; esto es, si $AB = ED$, $AC = DF$, y el ángulo $A = D$, dichos triángulos serán totalmente iguales, es decir que será la base $BC = EF$, el triángulo $BAC = EDF$, y los ángulos $B = E$, $C = F$, que son los opuestos á los lados iguales. *Fig.* 21.

Si se coloca el punto *D* sobre *A*, y la recta *DE* sobre la *AB*, caerá tambien el punto *E* sobre *B*, por ser la recta $DE = AB$ (sup.). Asimismo por ser el ángulo $D = A$, caerá la recta *DF* sobre la *AC*, como tambien el punto *F* sobre *C*, pues es $DF = AC$ (sup.) : luego las rectas *EF*, *BC* se ajustarán (53), y serán iguales (47): por consiguiente los triángulos *EDF*, *BAC*, los ángulos *E*, *B*, tambien los ángulos *F*, *C* se ajustarán entre sí, y serán iguales. Que es &c.

PROPOSICION V.

64 En el triángulo isósceles *BAC*, cuyos lados *AB*, *AC* son iguales, los ángulos *ABC*, *ACB* sobre la base son iguales; y prolongados dichos lados, tambien serán iguales los ángulos *DBC*, *ECB* formados baxo de la base. *Fig.* 22.

Tómese (62) $DA = AE$, y por ser $AB = AC$

(sup.), quedará (42) $BD = CE$: tírense (37) las rectas EB, CD.

Los triángulos CAD, BAE tienen el lado $AC = AB$ (sup.), el lado $AD = AE$ (const.), y el ángulo A comun: luego tendrán (63) la base $CD = BE$, el ángulo $D = E$, y el ángulo $ACD = ABE$. Y por lo tanto los triángulos CDB, CEB tienen el lado $CD = BE$, $BD = CE$, y el ángulo $D = E$: luego será (63) el ángulo $DCB = EBC$, y el ángulo $DBC = ECB$. Que es la segunda parte de la proposicion.

Se ha demostrado antes que el ángulo $ABE = ACD$, y que el ángulo $EBC = DCB$; por consiguiente quitando unos de otros, quedará (42) el ángulo $ABC = ACB$. Que es &c.

COROLARIO.

65 De esta proposicion se infiere, que el triángulo equilátero es equiángulo.

PROPOSICION VI.

66 Si un triángulo BAC tiene dos ángulos ABC, ACB iguales, los lados AC, AB opuestos á dichos ángulos tambien serán iguales. *Fig.* 23.

Porque si no, será uno de los lados AB mayor que el otro AC, y entonces córtese (62)

BD = *AC*, y tírese (37) la recta *DC*. En los triángulos *DBC*, *ACB* es *BD* = *AC* (const.), el lado *BC* comun, y los ángulos *DBC*, *ACB* iguales (sup.): luego serán (63) los triángulos *DBC*, *ABC* iguales; esto es, el menor igual al mayor, lo que es imposible (48): luego &c.

COROLARIO.

67 Síguese que el triángulo equiángulo es equilátero.

PROPOSICION VII.

68 De los extremos de una recta *AB*, base del triángulo *ABC*, no pueden salir otras dos rectas ácia la misma parte, que siendo iguales á los respectivos lados del triángulo, concurran en otro punto diverso del vértice *C*. *Fig.* 24, 25, 26.

Si fuese posible, que el concurso de las rectas *AD*, *BD* respectivamente iguales á los lados *AC*, *BC* fuese en otro punto *D*, se hallaría este ó en uno de los lados del triángulo *ACB* (*Fig.* 24), ó dentro de este triángulo (*Fig.* 25), ó fuera de él (*Fig.* 26).

I. Si el punto *D* (*Fig.* 24) cayese en el lado *AC*, no sería (48) *AD* = *AC*.

II. Si el punto *D* (*Fig.* 25) está dentro del triángulo *ACB*, tírese (37) *CD*, y prolónguen-

Fig.13.

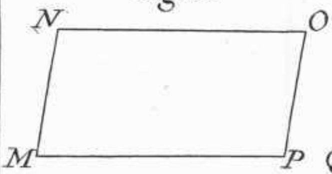


Fig.14.

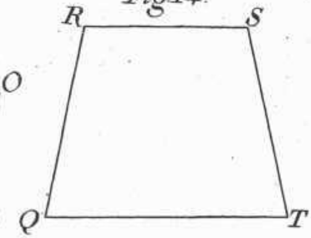


Fig.15.

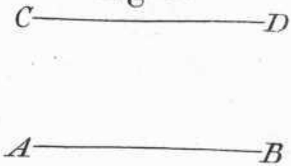


Fig.16.

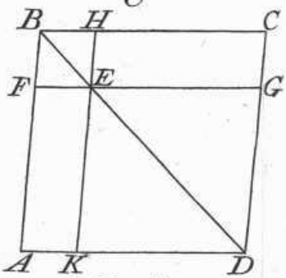


Fig.17.

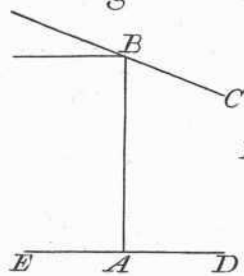


Fig.18.

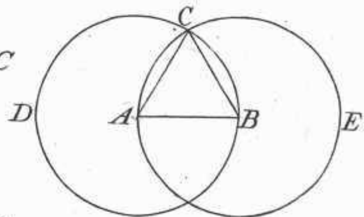


Fig.19.

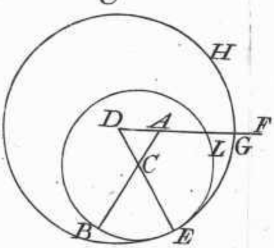


Fig. 20.

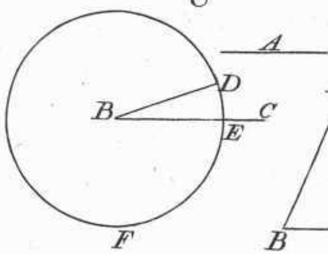


Fig. 21.

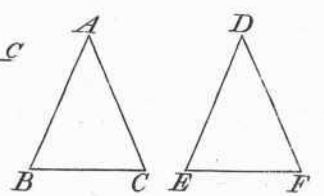


Fig. 22.

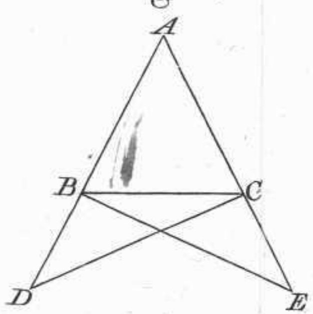


Fig. 23.

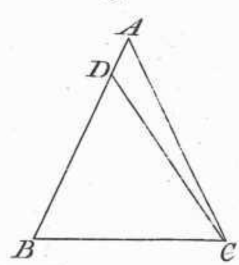
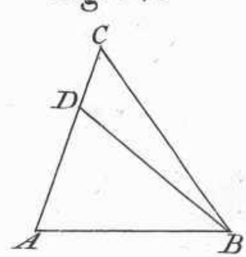


Fig. 24.



se (38) las rectas *BD*, *BC*. Siendo $AD = AC$ será el triángulo *CAD* isósceles ; y por consiguiente (64) el ángulo $ADC = ACD$. Asimismo por ser $BC = BD$, será el ángulo $FDC = ECD$; pero (48) el ángulo $ADC > FDC$: luego será el ángulo $ACD > ECD$; esto es, la parte mayor que el todo, lo que es imposible (48): luego &c.

III. Si el punto *D* (*Fig.* 26) está fuera del triángulo *ACB*, tírese (37) *CD*. Siendo $AC = AD$, será el triángulo *CAD* isósceles, y por consiguiente (64) el ángulo $ADC = ACD$. Asimismo por ser $BC = BD$, será el ángulo $BDC = BCD$; pero (48) el ángulo $BDC > ADC$: luego será el ángulo $BCD > ACD$; esto es, la parte mayor que el todo, lo que es imposible (48): luego &c.

PROPOSICION VIII.

69 Si dos triángulos *ABC*, *DEF* tienen los tres lados del uno iguales á los tres lados del otro; esto es, $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, tendrán tambien iguales los ángulos *A*, *D* opuestos á los lados iguales *BC*, *EF*, y así de los demas ángulos. *Fig.* 27.

Si se sobrepone la base *EF* á la base *BC*, se ajustarán (47) por ser iguales ; y siendo $DE = AB$, $DF = AC$, el punto *D* caerá (68) sobre el punto *A*, y se ajustarán los tres ángulos *E*, *D*, *F* con los tres ángulos *B*, *A*, *C*; y por consiguiente (47) serán iguales uno á uno. Que es &c.

PROPOSICION IX.

70 Dividir un ángulo rectilineo *BAC* en dos partes iguales. *Fig.* 28.

Tómese (62) $AD = AE$, y tírese la recta *DE*, sobre la qual constrúyase (60) el triángulo equilátero *DFE*, y tírese *AF*, que dividirá el ángulo *BAC* en dos partes iguales. Los triángulos *DAF*, *EAF* tienen el lado $AD = AE$ (const.), el lado *AF* comun, y la base $DF = FE$ (23): luego será (69) el ángulo $DAF = EAF$. Que es &c.

PROPOSICION X.

71 Dividir una recta *AB* en dos partes iguales. *Fig.* 29.

Sobre la recta dada *AB* constrúyase (60) el triángulo equilátero *ACB*, y divídase (70) el ángulo *ACB* en dos partes iguales por la recta *CD*, que dividirá tambien á *AB* por medio en el punto *D*.

Los triángulos *ACD*, *BCD* tienen el lado $AC = CB$ (23), el lado *CD* comun, y el ángulo $ACD = BCD$ (const.): luego será (63) $AD = DB$. Que es &c.

PROPOSICION XI.

72 Dada una recta *AB*, levantar una perpendicular en un punto *C* dado en ella. *Fig.* 30.

Tómese (62) $CD = CE$: sobre *DE* constrúyase (60) el triángulo equilátero *DFE*, y tírese *FC*, que será perpendicular á *AB*.

Los triángulos *DCF*, *ECF* tienen el lado $DF = FE$ (23), el lado *FC* comun, y el lado $CD = CE$ (const.): luego será (69) el ángulo $FCD = FCE$; y por consiguiente (10) *FC* perpendicular á *AB*. Que es &c.

PROPOSICION XII.

73. Desde el punto *C* dado fuera de una recta indefinita *AB*, baxar á ella una perpendicular *Fig.* 31.

Tómese qualquiera punto *D* baxo de la recta *AB*; y haciendo centro en *C* con el intervalo *CD*, descríbase el círculo *CDEF*, cuya circunferencia cortará la recta *AB* en los puntos *E*, *F* : divídase esta (71) en dos partes iguales *GE*, *GF*, y tírese *CG*, que será perpendicular á *AB*. Tiradas *CE*, *CF*, tendrán los triángulos *ECG*, *FCG* el lado $CE = CF$, $GE = GF$ (const.), y *CG* comun: luego será (69) el ángulo $EGC = FGC$; y por consiguiente (10) la recta *CG* perpendicular á *AB*. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

74 Si una recta *AB* insiste sobre otra *CD*; formará los ángulos *ABC*, *ABD* rectos, ó iguales juntos á dos rectos. *Fig.* 32.

Si los ángulos *ABC*, *ABD* son iguales, serán (10) ambos rectos; y si desiguales, levántese (72) del punto *B* la perpendicular *BE*, á la *CD*, y será el ángulo $CBA = CBE + EBA$: luego (41) los ángulos *CBA*, *ABD* juntos serán iguales á los tres ángulos *CBE*, *EBA*, *ABD*; pero los ángulos $EBA + ABD = EBD$: luego los ángulos *CBA*, *ABD* serán juntos iguales á los ángulos *CBE*, *EBD*, que son dos rectos. Luego &c.

COROLARIO I.

75 Se infiere, que si uno de los ángulos *ABD* es recto, tambien lo será el otro *ABC*, y si aquel agudo, este otro obtuso, y al contrario.

COROLARIO II.

76 Si dos, ó mas rectas insisten sobre otra en un mismo punto, todos los ángulos que formen en él, serán juntos iguales á dos rectos.

COROLARIO III.

77 Si dos, ó mas rectas se cortan en un mismo punto, serán los ángulos formados al rededor de dicho punto iguales á quatro rectos.

PROPOSICION XIV.

78 Si dos rectas *BC*, *BE*, que concurren en un mismo punto *B* de otra *BA*, formaren con ella los ángulos *ABC*, *ABE* iguales á dos rectos; dichas dos rectas *BC*, *BE* formarán una sola recta. *Fig.* 33.

Si no es asi, prolongada *CB* tomará la posicion *BD*, y los ángulos *ABC*, *ABD* juntos serán (74) iguales á dos rectos; pero los ángulos *ABC*, *ABE* juntos son tambien (sup.) iguales á dos rectos: luego serán los ángulos *ABC*, *ABE* iguales á los ángulos *ABC*, *ABD*; esto es, el todo igual á la parte, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION XV.

79 Si dos rectas *AB*, *CD* se cortan en el punto *E*, los ángulos verticalmente opuestos serán iguales; esto es, *AEC* = *BED*, *CEB* = *AED*. *Fig.* 34.

Insistiendo la recta *CE* sobre *AB*, forma (74) los ángulos *AEC*, *CEB* iguales á dos rectos: por lo mismo forma *BE* con *CD* los ángulos *CEB*, *BED* iguales á dos rectos: luego serán los ángulos *AEC*, *CEB* iguales á los ángulos *BEC*, *BED*; y quitado el comun *BEC*, quedará $AEC = BED$. Del mismo modo se demostrará ser el ángulo $CEB = AED$. Que es &c.

ESCOLIO.

80 Si en un punto *E* de la recta *AB*, insisten ácia diversas partes las *ED*, *EC* formando los ángulos *AED*, *BEC* iguales, serán una misma recta; es decir que prolongada la una se ajustará con la otra. Los ángulos $AED + DEB$ son iguales (74) á dos rectos: pero (sup.) $AED = CEB$: luego los ángulos $CEB + DEB$ iguales á dos rectos, y *CED* una misma recta (78).

PROPOSICION XVI.

81 Prolongado un lado *BC* de qualquier triángulo *ACB*, el ángulo externo *ACD* es mayor que qualquiera de los internos opuestos *CAB*, ó *CBA*. *Fig.* 35.

Tírese (71) la recta *BE*, que divida al lado *AC* por medio en *E*: prolónguese *BE*, de suerte que sea $EF = EB$, y tírese *FC*. En los triángulos *CEF*, *AEB* es (const.) $CE = EA$, $EF = BE$, y (79) el ángulo $CEF = AEB$: luego será (63) el ángulo $ECF = EAB$; pero el ángulo $ACD > ECF$: luego será el ángulo $ACD > BAE$, ó BAC. Con semejante preparacion se demostrará el ángulo $BCG > ABC$; pero (79) el ángulo $BCG = ACD$: luego será el ángulo $ACD > ABC$. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

82 Dos qualesquiera ángulos BAC, ACB de un triángulo BAC, son juntos menores que dos rectos. *Fig.* 36.

Prolónguese BC, é insistiendo AC sobre BD, serán (74) los ángulos $ACD + ACB$ iguales á dos rectos; pero (81) el ángulo $ACD > BAC$: luego serán los ángulos BAC, ACB menores que dos rectos. Que es &c.

COROLARIO I.

83 Se infiere, que en qualquier triángulo que tenga un ángulo recto, ú obtuso, los otros dos son agudos.

COROLARIO II.

84 Si una recta AC insiste sobre otra BD, formando con ella ángulos desiguales; esto es, ACD obtuso, ACB agudo; la perpendicular AE baxada desde qualquier punto de la AC á la BD, caerá ácia la parte del ángulo agudo ACB.

PROPOSICION XVIII.

85 En qualquier triángulo *ABC* el ángulo opuesto á mayor lado es mayor. *Fig.* 37.

Sea el lado $AC > AB$; será el ángulo $ABC > C$. Del mayor lado *AC* córtese (62) $AD = AB$, y tírese *DB*. Por ser $BA = AD$, será (64) el ángulo $ADB = ABD$; pero (81) el ángulo externo $ADB > C$: luego será $ABD > C$; por consiguiente el ángulo *ABC* será mucho mayor que el ángulo *C*. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

86 En qualquier triángulo *ABC* el lado opuesto á mayor ángulo es mayor. *Fig.* 38.

Sea el ángulo $A > C$; será $BC > BA$: pues si no fuese así, sería el lado *AB* mayor, ó igual á *BC*: pero no puede ser mayor, porque resultaría (85) el ángulo $C > A$ contra lo supuesto; ni tampoco igual, porque sería (64) el ángulo $C = A$: luego será $AB < BC$. Que es &c.

PROPOSICION XX.

87 Dos qualesquiera lados *BA*, *AC* de un triángulo *BAC* son juntos mayores que el tercero. *Fig.* 39.

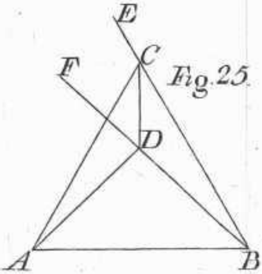
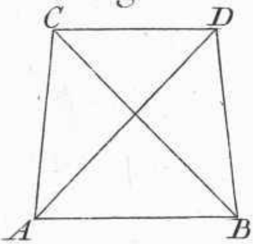


Fig. 25.

Fig. 26.



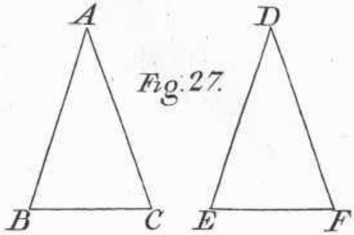


Fig. 27.

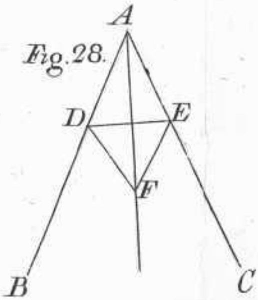


Fig. 28.

Fig. 29.

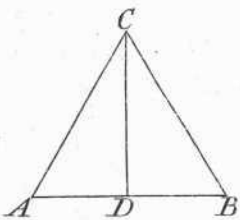


Fig. 30.

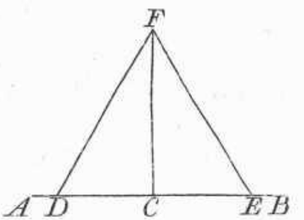
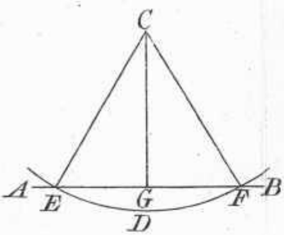


Fig. 31.



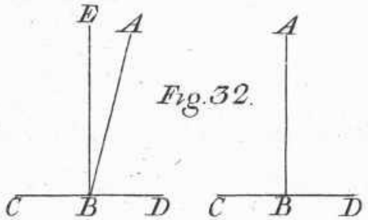
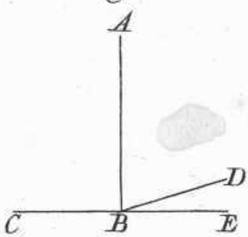


Fig. 32.

Fig. 33.



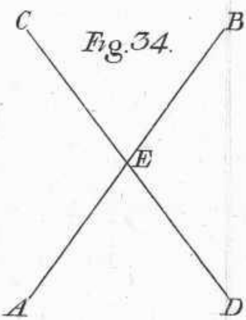


Fig. 34.

Fig. 35.

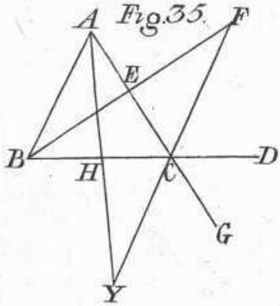
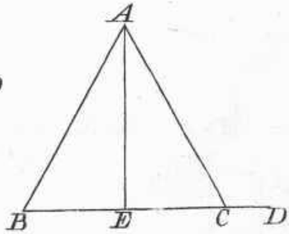


Fig. 36.



Prolónguese BA, de suerte que sea (62) $AD = AC$, y tírese DC. Por ser $DA = AC$ será (64) el ángulo $ACD = D$; por consiguiente $BCD > D$, y (86) $BD > BC$; pero es $BD = BA + AC$ (const.): luego será $BA + AC > BC$. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

88 Si de los extremos de la base BC del triángulo BAC se tiran dos rectas BD, CD, que concurran dentro de él en un punto D; dichas rectas serán menores que los lados BA, AC del triángulo; pero el ángulo BDC serán mayor que BAC. *Fig.* 40.

I. Prolongada BD hasta E serán en el triángulo CDE (87) los dos lados $DE + EC > CD$, y añadiendo la comun DB, serán $BE + EC > CD + DB$: y por ser tambien en el triángulo BAE los dos lados $BA + AE > BE$, añadiendo CE, serán $BA + AC > BE + EC$; pero se han demostrado $BE + EC > CD + DB$: luego serán $BA + AC$ mucho mayores que $CD + DB$.

II. El ángulo externo $BDC > DEC$ (81); pero el ángulo externo $DEC > BAE$: luego será el ángulo BDC mucho mayor que el ángulo BAE, ó BAC. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

89 Construir un triángulo de tres rectas dadas *A*, *B*, *C*, con tal que qualesquiera dos de ellas sean mayores que la tercera. *Fig.* 41.

De la recta indefinita *DE* córtese $DF = A$, $FG = B$, $GH = C$: haciendo centro en *F* con el intervalo *FD*, descríbase el círculo *FDK*; igualmente haciendo centro en *G* con el intervalo *GH*, descríbase el círculo *GHK*, y al punto *K* donde se cortan las circunferencias de dichos círculos, tírense las rectas *FK*, *GK*: y será el triángulo *FKG* el que se pide formado por tres rectas iguales á las dadas *A*, *B*, *C*. Porque siendo *FK*, *FD* radios de un mismo círculo, será $FK = FD$; pero $FD = A$ (const.): luego $FK = A$. Asimismo se demostrará $GK = C$; pero $FG = B$ (const.): luego será $FK = A$, $FG = B$, $GK = C$. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

90 En un punto dado *A* de una recta dada *AB*, construir un ángulo rectilineo igual á otro dado *D*. *Fig.* 42.

Tírese *CF*, que corte de qualquier modo los lados del ángulo dado *D*. Despues córtese (62) $AG = DC$; y sobre *AG* constrúyase (89) el triángulo *AHG*, de suerte que sea *AH* $=$ *DF*, *GH* $=$ *CF*; y será el ángulo *A* $=$ *D*: pues teniendo los triángulos *CFD*, *GHA* todos sus lados respectivamente iguales (const.) será (69) el ángulo *D* $=$ *A*, por estar opuestos á lados iguales. Que es &c.

PROPOSICION XXIV.

91 Si dos triángulos *ABC*, *DEF* tienen dos lados *AB*, *AC* del uno respectivamente iguales á dos *DE*, *DF* del otro, y el ángulo *BAC* $>$ *EDF*; será la base *BC* opuesta al mayor ángulo mayor que la base *EF* opuesta al menor. *Fig.* 43.

Los expresados triángulos serán isósceles, ó tendrán los lados desiguales entre sí: en este caso será, por exemplo *DE* $<$ *DF*; y construido (90) sobre *DE* un ángulo igual *A*, y cuyo lado *DG* sea igual *AC* $=$ *DF*, si se tira *EG*, será (63) *EG* $=$ *BC*. Prolónguese *DE* hasta ser *DH* $=$ *DG*, y tirando las *HG*, *GF*, será (64) el ángulo *DHG* $=$ *DGH*; pero (81) *DLG* $>$ *DHL*, y por consiguiente *DLG* $>$ *DGH*: luego (86) *DG* $>$ *DL*, y siendo *DG* $=$ *DF* (const.), caerá el punto *F* baxo de *HG*, y dichos triángulos tomarán una posicion semejante á la que tienen en la figura; en la que por ser *DG* $=$ *DF*, será (64) el ángulo *DGF* $=$ *DFG*, y por consiguiente el ángulo *EFG* $>$ *EGF*:

luego será (86) $EG > EF$; pero se ha demostrado $BC = EG$: luego será $BC > EF$.

Si dichos triángulos son isósceles, hecha la construccion del ángulo $EDG = BAC$, y del lado $DG = AC$, se demostrará igualmente, que el punto F debe caer baxo de EG, y tirada la GF se extenderá á este caso la demostracion del anterior. Que es &c.

PROPOSICION XXV.

92 Si dos triángulos BAC, EDF tienen dos lados AB, AC del uno respectivamente iguales á los dos DE, DF del otro, y el tercero $BC > EF$; será el ángulo A opuesto á dicho mayor lado BC, mayor que el ángulo D opuesto al menor. *Fig.* 44.

Si A no es mayor que D, será igual, ó menor; pero no puede ser igual, porque sería (63) $BC = EF$, ni tampoco menor, porque sería $BC < EF$ (91), uno, y otro contra lo supuesto: luego será $BC > EF$. Que es &c.

PROPOSICION XXVI.

93 Si dos triángulos BAC, EDG tienen dos ángulos B, C de el uno respectivamente iguales á los dos E, EGD del otro, y un lado igual á otro, siendo estos los adyacentes, ú opuestos á ángulos iguales; tendrán tambien los otros lados respectiva-

mente iguales, y el otro ángulo igual á su correspondiente. *Fig.* 45.

I. Sea $BC = EG$; y si en este caso no fuesen los otros lados de los triángulos respectivamente iguales, sea $ED > BA$, y por lo tanto se podrá cortar un segmento $EH = BA$; y tirada la recta HG será (63) el triángulo $ABC = HEG$, y el ángulo $ACB = HGE$; pero $ACB = DGE$ (sup.): luego $DGE = HGE$, es decir el todo igual á su parte: luego los lados serán precisamente iguales, y por consiguiente (63) los triángulos totalmente iguales.

II. Sea $AB = DE$: en este caso si BC, y EG no se creen iguales, será uno de ellos, por exemplo, $BC < EG$, y se podrá cortar un segmento $EY = BC$, y tirada DY será el triángulo DEY totalmente igual á ABC (63), y el ángulo $DYE = ACB$; pero $ACB = DGE$ (sup.): luego $DGE = DYE$; esto es, el interno igual al externo, lo que no puede ser (81): luego &c.

PROPOSICION XXVII.

94 Si una recta EF cortando las AB, CD, formaré los ángulos alternos AEF, EFD iguales; dichas rectas AB, CD serán paralelas. *Fig.* 46.

Si no fuese así, las rectas AB, CD prolongadas se cortarían en un punto G, y el ángulo externo *AEF* sería (81) mayor que el interno opuesto *EFG*, que es contra lo supuesto: luego &c.

PROPOSICION XXVIII.

95 Si una recta *EF* que corta las rectas *AB*, *CD*, formare el ángulo externo *AGE* igual al interno opuesto, ácia la misma parte, *CHG*; ó bien los ángulos internos, ácia la misma parte, *AGH*, *CHG*, iguales á dos rectos; dichas rectas *AB*, *CD* serán paralelas. *Fig.* 47.

I. Siendo el ángulo $AGE = CHG$ (sup.), é igual tambien á *BGH* (79), será $CHG = BGH$; y por consiguiente (94) las rectas *AB*, *CD* serán paralelas.

II. Los ángulos $AGH + CHG$ son iguales (sup.) á dos rectos; pero los ángulos $AGH + BGH$ son tambien (74) iguales á dos rectos: luego serán los ángulos $AGH + CHG = AGH + BGH$; y por consiguiente el ángulo $CHG = BGH$: luego las rectas *AB*, *CD* serán (94) paralelas. Que es &c.

PROPOSICION XXIX.

96 Si una recta *EF* corta dos paralelas *AB*, *CD*; formará los ángulos alternos *DHG*, *AGH* iguales, el ángulo externo *BGE* igual al interno opuesto, ácia la misma parte, *DHG*, y los ángulos inter-

nos *BGH*, *DHG*, ácia la misma parte, iguales á dos rectos. *Fig.* 47.

I. Si se niega que los ángulos alternos *DHG*, *AGH* son iguales; será uno de ellos $AGH > DHG$; pero (74) los ángulos $AGH + HGB$ son iguales á dos rectos: luego los ángulos $DHG + BGH$ serán menores que dos rectos; por consiguiente (52) las rectas *AB*, *CD* concurrirán ácia la parte *BD* contra lo supuesto: luego será el ángulo $AGH = DHG$.

II. El ángulo $EGB = AGH$ (79); pero se ha demostrado $AGH = DHG$: luego será el ángulo $EGB = DHG$.

III. Los ángulos $AGH + BGH$ son iguales (74) á dos rectos; pero se ha demostrado el ángulo $AGH = DHG$: luego serán los ángulos $DHG + BGH$ iguales á dos rectos. Que es &c.

COROLARIO.

97 Se infiere, que si una recta corta dos paralelas, y es perpendicular á una de ellas, lo será tambien á la otra; y por consiguiente qualquiera paralelógramo *BADC* (*Fig.* 48), que tenga uno de los ángulos *A* recto, será rectángulo.

ESCOLIO.

98 Si la recta *AB* es perpendicular á *PD*, y forma con la *AC* el ángulo *BAC* agudo; las rectas *AC*, *BD* prolongadas concurrirán ácia la parte *CD*, y se apartarán continuamente mas por la otra parte *EF*. *Fig.* 49.

I. Báxese *BG* perpendicular á *AC*, *GH* á *BD*, *HJ* á *AC*, *JK* á *BD*, y así succesivamente. En el triángulo rectángulo *BGA* es (86) $BA > BG$: asimismo $BG > GH$ en el triángulo rectángulo *BHG*: luego será *AB* mucho mayor *GH*. Del mismo modo se demostrará $GH > JK$, $JK > CD$, y así succesivamente: luego las rectas *AC*, *PD* se van acercando por la parte *CD*; y por consiguiente concurrirán ácia esta parte.

II. Sobre la recta *AC* levántese (72) la perpendicular *AL*, la qual concurrirá con la *BL* en un punto *L* por ser el ángulo *LBA* recto, y el ángulo *LAB* agudo: levántese sobre *PB* la perpendicular *LM*; sobre *EC* la *MN*; *NO* sobre *PB*, y así succesivamente. En el triángulo rectángulo *LBA* es $BA < LA$; por la misma razon $LA < LM$: luego *BA* mucho menor que *LM*. Del mismo modo se demostrará, $LM < ON$, $ON < EP$, &c: luego las rectas *AE*, *BP* se apartarán continuamente mas por la parte *EF*. Que es &c.

Fig. 37.

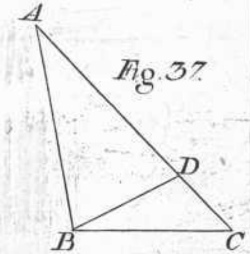


Fig. 38.

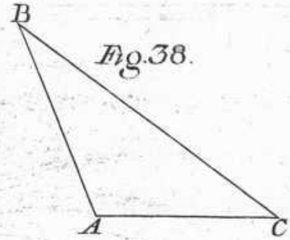


Fig. 39.

Fig. 40.

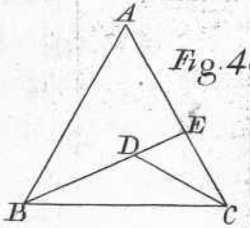


Fig. 41.

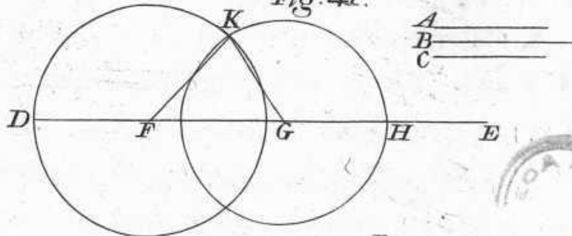


Fig. 42.

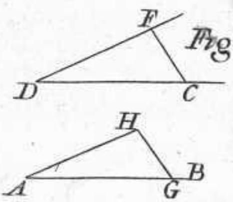
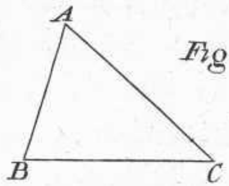


Fig. 43.



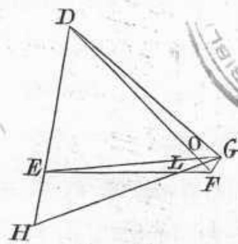


Fig. 44.

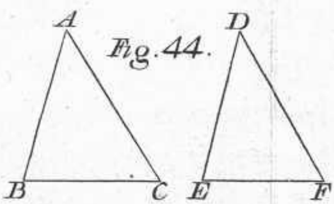


Fig. 45.

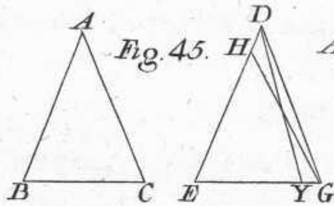


Fig. 46.

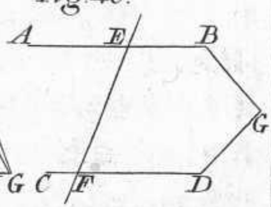


Fig. 47.

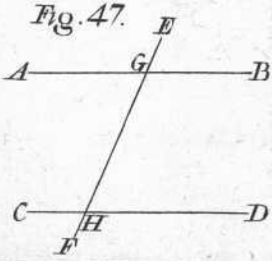


Fig. 48.

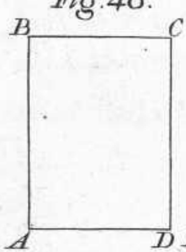
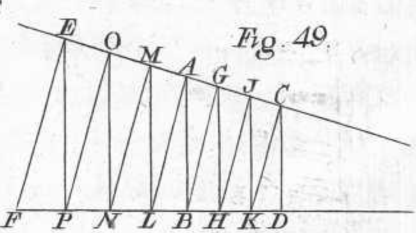


Fig. 49.



Si una recta AL corta á otras dos AC, LD, formando los ángulos LAC, DLA internos de una misma parte, ó ambos agudos, ó uno obtuso, y el otro agudo, con tal que sean juntos, menores que dos rectos; dichas rectas prolongadas concurrirán ácia esta parte, y se apartarán continuamente por la otra EF. *Fig.* 50.

I. Sean los ángulos LAC, DLA agudos: desde el punto A báxese AB perpendicular á LD. El ángulo BAC es agudo; pero el ángulo ABD es recto (const.): luego por lo demostrado las rectas AC, BD prolongadas concurrirán ácia la parte CD, y se apartarán continuamente por la otra EF.

II. Sea uno de los ángulos LAC obtuso. Prolónguese AL, y constrúyase (90) el ángulo LAR $= BLQ$. Siendo, pues, los ángulos $ALB + BLQ$ $=$ á dos rectos, y $ALB + CAL <$ dos rectos (sup.), será el ángulo $LAR > LAC$; por consiguiente la recta AC estará entre las LA, y AR. Tambien siendo el ángulo externo $BLQ = LAR$ interno, y opuesto ácia una misma parte, las rectas SR, FD serán (95) paralelas; pero el ángulo ABD es recto: luego lo será tambien el ángulo BAR, porque de lo contrario las rectas BD, AR concurririan por lo demostrado ácia la parte donde estuviera el ángulo agudo; por consiguiente el ángulo BAC es agudo ; es así que el ángulo *ABD* es recto : luego por lo demostrado, las rectas *AC*, *LD* concurrirán ácia la parte *CD*, y se apartarán continuamente por la *EF*. Que es &c.

PROPOSICION XXX.

99 Si dos rectas *AB*, *CD* son paralelas á una tercera *EF*; serán paralelas entre sí. *Fig.* 51.

Tirada la recta *GY*, que corte de qualquier modo dichas tres rectas, por ser *AB*, *EF* paralelas, será (96) el ángulo $AGY = EHY$; pero $EHY = HYD$, por ser las rectas *EF*, *CD* paralelas (sup.): luego el ángulo $AGY = HYD$, ó *GYD* ; por consiguiente (94) las rectas *AB*, *CD* serán paralelas. Que es &c.

PROPOSICION XXXI.

100 Por un punto dado *A* tirar una paralela á una recta dada *BC*. *Fig.* 52.

Tómese qualquier punto *D* en la recta *BC*, y tírese *AD*. En el punto *A* de la recta *AD*, constrúyase el ángulo $DAE = ADC$, y prolónguese la recta *EA*, que será (94) la paralela que se pide; pues son iguales (const.) los ángulos alternos *DAE*, *ADC*. Que es &c.

PROPOSICION XXXII.

101 En qualquier triángulo BAC prolongado uno de sus lados BC, será el ángulo externo ACD igual á los dos internos opuestos A, B; los tres ángulos internos A, B, ACB del triángulo, serán iguales á dos rectos. *Fig.* 53.

I. Por el punto C, tírese (100) la CE paralela á BA, y será (96) el ángulo $A = ACE$, y el ángulo $B = ECD$: luego será $A + B = ACE + ECD = ACD$.

II. Por ser $A + B = ACD$, tambien será $A + B + ACB = ACD + ACB$; pero los ángulos $ACD + ACB$ son iguales (74) á dos rectos: luego serán los ángulos $A + B + ACB$ iguales á dos rectos. Que es &c.

COROLARIO I.

102 Se infiere que los tres ángulos juntos de qualquier triángulo son iguales á los tres juntos de otro.

COROLARIO II.

103 Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, los ángulos residuos serán tambien iguales, y los triángulos equiángulos.

COROLARIO III.

104 En un triángulo rectángulo la suma de los dos ángulos agudos compone un recto: y si un ángulo de un triángulo es igual á los otros dos juntos, será recto, y el triángulo rectángulo.

COROLARIO IV.

105 En un triángulo rectángulo, é isósceles, cada ángulo sobre la base será la mitad de un recto.

PROPOSION XXXIII.

106 Las rectas *AC*, *BD*, que de unas mismas partes juntan los extremos de otras dos paralelas, é iguales; son tambien iguales, y paralelas entre sí. *Fig.* 54.

Tirada la *CB*, los triángulos *BAC*, *CDB* que resultan, tienen el lado $AB = CD$ (sup.), *CB* comun, y el ángulo $ABC = BCD$ (96): luego tendrán (63) las bases *AC*, *BD* iguales, y los ángulos *ACB*, *DBC* tambien iguales; y por consiguiente (94) *AC*, *BD* serán paralelas. Que es &c.

PROPOSICION XXXIV.

107 En todo paralelogramo *ABDC*, los lados opuestos *AC*, *BD*, y *AB*, *CD* son iguales;

C

como tambien los ángulos opuestos A, D, y ABD, ACD: y la diagonal CB lo divide en dos triángulos iguales. *Fig.* 54.

Por ser paralelas AB, CD (sup.) es el ángulo $ABC = DCB$ (96); y por serlo tambien AC, BD es el ángulo $ACB = DBC$: luego los triángulos CAB, BDC, que tienen el lado CB comun, y adyacente á ángulos iguales, serán (93) totalmente iguales, y el ángulo $A = D$; y finalmente si á los ángulos iguales ABC, DCB se añaden los iguales DBC, ACB, resultarán iguales ABD, y ACD. Que es &c.

ESCOLIO.

108 Todo quadrilátero $ABDC$, que tiene los lados opuestos iguales; esto es, $AB = CD$, $AC = BD$, es un paralelogramo: porque los triángulos CAB, CDB tienen (sup.) el lado $AC = BD$, $AB = CD$, y CB comun; y por consiguiente (69) será el ángulo $ABC = DCB$, y (94) AB paralela á CD. Del mismo modo se demostrarán las rectas CA, BD paralelas. Luego la figura $ACDB$ será un paralelogramo.

PROPOSICION XXXV.

109 Los paralelogramos $BCDA$, $BCFE$, que tienen una misma base BC, y están entre unas mis-

mas paralelas *AF*, *BC*, son iguales. *Fig.* 55.

Por ser *AB*, y *DC* lados opuestos del paralelogramo *BADC* serán iguales (107); y por ser *AB*, y *EB* paralela á *DC*, y *FC*, serán (96) los ángulos $A = CDF$, $BEA = CFD$: luego los triángulos *BAE*, *CDF* tendrán (93) los otros lados respectivamente iguales; y por consiguiente (63) serán iguales. Ahora si del trapecio *BAFC* se quita el triángulo *BAE*, y del mismo trapecio se quita el triángulo *CDF*, quedará (42) $BEFC = BADC$. Que es &c.

PROPOSICION XXXVI.

110 Los paralelogramos *BCDA*, *GHFE*, que tienen iguales bases *BC*, *GH*, y están entre unas mismas paralelas *BH*, *AF*, son iguales. *Fig.* 56.

Tírese *BE*, y *CF*. Siendo $BC = GH$ (sup.), y (107) $GH = EF$, será $BC = EF$; pero *BC* tambien es paralela á *EF*; luego las *BE*, *CF* serán (106) paralelas, é iguales; y por lo tanto será (35) la figura *BCFE* un paralelogramo; pero (109) los paralelogramos $BCDA = BCFE$, y $EFCB = EFHG$: luego (40) $BCDA = GHFE$. Que es &c.

PROPOSICION XXXVII.

111 Los triángulos *BCA*, *BCD*, que están

sobre una misma base *BC*, y entre unas mismas paralelas *BC*, *EF*, son iguales entre sí. *Fig.* 57.

Tírense (100) *BE* paralela á *CA*, y *CF* paralela á *BD*: y estando los paralelogramos *CE*, *BF* que resultan sobre una misma base, y entre unas mismas paralelas (sup.), serán iguales (109); pero los triángulos *BCA*, *BCD* son (107) mitades de ellos: luego (46) son tambien iguales. Que es &c.

PROPOSICION XXXVIII.

112 Los triángulos *BCA*, *EFH*, que están sobre iguales bases *BC*, *EF*, y entre unas mismas paralelas *BF*, *GH*, son iguales entre sí. *Fig.* 58.

Tiradas *BG* paralela á *CA*, y *ED* paralela á *FH*, se tendrán los paralelogramos *CG*, *FD* sobre iguales bases *BC*, *EF*, y entre unas mismas paralelas; por consiguiente (110) iguales; pero los triángulos *BCA*, *EFH* son (107) sus mitades: luego (46) dichos triángulos son tambien iguales. Que es &c.

COROLARIO.

113 Se infiere, que si la base $BC > EF$; será el triángulo $BAC > EHF$; y si es $BC < EF$, será el triángulo $BAC < EHF$.

PROPOSICION XXXIX.

114 Los triángulos iguales *BAC*, *BDC*, que tienen una misma base *BC*, y están construidos ácia una misma parte, están entre unas mismas paralelas *BC*, *AD*. *Fig.* 59.

Si *AD* no es paralela á *BC*, séalo otra *AF*. Tírese *FC*, y los triángulos *BAC*, *BFC* tendrán la misma base *BC*, y estarán entre las paralelas *BC*, *AF* (sup.); y por consiguiente (111) serán iguales; pero el triángulo *BAC* = *BDC* (sup.): luego (40) *BFC* = *BDC*, y siendo esto imposible, tambien lo será, que *AF* sea paralela á *BC*, y lo mismo qualquiera otra recta distinta de *AD*. Que es &c.

PROPOSICION XL.

115 Los triángulos iguales *BAC*, *EDF*, que tienen iguales bases *BC*, *EF* segmentos de una misma recta *BF*, y están construidos ácia una misma parte; están tambien entre unas mismas paralelas *BF*, *AD*. *Fig.* 60.

Si se niega, que *AD* sea paralela á *BF*, lo será *AH*; y tirada *HF* resultarán iguales (112) los triángulos *BAC*, *EHF*, por estar sobre iguales bases, y entre unas mismas paralelas; pero *BAC*

$=$ *EDF*: luego *EHF* $=$ *EDF*, lo que es imposible: luego tambien &c.

PROPOSICION XLI.

116 Si un paralelogramo *ABCD*, y un triángulo *BCE* tienen una misma base *BC*, y están entre unas mismas paralelas *BC*, *AE*; el paralelogramo será duplo del triángulo. *Fig.* 61.

Si se tira *AC*, será (111) el triángulo *BAC* $=$ *BEC*; pero el paralelogramo *ABCD* es (107) duplo del triángulo *BAC*: luego tambien lo es de su igual *BEC*. Que es &c.

PROPOSICION XLII.

117 Construir un paralelogramo igual á un triángulo dado *ABC*, y que tenga un ángulo igual al rectilineo dado *D*. *Fig.* 62.

Por el punto *A* tírese (100) la recta *AG* paralela á *BC*; hágase (90) en *C* un ángulo *BCG* igual al dado *D*; divídase (71) la base *BC* del triángulo por medio en *F*, y por este punto tírese *FE* paralela á *CG*: y se tendrá el paralelogramo *FG* con las condiciones que se pide. Tírese *AF*; y por ser *BF* $=$ *FC* (const.), será (112) el triángulo *BAF* $=$ *FAC*; y por consiguiente el triángulo *BAC* será duplo de *FAC*; pero el paralelogramo *FG* es (116) tambien duplo del triángulo *FAC*: luego (45) el paralelogramo *FG* es igual al triángulo *BAC*, y tiene el ángulo *FCG* = *D* (const.) Que es &c.

PROPOSICION XLIII.

118 En todo paralelogramo *ADCB* los complementos *DG*, *GB*, son iguales entre sí. *Fig.* 63.

El triángulo *ADC* = *CBA* (107), como tambien los triángulos *AHG* = *GEA*, y *GFC* = *CYG*: luego (42) *ADC* — *AHG* — *GFC* = *ABC* — *GEA* — *CYG*; esto es, los residuos, ó paralelogramos *DG*, *GB*, son iguales. Que es &c.

PROPOSICION XLIV.

119 Sobre una recta dada *A* construir un paralelogramo *FL* igual á un triángulo dado *B*, y que tenga un ángulo igual á otro rectilineo dado *C*. *Fig.* 64.

Hágase (117) el paralelogramo *FD* igual al triángulo *B*, y con el ángulo *GFE* = *C*; prolónguese *GF* hasta *H*, de suerte, que sea *FH* = *A*: por *H* tírese *YL* paralela á *EF*, hasta que encuentre á la *DE* prolongada en el punto *Y*; en el paralelogramo *EH* tírese la diagonal *YF*, y alárguese hasta que concurra con *DG* prolongada en *K* (52); en fin

Fig. 50.

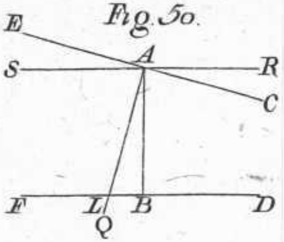


Fig. 51.

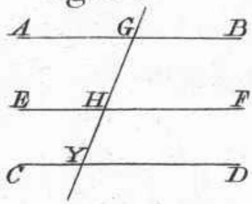


Fig. 52.

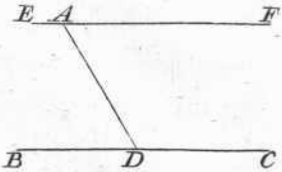


Fig. 53.

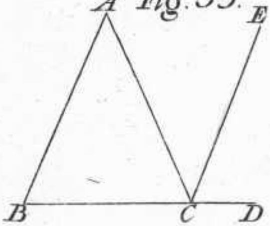


Fig. 54.

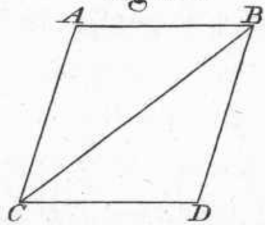


Fig. 55.

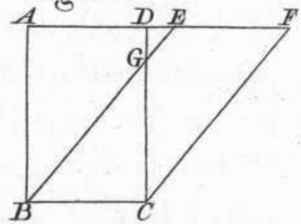


Fig. 56.

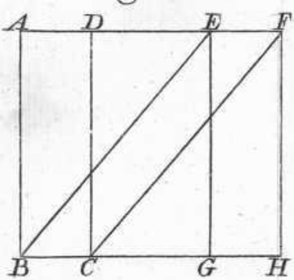


Fig. 57.

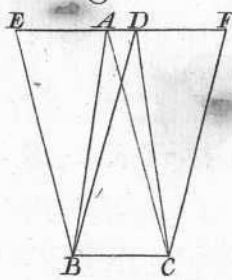


Fig. 58.

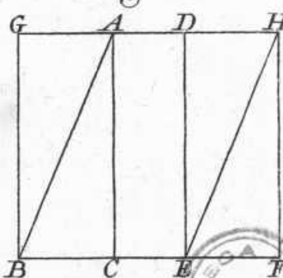


Fig. 59.

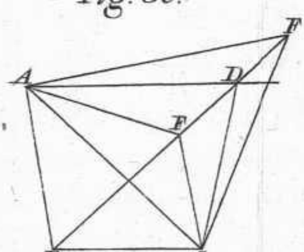


Fig. 60.

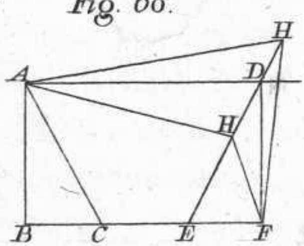
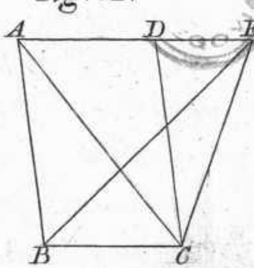


Fig. 61.



tírese la *KL* paralela á *GH*, hasta que la corten en *M*, *L* las *EF*, *YH* prolongadas: el paralelogramo *FL* será el que se pide. El paralelogramo *FL* $=$ *FD* (118); pero *FD* es igual al triángulo *B*, y tiene el ángulo *GFE* igual al dado *C* (const.); y el ángulo *GFE* $=$ *MFH* (79): luego el paralelogramo *FL* es igual al triángulo *B*, y tiene el ángulo *MFH* igual al dado *C*, y está sobre *FH* $=$ *A*. Que es &c.

PROPOSICION XLV.

120 Sobre una recta dada *FG*, construir un paralelogramo *FL* igual á un rectilineo dado *ABCD*, y que tenga un ángulo igual al dado *E*. *Fig.* 65.

Resuélvase el rectilineo en los triángulos *BDC*, *BAD*, y en mas, si tuviere mas lados; sobre la recta dada *FG*, y con el ángulo *F* $=$ *E*, constrúyase (119) el paralelogramo *FH* igual al triángulo *BAD*; prolónguese *FY*, y sobre la recta *HY* con el ángulo *HYK* $=$ *F* $=$ *E*, constrúyase el paralelogramo *YL* igual al triángulo *BCD* (y así consecutivamente si hubiese mas triángulos): y será *FL* $=$ *FH* $+$ *YL* $=$ *ABCD*. Siendo *KY* paralela á *LH*, serán (96) los ángulos *KYH*, *LHY* juntos iguales á dos rectos; pero (96) los ángulos alternos *KYH*, *GHY* son iguales: luego los ángulos *GHY*, *YHL*, juntos serán iguales á dos rectos; por consiguiente (78) las rectas *GH*, *HL* serán una misma recta, y las rectas *GL*, *FK* serán paralelas; pero (99) las rectas *FG*, *KL* son paralelas, por ser paralelas á una tercera: luego la figura *FL* será un paralelogramo, que por lo dicho es igual al rectilineo dado *ABCD*, y tiene el ángulo $F = E$. Que es &c.

ESCOLIO.

121 Por medio de la proposicion antecedente se hallará la diferencia entre dos rectilineos dados *ABCD*, y *M*. Constrúyase el paralelogramo $FL = ABCD$; y sobre la recta *GF* con el ángulo *F* constrúyase tambien el paralelogramo $FN = M$; y será el paralelogramo *NK* igual á la diferencia de los dos rectilineos dados.

PROPOSICION XLVI.

122 Sobre una recta dada *AD*, construir un quadrado. *Fig.* 66.

En los puntos *A*, *D*, levántense (72) las perpendiculares *AB*, *DC*; córtense (62) iguales á la dada *AD*; y tirada la *BC* se tendrá el quadrado *ABCD* sobre *AD*. Por ser los ángulos $A + D$ iguales á dos rectos (const.), las *AB*, *CD* serán (95) paralelas; pero ademas son iguales (const.): luego las *BC*, *AD* son tambien (106) iguales, y paralelas; y por consiguiente la figura *ABCD* es equilátera, y paralelograma; pero tiene el ángulo *A* recto (const.): luego será (97) tambien rectángula; y por lo tanto la figura *ABCD* es (29) un quadrado. Que es &c.

ESCOLIO.

123 Si dos rectas *AD*, *EH* son iguales, sus quadrados serán iguales: y al contrario, si dos quadrados *AC*, *EG* son iguales, los lados, ó rectas sobre que están descritos, son iguales. *Fig.* 67.

Lo primero es evidente: porque sobrepuestos los quadrados, se ajustarán por la igualdad de las rectas, y ángulos. Si se niega lo segundo, hágase $EO = AD$, y por lo que acabamos de decir, sería el quadrado de *EO*, esto es, $EP = AC$; pero $AC = EG$ (sup.): luego $EG = EP$, lo que es imposible, como tambien el que los quadrados iguales dexen de tener iguales bases. Del mismo modo se demostrará, que todos los rectángulos equiláteros entre sí, son iguales.

PROPOSICION XLVII.

124 En qualquier triángulo rectángulo *BAC*, el quadrado *BE* del lado *BC* opuesto al ángulo rec-

to *BAC* es igual á los quadrados *BG*, *CH* de los otros dos lados *AB*, *AC*, que contienen el ángulo recto. *Fig.* 68.

Tírese la recta *AM* paralela á *CE*; y tírense *AE*, *BΥ*. Si á los ángulos *ACΥ*, *BCE* rectos (sup.), y por consiguiente iguales (51), se les añade el comun *BCA*, será el ángulo *BCΥ* $=$ *ACE*; pero el lado *BC* $=$ *CE*, y *CΥ* $=$ *CA*: luego (63) los triángulos *BCΥ*, *ACE* serán totalmente iguales. Ademas por ser rectos los ángulos *CAH*, *CAB* (sup.), la *BH* es una sola recta (78): luego el quadrado *CH* será (116) duplo del triángulo *BCΥ*, que tiene la misma base *CΥ*, y está entre las mismas paralelas *CΥ*, *BH*. Por igual razon el paralelogramo *MC* es duplo del triángulo *ACE*; pero se ha demostrado *BCΥ* $=$ *ACE*: luego (45) *MC* $=$ *CH*. Del mismo modo se demuestra (tiradas las rectas *AD*, *EC*) que *BG* $=$ *BM*: luego el quadrado *BE* $=$ *BG* $+$ *CH*. Que es &c.

ESCOLIO.

125 Construidos dos paralelogramos qualesquiera *FA*, *ΥA*, sobre los lados *AB*, *AC* de un triángulo *ABC*, y alargados los lados *FG*, *ΥH*, hasta que concurran en *M*; si se tira *MA*, y por los extremos de la base *BC* se levantan dos parale-

las *BD*, *CE* á *MA*, que se terminen, ó en los lados *FG*, *YH* de los paralelogramos, ó en sus prolongaciones *GM*, *HM*; y en fin se tira *DE*: será *BDEC* un paralelogramo igual á los dos *CH*, y *BG*. *Fig.* 69.

Prolónguese *MA*, hasta que corte la base *BC* en *N*: siendo (107) *DB*, y *CE* iguales, y paralelas á la tercera *AM*, serán iguales, y paralelas (99) entre sí, y *BE* será un paralelogramo (106) dividido en dos *PB*, y *PC* por la *MN*; de los quales $PC = AE$ (109) por estar sobre la base comun *CE*, y entre unas mismas paralelas; pero $AE = AY$ por la misma razon: luego $PC = AY$. Del mismo modo se demostrará ser $PB = AF$; y por consiguiente será $BE = AF + AY$. Que es &c. Se vé claramente ser la proposicion un caso particular del teorema demostrado en este escolio.

PROPOSICION XLVIII.

126 Si el quadrado descrito sobre el lado *BC* de un triángulo *BAC*, es igual á los quadrados de los otros dos lados *AB*, *AC*; el ángulo *BAC* comprehendido por estos lados será recto. *Fig.* 70.

Sobre *AC* en el punto *A* levántese la perpendicular $AD = AB$, y tirada *CD* será (124) $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ por $AD = AB$

(const.); pero $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ (sup.): luego $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2$; por consiguiente (123) $CD = BC$. Luego los triángulos BCA, DCA tienen iguales sus tres lados; y por consiguiente sus ángulos (69), y siendo recto el ángulo DAC (const.), tambien lo será su correspondiente en el otro triángulo CAB. Que es &c.

Fig. 62.

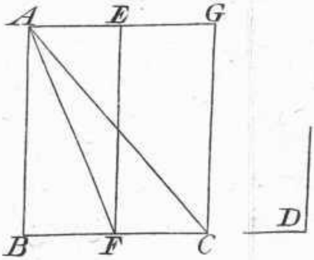


Fig. 63.

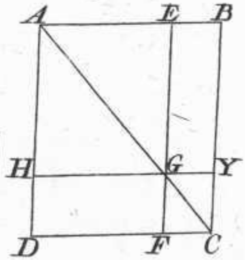


Fig. 64.

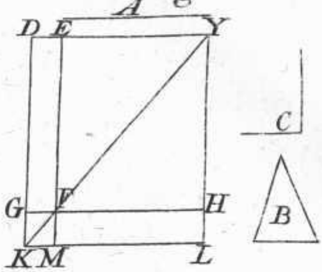
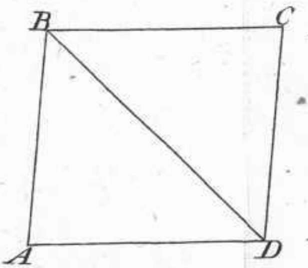
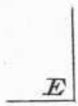
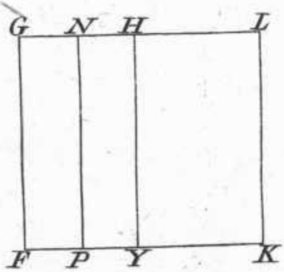


Fig. 65.







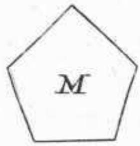


Fig. 66.

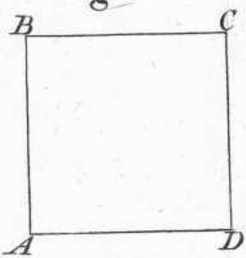
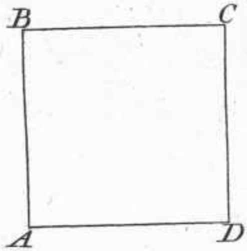


Fig. 67.



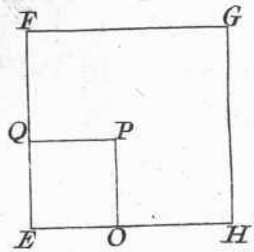


Fig. 68.

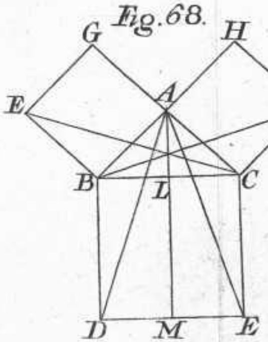


Fig. 69.

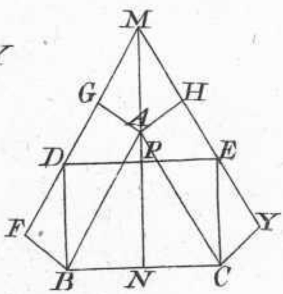
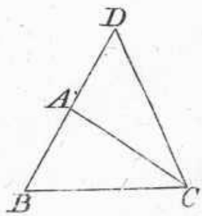


Fig. 70.



LIBRO II.

DEFINICIONES.

127 Todo paralelogramo rectángulo *EFGA* se dice estar contenido por las dos rectas *EF*, *EA*, que comprehenden qualquier ángulo. *Fig.* 1.

128 En todo paralelogramo *ABCD*, qualquiera de los circadiámetros junto con los complementos se llama gnomon. *Fig.* 2. $AE + EC + FH$ es un gnomon. Por abreviar, suele nombrarse *KDG*. Tambien $AE + EC + GK$, ó bien *FBH*, es un gnomon.

PROPOSICION I.

129 Si de dos rectas *M*, *AB*, la una está dividida en qualquier número de partes *AD*, *DE*, *EB*, y la otra no; el rectángulo contenido por las dos *M*, *AB*, es igual á los rectángulos hechos de la toda *M*, y de los segmentos de la otra *AB*. *Fig.* 3.

Levántense *AC* perpendicular á *AB*, y córtese $AF = M$; por el punto *F*, tírese la recta indefinita *FG* paralela á *AB*, y en los puntos *D*, *E*, *B*, levántense las perpendiculares *DH*, *EI*, *BG*, que serán (95) paralelas entre sí, y á la *AF*. El rectángulo $FA \times AB = FA \times AD + HD \times DE +$

$YE \times EB$; pero DH, y EY son (107) iguales á AF, ó M (const.): luego será $M \times AB = M \times AD + M \times DE + M \times EB$. Que es &c.

PROPOSICION II.

130 Si una recta AB se divide de qualquier modo en C; el quadrado de la toda es igual á los rectángulos hechos de la misma AB por cada uno de sus segmentos AC, CB. *Fig.* 4.

Suponiendo $DE = AB$ será (129) $DE \times AB = DE \times AC + DE \times CB$; pero $DE = AB$: luego será $\overline{AB}^2 = AB \times AC + AB \times BC$. Que es &c.

PROPOSICION III.

131 Si una recta AB está dividida de qualquier modo en C; el rectángulo de la toda AB, y de uno de sus segmentos AC, es igual al quadrado de este segmento, y al rectángulo de los segmentos AC, CB. *Fig.* 5.

Suponiendo $DE = AC$, será (129) $AB \times DE = AC \times DE + CB \times DE$; pero $AC = DE$: luego será $AB \times AC = \overline{AC}^2 + CB \times AC$. Que es &c.

PROPOSICION IV.

132 Si una recta AB está dividida en dos qualesquiera segmentos AC, CB; el quadrado de la toda

AB es igual á los quadrados de las partes AC, CB, y á dos rectángulos hechos de las mismas partes; esto es, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC \times CB$. *Fig.* 5.

Consta (130) que $\overline{AB}^2 = AB \times AC + AB \times CB$; pero (131) $AB \times AC = \overline{AC}^2 + AC \times CB$, y por lo mismo $AB \times CB = \overline{CB}^2 + AC \times CB$: luego $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC \times CB$. Que es &c.

PROPOSICION V.

133 Si una recta AB se divide en dos partes iguales AC, CB, y en dos desiguales AD, DB; el rectángulo formado de las partes desiguales, junto con el quadrado de la parte intermedia CD, es igual al quadrado de la mitad de la propuesta; esto es, $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2$. *Fig.* 6.

Se ha demostrado (129) que $AD \times DB = AC \times DB + CD \times DB$; pero $AC = CB$ (sup.): luego $AD \times DB = CB \times DB + CD \times DB$. Y siendo (131) $CB \times DB = CD \times DB + \overline{DB}^2$, será $AD \times DB = 2CD \times DB + \overline{DB}^2$; y añadiendo $\overline{CD}^2$, será $AD \times DB + \overline{CD}^2 = 2CD \times DB + \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2$ (132). Que es &c.

PROPOSICION VI.

134 Si una recta AB se divide en dos partes iguales AC, CB, y directamente se le añade otra BD; el rectángulo de toda la compuesta AD

por la añadida BD, junto cou el quadrado de la mitad CB de la propuesta, es igual al quadrado formado sobre la compuesta de esta mitad, y la añadida; esto es, $AD \times DB + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$. *Fig.* 7.

Consta (131) que $AD \times DB = AB \times DB + \overline{DB}^2$; pero (129) $AB \times DB = AC \times DB + CB \times DB = 2\,CB \times DB$, por ser $AC = CB$ (sup.): luego $AD \times DB = 2\,CB \times DB + \overline{DB}^2$, y añadiendo $\overline{CB}^2$, será $AD \times DB + \overline{CB}^2 = 2\,CB \times DB + \overline{DB}^2 + CB^2 = \overline{CD}^2$ (132). Que es &c.

PROPOSICION VII.

135 Si una recta AB está dividida de qualquier modo en C; el quadrado de la toda, junto con el de una de las partes CB, es igual á dos rectángulos hechos de la toda por esta parte, mas al quadrado de la otra parte AC; esto es, $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 2\,AB \times CB + \overline{AC}^2$. *Fig.* 5.

Se ha demostrado (132) que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\,AC \times CB$, y añadiendo $\overline{CB}^2$, será $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + 2\,\overline{CB}^2 + 2\,AC \times CB$; pero (131) $\overline{CB}^2 + AC \times CB = AB \times CB$, y $2\,\overline{CB}^2 + 2\,AC \times CB = 2\,AB \times CB$: luego $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + 2\,AB \times CB$. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

136 Si una recta AB está dividida de qual-

quier modo en C; el quádruplo del rectángulo hecho de la toda por una de las partes CB, junto con el quadrado de la otra AC, es igual al quadrado de una recta compuesta de la toda AB, y de la parte CB; esto es, $4AB \times CB + \overline{AC}^2 = \overline{AB+BC}^2$. *Fig.* 5.

Se ha demostrado (135) que $2AB \times CB + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$, y añadiendo $2AB \times CB$, será $4AB \times CB + \overline{AC}^2 = 2AB \times CB + \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB+CB}^2$ (132). Que es &c.

PROPOSICION IX.

137 Si una recta AB se divide en dos partes iguales en C, y en dos desiguales en D; la suma de los quadrados de las partes desiguales AD, DB, es igual al duplo de la suma de los quadrados de la mitad AC, y de la parte intermedia CD; esto es, $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$. *Fig.* 6.

Consta (135) que $\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = 2BC \times CD + \overline{BD}^2$; pero $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2$ (123), $2BC \times CD = 2AC \times CD$, por ser $CB = AC$ (sup.): luego será $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 2AC \times CD + \overline{BD}^2$, y añadiendo $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$, será $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC \times CD + \overline{BD}^2$; pero (132) $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC \times CD = \overline{AD}^2$: luego será $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$. Que es &c.

PROPOSICION X.

138 Si una recta AB se divide en dos partes iguales AC, CB, y directamente se le añade otra BD; el quadrado de la compuesta AD, junto con el quadrado de la añadida BD, será igual al duplo de los quadrados de la mitad AC de la propuesta, y de la compuesta CD de esta mitad, y la añadida; esto es, $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$. *Fig.* 7.

Por estar la recta CD dividida en B, será (135) $\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = 2BC \times CD + \overline{BD}^2$; pero $\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2$ (123), y $2BC \times CD = 2AC \times CD$, por ser $AC = CB$: luego será $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 2AC \times CD + \overline{BD}^2$; y añadiendo $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$, será $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC \times CD + \overline{BD}^2$; pero (132) $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC \times CD = \overline{AD}^2$: luego $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$. Que es &c.

PROPOSICION XI.

139 Dividir una recta dada AB en dos segmentos tales, que el rectángulo hecho de la toda uno de sus segmentos sea igual al quadrado del otro. por *Fig.* 8.

Sobre AB constrúyase (122) el quadrado AC; divídase el lado AD por medio en E, y tírese EB; en la EA prolongada córtese $EF = EB$; sobre la AF

constrúyase el quadrado AH, y será $\overline{AG}^2 = AB \times BG$. Prolónguese HG hasta Y, y por estar DA dividida por medio en E, y AF añadida, será (134) $\overline{EF}^2 = DF \times FA + \overline{EA}^2$; pero (123) $\overline{EF}^2 = \overline{EB}^2$, por ser $EF = EB$ (constr.): luego $\overline{EB}^2 = DF \times FA + \overline{EA}^2$; pero (124) $\overline{EB}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AB}^2$: luego $\overline{AB}^2 + \overline{EA}^2 = DF \times FA + \overline{EA}^2$, y por consiguiente $\overline{AB}^2 = DF \times FA$; esto es, el quadrado $AC = DH$ rectángulo; y quitando el rectángulo comun DG, quedará $CG = AH$; pero $CG = AB \times BG$ por ser $BC = BA$, y $AH = \overline{AG}^2$: luego $AB \times BG = \overline{AG}^2$. Que es &c.

PROPOSICION XII.

140 En qualquier triángulo obtusángulo ABC, el quadrado del lado AC, opuesto al ángulo obtuso ABC, es igual á los quadrados de los lados AB, CB, y á dos rectángulos de la base BC, y de la prolongacion BD de dicha base, hasta encontrar la perpendicular AD; esto es, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2CB \times BD$. *Fig.* 9.

En el triángulo rectángulo ADC es (124) $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$; pero (132) $\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 + 2CB \times BD + \overline{BD}^2$: luego será $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + 2CB \times BD + \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$; y por ser (124) $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, tambien será $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 + 2CB \times BD$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

141 En qualquier triángulo acutángulo *BAC* el quadrado de uno de los lados *AB*, opuesto al ángulo agudo *C*, es menor que los quadrados de los otros lados *AC*, *CB*, de dos rectángulos de *BC* por *CD*, es decir, del lado sobre que se baxa la perpendicular *AD*, y del segmento contenido entre dicho ángulo, y la perpendicular; esto es, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + 2BC \times CD$. *Fig.* 10.

En el triángulo rectángulo *ADC* es (124) $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$; y añadiendo $\overline{CB}^2$, tambien será $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2$; pero (132) $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + 2BD \times DC + \overline{BD}^2$: luego $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 + 2BD \times DC + \overline{BD}^2$; y por ser $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ (124), y $\overline{CD}^2 + BD \times DC = BC \times CD$ (131), tambien será $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + 2BC \times CD$. Que es &c.

PROPOSICION XIV.

142 Hacer un quadrado igual á un rectilineo dado *A*. *Fig.* 11.

Hágase (120) el rectángulo $DB = A$, y prolónguese el lado *DC*, de suerte que sea $CF = CB$ (62); divídase *DF* por medio en *G* (71), y haciendo centro en *G*, con el intérvalo *GD* descríbase el semicírculo *DHF* ; finalmente prolongada *BC* hasta la circunferencia en *H*, será $\overline{CH}^2 = A$. Tirada *GH*, en el triángulo rectángulo *GCH* es (1 2 4) $\overline{GH}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2$; pero (1 2 3) $\overline{GH}^2 = \overline{GF}^2$, por ser $GH = GF$: luego será $\overline{GF}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2$; y siendo (1 3 3) $\overline{GF}^2 = \overline{GC}^2 + DC \times CF$, tambien será $\overline{GC}^2 + DC \times CF = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2$, y quitando $\overline{GC}^2$ comun, resultará $\overline{CH}^2 = DC \times CF$, ó $DC \times CB$, por ser $CF = CB$. Que es &c.

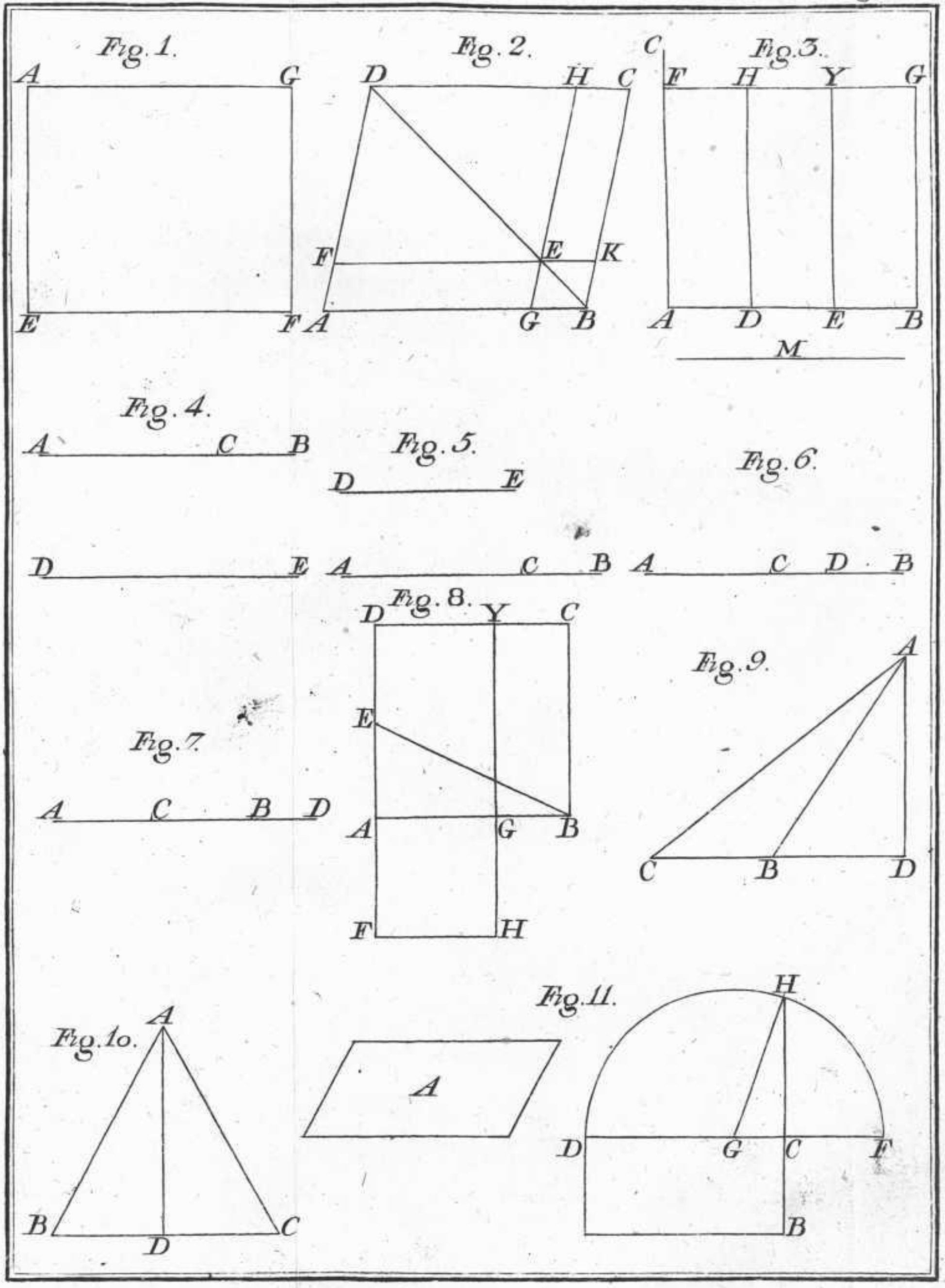


Fig. 1.
A G E F
Fig. 2.
D H C F E K A G B
Fig. 3.
C F H Y G A D E B M
Fig. 4.
A C B D E
Fig. 5.
D E A C B
Fig. 6.
A C D B
Fig. 7.
A C B D
Fig. 8.
D Y C E A G B F H
Fig. 9.
A C B D
Fig. 10.
A B D C
A
Fig. 11.
H D G C F B

LIBRO III.

DEFINICIONES.

143 Círculos iguales son los que tienen diámetros, ó radios iguales; y tales son *GACB*, *HDFE*, cuyos radios *GA*, *HD* son iguales. *Fig.* 1.

144 Se dice que una recta *AB* es tangente del círculo *FED*, quando encuentra un punto de su circunferencia, y prolongada cae toda fuera del círculo. La recta *HE*, que une dos qualesquiera puntos *H*, *E* de la circunferencia, se llama cuerda, ó subtensa, y qualquiera parte de la circunferencia arco del círculo. *Fig.* 2.

145 Círculos que se tocan son los que tocándose mutuamente no se cortan; y tales son los círculos *DAC*, *EAB*, *BGF*: pero los círculos *BGF*, *HFG* no se tocan, sino que se cortan. *Fig.* 3.

146 Se dice que dos cuerdas *FE*, *KL* distan igualmente del centro *G* de un círculo, quando las perpendiculares *GH*, *GN* tiradas de dicho centro sobre las mismas cuerdas, son iguales: al contrario se dirá, que *BC* dista mas del centro que *KL*, porque la perpendicular *GT* es mayor que *GN*. *Fig.* 4.

147 Segmento de un círculo es una figura

comprehendida en un arco, y su cuerda, como *ABC. Fig.* 5.

148 Angulo del segmento es el formado por un arco, y su cuerda; y tales son los ángulos *OAD, ODA. Fig.* 5.

149 Angulo en el segmento es el formado por dos cuerdas, que concurren en un punto de la periferia del segmento, y se terminan en los extremos de la cuerda, que es base de dicho segmento; y tales son los ángulos *ABC, AEC* en el segmento *ABC. Fig.* 5.

150 El ángulo formado por dos cuerdas, que concurren en un punto de la circunferencia, y también el formado por dos radios, se dicen insistir sobre el arco contenido por los lados del ángulo; y así los ángulos *ABC, AGC* insisten sobre el arco *AYC. Fig.* 1.

151 Sector del círculo es la figura contenida por dos radios, que forman ángulo en el centro, y por el arco que comprehenden. La figura *ADB* es sector del círculo *ABA*, cuyo centro es *D. Fig.* 6.

152 Segmentos semejantes de círculos son en los que hay ángulos iguales; y así los segmentos *ABC, DEF* serán semejantes, si son iguales los ángulos *ABC, DEF* formados en ellos. *Fig.* 7.

PROPOSICION I.

153 Hallar el centro *F* de un círculo dado *ABC*. *Fig.* 8.

Tírese en el círculo qualquiera cuerda *AC*, que se dividirá por medio en *E*; levántese la perpendicular *BD*, que se alargará por una, y otra parte hasta la circunferencia, y dividida por medio en *F*, se tendrá el centro del círculo en este punto de su division. Si *F* no es el centro, estará este fuera de la *BD* en un punto *G*, por exemplo, del qual tiradas las rectas *GA*, *GC*, *GE*, será $GA = GC$; pero $AE = EC$ (constr.), y *GE* comun: luego en los triángulos *AEG*, *CEG* serán (69) los ángulos *AEG*, *CEG* iguales; y por consiguiente rectos; y por lo tanto el ángulo $GEA = BEA$, lo que es imposible: luego no estando el centro fuera de la *BD*, ni tampoco en otro punto de ella, será el punto *F* centro del círculo *ABC*. Que es &c.

COROLARIO.

154 Es claro que si alguna recta *BD* corta en un círculo perpendicularmente á otra *CA* en dos partes iguales, se hallará en ella el centro del círculo.

PROPOSICION II.

155 La recta AB que junta qualesquiera dos puntos A, B de la circunferencia del círculo ACB, cae dentro del círculo. *Fig.* 9.

Tómese qualquier punto D en la recta AB, y tírense al centro C las rectas CA, CD, CB. Por ser $CA = CB$, será (64) el ángulo $CAB = CBA$; pero (81) el ángulo externo $CDB > CAD$: luego será el ángulo $CDB > CBA$, de donde resulta que en el triángulo CDB será (86) el lado $CB > CD$: luego el punto D está dentro del círculo. Lo mismo se demostrará de qualquier otro punto de la recta AB; por consiguiente toda ella cae dentro del círculo. Que es &c.

PROPOSICION III.

156 Si la recta DB, que pasa por el centro E del círculo $EABC$, divide en dos partes iguales AF, FC una recta AC, que no pasa por el centro; dicha BD será perpendicular á AC; y si BD es perpendicular á AC, la dividirá por medio. *Fig.* 10.

Tírense los radios EA, EC.

I. En los triángulos AFE, CFE es $AF = FC$ (sup.), $EA = EC$, y el lado EF comun : luego (69) serán iguales los ángulos EFA, EFC; y por consiguiente rectos.

II. Los ángulos EFA, EFC son rectos (sup.), y por consiguiente iguales, lo son tambien (64) los ángulos EAC, ECA, y finalmente el lado EF es comun á los triángulos EFA, EFC: luego será (93) $AF = FC$. Que es &c.

PROPOSICION IV.

157 Si en el círculo ACD se cortan dos cuerdas AB, CD, que no pasan por el centro; no se dividirán mutuamente en partes iguales. *Fig.* 11.

Si la una pasa por el centro, es evidente que cortándola la otra fuera de él, no la dividirá en partes iguales. Pero si ninguna de las rectas AB, CD pasa por el centro, tírese EF del centro E, y si se dixese que dichas rectas están divididas por medio en F, serían (156) rectos los ángulos EFD, EFB; y por consiguiente iguales, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION V.

158 Si dos círculos BAC, BDC se cortan mutuamente; no tendrán un mismo centro E. *Fig.* 12.

Si esto fuese posible, tirando del comun centro E los radios EB, EDA, serian iguales ED, EB, EA, lo que es un absurdo. Luego &c.

PROPOSICION VI.

159 Si dos círculos BAC, BDE se tocan interiormente en un punto B; no tendrán un mismo centro F. *Fig.* 13.

Si tienen un mismo centro F, tiradas las rectas FB, FDA, serán iguales las FD, FB, FA, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION VII.

160 Si en el diámetro AB de un círculo se toma qualquier punto G, que no sea el centro, y de él se tiran rectas GC, GD, GE á la circunferencia; la mayor de todas ellas será la parte GA del diámetro en que se halla el centro, y la mas pequeña la otra parte GB del diámetro; de las demas rectas la GC, que está mas cerca de la GA, será mayor que la DG mas apartada; y del punto G únicamente se podrán tirar dos rectas, una á una iguales, es á saber, una á cada lado del diámetro. *Fig.* 14.

Del centro F tírense las rectas FC, FD, FE; constrúyase (90) el ángulo $BFH = BFE$, y tírese la recta GH.

I. Por ser $FA = FC$, será tambien $GA = GF + FC$; pero (87) $GF + FC > GC$: luego será $AG > GC$.

II. En el triángulo FGE es (87) $FE < FG +$

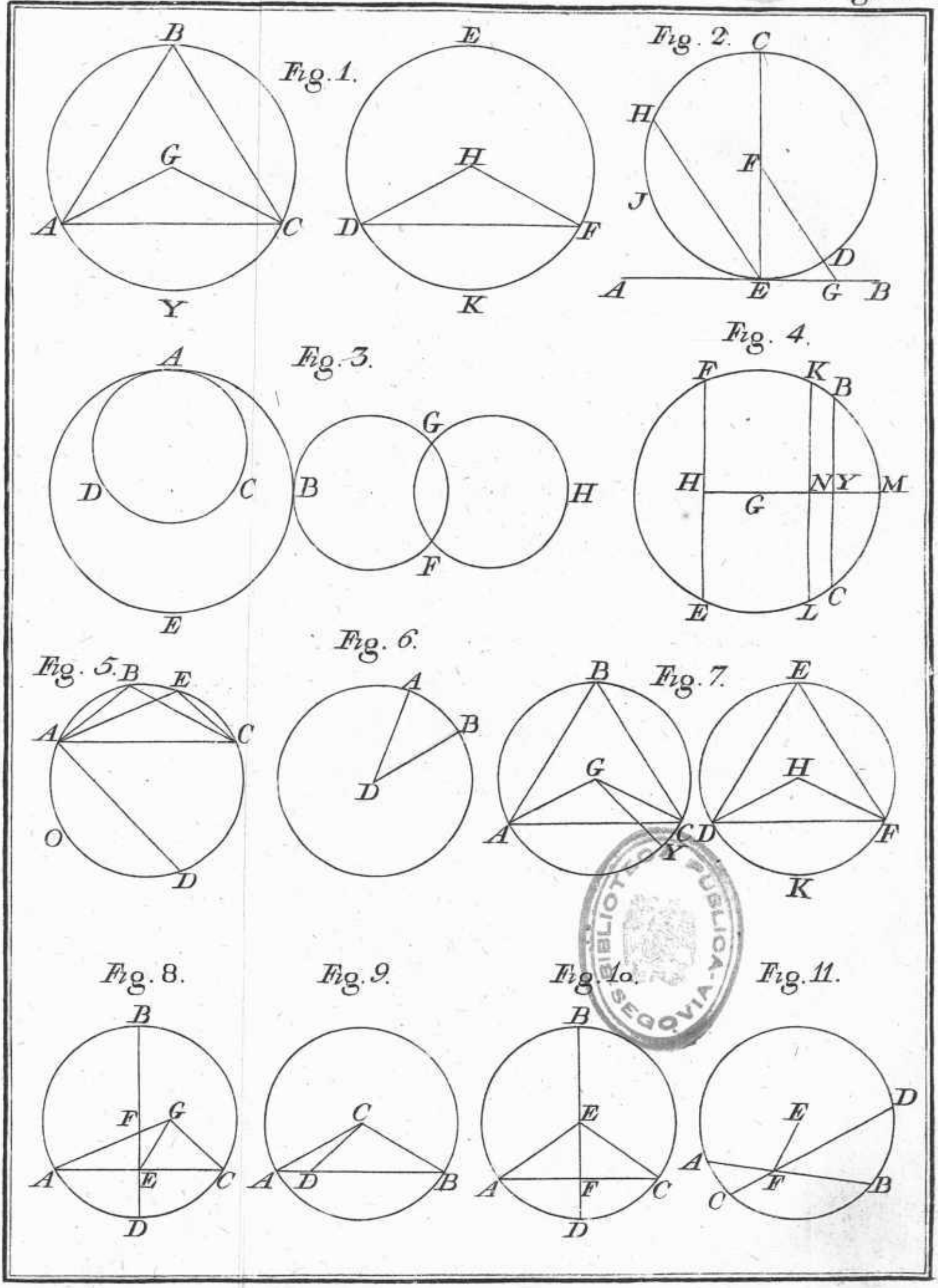


Fig. 1.
B
G
A
C
Y
E
H
D
F
K
Fig. 2.
C
H
F
J
D
A
E
G
B
Fig. 3.
A
D
C
B
E
G
H
F
Fig. 4.
F
K
B
H
N
Y
M
G
E
L
C
Fig. 5.
B
E
A
C
O
D
Fig. 6.
A
B
D
Fig. 7.
B
G
A
C
Y
E
H
D
F
K
Fig. 8.
B
F
G
A
E
C
D
Fig. 9.
C
A
D
B
Fig. 10.
B
E
A
F
C
D
Fig. 11.
D
E
A
F
B
C

GE; pero $FE = FB$: luego será $FB < FG + GE$, y quítada la comun FG, será $GB < GE$.

III. En los triángulos GFC, GFD el lado GF es comun, $FC = FD$, y el ángulo $GFC > GFD$: luego (91) la base $GC > GD$.

IV. Los triángulos GFH, GFE tienen el lado GF comun, $FH = FE$, y el ángulo $GFH = GFE$ (constr.): luego será (63) la base $GH = GE$. Consta por lo dicho, que ninguna otra GC puede ser igual á GE, GH. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

161 Si de un punto A puesto fuera del círculo $KBEF$, se tiran rectas AY, AH, AG, AF á la circunferencia cóncava; la mayor de todas será AY que pasa por el centro K, y de las demas, la mas cercana á esta será mayor que la mas distante, como $AH > AG$; pero de las rectas terminadas en la circunferencia convexâ, será la mas pequeña la AB, que prolongada pasa por el centro, y la AC, que está mas cerca de AB, será menor que la mas apartada AD; finalmente de dicho punto A no se podrán tirar mas de dos rectas iguales, una á una á la circunferencia convexâ, y lo mismo á la cóncava, una á cada parte de la que pasa por el centro. *Fig.* 15.

Del centro K tírense las rectas KH, KG, KF, KC, KD, KE; constrúyase (90) el ángulo $AKL = AKC$, y tírese AL.

I. En el triángulo AKH es (87) $AK + KH > AH$; pero $AK + KH = AY$: luego será $AY > AH$.

II. Los triángulos AKH, AKG tienen el lado AK comun, $KH = KG$, y el ángulo $AKH > AKG$: luego será (91) la base $AH > AG$.

III. En el triángulo KCA es (87) $KA < KC + CA$; pero $KB = KC$: luego $AB < AC$.

IV. Por estar el punto C dentro del triángulo ADK, será (88) $CA + CK < AD + DK$; pero $CK = DK$: luego $AC < AD$.

V. Los triángulos AKC, AKL tienen el lado AK comun, $KC = KL$, y el ángulo $AKC = AKL$ (constr.): luego (63) $AC = AL$. Consta por lo dicho, que ninguna otra AE puede ser igual á AC, AL. Con semejante preparacion se demostrará lo mismo respecto á la circunferencia cóncava. Que es &c.

PROPOSICION IX.

162 Si de un punto A puesto dentro del círculo BCK se pueden tirar á la circunferencia mas de dos rectas iguales; dicho punto será el centro. *Fig.* 16.

Constando (160) que de ningun punto fuera del centro se pueden tirar á la circunferencia mas de dos rectas iguales, será por consiguiente dicho punto *A* el centro del círculo *BCK*. Que es &c.

PROPOSICION X.

163 Dos círculos *YAKBL*, *YEKFL* no se pueden cortar mas que en dos puntos. *Fig.* 17.

Córtense, si fuese posible, dichos círculos en tres puntos *Y*, *K*, *L*; tírense *YK*, *KL*; divídanse por medio en *M*, *N*; y de los puntos *M*, *N* levántense las perpendiculares *MC*, *NH*: los dos círculos tendrán (154) el centro en cada una de dichas perpendiculares; y por consiguiente en el punto *O*, donde ellas se cortan: luego dos círculos, que se cortan, tienen un centro comun, lo que es imposible (158). Luego &c.

PROPOSICION XI.

164 Si dos círculos *GADE*, *FABC* se tocan interiormente; la recta *FG*, que junta los centros, prolongada pasará por el punto *A* del contacto. *Fig.* 18.

Si no es así, la recta *FG* prolongada cortará las circunferencias de dichos círculos fuera del contacto *A*, de suerte que no sea *FGA* una recta, y lo sea *FGDB*: en este caso por pasar *GB* (sup.)

por el centro F del círculo mayor, será $BG < GA$ (160); pero $GA = GD$, por radios del círculo ADE: luego será $BG < GD$, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION XII.

165 Si dos círculos ACD, BCE se tocan exteriormente en C; la recta, que junta los centros A, B, pasará por el punto del contacto. *Fig.* 19.

Porque á no ser así, la recta $ADEB$, que junta los centros A, B, cortaria las circunferencias fuera del contacto C en los puntos D, E, y tiradas AC, y CB, sería (87) $ADEB < AC + CB$; pero $AC + CB = AD + BE$: luego será $ADEB < AD + BE$, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION XIII.

166 Un círculo no puede tocar á otro, ni interior, ni exteriormente, mas que en un punto. *Fig.* 20.

I. Si fuese posible, tóquense interiormente los círculos CAE, BAH en dos puntos A, H: en este caso la recta CB, que junta los centros C, B, prolongada (164) pasará por A, y H; y por consiguiente será $CH = CA$; pero $BH > CH$, y $BH = BA$: luego será $BA > CA$, lo que es imposible.

II. Asimismo si los círculos CAE, EFG se pudiesen tocar exteriormente en dos puntos E, F; tirada

EF, estaría (155) dentro de ambos círculos: luego dichos círculos se cortarian mutuamente contra lo supuesto. Que es &c.

PROPOSICION XIV.

167 En el círculo $EABC$ las rectas iguales AC, BD distan igualmente del centro E; y las rectas AC, BD, que distan igualmente del centro E, son iguales entre sí. *Fig.* 21.

Báxense del centro E las perpendiculares EG, EF á las rectas BD, AC, que quedarán divididas por medio en G, F (156); y tírense las rectas EA, EB.

I. Siendo la recta $AC = BD$ (sup.), tambien serán iguales sus mitades AF, BG: esto supuesto, por ser los triángulos AFE, BGE rectángulos, será (124) $\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2$, y $\overline{BE}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GE}^2$; pero (123) $\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2$, por ser $AE = EB$: luego será $\overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GE}^2$, y quitando los quadrados iguales de las rectas AF, BG iguales, resultará $\overline{FE}^2 = \overline{GE}^2$; y por consiguiente (123) $FE = GE$.

II. Por ser los triángulos AFE, BGE rectángulos en F, G, será $\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2$, y $\overline{EB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GE}^2$; pero (123) $\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2$, por ser $AE = BE$: luego será $\overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GE}^2$, y quitando los quadrados iguales de las rectas FE, EG iguales (sup.), resultará $\overline{AF}^2 = \overline{BG}^2$; por consiguiente $AF = BG$, y $AC = BD$. Que es &c.

PROPOSICION XV.

168 De las rectas que se pueden tirar dentro de un círculo $GABC$, la mayor es el diámetro AD, y la mas próxima á él, como EF, es mayor que la mas distante BC. *Fig.* 22.

I. Tiradas GB, GC, será el diámetro $AD = GB + GC$; pero (87) $GB + GC > BC$: luego $AD > BC$.

II. Sea la distancia $GJ > GH$. Córtese $GN = GH$, y en el punto N levántese la perpendicular KL: finalmente tírense las rectas GK, GL. Los triángulos KGL, BGC tienen el lado $KG = BG$, $GL = GC$, y el ángulo $KGL > BGC$: luego (91) tendrán $KL > BC$; pero (167) $FE = KL$: luego será $FE > BC$. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

169 La perpendicular CD á la extremidad del diámetro AH es tangente al círculo $BAZH$ en el punto A; y entre ella, y la circunferencia no se puede tirar del punto A otra recta AZ, sin que corte al círculo. *Fig.* 23.

I. Del centro B tírese BF á qualquier punto F de la recta CD, y por ser el triángulo BAF rectángulo, será (86) $BF > BA$; pero $BA = BG$:

luego será $BF > BG$; y por consiguiente el punto *F*, como qualquiera otro punto de la recta *CD*, caerá fuera del círculo, y solo el punto *A* será comun á la recta, y al círculo: luego *CD* tocará (144) al círculo en el punto *A*.

II. Tírese del centro *B* la perpendicular *BE* á la recta *AZ*, y en el triángulo rectángulo *BEA* será (86) $BA > BE$; por consiguiente *BE* menor que el radio: luego la *AZ* corta el radio *BY*, y por consiguiente al círculo. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

170 Dado un punto en la circunferencia del círculo *DBC*, como *B*, ó fuera de ella, como *A*, tirar desde él una tangente al círculo. *Fig.* 24.

I. Tírese el radio *DB*, y levántese sobre él en el punto *B* la perpendicular *BE*, que será (169) la tangente que se pide.

II. Tírese la recta *DA*, y con ella como radio desde el centro *D* descríbase un círculo; en el punto *B*, en que el círculo dado corta á la *DA*, levántese sobre esta recta la perpendicular *BE*, que cortará al círculo que se ha descrito en *E*; tírense *ED*, y *CA*, que será la tangente que se pide. Pues los triángulos *ACD*, *EBD* tienen los lados $AD = ED$, $CD = BD$, por radios de unos mismos círculos, y el ángulo *ADC* comun: luego (63) el ángulo *ACD* = *EBD*, y siendo este recto, tambien lo será el otro *ACD*; por consiguiente (169) *AC* tangente al círculo *DBC*. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

171 Si la recta *AB* toca al círculo *FEDC* en el punto *E*, y se tira el radio *FE* al punto del contacto *E*; será este perpendicular á la tangente. *Fig.* 25.

Si se dixese que *FE* no es perpendicular á *AB*, lo será otra *FG*, que cortará (144) la circunferencia en *D*, y por ser el ángulo *FGE* recto (sup.), será $FE > FG$; pero $FE = FD$: luego $FD > FG$, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION XIX.

172 Si la recta *AB* toca al círculo *CDE*, y en el punto *C* del contacto se levanta la perpendicular *CE* á la tangente *AB*; estará el centro del círculo en dicha perpendicular. *Fig.* 26.

Si no fuese así, estaria el centro *F* fuera de *CE*; y tirando *FC*, seria (171) recto el ángulo *FCB*; pero el ángulo *ECB* es recto (sup.): luego será el ángulo $ECB = FCB$, lo que es imposible. Luego &c.

Fig. 12.

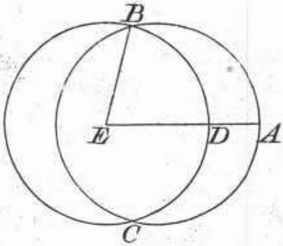


Fig. 13.

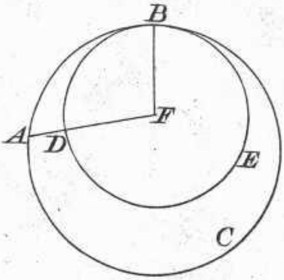


Fig. 14.

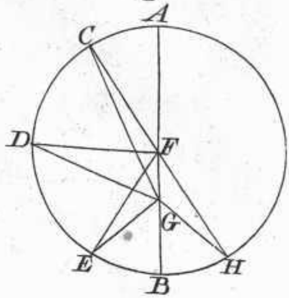


Fig. 15.

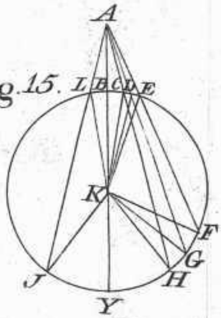


Fig. 16.

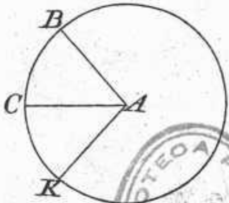


Fig. 17.

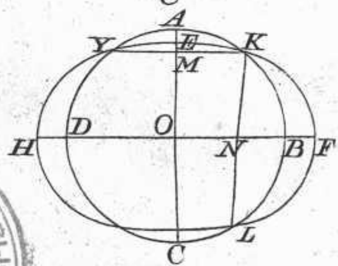


Fig. 18.

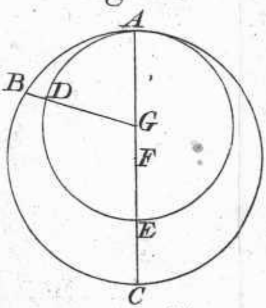


Fig. 19.

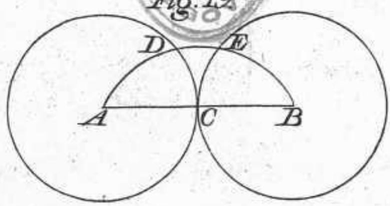


Fig. 20.

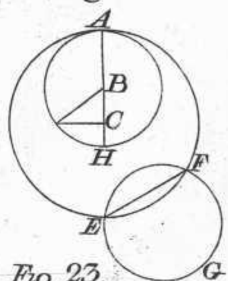


Fig. 21.

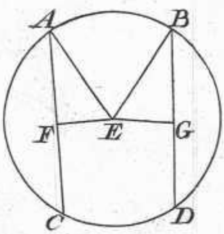


Fig. 22.

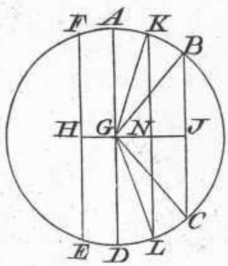
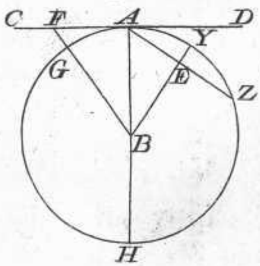


Fig. 23.



PROPOSICION XX.

173 El ángulo *BDC*, formado en el centro *D* de qualquier círculo *DABC*, es duplo del ángulo *BAC* en la circunferencia; con tal que ambos insistan sobre un mismo arco *BC*. *Fig.* 27. 28. 29.

I. Esté el centro *D* dentro del ángulo *BAC* (*Fig.* 27). Tírese *AD*, y prolongada será (101) el ángulo externo $BDE = DAB + DBA$; pero en el triángulo isósceles *BDA* es (64) $DAB = DBA$: luego será $BDE = 2BAE$. Del mismo modo se demostrará el ángulo $CDE = 2CAE$: luego será el ángulo $BDC = 2BAC$.

II. Si el centro *D* (*Fig.* 28) estuviese en *BA*, se demostrará del mismo modo el ángulo $BDC = 2BAC$.

III. Finalmente esté el centro *D* fuera del ángulo *BAC* (*Fig.* 29). Tírese el diámetro *ADE*, y será el ángulo $EDC = 2DAC$, y el ángulo $EDB = 2EAB$: luego será (59) el ángulo $BDC = 2BAC$. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

174 En todo círculo *EDAB* los ángulos *DAC*, *DBC*, que están en un mismo segmento, son iguales entre sí. *Fig.* 30. 31.

I. Si el segmento *DABC* es mayor que el semicírculo (*Fig.* 30); tírense los radios *ED*, *EC*, y el ángulo *E* será (173) duplo de *A*, y tambien de *B*: luego *A* = *B*.

II. Si el segmento *DABC* no es mayor que el semicírculo (*Fig.* 31); dichos ángulos serán tambien iguales: porque en los triángulos *AFD*, *BFC* es el ángulo *FDA* = *FCB*, por el caso anterior, y (79) *AFD* = *BFC*: luego (103) *DAF* = *CBF*. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

175 En todo quadrilátero *ABCD*, cuyos ángulos están en la circunferencia de un círculo; los ángulos opuestos son juntos iguales á dos rectos. *Fig.* 32.

Tirada *AC*, será (174) el ángulo *BAC* = *BDC*, y *BCA* = *BDA*: luego *BAC* + *BCA* = *BDC* + *BDA*; esto es, el ángulo *ADC* = *BAC* + *BCA*, y añadiendo el ángulo *ABC*, será *ABC* + *ADC* = *ABC* + *BAC* + *BCA*; pero estos tres ángulos son (101) iguales á dos rectos: luego *ABC* + *ADC* son tambien iguales á dos rectos. Del mismo modo se demostrará ser los otros dos *BAD*, *BCD* iguales á dos rectos. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

176 Sobre una misma recta *CA*, y ácia una

misma parte, no se pueden describir dos segmentos de círculo *CDA*, *CBA* desiguales, y semejantes. *Fig.* 33.

Dichos dos segmentos *CDA*, *CBA* no se podrán cortar sino en los puntos *C*, y *A*; pues de lo contrario se cortarían dos círculos mas que en dos puntos, lo que es imposible (163); por consiguiente el uno como *ABC* contendrá al otro *ACD*. Esto supuesto tírese *CB*, que corte la circunferencia interior en *D*, y tírense *AD*, *AB*. Siendo, pues, los segmentos *CDA*, *CBA* semejantes (sup.), los ángulos en ellos serán (152) iguales; esto es, $CDA = CBA$, lo que es imposible (81). Luego &c.

PROPOSICION XXIV.

177 Los segmentos de círculo semejantes *ABC*, *DEF*, descritos sobre rectas iguales *AC*, *DF*, son iguales entre sí. *Fig.* 34.

Colóquese el punto *D* sobre el punto *A*, y la recta *DF* sobre la *AC*; caerá el punto *F* en *C*, por ser $DF = AC$ (sup.): en este caso si no se ajustasen los segmentos semejantes *DEF*, *ABC*, quedarian descritos sobre una misma recta *AC*, y ácia una misma parte, dos segmentos desiguales, y semejantes, lo que es imposible (176): luego se ajustarán dichos segmentos, y por consiguiente serán iguales. Que es &c.

PROPOSICION XXV.

178 Dado un segmento *ABC* de un círculo, completar el círculo. *Fig.* 35.

Tírense de qualquier modo dos cuerdas *AB*, *BC*; divídanse por medio en *D*, *E*; y en estos puntos levántense las perpendiculares *DF*, *EF*, que se cortarán en un punto *F*, que será el centro; por consiguiente desde él con el radio *FB* se completará el círculo. Debiendo estar el centro (154) en las perpendiculares *DF*, *EF*, estará en el punto *F* comun á las dos. Que es &c.

PROPOSICION XXVI.

179 En los círculos iguales *GABC*, *HDEF* los ángulos iguales, que están en los centros *G*, *H*, ó en las periferias *B*, *E*, insisten sobre arcos iguales *AC*, *DF*. *Fig.* 7.

Los triángulos *AGC*, *DHF* tienen $GA = HD$, $GC = HF$, y (sup.) el ángulo $AGC = H$: luego (63) $AC = DF$; pero (173) los ángulos *B*, *E* son mitades de los ángulos *G*, *H*: luego $B = E$, y (152) los segmentos *ABC*, *DEF* son semejantes; pero estos segmentos están sobre rectas iguales *AC*, *DF* (demost.): luego (177) el segmento *ABC* $=$ *DEF*; y si se restan de los círculos iguales (sup.), los segmentos residuos *AYC*, *DKF* serán iguales, y se ajustarán sus arcos. Que es &c.

PROPOSICION XXVII.

180 En los círculos iguales *GABC*, *HDEF* los ángulos que insisten sobre arcos iguales *AYC*, *DKF*, y que están en los centros *G*, *H*, ó en las periferias *B*, *E*, son iguales entre sí. *Fig.* 7.

Si se niega, sea el ángulo $AGC > H$: hágase el ángulo $AGY = H$, y será (179) el arco $AY = DKF$; pero (sup.) $AYC = DKF$: luego $AY = AYC$, lo que es imposible: luego el ángulo $AGC = H$, y $B = E$, que son sus mitades (173). Que es &c.

ESCOLIO.

181 Si la recta *EF* es tangente al arco de círculo *BAC* en el punto *A*, donde queda dividido el mismo arco en dos partes iguales; será paralela á la cuerda *BC* (*Fig.* 36). Tirados los radios *DB*, *DA*, *DC*, los triángulos *DGB*, *DGC* tienen $DB = DC$, *DG* comun, y (180) el ángulo $BDA = ADC$, por ser el arco $AB = AC$ (sup.); por consiguiente (63) será el ángulo $DGB = DGC$, y cada uno de ellos recto; pero (171) el ángulo *DAF* es

recto: luego (95) las rectas *CB*, *FE* serán paralelas.

PROPOSICION XXVIII.

182 En los círculos iguales *GABC*, *HDEF* las cuerdas iguales *AC*, *DF* cortan las periferias en arcos respectivamente iguales, el mayor *ABC* al mayor *DEF*, y el menor *AYC* al menor *DKF*. *Fig.* 7.

Tírense los radios *GA*, *GC*, y *HD*, *HF*. Los triángulos *AGC*, *DHF* tienen *GA* = *HD*, *GC* = *HF*, y (sup.) *AC* = *DF*: luego (69) el ángulo *AGC* = *H*; y por consiguiente (179) el arco *AYC* = *DKF*, y quitando estos de las circunferencias iguales, quedará el arco residuo *ABC* = *DEF*. Que es &c.

ESCOLIO.

183 Si la cuerda *AC* es mayor, ó menor que *DF* en círculos iguales, tambien el arco *AYC* será respectivamente mayor, ó menor que *DKF*, si los arcos *AYC*, *DKF* son menores que la semicircunferencia (*Fig.* 7). Porque siendo los lados *AG*, *GC* del triángulo *AGC* iguales á los *DH*, *HF* del triángulo *DHF*, y la base *AC* > *DF*, será (92) el ángulo *AGC* > *DHF*; y si se construye el ángulo *YGA* = *FHD*, será (179) el arco *YA* = *FKD*; por consiguiente el arco *CYA* > *FKD*.

Fig. 24.

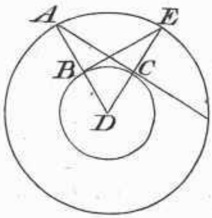


Fig. 25.

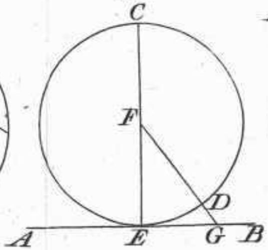


Fig. 26.

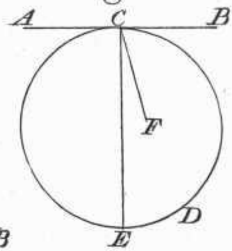


Fig. 27.

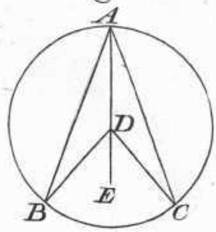


Fig. 28.

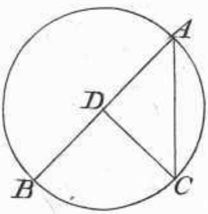


Fig. 29.

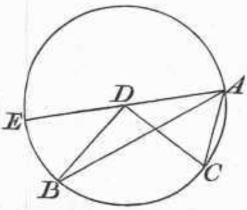


Fig. 30.

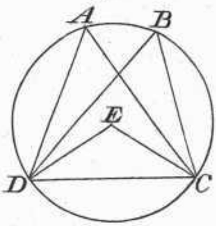


Fig. 31.

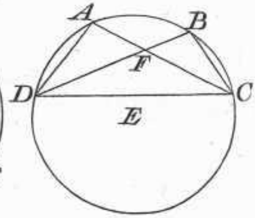


Fig. 32.

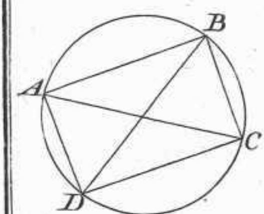
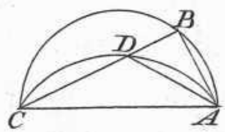


Fig. 33.



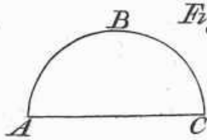


Fig. 34.

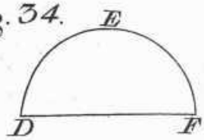
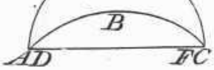


Fig. 34.



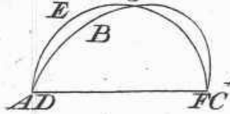


Fig. 35.

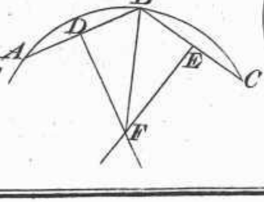
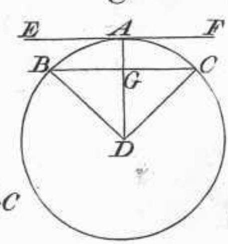
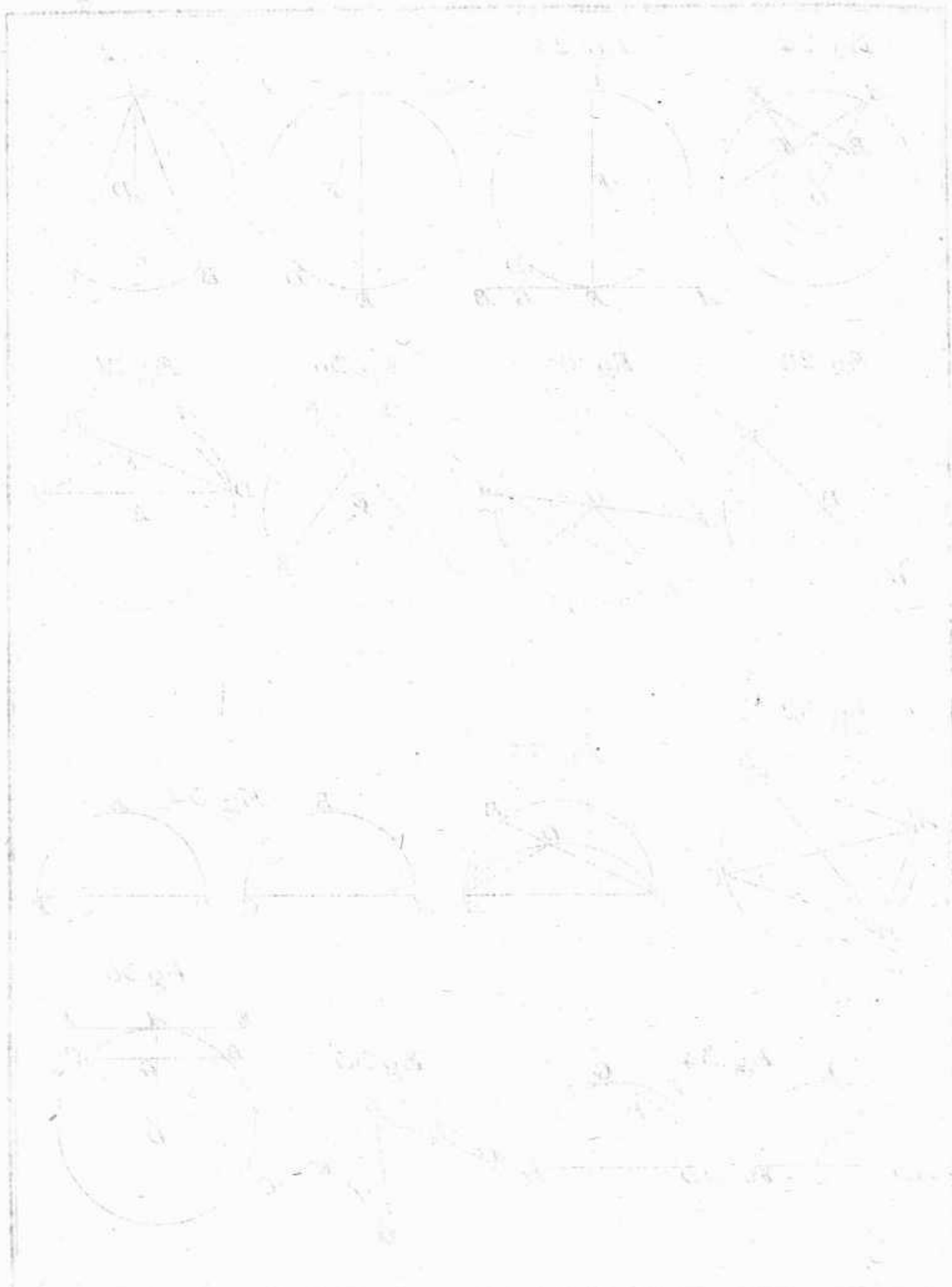


Fig. 36.





PROPOSICION XXIX.

184 En los círculos iguales *GABC*, *HDEF* las subtensas *AC*, *DF* de arcos iguales *AYC*, *DKF* son iguales. *Fig.* 7.

Tírense los radios *GA*, *GC*, y *HD*, *HF*. Los triángulos *AGC* , *DHF* tienen $GA = HD$, $GC = HF$, por radios de círculos iguales, y (sup.) el arco $AYC = DKF$: luego tendrán (180) los ángulos *AGC*, y *H* iguales; por consiguiente (63) las bases, ó cuerdas *AC*, *DF* serán iguales. Que es &c.

PROPOSICION XXX.

185 Dado un arco de círculo, dividirlo en dos partes iguales. *Fig.* 37.

Tírese la cuerda *AC*; divídase por medio en *D*; y levántese en este punto la perpendicular *DB*: será el arco $AB = BC$. Porque juntando *AB*, y *BC*, los triángulos *ADB*, *CDB* tienen $AD = DC$ (const.), *DB* comun , y los ángulos *ADB* , *CDB* rectos (const.): luego la base $AB = BC$ (63); pero las cuerdas iguales en círculos iguales (y por consiguiente en un mismo círculo) subtenden arcos iguales (182): luego el arco $AB = BC$. Que es &c.

PROPOSICION XXXI.

186 El ángulo *ABC* que está en el semicírculo es recto; el que está en un segmento mayor que el semicírculo es agudo, como *BAC*; y el ángulo que está en un segmento menor que el semicírculo es obtuso, como *BFC*; finalmente el ángulo del mayor segmento *BAC* es mayor que el recto; y el del segmento menor *BFC* es menor que el recto. *Fig.* 38.

I. Del centro *D* tírese el radio *DB*, y por ser *DB* $=$ *DA*, será (64) el ángulo *A* $=$ *ABD*; por lo mismo en el triángulo *BDC* será *DCB* $=$ *DBC*; pero el ángulo *ABC* es la suma de *ABD*, y *DBC*: luego tambien es la suma de sus iguales *BAC*, y *BCA*; y por consiguiente (104) el ángulo *ABC* recto, como tambien *EBC*.

II. Siendo el ángulo *ABC* recto, será (83) el ángulo *BAC* agudo.

III. En el quadrilátero *ABFC* los ángulos *A*, *F* son (175) iguales á dos rectos; pero *A* es menor que un recto (demost.): luego *F* será mayor que un recto.

IV. Finalmente el ángulo formado por la cuerda *BC*, y el arco del mayor segmento *BAC* es mayor que el recto *CBA*; y el formado por la misma

BC, y el arco del segmento menor *BFC* es menor que el recto *CBE*. Que es &c.

PROPOSICION XXXII.

187 Si en un mismo punto *C* de la circunferencia de un círculo concurriesen una tangente *AB*, y una secante *EC*; los ángulos que forman las dos en el punto del contacto, son respectivamente iguales á los que pueden formarse en los segmentos alternos; esto es, $ECB = EDC$, $ECA = EFC$. *Fig.* 39.

I. En el punto *C* del contacto levántese la perpendicular *CD*, y tírese *DE*. Siendo *CD* (172) diámetro, el ángulo *DEC* en el semicírculo será recto (186), y por consiguiente (104) serán los ángulos *EDC*, y *DCE* iguales á un recto; pero el ángulo *DCB* es recto (const.): luego si de los ángulos *EDC*, *DCE*, y *DCB* iguales se quita el comun *DCE*, quedará $ECB = EDC =$ á otro qualquiera formado en el mismo segmento (174).

II. En el quadrilátero *DCFE* los ángulos *D*, y *F* son iguales (175) á dos rectos; pero (74) *ECA*, y *ECB* son iguales á dos rectos: luego $ECA + ECB = D + F$; y quitando $ECB = D$ (demost.), queda $ECA = F$. Que es &c.

PROPOSICION XXXIII.

188 Sobre una recta dada *AB* describir un segmento de círculo capaz de contener un ángulo igual á un ángulo rectilineo dado. *Fig.* 40, 41.

I. Si el ángulo dado es recto; divídase *AB* por medio en *F*, y haciendo centro en *F*, con el intervalo *FA* descríbase el semicírculo *ADB*, que será (186) el segmento que se pide. *Fig.* 40.

II. Si el ángulo dado *C* es agudo; constrúyase el ángulo *BAD* = *C* (*Fig.* 41), y en el punto *A* levántese sobre *HD* la perpendicular *AE*; en el otro extremo *B* de la dada *AB* hágase un ángulo *ABF* = *FAB*, y el lado *BF* cortará (52) á la *AE* en un punto *F*. Con el centro *F*, y el radio *FA* descríbase un círculo, que pasará por *B* (por ser el ángulo *FAB* = *FBA* (const.), y por consiguiente (66) *FA* = *FB*), y el segmento *AYB* será el que se pide. La recta *AE* es diámetro, por estar en ella el centro (const.), la recta *HD* tangente (169), por serle perpendicular en *A* (const.), y *AB* secante: luego el ángulo *BAD* = *AYB* (187), y el segmento *AYB* es capaz del ángulo *BAD* = *C*.

III. Si el ángulo dado *G* es obtuso; hágase el ángulo *HAB* = *G*, y con la construccion antecedente se demostrará del mismo modo, que el segmento *ALB* es el que se pide. Que es &c.

PROPOSICION XXXIV.

189 Cortar de un círculo dado ABC un segmento capaz de un ángulo igual á un ángulo rectilíneo dado D. *Fig.* 42.

Por un punto A de la circunferencia tírese (170) la tangente EF al círculo dado BAC; hágase en A el ángulo $CAF = D$, y el segmento ABC, que corta la AC, será el que se pide: pues por ser el ángulo $B = CAF$ (187), y $CAF = D$ (const.), será $B = D$. Que es &c.

PROPOSICION XXXV.

190 Si dos rectas AB, DC se cortan dentro del círculo; el rectángulo formado de los segmentos de la una será igual al rectángulo de los segmentos de la otra. *Fig.* 43. 44.

I. Si se cortan en el centro F, es evidente; porque los segmentos son radios.

II. Si la recta AB pasa por el centro F, y es perpendicular á CD (*Fig.* 43); tírese FD, y será (133) $AE \times EB + \overline{FE}^2 = \overline{FB}^2 = \overline{FD}^2$; pero (124) $\overline{FD}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{ED}^2$: luego será $AE \times EB + \overline{FE}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{ED}^2$, y quitando $\overline{FE}^2$, que es comun, será $AE \times EB = \overline{ED}^2$, ó $CE \times ED$, por ser (156) $CE = ED$.

III. Pase la recta AB por el centro F, y corte á la CD formando con ella ángulos desiguales; tírense FG perpendicular á CD, y FC (*Fig.* 44). Consta (133) que $AE \times EB + \overline{FE}^2 = \overline{FB}^2 = \overline{FC}^2$, por ser $FB = FC$; pero en los triángulos rectángulos FGE, FGC es (124) $\overline{FE}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GE}^2$, $\overline{FC}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GC}^2$: luego $AE \times EB + \overline{FG}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GC}^2$, y quitando $\overline{FG}^2$, será $AE \times EB + \overline{GE}^2 = \overline{GC}^2$; pero por estar CD dividida por medio en G (156), es $\overline{GC}^2 = CE \times ED + \overline{GE}^2$: luego $AE \times EB + \overline{GE}^2 = CE \times ED + \overline{GE}^2$; y por consiguiente $AE \times EB = CE \times ED$.

IV. Si ninguna de las rectas AB, CD, que se cortan en E, pasa por el centro; tírese por E el diámetro MN, y será por lo demostrado $ME \times EN = CE \times ED$, y tambien $ME \times EN = AE \times EB$: luego $CE \times ED = AE \times EB$. Que es &c.

PROPOSICION XXXVI.

191 Si de un punto D fuera del círculo se tiran á él una tangente DB, y una secante DA; el quadrado de la tangente será igual al rectángulo de toda la secante DA por su segmento exterior DC; esto es, $\overline{DB}^2 = AD \times DC$ (*Fig.* 45, 46).

I. Pase DA por el centro E (*Fig.* 45); tírese al punto del contacto el radio EB. Siendo (171) el ángulo DBE recto, será (124) $\overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{DE}^2 = AD \times DC + \overline{CE}^2$ (134), y por ser (123) $\overline{CE}^2 = \overline{BE}^2$, será $\overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 = AD \times DC + \overline{BE}^2$, y restando $\overline{BE}^2$, queda $AD \times DC = \overline{DB}^2$.

II. Dexe de pasar DA por el centro E (*Fig.* 46); báxese EF perpendicular á DA, que dividirá la AC por medio en F (156), y tírense EB, ED, EC. Siendo los ángulos DBE, DFE rectos, será (124) $\overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{ED}^2$, y $\overline{EF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{ED}^2$; por consiguiente $\overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2$; pero (134) $\overline{FD}^2 = AD \times DC + \overline{CF}^2$: luego $\overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{EF}^2 + AD \times DC + \overline{CF}^2$, y por ser (124) $\overline{EF}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2$ (123), será $\overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 = AD \times DC + \overline{BE}^2$, y restando $\overline{BE}^2$, queda $\overline{DB}^2 = AD \times DC$. Que es &c.

COROLARIO I.

192 Si de un punto A fuera del círculo se tiran á él muchas secantes AB, AC, serán los rectángulos $BA \times AE$, $CA \times AF$, de cada una de ellas por su segmento exterior, iguales entre sí (*Fig.* 47): porque cada uno de estos rectángulos será igual (191) al quadrado de la tangente AD.

COROLARIO II.

193 Si de un punto A fuera del círculo se

tiran á él dos tangentes AD, AG, serán iguales entre sí (*Fig.* 47): porque tirada la secante AB, será (191) $AD^2 = BA \times AE = \overline{AG}^2$; por consiguiente (123) $AD = AG$.

PROPOSICION XXXVII.

194 Si de un punto D fuera del círculo se tiran una secante DA, y otra DB, que caiga en la circunferencia, de suerte, que su quadrado sea igual al rectángulo de toda la secante por su segmento exterior; dicha recta DB será tangente. *Fig.* 48.

Desde el punto D tírese (170) la tangente DF, y del centro E las ED, EB, EF. Por ser la DF tangente (constr.), será (191) $AD \times DC = \overline{DF}^2$; pero (sup.) $AD \times DC = \overline{DB}^2$; luego $\overline{DF}^2 = \overline{DB}^2$, y (123) $DF = DB$; pero ademas los triángulos DBE, DFE tienen DE comun, $EB = EF$ por radios: luego tendrán (69) el ángulo $B = F$; pero este es recto (171): luego tambien el ángulo B, y (169) DB tangente. Que es &c.

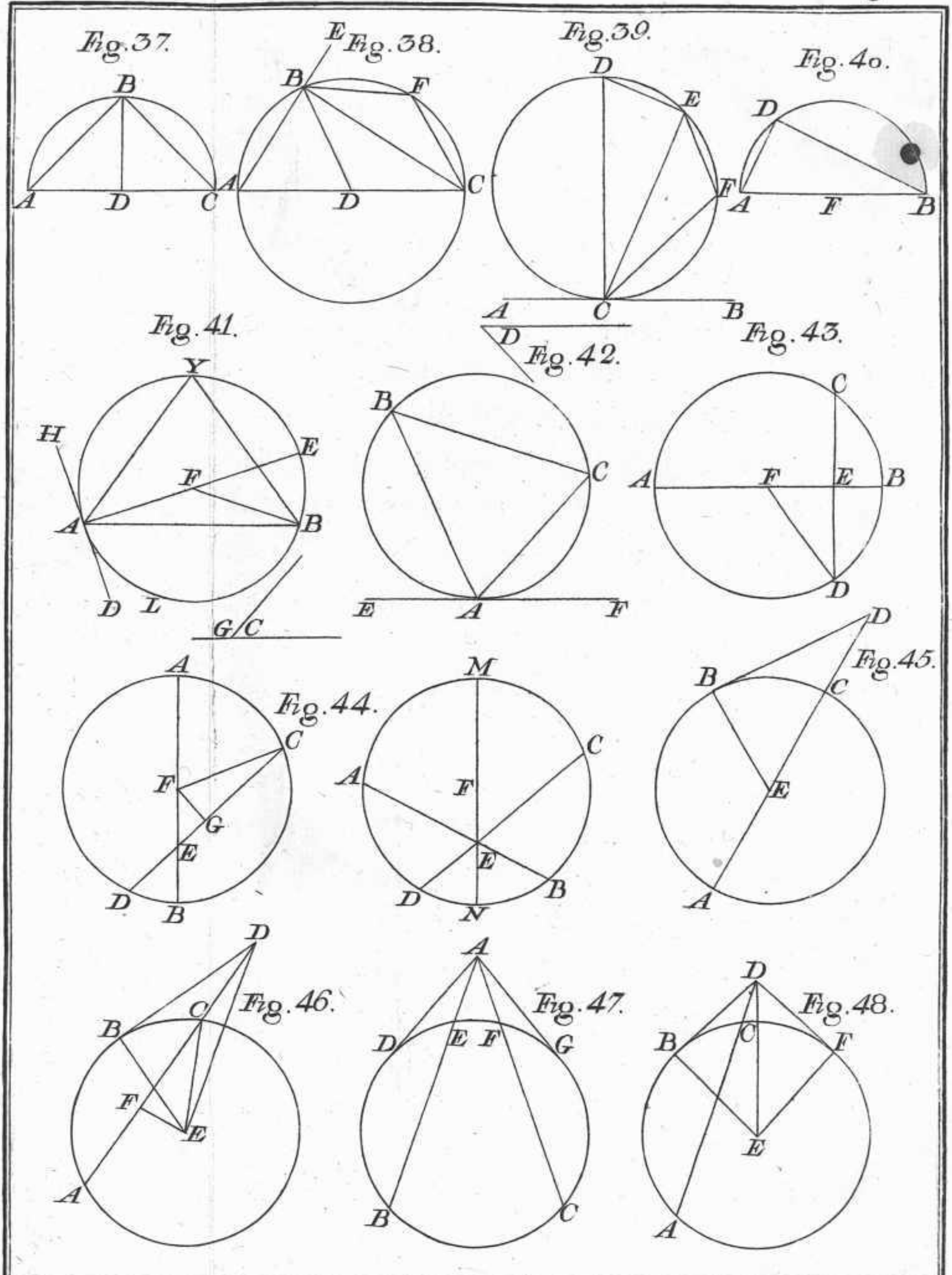


Fig. 37.
B
A
D
C
Fig. 38.
E
B
F
A
D
C
Fig. 39.
D
E
F
A
C
B
Fig. 40.
D
A
F
B
Fig. 41.
Y
H
E
F
A
B
D
L
G
C
Fig. 42.
A
D
B
C
E
A
F
Fig. 43.
C
A
F
E
B
D
Fig. 44.
A
C
F
G
E
D
B
M
C
A
F
E
D
N
B
Fig. 45.
D
B
C
E
A
Fig. 46.
D
C
B
F
E
A
Fig. 47.
A
D
E
F
G
B
C
Fig. 48.
D
C
B
F
E
A

LIBRO IV.

DEFINICIONES.

195 Una figura rectilinea se dice inscrita en otra figura rectilinea, quando çada uno de los ángulos de la que se inscribe, toca á çada uno de los lados de la otra, en quien se inscribe; y así el triángulo *DEF* está inscrito en el triángulo *ABC*. *Fig.* 1.

196 Tambien una figura se dice circunscrita á otra, quando cada uno de los lados de la que se circunscribe, toca á cada uno de los ángulos de la otra, al rededor de quien se describe; y así el triángulo *ABC* está circunscrito al triángulo *DFE*. *Fig.* 1.

197 Una figura rectilinea se dice inscrita en un círculo, quando cada uno de sus ángulos toca á la circunferencia del círculo, como el triángulo *CBA*. *Fig.* 2.

198 Una figura rectilinea se dice circunscrita al círculo, quando todos sus lados son tangentes á la circunferencia del círculo, como el triángulo *EDF*. *Fig.* 3.

199 Tambien un círculo se dice inscrito en una figura rectilinea, quando todos los lados de esta son tangentes á la circunferencia del círculo; y tal

es el círculo *GH* respecto al triángulo *EDF*. *Fig*. 3.

200 Un círculo se dice circunscrito á una figura rectilinea, quando cada uno de los ángulos de esta toca la circunferencia del círculo; y tal es el círculo *ABC* respecto del triángulo *ABC*. *Fig*. 2.

201 Se dice, que una recta está acomodada á un círculo, quando sus extremos se hallan en la circunferencia del círculo, como *AB*. *Fig*. 4.

PROPOSICION I.

202 Dado el círculo *ABC*, acomodarle una recta *AB* igual á la dada *D*, con tal que no sea mayor que el diámetro *AC* de dicho círculo. *Fig*. 5.

Haciendo centro en *A* con el intervalo $AE = D$, descríbase el círculo *AEB*, que cortará en *B* á la circunferencia del círculo dado, y tírese *AB*, que será la recta que se pide. Por ser $AB = AE$, y $AE = D$ (constr.), será $AB = D$; por consiguiente se habrá acomodado en el círculo dado *ABC* la recta *AB* (201) igual á la dada *D*. Que es &c.

PROPOSICION II.

203 Dado el círculo *ABC* incribirle un triángulo equiángulo al dado *DEF*. *Fig*. 6.

Tírese (170) la tangente *GH* en qualquier punto *A* del círculo; constrúyanse (90) los ángulos *CAH*, *BAG* iguales respectivamente á los ángulos *E*, *F*, y tírese *BC*: será el triángulo *BAC* el que se pide. Porque siendo el ángulo $B =$ CAH (187), y el ángulo $CAH = E$ (constr.), será el ángulo $B = E$; del mismo modo se demostrará el ángulo $C = F$: luego (103) el triángulo *BAC* será equiángulo á *EDF*, é inscrito (195) en el círculo dado *BAC*. Que es &c.

PROPOSICION III.

204 Circunscribir á un círculo dado *YABC* un triángulo equiángulo al dado *EDF*. *Fig.* 7.

Prolónguese por ambas partes el lado *EF*; en el centro *Y* constrúyanse (90) los ángulos *AYB*, *BYC* iguales respectivamente á los *DEG*, *DFH*; tírense (170) las tangentes *LN*, *LM*, *MN* en los puntos *A*, *B*, *C*, y estas formarán el triángulo *LNM* que se pide. Siendo los ángulos *LBY*, *LAY* rectos (171), tirada *BA* serán los ángulos *LBA*, *LAB* juntos menores que dos rectos; por lo que se encontrarán las rectas *BL*, *AL* en un punto *L*. Del mismo modo se demostrará, que *BM* encontrará á *CM*, y la *AN* á *CN*; de lo que resulta, que dichas tangentes *LM*, *LN*, *NM* formarán (196) el triángulo circunscrito al círculo dado *ABC*. Ademas los ángulos del trapecio *LAYB* son iguales á quatro rectos, por ser iguales á los ángulos juntos de los dos triángulos *AΥB*, *ALB* (101); y los ángulos *LAΥ*, *LBΥ* son rectos: luego *L*, *AΥB* iguales á dos rectos; pero los ángulos *DEG*, *DEF* son (74) iguales á dos rectos: luego $L + A\Upsilon B = DEG + DEF$, y por ser $A\Upsilon B = DEG$ (constr.), tambien será el ángulo $L = DEF$. Del mismo modo se demostrará el ángulo $M = DFE$: luego será (103) el triángulo *LNM* equiángulo á *EDF*, y circunscrito al círculo *ABC*. Que es &c.

PROPOSICION IV.

205 Dado el triángulo *ABC* inscribirle un círculo *EFG*. *Fig.* 8.

Divídanse (70) en dos partes iguales los ángulos *B*, y *C* por las rectas *BD*, *CD*, las quales se cortarán en un punto *D*, y de este báxese la perpendicular *DE* á qualquier lado *AB* del triángulo dado; y describiendo un círculo con el radio *DE*, será este el que se pide. Pues baxada la perpendicular *DF* al otro lado *BC*, los triángulos *DEB*, *DFB* tendrán la base *BD* comun, el ángulo $DBE = DBF$ (constr.), y el ángulo $DEB = DFB$, por ser ambos rectos: luego será (93) $DE = DF$. Del mismo modo se demostrará, que baxada la perpendicular *DG* al lado *AC*, será $DF = DG$: luego el círculo descrito con el radio *DE* pasará por los puntos *E*, *F*, *G*, y por ser los ángulos en *E*, *F*, *G* rectos, tocará (169) á los lados del triángulo *ABC*, y estará inscrito en él. Que es &c.

PROPOSICION V.

206 Circunscribir un círculo *FBAC* al triángulo dado *BAC*. *Fig.* 9.

Divídanse por medio qualesquiera dos lados *BA*, *AC* en los puntos *D*, *E*, y por estos levántense sobre dichos lados las perpendiculares *DF*, *EF*, las quales se cortarán en el punto *F*, que será el centro del círculo que se pide. Tiradas *FA*, *FB*, *FC*, los triángulos *FDB*, *FDA* tendrán el lado *BD* = *DA* (constr.), *DF* comun, y los ángulos en *D* rectos (constr.): luego será (63) *BF* = *FA*. Del mismo modo se demostrará *FA* = *FC*: luego el círculo descrito con el radio *FB* pasará por los puntos *B*, *A*, *C*, y estará circunscrito al triángulo *BAC*. Que es &c.

PROPOSICION VI.

207 En el círculo dado *EABCD* inscribir un quadrado *ABCD*. *Fig.* 10.

Tírense los diámetros *AC*, *BD* perpendiculares entre sí, y tambien las rectas *AB*, *BC*, *CD*, *DA*:

será *ABCD* el quadrado que se pide. Por ser los quatro ángulos en *E* rectos, é iguales los lados *AE*, *EB*, *EC*, *ED*, serán iguales (63) las cuerdas *AB*, *BC*, *CD*, *DA*: luego la figura *ABCD* es equilátera; pero ademas los ángulos de la misma son rectos (186), porque están en semicírculos: luego *ABCD* será un quadrado que estará inscrito en el círculo *EABCD*. Que es &c.

PROPOSICION VII.

208 Circunscribir un quadrado al círculo dado *ABCD*. *Fig.* 11.

Tírense dos diámetros *AC*, *BD* perpendiculares entre sí, y por sus extremos (170) las tangentes *FH*, *HY*, *YG*, *GF*, que se encontrarán en los puntos *F*, *H*, *Y*, *G*; y formarán el quadrado *FHYG* que se pide. Por ser *FG*, *HY* tangentes al círculo en los extremos *A*, *C* del diámetro (constr.), serán los ángulos *FAC*, *HCA* rectos (171); y por consiguiente (95) las rectas *FG*, *HY* serán paralelas. Del mismo modo se demostrarán paralelas *FH*, *GY*: luego el quadrilátero *FHYG* es paralelogramo. Igualmente se demostrará que los quadriláteros *FBDG*, *FACH* son paralelogramos: de donde se deduce (107) que los lados *FG*, *FH* son iguales al diámetro del círculo, y por consiguiente iguales entre sí. Tambien por ser los ángulos *FAC*, *CAG* rectos en los paralelogramos *AH*, *AY*, lo serán (97) los ángulos *F*, *H*, *Y*, *G*: luego *FHYG* será un quadrado, y estará circunscrito al círculo *ABCD*. Que es &c.

ESCOLIO.

209 El quadrado *FHYG* circunscrito al círculo es duplo del quadrado *ABCD* inscrito: porque siendo el rectángulo *BG* duplo (116) del triángulo *BAD*, y el rectángulo *BY* duplo del triángulo *BCD*, será el quadrado *FHYG* duplo del quadrado *ABCD*.

PROPOSICION VIII.

210 Inscribir un círculo al quadrado *ABCD*. *Fig.* 12.

Divídanse por medio los lados del quadrado en los puntos *H*, *E*, *F*, *G*; tírense las rectas *HF*, *EG*, que se cortarán en un punto *Y*, y haciendo centro en él, con el intervalo *YH* descríbase el círculo *YEFGH* que será el que se pide. Por ser *AD* paralela, é igual (107) á *BC*, serán sus mitades *AH* y *BF*, *HD* y *FC* paralelas, é iguales; por consiguiente (106) *AB*, *HF*, *DC* serán iguales, y paralelas, y (97) los ángulos en *H*, y *F* rectos. Del mismo modo se demostrará, que *AD*, *EG*, *BC* son iguales, y paralelas, y los ángulos en *E*, y *G* rectos: luego *YA*, *YD*, *YC*, *YB* serán paralelogramos; y por ser iguales *AE*, *AH*, *HD*, *DG*, *GC*, *CF*, *FB*, *BE*, tambien serán iguales (107) *HY*, *YE*, *YG*, *YF*: luego el círculo descrito con el radio *YH* pasará por los puntos *E*, *F*, *G*, y tocará (169) á los lados del quadrado, por ser los ángulos en *H*, *E*, *F*, *G* rectos. Luego &c.

PROPOSICION IX.

211 Circunscribir un círculo al quadrado dado *ABCD*. *Fig.* 10.

Tírense las diagonales *AC*, *BD*, que se cortarán en un punto *E*; y descríbase con el radio *EA* el círculo *EABCD*, que será el que se pide. Por ser *AB* = *AD*, y el ángulo *A* recto (sup.), serán semirectos (105) los ángulos *ABD*, *ADB*; y como los ángulos *ABC*, *ADC* son rectos, tambien serán semirectos los ángulos *DBC*, *BDC*. Del mismo modo se demostrará, que son semirectos los ángulos *BCA*, *BAC*, y tambien los ángulos *ACD*, *CAD*; de donde resultará (66) que serán iguales *EB*, *EA*, *ED*, *EC*: luego el círculo descrito con el radio *EA* pasará por los ángulos *A*, *B*, *C*, *D* del quadrado dado. Que es &c.

PROPOSICION X.

212 Construir un triángulo isósceles *ABD*,

Fig. 1.

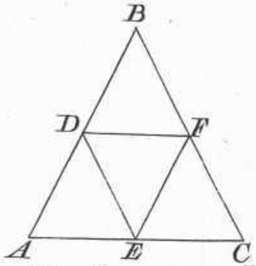


Fig. 2.

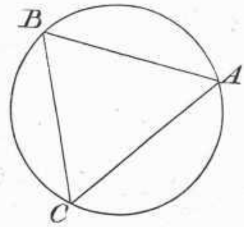


Fig. 3.

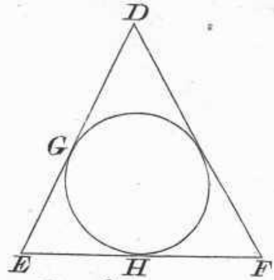


Fig. 4.

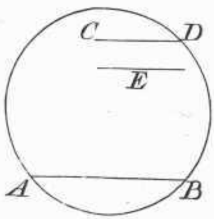


Fig. 5.

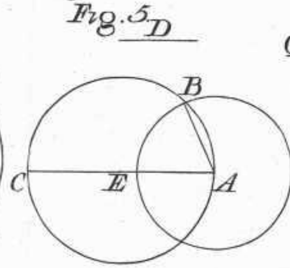


Fig. 6.

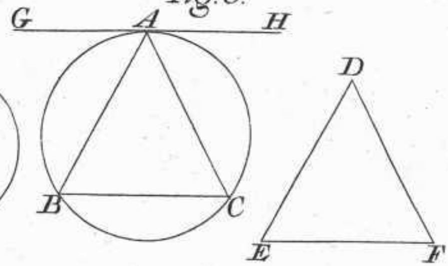


Fig. 7.

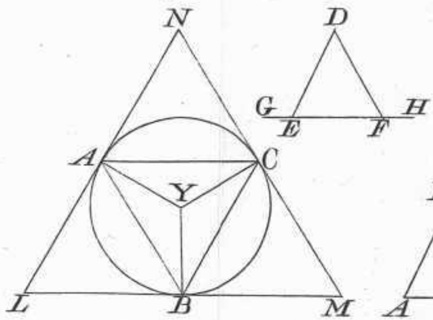


Fig. 8.

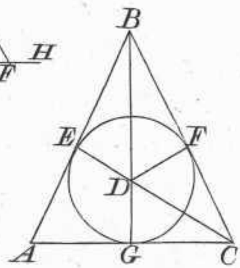


Fig. 9.

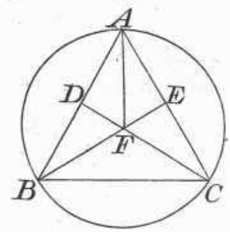


Fig. 10.

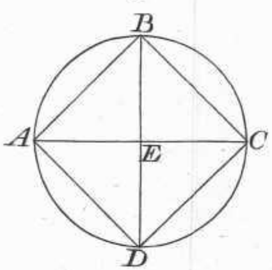


Fig. 11.

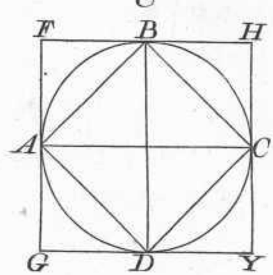
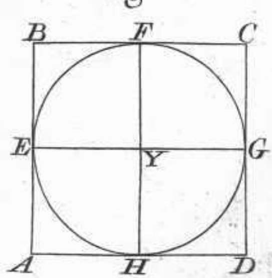


Fig. 12.



de suerte, que cada ángulo *ABD*, *ADB* sobre la base sea duplo del ángulo vertical *A*. *Fig.* 13.

Divídase qualquiera recta *AB* en un punto *C*, de modo, que (139) sea $AB \times BC = \overline{AC}^2$, y haciendo centro en *A* con el intervalo *AB* descríbase el círculo *ABD*, acomódese en (202) $BD = AC$, y tirada *AD*, será *ABD* el triángulo que se pide. Tírese *DC*, y circunscríbase (206) al triángulo *ACD* el círculo *ACD*, á quien será tangente *BD*: pues siendo $BD = AC$ (constr.), será $\overline{BD}^2 = \overline{AC}^2$; pero $AB \times BC = \overline{AC}^2$ (constr.): luego será $\overline{BD}^2 = AB \times BC$; y por consiguiente (194) la recta *BD* tocará al círculo en *D*, y será el ángulo $BDC = A$ (187), y añadiendo el ángulo *CDA*, será el ángulo $BDA = A + CDA$; pero $BDA = ABD$ (64), y $BCD = A + CDA$ (101): luego será $ABD = BCD$: y por consiguiente (66) $DC = DB$, ó *CA*; de donde resulta, que tambien será el ángulo $CDA = A$: luego será el ángulo *BDA* duplo del ángulo *A*. Que es &c.

PROPOSICION XI.

213 Inscribir un pentágono equilátero, y equiángulo en el círculo *ABCDE*. *Fig.* 14.

Constrúyase (212) el triángulo isósceles *GFH*, que tenga cada ángulo de la base duplo del vertical; é inscríbase en el círculo dado (203) el triángulo *CAD* equiángulo al otro *GFH*; divídanse los ángulos, sobre la base, *ACD*, *ADC* en dos partes iguales por las rectas *CE*, *DB*; y tiradas *CB*, *BA*, *AE*, *ED*, el pentágono *ABCDEA* será el que se pide.

Por ser el triángulo *CAD* equiángulo á *GFH*, serán los ángulos, sobre la base, *ACD*, *ADC* duplos del ángulo *CAD*; pero los ángulos *ACD*, *ADC* están divididos en dos partes iguales por las rectas *CE*, *DB*: luego serán los ángulos *CAD*, *ECD*, *ACE*, *BDC*, *BDA* iguales, y por consiguiente (179) los arcos, y las cuerdas (184) *CD*, *DE*, *EA*, *AB*, y *BC*: luego será el pentágono equilátero; pero ademas sus ángulos *BAE*, *AED*, *&c.* son iguales, porque insisten sobre arcos iguales *BCDE*, *ABCD*, *&c*: luego el pentágono descrito *ABCDEA* será equilátero, y equiángulo. Que es &c.

PROPOSICION XII.

214 Circunscribir un pentágono equilátero, y equiángulo al círculo *FABC*. *Fig.* 15.

Inscríbase en dicho círculo (213) el pentágono *ABCDE* equilátero, y equiángulo; del centro *F* tírense las rectas *FA*, *FE*, *FD*, *FC*, *FB*, á las quales levántense las perpendiculares *GAH*, *HBY*, *YCK*, *KDL*, *LEG*, que prolongadas se encontrarán en los puntos H, Y, K, L, G, y formarán el pentágono $HGLKY$ equilátero, y equiángulo. Por ser GA, GE perpendiculares á los radios FA, FE (const.), tocarán (169) al círculo en A, E; y por consiguiente será (193) $GA = GE$; pero $FA = FE$, y FG comun á los triángulos GFA, GFE: luego (69) será el ángulo $GFA = GFE$; y por consiguiente el ángulo $AFE = 2AFG$. Del mismo modo se demostrará el ángulo $AFB = 2AFH$; pero (69) el ángulo $AFE = AFB$: luego será el ángulo $AFG = AFH$; pero el ángulo $FAH = FAG$, y FA comun á los triángulos FAH, FAG: luego (93) $AH = AG = GE$. Con el mismo método se demostrarán iguales GE, EL, LD, DK &c. por consiguiente los lados del pentágono HG, GL, LK &c. serán iguales; pero tambien lo son sus ángulos YHG, HGL &c. por ser iguales sus mitades FHG, FGH &c: luego el pentágono $GLKYH$ será equilátero, y equiángulo. Que es &c.

COROLARIO.

215 Si se inscribe qualquier figura equilátera, y equiángula en un círculo, y en los vértices de los ángulos de la misma figura se tiran tangentes á dicho círculo, se demostrará del mismo modo que la figura inscrita será equilátera, y equiángula.

PROPOSICION XIII.

216 Inscribir un círculo en el pentágono equilátero, y equiángulo *BAEDC*. *Fig.* 16.

Divídanse dos qualesquiera ángulos *A*, *B* del pentágono en dos partes iguales por las rectas *AF*, *BF*; desde el punto *F* donde se encontrarán dichas rectas, báxese la perpendicular *FG* al lado *BA*, y el círculo descrito con el radio *FG* será el que se pide. Tírense *FC*, *FD*, *FE*, y del punto *F* báxense las perpendiculares *FH*, *FY*, *FK*, *FL* á los demás lados del pentágono. Los triángulos *FBA*, *FBC* tienen *BA* = *BC* (sup.), *BF* comun, y el ángulo *FBA* = *FBC* (constr.): luego será (63) *FA* = *FC*, y el ángulo *FAB* = *FCB*; pero el ángulo *FAB* es mitad del ángulo *BAE*: luego será el ángulo *BCF* mitad del ángulo *BCD* = *BAE*. Del mismo modo se demostrará, que los ángulos *D*, *E* están divididos en partes iguales por las rectas *DF*, *EF*. Tambien los triángulos *FGB*, *FHB* tienen los ángulos en *G*, *H* iguales por rectos, el ángulo *FBG* = *FBH*, y el lado *FB* comun: luego será *FG* = *FH*. Con el mismo método se demostrarán iguales *FH*, *FY*, *FK*, *FL*: luego el círculo descrito con el radio *FG* pasará tambien por los puntos *H*, *Y*, *K*, *L*, y tocará á los lados del pentágono, por ser rectos los ángulos formados en dichos puntos. Que es &c.

COROLARIO.

217 Si en qualquier figura equilátera, y equiángula se dividen en dos partes iguales qualesquiera dos ángulos adyacentes, y del punto *F*, donde se encuentran las rectas que dividen dichos ángulos, se baxan perpendiculares á los lados de la figura; se demostrará del mismo modo que dichas perpendiculares serán iguales, y por consiguiente en dicha figura se inscribirá del mismo modo un círculo. Tambien si de dicho punto *F* se tirán rectas á los vértices de los ángulos de la misma figura, dichas rectas serán iguales.

PROPOSICION XIV.

218 Circunscribir un círculo al pentágono equilátero, y equiángulo *ABCDE*. *Fig.* 17.

Divídanse qualesquiera dos ángulos *CBA*, *BAE* del pentágono, en dos partes iguales, por las rectas *BF*, *AF*, que se encontrarán en un punto *F*, y el círculo descrito con el radio *FA* estará circunscrito al pentágono dado. Tírense las rectas *FC*, *FD*, *FE*. Por estar los ángulos *CBA*, *BAE* divididos en dos partes iguales, tambien serán iguales (217) las rectas *FB*, *FA*, *FE*, *FD*, *FC*: luego el círculo descrito con el radio *FA* pasará por *A*, *B*, *C*, *D*, *E* vértices de los ángulos del pentágono. Que es &c.

COROLARIO.

219 Del mismo modo podrá circunscribirse el círculo á qualquiera figura equilátera, y equiángula.

PROPOSICION XV.

220 Inscribir un exágono equilátero, y equiángulo en el círculo *ABCDEF*, cuyo centro *G*. *Fig*. 18.

Tírese qualquier diámetro *AD*, y haciendo centro en *D*, con el intervalo *DG* descríbase otro círculo *DGC*, que cortará al dado en *C*, *E*; tírense los diámetros *EB*, *CF* por los puntos *E*, *C*, y las rectas *CD*, *DE*, *EF*, *FA*, *AB*, *BC*, que formarán el exágono *ABCDEF* que se pide. Todos los lados de los triángulos *CGD*, *DGE* son iguales entre sí, por ser radios de círculos iguales; y por consiguiente será (69) el ángulo $CDG = DGE$, y (94) *BGE* paralela á *CD*; pero es $BG = CD$, por ser radios de círculos iguales: luego (106) $CB = DG$, y *CB*, *CD*, *DE* serán tambien iguales. Ademas los triángulos *BGA*, *DGE* tienen los lados *BG*, *GA* iguales á los lados *DG*, *GE*, y los ángulos *BGA*, *DGE* verticalmente opuestos iguales (79): luego será (63) $BA = DE$. Del mismo modo se demostrará $AF = DC$, $FE = BC$: luego será *ABCDEF* un exágono equilátero, y tambien equiángulo, porque sus ángulos *BAF*, *AFE*, *&c.* son duplos de los iguales *BAG*, *AFG*, *&c*: luego el exágono *ABCDEF*, que está inscrito en el círculo *ABCDEF*, es el que se pide. Que es &c.

COROLARIO.

221 El lado del exágono inscrito en un círculo es igual al radio.

PROPOSICION XVI.

222 Inscribir en el círculo dado *EACB* un quindecágono equilátero, y equiángulo. *Fig.* 19.

Inscríbase (213) en el círculo dado el pentágono equilátero *AEFGHA*, y ademas (203) el triángulo equilátero *ABC*. Por ser *AB*, *BC*, *CA* iguales (constr.), tambien serán iguales los arcos (182) *AB*, *BC*, *CA*: por la misma razon serán iguales los arcos *AE*, *EF*, *FG*, *GH*, *HA*. Por tanto si se concibe la circunferencia del círculo dividida en quince partes iguales, estarán cinco de dichas partes en el arco *AB*, y tres en el arco *AE*; por consiguiente seis en el arco *AEF*: luego el arco *BF* será una parte de las quince iguales, en que se dexa dividida la circunferencia. Tírese *BF*, y acomodando (202) en el círculo las rectas *BY*, *YE*, *&c.* iguales á *BF*, se tendrá inscrito el quindecágono equilátero, el qual será tambien equiángulo, porque sus ángulos insistirán sobre arcos iguales. Luego &c.

Fig. 13.

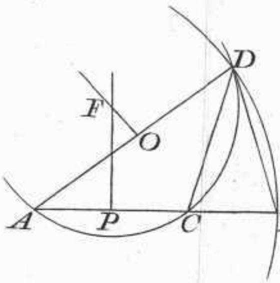


Fig. 14.

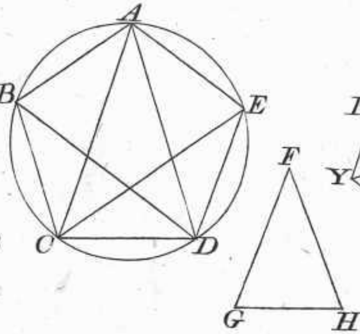


Fig. 15.

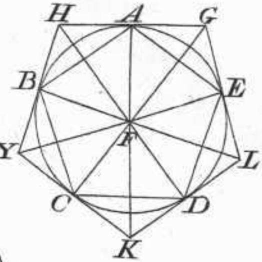


Fig. 16.

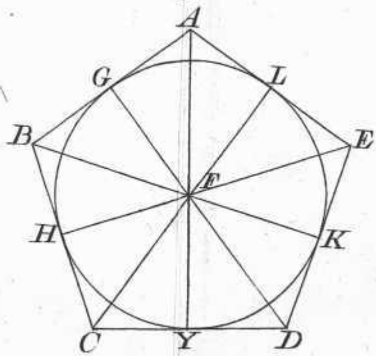


Fig. 17.

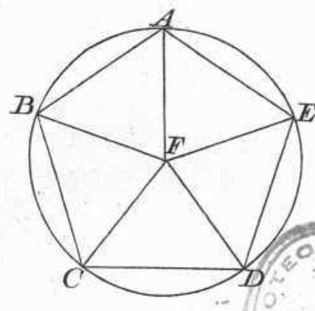


Fig. 18.

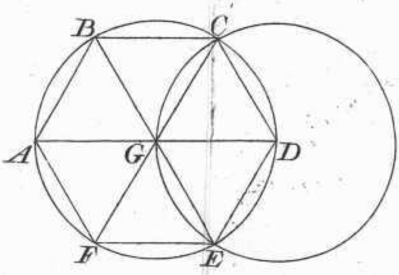
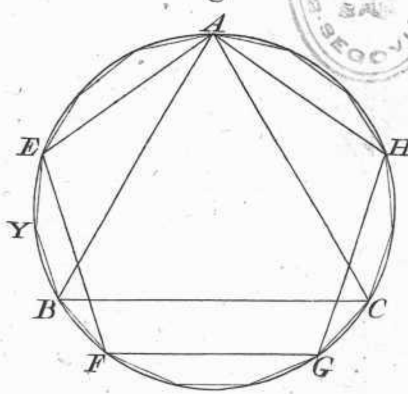


Fig. 19.



LIBRO V.

DEFINICIONES.

223 Parte de una magnitud se llama á otra menor, quando esta la mide exâctamente.

224 Quando una magnitud está medida por otra exâctamente, se llama multíplice de ella.

Dos magnitudes $3A$, $3B$ se llaman (*Fig.* 1) equimultíplices, ó igualmente multíplices de otras dos menores A, B, quando una de las menores A se contiene en su multíplice $3A$ el mismo número de veces, que la otra menor B se contiene en su multíplice $3B$. Entiéndase lo mismo de qualquier número de magnitudes. La notacion de los equimultíplices, y sus partes es la siguiente: supuesto sean A, y B equimultíplices de C, y D, se escribirá multíplice $A : C = B : D$, y se lee A multíplice de C, como B de D.

225 Razon se llama la relacion, ó respecto que tienen entre sí dos magnitudes de un mismo género en orden á la cantidad.

En toda razon la magnitud que se refiere á otra, se llama antecedente; y la otra, á quien la primera se refiere, conseqüente de la razon. En la razon de 6 á 4, 6 es el antecedente, y 4 el conseqüente: al contrario en la razon de 4 á 6.

226 Proporcion, ó analogía se llama á la semejanza de algunas razones.

ESCOLIO.

227 Algunos llaman proporcion á la razon, y proporcionalidad á la analogía, ó semejanza de las razones; lo qual es indiferente, con tal que se entienda una misma cosa. Las especies de proporcion son varias, como la Aritmética, la Geométrica, y la Armónica. Euclides solo trata de la Geométrica: en sus Comentadores se podrán ver las especies, y nombres de ella, si fuere preciso para la inteligencia de los Escritores antiguos. La razon geométrica se nota comunmente en forma de fraccion, partiendo el antecedente por el conseqüente: así $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{C}$, ó bien $A : D$, $B : C$ denota la razon que tiene el antecedente A á su conseqüente D, y la que tiene B á C.

228 Se dice que tienen razon entre sí aquellas magnitudes, que multiplicadas se pueden superar mutuamente.

ESCOLIO.

229 Aunque las magnitudes sean de un mismo género, si no tienen la condicion predicha, de que qualquiera de ellas multiplicada por algun número pueda exceder á la otra, no tendrán entre sí

razon alguna; por esto una linea no la tiene con una superficie. Tambien es de notar, que aunque las magnitudes, entre quienes puede haber razon, deban ser de un mismo género (225), como todas las lineas entre sí, todas las superficies, los sólidos, los pesos, los movimientos, &c. no es preciso que sean de un género individual, y subalterno, sino de un género comun, y universal: así una linea recta, y una curva son en este sentido de diverso género, pero de uno mismo en orden de lineas, ó extension; y así tienen razon, como sucede al diámetro, y á la circunferencia del círculo; porque aunque la razon del diámetro á la circunferencia no sea hasta ahora conocida, sin embargo se demuestra, que el diámetro tomado tres veces no llega á igualar la circunferencia, pero tomado quatro veces la excede; y por consiguiente son lineas entre quienes hai razon.

230 Se dice que la razon de una primera magnitud A á otra segunda B es semejante, igual, ó la misma que la razon de una tercera C á una quarta D, quando tomados dos qualesquiera equimultíplices de la primera, y tercera, esto es, de los antecedentes A, C, y otros dos qualesquiera equimultíplices de la segunda, y quarta, esto es, de los conseqüentes B, D,

A	B	C	D
$2A$	$3B$	$2C$	$3D$
$3A$	$5B$	$3C$	$5D$
$7A$	$2B$	$7C$	$2D$
&c.	&c.	&c.	&c.

siempre se verifica, que si el multíplice de A es igual, mayor, ó menor que el multíplice de B, tambien el multíplice de C es respectivamente igual, mayor, ó menor que el multíplice de D.

La razon de A á B será igual, ó la misma que la razon de C á D, si siempre se verifica, que siendo $2A$ mayor, igual, ó menor que $3B$, tambien es respectivamente $2C$ mayor, igual, ó menor que $3D$; que siendo $3A$ mayor, igual, ó menor que $5B$, tambien es respectivamente $3C$ mayor, igual, ó menor que $5D$; y así de otros equimultíplices qualesquiera.

231 Quando la razon de A á B es igual, ó la misma que la razon de C á D, las quatro magnitudes A, B, C, D se llaman proporcionales. Entiéndase lo mismo de qualquier número de razones iguales. La notacion de las magnitudes proporcionales es la siguiente $A : B = C : D$, ó esta $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, y se lee A á B, como C á D.

232 Pero si tomados dos qualesquiera equimultíplices de la primera, y tercera, esto es, de los antecedentes A y C, y otros dos qualesquiera equimultíplices de la segunda, y quarta, esto es, de los conseqüentes B y D, se encontrase que algun multíplice de A excede al multíplice de B, pero que el correspondiente multíplice de la tercera C no excede al correspondiente multíplice de la quarta D,

sino que es igual, ó menor que él; entonces se dirá que la primera A tiene mayor razon á la segunda B, que la tercera C á la quarta D: esto es, si se verifica que algun multíplice de A, como $2A > 3B$; pero al mismo tiempo el correspondiente multíplice de C, esto es, $2C$ no es mayor $3D$, sino igual, ó menor; la razon de A á B se llamará razon mayor, que la de C á D.

Las razones desiguales se notan así $A : B > C : D$, ó así $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, y se lee A á B en mayor razon que C á D.

ESCOLIO.

233 Euclides en el lib. 7. definicion 20. explicó la igualdad de las razones aplicada á los números, y por consiguiente á las cantidades comensurables entre sí (esto es á las que tienen alguna medida comun, y pueden expresarse por números) de este modo: Números proporcionales son en los que el primero, y tercero son respecto del segundo, y quarto, ó equimultíplices, ó una misma parte, ó unas mismas partes; es decir, que los números son proporcionales, siempre que el primero contiene, ó está contenido en el segundo del mismo modo, ó el mismo número de veces que el tercero en el quarto; y como esto consta en los números por la division del antecedente por el conseqüente, pues el quocien-

te expresa este número de veces ; se infiere que los números, ó magnitudes, que se pueden expresar por ellos, son proporcionales, siempre que los quocientes de esta division son iguales ; y no son proporcionales, ó las razones son desiguales, quando estos quocientes son desiguales. Esta definicion era sin duda, por mas clara, preferible á la que hemos dado (230), si fuese universal ; pero como es evidente, no conviene á las razones que tienen entre sí las magnitudes inconmensurables, esto es, que no tienen alguna medida comun. Debió pues Euclides, para definir las magnitudes proporcionales por un caracter universal, y seguro, recurrir á otra condicion mas universal, como es la de los equimultíplices de los antecedentes, que á un tiempo son iguales, ó mayores, ó menores que otros qualesquiera equimultíplices de los conseqüentes, condicion que igualmente conviene á las razones iguales, así de las magnitudes comensurables, como de las inconmensurables.

234 Toda proporcion consta á lo menos de tres términos.

Quando la proporcion consta de tres términos, se llama continua, y el término medio es conseqüente de la primera razon, y antecedente de la segunda. La proporcion puede continuarse qualquier número de términos ; porque puede el primero tener al segundo igual razon, que el segundo al tercero, que el tercero al quarto &c. Las magnitudes que forman de este modo una proporcion continua de qualquier número de términos, se llaman continuas proporcionales, y se notan con este signo ∺ puesto delante, ó detras de ellas en esta forma ∺ *A*, *B*, *C*, *D*, *&c.*

235 Quando tres magnitudes *A*, *B*, *C* son continuas proporcionales, la primera *A* se dice que está con la tercera *C* en razon duplicada de la que tiene con la segunda *B*; y quando quatro magnitudes *A*, *B*, *C*, *D* son continuas proporcionales, se dice que la primera *A* está con la quarta *D* en razon triplicada de la que tiene con la segunda *B*; si fueren cinco, se dirá que la primera está con la quinta en razon quadruplicada de la que tiene con la segunda; y así en qualquier número de proporcionales continuas, la razon de las extremas se dirá tantuplicada de la razon de la primera á la segunda, quantos fueren los términos menos uno.

236 Magnitudes homólogas, ó semejantes se llaman en la proporcion los antecedentes con los antecedentes, y los conseqüentes con los conseqüentes.

Si es $A : B = C : D$, tanto *A* y *C*, como *B* y *D* serán magnitudes, ó términos homólogos.

237 Alternar una proporcion es comparar

entre sí los antecedentes, y conseqüentes.

Si fuere $A : B = C : D$, se alternará la proporcion así $A : C = B : D$.

ESCOLIO.

238 La proporcion alternada no tiene lugar sino quando las quatro magnitudes son del mismo género, como es evidente por la definicion de la razon.

239 Invertir una proporcion, es comparar los conseqüentes con sus respectivos antecedentes; y así se invertirá la proporcion $A : B = C : D$ de este modo $B : A = D : C$.

240 Componer una proporcion, es comparar las sumas de los antecedentes, y conseqüentes de cada razon con sus respectivos conseqüentes: la proporcion $A : B = C : D$ se compondrá así $A + B : B = C + D : D$.

241 Al contrario, dividir una proporcion, será comparar las diferencias de los antecedentes, y conseqüentes con estos; y así la proporcion $A : B = C : D$ se dividirá de este modo $A - B : B = C - D : D$.

242 Convertir una proporcion, es comparar los antecedentes con las diferencias de ellos, y sus respectivos conseqüentes: por lo que la proporcion

$A : B = C : D$ se convertirá así $A : A - B = C : C - D$.

243 Quando habiendo mas de dos magnitudes de una parte, é igual número de otra; pero de modo, que tomadas de dos en dos estén en la misma razon, la comparacion que se hace de la razon de la primera de la una parte á la última de la misma, con la razon de la primera á la última de la otra parte, se llama igualdad de razon, la que puede ser de dos diferentes modos.

244 Será igualdad ordenada, quando las magnitudes de un lado son proporcionales con las del otro, guardando el mismo orden; esto es, que sea la primera á la segunda en las primeras, como la primera á la segunda en las segundas, y la segunda á la tercera en aquellas, como la segunda á la tercera en estas, y así siguiendo: por lo que dadas tres magnitudes A, B, C de una parte, y otras tres D, E, F de otra, y que sea $A : B = D : E$, y $B : C = E : F$; será por igualdad ordenada $A : C = D : F$.

245 Será igualdad perturbada, quando las magnitudes de un lado son proporcionales con las del otro, pero sin guardar un mismo orden; esto es, que sea la primera á la segunda en un lado, como la segunda á la tercera en el otro, y la segunda á la

tercera en el primer lado, como la primera á la segunda en el otro, &c. Así dadas las magnitudes A, B, C, y D, E, F, si fuere $A : B = E : F$, y $B : C = D : E$; será por igualdad perturbada $A : C = D : F$.

ESCOLIO.

246 En las definiciones anteriores hemos expuesto los varios modos que hay de comparar las magnitudes que son proporcionales, que se llaman modos de arguir. Las proposiciones siguientes demostrarán que todos ellos son válidos, es decir que se conserva la proporcion alternando, invirtiendo, componiendo, dividiendo, y convirtiendo, y que tambien son válidas las proporciones hechas por igualdad ordenada, ó por igualdad perturbada.

AXIOMAS.

247 La magnitud multíplice de una mayor es mayor que la equimultíplice de una menor.

248 La magnitud, cuya multíplice es mayor que la equimultíplice de otra, es mayor que esta.

PROPOSICION I.

249 Si dos, ó mas magnitudes A, B, C fuesen respectivamente equimultíplices de otras D, E, F en igual número; quan multíplice sea una A respec-

to de su parte D, tan multíplice será la suma de las multíplices A, B, C respecto de las partes D, E, F; esto es, si es multíplice $A:D = B:E = C:F$; será multíplice $A:D = A+B+C:D+E+F$. *Fig.* 2.

Siendo multíplice $A:D = B:E = C:F$ (sup.), el número de las partes D contenidas en A será igual al número de las partes E contenidas en B, como tambien al de las partes F contenidas en C; por consiguiente el número de las partes $D+E+F$ contenidas en $A+B+C$ será igual al número de las partes D contenidas en A: luego será (224) multíplice $A+B+C:D+E+F = A:D$. Que es &c.

PROPOSICION II.

250 Si la primera magnitud A es tan multíplice de la segunda E, como la tercera C de la quarta F, y la quinta B es tan multíplice de la segunda E, como la sexta D de la quarta F; la suma de la primera, y quinta será tan multíplice de la segunda, como la suma de la tercera, y sexta lo es de la quarta; esto es, si es multíplice $A:E = C:F$, y tambien es multíplice $B:E = D:F$; será multíplice $A+B:E = C+D:F$. *Fig.* 3.

Siendo multíplice $A:E = C:F$ (sup.), el número de las partes E contenidas en A será igual al número de las partes F contenidas en C. Tambien por ser multíplice $B : E = D : F$ (sup.), el número de las partes E contenidas en B será igual al número de las partes F contenidas en D: luego el número de las partes E contenidas en $A + B$ será igual al número de las partes F contenidas en $C + D$; por consiguiente (224) será multíplice $A + B : E = C + D : F$. Que es &c.

COROLARIO.

251 De aquí se infiere, que si las magnitudes A, B, C, D en qualquier número fuesen multíplices de E, y otras tantas F, G, H, J fuesen respectivamente equimultíplices de L; la suma de las primeras $A + B + C + D$ será tan multíplice de E, como la suma de las últimas $F + G + H + J$ lo es de L.

PROPOSICION III.

252 Si la primera magnitud A es tan multíplice de la segunda B, como la tercera C de la quarta D; qualesquiera equimultíplices EJ, FM de la primera, y de la tercera serán, por igualdad, respectivamente equimultíplices de la segunda, y de la quarta; esto es, si es multíplice $A : B = C : D$, y tambien es multíplice $EJ : A = FM : C$; será multíplice $EJ : B = FM : D$. *Fig.* 4.

Divídase EJ en las partes EG, GH, HJ iguales á A; y FM en las partes FK, KL, LM iguales á C. Por ser multíplice $EJ : A = FM : C$ (sup.), será el número de las partes A contenidas en EJ igual al número de partes C contenidas en FM. Y como es multíplice (sup.) $A : B = C : D$, será tambien multíplice $EG : B = FK : D$; por lo mismo será multíplice $GH : B = KL : D$; y ademas multíplice $HJ : B = LM : D$: luego será (251) multíplice $EG + GH + HJ : B = FK + KL + LM : D$; esto es, $EJ : B = FM : D$. Que es &c.

PROPOSICION IV.

253 Si es $A : B = C : D$, y dos magnitudes E, F son qualesquiera equimultíplices de los antecedentes A, C, y otras dos G, H son otros qualesquiera equimultíplices de los conseqüentes B, D; tambien será $E : G = F : H$. *Fig.* 5.

Tómense J, L, K, M, de suerte que J, K sean qualesquiera equimultíplices de E, F; y L, M otros qualesquiera equimultíplices de G, H. Por ser multíplice $E : A = F : C$ (sup.), y tambien multíplice $J : E = K : F$ (constr.), será (252) multíplice $J : A = K : C$. Del mismo modo se demostrará ser multíplice $L : B = M : D$; pero es la magnitud $A : B = C : D$ (sup.): lue-

$A :$	$B =$	$C :$	D
E	G	F	H
J	L	K	M

go si J es mayor, igual, ó menor que L, tambien será respectivamente (230) K mayor, igual, ó menor que M; pero J, K son equimultíplices de E, F, y L, M lo son de G, H (constr.): luego será (230) $E:G = F:H$. Que es &c.

ESCOLIO.

A	$:B=$	C	$:D$
E	G	F	H
B	$:A=$	D	$:C$
G	E	H	F

254 Si es $A:B = C:D$; será tambien invirtiendo $B:A = D:C$. *Fig.* 5. Tómense qualesquiera equimultíplices E, F de los antecedentes A, C, y otros qualesquiera equimultíplices G, H de los conseqüentes B, D; y por ser $A:B = C:D$, si E es mayor, igual, ó menor que G, tambien será respectivamente (230) F mayor, igual, ó menor que H; por consiguiente si G menor, igual, ó mayor que E, tambien respectivamente será H menor, igual, ó mayor que F; pero (const.) E, F son qualesquiera equimultíplices de A, C, y G, H son otros qualesquiera equimultíplices de B, D: luego será (230) $B:A = D:C$. Que es &c.

PROPOSICION V.

255 Si la magnitud AB es tan multíplice de otra CD, como la parte AE de la primera á la parte CF de la segunda; tambien la residua parte EB

de la primera será tan multíplice de la residua parte DF de la segunda, como la total AB de la total CD; esto es, si es multíplice $AB:CD = AE:CF$, será tambien multíplice $AB:CD = BE:DF$. *Fig.* 6.

Prolónguese BA, de suerte que sea multíplice $AG:DF = AE:CF$; será (249) multíplice $AE:CF = AG + AE:DF + CF$; pero (sup.) es multíplice $AB:CD = AE:CF$: luego será multíplice $AB:CD = AG + AE:DF + FC$; por consiguiente $AB = AG + AE$, y quitada la parte comun AE, será $AG = EB$; pero es multíplice $AG:DF = AE:CF = AB:CD$: luego será multíplice $BE:DF = AB:CD$. Que es &c.

PROPOSICION VI.

256 Si es multíplice $AB:E = CD:F$, y tambien es multíplice $AG:E = CH:F$; las residuas partes GB, HD, ó serán respectivamente iguales á E, F, ó será multíplice $GB:E = HD:F$. *Fig.* 7.

Siendo multíplice $AB:E = CD:F$ (sup.), será el número de las partes E contenidas en AB igual al número de las partes F contenidas en CD: asimismo por ser multíplice $AG:E = CH:F$, será tambien el número de las partes E contenidas en AG igual al número de las partes F contenidas en CH: luego el número de las partes E contenidas en BG será igual al número de las partes F contenidas en DH; por consiguiente, ó será $BG = E$, y $DH = F$, ó será multíplice $BG : E = DH : F$. Que es &c.

PROPOSICION VII.

257 Las magnitudes iguales A, B tienen la misma razon á una tercera C; y esta tiene la misma razon á cada una de ellas. *Fig.* 8.

$A : C = B : C$	
$D\ F$	$E\ F$

Tómense qualesquiera equimultíplices D, E de A, B; y otro qualquier multíplice F de C. Por ser $A = B$ (sup.), tambien será $D = E$; por consiguiente si es D mayor, igual, ó menor que F, tambien será respectivamente E mayor, igual, ó menor que F: luego (230) será $A : C = B : C$; é inversamente (254) $C : A = C : B$. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

258 De dos magnitudes desiguales AB, y C, la mayor AB tendrá mayor razon á otra D, que la menor C; y D tendrá mayor razon á la menor C, que á la mayor AB. *Fig.* 9.

I. Si es $AB > C$: digo que será $AB : D > C : D$. De la mayor AB córtese $AE = C$; tómense de AE y EB; los equimultíplices HG y GF mayores que D; y tómese de D el multíplice JK próxîmamente mayor que HG; por consiguiente menor que HF. Por ser multíplice $HG : AE = GF : EB$ (constr.), será (249) multíplice $HG +$

Fig. 1.

Fig. 2.

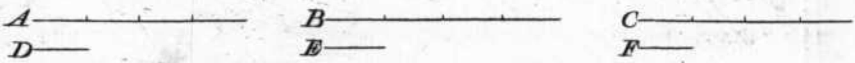


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

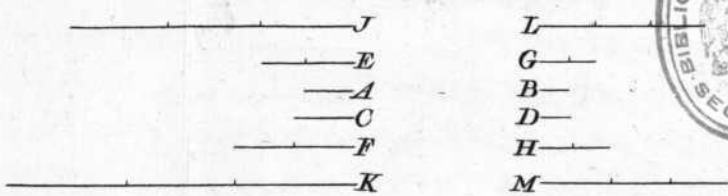
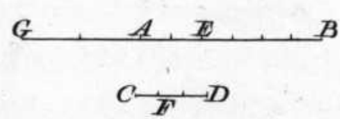


Fig. 6.



$GF : AE + EB = HG : AE$, esto es, $HF : AB = HG : AE$ ó C; pero $HF > JK$ multíplice de D, y $HG < JK$; luego (232) será $AB : D > C : D$.

II. Si es $AB > C$; será $D : C > D : AB$. Supuesta la misma preparacion que antes, será multíplice $HF : AB = HG : C$; pero es $JK < HF$, y $JK > HG$: luego (232) será $D : C > D : AB$. Que es &c.

PROPOSICION IX.

259 Las magnitudes A, B, que tienen una misma razon á otra tercera C, son iguales entre sí: y al contrario si C tiene una misma razon á dos magnitudes A, B; estas serán iguales entre sí. *Fig.* 8.

I. Si es $A : C = B : C$; será $A = B$. Pues si se dixese que $A > B$, sería (258) $A : C > B : C$ contra lo supuesto: tambien si se dixese que $A < B$, sería (258) $B : C > A : C$ contra lo supuesto: luego no pudiendo A ser mayor, ni menor que B, será $A = B$.

II. Si es $C : A = C : B$, se demostrará del mismo modo que A es igual B. Que es &c.

PROPOSICION X.

260 Si es $A : C > B : C$, será $A > B$; y si $C : B > C : A$, será $A > B$. *Fig.* 10.

I. Si es $A : C > B : C$, será $A > B$.

Pues si fuese $A = B$, sería (257) $A : C = B : C$ contra lo supuesto : tambien si fuese $A < B$, sería (258) $B : C > A : C$ contra lo supuesto : luego será $A > B$.

II. Si es $C : B > C : A$, se demostrará igualmente que $A > B$. Que es &c.

PROPOSICION XI.

261 Las razones iguales á una tercera son iguales entre sí : es decir, que si $A : B = E : F$, y $C : D = E : F$; será $A : B = C : D$. *Fig.* 11.

Tómense qualesquiera equimultíplices G, H, J de los antecedentes A, C, E, y otros qualesquiera equimultíplices K, L, M de los conseqüentes B, D, F.

$A : B$,	$C : D$,	$E : F$
$G \quad K$	$H \quad L$	$J \quad M$

Por ser $A : B = E : F$ (sup.), si fuere G mayor, igual, ó menor que K, será respectivamente (230) J mayor, igual, ó menor que M. Asimismo por ser $E : F = C : D$, si fuere J mayor, igual, ó menor que M, será igualmente H mayor, igual, ó menor que L : luego si es G mayor, igual, ó menor que K, será tambien respectivamente H mayor, igual, ó menor que L; por consiguiente (230) será $A : B = C : D$. Que es &c.

PROPOSICION XII.

262 Si qualquier número de magnitudes A, B,

C, D, E, F son proporcionales, esto es, $A : B = C : D = E : F$; la suma de los antecedentes tendrá á la suma de los conseqüentes la misma razon, que qualquier antecedente á su conseqüente; esto es, $A + C + E : B + D + F = A : B$. *Fig.* 11.

Tómense qualesquiera equimultíplices G, H, J de los antecedentes A, C, E, y otros qualesquiera equimultíplices K, L, M de los conseqüentes B, D, F; y será (249) multíplice $G : A = G + H + J : A + C + E$; por la misma razon será multíplice $K : B = K + L + M : B + D + F$;

$$\begin{array}{|l|}\hline A : B = C : D = E : F \\ G \quad K \quad H \quad L \quad J \quad M \\ \hline A : B = A + C + E : B + D + F \\ G \quad K \quad G + H + J \quad K + L + M \\ \hline \end{array}$$

pero siendo $A : B = C : D = E : F$ (sup.), si G es mayor, igual, ó menor que K, tambien será (230) H mayor, igual, ó menor que L; y en esta suposicion J mayor, igual, ó menor que M; por consiguiente si G es mayor, igual, ó menor que K, tambien será $G + H + J$ mayor, igual, ó menor que $K + L + M$: luego será (230) $A : B = A + C + E : B + D + F$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

263 Si es $A : B = C : D$, y $C : D > E : F$; será $A : B > E : F$. *Fig.* 12.

Tómense algunos equimultíplices G, H, J de los antecedentes A, C, E, y algunos otros equimultíplices K, L, M de los conseqüentes B, D, F; y por ser $A:B=C:D$, si es $G>K$, será (230) $H>L$: tambien por ser $C:D>E:F$, si es $H>L$, puede ser (232) J igual, ó menor que M: luego si es $G>K$, puede suceder que J no sea mayor que M: luego será (232) $A:B>E:F$. Que es &c.

$$\boxed{\begin{array}{l} A:B=C:D>E:F \\ G\ K\ \ H\ L\ \ J\ M \end{array}}$$

COROLARIO.

264 Del mismo modo se demostrará que si es $A:B>C:D$, y $C:D=E:F$, tambien será $A:B>E:F$.

PROPOSICION XIV.

265 Si es $A:B=C:D$, y la primera A es mayor, igual, ó menor que la tercera C; tambien la segunda B será respectivamente mayor, igual, ó menor que la quarta D. *Fig.* 13.

I. Si $A>C$; será $B>D$. Por ser $A>C$ (sup.), será (258) $A:B>C:B$; pero es (sup.) $C:D=A:B$: luego será (263) $C:D>C:B$, y por consiguiente (260) $B>D$.

II. Si $A<C$; será $B<D$, lo que se demuestra de un modo semejante.

III. Si $A=C$, tambien $B=D$: porque será (257) $A:B=C:B$; pero (sup.) $A:B=C:D$:

luego (261) $C : B = C : D$; y por consiguiente (259) $B = D$. Que es &c.

ESCOLIO.

266 Si es $A : B = C : D$, y la primera A es mayor, igual, ó menor que la segunda B; la tercera C será respectivamente mayor, igual, ó menor que la quarta D. Tómense qualesquiera equimultíplices $2A$, $2B$, $2C$, $2D$ de dichas magnitudes. Siendo $A : B = C : D$ (sup.), si $2A$ es mayor, igual, ó menor que $2B$, será respectivamente (230) $2C$ mayor, igual, ó menor que $2D$: luego tambien si A es mayor, igual, ó menor que B, será respectivamente C mayor, igual, ó menor que D.

PROPOSICION XV.

267 Las partes E, F tienen entre sí la misma razon, que sus equimultíplices AB, CD; esto es, $AB : CD = E : F$. *Fig.* 14.

Divídanse los multíplices AB en las partes AH, HB iguales á E; y CD en las partes CG, GD iguales á F: y será (257) $AH : CG = E : F$, por ser $AH = E$, y $CG = F$; asimismo será $HB : GD = E : F$; por consiguiente (261) $AH : CG = HB : GD$: luego será (262) $AH + HB : CG + GD = AH : CG$; esto es, $AB : CD = AH : CG$; pero $AH : CG =$

$E : F$: luego será $AB : CD = E : F$. Que es &c.

ESCOLIO I.

268 Si es multíplice $A : B = C : D$; será $A : B = C : D$ (*Fig.* 12). Tómense qualesquiera equimultíplices G, H de las magnitudes A, C, y otros qualesquiera K, L de las B, D. Siendo, pues, multíplice $G : A = H : C$ (const.), y multíplice $A : B = C : D$ (sup.); será (252) multíplice $G : B = H : D$; pero tambien es multíplice $K : B = L : D$; y por lo tanto si es $G = K$, será multíplice $G : B = K : B$, y por consiguiente multíplice $H : D = L : D$, y $H = L$: asimismo si $G > K$, será G mayor multíplice de B que K, y por consiguiente H mayor multíplice de D que L, y $H > L$. De un modo semejante se demostrará que si $G < K$, será $H < L$: luego será (230) $A : B = C : D$.

$A : B$	$= C : D$
G K	H L

ESCOLIO II.

269 Si es $A : B = C : D$, y la primera A es multíplice de la segunda B; la tercera C será igualmente multíplice de la quarta D (*Fig.* 13). Tómese multíplice $F : D = A : B$; y será (268) $F : D = A : B$; pero (sup.) $A : B = C : D$: luego (261) $F : D = C : D$, y por consiguiente (259) $F = C$: luego será multíplice $C : D = A : B$.

PROPOSICION XVI.

270 Si es $A : B = C : D$; será alternando $A : C = B : D$. *Fig.* 15.

Tómense dos qualesquiera equimultíplices de A, B, como E, F; y otros dos qualesquiera equimultíplices de C, D, como G, H: será (267) $E : F = A : B$, y $G : H = C : D$; pero $A : B = C : D$: luego será (261) $E : F = G : H$; y por consiguiente (265) si E es mayor, igual, ó menor que G, tambien será F mayor, igual, ó menor que H: luego (230) será $A : C = B : D$. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

271 Si es $AB : BC = DE : EF$; será tambien dividiendo $AB - BC : BC = DE - EF : EF$; esto es, $AC : BC = DF : EF$. *Fig.* 16.

De las magnitudes AC, BC, DF, EF tómense por su orden qualesquiera equimultíplices GH, HJ, LM, MN, y tambien otros dos qualesquiera equimultíplices JO, NP de las BC, EF. Será, pues, (249) multíplice $GJ : AB = GH : AC$, y multíplice $LN : DE = LM : DF$; pero es (constr.) multíplice $GH : AC = LM : DF$: luego tambien será multíplice $GJ : AB = LN : DE$. Asimismo por ser multíplice $HJ : BC = MN : EF$, y tambien multíplice $JO : BC = NP : EF$

(constr.), será (250) multíplice $HO : BC = MP : EF$; pero (sup.) es $AB : BC = DE : EF$: luego (230) si GJ es mayor, igual, ó menor HO, tambien LN será mayor, igual, ó menor MP, y quitando de ambas partes las comunes HJ, MN, si GH es mayor, igual, ó menor JO, tambien LM será respectivamente mayor, igual, ó menor NP; pero (const.) GH y LM son qualesquiera equimultíplices de AC y DF, y JO, NP son otros qualesquiera equimultíplices de BC, EF: luego (230) será $AC : BC = DF : EF$. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

272 Si es $AB : BC = DE : EF$; será componiendo $AB + BC : BC = DE + EF : EF$; esto es, $AC : BC = DF : EF$. *Fig.* 17.

Si no es $AC : BC = DF : EF$, se dará una magnitud FG mayor, ó menor que EF, á quien DF tenga la misma razon que AC á BC, de suerte que sea $AC : BC = DF : FG$: luego dividiendo será (271) $AB : BC = DG : GF$; pero (sup.) $AB : BC = DE : EF$: luego (261) $DG : GF = DE : EF$; por consiguiente (265) si $DG > DE$, será tambien $GF > EF$, que es un absurdo. Del mismo modo si $DG < DE$, será $FG < EF$, lo que tambien es absurdo. Luego &c.

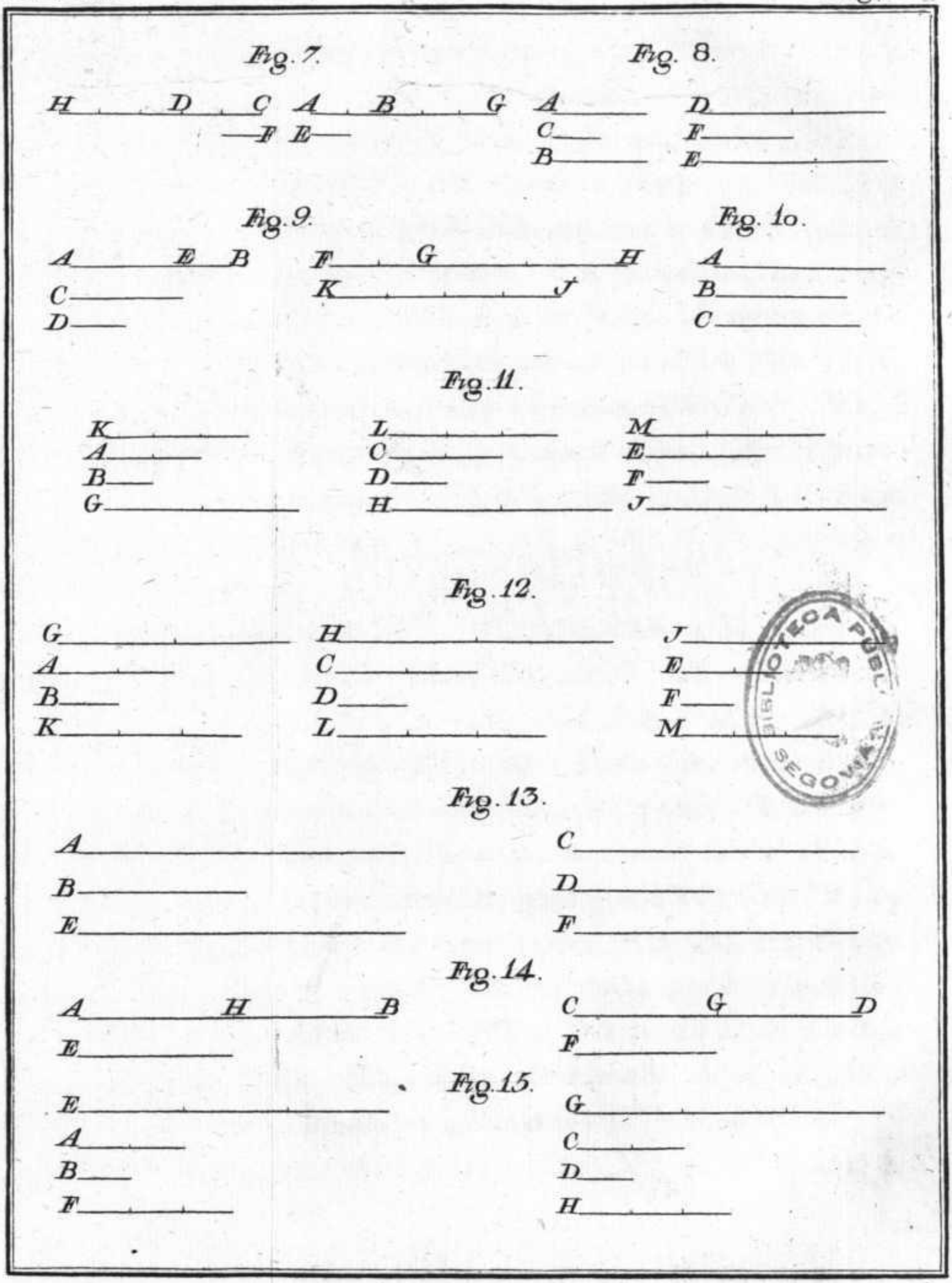
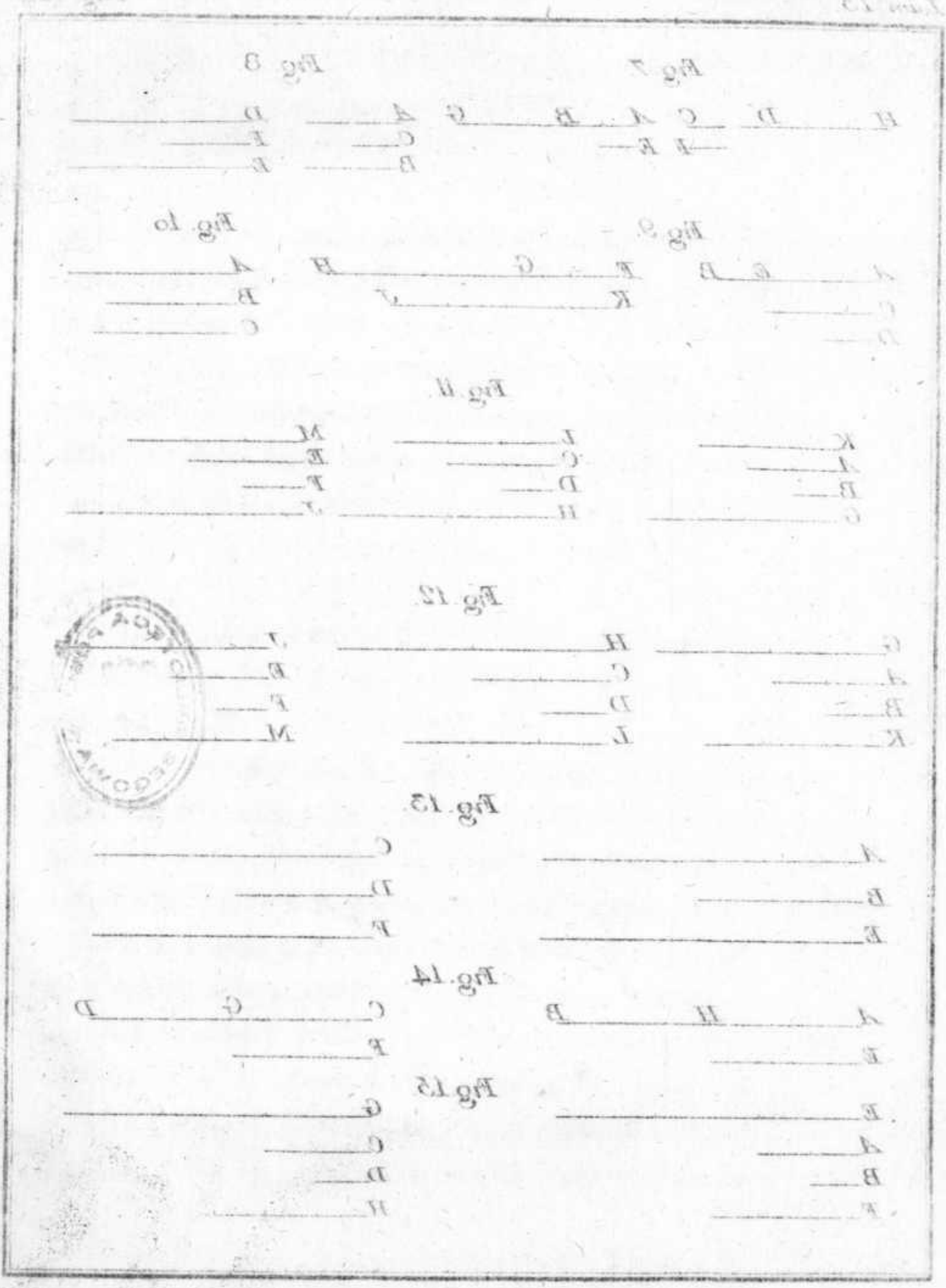


Fig. 7.
H D C A B G
F E
Fig. 8.
A C B
D F E
Fig. 9.
A E B
C
D
F G H
K J
Fig. 10.
A
B
C
Fig. 11.
K A B G
L C D H
M E F J
Fig. 12.
G A B K
H C D L
J E F M
Fig. 13.
A B E
C D F
Fig. 14.
A H B
E
C G D
F
Fig. 15.
E A B F
G C D H



ESCOLIO.

273 Si la toda AC es á la parte BC, como la toda DF á la parte EF; será tambien la toda AC á la residua AB, como la toda DF á la residua DE: porque siendo $AC : BC = DF : EF$, será dividiendo (271) $AB : BC = DE : EF$, é invirtiendo (254) $BC : AB = EF : DE$, y componiendo (272) $AC : AB = DF : DE$. *Fig.* 17.

Nótese que el resultado de esta proposicion es lo que hemos llamado (242) convertir una proporcion, porque de haber supuesto $AC : BC = DF : EF$, hemos inferido que $AC : AB = DF : DE$, ó lo que es lo mismo $AC : AC - BC = DF : DF - EF$.

PROPOSICION XIX.

274 Si la toda AC es á la toda DF, como la parte BC á la parte EF; será la residua AB á la residua DE, como la toda AC á la toda DF. *Fig.* 17.

Por ser $AC : DF = BC : EF$, será alternando (270) $AC : BC = DF : EF$, y convirtiendo (273) $AC : AB = DF : DE$, y alternando de nuevo $AC : DF = AB : DE$. Que es &c.

PROPOSICION XX.

275 Si se dieren tres magnitudes A, B, C de

una parte, y otras tantas D, E, F de otra, de suerte, que sea A á B en las primeras, como D á E en las segundas, y B á C en aquellas, como E á F en estas ordenadamente; si la primera A es mayor, menor, ó igual á la tercera C de una parte, será tambien la primera D respectivamente mayor, menor, ó igual á la tercera F en la otra. *Fig.* 18.

Es decir primero; que si es $A > C$, tambien será $D > F$. Por la suposicion es $B : C = E : F$, é invirtiendo (254) $C : B = F : E$; pero (258) $A : B > C : B$, por ser $A > C$ (sup.): luego (264) $A : B > F : E$; pero es (sup.) $A : B = D : E$; luego (263) $D : E > F : E$; y por consiguiente (260) $D > F$.

De un modo semejante se demostrará, que si $A < C$, tambien $D < F$; y si $A = C$, tambien $D = F$. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

276 Si se dieren tres magnitudes A, B, C de una parte, y otras tantas D, E, F de otra, de suerte que sea A á B en las primeras, como E á F en las segundas, y B á C en aquellas, como D á E en estas perturbadamente; digo que si la primera A es mayor, igual, ó menor que la tercera C en una parte, será tambien la primera D respectivamente mayor, igual, ó menor que la tercera F en la otra. *Fig.* 18.

I. Si es $A > C$; será tambien $D > F$. Por la suposicion $B : C = D : E$, é invirtiendo (254) $C : B = E : D$; pero (258) $A : B > C : B$, por ser $A > C$ (sup.): luego (264) $A : B > E : D$; pero es (sup.) $A : B = E : F$: luego $E : F > E : D$ (263), y $D > F$ (260).

De un modo semejante se demuestra que si $A = C$, tambien $D = F$; y si $A < C$, tambien $D < F$. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

277 Si se diere qualquier número de magnitudes A, B, C, D de una parte, y otras tantas E, F, G, H de otra, de suerte que sea A á B en las primeras, como E á F en las segundas, B á C en aquellas, como F á G en estas otras, y así siguiendo ordenadamente; será por igualdad ordenada la primera A á la última D en la una parte, como la primera E á la última H en la otra. *Fig.* 19.

Tómense qualesquiera equimultíplices, como $3A$, $3E$, de las primeras A, E de cada parte, tambien qualesquiera equimultíplices $2B$, $2F$ de las segundas B, F, y finalmente otros qualesquiera equimultíplices, como $4C$, $4G$, de las terceras C, G en cada parte. Siendo $A : B = E : F$ (sup.), será tambien $3A : 2B = 3E : 2F$ (253), y siendo asimismo $B : C = F : G$, será tambien $2B : 4C = 2F : 4G$:

luego (275) si $3A$ mayor , igual, ó menor que $4C$, será respectivamente $3E$ mayor, igual, ó menor que $4G$; esto es, los equimultíplices de A, E son respectivamente mayores, iguales, ó menores que los equimultíplices de C, G; por consiguiente (230) $A : C = E : G$; pero ademas (sup.) $C : D = G : H$: luego del mismo modo se podrá deducir que es $A : D = E : H$, y siempre será la primera á la última en la una parte, como la primera á la última en la otra. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

278 Si se dieren tres magnitudes A, B, C de una parte, y otras tantas D, E, F de otra, de suerte que sea A á B en las primeras, como E á F en las segundas, y B á C en aquellas, como D á E en estas otras perturbadamente; digo que será por igualdad perturbada la primera A á la tercera C en una parte, como la primera D á la tercera F en la otra. *Fig.* 20.

Tómense qualesquiera equimultíplices $2A$, $2B$, y $2D$ de las dos primeras A, B de una parte, y de la primera D de la otra; como tambien otros qualesquiera equimultíplices $3C$, $3E$, y $3F$ de la tercera C de la primera parte, y de las E, F, segunda, y tercera de la otra. Siendo $A : B = E : F$ (sup.), será (267) $2A : 2B = 3E : 3F$, y siendo asimismo $B:C=D:E$ (sup.), será (253) $2B:3C=2D:3E$; luego (276) si $2A$ mayor, igual, ó menor que $3C$, será respectivamente $2D$ mayor, igual, ó menor que $3F$: esto es, los equimultíplices de A, y D son respectivamente mayores, iguales, ó menores que los equimultíplices de C, y F; por consiguiente (230) $A:C=D:F$. Que es &c.

ESCOLIO.

279 Si las magnitudes dadas de cada parte son mas de tres, comparadas primero las tres A, B, C contiguas, con otras tres contiguas D, E, F; y despues tomando las otras dos G, y H, se tendrán de nuevo A, C, G de un lado, y H, D, F del otro, de las quales se demostrará, por igualdad perturbada, que será $A:G=H:F$; y así en qualquier número de magnitudes de un lado, y otras tantas de otro, que esten en proporcion perturbada, siempre será la primera á la última en una parte, como la primera á la última en la otra.

PROPOSICION XXIV.

280 Si la primera magnitud A es á la segunda B, como la tercera C á la quarta D, y una quinta E es á la segunda B, como una sexta F á la quarta D; la suma de la primera, y quinta será

á la segunda, como la suma de la tercera, y sexta es á la quarta; esto es, si $A : B = C : D$, y tambien $E : B = F : D$, será $A + E : B = C + F : D$. *Fig.* 21.

Por ser (sup.) $A : B = C : D$, y $E : B = F : D$, será, invirtiendo esta segunda analogía, $B : E = D : F$ (254): luego por igualdad ordenada será (277) $A : E = C : F$, y componiendo (272) $A + E : E = C + F : F$; pero es $E : B = F : D$ (sup.): luego otra vez por igualdad ordenada $A + E : B = C + F : D$. Que es &c.

COROLARIO.

281 Se infiere que si tres, ó mas razones que tienen un conseqüente comun, son respectivamente iguales á otras tantas razones, que tienen tambien un conseqüente comun; será la suma de los antecedentes en las primeras al conseqüente comun, como la suma de los antecedentes en las segundas al conseqüente comun.

PROPOSICION XXV.

282 Si quatro magnitudes AB, DE, C, F del mismo género son proporcionales; esto es, que sea $AB : DE = C : F$; la suma de la máxima AB, y la mínima F, será mayor que la suma de las

otras dos; esto es, $AB + F > C + DE$. *Fig.* 22.

Córtese de la primera AB la parte AG igual á la tercera C, y de la segunda DE la parte DH igual á la quarta F. Siendo $AB : DE = C : F$, será tambien la toda AB á la toda DE como la parte AG á la parte DH, y (274) la residua GB á la residua HE como la toda AB á la toda DE; pero $AB > DE$ (sup.): luego $GB > HE$ (266); pero $AG + F = C + DH$, por ser $AG = C$, y $DH = F$ (const.): luego será $AG + GB + F > C + DH + HE$; esto es, $AB + F > C + DE$. Que es &c.

Fig. 16.

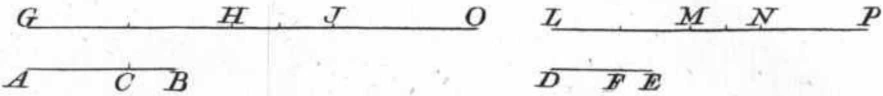


Fig. 17.

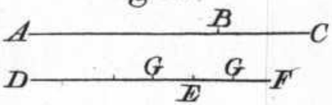


Fig. 18.

Fig. 19.

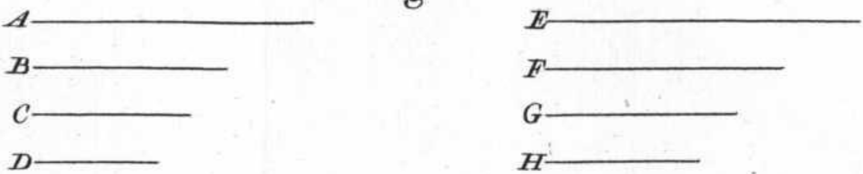
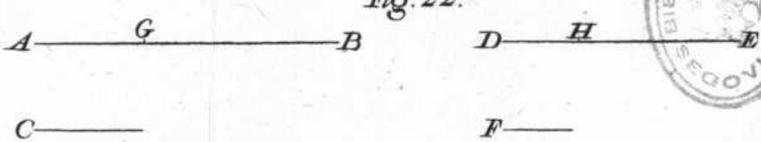


Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.



LIBRO VI.

DEFINICIONES.

283 Figuras rectilineas semejantes son las que tienen los ángulos respectivamente iguales, y proporcionales los lados, que contienen ángulos iguales.

Los triángulos ABC, EDF (*Fig.* 1.) se llamarán semejantes, si el ángulo $A = E$, $B = D$, $C = F$, y si ademas es $AB : AC = DE : EF$, $AC : CB = EF : FD$, $CB : BA = FD : DE$. Lo mismo que se dice de los triángulos, se ha de entender de qualesquiera figuras rectilineas.

ESCOLIO.

284 Tambien serán semejantes dichos triángulos, si teniendo sus ángulos respectivamente iguales, son los lados de uno proporcionales á los del otro en esta forma $AB : DE = BC : DF$, $BC : DF = CA : FE$, $AC : EF = AB : ED$; pues se ve que estas proporciones formadas de los lados, que comprehenden ángulos iguales, no son otra cosa que alternaciones de las que exîge la definicion. Entiéndase esto en las demas figuras.

285 Figuras recíprocamente proporcionales son en las que los términos medios de la proporcion

son tomados de la una mientras que los extremos son de la otra.

Los paralelogramos *ABCD*, *BEFG* (*Fig.* 2.) se llamarán recíprocamente proporcionales, si es $AB : BG = BE : BC$. Asimismo dos magnitudes *A*, *B* se dicen recíprocamente proporcionales á otras dos *C*, *D*, quando $A : C = D : B$.

286 Una recta está dividida en extrema y media razon, quando toda la recta tiene la misma razon al mayor segmento, que este al menor.

Si es $AB : AC = AC : CB$ (*Fig.* 3.), la recta *AB* está dividida en media, y extrema razon.

287 La altura de qualquier figura *ABC* es la perpendicular *AD* tirada desde el vértice *A* á la base *BC* prolongada, si es necesario. *Fig.* 4.

288 Se dice que una razon se compone de otras, quando está formada de las cantidades de las razones multiplicadas entre sí. El uso de esta definicion es el siguiente. Si se tiene una serie de qualquier número de cantidades *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, se dirá que la primera *A* está con la última *E* en razon compuesta de las razones $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$. Tambien si la razon de *A* á *B* es igual á la de *M* á *N*, la razon de *B* á *C* es igual á la de *O* á *P*, la razon de *C* á *D* es igual á la de *Q* á *R*, y la razon de

$A : B = M : N$
$B : C = O : P$
$C : D = Q : R$
$D : E = S : T$

D á *E* á la de *S* á *T*, se dirá que la primera *A* está con la última *E* en razon compuesta de las razones $M:N$, $O:P$, $Q:R$, $S:T$.

PROPOSICION I.

289 Los triángulos *BAC*, *CAD*, y los paralelogramos *BCAE*, *CDFA* que tienen una misma altura, son entre sí como sus bases *BC*, *CD*. *Fig.* 5.

En la *BD* prolongada por ambos lados tómese (62) qualquiera número de partes *BG*, *GH*, *HL* iguales á *BC*, y *DJ*, *JM* iguales á *CD*; tírense *AG*, *AH*, *AL*, *AJ*, *AM*. Por estar los triángulos *BAC*, *BAG*, *GAH*, *HAL* sobre iguales bases, y entre las mismas paralelas, serán iguales (112); por consiguiente será multíplice el triángulo $LAC : BAC = LC : BC$. Del mismo modo se demostrará multíplice $CAM : CAD = CM : CD$; pero si *CL* es mayor, igual, ó menor que *CM*, tambien (113) *LAC* respectivamente es mayor, igual, ó menor que *CAM*: luego será el triángulo $BAC : CAD = BC : CD$; pero (116. 267.) $BAC : CAD = BCAE : CDFA$: luego será tambien $BCAE : CDFA = BC : CD$. Que es &c.

$$\begin{array}{|l|}\hline BAC : CAD = BC : CD \\ LAC \quad CAM \quad LC \quad CM \\ \hline\end{array}$$

PROPOSICION II.

290 Si en un triángulo *BAC* se tira una recta *DE* paralela á uno de sus lados *BC*; cortará á los otros dos en segmentos proporcionales: y si los dos lados se dividen en segmentos proporcionales, la recta que los divide será paralela al otro. *Fig.* 6.

I. Si *DE* es paralela á *BC*; será $AD : DB = AE : EC$.

Tiradas *DC* y *BE*, los triángulos *DBE*, *DCE* serán iguales (111), por estar sobre una misma base *DE*, y entre las mismas paralelas *BC*, *DE*: luego será (257) el triángulo $AED : DEB = ADE : EDC$; pero (289) $AED : DEB = AD : DB$, y por la misma razon $ADE : EDC = AE : EC$: luego será $AD : DB = AE : EC$.

II. Si es $AD : DB = AE : EC$; será *DE* paralela á *BC*.

El triángulo $AED : DEB = AD : DB$ (289); tambien por lo mismo el triángulo $ADE : EDC = AE : EC$; pero es $AD : DB = AE : EC$ (sup.): luego será $AED : DEB = ADE : EDC$; por consiguiente será el triángulo $DEB = EDC$: luego (114) serán las rectas *DE*, *BC* paralelas. Que es &c.

COROLARIO I.

291 Luego invirtiendo será (254) BD: $DA = CE$: EA, y componiendo (272) BA: $AD = CA$: AE.

COROLARIO II.

292 Tambien por ser AD: $DB = AE$: EC, será (272) AB: $BD = AC$: CE.

PROPOSICION III.

293 La recta AD que divide un ángulo BAC de qualquier triángulo ABC en dos partes iguales; divide la base BC en segmentos proporcionales á los lados del triángulo; esto es, BD: $DC = BA$: AC: y la recta DA, que partiendo la base BC en segmentos proporcionales á los lados, sale del ángulo BAC, lo divide en dos partes iguales. *Fig.* 7.

Prolónguese BA hasta E, de suerte que sea $AE = AC$, y tírese CE.

I. Siendo en el triángulo CAE el lado $AE = AC$ (const.), será el ángulo $ACE = E$ (64); por consiguiente (101) el ángulo externo BAC será duplo del ángulo E; pero el ángulo BAC es duplo del ángulo BAD (sup.): luego será el ángulo $E = BAD$; por lo que será (95) la recta CE paralela á AD : luego será (290) BD : $DC =$

$BA : AE = BA : AC$, por ser $AE = AC$.

II. Si es $BD : DC = BA : AC$; será el ángulo $BAD = DAC$. Por ser $BD : DC = BA : AC$ ó AE, serán (290) paralelas las rectas AD, CE; y por consiguiente (96) el ángulo $BAD = E$, y el ángulo $DAC = ACE$; pero en el triángulo isósceles CAE el ángulo $E = ACE$ (64): luego será el ángulo $BAD = DAC$. Que es &c.

ESCOLIO.

294 De un modo semejante se demuestra que si el ángulo externo CAB de un triángulo FAC (*Fig.* 8.) se divide en dos partes iguales, y la recta AD que lo corta, encuentra á la base FC prolongada en D; será $FD : DC = FA : AC$: y al contrario.

PROPOSICION IV.

295 Los triángulos equiángulos ABC, DCE tienen proporcionales los lados homólogos; esto es, si los ángulos $B = DCE$, $ACB = DEC$, $BAC = CDE$, será $AB : BC = DC : CE$, $BC : CA = CE : ED$, $AB : AC = CD : DE$. *Fig.* 9.

Colóquese CE directamente con BC, y prolónguense las rectas BA, ED, las quales se encontrarán en un punto F (52); pues siendo (82) los ángulos B, ACB juntos menores que dos rectos, y el ángulo $ACB = E$ (sup.). tambien serán los ángulos B, E juntos menores que dos rectos. Porque los ángulos ACB, B son respectivamente iguales á los E, DCE, será (95) CA paralela á EF, y BF paralela á CD; por consiguiente la figura $ACDF$ es un paralelogramo, en quien (107) $AC = DF$, y $AF = DC$: esto supuesto será:

I. $AB : BC = DC : CE$.

Por ser paralelas CA, EF, será (290) $BA : AF = BC : CE$, y alternando (270) $BA : BC = AF : CE$; pero $AF = CD$: luego será $BA : BC = DC : CE$.

II. $BC : CA = CE : ED$.

Siendo CD paralela á BF, será (290) $EC : CB = ED : DF$ ó AC, é invirtiendo (254) $CB : CE = CA : ED$: luego alternando (270) será $CB : CA = CE : ED$.

III. En fin $BA : AC = CD : DE$.

Se ha demostrado antes que $AB : BC = CD : CE$, y que $BC : CA = EC : ED$: luego por igualdad ordenada (277) será $AB : CA = CD : DE$. Que es &c.

COROLARIO.

296 Infiérese de la proposicion antecedente que los triángulos equiángulos son (283) semejantes.

PROPOSICION V.

297 Si dos triángulos ABC, DEF tienen los lados proporcionales; esto es, $AB : BC = DE : EF$, $AC : CB = DF : FE$, $AB : AC = DE : DF$; dichos triángulos tendrán iguales los ángulos opuestos á los lados homólogos. *Fig.* 10.

Constrúyanse (90) los ángulos $FEG = B$, y $EFG = C$; y serán (103) equiángulos los triángulos EGF, BAC, y por lo tanto (295) $GE : EF = AB : BC$; pero $AB : BC = DE : EF$ (sup.): luego $GE : EF = DE : EF$; y por consiguiente (259) $GE = DE$. Tambien por ser los triángulos EGF, BAC equiángulos, será $GF : FE = AC : CB$; pero $AC : CB = DF : FE$ (sup.): luego será $GF : FE = DF : FE$; y por consiguiente $GF = DF$: luego serán (69) los triángulos EDF, EGF totalmente iguales, y los ángulos $D = G = A$, $DEF = FEG = ABC$, y $DFE = EFG = C$. Que es &c.

PROPOSICION VI.

298 Si dos triángulos ABC, DEF tienen un ángulo B del uno igual á un ángulo DEF del otro, y los lados que los comprehenden proporcionales, esto es, que sea $AB : BC = DE : EF$; dichos triángulos serán equiángulos, y tendrán iguales los án-

gulos opuestos á los lados homólogos, es á saber el ángulo $A = D$, y el ángulo $C = DFE$. *Fig.* 10.

Constrúyanse (90) los ángulos $FEG = B$ ó DEF, y $EFG = C$, y (103) serán equiángulos los triángulos EGF, BAC; y por lo tanto (295) $GE : EF = AB : BC$; pero $AB : BC = DE : EF$ (sup.): luego será $GE : EF = DE : EF$; por consiguiente (259) $GE = DE$; y como el ángulo $DEF = FEG$, será (63) el ángulo $D = G$, y siendo $A = G$, tambien será $D = A$. Por tanto siendo en los triángulos EDF, BAC los ángulos D, DEF respectivamente iguales á los A, ABC, tambien será (103) $DFE = C$. Que es &c.

PROPOSICION VII.

299 Si dos triángulos BAC, EDF tienen un ángulo $A = D$, y proporcionales los lados que forman otros dos ángulos ABC, E; esto es, $AB : BC = DE : EF$, y los ángulos C, F son, ó ambos rectos, ó ambos mayores, ó menores que un recto; dichos triángulos serán equiángulos. *Fig.* 11.

Si los ángulos ABC, y E no son iguales, será uno de ellos $ABC > E$: en este caso constrúyase (90) el ángulo $ABG = E$. Siendo en los triángulos AGB, DFE el ángulo $A = D$ (sup.), y el ángulo $ABG = E$ (const.), será (103) el ángulo $AGB = F$: luego dichos triángulos serán equiángulos, y (295) $AB : BG = DE : EF$; pero $AB : BC = DE : EF$ (sup.): luego $AB : BG = AB : BC$; por consiguiente $BG = BC$: y siendo en el triángulo isósceles GBC (64) el ángulo $BGC = C$, será por consiguiente (82) cada uno de dichos ángulos menor que un recto; y por lo tanto (75) el ángulo BGA, ó su igual F será obtuso, quando el ángulo C se ha demostrado agudo, lo que es contra la hipótesis: luego será el ángulo $ABC = E$, y siendo tambien el ángulo $A = D$ (sup.), serán (103) los triángulos ABC, DEF equiángulos. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

300 En el triángulo rectángulo BAC la perpendicular AD, que del ángulo recto A se tira á la base BC, divide el triángulo en otros dos ADB, CDA semejantes entre sí, y al total. *Fig.* 12.

Los triángulos ADB, CAB tienen el ángulo B comun, y los ángulos BAC, BDA iguales por rectos: luego (103) serán equiángulos. Del mismo modo se demostrarán equiángulos los triángulos ADC, BAC: luego todos tres serán equiángulos, y (296) semejantes. Que es &c.

COROLARIO I.

301 Por la semejanza de los triángulos BAC, ADC es $BC : CA = CA : CD$: tambien por ser semejantes los triángulos BAC, BDA, será $BC : BA = BA : BD$.

COROLARIO II.

302 Por la semejanza de los triángulos BDA, ADC será $BD : DA = DA : DC$.

PROPOSICION IX.

303 Cortar de una recta dada AB qualquiera parte que se pida. *Fig.* 13.

Tírese por el punto A la indefinida AC, en la qual tómese qualquier punto D, y hágase AF tan múltiplice de AD, como lo sea AB de la parte que se ha de cortar: únanse los puntos F, B por la recta FB, á quien por el punto D se ha de tirar (100) la paralela DG; y será AG la parte que se pide.

Siendo DG paralela al lado BF del triángulo FAB, será (291) $AF : AD = AB : AG$; pero AF es multíplice de AD (const.): luego (269) AB será igualmente multíplice de AG. Que es &c.

PROPOSICION X.

304 Dividir una recta dada AB, de suerte

que sus segmentos sean proporcionales con los de otra dada *AC* dividida en *D*, *E*. *Fig.* 14.

Tírese *BC*, y por los puntos *D*, *E* tírense (100) las rectas *DF*, *EG* paralelas á *CB*; y la recta dada *AB* quedará cortada en los puntos *F*, *G* como se pide. Tírese la recta *DH* paralela á *FB*. Por ser *DF* paralela á *EG*, será (290) $AD : DE = AF : FG$. Tambien siendo *EY* paralela á *CH*, será $DE : EC = DY : YH$; pero (107) $DY = FG$, $YH = GB$, por lados opuestos de los paralelogramos *FY*, *GH*: luego será $DE : EC = FG : GB$. Que es &c.

PROPOSICION XI.

305 Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas *AB*, *AD*. *Fig.* 15.

Tírese *BD*, y prolónguense indefinidamente las rectas *AB*, *AD*; tómese $BC = AD$, y por el punto *C* tírese *CE* paralela á *BD*; y será *DE* la tercera proporcional que se pide. Por ser *BD* paralela á *CE*, será (290) $AB : BC = AD : DE$; pero $BC = AD$ (constr.): luego $AB : AD = AD : DE$. Que es &c.

PROPOSICION XII.

306 Hallar una quarta proporcional á las tres rectas dadas *DE*, *EF*, *DG*. *Fig.* 16.

Tírese *EG*, y prolongada *DG* indefinidamente,

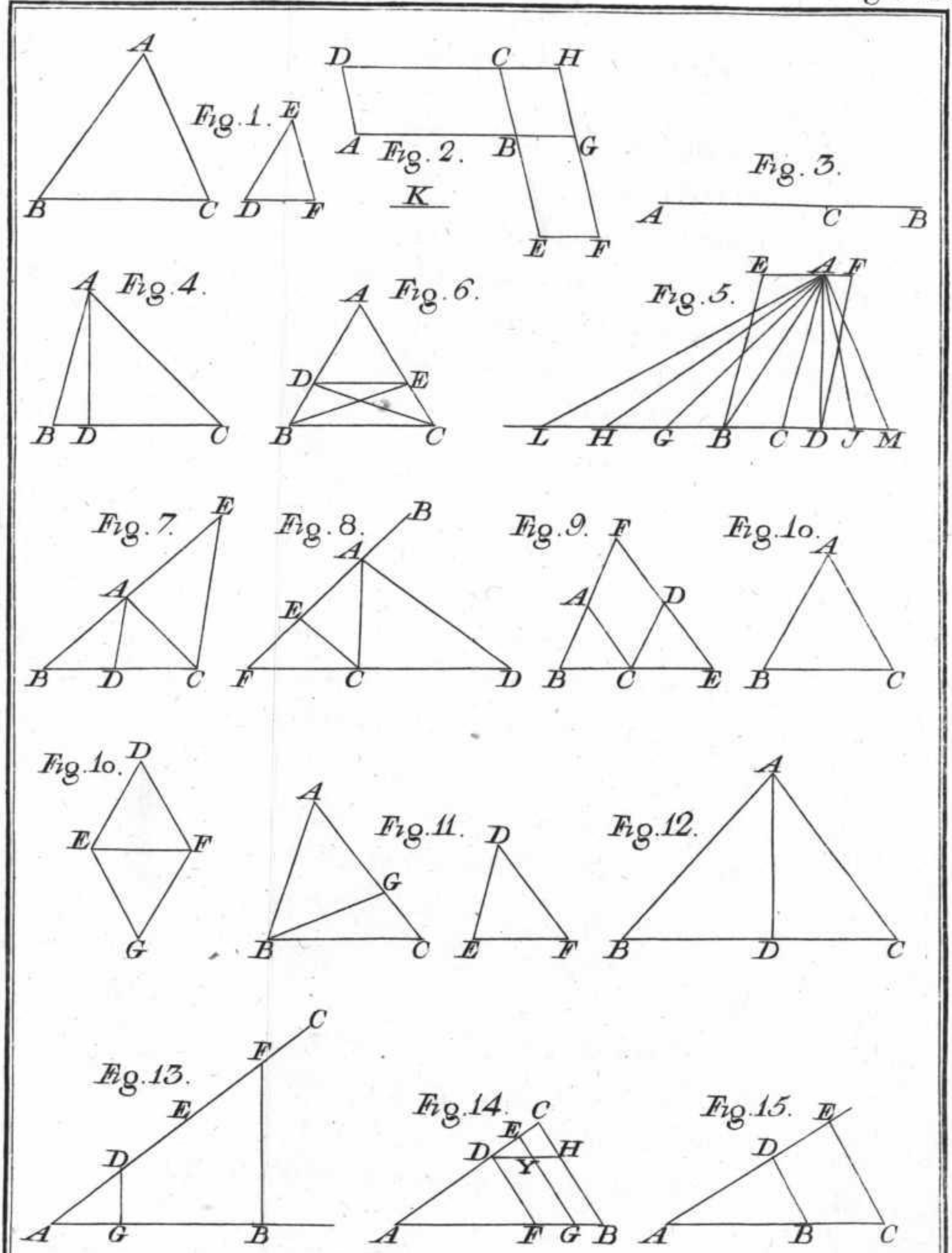
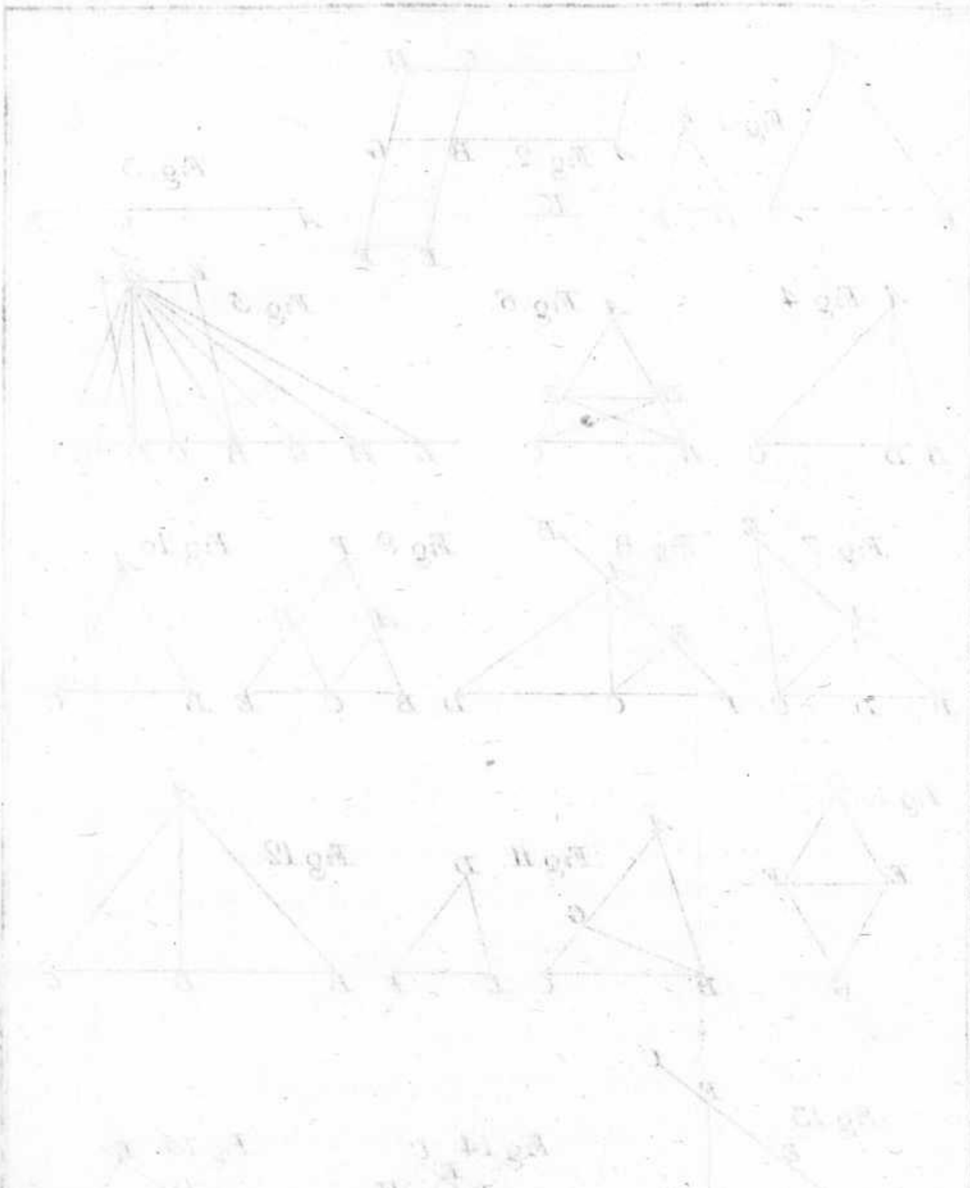


Fig. 1.
A B C E D F
Fig. 2.
D C H A B G E F K
Fig. 3.
A C B
Fig. 4.
A B D C
Fig. 6.
A D E B C
Fig. 5.
E A F L H G B C D J M
Fig. 7.
E A B D C
Fig. 8.
B A E F C D
Fig. 9.
F A D B C E
Fig. 10.
A B C
Fig. 10.
D E F G
Fig. 11.
A G B C D E F
Fig. 12.
A B D C
Fig. 13.
C F E D A G B
Fig. 14.
C E D H Y A F G B
Fig. 15.
E D A B C



tírese *FH* paralela á *EG*; y *GH* será quarta proporcional á las tres rectas dadas. Pues siendo *EG* paralela á *FH*, será (290) $DE : EF = DG : GH$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

307 Hallar una media proporcional á dos rectas dadas *AE*, *EB*. *Fig.* 17.

Sobre *AB* descríbase el semicírculo *AFB*, y en el punto *E* levántese la perpendicular *EF* prolongada hasta encontrar á la circunferencia en *F*; será *EF* media proporcional entre las rectas dadas *AE*, *EB*. Tírense las rectas *AF*, *BF*, que formarán (186) el ángulo *AFB* recto; pero *FE* es perpendicular á *AB* (constr.): luego será (302) $AE : EF = EF : EB$. Que es &c.

COROLARIO.

308 Se infiere que la recta baxada desde qualquier punto de la circunferencia perpendicular al diámetro, es media proporcional entre los segmentos, en quienes queda dividido el diámetro.

PROPOSICION XIV.

309 Si dos paralelógramos *ABCD*, *EBGF* son iguales, y tienen el ángulo $ABC = EBG$; tendrán los lados, que forman dicho ángulo, recíprocamente proporcionales; esto es, $AB : BG = BE : BC$:

y al contrario, si dos paralelógramos cerca de iguales ángulos tienen los lados recíprocamente proporcionales, serán iguales. *Fig. 2.*

Colóquense directamente las rectas AB, BG, y por ser el ángulo $ABC = EBG$ (sup.), tambien formarán (80) una sola recta las CB, BE; prolónguense los lados DC, FG, hasta que se encuentren en H, y resultará el paralelógramo BH. Siendo el paralelógramo $BD = BF$ (sup.), será $BD: BH = BF: BH$; pero (289) el paralelógramo $BD: BH = AB: BG$, y el paralelógramo $BF: BH = EB: BC$: luego será $AB: BG = EB: BC$.

Y al contrario, si el ángulo $ABC = EBG$, y $AB: BG = EB: BC$; será el paralelógramo $BD = BF$. Consta (289) que el paralelógramo $BD: BH = AB: BG$, y el paralelógramo $BF: BH = EB: BC$; pero $AB: BG = EB: BC$ (sup.): luego será el paralelógramo $BD: BH = BF: BH$; por consiguiente el paralelógramo $BD = BF$. Que es &c.

PROPOSICION XV.

310 Los triángulos iguales ABC, DBE, que tienen un ángulo ABC igual á otro DBE; tendrán los lados, que comprehenden iguales ángulos, recíprocamente proporcionales; esto es, $AB: BE = BD: BC$: y al contrario, los triángulos que tienen los lados,

que comprehenden iguales ángulos, recíprocamente proporcionales; serán iguales. *Fig.* 18.

Colóquense directamente los lados *CB*, *BD*, y por ser el ángulo *CBA* = *EBD* (sup.), tambien formarán (80) una sola recta los lados *AB*, *BE*. Tambien siendo el triángulo *ABC*=*DBE* (sup.), será *ABC* : *CBE* = *DBE* : *CBE*; pero (289) *ABC*: *CBE*=*AB*: *BE*, y *DBE*: *CBE*=*DB*: *BC*: luego será (261) *AB*: *BE*= *DB*: *BC*.

Y al contrario, si es *AB*: *BE*=*DB*: *BC*, y el ángulo *ABC* = *EBD*; será el triángulo *ABC*= *EBD*. Pues (289) el triángulo *ABC*: *CBE*=*AB*: *BE*, y el triángulo *DBE*: *CBE* = *DB*: *BC*; pero (sup.) *AB*: *BE*=*DB*: *BC*: luego será el triángulo *ABC*: *CBE* = *DBE*: *CBE*; por consiguiente el triángulo *ABC* = *DBE*. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

311 Si quatro rectas son proporcionales, esto es, *AB*: *FG* = *EF* : *BC*; el rectángulo *AC* comprehendido de las extremas *AB*, *BC* será igual al rectángulo *EG* comprehendido de las medias *GF*, *FE*: y si el rectángulo *AC* de las extremas es igual al rectángulo *EG* de las medias; las quatro rectas serán proporcionales; esto es, *AB*: *FG*=*EF*: *BC*. *Fig.* 19.

I. En los rectángulos AC, EG son recíprocamente proporcionales los lados, esto es, $AB : FG = EF : BC$ (sup.); pero ademas los ángulos B, F son iguales por rectos: luego será (309) el rectángulo $AC = EG$.

II. Siendo (sup.) el rectángulo $AC = EG$, y los ángulos B, F iguales por rectos, será (309) $AB : FG = EF : BC$. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

312 Si tres rectas son continuas proporcionales, esto es, $AB : EF = EF : CB$; el rectángulo CA de las extremas será igual al quadrado EG formado sobre la media EF: y si el quadrado EG de la media EF es igual al rectángulo AC de las extremas AB, BC; serán continuas proporcionales las tres rectas AB, EF, y CB. *Fig.* 20.

I. Siendo $AB : EF = EF : CB$, tomada $FG = EF$, tambien será $AB : EF = FG : CB$; pero los ángulos en B, F son iguales por rectos: luego (309) será el rectángulo DB igual al quadrado EG.

II. Siendo (sup.) el rectángulo AC igual al quadrado EG, y los ángulos B, F iguales por rectos, será (309) $AB : EF = FG : CB$, y por ser $FG = EF$, tambien será $AB : EF = EF : CB$. Que es &c.

ESCOLIO I.

313 Si las razones de A á B, y de C á D son iguales; tambien las duplicadas de las mismas razones serán iguales.

Hágase (305) $A:B=B:E$, y $C:D=D:F$. Siendo (sup.) $A:B=C:D$, será $B:E=D:F$: luego por igualdad ordenada (277) $A:E=C:F$; pero (235) la razon de A á E es duplicada de A á B, y la de C á F es duplicada de C á D: luego &c.

$$\left|\begin{array}{cc} A & C \\ B & D \\ E & F \end{array}\right|$$

De un modo semejante se demostrará que si las razones de A á B, y de C á D son iguales, lo serán tambien las triplicadas de dichas razones.

ESCOLIO II.

314 Si la razon duplicada de A á B es igual á la duplicada de C á D; será $A:B=C:D$.

Supuesta la construccion antecedente (313), será $A:E=C:F$; y si se niega que $A:B=C:D$, será $A:B=C:R$: hágase entonces $C:R=R:T$, y será por igualdad ordenada $A:E=C:T$; por consiguiente $C:F=C:T$, y $F=T$: y siendo $C:R=R:T$, será $C\times T=\overline{R}^2$ (312); tambien por ser $C:D=D:F$, será $C\times F=\overline{D}^2$: luego $\overline{R}^2=\overline{D}^2$, y (123) $R=D$; por consiguiente $A:B=C:D$.

$$\left|\begin{array}{ccc} A & C & C \\ B & D & R \\ E & F & T \end{array}\right|$$

PROPOSICION XVIII.

315 Sobre una recta dada AB describir un rectilineo semejante, y semejantemente puesto al rectilineo dado $CDFE$. *Fig.* 21.

Resuélvase el rectilineo dado en los triángulos CFD, CEF, y constrúyanse (90) los ángulos $B = D$, y $BAH = DCF$; por consiguiente será (103) el ángulo $AHB = CFD$. Constrúyanse tambien los ángulos $HAG = FCE$, y $AHG = CFE$; y tambien será el ángulo $G = E$: digo que el rectilineo $AGHB$ será el que se pide. Por ser los ángulos BAH, HAG respectivamente iguales á los ángulos DCF, FCE, será el ángulo $BAG = DCE$. Asimismo por ser los ángulos BHA, AHG respectivamente iguales á los DFC, CFE, será $BHG = DFE$; pero el ángulo $B = D$, y $G = E$: luego los rectilineos $AGHB$, $CEFD$ serán equiángulos. Por ser los triángulos AGH, CEF equiángulos, será (295) $AG : AH = CE : CF$. Asimismo siendo los triángulos AHB, CFD equiángulos, será $AH : AB = CF : CD$: luego por igualdad ordenada (277) $AG : AB = CE : CD$, y ademas en estos últimos triángulos será tambien $AB : BH = CD : DF$. Del mismo modo se demostrará que $BH : HG = DF : FE$, y $HG : GA = FE : EC$: luego los rectilineos $ABHG$, $CDFE$ son semejantes, y semejantemente puestos. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

316 Los triángulos semejantes *BAC*, *EDF* están en razon duplicada de sus lados homólogos. *Fig.* 22.

Sean los ángulos *BAC*, *B*, y *C* respectivamente iguales á los ángulos *D*, *E*, y *F*; tómese la tercera proporcional *BG* á los lados homólogos *BC*, *EF*, y estará (235) *BC* con *BG* en razon duplicada de *BC* á *EF*; y tírese *AG*. Por ser los triángulos *BAC*, *EDF* semejantes, sus lados homólogos serán (284) proporcionales; esto es, $AB : DE = BC : EF$; pero $BC : EF = EF : BG$ (const.): luego será $AB : DE = EF : BG$, y siendo los ángulos *B*, *E* iguales, será (310) el triángulo $BAG = EDF$; pero el triángulo (289) $BAC : BAG = BC : BG$: luego el triángulo $ABC : DEF = BC : BG$, ó bien en razon duplicada de *BC* á *EF*. Que es &c.

COROLARIO I.

317 El triángulo *ABC* es al triángulo semejante *DEF* como *BC* á *BG*, con tal que sea *BG* tercera proporcional á los lados homólogos *BC*, *EF*.

COROLARIO II.

318 Tambien si tres rectas *BC*, *EF*, *BG* son continuas proporcionales, la primera *BC* será á la tercera *BG* como qualquier triángulo *BAC* descrito sobre la primera al triángulo semejante *EDF* descrito sobre la segunda *EF*.

PROPOSICION XX.

319 Los polígonos semejantes *ABCDE*, *FGHJK* se dividen en igual número de triángulos semejantes *ABC* con *FGH*, *ACD* con *FHJ*, y *AED* con *FKJ*, y proporcionales á sus todos (esto es $ABC : FGH = ABCDE : FGHJK = ACD : FHJ = ADE : FJK$); y dichos polígonos están en razon duplicada de sus lados homólogos. *Fig.* 23.

I. Desde los vértices *A*, *F* de los ángulos iguales *BAE*, *GFK* tírense las rectas *AD* y *FJ*, *AC* y *FH* á los vértices de los respectivos ángulos iguales, y quedarán divididos los polígonos en igual número de triángulos. Teniendo los polígonos semejantes *ABCDE*, *FGHJK* proporcionales los lados que comprehenden ángulos iguales, será (283) $AB : BC = FG : GH$: luego serán (298) equiángulos los triángulos *ABC*, *FGH*, y el ángulo $BCA = GHF$. Del mismo modo se demostrarán equiángulos los triángulos *AED*, *FKJ*, y el ángulo $ADE = FJK$;

pero los ángulos *BCD*, *CDE* son respectivamente iguales á los ángulos *GHJ*, *HJK*, por la semejanza de los polígonos: luego será el ángulo *ACD*$=$*FHJ*, y *ADC*$=$*FJH*; por consiguiente (103) equiángulos los triángulos *CAD*, *HFJ*. Por tanto serán (296) semejantes los triángulos *ABC*, con *FGH*, *ACD* con *FHJ*, y *AED* con *FKJ*.

II. Los triángulos *ABC*, *FGH*, por ser semejantes, están (316) en razon duplicada de los lados homólogos *AC*, *HF*. Asimismo los triángulos *CAD*, *HFJ* están en razon duplicada de los lados homólogos *AC*, *FH*. Del mismo modo se demostrará que los triángulos *CAD*, *HFJ*, y *DAE*, *JFK* están en razon duplicada de *AD* á *FJ*; pero por la semejanza de los triángulos *CAD*, *HFJ* es (284) $CA : FH = AD : FJ$, y (313) la razon duplicada de *CA* á *FH* es igual á la de *AD* á *FJ*: luego será el triángulo $BAC : GFH = CAD : HFJ = DAE : JFK$; por consiguiente (262) la suma de los antecedentes á la suma de los conseqüentes como un antecedente á un conseqüente; esto es, el polígono $BAEDC : GFKJH = BAC : GFH$, ó bien (316) en razon duplicada de los lados homólogos *BC*, *GH*. Que es &c.

COROLARIO I.

320 Luego será el polígono *ABCDE* al po-

lígono semejante *FGHJK* como *BC* á *R* (317), siendo *R* tercera proporcional á los lados homólogos *BC*, *GH*. Si dichos polígonos son iguales, será $BC = R = GH$.

COROLARIO II.

321 Tambien dadas tres rectas continuamente proporcionales, será la primera á la tercera como el polígono descrito sobre la primera al polígono semejante descrito sobre la segunda.

PROPOSICION XXI.

322 Los rectilineos *ABC*, *DJE*, que son semejantes á un tercero *HFG*, son tambien semejantes entre sí. *Fig.* 24.

Por ser el rectilineo *ABC* semejante á *HFG*, serán (283) los ángulos del uno respectivamente iguales á los del otro, y tambien proporcionales los lados cerca de iguales ángulos; pero por la semejanza de los rectilineos *DJE*, *HFG* son los ángulos del uno iguales á los del otro, y tambien son proporcionales los lados cerca de iguales ángulos: luego los ángulos del rectilineo *ABC* serán iguales á los del rectilineo *DJE*, y los lados cerca de iguales ángulos serán proporcionales; por consiguiente (283) los rectilineos *ABC*, *DJE* serán semejantes. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

323 Si quatro rectas son proporcionales; tambien los rectilineos semejantes, y semejantemente descritos sobre ellas serán proporcionales: y si rectilineos semejantes, y semejantemente descritos fueren proporcionales; tambien las rectas, sobre que están descritos, serán proporcionales. *Fig.* 25.

I. Siendo proporcionales (sup.) $AB : CD = EF : GH$, será (313) la razon duplicada de AB á CD igual á la duplicada de EF á GH; pero el rectilineo AJB al semejante CKD está (319) en razon duplicada de AB á CD; y por lo mismo el rectilineo EM al semejante GO como la duplicada de EF á GH: luego será el rectilineo $AJB : CKD = EM : GO$.

II. El rectilineo $AJB : CKD = EM : GO$ (sup.); pero el rectilineo AJB al semejante CKD está (319) en razon duplicada de AB á CD, y el rectilineo EM al semejante GO como la duplicada de EF á GH: luego la duplicada de AB á CD será igual á la duplicada de EF á GH; por consiguiente (314) $AB : CD = EF : GH$. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

324 Los paralelógramos equiángulos $ABCD$,

BEFG están en razon compuesta de los lados que comprehenden ángulos iguales; es á saber, que si el ángulo del uno $ABC = EBG$ del otro, estará el paralelógramo *ABCD* con el paralelógramo *BEFG* en razon compuesta de *BA* á *BG*, y de *BC* á *BE*, *Fig.* 2.

Pónganse las bases *AB*, *BG* á continuacion, y siendo (sup.) el ángulo $ABC = EBG$, los lados *CB*, *BE* formarán (80) tambien una recta. Complétese el paralelógramo *BH*, y hállese (306) la quarta proporcional *K* á las rectas *CB*, *BE*, *BG*. Consta (289) que el paralelógramo $ABCD : BGHC = AB : BG$, y el paralelógramo $BGHC : BGFE = CB : BE = BG : K$ (constr.): luego por igualdad ordenada será (277) el paralelógramo $ABCD : BGFE = BA : K$; pero la razon de *BA* á *K* se compone (288) de las razones de *AB* á *BG*, y de *BG* á *K*, ó bien de las razones de *AB* á *BG*, y de *CB* á *BE*: luego estará el paralelógramo *ABCD* con el paralelógramo *BGFE* en razon compuesta de *AB* á *BG*, y de *BC* á *BE*. Que es &c.

COROLARIO

325 Luego la razon compuesta de dos razones *A* á *B*, *C* á *D* será la razon del rectángulo de los antecedentes *A*, *C* al rectángulo de los conse-

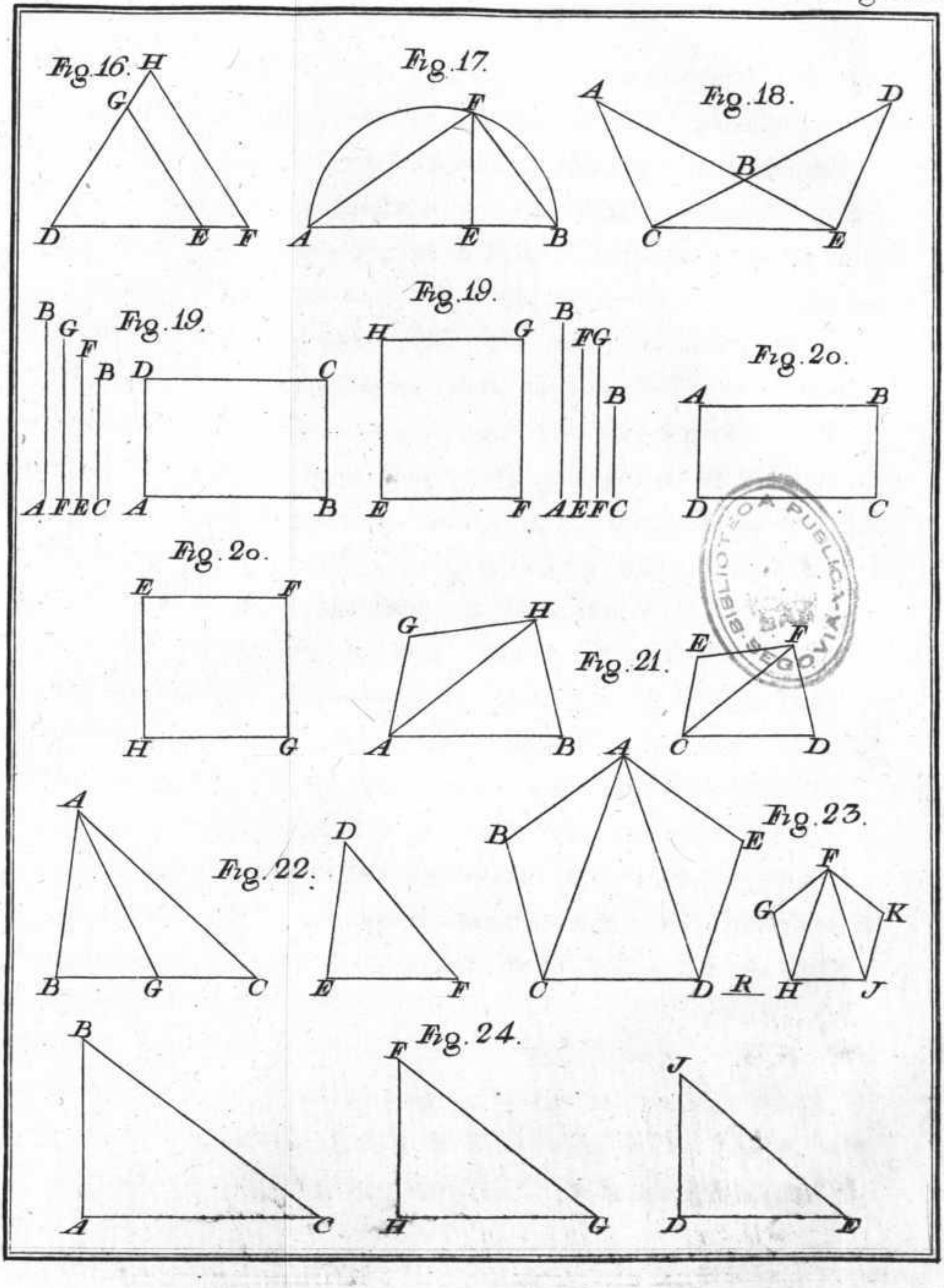


Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.

qüentes B, D; y hallando la quarta proporcional K á las magnitudes C, D, B, será $A \times C : B \times D = A : K$.

ESCOLIO.

326 Si es $A : B = E : F$, y $C : D = G : H$, será $A \times C : B \times D = E \times G : F \times H$. Hágase (306) $C : D = B : K$, y tambien $G : H = F : N$; y siendo (sup.) $C : D = G : H$, será tambien $B : K = F : N$; pero $A : B = E : F$ (sup.): luego por igualdad ordenada (277) $A : K = E : N$; pero (325) $A : K = A \times C : B \times D$, y por lo mismo $E : N = E \times G : F \times H$: luego $A \times C : B \times D = E \times G : F \times H$. Que es &c.

PROPOSICION XXIV.

327 En qualquiera paralelógramo $ABCD$ los circadiámetros EG, HF son semejantes al total, y entre sí. *Fig.* 26.

Los paralelógramos EG, BD tienen el ángulo BAD comun, el ángulo $AEY = ABC$ (96) por ser paralelas EY y BC, como tambien $AGY = ADC$ por ser paralelas GY y DC; en fin los ángulos EYG, EAG, BCD iguales entre sí (107): luego dichos paralelógramos serán equiángulos. De un modo semejante se demostrarán equiángulos los triángulos AEY, ABC, y en ellos serà (295)

$AE : EY = AB : BC$, y por ser $EY = AG$, $BC = AD$ (107), tambien será $AE : AG = AB : AD$. Con igual método se demostrará que es $AG : GY = AD : DC$, y $EY : YG = BC : CD$: luego los paralelógramos EG, BD tienen cerca de los ángulos iguales los lados proporcionales; por consiguiente serán (283) semejantes entre sí. Con el mismo método se demostrará el paralelógramo HF semejante al paralelógramo BD: luego los paralelógramos EG, HF son semejantes al total; y por consiguiente (322) entre sí. Que es &c.

PROPOSICION XXV.

328 Construir un rectilineo P semejante, y semejantemente puesto al dado $ABEDC$, é igual á otro dado F. *Fig.* 27.

Sobre la recta AB constrúyase (120) el rectángulo $AL = ABEDC$; asimismo sobre BL constrúyase el rectángulo $BM = F$. Entre las rectas AB, BH hállese (307) una media proporcional NO, y sobre NO constrúyase (315) el rectilineo P semejante al dado $ABEDC$: y será el que se pide. Siendo los rectilineos $ABEDC$, P semejantes, y BH tercera proporcional á sus lados homólogos AB, NO, será (321) $ABEDC : P = AB : BH$; pero (289) el rectángulo $AL : HL = AB : BH$: luego será $ABEDC : P = AL : HL$, y por ser $ABEDC = AL$ (constr.), será (265) $P = HL = F$. Que es &c.

PROPOSICION XXVI.

329 Los paralelógramos semejantes EG, DB, que tienen un ángulo comun EAG, los corta un mismo diámetro AC. *Fig.* 28.

Si se niega que AC es diámetro comun; séalo AHC del paralelógramo DB que corta á EF en H. Tírese HY paralela á BC, y serán semejantes (327) los paralelógramos EY, DB, y cerca de los ángulos iguales E, D tendrán proporcionales los lados, esto es, $AE : EH = AD : DC$; pero (283) $AE : EF = AD : DC$ por la semejanza de los paralelógramos EG, DB: luego será $AE : EH = AE : EF$; por consiguiente $EH = EF$, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION XXVII.

330 De todos los paralelógramos AD, AG aplicados á una misma recta AB, y deficientes en figuras paralelógramas CE, KY semejantes, y semejantemente puestas á la AD descrita sobre la mitad AC de la recta AB; el paralelógramo AD aplicado á la mitad, siendo semejante al defecto KY, será el máxímo. *Fig.* 29.

I. Sea $AK > AC$. Prolónguese KG hasta N. Por ser los paralelógramos *CE*, *KY* semejantes, estarán (329) cerca de un mismo diámetro *DB*: luego serán (118) los complementos *EG*, *CG* iguales, y añadiendo el paralelógramo comun *KY*, será $KE = CY = AM$ (110): tambien añadiendo el paralelógramo comun *CG*, será el paralelógramo *AG* igual al gnomon *MBN*; pero este es menor que el paralelógramo $CE = CH$ (110): luego será el paralelógramo $AG < AD$. Que es &c.

II. Sea $AK < AC$. Prolónguese *CD* hasta *M*, y será el paralelógramo $DF = DY$ (110), por estar sobre iguales bases *MF*, *MY*, y entre unas mismas paralelas; pero $DY = DK$ (118): luego $DK = DF$; por consiguiente $DK > NF$, y añadiendo *NA*, será $DA > KF$. Que es &c.

PROPOSICION XXVIII.

331 Sobre una recta dada *AB* aplicar un paralelógramo igual á un rectilineo dado *C*, y deficiente en una figura paralelógrama semejante á un paralelógramo dado *D*; con tal que el rectilineo *C* no sea mayor (330) que el paralelógramo aplicado á la mitad de *AB*. *Fig.* 30.

Divídase *AB* por medio en *E*; sobre *EB* construyase (315) el paralelógramo *EG* semejantemente puesto al dado *D*; y complétese el paralelógramo

AG. Si es $EG = C$, se habrá aplicado sobre la recta *AB* el paralelógramo *EG* igual á *C*, y deficiente en el paralelógramo *AF* semejante al dado *D*, por ser *AF* igual, y semejante á *EG*. Si es *EG* mayor que *C* en la magnitud *L* (121), constrúyase (328) el paralelógramo *OQ* semejante, y semejantemente puesto al paralelógramo *EG* ó *D*, é igual á *L*: prolongadas *QP*, *PO* hasta *Z*, *S*, será el paralelógramo *AP* el que se pide. Prolónguese *SP* hasta *R*, y tírese el diámetro *FB*, que lo será tambien (329) del paralelógramo *OQ* semejante, y semejantemente puesto (constr.). El paralelógramo $EG = C + L = C + OQ$, y quitado el comun *OQ*, será el gnomon $OBQ = C$; pero el paralelógramo $ER = AO$ (110) por tener iguales bases y estar entre unas mismas paralelas, y los complementos *PG*, *EP* son iguales (118): luego el gnomon $OBQ = AP$, y $C = AP$; pero *ZR* es (327) semejante á *EG*, ó bien á *D*. Luego &c.

ESCOLIO.

332 Sobre una recta dada *AB* aplicar un rectángulo igual á otro dado *CK*, deficiente en un quadrado; con tal que el rectángulo dado no sea mayor que el quadrado descrito sobre la mitad de dicha recta (133). *Fig.* 31.

En los extremos *A*, *B* de la recta *AB* levántense las perpendiculares $AE = CD$, $BF = C\Upsilon$; tírese EF, y sobre ella como diámetro descríbase el semicírculo EHF; y encontrando este á la recta AB en uno, ó dos puntos H, G, será $AH \times HB$, ó bien $AG \times GB$ igual al rectángulo dado CK. Tírense las rectas EH, HF. Siendo el ángulo EHF recto (186), serán los ángulos (74) $EHA + FHB =$ á un recto; pero (104) los ángulos $AHE + AEH =$ á un recto: luego $AEH = FHB$; es así que los ángulos A, B son iguales por rectos: luego serán los triángulos AEH, HBF equiángulos, y en ellos (295) $AE : AH = HB : BF$; por consiguiente (311) $AH \times HB = AE \times BF = CD \times C\Upsilon$. Del mismo modo se demostrará que si el semicírculo EHF corta á la recta AB en otro punto G, será tambien $AG \times GB = CD \times C\Upsilon$. Que es &c.

Si el rectángulo $AE \times BF$ es igual al quadrado de AH mitad de AB; el semicírculo descrito sobre EF como diámetro tocará á la recta AB en el punto H. Levántese en él la perpendicular HL, y por los puntos E, L tírense las rectas ES, LR paralelas á AB, y por ser $AH = HB$, será $EZ = ZS$ (107); pero (290) $EZ : ZS = EL : LF$: luego (266) $EL = LF$: con igual método se demostrará $SR = RF$: luego (134) $\overline{RB}^2 = SB \times BF + \overline{SR}^2$, ó bien $\overline{LH}^2 = EA \times BF + \overline{ZL}^2$; pero (sup.) EA

$\times BF = \overline{AH}^2 = \overline{EZ}^2$: luego $\overline{LH}^2 = \overline{EZ}^2 + \overline{ZL}^2 = \overline{EL}^2$ (124); por consiguiente $LH = EL = LF$, y el semicírculo descrito con el radio LE pasará por los puntos H, F; y siendo el ángulo LHA recto, la recta AB será (169) tangente en H. Que es &c.

Siendo $AE = CD$, $BN = C\Upsilon$, y $AE \times BN < AE \times BF$ ó bien menor que el quadrado de AH mitad de la dada AB; el semicírculo descrito sobre EN como diámetro cortará á la recta AB. En el punto H de la recta AB levántese la perpendicular HL, y tirada EF, serán las tres rectas EL, HL y LF iguales entre sí, como se ha demostrado. Por ser LH paralela á FB, será (290) $EL : LF = EM : MN$; pero $EL = LF$: luego $EM = MN$, y el punto M será centro del círculo descrito sobre EN como diámetro; pero es así que (87) $EM + ML > LE$, ó bien LH: luego será $EM > MH$, y por consiguiente el círculo descrito con el radio EM cortará á la recta AB. De un modo semejante se demostrará, que siendo $AE = CD$, $BP = C\Upsilon$, y $AE \times BP > \overline{AH}^2$, el círculo descrito sobre el diámetro EP no cortará á la recta AB. Que es &c.

PROPOSICION XXIX.

333 Sobre una recta dada *AB* aplicar un paralelógramo igual al rectilineo dado *C*, y excedente en un paralelógramo semejante á otro dado *D*. *Fig.* 32.

Córtese *AB* por medio en *E*, y sobre *EB* construyase (315) el paralelógramo *EG* semejante, y semejantemente puesto al dado *D*; constrúyase tambien (328) el paralelógramo *LM* semejante, y semejantemente puesto al paralelógramo *EG* ó *D*, é igual á $EG + C$; y complétese el paralelógramo *AN*, que será el que se pide. Prolónguese *GB* hasta *O*, y tírese el diámetro *FN*, que será comun (329) al paralelógramo *EG*. El paralelógramo $LM = EG + C$ (constr.); y quitado el comun *EG*, quedará el gnomon $ENG = C$. El paralelógramo $AL = LB$ (110), y (118) el complemento $LB = BM$; por consiguiente el paralelógramo $AO = EO + BM$, y añadiendo el comun *OP*, resultará *AN* igual al gnomon *ENG*: luego será $AN = C$; pero *OP* (327) es semejante á *LM* ó *D*. Luego &c.

ESCOLIO.

334 Sobre una recta dada *AB* aplicar un rectángulo igual á otro dado *CK*, excedente en un quadrado. *Fig.* 33.

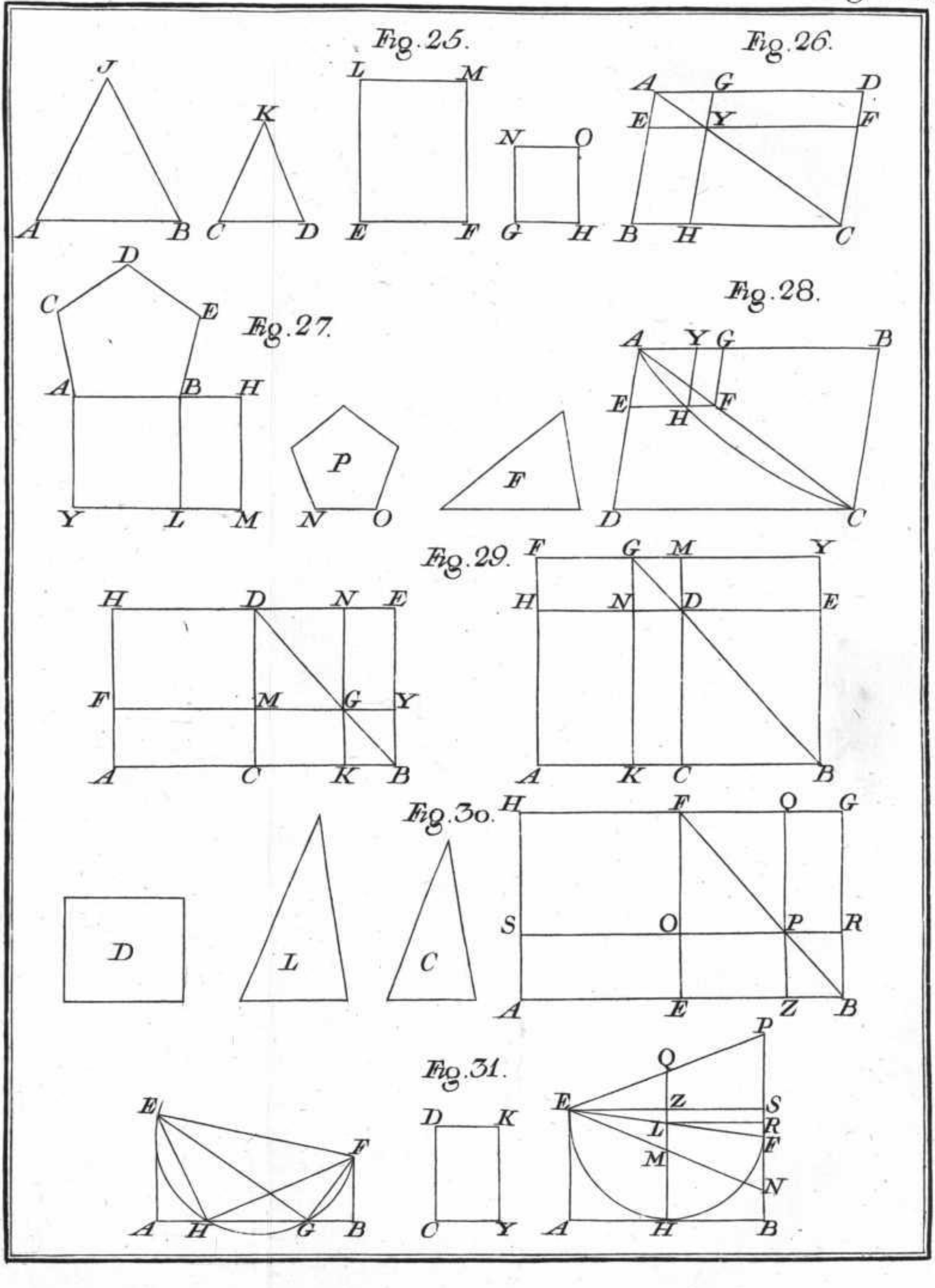


Fig. 25.
J A B K C D L M E F N O G H
Fig. 26.
A G D E Y F B H C
Fig. 27.
D C E A B H Y L M P N O F
Fig. 28.
A Y G B E F H D C
Fig. 29.
H D N E F M G Y A C K B
F G M Y H N D E A K C B
Fig. 30.
D L C
H F O G S O P R A E Z B
Fig. 31.
E F A H G B
D K C Y
P Q E Z S R L F M N A H B

En los extremos A, B de la recta AB levántense las perpendiculares $AE = CD$, $BF = CT$; tírese EF, y tomada como diámetro descríbase el círculo $EGFH$, que cortará á la AB prolongada de una, y otra parte en los puntos G, H; y será $AG \times GB$, ó bien $BH \times HA$ el rectángulo que se pide. Tírense EG, GF; y por ser el ángulo EGF recto (186), y los ángulos $BGF + BFG$ iguales á un recto (104), quitando de ambas partes el comun BGF, quedará el ángulo $EGA = BFG$; pero los ángulos en A, B son iguales por rectos: luego los triángulos EAG, BFG serán equiángulos, y por lo tanto (295) $AE : AG = GB : BF$; por consiguiente (311) $AG \times GB = EA \times BF = CD \times CT$. Del mismo modo se demostrará que tiradas las EH, HF, será $BH \times HA = AE \times BF$. Que es &c.

PROPOSICION XXX.

335 Cortar una recta dada AB en extrema, y media razon. *Fig.* 3.

Córtese AB en C, de suerte que sea (139) $AB \times BC = \overline{AC}^2$; y será (312) $AB : AC = AC : BC$. Que es &c.

PROPOSICION XXXI.

336 En qualquier triángulo rectángulo BAC el rectilineo BF descrito sobre el lado BC opuesto al ángulo recto, es igual á los rectilineos AL, BG semejantes y descritos semejantemente sobre los otros lados. *Fig.* 34.

Desde el ángulo recto A báxese la perpendicular AD á la base BC, y será (301) $BC : CA = CA : CD$: luego por ser las figuras BF, AL semejantes (sup.), será (320) $BF : AL = BC : CD$, é invirtiendo $AL : BF = CD : BC$. Con el mismo método se demostrará que es la figura $BG : BF = BD : BC$: luego será (280) $AL + BG : BF = CD + DB : BC$, y por ser $CD + DB = BC$, será (266) $AL + BG = BF$. Que es &c.

PROPOSICION XXXII.

337 Si dos triángulos ABC, DCE tienen dos lados del uno proporcionales á dos del otro, esto es, $AB : AC = CD : DE$, y tocándose por el ángulo C el uno y el otro triángulo, quedan paralelos los lados homólogos: digo que los demas lados BC, CE de los triángulos formarán una sola recta. *Fig.* 35.

Siendo el ángulo $A = ACD = D$ (96), y $AB : AC = DC : DE$ (sup.), será (298) el ángulo $B = DCE$; por consiguiente será el ángulo $B + A = DCE + ACD$; y añadiendo el ángulo ACB, será tambien $B + A + ACB = DCE + ACD + ACB$; pero los tres ángulos B, A y ACB son iguales á dos rectos (101): luego tambien los tres DCE, ACD y ACB serán iguales á dos rectos; por consiguiente (78) las rectas BC, CE forman una sola recta. Que es &c.

PROPOSICION XXXIII.

338 En círculos iguales $DBCA$, $HFGP$ los ángulos en el centro BDC, FHG, y en la circunferencia BAC, FEG, tienen la misma razon que los arcos sobre quienes insisten, y la misma tienen los sectores. *Fig.* 36.

I. Tírense las cuerdas BC, FG, y acomódense las rectas (202) $C\Upsilon$, *&c.* $= CB$, GL, LP, *&c.* $= FG$; y tírense $D\Upsilon$, HL, HP. Por ser $BC = C\Upsilon$, y $GF = GL = LP$, serán (182) los arcos $BC = C\Upsilon$, $FG = GL = LP$, como tambien los ángulos (180) $BDC = CD\Upsilon$, $FHG = GHL = LHP$: luego será multíplice el arco $BC\Upsilon : BMC =$ el ángulo $BD\Upsilon : BDC$; tambien será multíplice el arco $FGP : FRG =$ el ángulo $FHP : FHG$; pero si el arco $BC\Upsilon$ es mayor, menor, ó igual al arco FGP, tambien (180)

$$\boxed{\frac{BMC}{BC\Upsilon} : \frac{FRG}{FGP} = \frac{BDC}{BD\Upsilon} : \frac{FHG}{FHP}}$$

el ángulo BDY es respectivamente mayor, menor, ó igual al ángulo FHP: luego será (230) el arco $BC : FG = BDC : FHG$, ó como el ángulo BAC á FEG (267), por ser (173) el ángulo $BDC = 2BAC$, y $FHG = 2FEG$.

II. Siendo las cuerdas BC, y CY iguales (const.), lo serán tambien los arcos (182) BAC, CAY, y por consiguiente (180) los ángulos BMC, CNY, y (177) el segmento $BCM = CYN$; pero (69) el triángulo $BDC = CDY$: luego será el sector $BDCM = CDYN$. Del mismo modo se demostrarán iguales los sectores FHG, GHL, LHP; y por tanto será multiplice $BCY : BMC = BDYC : BDCM$. Tambien será multíplice $FGP : FRG = FHPG : FHGR$; pero si el arco BCY es igual al arco FGP, tambien el sector $BDYC = FHPG$ (por la misma razon que se demostró ser el sector $BDCM = CDYN$), y si BCY es mayor ó menor que FGP, tambien es respectivamente el sector $BDYC$ mayor ó menor que el sector $FHPG$: luego será el arco $BMC : FRG = BDCM : FHGR$. Que es &c.

$$\boxed{\begin{array}{l} BMC : FRG = BDCM : FHGR \\ BCY \quad FGP \quad BDYC \quad FHGP \end{array}}$$

COROLARIO I.

339 De aquí se sigue que el sector al sector tiene la misma razon que el ángulo al ángulo; porque entrambas son iguales á la que tiene el arco al arco.

COROLARIO II.

340 Tambien se infiere, que como el ángulo en el centro es á quatro rectos, así es el arco, sobre quien insiste dicho ángulo, á toda la circunferencia. Pues como el ángulo *BDC* es al recto, así el arco *BC* es á el del quadrante, y es (268) el ángulo recto á quatro rectos como el arco del quadrante á la circunferencia: luego por igualdad ordenada (277) será el ángulo *BDC* á quatro rectos como el arco *BC* á toda la circunferencia.

COROLARIO III.

341 Los arcos *YL*, *BC* de círculos desiguales (*Fig.* 37), sobre quienes insisten iguales ángulos, ó en el centro como *YAL*, *BAC*, ó en la circunferencia, son proporcionales con las circunferencias *YLY*, *BCB*; esto es, $YL : BC = YLY : BCB$. Pues (340) *YL* á *YLY* como el ángulo *YAL* á quatro rectos; tambien *BC* á *BCB* como el ángulo *BAC* á quatro rectos; pero el ángulo $YAL = BAC$ (sup.): luego será $YL : YLY = BC : BCB$, y alternando $YL : BC = YLY : BCB$.

COROLARIO II.

340 Tambien se infiere, que como el ángulo en el centro es á quatro rectos, así es el arco, sobre quien insiste dicho ángulo, á toda la circunferencia. Pues como el ángulo BPC es al recto, así el arco BC es al del quadrante, y es (268) el ángulo recto á quatro rectos como el arco del quadrante á la circunferencia: luego por igualdad ordenada (277) será el ángulo BPC á quatro rectos como el arco BC á toda la circunferencia.

COROLARIO III.

341 Los arcos TL, BC de círculos desiguales (Fig. 97), sobre quienes insisten iguales ángulos, ó en el centro como TAL, BAC, ó en la circunferencia, son proporcionales con las circunferencias TLT, BCB: esto es, $TL : BC = TLT : BCB$. Pues (340) TL á TLT como el ángulo TAL á quatro rectos; tambien BC á BCB como el ángulo BAC á quatro rectos; pero el ángulo $TAL = BAC$ (sup.): luego será $TL : TLT = BC : BCB$, y alternando $TL : BC = TLT : BCB$.

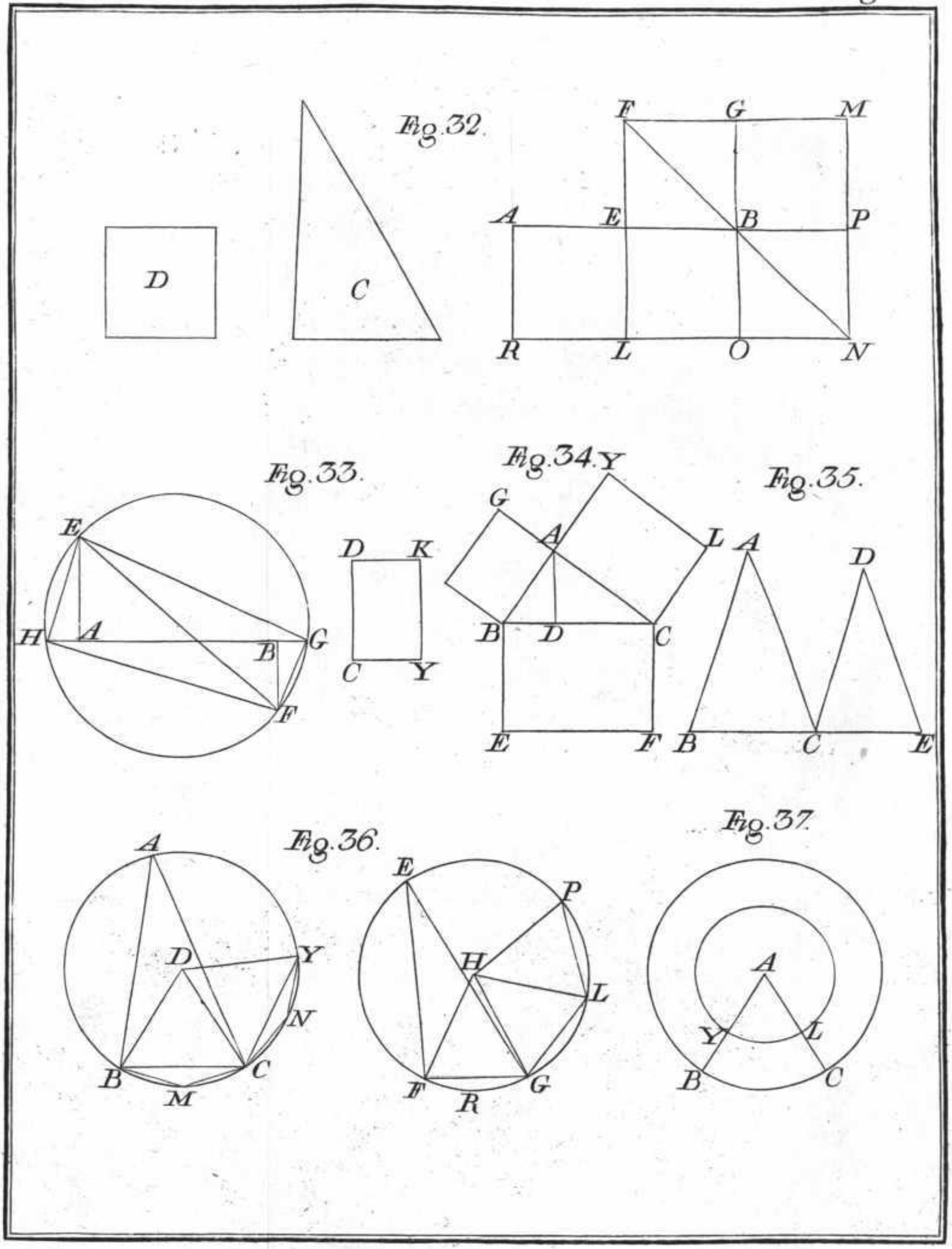


Fig. 32.
D
C
F G M
A E B P
R L O N
Fig. 33.
E
H A B G
F
D K
C Y
Fig. 34. Y
G
A
L
B D C
E F
Fig. 35.
A
D
B C E
Fig. 36.
A
D
Y
N
B M C
E
P
H
L
F R G
Fig. 37.
A
Y L
B C

LIBRO XI.

DEFINICIONES.

342 Sólido es el que tiene longitud, latitud, y profundidad.

343 Los extremos ó términos del sólido son superficies.

344 Una recta es perpendicular á un plano, quando es perpendicular á todas las rectas, que la tocan, y están en el mismo plano.

La recta *AB* será (*Fig.* 1) perpendicular al plano *GFCE*, si forma con todas las rectas *GB*, *FB*, *DB*, *CB*, &c. tiradas por el extremo *B* en dicho plano los ángulos rectos *ABG*, *ABF*, *ABD*, *ABC*, &c.

345 Un plano es perpendicular á otro, quando las rectas tiradas en uno de ellos perpendiculares á la comun seccion son tambien perpendiculares al otro plano.

El plano *HGEY* será (*Fig.* 1) perpendicular al plano *GFCE*, si qualquiera recta *AB* tirada en uno de ellos *HGEY* perpendicular á la comun seccion *GE*, es tambien perpendicular al otro plano *GFCE*.

346 La inclinacion de una recta *AD* al plano *FCE* es el ángulo agudo *ADB* que resulta, si desde el extremo superior *A* de dicha recta se baxa

la perpendicular *AB* sobre el plano, y se tira la recta *DB* que junte los extremos de ambas rectas *AD*, *AB*. *Fig.* 2.

347 La inclinacion de un plano á otro es el ángulo agudo contenido por dos rectas tiradas, una en cada plano, perpendiculares á la comun seccion en un mismo punto.

Así la inclinacion (*Fig.* 3) del plano *GFCH* al plano *FCE* es el ángulo agudo *ADB* contenido por las rectas *DA*, *DB* tiradas desde un mismo punto *D* perpendiculares á la comun seccion *FC* de ambos planos en cada uno de estos.

348 Dos planos estarán igual, ó semejantemente inclinados que otros dos planos, quando la inclinacion de los dos primeros es igual á la de los segundos.

349 Planos paralelos son los que continuados nunca se encuentran.

350 Angulo sólido es la inclinacion de mas de dos rectas, que concurren en un punto, y no están en un mismo plano; y así (*Fig.* 4) la inclinacion de las rectas *DA*, *DC*, *DB*, que concurren en un mismo punto *D*, y están en diferentes planos, forman el ángulo sólido *D*.

351 Figuras sólidas semejantes son las que están contenidas por igual número de planos semejantes.

352 Figuras sólidas semejantes é iguales son

las que están contenidas por igual número de planos semejantes é iguales.

ESCOLIO.

353 Esta definicion contiene un toerema así como la primera del libro tercero; esto es, que dos círculos son iguales, si tienen iguales sus radios. Sin embargo usarémos de ella, sea de Euclides ó de Theon, á imitacion de tantos sabios Geómetras posteriores á Euclides, quando facilmente se puede demostrar por medio de la sobreposicion, que las dos figuras sólidas contenidas por igual número de planos semejantes é iguales se ajustan exâctamente.

354 Pirámide es la figura sólida contenida por planos, que saliendo de los extremos de otro concurren en un punto.

Las figuras sólidas *DABC*, *EABCD*, *FABCDE* son (*Fig.* 4) todas pirámides, y para distinguirlas unas de otras se dice pirámide triangular la figura sólida *DABC* que tiene por base un triángulo; pirámide quadrangular la *EABCD* que tiene por base un quadrilátero; pirámide pentagonal la *FABCDE* que tiene por base un pentágono, y así succesivamente. Se entiende por base de la pirámide el plano, en quien concurren todos los demas.

355 Prisma es una figura sólida contenida por planos, de quienes dos opuestos son iguales, seme-

jantes y paralelos, y los demas paralelógramos.

356 Esfera es la figura descrita por la revolucion de un semicírculo al rededor de su diámetro inmovil, hasta volver al lugar de donde salió.

357 El diámetro inmovil se llama exe de la esfera.

358 El centro del referido semicírculo se llama centro de la esfera.

359 Diámetro de la esfera es qualquiera recta tirada por su centro, y terminada por ambas partes en su superficie.

360 Cono es una figura sólida descrita por la revolucion de un triángulo rectángulo al rededor de un lado inmovil de los que contienen el ángulo recto, hasta volver al lugar de donde salió.

361 Si el lado inmovil fuese igual al otro, que con él forma ángulo recto; el cono se llamará orthogonio; si fuere menor, ambligonio; y si mayor, oxîgonio.

362 Exe del cono es la recta fixa al rededor de la qual gira el triángulo.

363 Base del cono es el círculo descrito por el lado que gira.

ESCOLIO.

364 El cono, que Euclides define, tiene el exe perpendicular á la base, y en este caso se llama recto.

Los Geómetras consideran otro cono que llaman escaleno, y describen los dos del modo siguiente. Dado un círculo *ACB* (*Fig.* 5) cuyo centro sea *C*, y un qualquier punto *D* superior al plano *ACB*; si se considera que una recta *DA* tirada desde este punto á la circunferencia, estando firme en el punto *D*, se mueve al rededor de la circunferencia del círculo, hasta que vuelva al lugar de donde salió; la figura sólida contenida por el círculo *ACB*, y la superficie formada por la recta *DA*, se llama cono, y es recto, si *DC* es perpendicular al círculo *ACB*, y si no, escaleno. Generalmente el círculo *ACB* se llama base del cono, *DC* exe, el punto *D* vértice del cono, y la superficie descrita por la *DA* prolongada por ambas partes se llama superficie cónica.

365 Cilindro es la figura sólida descrita por la revolucion de un paralelógramo rectángulo al rededor de uno de sus lados inmovil, hasta volver al lugar de donde salió.

366 Exe del cilindro es la recta inmovil al rededor de la qual se mueve el rectángulo.

367 Bases del cilindro son los círculos descritos por los dos lados opuestos, que giran.

ESCOLIO.

368 En el cilindro, que Euclides define, es el exe perpendicular á la base, y en este caso se llama recto. Los Geómetras consideran otro cilindro, que llaman escaleno, y se conciben ambos descritos del modo siguiente. Si dos círculos *CD*, *AB* (*Fig.* 6) son iguales y paralelos, y la recta *GH* se mueve al rededor de las circunferencias de dichos círculos hasta volver al lugar de donde salió; la figura sólida comprehendida entre dichos círculos, y la superficie producida por la recta *DB*, se llama cilindro, y es recto, si la recta *EF*, que junta los centros de los dos círculos, es perpendicular á la base *AYB*, si no, el cilindro es escaleno.

369 Los conos, y los cilindros se llaman semejantes, quando son proporcionales sus exes con los diámetros de las bases.

370 Cubo es una figura sólida contenida por seis quadrados iguales.

371 Tetraedro es una figura sólida contenida por quatro triángulos iguales, y equiláteros.

372 Octaedro es una figura sólida contenida por ocho triángulos iguales, y equiláteros.

373 Dodecaedro es una figura sólida contenida por doce pentágonos iguales, equiláteros, y equiángulos.

374 Icosaedro es una figura sólida contenida por veinte triángulos iguales, y equiláteros.

375 Paralelepípedo es una figura sólida contenida por seis paralelogramos, de los quales cada dos opuestos son paralelos.

PROPOSICION I.

376 Una recta no puede estar parte en un plano inferior, y parte en otro superior. *Fig.* 7.

De lo contrario, estando la parte *AC* de la recta *ACB* en el plano *DE*, podria estar la parte *CB* en otro superior, y alargada la *AC* hasta *F* en dicho plano *DE*, tendrian dos rectas *FCA*, *BCA* un segmento comun *AC*, loque es imposible. Luego &c.

PROPOSICION II.

377 Dos rectas *AB*, *CD* que se cortan mutuamente, están en un plano, como tambien qualquier triángulo *DEB*. *Fig.* 8.

Si el triángulo *DEB* no estuviese en un solo plano, una parte de él *FEG* se hallaria en un plano inferior, y otra *DFGB* en otro superior, y por consiguiente las rectas *EFD*, *EGB* estarian parte en un plano, y parte en otro, lo que es imposible (376): luego el triángulo *DEB* está todo en un plano; pero las rectas *CD*, *AB* están (376) en el mismo plano en que se hallan *ED*, *EB*: luego estarán tambien en un mismo plano.

PROPOSICION III.

378 Si dos planos *AB*, *CD* se cortan mutuamente; su seccion comun *EF* será una recta. *Fig.* 9.

Si la seccion comun *EF* no es una recta, tírese en el plano *AB* la recta *EGF*, y en el plano *CD* la recta *EHF*: y se verificaria que dos rectas *EGF*, *EHF* cerraban espacio, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION IV.

379 Si una recta *EF* es perpendicular, en la comun seccion, á dos rectas *AB*, *CD*, que se cortan mutuamente; será tambien perpendicular al plano *ADBC*, en que están. *Fig.* 10.

Tómense las rectas *EA*, *EC*, *EB*, *ED* iguales entre sí, y por el punto *E* en el plano *ADBC* tírese qualquiera recta *GEH*, que se termine en *AD*, *CB*; en fin tírense las rectas *FA*, *FG*, *FD*, *FB*, *FH*, *FC*. Siendo $AE = EB$, $DE = EC$, y (79) el ángulo $AED = CEB$, será (63) $AD = CB$, y el ángulo $DAE = EBC$; pero (79) el ángulo $AEG = BEH$ y $AE = EB$: luego será (93) $AG = BH$ y $GE = EH$. Asimismo siendo iguales los la-

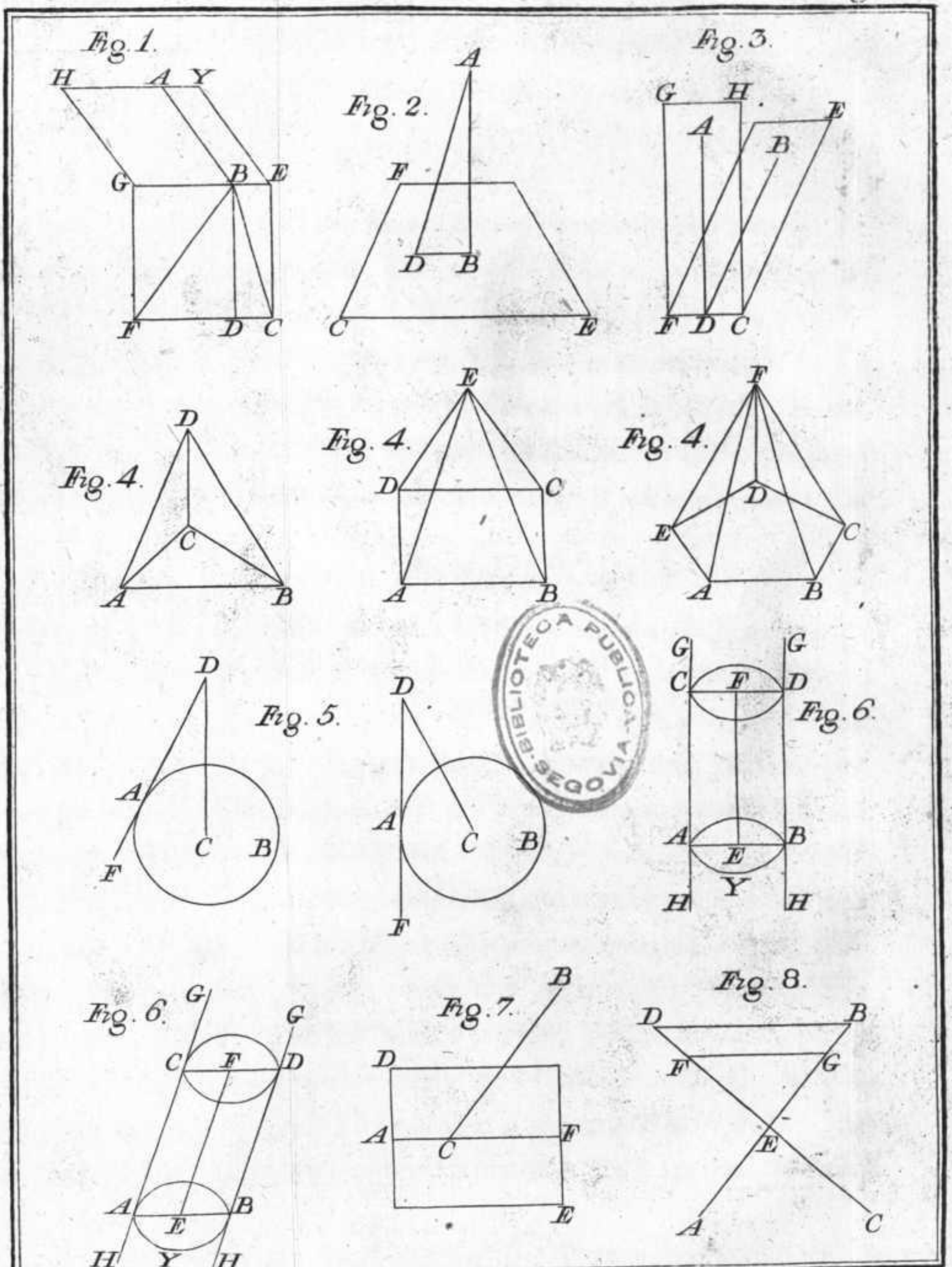
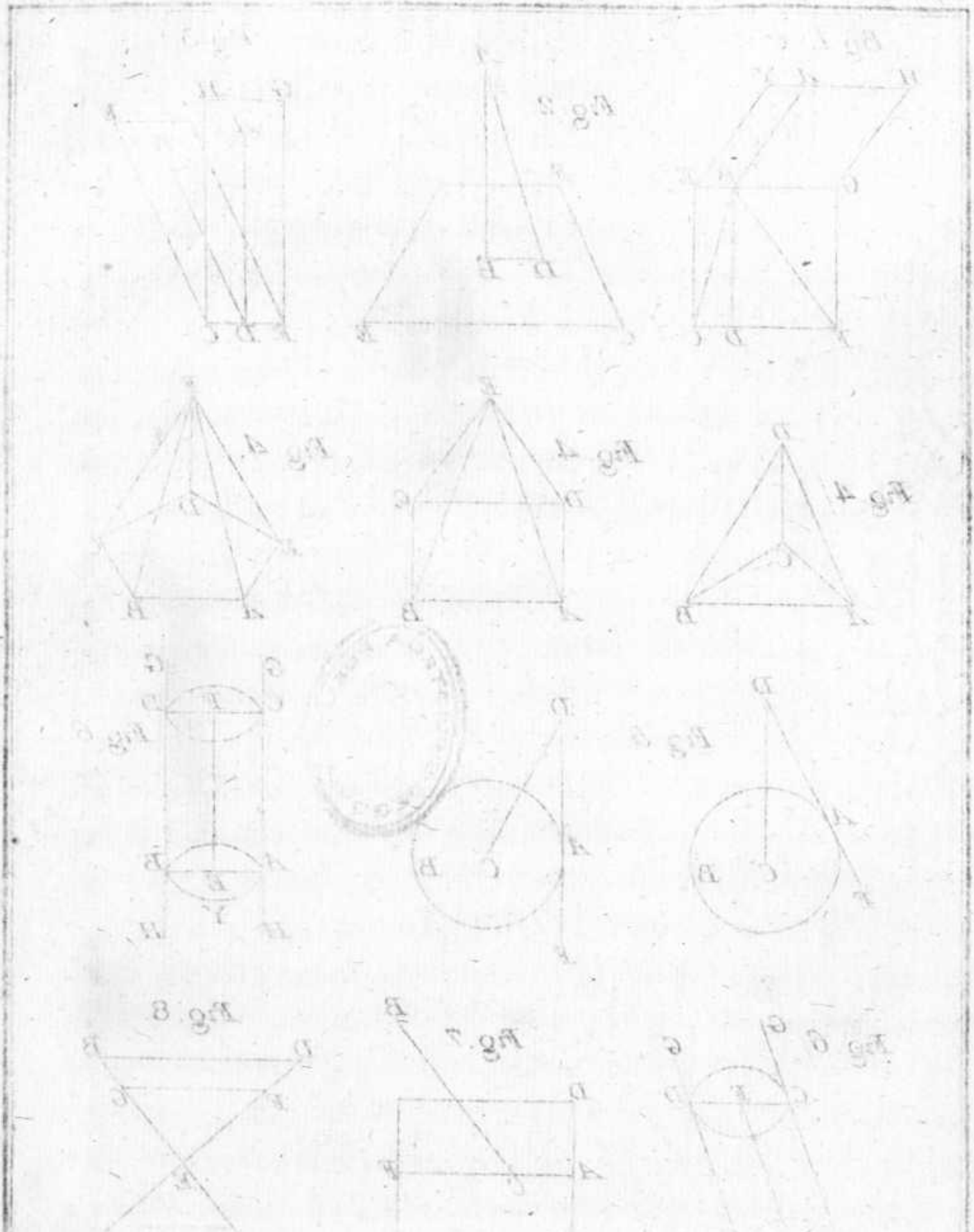


Fig. 1.
H A Y G B E F D C
Fig. 2.
A F D B C E
Fig. 3.
G H A E B F D C
Fig. 4.
D C A B
Fig. 4.
E D C A B
Fig. 4.
F D E C A B
Fig. 5.
D A C B F
D A C B F
Fig. 6.
G G C F D A E B Y H H
Fig. 6.
G G C F D A E B H Y H
Fig. 7.
B D A C F E
Fig. 8.
D B F G E A C



dos *AE*, *ED*, *EB*, *EC*, y *EF* comun á los quatro triángulos *FEA*, *FED*, *FEB*, *FEC*, y ademas los ángulos en *E* rectos, serán (63) iguales los lados *AF*, *DF*, *BF*, *CF*; pero se ha demostrado *DA* = *BC*: luego será (69) el ángulo *FAD* = *FBC*; y siendo por lo demostrado *FA* = *FB*, *AG* = *BH*, será (63) *FG* = *FH*: luego los triángulos *FEG*, *FEH* tienen los lados del uno respectivamente iguales á los del otro; por consiguiente (69) serán iguales los ángulos *FEG*, *FEH*, esto es, *FE* perpendicular á *GH*. Del mismo modo se demuestra que *FE* es perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto *E*, y están en el plano *ADBC*; por consiguiente *FE* es (344) perpendicular al referido plano. Que es &c.

PROPOSICION V.

380 Si una recta *AB* es perpendicular, en la comun seccion, á tres rectas *AC*, *AD*, *AE*, que se cortan, estarán estas en un mismo plano. *Fig.* 11.

De lo contrario, una de las tres rectas como *AE* estaria en otro plano *BE* diferente del plano *CF* que pasa por las dos *CA*, *AD*, y sea en este caso la recta *AG* (378) la seccion comun del plano *FC* con el plano *BE* prolongado si es necesario. Siendo *AB* perpendicular (sup.) á las rectas *AC*, *AD*, tambien será (379) perpendicular al plano *FC*, y por consiguiente (344) á la recta *AG*; pero la recta *BA* es perpendicular á la recta *AE* (sup.): luego serán iguales los ángulos *BAE*, *BAG*, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION VI.

381 Si dos rectas *AB*, *DC* son perpendiculares á un mismo plano *EF*; serán paralelas entre sí. *Fig.* 12.

Tírese la recta *AD*, y sobre ella levántese la perpendicular *DG* en el plano *EF*; tómese *DG* = *AB*, y tírense las rectas *BD*, *BG*, *AG*. Siendo *AB* perpendicular al plano *EF*, lo será tambien (344) á las rectas *AD*, *AG*. Del mismo modo se demuestra *DC* perpendicular á las rectas *DA*, *DG*: luego los triángulos *BAD*, *ADG* tienen los ángulos *BAD*, *ADG* iguales por rectos, y los lados *BA*, *AD* respectivamente iguales á los *GD*, *DA*; por consiguiente (63) tendrán las bases *BD*, *AG* iguales; pero *BA* = *DG*, y *BG* es comun á los triángulos *BAG*, *BDG*: luego (69) será el ángulo *BAG* = *BDG*, y por ser *BAG* recto, lo será tambien *BDG*: luego *GD* es perpendicular á las tres rectas *DA*, *DB*, *DC*; por consiguiente (380) estas tres estarán en un mismo plano en quien está (377) tambien la

AB; y siendo los ángulos *BAD*, *CDA* rectos, será (95) *AB* paralela á *DC*. Que es &c.

PROPOSICION VII.

382 Si dos rectas *AB*, *CD* son paralelas, la recta *EF*, que junta dos puntos qualesquiera *E*, *F* de ellas, estará en el mismo plano, en que se hallan las paralelas. *Fig.* 13.

Si se niega, que *EF* está en el plano de las paralelas *AB*, *CD*, córtese dicho plano con otro, que pase por los puntos *E*, *F*, y la seccion comun de los referidos dos planos será (378) una linea recta *EGF*: luego dos rectas *EF*, *EGF* cerrarian espacio, lo que es imposible. Luego &c.

ESCOLIO.

383 Esta proposicion es verdadera, aun quando las rectas *AB*, *CD* no sean paralelas, con tal que estén en un mismo plano; como se evidencia por la demostracion.

PROPOSICION VIII.

384 Si dos rectas *AB*, *DC* son paralelas, y una de ellas como *AB* es perpendicular al plano *EF*; la otra *DC* será tambien perpendicular al mismo plano. *Fig.* 12.

Con la misma preparacion y raciocinio de la proposicion sexta se demostrará ser recto el ángulo *GDB*; pero el ángulo *GDA* es recto (constr.): luego será *GD* perpendicular á las dos rectas *DA*, *DB*; por consiguiente (379) al plano que pasa por ellas. Ademas siendo *AB* paralelas á *DC* (sup.), las rectas *AB*, *AD*, *DB*, *DC* estarán (382) en un mismo plano: luego (344) será *GD* perpendicular á *DC*; pero (97) el ángulo *CDA* es recto, por ser *AB* paralela á *DC* y el ángulo *BAD* recto: luego será *CD* perpendicular á las rectas *DA*, *DG*, y por consiguiente (379) al plano *EF* que pasa por ellas. Que es &c.

PROPOSICION IX.

385 Las rectas *AB*, *CD* paralelas á otra *EF*, aun quando no estén todas en un mismo plano, serán paralelas entre sí. *Fig.* 14.

En el plano de las paralelas *AB*, *EF* tírese *HG* perpendicular á *EF*: asimismo en el plano de las paralelas *EF*, *CD* tírese *GJ* perpendicular á *EF*, y será (379) *EG* perpendicular al plano que pasa por las rectas *HG*, *GJ*; pero *AH*, *CJ* son paralelas á *EG* (sup.): luego serán (384) las rectas *AH*, *CJ* perpendiculares al plano que pasa por las rectas *HG*, *GJ*; por consiguiente (381)

AH, *CJ* son entre sí paralelas. Que es &c.

PROPOSICION X.

386 Si dos rectas *BA*, *AC* que se cortan, son paralelas á otras dos *ED*, *DF* que tambien se cortan, no estando en un mismo plano; contendrán ángulos iguales, es á saber $BAC = EDF$. *Fig.* 15.

Tómense *BA*, *AC*, *ED*, *DF* iguales entre sí, y tírense *AD*, *BE*, *CF*, *BC*, *EF*. Siendo, pues, *AB* paralela é igual á *DE*, tambien *BE* será (106) paralela é igual á *DA*; y por la misma razon será *CF* paralela é igual á *DA*: luego *CF* será igual y paralela (385) á *BE*; por consiguiente (106) será *BC* paralela é igual á *EF*. Por tanto los triángulos *BAC*, *EDF* tendrán los lados del uno iguales respectivamente á los del otro, y será (69) el ángulo $BAC = EDF$. Que es &c.

PROPOSICION XI.

387 De un punto dado *A* superior á un plano *BC*, baxar á este una perpendicular. *Fig.* 16.

Tírese en el plano *BC* qualquiera recta *DE*, y báxese á ella desde *A* la perpendicular *AF*; tírese en el plano *BC* la *FH* perpendicular á *DE*, y sobre ella báxese la perpendicular *AJ* que lo será al plano *BC*. Por el punto *J* tírese la recta *KL* paralela á *DE*. Siendo, pues, *DF* perpendicular á las rectas *FA*, *FH*, lo será tambien (379) al plano *JFA*; pero *KJ* es paralela á *DF* (constr.): luego será (384) *KJ* perpendicular al plano *JFA*; por consiguiente (344) el ángulo *KJA* recto, y siéndolo tambien *AJF* (constr.), será (379) *AJ* perpendicular al plano *BC*. Que es &c.

PROPOSICION XII.

388 Levantar sobre un plano *BC* una perpendicular en el punto *A*. *Fig.* 17.

Desde qualquier punto *D* superior al plano *BC* báxese á él (387) la perpendicular *DE*, y tirada *EA* tírese *AF* paralela á *DE*, que será perpendicular al plano *BC*: porque siendo *AF*, *ED* paralelas, y *ED* perpendicular al plano *BC*, tambien (384) lo será *AF*. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

389 En un punto *C* de un plano *AB* no se pueden levantar dos perpendiculares *CD*, *CE* á él hácia la misma parte. *Fig.* 18.

Si las rectas *CD*, *CE* fueren perpendiculares al plano *AB*, serian tambien (381) paralelas, lo que es imposible. Luego &c.

COROLARIO.

390 Por la misma razon se infiere que desde un punto superior á un plano, únicamente se puede baxar á él una perpendicular.

PROPOSICION XIV.

391 Si una recta *AB* es perpendicular á dos planos *CD*, *EF*; estos serán paralelos. *Fig.* 19.

De lo contrario, continuados dichos planos concurririan, y su seccion comun será (378) la recta *GH*: tómese en esta qualquier punto *J*, y tírense las rectas *JA*, *JB*. Siendo, pues, *AB* perpendicular á los planos *CD*, *EF* (sup.), serán rectos (344) los ángulos *JAB*, *JBA*, lo que es imposible (82). Luego &c.

PROPOSICION XV.

392 Si dos rectas *AB*, *AC* que se cortan en un plano, son paralelas á otras dos *DE*, *DF* que se cortan en otro; tambien serán paralelos los planos *BAC*, *EDF*, que pasan por ellas. *Fig.* 20.

Desde el punto *A* báxese (387) *AG* perpendicular al plano *EF*, y por el punto *G* tírense (100) las rectas *GH*, *GJ* respectivamente paralelas á las *DE*, *DF*. Siendo, pues, *GH*, *AB* paralelas á una misma *DE*, será (385) *GH* paralela á *AB*: asimismo será *GJ* paralela á *AC*; pero *AG* es (344) perpendicular á las rectas *GH*, *GJ*, por ser perpendicular (constr.) al plano *EF*: luego será (97) *GA* perpendicular á las paralelas *AB*, *AC*; por consiguiente (379) será tambien *GA* perpendicular al plano *BC*; pero *AG* lo es (constr.) al plano *EF*: luego (391) los planos *BC*, *EF* serán paralelos. Que es &c.

ESCOLIO.

393 Por un punto *G* fuera de un plano *BAC* se hará pasar un plano paralelo á *BAC*, si por el punto *G* se tiran las rectas *GH*, *GJ* respectivamente paralelas á las *AB*, *AC*; pues será por lo demostrado el plano que pasa por *HG*, *GJ* paralelo al plano *BAC*.

PROPOSICION XVI.

394 Si dos planos paralelos *AB*, *CD* se cortan por otro *HEGF*; las comunes secciones *EH*, *GF* serán paralelas. *Fig.* 21.

A no ser así, dichas comunes secciones concurririan en un punto *J*; pero (376) las rectas *HEJ*, *HE* están en el plano *BA*, y las rectas *FGJ*, *FG* están en el plano *DC*: luego los planos *AB*, *CD* concurririan, lo que es contra lo supuesto. Luego &c.

Fig. 9.

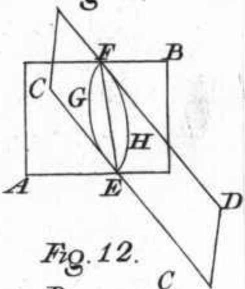


Fig. 10.

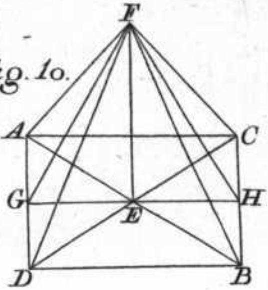


Fig. 11.

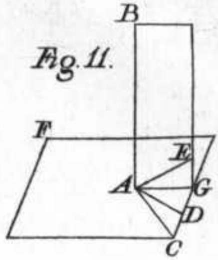


Fig. 12.

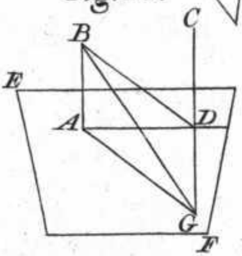


Fig. 13.

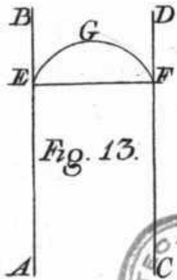


Fig. 14.

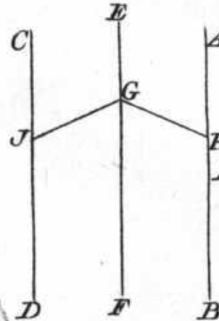


Fig. 15.

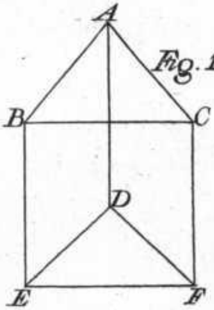


Fig. 16.

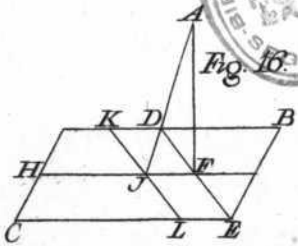


Fig. 17.

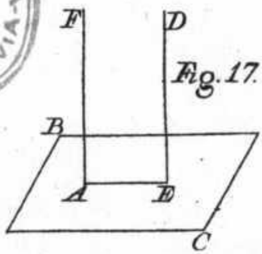


Fig. 18.

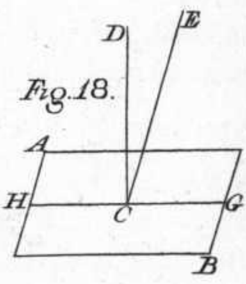


Fig. 19.

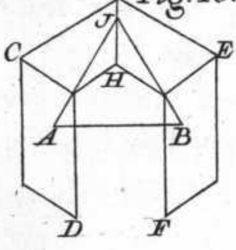
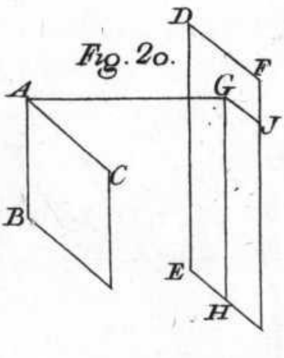


Fig. 20.



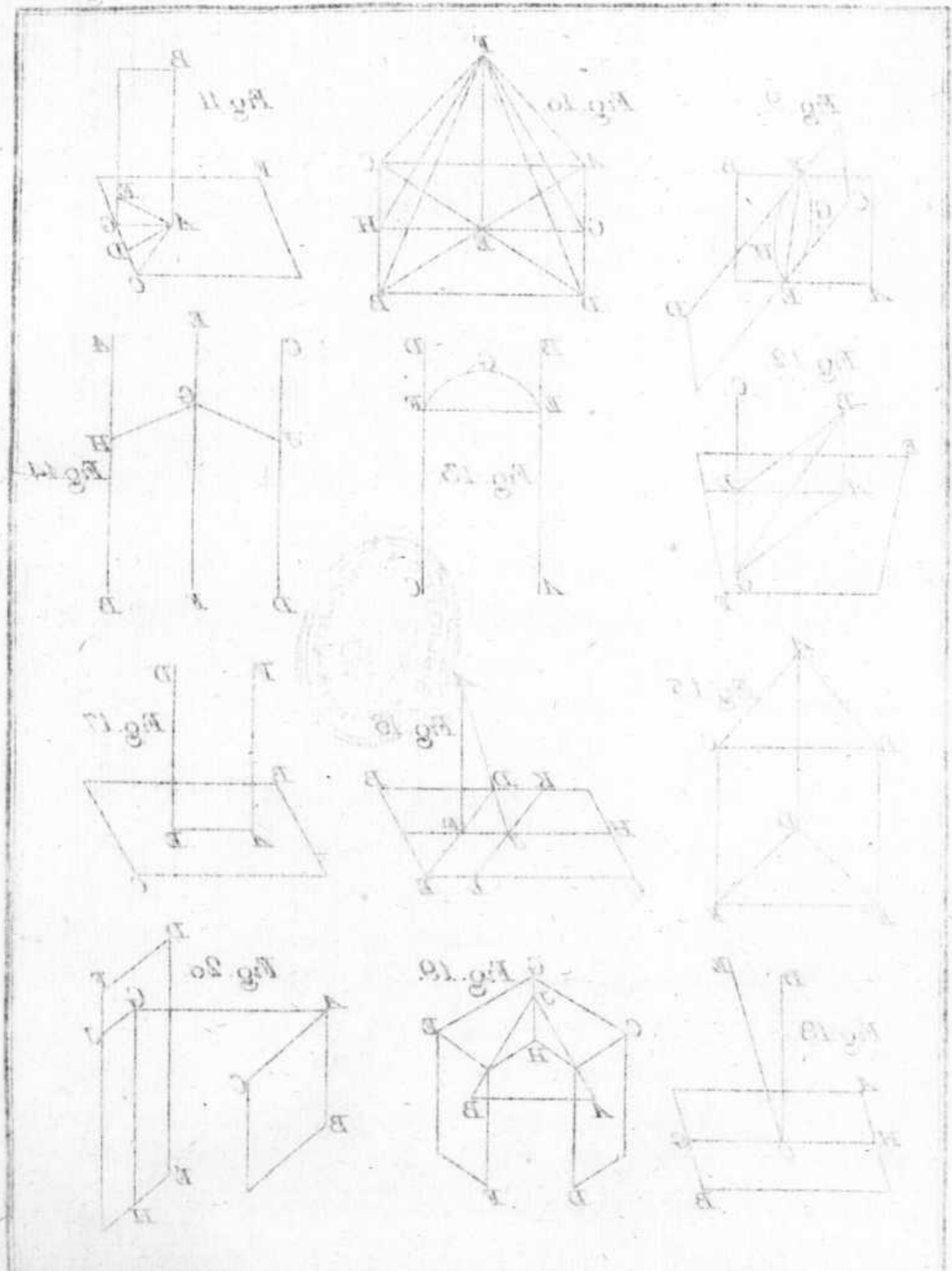


Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20

PROPOSICION XVII.

395 Si dos rectas *ALB*, *CMD* se cortan por planos paralelos *EF*, *GH*, *JK*; quedarán divididas en iguales razones; esto es, *AL*: *LB* = *CM*: *MD*. *Fig.* 22.

Tírense las rectas *AC*, *BD* en los planos *EF*, *JK*; únanse los puntos *A*, *D* por la recta *AD*, que encontrará al plano *GH* en *N*; y tírense las rectas *NL*, *NM*. Dividiendo el plano triangular *ABD* á los dos planos paralelos *GH*, *JK*, sus comunes secciones *LN*, *BD* serán paralelas (394): del mismo modo se demostrará *AC* paralela á *NM*. Por tanto será (290) *AL*: *LB* = *AN*: *ND*; pero es (291) *CM*: *MD* = *AN*: *ND*, por ser *NM* paralela al lado *AC* del triángulo *ACD*: luego *AL*: *LB* = *CM*: *MD*. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

396 Si una recta *AB* es perpendicular á un plano *CD*; todos los planos que pasen por ella, le serán perpendiculares. *Fig.* 23.

Pase por *AB* un qualquier plano *FE*, y sea *EG* la comun seccion de los planos *EF*, *CD*: tómese en *EG* qualquier punto *H*, y por este tírese en el plano *EF* la recta *HJ* perpendicular á la comun seccion *EG*. Siendo *AB* perpendicular al plano *CD*, será recto el ángulo *ABH*; pero el ángulo *JHB* es recto (constr.): luego (95) serán las rectas *HJ*, *BA* paralelas, y por ser *BA* perpendicular al plano *CD*, tambien *HJ* será (384) perpendicular al mismo plano; por consiguiente (345) será el plano *EF* perpendicular al plano *CD*. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

397 Si dos planos *AB*, *CD*, que mutuamente se cortan, son perpendiculares á otro *GH*; le será tambien perpendicular la comun seccion *EF* de los referidos dos planos. *Fig.* 24.

A no ser así; levantada la recta *FJ* en el plano *AB* perpendicular á la comun seccion *FB*, y *FK* perpendicular á la comun seccion *FD* en el plano *CD*, seria (345) *FJ* perpendicular al plano *GH*, por ser el plano *AB* perpendicular (sup.) al plano *GH*; asimismo por ser el plano *CD* perpendicular al plano *GH*, será *FK* perpendicular al plano *GH*: luego dos rectas *FJ*, *FK* serian perpendiculares al plano *GH*, lo que es imposible (389). Luego &c.

PROPOSICION XX.

398 Si un ángulo sólido *A* está contenido por tres ángulos planos *BAD*, *CAD*, *BAC*; la suma de

dos qualesquiera será mayor que el tercero. *Fig.* 25.

Si dichos tres ángulos son iguales, es evidente lo propuesto; pero si fuesen desiguales, sea el ángulo *BAC* mayor *BAD*, y no menor que *CAD*. Constrúyase (90) el ángulo $BAE = BAD$; córtese $AD = AE$; en fin tírense las rectas *BD*, *BC*, *CD*. Siendo, pues, *BA* comun á los dos triángulos *BAE*, *BAD*, $AE = AD$, y el ángulo $BAE = BAD$, será (63) $BE = BD$; pero (87) $BD + DC > BC$: luego será $DC > EC$; y siendo *DA*, *AC* iguales respectivamente á *AE*, *AC*, será (92) el ángulo $DAC > CAE$, y por lo tanto serán los ángulos $BAD + CAD > BAC$; pero *BAC* es mayor que *BAD*, y no menor que *CAD*: luego la suma del ángulo *BAC* y de uno de ellos será mayor que el tercero. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

399 La suma de todos los ángulos planos que contienen un ángulo sólido no equivale á quatro rectos. *Fig.* 26.

Sea *A* un ángulo sólido: córtense con qualquier plano *BCDEF* los planos *BAC*, *CAD*, *&c.* en que están los ángulos, que componen el ángulo sólido *A*; y será el plano *BCDEF* un polígono por ser (378) lineas rectas las comunes secciones *BC*, *CD*, *&c.* Resuélvase este polígono en triángulos *BRC*, *CRD*, *&c.*

y será la suma de los ángulos de estos triángulos igual (102) á la de triángulos *BAD*, *CAD*, *&c.* pero en el ángulo sólido *B* los dos ángulos (398) $CBA + ABF > CBF$; tambien en el ángulo sólido *F* los dos ángulos $BFA + AFE > BFE$; y así en los demas ángulos sólidos *E*, *D*, *C*: luego será el ángulo sólido *A* menor que la suma de los ángulos en *R* que forman (77) quatro rectos. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

400 Si tres ángulos planos *A*, *B*, *HCJ* están contenidos por rectas iguales *DA*, *AE*, *FB*, *&c.* y dos qualesquiera de ellos son mayores que el tercero; se podrá construir un triángulo de las rectas *DE*, *FG*, *HJ*, que juntan dichas rectas iguales. *Fig.* 27.

Constrúyase (90) el ángulo $HCK = B$; y siendo (sup.) los ángulos $B + HCJ > A$, será tambien $KCJ > A$: tómese $CK = CH$, y tírense las rectas *KH*, *KJ*. Los triángulos *KCH*, *FBG* que tienen los lados *KC*, *CH* iguales á los *FB*, *BG*, y los ángulos *KCH*, *B* iguales, tendrán tambien (63) iguales las bases *KH*, *FG*. Y por ser los lados *KC*, *CJ* iguales á los *DA*, *AE*, y el ángulo $KCJ > A$, será (91) $KJ > DE$; pero $FG + HJ = KH + HJ > KJ$ (87): luego con mucha mas razon será $FG + HJ > DE$. Con semejante raciocinio se demostrará, que la suma de dos de estas rectas es mayor que la tercera; por consiguiente (89) se podrá construir un triángulo con las tres rectas DE, FG, HJ. Que es &c.

ESCOLIO.

401 Si de las rectas DE, FG, HJ se forma el triángulo MLN, y se le circunscribe el círculo MLN; el radio XM será menor que AD. *Fig.* 27. 28.

Tírense XL y XN.

I. Esté el centro X dentro de dicho triángulo MLN. Si fuese $XM = AD$, sería (69) el ángulo $MXL = A$; por lo mismo el ángulo $MXN = B$, y el ángulo $NXL = HCJ$; pero (77) $NXL + MXN + MXL =$ quatro rectos: luego $A + B + HCJ =$ quatro rectos, contra lo supuesto; por consiguiente no puede ser $MX = AD$. Si fuese $MX > AD$, sería (88) el ángulo $MXL < A$; por lo mismo $MXN < B$, y $NXL < HCJ$; pero $MXL + MXN + NXL =$ quatro rectos: luego $A + B + HCJ >$ quatro rectos, contra lo supuesto. Luego el radio XM será menor que AD.

II. Esté el centro X en un lado MN. Si fuese $XM = AD$, sería $MN = BF + BG$; pero $MN = FG$: luego $FG = BF + BG$, lo que es imposible.

Del mismo modo se demostrará, que XM no puede ser mayor que AD: luego $XM < AD$.

III. Esté el centro X fuera del triángulo LMN Si fuese $XM = AD$, sería (69) el ángulo $MXL = A$; por lo mismo el ángulo $MXN = B$, y el ángulo $LXN = HCJ$; pero $MXN = MXL + LXN$: luego $B = A + HCJ$, contra lo supuesto. Si fuese $MX > AD$; hágase el ángulo $HCK = A$; córtese $CK = AD$, y tiradas las KJ, KH será (63) $KH = DE = ML$. Y siendo $XM > AD$ ó KC, será el ángulo (88) $KCH > MXL$, y por consiguiente el ángulo $KHC < XLM$. Del mismo modo se demostrará el ángulo $CHJ < XLN$: luego $KHJ < MLN$; por consiguiente (91) en los triángulos KHJ, MLN será $KJ < MN$ ó FG: luego en los triángulos FBG, KCJ será el ángulo (92) $B > KCJ$, ó bien mayor que $A + HCJ$, lo que es contra lo supuesto. Por tanto será $XM < AD$.

PROPOSICION XXIII.

402 Construir un ángulo sólido de tres ángulos planos dados A, B, HCJ, con tal que la suma de dos qualesquiera de ellos sea mayor que el tercero, y la suma de todos (399) menor que quatro rectos. *Fig.* 27. 28.

Córtense iguales las rectas AD, AE, BF, BG,

CH, CJ, y tírense DE, FG, HJ; constrúyase (89) el triángulo MLN, de modo que sean $DE = LM$, $FG = MN$, $HJ = LN$; y circunscríbase (206) á dicho triángulo el círculo MLN, cuyo radio $XM <$ AD (401). Tírese del punto X (388) la perpendicular XR al plano del círculo LMN, y haciendo centro en M con un intervalo igual á AD descríbase en el plano MXR un círculo que cortará á la recta XR en un punto R: en fin tírense las rectas RM, RL, RN, y el ángulo sólido R será el que se pide. Tírense las rectas XL, XN. Siendo, pues, RX perpendicular (constr.) al plano LMN, lo será tambien (344) á los radios XL, XM, XN; ademas los triángulos MXR, LXR tienen los lados MX, XR respectivamente iguales á los LX, XR: luego (63) será $MR = RL$. Del mismo modo se demostrará $MR = RN$; por consiguiente serán las rectas MR, RL, RN iguales á AD. Por tanto los triángulos DAE, LRM tendrán $DE = LM$, y los lados AD, AE iguales á LR, MR; por consiguiente (69) será el ángulo $DAE = LRM$. Del mismo modo se demostrará que el ángulo $B = MRN$, y $HCJ = LRN$. Luego &c.

PROPOSICION XXIV.

403 Si un sólido AB está contenido por seis

planos paralelos; los opuestos AE y HB, &c. serán paralelógramos semejantes é iguales. *Fig.* 29.

Cortando el plano AC los dos planos paralelos AG, DB, sus comunes secciones (394) AH, DC serán paralelas; y por lo mismo lo serán las AD, HC: luego la figura AC es un paralelógramo. Igualmente se demuestra que los demas planos del sólido AB son paralelógramos. Tírense las diagonales DF, CG; y siendo las rectas AF, AD respectivamente paralelas á las HG, HC, será (386) el ángulo $DAF = CHG$; pero dichas rectas son (107) respectivamente iguales: luego será el triángulo $DAF = CHG$, y por consiguiente (107) el paralelógramo $AE = HB$; pero estos cerca de los ángulos iguales DAF y CHG tienen los lados proporcionales, esto es, $AF : AD = HG : HC$, por ser $AF = HG$, $AD = HC$: luego los paralelógramos iguales AE, HB serán semejantes. Lo mismo se demostrará de los demas planos paralelos. Que es &c.

PROPOSICION XXV.

404 Si un paralelepípedo $ABCD$ se corta por un plano EF paralelo á los opuestos AD, BC; los segmentos estarán entre sí en la razon de sus bases; esto es, el sólido $AHD : BHF = AH : BH$. *Fig.* 30.

Concíbase el paralelepípedo $ABCD$ prolongado

Fig. 21.

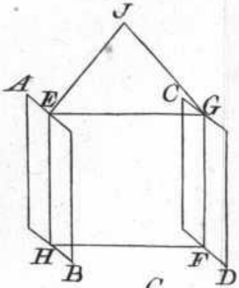


Fig. 22.

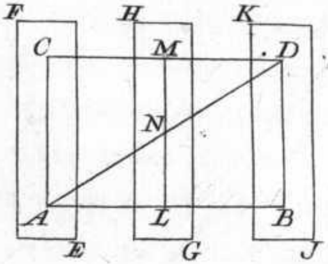
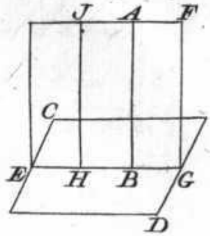


Fig. 23.



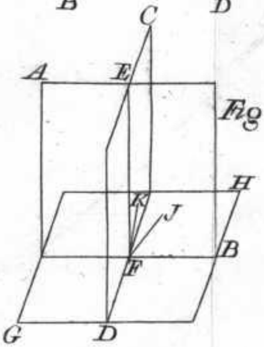


Fig. 24.

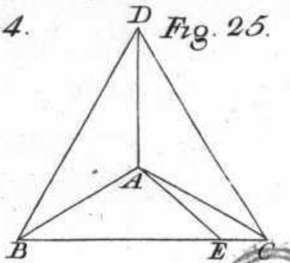


Fig. 25.

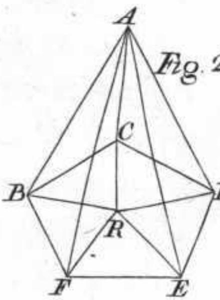
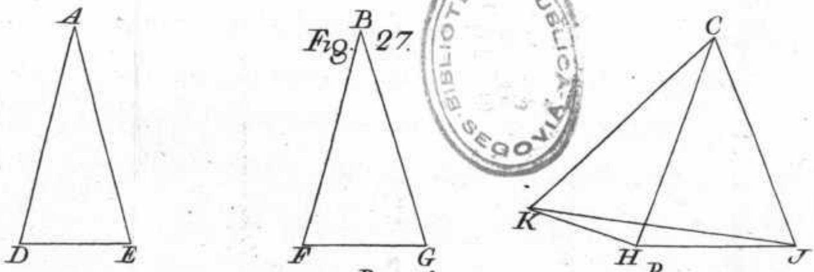
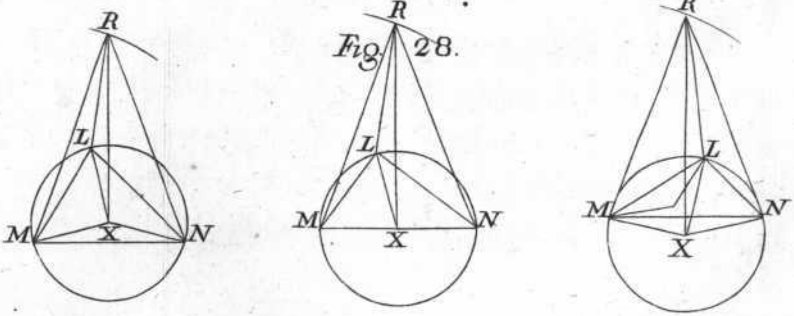


Fig. 26.





indefinidamente por ambas partes, y tómense quantas partes se quieran *AJ*, *JX*, *XS* iguales á *AE*, y otras *BK*, *KZ*, &c. iguales á *BE*; por los puntos *S*, *X*, *J*, *K*, *Z* háganse pasar (393) los planos *SN*, *XV*, *JQ*, *KP*, *ZY* paralelos á *AD*, *EF*, *BC*. Siendo, pues, el plano *DG* paralelo al plano *ME*, y el plano *DA* paralelo al plano *FE*, como tambien el plano *AG* paralelo al plano *DH*, será el sólido *AHD* un paralelepípedo, en quien los referidos planos opuestos serán (403) paralelógramos iguales y semejantes. Del mismo modo se demostrará que los sólidos *HBF*, *BTC*, *TZO*, *JMQ*, *RJV*, *SRN* son paralelepípedos. Por ser $JA = AE$, $AM = EH$, será $JA : AM = AE : EH$; pero (96) el ángulo $JAM = AEH$: luego los paralelógramos *JM*, *ME* serán semejantes, y tambien (110) iguales: por la misma razon serán los paralelógramos *LA*, *AG* semejantes é iguales; y como el paralelógramo *QJ* (403) es semejante é igual al paralelógramo *DA*, los tres planos *JM*, *AL*, *JQ* serán semejantes é iguales á los tres *AH*, *AG*, *AD*; pero los tres (403) son semejantes é iguales á los tres opuestos: luego los paralelepípedos *JMQ*, *AHD* tendrán sus planos respectivamente iguales y semejantes; por consiguiente serán (352) iguales. Del mismo modo se demostrará el paralelepípedo $JMQ = RJV = SRN$, y sus bases *JM*, *RJ*, *RS* semejantes é iguales; como tambien el paralelepípedo $HBF = BTC = TZP$, y sus bases *BH*, *BT*, *TZ* iguales y semejantes. Luego quan multiplice sea el sólido *SHN* del sólido *AHD*, tan multíplice será la base *SH* de la base *AH*; asimismo quan multíplice sea el sólido *ZHF* del sólido *HBF*, tan multíplice será la base *HZ* de la base *HB*; pero si la base *SH* es mayor, igual, ó menor que la base *HZ*, tambien respectivamente es el sólido *SHN* mayor, igual, ó menor que el sólido *HZF*: luego será (230) el paralelepípedo *AHD* al paralelepípedo *HBF* como la base *AH* á la base *HB*. Que es &c.

AHD :	$HBF =$	AH :	HB
SHN	ZHF	SH	HZ

PROPOSICION XXVI.

405 En un punto *A* de qualquier recta *AB* construir un ángulo sólido igual al dado *C* contenido por tres ángulos planos *DCF*, *FCE*, *DCE*. *Fig.* 31.

De qualquier punto *F* tomado en la *CF* tírense, *FG* (387) perpendicular al plano *DCE*, y las rectas *DGE*, *DF*, *FE*; córtese $AH = CD$, y constrúyase (90) el ángulo $HAJ = DCE$; córtese $AJ = CE$, y en el plano *HAJ* constrúyase el ángulo $HAK = DCG$, y por ser el ángulo $HAJ = DCE$, será el ángulo $KAJ = GCE$; córtese $AK = CG$, y en el punto K levántese (388) la perpendicular KL al plano HAJ; en fin córtese $KL=GF$; y tirada $AL=CF$ (63), será el ángulo sólido A igual al dado C. Tírense las rectas HK, KJ, HL, LJ. Siendo, pues, (constr.) $AH=CD$, $AK=CG$, y el ángulo $HAK=DCG$, será (63) $HK=DG$: asimismo siendo $AK=CG$, $AJ=CE$, y el ángulo $KAJ=GCE$, será $KJ=GE$; y siendo las rectas LK, FG perpendiculares á los planos HAJ, DCE, serán rectos los ángulos HKL, LKJ, DGF, FGE, y por consiguiente iguales; pero los lados HK, KL son respectivamente iguales á los DG, GF; y los lados LK, KJ á los FG, GE: luego será (63) $HL=DF$, y $LJ=FE$. Por tanto los triángulos HAL, DCF, como tambien los triángulos LAJ, FCE tendrán los tres lados del uno respectivamente iguales á los tres del otro; por consiguiente serán (69) los ángulos $HAL=DCF$, $LAJ=FCE$, y siendo además $HAJ=DCE$ (constr.), será el ángulo sólido A igual al dado C. Que es &c.

PROPOSICION XXVII.

406 Sobre una recta dada AB describir un paralelepípedo semejante, y semejantemente puesto al dado CD. *Fig.* 32.

Sobre la recta AB en el punto A constrúyase (405) el ángulo sólido A igual al ángulo sólido C, de manera que los ángulos BAH, BAJ, HAJ sean respectivamente iguales á los FCE, FCG, ECG. Hágase (306) $FC : CE = AB : AH$, y $CE : CG = AH : AJ$; será por igualdad ordenada (277) $FC : CG = AB : AJ$: en fin complétese el paralelepípedo AK que será el que se pide. Siendo $CF : CE = AB : AH$, y el ángulo $FCE = BAH$, serán (283) los paralelógramos FE, BH semejantes; por la misma razon el paralelógramo FG será semejante al paralelógramo BJ, y el paralelógramo EG al paralelógramo HJ; pero los referidos paralelógramos son (403) iguales y semejantes á los opuestos: luego los seis paralelógramos del paralelepípedo CD son respectivamente semejantes á los seis del paralelepípedo AK; por consiguiente serán (351) los paralelepípedos CD, AK semejantes, y semejantemente puestos. Que es &c.

COROLARIO.

407 Si la recta $AB = CF$, será el paralelepípedo AK igual al semejante CD: y al contrario, si el paralelepípedo AK es igual y semejante á CD, serán los lados homólogos AB, CF iguales.

PROPOSICION XXVIII.

408 Si un paralelepípedo AB se corta por

un plano que pasa por las diagonales *DF*, *CG* de dos paralelógramos opuestos *AE*, *HB*; quedará dividido en dos prismas iguales. *Fig.* 29.

Siendo (107) los lados opuestos de qualquier paralelógramo paralelos é iguales, serán tambien las rectas *DC*, *FG* paralelas é iguales á la recta *AH*; por consiguiente será *DC* paralela (385) é igual á la recta *FG*, y el plano *DFGC* será (106) un paralelógramo. Y siendo (403) el paralelógramo *AE* igual y semejante al paralelógramo *HB*, serán tambien los triángulos *DAF*, *DFE* iguales y semejantes á los *CHG*, *CGB*; pero los paralelógramos *AC*, *AG* son (403) iguales y semejantes á los *FB*, *DB*: luego todos los planos del prisma *FGCDAH* son iguales y semejantes á los del prisma *FGCDEB*; por lo que serán (352) iguales los referidos prismas. Que es &c.

PROPOSICION XXIX.

409 Los paralelepípedos *AGHEFBCD*, *AGHEMLKJ*, que tienen una misma base *AGHE* é igual altura, y cuyas rectas insistentes *AF*, *AM*, *GB*, *GL*, y *ED*, *EJ*, *HC*, *HK* están en unas mismas rectas *FL*, y *DK*, son iguales entre sí. *Fig.* 33.

Siendo (107) $ML = AG = FB$, será tambien $BL = FM$; pero $BG = FA$ y el ángulo *GBL*

$= AFM$: luegó (63) los triángulos GBL, AFM serán iguales y equiángulos; por consiguiente (296) semejantes: igualmente lo serán los HCK, EDJ; y semejantemente se demostrará lo mismo en los los triángulos GBL, HCK; pero (403) el paralelógramo AD es igual y semejante á GC, EM á HL, y tambien DM á CL, por ser $FM = BL$, y DF igual y paralela á CB: luego los planos del prisma $AFMEDJ$ son semejantes é iguales á los del prisma $GBLHCK$, y por consiguiente (352) serán iguales; y quitando de estos el sólido comun $NBMJCP$, y añadiendo á los residuos el sólido $AGNPEH$, será el paralelepípedo $AGHEFBCD = AGHEMLKJ$. Que es &c.

PROPOSICION XXX.

410 Los paralelepípedos $ABCDEHGF$, $ABCDJKLM$ que tienen una misma base $ABCD$ é igual altura, aunque las rectas insistentes AH y AJ, DO y DM, como tambien BG y BK, CF y CL, no estén en unas mismas rectas, son iguales entre sí. *Fig.* 34.

Prolónguense las rectas HE, GF, KJ, LM, y tírense las AP, DO, BQ, CN. Siendo en el paralelepípedo $ABCDKJML$ los paralelógramos opuestos $CDML$, $BAJK$ paralelos, será el plano $CDON$ paralelo al plano $BAPQ$; pero el plano $BADC$ es paralelo al plano *GHEF* ó bien *PQNO*, que es su prolongacion; y por la misma razon el plano *BQNC* es paralelo al plano *APOD*: luego el sólido *BADCQPON* es un paralelepído ; pero este es igual (409) á los paralelepípedos *BADCKJML*, *BADCGHEF*: luego los dos serán iguales. Que es &c.

PROPOSICION XXXI.

(411) Los paralelepípedos *ALJM*, *CPKONDQH*, que tienen iguales bases *AL*, *CPKO* é iguales alturas, son iguales entre sí. *Fig.* 35. 36.

I. Sean (*Fig.* 35) las rectas insistentes perpendiculares á las bases *AL*, *CPKO*, y será $PQ = IJ$ por ser iguales (sup.) las alturas de los paralelepípedos. Colóquese el sólido *ALMJ* en *SRYQ*, de manera que *JI* se ajuste exâctamente con *QP*, y el paralelógramo $QR = JL$ esté en un mismo plano con el paralelógramo *CQ* ; y por ser los ángulos *CPQ*, *QPR* rectos, las rectas *CP*, *PR* formarán una sola: prolónguense las rectas *NDV*, *OKE*, *KPZ*, *DQF*, *TSZ*, *YXF*; y por los puntos *R*, *U* tírense las rectas *ERB*, *GUV* respectivamente paralelas á las *KPZ*, *DQF*; en fin tírense las rectas *EV*, *BG*, *ZF*. Siendo, pues, *CO*, *PK*, *RE* paralelas, como tambien *CH*, *PQ*, *RU*, serán (392) los planos *CN*, *PD*, *RV* paralelos entre sí; pero (375) los planos opuestos OD, CQ, ó bien OV, CU son paralelos: luego será (404) el paralelepípedo CD al paralelepípedo PV como la base $COKP$ á la base $PKER$: del mismo modo se demostrará que es el paralelepípedo ZU al paralelepípedo PV como la base $PZBR$ ó bien $PSTR$ (109) á la base $PREK$; pero la base $PSTR = CPKO$ (sup.): luego serán proporcionales los paralelepípedos, esto es, $CD : PV = ZU : PV$; por consiguiente $CD = ZU$; pero (409) el paralelepípedo $ZU = SU$: luego será el paralelepípedo $CD = SU = AMLJ$.

II. No sean las rectas insistentes perpendiculares á las bases (*Fig.* 36) AL, $CPKO$ de los palelepípedos $ALJM$, $CPKONDQH$. En los puntos A, I, L, G levántense (388) las perpendiculares AT, IY, LZ, GR al plano $AGLI$, y en los puntos C, O, K, P levántense tambien las perpendiculares CX, OB, KF, PE al plano $COKP$; y serán dichas perpendiculares iguales entre sí, por ser iguales (sup.) las alturas de los referidos paralelepípedos: tírense las rectas YT, ZR, BX, FE, y resultarán los paralelepípedos $AILGRTYZ$, $COKPEXBF$, que serán iguales entre sí por lo demostrado en el caso antecedente; pero estos paralelepípedos son iguales (409) á los $ALJM$, $CPKONDQH$: luego tambien estos serán iguales entre sí. Que es &c.

Fig. 29.

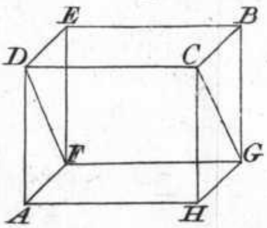


Fig. 30.

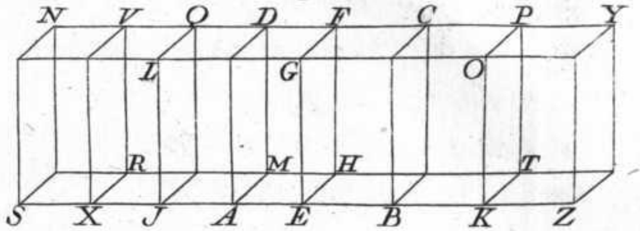


Fig. 31.

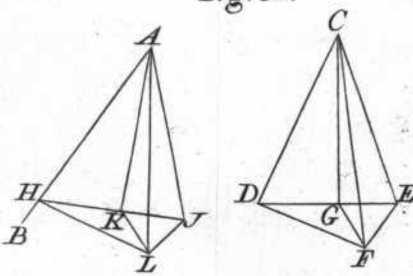


Fig. 32.

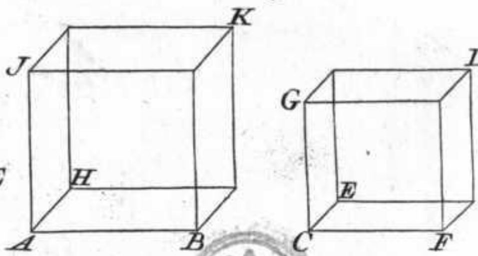


Fig. 33.

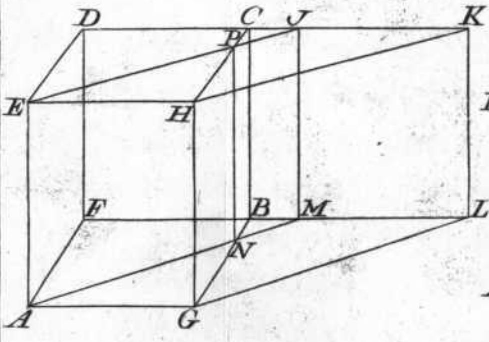
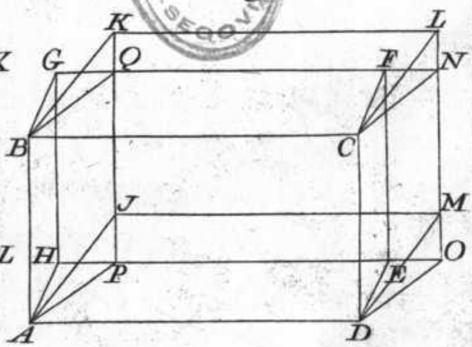
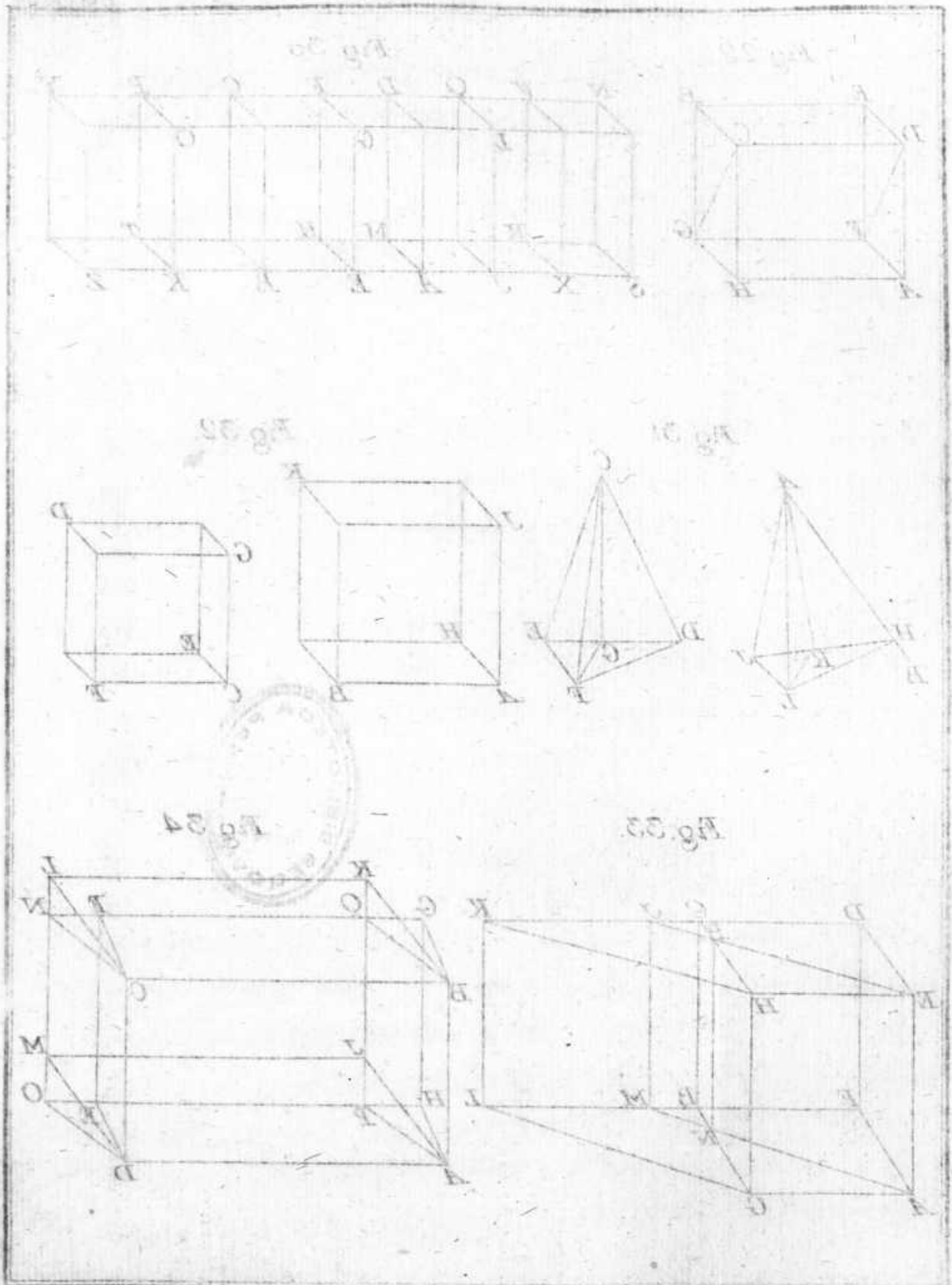


Fig. 34.





PROPOSICION XXXII.

412 Los paralelepípedos *ABCD*, *EFGL*, que tienen iguales alturas, son entre sí como sus bases *AB*, *EF*. *Fig.* 37.

Prolongada *EH*, y aplicado (120) á la recta *FH* en el ángulo *FHJ* el paralelógramo *FJ* = *AB*, y en fin completado el paralelepípedo *FJMN*, será (404) el paralelepípedo *FJNM* al paralelepípedo *EFLG* como la base *FJ* ó bien *AB* á la base *FE*; pero (411) el paralelepípedo *FJNM* = *ABDC*, por tener iguales bases (const.) é iguales alturas (sup.): luego será el paralelepípedo *ABDC* al paralelepípedo *EFLG* como la base *AB* á la base *EF*. Que es &c.

COROLARIO I.

413 De donde se infiere que los prismas triangulares *ADSBPQ*, *ELHFYM*, que tienen iguales alturas, son como sus bases; pues dichos prismas son (408) mitades de los respectivos paralelepípedos *ABCD*, *EFGL*.

COROLARIO II.

414 Los paralelepípedos iguales, que tienen iguales alturas, tendrán las bases iguales: igualmen-

te los prismas triangulares iguales, que tienen iguales alturas, tendrán las bases iguales.

PROPOSICION XXXIII.

415 Los paralelepípedos semejantes *ABCD*, *EFGH* están entre sí en la razon triplicada de sus lados homólogos *AJ*, *EK*. *Fig.* 38.

Prolónguense las rectas *AJ*, *DJ*, *BJ*, de manera que sean $JL = EK$, $JO = KH$, y $JN = KF$; complétense los paralelógramos *LO*, *LN*, *JT*, y el paralelepípedo *JXMT*. Siendo $JL = EK$, $JO = KH$, y el ángulo $OJL = AJD = EKH$, serán semejantes é iguales los paralelógramos *LO*, *HE*. Del mismo modo se demostrarán semejantes é iguales los paralelógramos *JM*, *VK*, como tambien los *JT*, *RK*; pero (403) tres planos de un paralelepípedo son semejantes é iguales á los tres opuestos: luego los planos del paralelepípedo *JMXT* serán semejantes é iguales á los del paralelepípedo *EFGH*; por consiguiente (352) dichos paralelepípedos serán semejantes é iguales. Complétense ahora los paralelepípedos *BOLP*, *BDLV*; y por la semejanza (sup.) de los planos de los paralelepípedos *ABDC*, *EFGH* ó bien *JMTL*, será $AJ : JL = DJ : JO = BJ : JN$; pero (289) $AJ : JL = AD : DL$, $DJ : JO = DL : LO$, y $BJ : JN = BO : ON$: luego tambien será AD:

DL = *DL*: *LO* = *BO*: *ON*; por consiguiente (412) el paralelepípedo *ABDC*: *DLQY* = *DLQY*: *JXBP* = *JXBP*: *JXMT* ó bien *EFGH*: luego será el sólido *ABDC* al sólido *EFGH* en razon triplicada de *ABDC* á *DLQY*, ó de *AD* á *DL*, ó de *AJ* á *JL* = *EK*. Que es &c.

COROLARIO I.

416 De aquí se infiere, que si quatro rectas son continuamente proporcionales, será la primera á la quarta, como el paralelepípedo descrito sobre la primera al paralelepípedo semejante, y semejantemente descrito sobre la segunda.

COROLARIO II.

417 Tambien se infiere, que dos prismas triangulares semejantes están entre sí en razon triplicada de sus lados homólogos, por ser dichos prismas mitades (408) de paralelepípedos semejantes.

PROPOSICION XXXIV.

418 Las bases de los paralelepípedos iguales *ADCB*, *EHGF* son recíprocamente proporcionales á las alturas: y los paralelepípedos, cuyas bases son recíprocamente proporcionales á las alturas, son iguales entre sí. *Fig.* 39. 40.

I. Sean (*Fig.* 39) las rectas insistentes *AC*, *EG* perpendiculares á las bases *AD*, *EH*. Si las alturas *AC* y *EG* son iguales, serán (414) las bases *EH*, *AD* tambien iguales, por ser los paralelepípedos iguales (sup.). Si dichas alturas son desiguales, córtese de la mayor *EG* la parte $EJ = AC$; y por el punto *J* hágase pasar (393) el plano *JK* paralelo á la base *EH*. Consta que (412) $AD : EH = ADCB : EHJK$; pero $ADCB = EHGF$ (sup.): luego será $AD : EH = EHGF : EHJK = GL : JL$ (412); pero (289) $GL : JL = EG : EJ = EG : AC$: luego será $AD : EH = EG : AC$.

Si al contrario es $AD : EH = GE : AC$; será el paralelepípedo $ADCB = EHGF$: pues consta (412) que el paralelepípedo $ADCB : EHJK = AD : EH = EG : AC$ (sup.); pero (289) $GL : JL = GE : EJ$ ó bien *AC*: luego será $ADCB : EHJK = GL : JL = EHGF : EHJK$ (412); por consiguiente $ADCB = EHGF$.

II. No sean las rectas insistentes *AC*, *EG* perpendiculares (*Fig.* 40) á las bases *AD*, *EH*. En los puntos *A*, *R*, *D*, *U* levántense (388) las perpendiculares *AM*, *RN*, *DO*, *UP* al plano *AD*; y en los puntos *E*, *L*, *H*, *V* levántense tambien las perpendiculares *EQ*, *LK*, *HS*, *VT* al plano *EH*. Tírense las rectas *MN*, *PO*, *QK*, *TS*, y resultarán

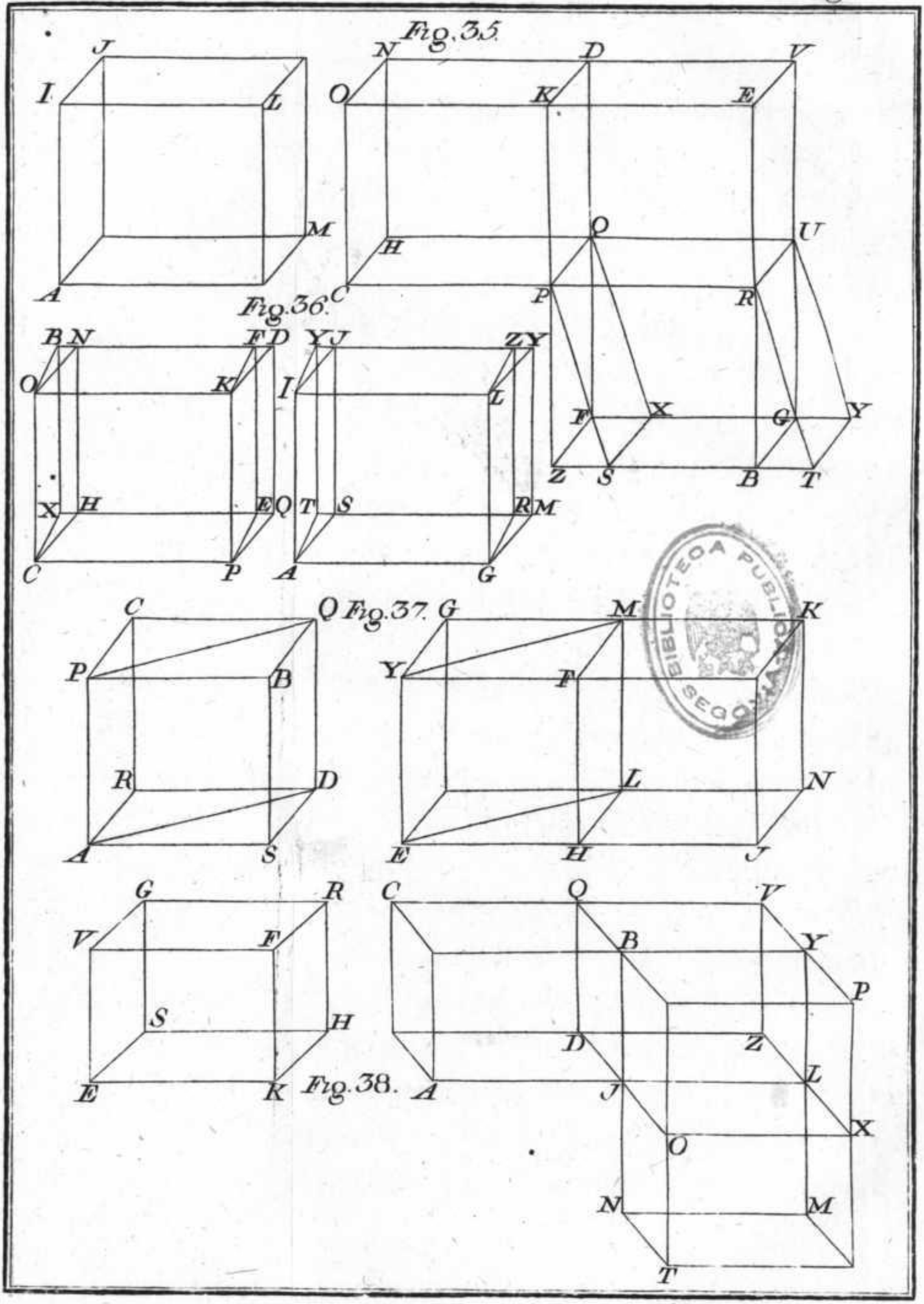


Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.

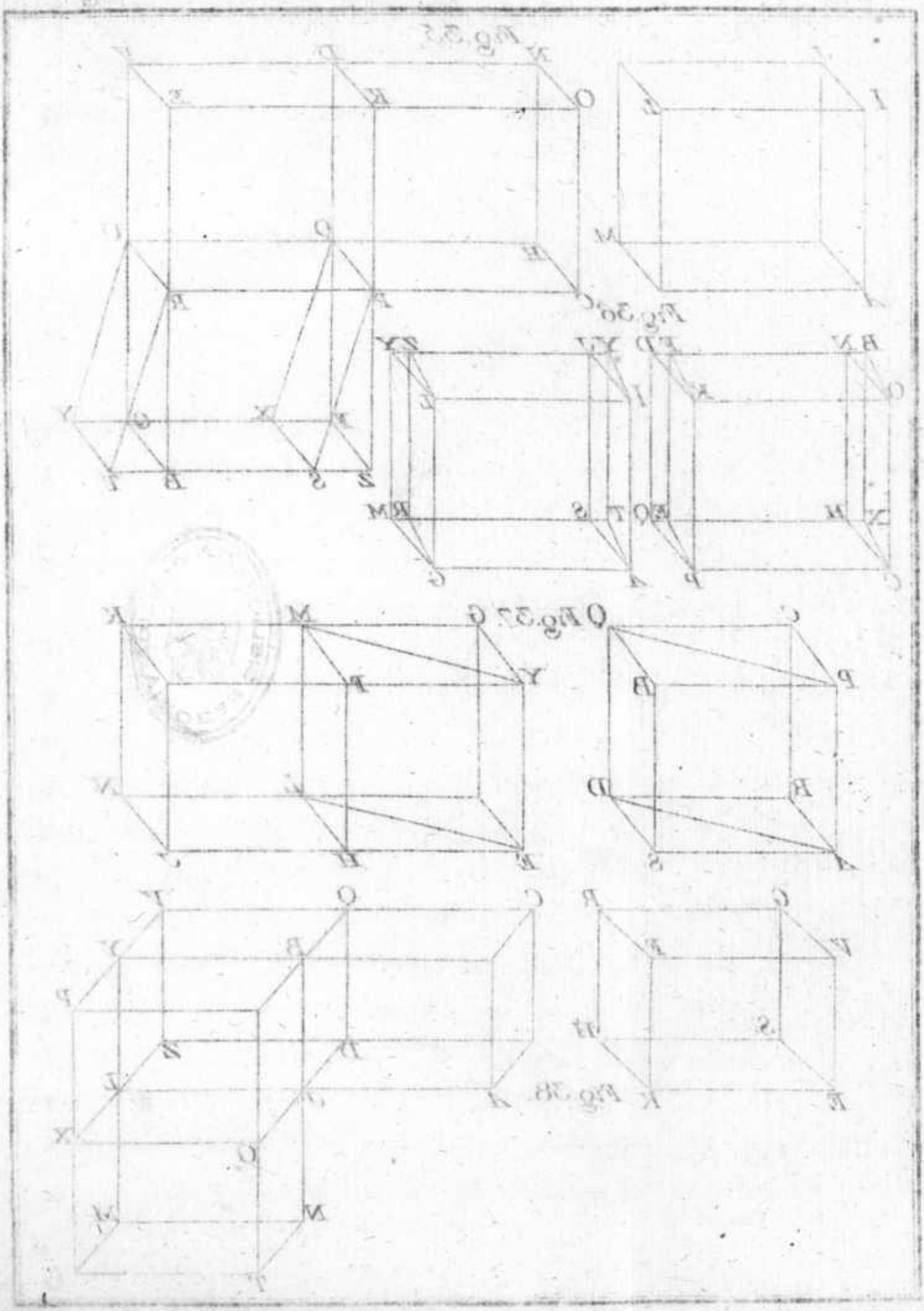


Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38

los paralelepípedos $ADNP$, $EHKT$, en quienes las rectas insistentes serán perpendiculares á las bases: luego será (409) el paralelepípedo $ADNP = ADCB$, y por la misma razon $EHQS = EHGF$; pero $ADCB = EHGF$ (sup.): luego será $ADNP = EHQS$, y por lo demostrado $AD : EH = EQ : AM$.

Al contrario, si es $AD : EH = EQ : AM$; será el paralelepípedo $ADCB = EHGF$. Pues por lo demostrado es el paralelepípedo $ADNP = EHQS$; pero (412) $ADNP = ADCB$, y $EHQS = EHGF$: luego será $ADCB = EHGF$. Que es &c.

COROLARIO.

419 Tambien las bases de los prismas triangulares iguales son recíprocamente proporcionales á las alturas, por ser (408) los prismas mitades de los paralelepípedos: y los prismas, cuyas bases son recíprocamente proporcionales á las alturas, son iguales entre sí.

PROPOSICION XXXV.

420 Si en los vértices de dos ángulos planos é iguales BAC, EDF se elevan dos rectas AG, DH sobre los planos de los ángulos, de manera que con los lados de ellos contengan ángulos respectivamente iguales; esto es, $BAG = EDH$, $GAC = HDF$,

y si desde qualesquiera puntos de dichas rectas se baxan perpendiculares *GJ*, *HK* á los planos, y de los puntos *J* y *K* donde los encuentran, se tiran rectas *AJ*, *DK* á los vértices; estas rectas formarán con las elevadas ángulos iguales; esto es, $GAJ = HDK$. *Fig.* 41.

Córtese $AL = DH$; tírese *LM* paralela á *GJ*, y báxense las perpendiculares *MC* á *AC*, *MB* á *AB*, *KF* á *DF*, *KE* á *DE*, y finalmente tírense las rectas *BC*, *BL*, *LC*, *EH*, *EF*, *HF*. Siendo, pues, *LM* perpendicular (384) al plano *BAC*, serán (344) rectos los ángulos *LMC*, *LMA*, *LMB*: por la misma razon serán rectos los ángulos *HKF*, *HKD*, *HKE*: luego será (124) $\overline{AL}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{LC}^2 + \overline{AC}^2$; por consiguiente (126) el ángulo *ACL* será recto. Del mismo modo se demostrarán rectos los ángulos *ABL*, *HED*, *HFD*; y por lo tanto los triángulos *ABL*, *DEH* tendrán los ángulos $ABL = DEH$, $BAL = EDH$ (sup.), y el lado $AL = DH$ (constr.); por consiguiente será (93) $AB = DE$, $BL = EH$: por la misma razon será en los triángulos *ACL*, *DFH* el lado $AC = DF$, $LC = HF$: y siendo por lo demostrado $BA = ED$, $AC = DF$, y (sup.) el ángulo *BAC* $= EDF$, será (63) $BC = EF$, y los ángulos *ABC*, *ACB* respectivamente iguales á los *DEF*, *DFE*; y restando dichos ángulos de los rectos iguales, quedarán los ángulos MBC, MCB respectivamente iguales á los FEK, EFK: luego (93) en los triángulos BMC, EKF será $CM = FK$; pero $AC = DF$, y los ángulos ACM, DFK iguales por rectos: luego será (63) $AM = DK$. Por ser rectos los ángulos AML, DKH, será $\overline{AL}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{ML}^2$, $\overline{DH}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{HK}^2$, y por ser $AL = DH$, $AM = DK$ por lo demostrado, tambien será $LM = HK$: luego los triángulos LAM, HDK tendrán los tres lados del uno respectivamente iguales á los tres del otro, por consiguiente (69) será el ángulo $LAM = HDK$. Que es &c.

COROLARIO.

421 Consta por lo demostrado, que si en los vértices de dos ángulos planos iguales se elevan rectas iguales que contengan ángulos respectivamente iguales con los lados de los ángulos, las perpendiculares baxadas desde los extremos de ellas á los planos de los ángulos serán iguales entre sí; esto es, $LM = HK$.

PROPOSICION XXXVI.

422 Si tres rectas DE, DG, DF son proporcionales; el paralelepípedo DH de las tres será igual

al paralelepípedo equilátero de la media DG siendo los dos equiángulos. *Fig.* 42.

En el punto J de una recta JK constrúyase (405) el ángulo sólido $J = D$, de modo que sea el ángulo $KJM = EDG$, $KJL = EDF$, y $LJM = FDG$; córtense las rectas JK, JL, JM iguales á DG; y complétense los paralelógramos KL, KM, LM, y el paralelepípedo JN: digo que este será igual al paralelepípedo DH. Siendo (sup.) $DE : DG = DG : DF$, y $DG = JK = JL$ (const.), será $DE : JK = JL : DF$; pero los ángulos EDF, KJL son iguales: luego (309) serán las bases EF y KL iguales. Y siendo $DG = JM$, y los ángulos planos $EDG = KJM$, $GDF = MJL$, serán (421) iguales las perpendiculares baxadas desde los puntos G, M á las bases FDE, LJK, que son las alturas de los paralelepípedos; pero se ha demostrado la base $EF = KL$: luego (411) será el paralelepípedo $DH = JN$. Que es &c.

PROPOSICION XXXVII.

423 Si quatro rectas A, B, C, D son proporcionales, lo serán tambien los paralelepípedos semejantes, y semejantemente descritos sobre ellas; y si los paralelepípedos semejantes, y semejantemente descritos sobre quatro rectas son proporcionales, tambien lo serán las quatro rectas. *Fig.* 43.

I. Háganse continuas proporcionales (305) las rectas A, B, E, F; asimismo las rectas C, D, G, H. Siendo (sup.) las razones A á B y C á D iguales, serán tambien las demas razones iguales entre sí; y por igualdad ordenada será (277) $A : F = C : H$; pero (416) el paralelepípedo A al paralelepípedo B como la recta A á la F, y por lo mismo el paralelepído C al paralelepípedo D como la recta C á la H: luego serán proporcionales los paralelepípedos, esto es, $A : B = C : D$.

II. Si no es la recta $A : B = C : D$, hágase (306) $A : B = C : J$, y sobre la recta J descríbase un paralelepípedo semejante á los dados: y por lo demostrado en el caso antecedente serán proporcionales los paralelepípedos, esto es, $A : B = C : J$; pero (sup.) el paralelepípedo $A : B = C : D$: luego será $C : D = C : J$; por consiguiente los paralelepípedos D, J son iguales, y siendo tambien semejantes, serán (407) iguales los lados homólogos D, J; pero es la recta $A : B = C : J$: luego será tambien la recta $A : B = C : D$. Que es &c.

PROPOSICION XXXVIII.

424 Si un plano AB es perpendicular á otro AC, y de algun punto E tomado en uno de ellos se baxa una perpendicular al otro, caerá en la co-

mun seccion *AD* de entrambos. *Fig.* 44.

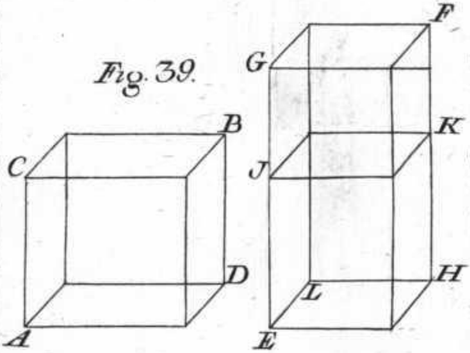
Si se niega, caerá dicha perpendicular en el plano *AC* fuera de la comun seccion *AD*: sea *EF* la referida perpendicular. En el plano *AC* tírese *FG* perpendicular á *AD*, y únanse los puntos *E*, *G* con la recta *EG*. Siendo, pues, el plano *AC* perpendicular al plano *AB*, y *FG* perpendicular á la comun seccion *AD*, será (345) *FG* perpendicular al plano *AB*, y por consiguiente (344) el ángulo *FGE* recto; pero el ángulo *EFG* es recto (sup.): luego dos ángulos del triángulo *FEG* serán iguales á dos rectos, lo que es imposible (82). Luego &c.

PROPOSICION XXXIX.

425 Si cada dos lados (*AE* y *FC*, *AF* y *EC*, *DH* y *GB*, *DG* y *HB*) de los planos opuestos *AC*, *DB* de un paralelepípedo se dividen en dos partes iguales, y por las secciones se tiran los planos *JOQL*, *PKMR*; la comun seccion *ST* de los planos, y la diagonal *EG* del paralelepípedo se dividirán mutuamente en dos partes iguales. *Fig.* 45.

Tírense las rectas *SE*, *SF*, *TG*, *TH*; y siendo en qualquier paralelógramo (107) los lados opuestos iguales, tambien sus mitades serán iguales, esto es, $GO = HQ$, $OT = TQ$; pero (96) los ángulos alternos *TOG*, *TQH* son iguales: luego (63) será

Fig. 39.



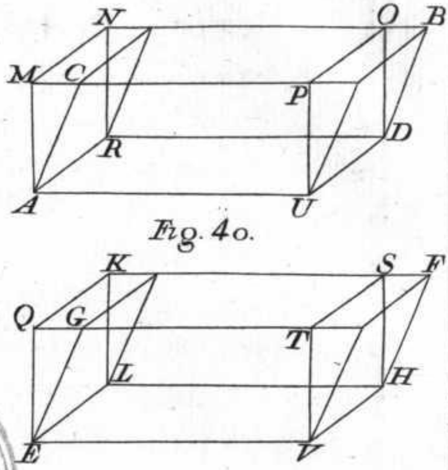
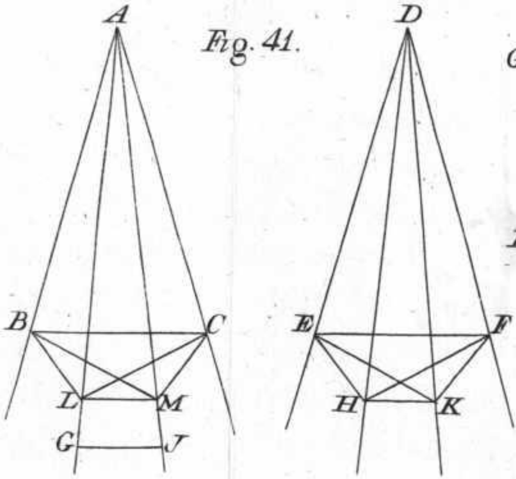


Fig. 40.

Fig. 41.



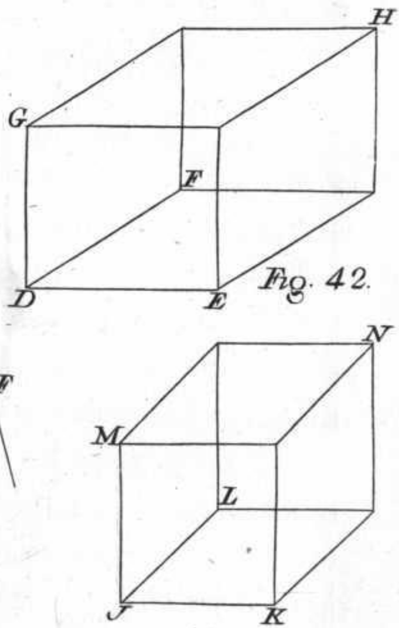


Fig. 42.

GT = *TH*, y el ángulo *GTO* = *HTQ*, por lo qual (80) las rectas *GT*, *TH* formarán una sola. Del mismo modo se demostrará que las rectas *FS*, *SE* forman una sola recta; y siendo (107) las rectas *FG*, *EH* paralelas é iguales á la recta *CB*, lo serán entre sí (385): luego *EF* paralela é igual á *HG*; por consiguiente (382) las rectas *EG*, *ST* estarán en el plano *EFGH*: y porque los triángulos *EVS*, *GVT* tienen los ángulos alternos *ESV* = *GTV*, *SEG* = *EGT*, é iguales los lados *ES*, *GT* (que son mitades de los iguales *EF*, *GH*), será (93) *EV* = *GV*, *SV* = *VT*. Que es &c.

COROLARIO.

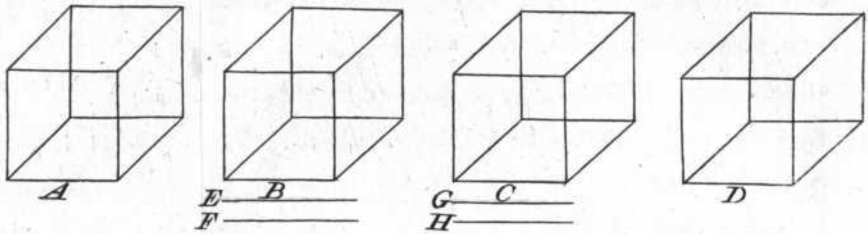
426 De aquí se infiere, que en qualquier paralelepípedo las diagonales se cortan mutuamente por el medio.

PROPOSICION XL.

427 Dos prismas triangulares *ABCFED*, *GHMLJK* de igual altura, pero que uno de ellos tenga por base un paralelógramo, y el otro un triángulo, y sea el paralelógramo duplo del triángulo; son iguales entre sí. *Fig.* 46.

Complétense los paralelepípedos *AN*, *GQ*; y siendo el paralelógramo *AC* duplo del triángulo *GMH*, y (107) el paralelógramo *GP* duplo de dicho triángulo, será la base $AC = GP$; pero (sup.) las alturas de los referidos prismas, ó bien de los paralelepípedos son iguales: luego (411) será el paralelepípedo $AN = GQ$, y sus mitades, esto es, (408) los prismas $ABCFED$, $GHMLJK$ serán iguales. Que es &c.

Fig. 43.



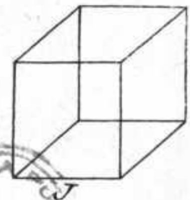


Fig. 44.

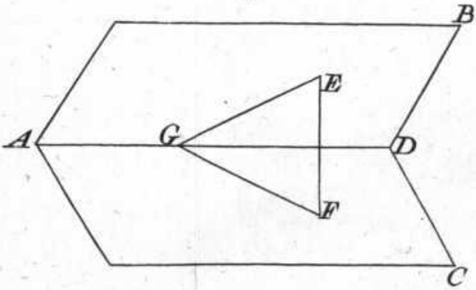


Fig. 45.

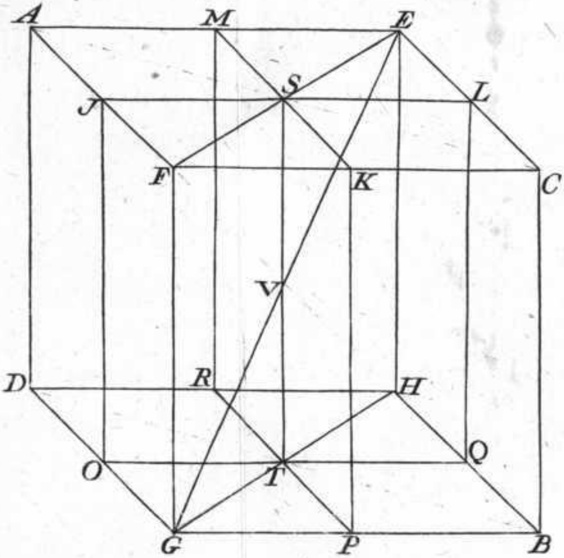
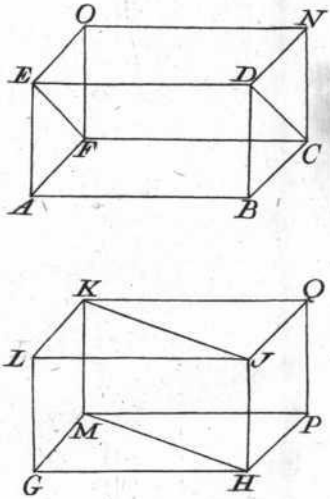


Fig. 46.



LIBRO XII.

LEMA I.

428 Dadas dos magnitudes desiguales AB, DF, si de la mayor AB se quita una parte mayor que su mitad, y del residuo otra parte mayor tambien que su mitad, y así succesivamente; llegará á resultar una parte menor que la magnitud menor propuesta DF. *Fig.* 1.

Tómese DE multíplice de DF, de modo que sea $DE > AB$, y sean las partes DF, FG, y GE iguales; quítese de AB la parte AH mayor que la mitad, y de HB la parte HJ mayor que la mitad, y así succesivamente, hasta que el número de las partes AH, HJ, JB sea igual al número de las partes DF, FG, GE. La recta $AB < DE$ (const.); pero la recta AH es mayor que la mitad de AB, y DF no es mayor que la mitad de DE: luego será $HB < FE$; pero JH es mayor que la mitad de HB, y FG no es mayor que la mitad de FE: luego tambien será BJ menor que EG, ó bien que DF. Que es &c.

ESCOLIO.

429 La proposicion antecedente se demuestra del mismo modo en la suposicion de que se quite de

AB la mitad, y del residuo tambien la mitad, y así succesivamente.

LEMA II.

430 Las magnitudes, y las razones de las magnitudes, que continua y constantemente se acercan á la igualdad, de suerte que su diferencia venga á ser menor que qualquiera diferencia dada; finalmente son iguales.

De lo contrario serían desiguales, y se diferenciarian últimamente en una magnitud *K*; y por consiguiente no podrían acercarse una á otra, sino hasta la diferencia *K*, lo qual es contra la hipótesis. Luego &c.

PROPOSICION I.

431 Los polígonos semejantes *ABCDE*, *FGHJK* inscritos en los círculos *ABD*, *FGJ* son entre sí como los quadrados de sus diámetros *AL*, *FM*. *Fig.* 2.

Tírense las rectas *AC*, *BL*, y *FH*, *MG*; y por la semejanza de los referidos polígonos será (283) el ángulo $ABC = FGH$, y $AB : BC = FG : GH$; por consiguiente (298) será el ángulo $ACB = FHG$; pero (174) los ángulos *ACB*, *FHG* son respectivamente iguales á los *ALB*, *FMG*: luego tambien será el ángulo $ALB = FMG$; y siendo (186) los ángulos *ABL*, *FGM* iguales por rectos, los triángulos ABL, FGM serán equiángulos, y por consiguiente (295) $AB : AL = GF : FM$, y alternando $AB : GF = AL : FM$: luego será (323) el polígono $ABCDE$ al polígono $FGHJK$ como el quadrado de AL al quadrado de FM. Que es &c.

ESCOLIO.

432 Los perímetros ó sumas de las rectas, que comprehenden las areas de los polígonos semejantes inscritos en los círculos, son entre sí como los diámetros; es á saber $ABCDE : FGHJK = AL : FM$. Por la semejanza de los polígonos es $AB : FG = BC : GH = CD : HJ = DE : JK = EA : KF$, y la suma de los antecedentes tendrá (262) á la suma de los conseqüentes la misma razon que un antecedente á su conseqüente; esto es, será el perímetro $ABCDE : FGHJK = AB : FG$; pero $AB : FG = AL : FM$ por lo demostrado: luego será $ABCDE : FGHJK = AL : FM$.

PROPOSICION II.

433 Los círculos X, Z están entre sí en la razon de los quadrados de sus diámetros. *Fig.* 3.

En el círculo Z inscríbase el quadrado $EFGH$, que será mitad (209) del quadrado circunscrito, y por consiguiente mayor que el semicírculo; córtense por medio los arcos *EF*, *FG*, *GH*, *HE* en los puntos *L*, *M*, *N*, *O*; tírense las rectas *EL*, *LF*, *FM*, &c. y la tangente *PQ*, que será (181) paralela á *FE*; finalmente prolónguense las rectas *GF*, *HE* hasta *Q*, *P*. El triángulo *ELF* es mitad (116) del paralelógramo *EQ*, y por consiguiente mayor que la mitad del segmento *ELF*; por la misma razon qualquiera de los triángulos *FMG*, *GNH*, *HOE*, será mayor que la mitad del segmento en que se halla: y si los arcos *EL*, *LF*, *FM*, &c. se cortan por medio, y á los puntos de division se tiran rectas, se demostrará del mismo modo que qualquiera de los triángulos que resultan, será mayor que la mitad del segmento, en que se halla; y por lo tanto si del círculo *Z* se resta el quadrado *EFGH*, y de los segmentos que quedan, se restan los triángulos, y se prosigue siempre la misma operacion, finalmente quedarán (428) algunos segmentos del círculo, menores que qualquiera diferencia dada *K*: luego el area del polígono inscrito se acerca continua y constantemente al area del círculo, de suerte que su diferencia llega á ser menor que qualquiera diferencia dada: luego últimamente (430) el area del polígono es igual al area del círculo; es á saber, quando el número de los lados del polígono se considere aumentado al infinito, y disminuidos estos tambien al infinito; pero los polígonos semejantes inscritos en los círculos X, Z son (431) entre sí como los quadrados de los diámetros AC, EG: luego tambien los círculos X, Z son entre sí como los quadrados de los diámetros AC, EG. Que es &c.

DE OTRO MODO.

Si se niega que es $X : Z = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, supóngase $X : \mathcal{J} = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$; y se demostrará que $\mathcal{J}$ no puede ser menor, ni mayor que Z; por consiguiente le será igual: luego será $X : Z = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$.

I. Sea $\mathcal{J} < Z$, y K su diferencia; será por consiguiente $\mathcal{J} + K = Z$; pero constando por lo demostrado que al fin quedarán algunos segmentos de círculo menores que K, supóngase que estos sean los segmentos EL, LF, FM, *&c.* luego será el polígono $ELFMGNHO > \mathcal{J}$. Descríbase en el círculo X el polígono $ARBSCTDV$ semejante á $ELFMGNHO$, y aquel será (431) á este como $\overline{AC}^2$ á $\overline{EG}^2$; pero (sup.) el círculo $X : \mathcal{J} = \overline{AC}^2 : \overline{GE}^2$: luego será $ARBSCTDV : ELFMGNHO = X : \mathcal{J}$; y por ser $ARBSCTDV < X$, será tambien (265) $ELFMGNHO < \mathcal{J}$, lo que es imposible por haberse demostrado mayor: luego $\mathcal{J}$ no puede ser menor que el círculo Z.

II. Sea $\mathcal{J} > Z$; y siendo (sup.) el círculo X:

$\mathcal{J} = \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2$, será invirtiendo (254) $\mathcal{J} : X = \overline{EG}^2 : \overline{AC}^2$. Supóngase ser $\mathcal{J} : X = Z : K$; y por ser $\mathcal{J} > Z$ (sup.), será (265) el círculo $X > K$: luego será $\overline{EG}^2 : \overline{AC}^2 = Z : K$, lo que es imposible por lo demostrado en la suposicion primera. Luego $\mathcal{J}$ no puede ser tampoco mayor que el círculo Z, y por consiguiente será igual. Que es &c.

COROLARIO.

434 Los círculos son proporcionales con los polígonos semejantes inscritos en ellos.

ESCOLIO.

435 El círculo *ABCD* es igual á un triángulo rectángulo *GEF*, cuya base *EF* sea igual á toda la circunferencia, y la altura *EG* igual al radio. *Fig.* 4.

Si se niega, será el círculo *ABCD* mayor ó menor que el triángulo *GEF*.

I. Sea el círculo $ABCD > GEF$, y $\mathcal{J}$ la diferencia; por consiguiente $ABCD = GEF + \mathcal{J}$. Hecha la misma preparacion que antes, llegarán á quedar ciertos segmentos del círculo, como *AR*, *RB*, *BS*, *&c.* menores que $\mathcal{J}$: por tanto será el polígono *ARBSCTDV* mayor que el triángulo *GEF*; pero tirada desde el centro *N* la perpendicular *NX* á *BR*, el polígono *ARBSCTDV* es igual á un triángulo rectángulo, que tiene por base su perímetro, y por altura *NX*, por ser (167) *NX* igual á las alturas de los triángulos *ANR*, *BNS*, &c. en quienes se divide el polígono: luego será dicho triángulo mayor que *GEF*, lo que es imposible, porque la base, y altura del primero son menores que la base, y altura del segundo: luego no puede ser el círculo $ABCD > GEF$.

II. Sea el círculo $ABCD < GEF$, y J la diferencia; por consiguiente $ABCD + J = GEF$. Circunscríbase al círculo *ABCD* el quadrado *HM*; divídanse los arcos *AB*, *BC*, *CD*, *DA* por medio en los puntos *R*, *S*, *T*, *V*, y tírense las tangentes *PQ*, *ZY*, &c. Siendo (86) $QO > QR$, y (193) $QR = QA$, será (113) el triángulo $ORQ > QRA$: del mismo modo se demostrará ser el triángulo $PRO > PRB$: luego el triángulo *POQ* será mayor que la mitad del segmento exterior *BRAO*: igualmente se demostrará que el triángulo *ZHY* es mayor que la mitad del segmento exterior *BSCH*; y así de los demas. Dividiendo de nuevo por medio los arcos *AR*, *RB*, *BS*, &c. y tirando por los puntos de division tangentes, se demostrará tambien que los triángulos, que resultan, son mayores que las mitades de los respectivos segmentos exteriores; por consiguiente continuada dicha operacion, llegarán á quedar (428) ciertos segmentos exteriores menores que *J*. Sean estos, por exemplo, *AQR*, *RPB*, *BZS*, *&c.* será el polígono *AQPZYKUIW* < *GEF*; pero dicho polígono es igual á un triángulo rectángulo, que tenga por base su perímetro, y por altura el radio *NR*: luego este triángulo será menor que *GEF*, lo que es imposible; porque teniendo una misma altura, el primero tiene mayor base que el segundo: luego no puede ser el círculo *ABCD* < *GEF*, y habiéndose demostrado antes que no puede ser mayor, será el círculo *ABCD* = *GEF*. Que es &c.

PROPOSICION III.

436 Toda pirámide triangular se divide exâctamente en quatro partes, que son dos pirámides triangulares iguales, y semejantes entre sí y á la total, y dos prismas iguales, y mayores juntos que la mitad de la pirámide. *Fig.* 5.

Divídanse por medio los lados de la pirámide *ACDB* en los puntos *E*, *H*, *G*, *J*, *K*, *F*; y tiradas las rectas *EH*, *HG*, *GE*, *HJ*, *HK*, *JK*, *GF*, *FJ*, se tendrán las referidas quatro partes, esto es, las dos pirámides *AEHG*, *HJCK*, y los dos prismas *EHGBJF*, *HJKFDG*.

I. Las dos pirámides triangulares *AEHG*,

Fig. 1.

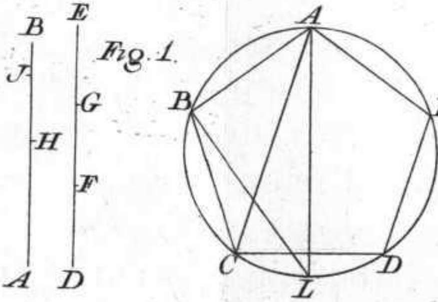


Fig. 2.

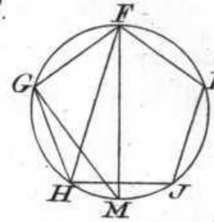


Fig. 3.

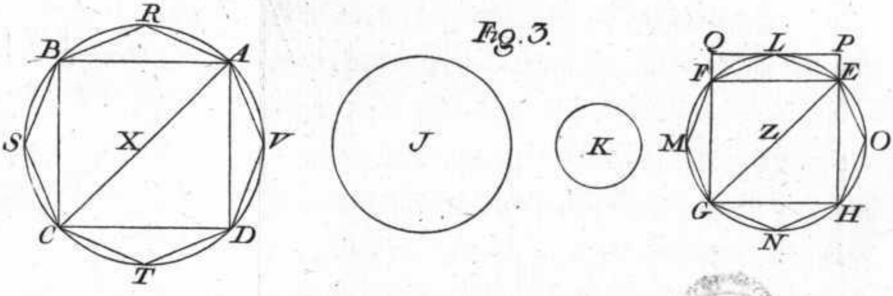
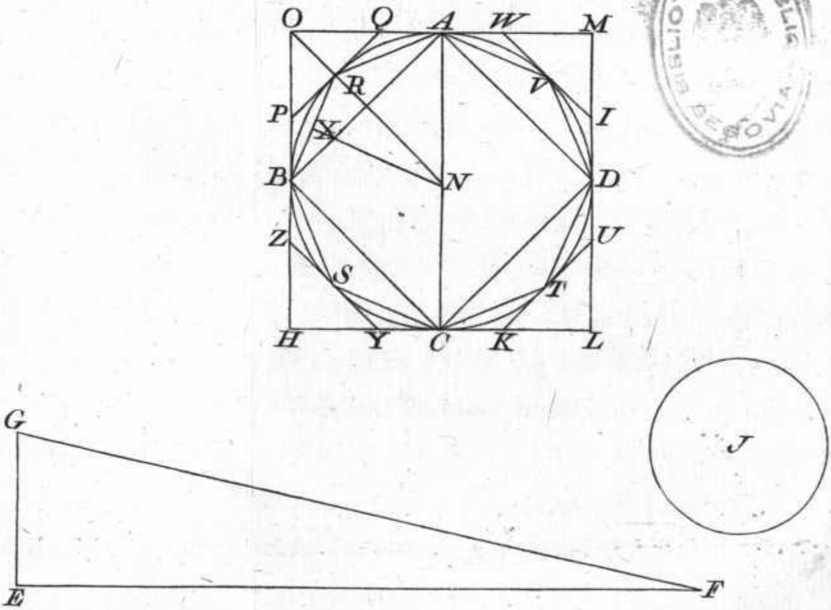


Fig. 4.



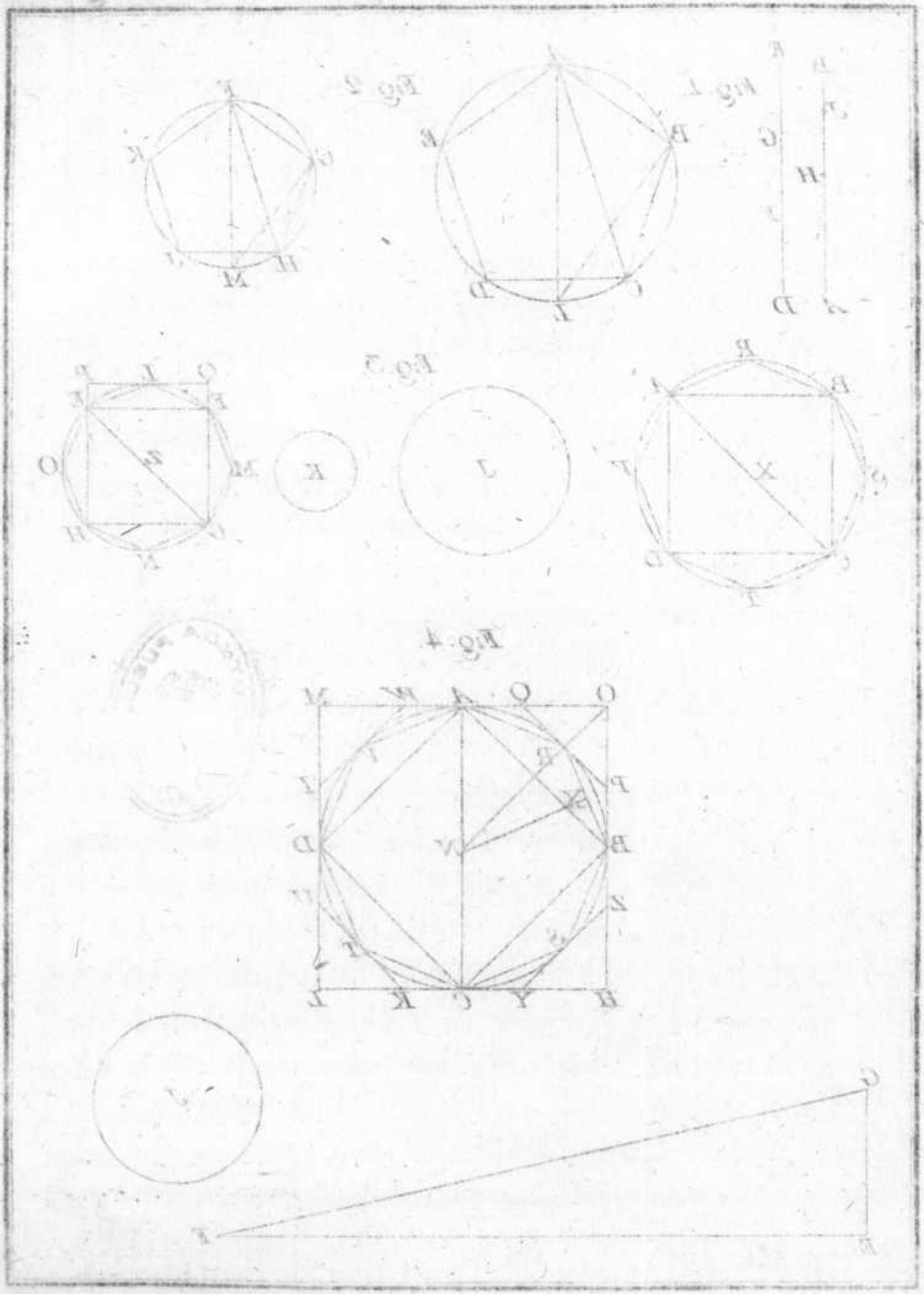


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4

HJCK son iguales, y semejantes entre sí y la total *ABCD*.

Por estar los lados *AB*, *AC*, *CB* divididos por medio en los puntos *E*, *H*, *J*, será $AE : EB = AH : HC$; $CH : HA = CJ : JB$, y $BE : EA = BJ : JC$; por consiguiente (290) serán paralelas *HE* á *CB*, *HJ* á *AB*, y *EJ* á *AC*: luego serán (96) los ángulos $AEH = ABC = HJC$, y $AHE = HCJ$, y los lados (107) $AE = HJ$, $EH = JC$; por consiguiente los triángulos *ABC*, *AEH*, *HJC* serán semejantes (296), y los dos últimos iguales (63). Del mismo modo se demostrará que los triángulos *AHG*, *HCK* son iguales, y semejantes entre sí y al total *ACD*; y que los triángulos *AEG*, *ABD* son semejantes, y los triángulos *BJF*, *JCK* iguales. Siendo por lo demostrado las rectas *AE*, *AG* respectivamente paralelas á las rectas *HJ*, *HK*, será (386) el ángulo $EAG = JHK$; pero dichas rectas son tambien respectivamente iguales por lo demostrado: luego los triángulos *AEG*, *HJK* serán iguales, y semejantes; y por ser el triángulo *AEG* semejante al triángulo *ABD*, serán los triángulos *ABD*, *AEG*, *HJK* semejantes entre sí, y los dos últimos iguales. Por la misma razon los triángulos *BCD*, *JCK*, *EHG* son semejantes entre sí, y los dos últimos iguales. Por tanto las dos pirámides *AEHG*, *HJCK* son

(352) iguales, y semejantes entre sí y (351) á la total *ABCD*.

II. Los prismas *EHGBJF*, *HGDFJK* son iguales, y mayores juntos que la mitad de la pirámide *ACBD*.

Por ser las rectas *HE*, *HG* respectivamente paralelas á las *CB*, *CD*, será (392) el plano *EHG* paralelo al plano *BCD*; por consiguiente los dos prismas *EHGBJF*, *HGDFJK* tendrán iguales alturas; y siendo el triángulo *BJF*, base del primero, mitad del paralelógramo *FJKD* base del segundo, serán (427) dichos prismas iguales; pero el prisma *EHGBJF* es mayor que la pirámide *EJBF*, y esta es igual á la pirámide *HCJK* por la misma razon que se demostró ser *AHEG* = *HCJK*: luego los dos prismas *EHGBJF* y *HGDFJK* serán mayores que las dos pirámides iguales *HCJK* y *AHEG*, y por consiguiente mayores que la mitad de la pirámide *ACBD*. Que es &c.

PROPOSICION IV.

437 Si dos pirámides triangulares *ADBC*, *EHFG* de iguales alturas se dividen cada una en dos pirámides *AMJL*, *MDNO*, y *ESPR*, *SHTV*, iguales, y semejantes entre sí y á la total, y en dos prismas iguales *JMLBNK*, *MLCONK*, y *PSRFTQ*, *SRGVTQ*, y las pirámides resultantes se subdividen

del mismo modo, y así succesivamente; será la base de una pirámide á la base de la otra, como la suma de todos los prismas de la una pirámide á la suma de todos los prismas de la otra. *Fig.* 6.

Supuesta la construccion de la proposicion antecedente, será por lo demostrado el triángulo *BNK* semejante al triángulo *BDC*; y por la misma razon el triángulo *FTQ* será semejante al triángulo *FHG*; pero (268) $BC : BK = FG : FQ$, por ser los antecedentes duplos de sus conseqüentes (const.): luego será (323) el triángulo $BDC : BNK = FHG : FTQ$, y alternando (270) $BDC : FHG = BNK : FTQ$; y por ser iguales las alturas de las pirámides totales, y estar divididos por medio sus lados por planos paralelos á las bases, los prismas *JMLBNK*, *PSRFTQ* tienen tambien iguales alturas, y es (413) $BNK : FTQ = JMLBNK : PSRFTQ = JMLBNK + MLCKNO : PSRFTQ + SRGQTV$ (267), por ser $JMLBNK = MLCKNO$, y $PSRFTQ = SRGQTV$: luego será $BDC : FHG = JMLBNK + MLCKNO : PSRFTQ + SRGQTV$. Si del mismo modo se dividen las dos pirámides *AMJL*, *ESPR*, y las otras dos *MDNO*, *SHTV*, será tambien la suma de los dos prismas contenidos en la pirámide *AMJL* á la suma de los dos prismas contenidos en la pirámide *ESPR*, como el triángulo *JML* al triángulo *PSR*, ó bien como el triángulo *BDC* al triángulo *FHG*: asimismo será la suma de los dos prismas contenidos en la pirámide *MDNO* á la suma de los dos prismas contenidos en la pirámide *SHTV*, como el triángulo *BDC* al triángulo *FHG*; y lo mismo de todos los demas prismas que resultasen en las demas divisiones: luego (262) será la suma de todos los prismas inscritos en la pirámide *ADBC* á la suma de los inscritos en la pirámide *EHFG* en igual número, como la base *BDC* á la base *FHG*. Que es &c.

PROPOSICION V.

438 Las pirámides triángulares *ADBC*, *EHFG* de igual altura son entre sí como sus bases *BDC*, *FHG*. *Fig.* 6.

Divídase (436) la pirámide *EHFG* en dos prismas iguales, y en dos pirámides tambien iguales, y semejantes entre sí y á la total; por consiguiente (436) los dos prismas serán mayores que la mitad de toda la pirámide: divídanse del mismo modo estas dos pirámides resultantes; y continuando así las operaciones, quedarán finalmente (428) ciertas pirámides en la pirámide *EHFG*, menores que qualquier cantidad dada *Y*; por consiguiente la suma de todos los prismas inscritos en la pirámide *EHFG* se acerca continua y constantemente á ella, de suerte que su diferencia llega á ser menor que qualquiera cantidad dada: luego últimamente (430) la suma de dichos prismas es igual á la pirámide, es á saber, quando el número de los prismas se considera aumentado al infinito; pero la suma de los prismas inscritos en la pirámide *ADBC* es á la suma de los inscritos semejantemente en la pirámide *EHFG*, como la base *BDC* á *FHG* (437): luego las pirámides *ADBC*, *EHFG*, á quienes son últimamente iguales dichas sumas, serán tambien como las bases *BDC*, *FHG*. Que es &c.

DE OTRO MODO.

Si no es $DBC : HFG = ADBC : EHFG$; será $DBC : HFG = ADBC : X$, y X será menor ó mayor que la pirámide *EHFG*.

I. Sea $X < EHFG$, y $X + Y = EHFG$. Haciendo la misma operacion que en la demostracion antecedente, quedarán finalmente ciertas pirámides en la total *EHFG* menores que Y, como por exemplo las *EPSR*, *STVH*; y por ser $X + Y = EHFG$ (sup.), los prismas restantes *PSRFTQ*, *STVRQG* serán mayores que X. Si la pirámide *ADBC* se considera ahora igualmente subdividida, será (437) la base $DBC : HFG = JMLBNK + NMOKLC : PSRFTQ + TSVQRG$; pero (sup.) la base $DBC : HFG =$

$ADBC : X$: luego será $JMLBNK + NMOKLC$: $PSRFTQ + TSVQRG = ADBC : X$; pero $JMLBNK + NMOKLC < ADBC$: luego será (265) $PSRFTQ + TSVQRG < X$, lo que es imposible por lo arriba demostrado: luego X no puede ser menor que $EHFG$.

II. Sea $X > EHFG$. Hágase $X : ADBC = EHFG : Y$; y por ser $X > EHFG$ (sup.), será (265) $ADBC > Y$; pero (sup.) $DBC : HFG = ADBC : X$, é invirtiendo (254) $HFG : DBC = X : ADBC$: luego será $HFG : DBC = EHFG : Y$, lo que es imposible por lo demostrado en la suposicion primera: luego X no puede ser tampoco mayor que $EHGF$: luego será igual, y por consiguiente $DBC : HFG = ADBC : EHFG$. Que es &c.

COROLARIO.

439 Las pirámides triangulares iguales, que tienen iguales alturas, tendrán las bases iguales: al contrario, las pirámides triangulares iguales, que tienen iguales bases, tendrán iguales alturas.

PROPOSICION VI.

440 Las pirámides $FABCDE$, $MGHJKL$ de una misma altura, y de qualesquiera bases, tienen la razon de estas. *Fig.* 7.

Tírense las rectas AC, AD, y GJ, GK. Porque las pirámides triangulares $FABC$, $MGHJ$ tienen (sup.) iguales alturas, será (438) $ABC : GHJ = FABC : MGHJ$; y por la misma razon $ACD : GHJ = FACD : MGHJ$, y $ADE : GHJ = FADE : MGHJ$: luego será (281) $ABCDE : GHJ = FABCDE : MGHJ$. Del mismo modo se demostrará ser $GHJKL : GHJ = MGHJKL : MGHJ$, é invirtiendo (254) $GHJ : GHJKL = MGHJ : MGHJKL$: luego por igualdad ordenada (277) será $ABCDE : GHJKL = FABCDE : MGHJKL$. Que es &c.

COROLARIO.

441 Luego qualesquiera pirámides, que tienen iguales bases y alturas, son iguales entre sí.

PROPOSICION VII.

442 Todo prisma $ABFDEC$ de base triangular se divide en tres pirámides triangulares iguales entre sí. *Fig.* 8.

Tírense las diagonales AC, FC, FD de los respectivos paralelógramos BD, BE, AE. Las pirámides $FABC$, $FACD$ son (441) iguales, por tener un mismo vértice F, é (107) iguales bases ABC, ACD. Tambien son iguales las pirámides $CDFA$, $CDFE$, por tener un mismo vértice C é (107) iguales bases *DFA*, *DFE*; pero la pirámide *FACD* es la misma que la *CDFA*: luego las tres pirámides *FABC*, *FACD*, *CDFE*, en quienes se divide el prisma, son iguales entre sí, Que es &c.

COROLARIO I.

443 De aquí se infiere que toda pirámide es la tercera parte del prisma, que tiene la misma base é igual altura; porque si la base de la pirámide tuviera qualquiera otra figura rectilinea; podria dividirse en triángulos, y resultarian pirámides triangulares.

COROLARIO II.

444 Los prismas de iguales alturas son entre sí como sus bases; pues las pirámides de iguales alturas tienen (440) esta razon.

COROLARIO III.

445 Por ser (408) el prisma *ABFDCE* (*Fig.* 9) mitad del paralelepípedo *AG*, será la pirámide *DABF* sexta parte de dicho paralelepípedo.

PROPOSICION VIII.

446 Las pirámides semejantes *DABC*, *HEFG* de bases triangulares *ABC*, *EFG*, están en razon triplicada de sus lados homólogos *AC*, *EG*. *Fig.* 10.

Complétense los paralelógramos AJ, AL, AM, y EN, EP, EQ, y los paralelepípedos AK, EO. Siendo, pues, las pirámides $DABC$, $HEFG$ semejantes, lo serán tambien los triángulos CAD y GEH, CAB y GEF, DAB y HEF; y en ellos serán proporcionales los lados homólogos, esto es, $CA : AD = GE : EH$, $CA : AB = GE : EF$, $DA : AB = HE : EF$: luego los paralelógramos AL, AJ, AM serán respectivamente semejantes á los EP, EN, EQ; y como los tres planos de un paralelepípedo son (403) semejantes é iguales á los tres opuestos, el paralelepípedo AK será semejante al paralelepípedo AO; por consiguiente (415) el sólido AK estará con EO en la razon triplicada de AC á EG; pero las pirámides $DABC$, $HEFG$ son (445) iguales partes de los paralelepípedos AK, EO: luego tambien la pirámide $DABC$ estará con la pirámide $HEFG$ en razon triplicada de AC á EG. Que es &c.

ESCOLIO I.

447 Las pirámides semejantes $FABCDE$, $MGHJKL$, que tienen polígonos por bases, están en la razon triplicada de sus lados homólogos BC, HJ. *Fig.* 7.

Tírense desde los ángulos iguales A y G á los opuestos las rectas AC, AD, y GJ, GK; y quedarán divididas (319) las bases $ABCDE$, $GHJKL$ en los triángulos ABC, ACD, ADE, respectivamente semejantes á los GHJ, GJK, GKL. Siendo (sup.) las referidas pirámides semejantes, los triángulos FAB, MGH lo serán tambien, y $FA : AB = MG : GH$; pero $AB : AC = GH : GJ$, por la semejanza de los triángulos BAC, HGJ: luego por igualdad ordenada será $FA : AC = MG : GJ$. Del mismo modo se demostrará ser $FC : CA = MJ : JG$ é invirtiendo $CA : CF = JG : JM$: luego otra vez por igualdad ordenada será $AF : CF = MG : MJ$; y por lo tanto los triángulos CFA, JMG serán semejantes: ademas siendo (sup.) respectivamente semejantes los demas planos de las pirámides $FABC$, $MGHJ$, lo serán estas, y por consiguiente estarán (446) en razon triplicada de sus lados homólogos BC, HJ. Del mismo modo se demostrará que las pirámides $FACD$, $MGJK$ están en razon triplicada de CD á JK, y que tambien las pirámides $FADE$, $MGKL$ están en la triplicada de DE á KL; pero por ser iguales las razones $BC : HJ$, $CD : JK$, $DE : KL$, sus triplicadas son (313) iguales: luego la pirámide $FABC : MGHJ = FACD : MGJK = FADE : MGKL$; por consiguiente (262) la pirámide $FABCDE : MGHJKL = FABC : MGHJ$, ó bien como la triplicada de BC á HJ.