APUNTES DE ARITMÉTICA

ADAPTADOS AL TEXTO

DE

SALINAS Y BENITEZ

POR EL

CAPITÁN D. MANUEL SALGADO BIEMPICA,

exprofesor de la Academia de Infantería.

Imprenta y librería editorial

DE SANTIAGO RODRÍGUEZ

BURGOS

APUNTES DE ARITMÉTICA

adaptados al texto

de

SALINAS Y BENITEZ

por el

Capitán D. Manuel Salgado Biempica,

exprofesor de la Academia de Infantería.

A los efectos de la Ley de Propiedad intelectual.

Burgos 5 de Octubre 1922

Manuel Salgado Biempica

Imprenta y librería editorial
HIJOS DE SANTIAGO RODRÍGUEZ
BURGOS

Apuntes de Aritmética

Operaciones fundamentales

— ADICIÓN —

Consecuencias: 4.ª
$$\left.\begin{array}{r}(a+b+c)+(m+n+p)\\ a+b+c=M.\text{——}\end{array}\right\}\begin{array}{l}M+(m+u+p)=\\ =M+m+n+p=\end{array}$$
$=a+b+c+m+n+p.$

— SUBSTRACCIÓN —

Substracciones complexas.—Teorema I'I. $a-(b-c+d-e)=$ $=a-[(b+d)-(c+e)]$(1) $=a+(c+e)-(b+d)=a+c+e-b-d.$

Directamente: $a-(b-c+d-e)=a+c+e-(b-c+d-e+c+e)=a+c+e-(b+d)=a+c+e-b-d.$

Si el minuendo es también una suma, una resta, ó una serie de sumas y restas, se obtiene el resultado final como acaba de explicarse, según se ve á continuación:

$$\left.\begin{array}{c}(m-n+p)-(b-c+d-e)\\ m-n+p=A.\end{array}\right\}\begin{array}{l}A-(b-c+d-e)=A+c+e-b-d=\\ =m-n+p+c+e-b-d.\end{array}$$

Suma y resta combinadas.—Teorema II.—La serie de adiciones y substracciones se transforma en una diferencia lo mismo

(1) Es evidente, que se obtendrá el mismo resultado restando de *b*, *c* unidades, sumándole luego *d*, y restándole *e*; que sumándole primero *d*, y restándolole después *(c + e)* unidades. —

que en el teorema III que antecede, y queda reducido á sumar á un número una diferencia indicada.

Si el primer sumando fuese implícito como el segundo, se procedería lo mismo que cuando lo es el minuendo en susbtracciones complexas.

Escolio. $a - b + c - d + e = (a - b) + (c - d + e)$; puesto que efectuando esta suma indicada en el segundo miembro, se obtiene el primero; y si $a - b = m$, y $c - d + e = s$, resultará:

$a - b + c - d + e = (a - b) + (c - d + e) = m + s$, que comprueba el escolio.- —

— MULTIPLICACIÓN —

Consecuencias inmediatas de la definición

$$1.^{a}\ a.\ b. \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \text{»}\ 1.\ b = 1 + 1 + 1 + \ldots = b \text{»} \\ b = 1 \text{»}\ a.\ 1 = a \text{———————} \end{array} \right\}$$

$$2.^{a} \left\{ \begin{array}{l} a = o \text{»}\ o.\ b = o + o + \ldots = o \\ b = o \text{»}\ a.\ o = o.\text{————} \end{array} \right\};$$

pues en todos los casos tenemos que formar un número compuesto de tantas partes iguales al multiplicando, como unidades tiene el multiplicador; luego, si el multiplicador es, p. ej., $b = o$, el producto se compondrá de *o* partes (es decir, *de ninguna)* iguales al multiplicando, y resultará *cero.*

Casos en que los factores terminan en ceros.—En el caso en que los dos factores terminan en ceros, está comprendido también aquel en que solo el multiplicando termina en ceros, según vemos á continuación.

Sea el producto de 452.000 por 73, que, como el texto dice, es igual á 452 millares multiplicados por 73, y esto es lo mismo que 452×73 millares; ó sea, que 452×73, seguido de tres ceros; luego, para encontrar el producto se efectúa la multiplicación, prescindiendo de los ceros y se escriben después á la derecha del producto obtenido.

Observación.—Vamos á demostrar que $4 \times 3 = 3 \times 4$.

Podemos escribir: $\left\{\begin{array}{l} 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}\right\}$ y sumando miembro á miembro, será:

$(4 + 4 + 4 = \underline{4 \times 3}) = (3 + 3 + 3 + 3 = \underline{3 \times 4})$.

Múltiplo de un número.—Son equimúltiplos, p. ej.: 3.5, 4.5, 7.5; es decir, que 15, 20 y 35, son equimúltiplos de 3, 4 y 7, respectivamente, por ser los resultados de multiplicar éstos, por el mismo número, 5.—

Multiplicación cuando los factores son implícitos.—Teorema I. $(a + b + c).\, m = (a + b + c) + (a + b + c) + \ldots\ldots\ldots = a + b + c + a + b + c + a + b + c + \ldots\ldots\ldots = a + a + a + \ldots\ldots\ldots + b + b + b + \ldots\ldots\ldots + c + c + c + \ldots\ldots\ldots = a.\, m + b.\, m + c.\, m.$ —

Teorema II. $(a - b).\, m = (a - b) + (a - b) + (a - b) + \ldots\ldots\ldots = a - b + a - b + a - b + \ldots\ldots\ldots = (a + a + a + \ldots\ldots\ldots) - (b + b + b + \ldots\ldots\ldots) = a.\, m - b.\, m.$

Escolio.—Consideramos aquí algunos de los distintos casos que pueden presentarse y desarrollamos su cálculo, fundándonos en los teoremas anteriores, en los de substracciones complexas y suma y resta combinadas y en las consecuencias de la adición, para familiarizar al alumno con el cálculo aritmético; pues ocurre con frecuencia ver como, en estos ó parecidos casos, se valen insensiblemente de los principios del Álgebra, diciendo, por ejemplo, que, $+ \cdot - = -$, ó que al suprimir un paréntesis precedido del signo *menos* cambian de signo las cantidades que encierra, porque equivale á multiplicar por -1, etc., etc.

1.° $(a - b + c - d).\,m = [(a + c) - (b + d)].^{(1)}\, m = (a + c).\,m - (b + d).\,m = a.\,m + c.\,m -^{(2)} (b.\,m + d.\,m) = a.\,m + c.\,m - b.\,m - d.\,m.$ —

2.° $(a + b).\,(c - d).^{(3)} = (a + b).\,c - (a + b).\,d = a.\,c + b.\,c -^{(2)} (a.\,d + b.\,d) = a.\,c + b.\,c - a.\,d - b.\,d.$

3.° $(a - b).\,(c - d).^{(3)} = (a - b).\,c - (a - b).\,d = a.\,c - b.\,c -^{(4)} (a.\,d - b.\,d) = a.\,c - b.\,c - a.\,d + b.\,d.$

4.° $(a - b + c - d)\,(m - n + p)$ (por el caso 1.° que antecede, considerando á $(m - n + p)$ como un número) $= a.\,(m - n + p) - b.\,(m. - n + p) + c.\,(m - n + p) - d.\,(m - n + p) = a\,m - a.\,n + a.\,p -^{(5)} (b.\,m - b.\,n + b.\,p) +^{(6)} (c.\,m - c.\,n + c.\,p) -^{(5)} (d.\,m - d.\,n + d.\,p) = a.\,m - a.\,n + a.\,p - b.\,m + b.\,n - b.\,p + c.\,m - c.\,n + c.\,p - d.\,m. + d.\,n - d.\,p.$

Producto de varios factores.—Las unidades de los diversos órdenes, son potencias de la base del sistema; así, por ejemplo: la de 6.° orden $= 100.000 = 10^5$; la del orden enésimo $= 10.^{n-1}$

— DIVISIÓN —

Determinación de las unidades del orden más elevado del cociente. Siguiendo el texto se llega á las desigualdades siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} D > d.\ 1000,, \\ D < d\ 10000 = d.\ 10.1000 = (d.\ 10)\ 1000 \end{array}\right\}$$ En *d. 1.000*, hay *d* millares. Cualquier número mayor que *d* millares, tiene que

(1) Multiplicar una diferencia por un número.—(2) Restar de un número una suma.—(3) Multiplicar un número por una diferencia.—(4) Restar de un número una diferencia.—(5) Restar de un número una serie de adiciones y substracciones.—(6) Sumar á un número una serie de sumas y restas.

tener, *por lo menos*, *d* millares y alguna ó algunas unidades más; pero puede tener más de *d* millares; luego, designando por *m* el número de millares contenidos en D, resultará, $m \geqq d$. - En *d. 10.000*, hay *(d. 10)* millares. – Cualquier número menor que *d. 10* millares, no puede llegar á contener *d. 10* millares, porque entonces no sería menor; y como $D < (d. 10)$ millares, será: $m < d. 10$.—

Ahora bien: los millares son, en el caso considerado, el orden de las unidades más elevadas del cociente; luego, deducimos: que las unidades del dividendo, del mismo orden que las más elevadas del cociente, forman un número $m \geqq d$, y menor que *10 d*; es decir, un número *m* que contiene al divisor por lo menos una vez, sin llegar á contenerlo diez.

De esta propiedad, se deduce la regla dada en el texto.

Casos de la división.—2.º caso. Dividir 7596, por 829. – El dividendo es menor que el divisor por 10; luego, el cociente, no puede tener más que una cifra. Como el dividendo es el producto del divisor por el cociente, más el resto, podemos escribir: $7596 = 829.c + r = (800+20+9)\,c + r = 800.c + 20.c + 9.c + r$; y vemos, que el producto de las 8 centenas del divisor por la cifra única del cociente, *c*, será un número exacto de centenas, que no podrá estar contenido sino en las 75 centenas del dividendo; pero como en $20.c + 9.c + r$, puede haber una ó varias centenas, que tendrán también que estar contenidas en las 75 del dividendo, deducimos, que $75 \geqq 8.c$; según que $20.c + 9.c + r$, sea menor que 100, ó resulte igual ó mayor que una centena, y $75 : 8 \geqq c$; es decir, que si dividimos las 75 centenas del dividendo por las 8 centenas del divisor, se obtendrá una cifra que no será menor que la del cociente, si bien podrá ser mayor; luego será preciso comprobarla. Para ello, hágase lo que el texto indica; pues si el producto puede restarse, la cifra no es grande, y como tampoco puede ser pequeña, porque $75 : 8 \gtreqless c$, *pero nunca menor*, será la verdadera.

Para simplificar la operación, al mismo tiempo que se hallan los productos parciales, pueden restarse de las unidades de igual orden del dividendo; generalizando para ello el artificio del caso general de la substracción, diciendo: que si algún producto parcial no puede restarse de las unidades del mismo orden del dividendo, se le agregan á estas *tantas veces diez unidades de su orden* como sean necesarias para poder restar, añadiendo al producto siguiente tantas unidades del suyo, como grupos de á diez se le hayan añadido al minuendo anterior.—

Si al efectuar los tanteos, por temor de probar una cifra demasiado grande, se ensayase una demasiado pequeña, se conocería en que el resto obtenido, sería igual ó mayor que el divisor. —En efecto: $D = d.\ c + r$.—Supongamos que en vez del verdadero cociente c ponemos uno menor, p. ej.: $c - 1$, resultando entonces, $D = d\,(c - 1) + R = d\,c - d + R$.—Vamos á demostrar que $R \gtreqless d$.—Tendremos: $d\,c - d + R = d\,c + r$,[1] ó $d\,c + R = d\,c + d + r$, ó $R = d + r$; luego, según sea $r \gtreqless o$, así será $R \gtreqless d$, que es lo que queríamos demostrar.

Cuando la segunda cifra del divisor exceda á 5, se puede ver (aunque no hemos estudiado todavía las variaciones del cociente por las del dividendo y divisor), que es verdad lo que el texto dice.—En efecto: si queremos dividir, p. ej., 3314, por 492, tenemos que dividir las 33 centenas del dividendo, por las 4 centenas del divisor, para obtener una cifra igual ó mayor que la

(1) Por ser ambos miembros iguales á *D*.

verdadera del cociente; es decir, que *33 centenas: 4 centenas* $\gtreqless$ c; pero como el divisor 492 se aproxima más á 5 centenas que á 4, no cabe duda, que si dividimos 33 centenas, por 5 centenas, obtendremos *en general*, una cifra más aproximada á la verdadera que antes.—Decimos *en general*, porque aunque el divisor es ahora mayor que antes, puede ocurrir que el cociente no varíe, (nos referimos al cociente entero, único que por ahora conocemos), y puede también ocurrir, por ser el nuevo divisor parcial mayor que el total, que la cifra obtenida sea menor que la verdadera; es decir, que *33 centenas: 5 centenas* = 33: 5, puede ser ahora $\lesseqgtr$ c; pero como decimos anteriormente, *en general*, será más aproximada á la verdadera que antes; es decir, que no diferirá mucho de ésta.

Ahora bien: el aumento de una unidad que se hace también en el texto al dividendo parcial, con lo que resulta 34 : 5, *no hace variar las deducciones hechas por el aumento de la unidad al divisor;* pues es fácil ver, que *solo compensa en parte* el indicado aumento del divisor.

En efecto: el aumento de una unidad al dividendo, *solo puede hacer aumentar el cociente en otra unidad*, cuando á aquél le falta una unidad, precisamente, para contener al divisor una vez más; mientras que el aumento de una unidad al divisor, *puede hacer disminuir el cociente en muchas unidades*, como se ve por ejemplo, en 90.000 : 2 = 45.000, y 90.000 : 3 = 30.000, cuya disminución es de 15.000 unidades.

Luego subsisten las deducciones anteriores, y es, por tanto, cierto cuanto dice el texto.—Se ve, precisamente, en el ejemplo propuesto, comprobado lo que decimos; pues al dividir 33 por 4, la cifra obtenida es 8, y la verdadera del cociente de 3314 : 492, es 6; mientras que dividiendo 34 por 5, después de hacer los incrementos que indica la Aritmética, se obtiene la cifra 6, evitándose los tanteos de las cifras 8 y 7.—

Lo que el texto dice al tratar del procedimiento abreviado para comprobar la cifra del cociente, de que *se tiene la cifra verdadera, cuando algún resto llegue á ser igual ó mayor que la cifra que se comprueba*, es cierto, cuando la cifra comprobada es la mayor posible, condición que no debemos olvidar; pues claro es, que otra menor que la verdadera, nos daría, con mayor razón, un resto igual ó mayor que ella, y sin embargo no sería la verdadera cifra del cociente.

Pizarra del 3.er caso.

Sígase la explicación del texto.

7240649	829
6632000	8734
608649	
580300	
28349	
24870	
3479	
3316	
163	

829×8[1] $\leqq 7240$.— $829 \times 8000 \leqq 7240000$, y $829 \times 8000 < 7240000 + 649 = 7240649$. Luego, $c \geqq 8000$. 829×9[1] > 7240.— $829 \times 9000 > 7240000$, por lo menos en un millar; y, por lo tanto, $829 \times 9000 > 7240000 + 649 = 7240649$. — Luego, $c < 9000$.—*Deducción.*

Simplificación:

7240649	829
6086	8734
2834	
3479	
163	

Regla.

Para probar que cada dividendo parcial, es menor que diez veces el divisor, obsérvese, que $r < d$; luego, $r. 10 < d. 10$, por lo menos en una decena; y, por lo tanto, siendo $u < 10$, será: $r. 10 + u < d. 10$, y $r. 10 + u =$ dividendo parcial.

---

(1) Por ser 8 la cifra del cociente de dividir 7240 por 829, según suponemos.

Dependencia mútua de los términos de la división, del cociente y del resto.—Si nos referimos á una división efectuada, $\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r & c \end{array}$, podemos ya concretar más las variaciones del cociente, por aumento ó disminución del dividendo y divisor.—En efecto: 1.° Cuando D aumente, por lo menos, en las unidades que á r le faltan para valer d, el cociente aumenta *seguramente*, permaneciendo constante el divisor; pero si aumenta D en menos de $d - r$, no varía c.—2.° Si D disminuye en un número de unidades mayor que r, c, disminuye *seguramente*, permaneciendo constante el divisor; pero si D disminuye en un número igual ó menor que r, entonces, c, no varía.—3.° Si d aumenta en n unidades, permaneciendo constante D, para que c no varíe, será preciso poder hacer esas n partes más, iguales á c, del resto r; es decir, será preciso que $r \geqq n.c$; pero si $r < n.c$, entonces, c, disminuye. —4.° Si d disminuye en n unidades, para que c no varíe, siendo D constante, será preciso que las n partes menos, iguales á c, que ahora se hacen, sumadas con r, no lleguen á contener una vez más al nuevo divisor $d - n$; es decir, que $n.c + r < d - n$; pero si $n.c + r \geqq d - n$, el cociente aumenta.

— DIVISIÓN —

Pizarra del 2.° caso. (1)

$7596 : 829. — 7596 < 829.10 = 8290. — c < 10.—$
$7596 = 829.c + r = (800+20+9).c + r = 800.c + 20.c + 9c + r. —$

$$\left.\begin{array}{l} 20.c+9.c+r < 100.—75 \text{ centenas} = 8.c, \text{ centenas} \\ 20.c+9.c+r \geqq 100.—75 \text{ íd. } > 8.c, \text{ íd.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 75 \text{ centenas} \geqq \\ 8.c \text{ centenas, ó} \end{array}$$

$75 \geqq 8.c$ y $75 : 8 \geqq c.—$

$$\begin{array}{r|l} 7596 & 829 \\ \cline{2-2} \underline{7461} & 9 \\ 135 & \end{array} \quad \text{Simplificación:} \quad \begin{array}{r|l} 7596 & 829 \\ \cline{2-2} 135 & 9 \end{array} \quad \text{Regla.}$$

$$\left.\begin{array}{l} D = d.c + r. \\ D = d.(c-1) + R = d.c \quad d + R. \end{array}\right\} d.c - d + R = d.c + r.$$

$d.c + R = d.c + d + r.$ „ $R = d + r.$ „ $r \geqq o.$ $R \geqq d.—$
$3314 : 492. — 33 : 4 \geqq c. \quad 33 : 5 \lesseqgtr c. — 34 : 5 \lesseqgtr c.—$

$$\begin{array}{r|l} 7667 & 874 \\ \cline{2-2} 46 & 9 \end{array} \quad 63 > 46; c < 9. — \quad \begin{array}{r|l} 7267 & 874 \\ \cline{2-2} 8 & 8 \end{array} \quad c = 8.$$

(1) Ponemos la pizarra en esta forma para que pueda el alumno tenerla á la vista al estudiar la explicación que le antecede.

Divisibilidad de los números

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Números congruentes.—Consecuencias

1.ª *Dos números iguales, son congruentes con relación á cualquier módulo;* porque dos números iguales son un solo número, y al dividirlos por otro cualquiera, dan siempre el mismo resto.

Recíproca.—Si dos números son congruentes con relación á cualquier módulo son iguales.

En efecto: si $a \equiv b$ (módulo cualquiera), será también, $a \equiv b$ (mod. a); y como el resto de a: a, es *o;* el de b: a, será *o*, también; ó lo que es lo mismo, $b = \dot{a}$, y por tanto, $b \nless a$, (léase *b* no puede ser $<$ que *a*).—Por idénticas consideraciones: $a \equiv b$ (mod. b); $a = \dot{b}$, y $a \nless b$; luego si $\left\{\begin{matrix} b \nless a \\ \text{y} \\ a \nless b \end{matrix}\right\}$ será, $a = b$; según deseábamos demostrar.

2.ª $a = \dot{m}$; luego, el resto de *a* con respecto á *m*, es *o;* y cómo el de *o*, es también o, será: $a \equiv o$ (mod. m).—

Recíproca: $a \equiv o$ (mod. m).—El resto de *o* con respecto á *m*, es *o;* luego el de *a*, será *o* también; y por lo tanto $a = \dot{m}$.—

3.ª $\left\{\begin{matrix} a = \dot{m} \\ b = \dot{m} \end{matrix}\right\}$ Restos de *a* y *b* con respecto á *m*, iguales á *o;* luego, $a \equiv b$ (mod. m).—

La recíproca no es cierta, porque dos números pueden ser congruentes, sin necesidad de ser múltiplos del módulo.—

4.ª $\begin{array}{c|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$ y $\begin{array}{c|l} r & d \\ \hline r & o \end{array}$; luego $D \equiv r$ (mod d).—No es cierta para el resto por exceso, á menos que sea igual al resto por defecto; pues $\begin{array}{c|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$ y $\begin{array}{c|l} r' & d \\ \hline r' & o \end{array}$; si *r* no es igual á r'; D, no será congruente con r' (mod. d).

Principios fundamentales de las congruencias

Teorema III. —

$$\text{Si}\begin{cases} a > b \\ a' < b' \\ a'' > b'' \end{cases} \begin{cases} a = b + \dot{m} \\ a' + \dot{m} = b' \\ a'' = b'' + \dot{m} \end{cases} \begin{cases} a + a' + a'' + \dot{m} = b + b' + b'' + \dot{m} \\ + \dot{m} = b + b' + b'' + \dot{m}\text{ (1)} \end{cases}$$

según sea mayor el $\dot{m}$ del primer miembro, ó el del último, será:

$$\left.\begin{array}{l} a + a' + a'' + \dot{m} - \dot{m} = b + b' + b;'' \quad a + a' + a'' + \dot{m}\text{(1)} = \\ \quad = b + b' + b''. \\ \text{ó} \\ a + a' + a'' = b + b' + b'' + \dot{m} - \dot{m};\; a + a' + a'' = \\ \quad = b + b' + b'' + \dot{m} \end{array}\right\}, \text{ y según}$$

el corolario del teorema II, en ambos casos, resulta, $a + a' + a'' \equiv b + b' + b''$ (mod m).

$$\text{Si}\begin{cases} a < b \\ a' < b' \\ a'' < b'' \end{cases} \begin{cases} a + \dot{m} = b \\ a' + \dot{m} = b' \\ a'' + \dot{m} = b'' \end{cases} \begin{cases} a + a' + a'' + \dot{m} = b + b' + b'', \text{ y} \\ a + a' + a'' \equiv b + b + b' \text{ (mod m).} \end{cases}$$

Corolario 2.°. —

$$1.^a \text{ parte}\begin{cases} a \equiv b \text{ (mod m)} \\ \dot{m} \equiv o \text{ (mod m)} \end{cases} a + \dot{m} \equiv b \text{ (mod m).—}$$

$$2.^a\begin{cases} a \equiv b \text{ (mod m)} \\ m\,p \equiv m\,q \text{ (mod m)} \end{cases} a + m\,p \equiv b + m\,q \text{ (mod m).}$$

Teorema IV. —

$$\text{Si}\begin{cases} a > b \\ a' < b' \end{cases} \begin{cases} a = b + \dot{m} \\ a' + \dot{m} = b' \end{cases} \begin{cases} a\ (a' + \dot{m}) = (b + \dot{m}).\ b';\ a.\ a' + a.\dot{m} = \\ = b.\ b' + b.'\dot{m};\ a.\ a' + \dot{m} = b.\ b' + \dot{m}, \end{cases}$$

y según sea el $\dot{m}$ del primer miembro, mayor ó menor que el del segundo, será:

---

(1) La suma ó diferencia de múltiplos de *m*, es otro múltiplo de *m*; pues si $a = m\,p$ y $b = m.\,q$ $a \pm b = m\,p \pm m\,q = m\,(p \pm q) = \dot{m}$. —

$$\left.\begin{cases} a.a' + \dot{m} - \dot{m} = b.b';\ a\,a' + \dot{m} = b.b' \\ \text{ó} \\ a.a' = b.b' + \dot{m} - \dot{m};\ a.a' = b.b' + \dot{m} \end{cases}\right\}, \text{ y } a.a' \equiv b.b' \pmod m.$$

$$\text{Si}\begin{cases} a < b \\ a' < b' \end{cases}\begin{cases} a + \dot{m} = b \\ a' + \dot{m} = b' \end{cases}\begin{cases} a.a' + a.'\dot{m} + a.\dot{m} + \dot{m}.\dot{m} = b.b.' \\ a.a' + \dot{m} = b.b', \text{ y } a.a' \equiv b.b' \pmod m. \end{cases}$$

Teoremas relativos á los restos.

Teorema II. – El enunciado de este teorema, podría ser: *La condición necesaria y suficiente para que una diferencia sea múltiplo de un número, es que el minuendo y el substraendo sean congruentes con respecto á dicho número;* y entonces, fundados en el teorema II, se deduce, que si $a - b = \dot{m}$, *es necesario* que $a \equiv b \pmod m$; y fundándonos en el teorema I, se ve que dicha condición, es también *suficiente;* pues si $a \equiv b \pmod m$, será, $a - b = \dot{m}$.

Corolario 2.° $\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r & c \end{array}$; $r = D - d.c.$; $\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r' & c+1 \end{array}$; $r' = d(c+1) - D$.

1.° Si $D = \dot{m}$ y $d = \dot{m}$, también $dc = \dot{m}$; luego, $D - d.c = = r = \dot{m}$. –

2.° Si $D = \dot{m}$ y $d = \dot{m}$, también $d(c+1) = \dot{m}$; luego, $d.(c+1) - D = r' = \dot{m}$. –

Caracteres generales de divisibilidad

Forma de un número cualquiera. – $N = \ldots\ldots pqstu = \ldots\ldots poooo + qooo + soo + to + u = \ldots\ldots\ldots p.10^4 + q.10^3 + s.10^2 + t\,10 + u.$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p.10^4 = \dot{m} \pm p.d \\ q.10^3 = \dot{m} \pm q.c \\ s.10^2 = \dot{m} \pm s.b \\ t.10 = \dot{m} \pm t.a \\ u = u \end{array}\right| \begin{array}{l} N = \ldots\ldots\ldots\ldots pqstu = \dot{m} + (u \pm t.a \pm s.b \\ \quad \pm q.c \pm p.d \pm \ldots\ldots\ldots\ldots). \\ N \equiv u \pm t.a \pm s.b \pm q.c \pm p.d \pm \ldots\ldots \pmod m. \end{array}$$

Condición general de divisibilidad.—$u \pm t.a \pm s.b \pm q.c \pm p.d \pm \ldots\ldots\ldots\ldots = \dot{m}$.

Hemos dicho, que $10^n = \dot{m} \pm r$, según r sea el resto por defecto ó por exceso; luego, en $a.\,10^n = \dot{m} \pm a.\,r$, es también + ó —, según r sea por defecto ó por exceso, y otro tanto ocurrirá en la igualdad anterior que nos expresa la condición general de divisibilidad; por lo tanto, si agrupamos todos los productos correspondientes á los restos por defecto, y llamamos M á su suma, y hacemos lo mismo con los correspondientes á los restos por exceso, representando por S la suya, la igualdad anterior se transformará en $M - S = \dot{m}$, de la cual se deduce la regla del texto.

Puede suceder, en la práctica, que M sea menor que S.—En tal caso, como $N \equiv M - S \pmod{m}$, y sabemos que una congruencia no se altera aumentando uno de sus miembros en un múltiplo cualquiera del módulo, se aumentará la primera suma M en el múltiplo del módulo que sea indispensable para poder efectuar la resta; pues será: $N \equiv (M - S) + \acute{m} \pmod{m}$, ó $N \equiv (M + \dot{m}) - S \pmod{m}$ que nos demuestra lo dicho.

La condición de divisibilidad, puede simplificarse, como dice la Aritmética, agrupando los productos que procedan de las unidades congruentes de diversos órdenes; pues si hacemos $N = \ldots\ldots\, g'\,g\,b'\,b\,f'\,f\,a'\,a$ y llamamos r, (1) r', r_1, r_1', á los restos de las unidades de 1.°, 2.°, 3.° y 4.° orden, respectivamente, con relación al módulo m, suponiendo que estos mismos restos se repiten, en el mismo orden, para las demás unidades, y que r y r_1, son por defecto, y r' y r_1' son por exceso, la mencionada condición sería: $a.\,r - a.'\,r' + f.\,r_1 - f.'\,r_1' + b.\,r - b.'\,r' + g.\,r_1 - g.'\,r_1' + \ldots\ldots\ldots = (a.\,r + f.\,r_1 + b.\,r + g.\,r_1 + \ldots\ldots\ldots) - (a.'\,r' + f.'\,r_1' + b.'\,r' + g.'\,r_1' + \ldots\ldots\ldots) = [(a + b + \ldots\ldots).\,r + (f + g + \ldots\ldots).\,r_1] - [(a' + b' + \ldots\ldots).\,r' + (f' + g' + \ldots\ldots\ldots).\,r_1'] = \dot{m}$.

Aplicaciones.—Módulo 2.—Restos de las unidades de los diversos órdenes con respecto al módulo 2: 1, 0, 0, ... $N = \ldots\ldots\, c\,d\,u$.—Condición de divisibilidad: $u.\,1 + d.\,o + c.\,o + \ldots\ldots\ldots = u = \dot{2}$; que nos comprueba la regla del texto.

(1) $r = 1$, por ser el resto de la unidad simple ó de primer orden.

Módulo 3.—Restos: 1, 1, 1, ... N = ... c d u.

Condición: u. 1 + d. 1 + c. 1 + ... = u + d + c + ... = $\dot{3}$. Regla.

Módulo 4. Restos: 1, 2, 0, 0 .... N = ... c d u.

Condición: u. 1 + d. 2 + c. o + ... = u + 2 d = $\dot{4}$. — Regla.

Módulo 5.—Restos: 1, 0, 0 .... N = ... c d u.

Condición: u. 1 + d. o + c. o + ... = u = $\dot{5}$.—Regla.

Módulo 6. —Restos: 1, 4, 4, ... N = ... c d u.

Condición: u. 1 + d. 4 + c. 4 + ... = u + 4 (d + c + ...) = $\dot{6}$. Regla.

Módulo 7. Restos: 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, ... N $\equiv c_4 d_4 u_4 c_3 d_3 u_3 c_2 d_2 u_2 c_1 d_1 u_1$. — De este modo, las letras son las iniciales de las unidades que representan dentro de cada grupo, el cual viene indicado por el subíndice correspondiente: notación que facilita mucho la deducción de la regla.

Condición: $u_1 . 1 + d_1 . 3 + c_1 . 2 - u_2 . 1 - d_2 . 3 - c_2 . 2 + u_3 . 1 + d_3 . 3 + c_3 . 2 - u_4 . 1 - d_4 . 3 - c_4 . 2 = (u_1 . 1 + d_1 . 3 + c_1 . 2 + u_3 . 1 + d_3 . 3 + c_3 . 2) - (u_2 . 1 + d_2 . 3 + c_2 . 2 + u_4 . 1 + d_4 . 3 + c_4 . 2) = [(u_1 + u_3) + 3 (d_1 + d_3) + 2 (c_1 + c_3)] - [(u_2 + u_4) + 3 (d_2 + d_4) + 2 (c_2 + c_4)] = \dot{7}$: *deducción de la regla.* — Si consideramos á $N = c_4 d_4 u_4 c_3 d_3 u_3 c_2 d_2 u_2 c_1 d_1 u_1 = c_4 d_4 u_4 . 10^9 + c_3 d_3 u_3 . 10^6 + c_2 d_2 u_2 . 10^3 + c_1 d_1 u_1$, aplicándole la forma de un número cualquiera, y teniendo en cuenta que los restos de las unidades de 1.°, 4.°, 7.° y 10.° orden, con respecto al módulo 7, son: 1, — 1, 1, — 1; resultará:

$$\left.\begin{array}{l} c_4 d_4 u_4 . 10^9 = \dot{7} - c_4 d_4 u_4 \\ c_3 d_3 u_3 . 10^6 = \dot{7} + c_3 d_3 u_3 \\ c_2 d_2 u_2 . 10^3 = \dot{7} - c_2 d_2 u_2 \\ c_1 d_1 u_1 \quad = \quad c_1 d_1 u_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} N = \dot{7} + (c_1 d_1 u_1 - c_2 d_2 u_2 + c_3 \\ \quad d_3 u_3 - c_4 d_4 u_4) \text{ y} \\ N \equiv c_1 d_1 u_1 - c_2 d_2 u_2 + c_3 d_3 u_3 \\ \quad - c_4 d_4 u_4 \pmod 7. \end{array}$$

Luego, la condición de divisibilidad, será: $c_1 d_1 u_1 - c_2 d_2 u_2 + c_3 d_3 u_3 - c_4 d_4 u_4 = \dot{7}$, ó $(c_1 d_1 u_1 + c_3 d_3 u_3) - (c_2 d_2 u_2 + c_4 d_4 u_4) = \dot{7}$: *deducción de otra nueva regla.*—Como al hacer uso de esta regla, la diferencia obtenida puede tener varias cifras, si no se ve fácilmente, si es ó no múltiplo de 7, se le aplica la regla primera al número que expresa dicha diferencia.

Módulo 8. Restos: 1, 2, 4, 0, ...,, N = ... m c d u.

Condición: u . 1 + d . 2 + c . 4 + m . 0 + — — — = u + 2 d + 4 . c = $\dot{8}$. — Regla.

Módulo 9. Restos: 1, 1, ...,, N = — — c d u.

Condición: u. 1 + d. 1 + c. 1 + ... = u + d + c + ... = = $\dot{9}$.—Regla.

Módulo 10.—Restos: 1, 0, 0 .... — N = ... c d u.

Condición: u. 1 + d. o + c. o + ... = u = $\dot{10}$.—Regla.

Módulo 11.—Restos: 1, – 1, 1, – 1, ... —N= ...... m c d u.

Condición: u. 1 — d. 1 + c. 1 — m. 1 + ... = u — d + c — m + ... = (u + c + ...) — (d + m + ...) = = $\dot{11}$.—Regla.

Observación.—Téngase en cuenta que la regla general deducida de la condición de divisibilidad, es aplicable á todos los módulos; luego, para los estudiados anteriormente, conocemos dos reglas para cada uno; y tres, para el 7.—

Máximo común divisor

Investigación del máximo común divisor de dos números

Para comprobar, que cuando algún resto por defecto es mayor que la mitad del divisor, utilizando el resto por exceso correspondiente, se simplifica el procedimiento, vamos á demostrar, que cada vez que esto hagamos, economizaremos una división.

$$\begin{array}{c|c|c|c|l}
 & Q & Q_1 & Q_2 & Q_3 \ldots\ldots \\ \hline
A & B & R & R_1 & R_2 \ldots\ldots \\
R & R_1 & R_2 & R_3 &
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
\text{Sea } R > \tfrac{1}{2} B; \text{ luego, } Q_1=1, \text{ y } R_1=B-R.- \\
\left.\begin{array}{l} B = R + R_1 \\ R=R_1 Q_2+R_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B = R_1 Q_2 + R_2 + R_1 = \\ R_1 (Q_2 + 1) + R_2.- \end{array}
\end{array}\right.$$

Luego, haciendo de nuevo las divisiones utilizando el resto por exceso R_1 en vez de R, por ser este mayor que $\frac{B}{2}$, tendremos:

$$\begin{array}{c|c|c|l}
 & Q & Q_2 + 1 & Q_3 \\ \hline
A & B & R_1 & R_2 \ldots\ldots \\
R & R_2 & R_3 & \\
R_1 = B - R & & &
\end{array}$$

y se ve en el cuadro anterior, que hemos llegado á la división de R_1 por R_2, lo mismo que antes, habiendo economizado la división de B, por R, según queríamos demostror.

Podría demostrarse esto mismo, por medio de las propiedades de números congruentes; pero preferimos hacerlo así, porque se obtiene al mismo tiempo, el valor del cociente de B por R_1, que es, precisamente, $Q_2 + 1$.—

Propiedades del máximo común divisor de dos números

Teorema II.—Corolario.—

$$D(A,B)=C; D(A:C,B:C)=C:C=1; \text{luego} \left\{\begin{array}{l} A:C=A' \\ \text{y} \\ B:C=B' \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{son primos,} \\ \text{entre si.}\end{array}$$

Recíprocamente: $D(A:C, B:C)=1.—D(A, B)=1. C=C.$—

3

Teorema III.—Corolario.

Sean A y B los dos números, y C, un factor de B, primo con A.—

B : C = B'.—Vamos á demostrar: $\begin{cases} 1.^\circ\ D(A, B) = D(A, B') . \\ 2.^\circ\ D(A, B) = D(A, B.C). \end{cases}$

Observemos, ante todo, que por ser A y C, primos entre si, todo número *n* que divida á A, tiene que ser primo con C; pues si *n* y *C*, tuviesen un factor común *p*, por ser $n = \dot{p}$, y $A = \dot{n} = \dot{p}$, A y C no serían primos.—Pizarra: $A = \dot{n}$; n, primo con C. $\begin{cases} C = \dot{p} \\ n = \dot{p} \end{cases}$ $A = \dot{n} = \dot{p}$.; A y C, no serían primos.

Sabido esto, diremos:

1.° Todo divisor de A y B, lo será de A y B'. C = B; pero, por dividir á A, tiene que ser primo con C, y como divide al producto B'. C, dividirá forzosamente á B'; luego, todo divisor de A y B, lo es de A y B'.—

Recíprocamente: Todo divisor de A y B', lo será de A y B'. C = B.—Vemos, pues, que A y B, y A y B', tienen los mismos divisores comunes; luego, tendrán el mismo máximo común divisor, que es lo que queríamos demostrar.

$$\text{Pizarra: } \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} A \\ B'.C \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} A \\ B' \end{matrix} \Big\} D(A, B) = D(A, B').—$$

2.° Todo divisor de A y B, lo será de A y B. C = $\dot{B}$; y recíprocamente: todo divisor de A y B. C, por ser divisor de A, será primo con C; y por dividir á B. C, y ser primo con C, dividirá á B; luego, A y B, y A y B. C, tienen los mismos divisores; y por lo tanto, D (A, B) = D (A, B. C).—

$$\text{Pizarra: } \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} A \\ B.C \end{matrix} \Big\} D(A, B) = D(A, B.C).—$$

— MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS —

Teoremas relativos al máximo común divisor de varios números.

Teorema II.—Corolario.—

D (A, B, C) = E.— D (A : E, B : E, C : E) = E : E = 1; luego, $\left\{\begin{array}{l} A:E = A' \\ B:E = B' \\ C:E = C' \end{array}\right\}$ son primos entre si.

Recíproca: D (A:E, B:E, C:E)=1.— D (A, B, C)=1. E=E.—

Mínimo común múltiplo

— Mínimo común múltiplo de dos números —

Principios relativos al mínimo común múltiplo de dos números

Teorema I.—Sean A y B dos números, y D, su máximo común divisor.—Llamemos A' y B' á los cocientes, *primos entre sí*, de dividir A y B por D, y serán: A = D. A', y B = D. B'.—

Designemos ahora por M *un múltiplo cualquiera* de A y B; resultando, según se ve en la pizarra, que M : D = A'. E, y M : D = $\dot{B}$', y de aquí se deduce que A'. E = $\dot{B}$'; pero como B', es primo con A' y divide al producto A'. E, tendrá que dividir á E; luego E = $\dot{B}$' = B'. E'; cuyo valor, sustituído en la igualdad M = D. A'. E, nos hace ver que M es múltiplo de D. A'. B'.—Deducimos, pues, que *si todo múltiplo, M, de A y B, lo es de D. A'. B'*, el mínimo común múltiplo de A y B, tendrá que ser, también, múltiplo de D. A'. B', y, por consiguiente, *no puede ser menor* que D. A'. B'.—

Ahora bien: como D. A'. B', es un múltiplo de A y B, según vemos en la pizarra, se deduce, que el mínimo común múltiplo de A y B, *no puede ser mayor* que D. A'. B', porque sino no sería el menor múltiplo de dichos números.

Luego, si no puede ser *menor* ni *mayor* que D. A'. B', será: M (A, B) = D. A'. B'; y siguiendo el cálculo, se llega á M (A, B) = (A. B) : D, que es lo que queríamos demostrar.

Corolario 1.° $\left\{\begin{array}{l} D\,(A, B) = D.\text{—} \\ M\,(A,B) = (A.\,B) : D \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} M\,(A, B) \times D\,(A, B) = \\ = (A.\,B) : D \times D = A.\,B. \end{array}$

Corolario 2.°—Según hemos visto en el teorema, todo múltiplo M, de A y B, lo es de D. A'. B'; y como el M (A, B) = D. A'. B', queda demostrado este corolario.

Corolario 3.°—D (A, B) = 1.—M (A, B) = (A. B):1 = A. B.—

Teorema II.—Al multiplicar A y B, por n, su máximo común divisor D, vendrá multiplicado por n; luego, el M (A. n, B. n) será igual á A. n (B. n : D. n); pero D. n divide á B. n, por ser el máximo común divisor de A. n y B. n, y siendo exacto el cociente de $B. n : D. n$, no alterará en nada esta división al dividir sus dos términos por n; pues aunque el resto sabemos que queda dividido por dicho número n, como era *cero*, cero seguirá siendo; y quedará, M (A. n, B. n) = A. n (B : D), y reemplazando ahora los factores A y (B : D), por su producto efectuado, obtenemos, [A. (B : D)]. n; que es el M (A, B), multiplicado por n, según deseábamos probar.

Corolario. (Véase la pizarra).—Al dividir A y B por n, su máximo común divisor D, vendrá dividido por n; luego, el M (A : n, B : n) = A : n. *(B:n : D:n)*; pero D : n, divide á B : n, por ser el máximo común divisor de A:n y B:n y siendo exacto el cociente; *(B:n) : (D:n)*, podemos multiplicar sus dos términos por n, sin que dicha división sufra alteración; pues aunque el resto quedaría multiplicado por n, como es cero, seguirá siendo cero; luego, M (A : n, B : n) = A : n. (B : D).—Recordando ahora que dividir el factor A por n, equivale á dividir el producto [A. (B : D)] por dicho número, y que M (A, B) = A. (B : D), queda demostrado el corolario.

Teorema III.—Siguiendo el cálculo de la pizarra, se ve que, efectivamente, los cocientes de dividir el mínimo común múltiplo de dos números por cada uno de ellos, son los mismos, aunque en orden inverso, que los que resultan de dividir dichos números por su máximo común divisor, según indica el texto, y estos ya sabemos que son primos entre si.—

Recíprocamente.—Aunque la Aritmética no menciona la recíproca de este teorema, como la estudia en el teorema análogo del mínimo común múltiplo de varios números, nos decidimos á ponerla en estos apuntes, sirviendo su explicación para la recíproca del teorema III, de los referentes al mínimo común múltiplo de varios números.—

Su enunciado, sería: *Si un número es divisible por otros dos, y los cocientes son primos entre si, dicho número es su mínimo común múltiplo.*—

Sígase el calculo de la pizarra, en la cual se ve, que de suponer no sea M, el mínimo común múltiplo, y que lo sea otro número N, por ser M múltiplo de A y B, lo sería de N; resultando entonces que A_1 y B_1, tendrían un factor común *p;* pero como son primos entre si, tiene que ser $p = 1$; y por lo tanto, $M = N = M\ (A, B)$.—

— Mínimo común múltiplo de varios números —

Teoremas relativos al mínimo común múltiplo de varios números.

Teorema III.—Recíproca.—Se demuestra del mismo modo que la recíproca del teorema III del mínimo común múltiplo de dos números, estudiada ya en estos apuntes, sin más que ampliar el cálculo á tres ó más números.

Pizarra:

$$M\text{,,}\left\{\begin{matrix} M : A = A_1 \\ M : B = B_1 \\ M : C = C_1 \end{matrix}\right\} D\,(A_1\,B_1\,C_1) = 1\text{,,}$$

$$\begin{matrix} M(A, B, C) = N.- \\ M = \dot{N} = N.\,p \end{matrix} \left\{\begin{matrix} M : A = A_1 = N.p : A = (N : A).p = \dot{p} \\ M : B = B_1 = N.p : B = (N : B).\,p = \dot{p} \\ M : C = C_1 = N.p : C = (N : C).\,p = \dot{p} \end{matrix}\right\} p = 1\text{,,}\ M = N.1 = N.$$

Mínimo común múltiplo de dos números

Pizarra del teorema I.—

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} D.-\left\{\begin{matrix} A : D = A'.- A = D.\,A'.- \\ B : D = B'.- B = D.\,B'.- \end{matrix}\right\} \begin{matrix} M = \dot{A} = \dot{\overline{D.\,A'}} = D.\,A'.\,E \\ M = \dot{B} = \dot{\overline{D.\,B'}}.- \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} M : D = A'.\,E \\ M : D = \dot{B}' \end{matrix}\right\} A'.\,E = \dot{B}'.-$$

$$\begin{matrix} E = \dot{B}' = B'.\,E'.- \\ M = D.\,A'.\,E.\ - \end{matrix}\Big\} M = D.\,A'\,B'\,E' = \dot{\overline{D.\,A'.\,B'}} - M(A, B)^{(1)} \not< D.\,A'.\,B'$$

$$\left\{\begin{matrix} D.A'.B' = \dot{\overline{D.A'}} = \dot{A} \\ D.A'.B' = \dot{\overline{D\ B'}} = \dot{B} \end{matrix}\right\} M\,(A, B)^{(2)} \not> D.\,A'.\,B'.$$

$M\,(A.\,B) = D.\,A'.\,B' = (D.\,A'.\,B'.\,D) : D = (A.\,B) : D$; como se quería demostrar.—

En la práctica: $M\,(A, B) = (A.\,B) : D = A.\,(B : D) = (A : D).\,B.-$

Pizarra del teorema II y su corolario.—

$D\,(A, B) = D.—M\,(A, B) = (A.\,B) : D = A.\,(B : D).—$

Teorema II.—$D\,(A.\,n,\,B.\,n) = D.\,n.—$

$M\,(A\,n, B.n) = A.\,n.\,(B.\,n : D.\,n) = A.n.\,(B : D) = [A.\,(B : D)].\,n.$

Corolario.—$D\,(A : n,\,B : n) = D : n.\ -$

$M\,(A : n, B : n) = A : n\,(B : n : D : n) = A : n\,(B : D) = [A.\,(B : D)] : n.$

Teorema III.—$D\,(A, B) = D\text{,,}\left\{\begin{matrix} A : D = A' \\ B : D = B' \end{matrix}\right\} A'$ y B', primos entre si.

$$\begin{matrix} M\,(A, B) = A.\,(B : D) = A.\,B'.- M\,(A, B) : A = B'.- \\ M\,(A, B) = (A : D).\,B = A'.\,B.- M\,(A, B) : B = A'.- \end{matrix}\Big\} B' \text{ y } A'\text{, primos entre si.}$$

Recíproca. —$\left\{\begin{matrix} M : A = A_1 \\ M : B = B_1 \end{matrix}\right\} A_1$ y B_1, primos entre si.—

$$\begin{matrix} M\,(A, B) = N.- \\ M = \dot{N} = N.\,p. \end{matrix}\left\{\begin{matrix} M : A = A_1 = N.p : A = (N : A).p = \dot{p} \\ M : B = B_1 = N.\,p : B = (N : B).\,p = \dot{p} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} p = 1\text{,,}\ M = N.1 = N.- \\ M\,(A, B) = M.- \end{matrix}$$

---

(1) Léase: no puede ser menor.—(2) No puede ser mayor.

Números primos

Principios fundamentales y determinación de estos números

Formación de una tabla de números primos.

Teorema II.—2, 3, 5, 7, 11, 13, ... p, ... q ...... N ......

$$\left.\begin{array}{l} N < q^2 = q.\,q.— \\ N = \dot{N}'.—N' > p.—N' \geqq q.— \\ N:N' = N''.—N = N'.\,N''.— \end{array}\left\{\begin{array}{l} q = N';\, q.N'' = N'.N'' = N < q.q;\, N'' < q.— \\ \\ q < N';\, q.N'' < N'.N'' = N < q.q;\, N'' < q.— \end{array}\right.\right\}N =$$

$$= \dot{N}''.—N'',\ \text{primo};\ N'' \leqq p.—N'' = \dot{n} \leqq p.—N = \dot{N}'' = \dot{n}.—$$

1.° *q, es el número primo inmediatamente superior á p*, por que de no ser primo, tendría que tener un divisor primo, menor, igual ó mayor que *p:* pero, menor ó igual, no puede ser, porque entonces *q* estaría tachado, y mayor, tampoco, porque entre *p* y *q* no hay ningún número primo; luego, si no puede tener ningún divisor primo, *q* es primo.

2.° *Todo número N, sin tachar, inferior á q^2, será número primo.*—En efecto, si N no fuese primo, admitiría un divisor primo N', que tendría que ser mayor que *p*, porque sino, N, estaría tachado; luego $N' \geqq q$; pero si esto fuera posible, como según se ve en el cálculo anterior, ya sea $q = N'$ ó $q < N'$, siempre resulta $N'' < q$, y N es divisible por N'', resultaría: que si N'' era primo, como es menor que *q*, sería $\leqq p$, y N debería estar tachado; y si N'' no fuese primo, admitiría un divisor primo, *n*, que con mayor razón sería $\leqq p$, y por ser N múltiplo de *n*, también debería estar tachado.—

Vemos, pues, que de poder admitir N, un divisor primo, $N' > p$, resulta que N debería estar tachado, contra lo que se supone; y como tampoco puede admitirlo igual á *p* ni menor que *p*, porque sino también estaría tachado, según decimos antes; se deduce, que N no puede tener ningún divisor primo; luego, N es primo.—

Corolario.—Sea, 2, 3, 5, ... p, q, la serie de los números primos hasta *q*.—Supongamos que $p^2 < N < q^2$, y que N no es divisible por ninguno de los números primos hasta *p*, inclusive; y vamos á demostrar, que N es primo.—En efecto: si no es N divisible por ninguno de los números primos hasta p, al tachar los múltiplos de dichos números primos, quedará sin tachar, y será un número sin tachar inferior á q^2, que, según el teorema, es primo.

Observación.—Si haciendo uso del corolario anterior, queremos averiguar si un número N, es primo, lo dividiremos por los números primos, 2, 3, 5, 7, ...; y si llegamos á dividirlo por uno cuya segunda potencia sea mayor que él, sin haber sido divisible por ninguno de los anteriores, ya sabemos que dicho número N, es primo.—

Escolio.—Conoceremos que llegamos á dividir el número *N*, por un número primo cuya segunda potencia es mayor que él, cuando el cociente de la división sea menor que el divisor; pues entonces, el dividendo, será menor que el cuadrado del divisor, según se demuestra á continuación.

$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$,, $c < d \left\{ \begin{array}{l} d = c+1. - d^2 = d.(c+1) > D \\ d > c+1. - d^2 > d.(c+1) > D \end{array} \right\}$; puesto que, por ser $(c+1)$ el cociente por exceso, será $d.(c+1) > D$; luego, resulta, que si $c < d$, $d^2 > D$, según queríamos demostrar.

Aplicaciones de los números primos

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Posibilidad de efectuarla.

Teorema. $$\left.\begin{array}{l} N : a = N'. - N = a.\,N' \\ N' : b = N''. - N' = b.\,N'' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} N = a.\,b.\,N''. \text{———} \\ N'' : c = N'''. - N'' = c.\,N'''. - \end{array}\right\} N =$$
$$= a.\,b.\,c.\,N''' \;\ldots\ldots\; N > N' > N'' > N''' > \ldots\ldots > 1. -$$

Estos números N' N'' N'''... son números enteros comprendidos entre N y la unidad; luego, su número es limitado y tiene que tener fin esa serie de divisores de N; pero como no puede tener fin hasta llegar á un cociente primo, es evidente que llegaremos á dicho cociente primo.

Investigación de los factores primos de un número.—Teorema. Es frecuente ver parado á un alumno á quien se le dice que demuestre este teorema para cuando los factores tienen exponentes: p. ej.: $\left.\begin{array}{l} N = a^{2}.\,b^{3}.\,c.\,d.\,f \\ N = a'^{3}.\,b'.\,c'^{2}. - \end{array}\right\}$; y ésta, como otras muchas *pegas*, nacen de no fijarse en lo dicho en el texto, pues bien claramente dice que las letras de los segundos miembros representan factores primos *iguales ó desiguales*. Luego, no hay más que escribir: $\left\{\begin{array}{l} N = a.\,a.\,b.\,b.\,b.\,c.\,d.\,f \\ N = a'.\,a'.\,a'.\,b'.\,c'.\,c' \end{array}\right\}$, y repetir ahora el razonamiento de la Aritmética.

Fracciones

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS

Simplificación de fracciones.—Corolario 1.°—Si se multiplican los dos términos de una fracción irreducible por la serie natural de los números, no cabe duda que las fracciones obtenidas son equivalentes á la propuesta; pues: $\frac{a}{b}=\frac{2\,a}{2\,b}=\frac{3\,a}{3\,b}=\frac{4\,a}{4\,b}=\ldots$; pero hay que demostrar que éstas son *todas sus fracciones equivalentes*; para lo cual basta con recordar el teorema que dice que siendo $\frac{a}{b}$ irreducible, *cualquiera otra fracción que le sea igual*, tendrá sus términos equimúltiplos de a y b; es decir, que serán el resultado de multiplicar a y b por un mismo número; luego tiene que ser una de las así obtenidas.

Corolario 2.°—Sean, $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ dos fracciones irreducibles iguales, y vamos á demostrar que son idénticas. Según el teorema, por ser $\frac{a}{b}$ irreducible, tendrán que ser $\left\{\begin{array}{l} m=a\,p \\ n=b\,p \end{array}\right\}$; pero por ser $\frac{m}{n}$ también irreducible, m y n serán primos entre sí; luego el factor común p de dichos números será la unidad, y resultará: $m=a$ y $n=b$, según queríamos demostrar.

Reducción de fracciones al mínimo denominador común.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A}{B}=\frac{a}{b}\\[4pt] \frac{C}{D}=\frac{c}{d}\\[4pt] \frac{E}{F}=\frac{e}{f}\end{array}\right|\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{a'}{m}\\[4pt] \frac{c}{d}=\frac{c'}{m}\\[4pt] \frac{e}{f}=\frac{e'}{m}\end{array}\left|\begin{array}{l}m=\dot{b}\\[4pt] m=\dot{d}\\[4pt] m=\dot{f}\end{array}\right\}\text{Menor valor de } m = M\,(b,\ d,\ f).\text{—}$$

Si tenemos varias fracciones $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}$, y las reducimos á su más simple expresión; es decir, las hacemos irreducibles, obtendremos las $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$. Claro es, que si ahora suponemos estas fracciones irreducibles reducidas á un común denominador, y llamamos m al denominador común de las nuevas fracciones, iguales á las propuestas, $\frac{a'}{m}, \frac{c'}{m}$ y $\frac{e'}{m}$, como los términos de éstas, tienen que ser equimúltiplos de los de las irreducibles $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, m, tendrá que ser múltiplo de b, d y f; luego el menor valor del denominador común, será, cuando m sea el M (b, d, f). —

Vemos, pues, que aplicando la regla del texto, se obtienen fracciones equivalentes á las propuestas, por multiplicar los dos términos de cada una por un mismo número, y cuyo denominador común, es el *mínimo*, por ser igual al mínimo común múltiplo de los denominadores. —

Escolio.—Por lo que el escolio dice, se ve que si los denominadores de las fracciones son primos entre si dos á dos, el mínimo denominador común, es igual al que se obtiene multiplicando los dos términos de cada fracción por los denominadores de las demás, que es el producto de todos los denominadores; luego, en este caso, no es posible hallar un denominador común menor que el producto de los denominadores; y por eso dice el texto, que, *generalmente es posible*, etc. —

Operaciones con los números fraccionarios

— Adición —

Casos elementales de la adición.

1.° $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$; pues es evidente, que *a* emésimas, más *b* emésimas, más *c* emésimas, es igual á (a + b + c) emésimas.—

Lo mismo diremos en el primer caso de la substracción: $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$.—

Adición de fracciones implícitas

Como las *consecuencias* de la suma de enteros, son aplicables á la de fracciones, para sumar números compuestos de entero y fracción será: $1\frac{2}{3}+4\frac{1}{2}+2\frac{2}{5}=(1+\frac{2}{3})+(4+\frac{1}{2})+(2+\frac{2}{5})=1+\frac{2}{3}+4+\frac{1}{2}+2+\frac{2}{5}=(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5})+(1+4+2)=(\frac{20}{30}+\frac{15}{30}+\frac{12}{30})+7=\frac{47}{30}+7=1\frac{17}{30}+7=8\frac{17}{30}$; según el texto indica.—

— Substracción —

Substracción de fracciones implícitas

Todos los teoremas de substracciones complexas y de suma y resta combinadas, demostrados en enteros, pueden demostrarse para fracciones, ya sea directamente, *del mismo modo que allí se hace*, ya observando en todos ellos, que el resultado obtenido, sumado con el substraendo, nos da el minuendo.

Generalizados, pues, dichos teoremas, lo mismo que el escolio, que dice, *que en una serie de sumas y restas puede reemplazarse cualquier número de términos por el resultado de las operaciones que indican*, que se demostraría aquí de la misma manera que se hace en estos apuntes para números enteros, podemos comprobar la regla del texto para restar números compuestos de entero y fracción; pues será:

$$5\tfrac{2}{7}-2\tfrac{3}{5}=(5+\tfrac{2}{7})-(2+\tfrac{3}{5})=5+\tfrac{2}{7}-2-\tfrac{3}{5}=5-2+\tfrac{2}{7}-\tfrac{3}{5}=(5-2)+(\tfrac{10}{35}-\tfrac{21}{35})=(5-3)+(\tfrac{45}{35}-\tfrac{21}{35})=2+\tfrac{24}{35}=2\tfrac{24}{35}.$$

— Multiplicación —

Definición.—Debe fijarse mucho el alumno en que multiplicar un *número cualquiera* por $\frac{p}{q}$, es, según se indica, *tomar las* $\frac{p}{q}$ *partes de dicho número;* pues de ello ha de hacer frecuentes aplicaciones en razonamientos sucesivos.—

Vamos á ver, como, efectivamente, toda magnitud es igual á la unidad de su especie multiplicada por su medida, y recíprocamente.— En efecto: Si la medida de una magnitud M, con respecto á una cierta unidad *U* de su especie, es n ó $\frac{p}{q}$, quiere decir esto, que *M* contiene n veces á la unidad *U*, ó que es igual á las $\frac{p}{q}$ partes de dicha unidad; y en ambos casos, será $M = U \, . \, n$, ó $M = U \, . \, \frac{p}{q}$; pues el producto, M, es, en la primera, igual á n veces *U*, y en la segunda, á las $\frac{p}{q}$ partes de *U*.—

Recíprocamente: Si $M = U \, . \, n$, ó $M = U \, . \, \frac{p}{q}$, según la definición, M, contendrá n veces á U, ó será igual á las $\frac{p}{q}$ partes de dicha unidad; luego según lo dicho al definir la medida de una magnitud, n ó $\frac{p}{q}$, serán la medida de M, en cada uno de los casos, tomando á *U* por unidad.—

Producto de varios factores

Para demostrar que el orden de los factores no altera el producto, basta observar el cálculo siguiente:

$$\frac{a}{m}\cdot b\cdot\frac{c}{n}\cdot\frac{d}{p}=\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{1}\cdot\frac{c}{n}\cdot\frac{d}{p}=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{m\cdot 1\cdot n\cdot p}\overset{(1)}{=}\frac{a\cdot d\cdot c\cdot b}{m\cdot p\cdot n\cdot 1}=$$
$$\frac{a}{m}\cdot\frac{d}{p}\cdot\frac{c}{n}\cdot\frac{b}{1}=\frac{a}{m}\cdot\frac{d}{p}\cdot\frac{c}{n}\cdot b.—$$

Multiplicación de fracciones implícitas

Para generalizar los corolarios que en enteros hemos deducido del teorema de que el orden de los factores no altera el producto, se razonará de la misma manera que se hizo allí: así p. ej:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^q=\Big(\overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ --}^{p}\Big)\Big(\overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}---}^{q}\Big),$$ y como para multiplicar productos de varios factores, según el corolario que antecede á éste, se forma un producto con todos ellos, será:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^q=\overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}---\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}--}^{p+q}=\left(\frac{a}{b}\right)^{p+q}.$$

Si los dos factores fuesen operaciones indicadas de sumas y restas, se hallarían los productos de la misma manera que en estos apuntes se hace en el *escolio* de la multiplicación de enteros cuando los factores son implícitos; teniendo en cuenta que ya hemos demostrado en el texto los casos de multiplicar una suma ó diferencia por un número entero ó fraccionario.—

Generalizada, pues, la regla para multiplicar dos sumas, se deduce la del texto para multiplicar dos números compuestos de entero y fracción, con solo observar, en el ejemplo correspondiente, que, $6\frac{3}{5}\times 4\frac{2}{7}=(6+\frac{3}{5})\ (4+\frac{2}{7})$, y aplicarle ahora la regla para multiplicar dos sumas. —

(1) Como estos factores son números enteros, podemos invertirlos.

Fracciones de fracción.

Para hallar la fracción de la unidad equivalente á una fracción de fracción ó fracción múltiple; p. ej: las $\frac{p}{q}$ partes de $\frac{a}{b}$, observemos que tomar las $\frac{p}{q}$ partes de un número cualquiera, según lo dicho en la definición de multiplicación, es multiplicar dicho número por $\frac{p}{q}$; luego las $\frac{p}{q}$ de $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{b \cdot q}$.

Si fuesen las $\frac{m}{n}$ de las $\frac{p}{q}$ de $\frac{a}{b}$, diríamos: las $\frac{p}{q}$ de $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot p}{b \cdot q}$, y las $\frac{m}{n}$ de $\frac{p}{q}$ de $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ de $\frac{a \cdot p}{b \cdot q} = \frac{a \cdot p \cdot m}{b \cdot q \cdot n}$; deduciéndose la regla del texto.—

— División —

Casos elementales de divi·ión

2.° Sígase la explicación del texto.

$A : \frac{m}{n} = C$.— $A = C \cdot \frac{m}{n} = \left(C \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot m$; puesto que multiplicar por $\frac{m}{n}$, es tomar *m* veces la enésima parte de C; luego tomando la emésima parte en los dos miembros, $A \cdot \frac{1}{m} = C \cdot \frac{1}{n}$: pero evidentemente, $C = \left(C \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot n$; luego también será, $C = \left(A \cdot \frac{1}{m}\right) \cdot n = A \cdot \frac{n}{m}$, que nos comprueba la regla correspondiente.—

División en forma implícita

Como el texto indica, todos los casos de esta clase de divisiones referentes á productos y potencias, y las reglas para dividir una suma, una diferencia y una serie de sumas y restas por un número, se demuestran, teniendo en cuenta la definición de división dada en fracciones, observando que los cocientes obtenidos, multiplicados por los divisores respectivos, reproducen los dividendos.

Fracciones complexas

Extensión de la notación fraccionaria

Sígase la explicación del texto.

$m : n = \frac{m}{n}$.— $A = 1 + \frac{2}{3}$, y $B = 2 - \frac{3}{5}$. — $A : B = \frac{A}{B} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{3}{5}}$. Definición de fracción complexa.

$\frac{A}{B} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{3} : \frac{7}{5} = \frac{25}{21} = \frac{a}{b}$; que nos hace ver que toda fracción complexa se transforma, como indica el texto, en otra ordinaria equivalente.

Generalidades de ciertas proposiciones

Para generalizar las proposiciones citadas en el texto, sean varias fracciones complexas y las ordinarias equivalentes, respectivas, y tendremos:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}, \frac{C}{D} = \frac{c}{d}, \frac{E}{F} = \frac{e}{f} \text{ y } \frac{M}{N} = \frac{m}{n}.$$

Teorema. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \cdot \frac{M}{N} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{m}{n}$ (1) $= \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d}$ $= \frac{A}{B} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{E}{F} \cdot \frac{C}{D}$.

De la misma manera se demuestran los corolarios que de él se derivan; así p. ej:

Corolario 1.° $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \cdot \frac{M}{N} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right)$ $\cdot \frac{e}{f} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{E}{F}$.

Recíprocamente: $\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot$ $\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{e}{f} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{E}{F}$.

---

(1) Como en fracciones ordinarias ya hemos demostrado que el orden de los factores no altera el producto, podemos cambiar $\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n}$.

Del mismo modo se obtiene:

1.° $\left(\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}\right):\frac{M}{N}=\frac{A}{B}\cdot\left(\frac{C}{D}{}^{(1)}:\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{E}{F}$.— 2.° $\frac{M}{N}:\left(\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}\right)=\frac{M}{N}:\frac{A}{B}:\frac{C}{D}:\frac{E}{F}$.— 3.° $\left(\frac{A}{B}\right)^p:\left(\frac{A}{B}\right)^q=\left(\frac{A}{B}\right)^{p-q}$.— 4.° $\left(\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}\right)\cdot\frac{M}{N}=\frac{A}{B}\cdot\frac{M}{N}\pm\frac{C}{D}\cdot\frac{M}{N}$.— 5.° $\left(\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}\right):\frac{M}{N}=\frac{A}{B}:\frac{M}{N}\pm\frac{C}{D}:\frac{M}{N}$.—

En, $\frac{A}{B}=\frac{1+\frac{2}{3}}{2-\frac{3}{5}}=\frac{25}{21}=\frac{a}{b}$, lo que se diga de $\frac{A}{B}$ puede decirse, según acabamos de ver, de su igual $\frac{a}{b}$; pero no sucede así con los términos de las fracciones; pues $A = I+\frac{2}{3}$, no es igual á $\underline{a} = 25$, ni B es igual á $\overline{b}$; luego es preciso demostrar directamente los teoremas que siguen en el texto, y las reglas de las operaciones elementales.

Adición y substracción.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A}{M}=p\\[1ex]\frac{B}{M}=q\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}A=M.p\\[1ex]B=M.q\end{array}\right\}\begin{array}{l}A\pm B=M.p\pm M.q=M(p\pm q);\ \frac{A\pm B}{M}=\\[1ex]p\pm q=\frac{A}{M}\pm\frac{B}{M}.\end{array}$$

También $\frac{A}{M}\pm\frac{B}{M}=\frac{A\pm B}{M}$, porque $\frac{A\pm B}{M}=(A\pm B):M=A:M\pm B:M=\frac{A}{M}\pm\frac{B}{M}$, según la cita del texto.

---

(1) En fracciones siempre es el número divisor del factor por ser siempre exactos los cocientes.

— Igualdades fraccionarias —

Teorema I.—Corolario 2.°

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$:

1.° Invertir los extremos: $\dfrac{d}{b} = \dfrac{c}{a}$. —

2.° Id. los medios: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. —

3.° Id. las fracciones: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$. —

4.° Multiplicar un extremo y un medio por n: $\dfrac{a\,.\,n}{b} = \dfrac{c\,.\,n}{d}$. —

5.° Dividir un medio y un extremo por n: $\dfrac{a}{b:n} = \dfrac{c}{d:n}$. —

6.° Multiplicar un extremo y dividir el otro por un mismo número n: $\dfrac{a\,.\,n}{b} = \dfrac{c}{d:n}$. —

7.° Lo mismo con los dos medios — $\dfrac{a}{b\,.\,n} = \dfrac{c:n}{d}$

En todas ellas se verifica; $a\,.\,d = b\,.\,c.$

Teorema VI.

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ \frac{a'}{b'} &= \frac{c'}{d'} \end{aligned}\right\} \quad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}\,;\ \frac{a.\,b'}{b.\,a'} = \frac{c.\,d'}{d.\,c'}\text{(1)}\,;\ \frac{(a.\,b') : (a'.\,b')}{(b.\,a') : (a'.\,b')} = \frac{(c.\,d') : (c'.\,d')}{(d.\,c') : (c'.\,d')},\ \text{ó}\ \frac{a : a'}{b : b'} = \frac{c : c'}{d : d'}.$$

(1) La cita que aquí hace el texto, se refiere á fracciones complexas, porque hemos dicho en la definición de igualdad fraccionaria, que las fracciones pueden ser complexas.

— Fracciones decimales. —

Unidades decimales de distintos órdenes:

En enteros, la unidad del orden enésimo, hemos visto que era 10^{n-1}, y en decimales es $\frac{1}{10^n}$.

Representación entera del número decimal:

Por tener las unidades decimales la misma ley de dependencia que las unidades enteras, podemos descomponer los números decimales, como los enteros, en colecciones de unidades de diversos órdenes, de modo que cada una de ellas contenga un número inferior á diez; y generalizado este principio, y teniendo en cuenta los valores *absoluto* y *relativo* de cada cifra, según lo dicho en la numeración escrita, podemos escribir un número decimal *poniendo, unas á continuación de otras, las cifras que expresen las distintas clases de unidades de que se compone, reemplazando por ceros las que falten*; pero siendo preciso indicar en donde comienza la parte decimal, convenimos en separar la parte entera de la decimal con una coma, que se escribirá á la derecha de la cifra de las unidades simples; y si no hubiese parte entera, se reemplazaría por un cero.

En un número decimal con parte entera, *las cifras equidistantes de la cifra de las unidades simples, tienen denominaciones análogas.*—En efecto: en $375\underline{8}'462$, se ve: que las cifras 5 y 4, son, respectivamente, *decenas* y *décimas*; las 7 y 6, *centenas* y *centésimas*; las 3 y 2, *millares* y *milésimas*, etc ; luego, si todo el número lo consideramos como si fuese entero, *la cifra de las unidades simples tendría entonces análoga denominación que la última cifra decimal*; pues, las mismas cifras hay, efectivamente, de las *milésimas* á las *unidades*, que de estas á los *millares*; y por lo tanto, millares serían las unidades representadas por la cifra 8, si el número fuese entero.

Lectura de un número decimal, escrito en forma entera:

Según la regla dada, para leer un número decimal, debemos ante todo averiguar las unidades que representa su última cifra, viendo las que representaría la cifra de las unidades simples si el número fuese entero; pues ya sabemos será denominación *análoga á la que le corresponda á la última decimal:* así p. ej.: en 34'07045 y en 0'036081, las cifras 4 y 0 de las unidades, serían, respectivamente, *centenas de millar* y *millones;* luego, las últimas decimales, 5 y 1, serán *cien milésimas* y *millonésimas;* y los números l s leeremos, diciendo: *treinta y cuatro enteros, siete mil cuarenta y cinco cien milésimas, y treinta y seis mil ochenta y una millonésimas.*—

Escritura, en forma entera, de un número decimal enunciado.

Para escribir, p. ej., 17 enteros, 3045 *míllonésimas*, escribiremos su parte entera, 17, y luego la parte decimal, 3045, como si fuese entera, interponindo, entre la coma y la primera cifra decimal significativa, tantos ceros como sean necesarios para que *la cifra de las unidades simples tenga análoga denominación á la del último orden decimal, si todo el número fuese entero;* luego, en este caso, como son *millonésimas* las últimas decimales, la cifra de las unidades simples tendría que ser *millones;* es decir, ocupar el *séptimo lugar*; para lo cual tienen que seguirle *seis cifras;* y como la parte decimal, 3045, sólo tiene cuatro, debemos anteponerle dos ceros, y será: 17'003045.—

Si fuese, por ejemplo: *10 cien millonésimas*, escribiríamos la parte entera, *0*, y luego la decimal, *10*, anteponiéndole *seis ceros*, y sería: 0'00000010; pues las *0* unidades simples deben ser *centenas de millón*, ó sea unidades de *noveno orden;* lo cual exige le sigan *ocho cifras;* y como la parte decimal, *10*, sólo tiene *dos*, precisa se le antepongan *seis ceros.*

— Adición —

Procedimiento aditivo.—Se puede, desde luego, según indica el texto, operar con los números decimales representándoles en forma fraccionaria y aplicándole las mismas reglas dadas para las fracciones ordinarias; pero pueden también considerarse como enteros, representándolos en forma entera, y entonces son más sencillas las reglas operativas.

Es evidente, que se obtendrá la suma de varios números decimales, *si á las unidades de cada orden de uno de ellos les agregamos sucesivamente las unidades de igual orden contenidas en cada uno de los demás;* teniendo en cuenta, lo mismo que en enteros, que si alguna suma parcial excede á nueve, formando unidades del orden inmediato superior, habrán de agregarse éstos, á la suma de las unidades correspondientes.— Queda, pues, reducida la cuestión, para poder aplicarle la regla del caso general de la suma de enteros, á conseguir la correspondencia de las unidades de igual orden; y esto se logra, evidentemente, colocando los sumandos como el texto indica.—

— Substracción —

Es evidente, también, *que se obtendrá la diferencia de dos números decimales, escritos en forma entera, restando, de las unidades de cada orden del minuendo, las correspondientes del substraendo;* aumentando, lo mismo que en enteros, en diez unidades de su orden, las cifras del minuendo menores que las correspondientes del substraendo; y en una unidad del orden inmediato superior, la cifra siguiente del substraendo.—

Para lograr la correspondencia de las unidades del mismo orden, con objeto de poder aplicarle la regla del caso general de la substracción de enteros, basta, en efecto, colocar el minuendo y substraendo como indica el texto.—

— Multiplicación —

2.° Caso. Para demostrar que al quedar el multiplicador multiplicado por 100, se obtiene un producto 100 veces mayor que el buscado, cita el texto el párrafo de «*Multiplicación de fracciones implícitas*», porque es allí donde se hacen extensivos á las fracciones los corolarios deducidos del teorema de que el orden de los factores no altera el producto; y como los números decimales son fracciones, y entre los corolarios mencionados hay uno que dice: «*para multiplicar un producto por un número, basta multiplicar cualquiera de los factores por dicho número*», resulta probado, efectivamente, lo que se pretendía. –

El caso de multiplicar un entero por un decimal, por ejemplo 8239 × 7'65, se demuestra directamente, observando que será el producto de 8239 × 665, dividido después por 100.—

— División —

2.° Caso. Para demostrar que el cociente no se altera multiplicando el dividendo y el divisor por un mismo número, cita la Aritmética el párrafo de «*Principios fundamentales*» de fracciones complexas, porque los dos términos de la division, ó uno de ellos por lo menos, son fracciones decimales, y el cociente resulta, por lo tanto, una fracción complexa; pues,

$$3'14159 : 9'86 = \frac{314159}{100000} : \frac{986}{100} = \frac{\frac{314159}{100000}}{\frac{986}{100}}$$; y es en dicho párrafo

donde se demuestra que «*una fracción complexa no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número*».

Reducción de fracciones

— Reducción de fracción ordinaria á decimal —

Procedimiento.—Teorema IV. (Véase la pizarra).

$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^p . 5^q}$.—Puede ser: p > q; p = q; ó p < q; en el 2.° caso no habría que multiplicar por factor alguno, y en el 3.°, sería preciso multiplicar por 2^{q-p} los dos términos de la fracción. Si en *b* no entrase uno de los factores 2 ó 5, bastaría suponer que su exponente respectivo *p* ó *q*, era cero, y estaríamos en los casos de p < q ó p > q, según fuese p = o ó q = o, siendo entonces preciso multiplicar por 2^q ó 5^p, respectivamente.—

Si se multiplica por 5^{p-q} es porque *el exponente de 2 es mayor que el de 5;* y entonces, aunque el de 5 sea *0*, es decir que no entre éste factor en *b*, como *p* no podrá ser *0*, el factor 2 entrará en *b;* y por ser $\frac{a}{b}$ irreducible, *a* no contendrá el factor 2, y como 5^{p-q} tampoco lo contiene el producto a. 5^{p-q} no puede terminar en *0.*—

Si se multiplicase por 2^{q-p} sería 5 el factor que no entraría en *a*, por ser ahora q > p; luego, a. 2^{q-p} tampoco terminaría en *0.*—

Es condición precisa que el numerador no termine en *0;* pues si $\frac{a.\ 5^{p-q}}{10^p} = \frac{m\,n\,r\,s\,t}{10^7}$, sería igual á 0 ' 0 0 m n r s t, y esta fracción decimal tiene, efectivamente, *siete* = *p*, cifras decimales; mientras que si fuese $\frac{a.\ 5^{p-q}}{10^p} = \frac{m\,n\,r\,s\,t\,o}{10^7} =$ 0 ' 0 m n r s t o = 0 ' 0 m n r s t, no tendría las siete=p, cifras decimales, porque se podría prescindir de los ceros en que termina, por no alterar su valor.—

Todo lo dicho aquí respecto á los factores *2* y *5* y sus exponentes *p* y *q* es igualmente aplicable al *teorema IV de fracciones* *periódicas decimales*, cuyo numerador $a \,.\, 5^{p-q}$ (ó $a \,.\, 2^{q-p}$, si fuese q $>$ p), no puede terminar en *0*, por las mismas razones expuestas en este teorema.—

Fracciones decimales periódicas.

Teorema .III. Para que el alumno comprenda la *notación* empleada en este teorema, la aplicamos al siguiente ejemplo: $\frac{a}{b} = \frac{11401}{333} = 34'\overline{237}$, en el cual, hallando el *cociente entero* de a: b, sería: $11401 = 333 \times 34 + 79$, resultando, $E = 34$; y hallando ahora el *cociente entero* de $a.\,10^n = 11401 \times 10^3$, por $b = 333$, tendríamos: $11401 \times 10^3 = 333 \times 34237 + 79$, siendo $P = 34237$, y el mismo resto, 79, que en a: b; y por último, $a.\,(10^n - 1) = b\,(P - E)$, sería igual á $11401\,(10^3 - 1) = 333.\,(34237 - 34)$; viéndose claramente que, para que $34237 - 34 = P - E$, no termine en *0*, es preciso que la última cifra, 4, de la parte entera, no sea igual á la última, 7, del período, según queríamos demostrar.

Teorema IV. (Véase lo que sobre este teorema decimos en el teorema IV anterior).

Es preciso fundarse en que la fracción periódica pura á que da lugar la fracción $\frac{a \,.\, 5^{p-q}}{b'}$ *no tiene iguales la última cifra de la parte entera y la última del período*, porque si así no fuese, al dividir por 10^p no quedarían p cifras no periódicas.—Supongamos, en efecto, que fuese $\frac{a.\, 5^{p-q}}{b'} = 10254\underline{3}'8\overline{94\underline{3}}$, al multiplicar por $\frac{1}{10^p}$, que equivale á dividir por 10^p ó sea á correr la coma á la izquierda *p* lugares, suponiendo fuese p=4, sería, $10'254\overline{389}$, y no quedarían *p* cifras no periódicas; mientras que, si las últimas cifras de la parte entera y del período, no fuesen iguales, aunque lo fuesen las demás, quedarían *p* cifras no periódicas, según se ve en el siguiente ejemplo: $\frac{a.\ 5^{p-q}}{b'} = 3456'\overline{3458}$, en el cual, suponiendo $p = 5$, resultaría: $0'03456\overline{3458}$, con *cinco* cifras no periódicas.—

— Reducción de fracción decimal á ord naria —

Procedimiento.—Teorema II:

Se deduce de este teorema, que no puede haber ninguna fracción periódica, cuyo período sea *9;* pues sería:

1.° $0'\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$.—

2.° $14'\overline{9} = 14 + 0'\overline{9} = 14 + 1 = 15$.—

3.° $7'23\overline{9} = 7'23 + 0'00\overline{9} = 7'32 + \frac{9}{900} = 7'23 + 0'01 = 7'24$.-

---

PIZARRA

del teorema IV de la reducción de fracción ordinaria á decimal.

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^p.5^q}\left\{\begin{array}{l} p>q;\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{a\ .\ 5^{p-q}}{2^p\cdot 5^q\, 5^{p-q}}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{2^p\cdot 5^p}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{(2.\,5)^p}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{10^p}.— \\[2ex] p=q;\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{2^p\cdot 5^p}=\dfrac{a}{10^p}. \\[2ex] p<q;\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{a\ .\ 2^{q-p}}{2^{q-p}\,2^p\cdot 5^q}=\dfrac{a\,.\,2^{q-p}}{2^q\cdot 5^q}=\dfrac{a\,.\,2^{q-p}}{(2.\,5)^q}=\dfrac{a\,.\,2^{q-p}}{10^q}. \end{array}\right\}$$

$p=o;\ 2^{q-p}=2^q.$,, $q=o;\ 5^{p-q}=5^p.$—

Pizarra del teorema IV de fracciones decimales periódicas.

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b'.\,2^p\cdot 5^q}\left\{\begin{array}{l} p>q;\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{b'.\,2^p\cdot 5^q\cdot 5^{p-q}}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{b'.\,2^p\cdot 5^p}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{b'.\,10^p}=\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{b'}\cdot\dfrac{1}{10^p}. \\[2ex] p=q;\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b'.\,2^p\cdot 5^p}=\dfrac{a}{b'.\,10^p}=\dfrac{a}{b'}\cdot\dfrac{1}{10^p}.— \\[2ex] p<q;\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b'.\,2^p\cdot 5^q}=\dfrac{a\,.\,2^{q-p}}{b'.\,2^{q-p}\,2^p\cdot 5^q}=\dfrac{a\,.\,2^{q-p}}{b'.\,2^q\,5^q}=\dfrac{a\,.\,2^{q-p}}{b'.\,10^q}= \\[2ex] \qquad =\dfrac{a\ \ 2^{q-p}}{b'}\cdot\dfrac{1}{10^q}. \end{array}\right.$$

$p=o;\ 2^{q-p}=2^q.$,, $q=o;\ 5^{p-q}=5^p.$—

$\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{b'}=10254\underline{3}'\overline{8943}$. — $\dfrac{1}{10^p}=\dfrac{1}{10^4}$. — $10'254\overline{389}$. —

$\dfrac{a\,.\,5^{p-q}}{b'}=3456'\overline{3458}$. — $\dfrac{1}{10^p}=\dfrac{1}{10^5}$ — $0'03456\overline{3458}$. —

Potencias

— Cuadrado de un número —

Teoremas referentes al cuadrado.—Teorema I.

Teniendo en cuenta lo dicho en estos apuntes, en el escolio de la multiplicación de enteros, cuando los factores son implícitos, será: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=(a-b)a-(a-b)b=$ $=a^2-ab-(ab-b^2)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$.—

— Cubo de un número —

Teoremas referentes al cubo.—Teorema I.—

Recordando el mismo escolio mencionado anteriormente, será: $(a\ \ b)^3=(a-b)^2.(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=(a^2-2ab+b^2)$ $a-(a^2-2ab+b^2)b=a^3-2a^2b+ab^2-(a^2b-2ab^2+b^3)=$ $=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2\ \ b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.—

— Raiz cuadrada —

Extracción de la raiz cuadrada de un número entero ó fraccionario, en menos de una unidad.

Raiz cuadrada de un número entero.—Teorema I.

$\sqrt{N} \geqq d.10$; será igual, cuando N sea un número exacto de centenas, cuadrado perfecto; como p. ej., $\sqrt{6400}=8.10$; en todos los demás casos, será $\sqrt{N} > d.10$; y claro es que siendo *d* las decenas de la $\sqrt{N}$, en cuanto tomemos una decena más, será $\sqrt{N} < (d+1).10$.—

$N \geqq d^2.100$; como en $d^2.100$, hay d^2 centenas, no podrán estar contenidas más que en las centenas, *C*, del número N;

luego, $C \gtreqless d^2$.—En $(d+1)^2 . 100$, hay $(d+1)^2$ centenas, y todo número, N, menor que $(d+1)^2$ centenas, tiene que tener, por lo menos, una centena menos; pues si tuviese las mismas ó más centenas, no sería menor; luego, $C < (d+1)^2$.—

Extracción de la raiz cuadrada de un número, entero ó fraccionario, con una aproximación dada.

Procedimiento general.—Teorema.

Vamos á calcular una raiz con un error menor que $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$, en que $q = \frac{b}{a}$.—

Hablar $\sqrt{\frac{39}{5}}$, con un error menor que $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$; luego, $q = \frac{3}{2}$.

$$\sqrt{N.q^2} = \sqrt{\frac{39}{5} \cdot \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{351}{20}} = \sqrt{17\frac{11}{20}}. - 4 < \sqrt{17} < 5 \text{,,}$$

$$\frac{x}{q} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}; \quad \frac{x+1}{q} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}; \; \frac{8}{3} < \sqrt{\frac{39}{5}} < \frac{10}{3}. —$$

$$\text{Error} < \frac{2}{3}.$$

Números inconmensurables

— Teoría de los límites —

Definición y sus consecuencias. - Se deduce de la definición: 1.° que A, tiene que ser fija, es decir, constante; 2.° que X, tiene que aproximarse á A, tanto como se quiera, y 3.° que X, no puede llegar á ser nunca igual á A.

Para demostrar la deducción que el texto enuncia, supongamos: (Véase la pizarra): 1.° que sea X una magnitud que crece constantemente, sin poder pasar por los estados de magnitud numérica, A, B,..., *siendo A, el número menor al cual no puede llegar X;* y vamos á ver que A es límite superior de X.—

En efecto: 1.° A, es constante, por ser un número. 2.° la diferencia A—X, puede llegar á ser menor que δ, siendo δ tan pequeña como se quiera; pues si así no fuese, tendría que ser *siempre* $A-X \geqq \delta$; y suponiendo β menor que δ, sería $A-X > \beta$; deduciéndose entonces, que X sería *siempre menor* que $A-\beta$; es decir, que habría un número $A-\beta < A$, y mayor que X; lo cual no es posible; pues hemos supuesto que era A el menor valor numérico al cual X no podía llegar. - Luego, $A-X < \delta$.— 3.° $A-X \neq 0$ *(no puede ser igual á cero)*; porque, por hipótesis, X, no puede ser igual á A.—Vemos, pues, que se cumplen las tres condiciones exigidas en la definición; luego lim. $X = A$, según queríamos demostrar.—

Cuando X va decreciendo, ó sea $X_1 > X_2 > X_3 > \dots$ se demuestra lo mismo, teniendo en cuenta que no puede entonces, haber un número $A+\beta > A$, que sea menor que X; pues, por hipótesis, es A el mayor valor numérico que X no puede tomar.

Teorema I.—Se ve en la pizarra, que de suponer que $A \neq B$ *(no es igual á B)*, resultaría $A < B$ ó $A > B$, lo cual es imposible; pues allí se demuestra que $A \not< B$, ni tampoco mayor que B; luego $A = B$.

Teorema III.—Ya sean los variables decrecientes, crecientes, ó unos decrecientes y otros crecientes, se ve claramente en la pizarra, que la cantidad que hay que sumar ó restar de $A + B + C + - - -$, es siempre menor que $n. \lambda$; luego su límite es siempre *cero*.

En el *escolio*, se ve que tiene que ser finito el número de sumandos; pues si hay p, iguales á $\frac{a}{n}$ y se hace á n suficientemente grande, permaneciendo constante el número, p, de sumandos, es evidente que la suma llegará á ser menor que δ, siendo δ tan pequeña como se quiera; pero si hay n sumandos, entonces, aunque cada uno de ellos tienda hacia *cero*, por hacer á n infinitamente grande, su suma es siempre igual á a, porque su número, que es siempre n, se hace también infinitamente grande.

En el *teorema IV*, es también preciso que sea finito el número de factores; pues, de lo contrario, el número de sumandos $A. \beta$, $B. \alpha$, $\alpha. \beta$, etc , sería infinito, y ya no podríamos deducir que el límite de su suma fuese cero, aunque cada uno de ellos tenga cero por límite.

Pizarra de la teoría de los límites

Definición. $X_{,,}$ $A_{,,}$ $\left\{\begin{array}{cc} A & X \\ \text{ó} & \\ X & A \end{array}\right\} < \delta.$ $\left\{\begin{array}{cc} A & X \\ \text{ó} & \\ X & A \end{array}\right\} \ddagger O.$

lim. de $X = A$.

Deducciones.

1.ª $X_1 < X_2 < X_3 < \ldots\ldots\ldots < A < B < \ldots\ldots\ldots$ $\left\{\begin{array}{l} A, \text{ constante.} \\ A - X < \delta; A \quad X \geqq \delta. \\ \beta < \delta; A - X > \beta; X < \\ A - \beta. \text{ — Imposible.} \\ A - X \ddagger O \text{ porque } X \ddagger A. \end{array}\right\}$ $A =$ lim. X.

2.ª $X_1 > X_2 > X_3 > \ldots\ldots\ldots > A > B > \ldots\ldots\ldots$ $\left\{\begin{array}{l} A, \text{ constante.} \\ X - A < \delta; X - A \geqq \delta_{,,} \\ \beta < \delta; X - A > \beta_{,,} \\ X > A + \beta. \text{ Imposible.} \\ X - A \ddagger O, \text{ porque } X \ddagger A. \end{array}\right\}$ $A =$ lim. X.

$X > A_{,,}$ $X = A + \alpha_{,,}$ $X < A$; $X = A - \alpha$. — $X = A \pm \alpha$ —

Ejemplo notable de límite.—(Una nota dice por qué es notable.)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} < 1. - \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+m}{b+m} < 1. \;,,\; 1 - \dfrac{a+m}{b+m} \\ = \dfrac{b+m-a \quad m}{b+m} = \dfrac{b-a}{b+m} \\ \dfrac{a}{b} > 1. - \dfrac{a}{b} > \dfrac{a+m}{b+m} > 1. \;,,\; \dfrac{a+m}{b+m} \qquad 1 = \\ \dfrac{a+m-b \quad m}{b+m} = \dfrac{a-b}{b+m} \end{array}\right|$$

Nota.

$$\frac{a}{n} < \delta - a < n \;\; \delta - n > \frac{a}{\delta}. -$$

Proposiciones relativas á los límites.

Teorema I. $\left.\begin{array}{l} A = \text{lím. } X \\ B = \text{lím. } Y \end{array}\right\} A \ddagger B.$

$$\left.\begin{array}{l} A < B.\ B - A > \delta; A < B - \delta; A < B \quad \delta < B < B + \delta; A \nless B. \\ A > B; A - B > \delta; A > B + \delta; B - \delta < B < B + \delta < A; A \ngtr B. \end{array}\right\} A = B.$$

Teorema II. $X_{,,}$ $A_{,,}$ $B_{,,}$ $Y_{,,}$ $X - Y > A - B$; $A - B = O$; $A = B$.—

Teorema III.

$$\left\{\begin{array}{l} X > A \\ Y > B \\ Z > C \\ - - - \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X = A + \alpha \\ Y = B + \beta \\ Z = C + \Upsilon \\ - \; - \; — \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X+Y+Z+ \ldots\ldots = \\ (A+B+C+ \ldots\ldots)+ \\ (\alpha+\beta+\Upsilon+\ldots\ldots).- \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X < A \\ Y < B \\ Z < C \\ - \; — \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X = A - \alpha \\ Y = B - \beta \\ Z = C \quad \Upsilon \\ - \; - \; — \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X+Y+Z+ \ldots\ldots = \\ (A+B+C+ \ldots\ldots)- \\ (\alpha+\beta+\Upsilon+\ldots\ldots).- \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X > A \\ Y < B \\ Z > C \\ - \; — \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X = A + \alpha \\ Y = B - \beta \\ Z = C + \Upsilon \\ - \; - \; — \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X+Y+Z+ \ldots\ldots = \\ (A+B+C+ \ldots\ldots)+ \\ (\alpha-\beta+\Upsilon-\ldots\ldots)- \end{array}\right.$$

$\alpha - \beta + \Upsilon - \ldots\ldots < \alpha + \beta + \Upsilon + \ldots\ldots < n.\lambda.$

lím. $(X + Y + Z + - -) = A + B + C + + - - =$ lím. $X +$ lím. $Y +$ lím. $Z + \ldots$

Preciso que sea n finito.

Escolio. $\overbrace{\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+ \; - \; -}^{p} < \delta$, si n se hace suficientemente grande.

$\overbrace{\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+\frac{a}{n}+ \; - - - - -}^{n} = a$, aunque n se haga infinitamente grande.

Corolario.—$X \quad Y = Z$. $X = Y + Z$,, lím. $X =$ lím. $Y +$ lím. Z.— lím. $Z =$ lím. X - lím. Y.

Teorema IV.

$$\left\{\begin{array}{l} X > A \\ Y > B \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X = A + \alpha \\ Y = B + \beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X.\,Y = A.\,B + B\,\alpha + \\ A.\,\beta + \alpha.\,\beta. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X < A \\ Y < B \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X = A - \alpha \\ Y = B - \beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X.\,Y = (A - \alpha)(B - \beta) = \\ (A - \alpha)B - (A - \alpha)\beta = \\ A.\,B - B\alpha \quad (A\beta - \alpha.\,\beta) = \\ A.\,B - B\alpha - A\beta + \alpha.\,\beta. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X > A \\ Y < B \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X = A + \alpha \\ Y = B \quad \beta \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} X.\,Y = (A + \alpha)(B \quad \beta) = \\ (A + \alpha)B \quad (A + \alpha)\beta = \\ A.\,B + \alpha B - (A\beta + \alpha.\,\beta) = \\ A.\,B + \alpha B - A\beta - \alpha.\,\beta. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{lím.}\,(B.\,\alpha) = o \\ \text{lím.}\,(A.\,\beta) = o \\ \text{lím.}\,(\alpha \quad \beta = o) \end{array}\right\}$$

Luego, lím. $(X.\,Y) = A.\,B =$ lím. $X.$ lím. Y.—

Supongamos, que, lím. (X. Y. .... Z) = lím. X. lím. Y. .... lím. Z, y será: lím. (X. Y. .... Z. V)= lím. (X. Y. .... Z). lím. V = lím. X. lím. Y. .... lím. Z. lím. V.

Corolario 1.° Lím. X^m= lím. (X. X. X. .... X) = lím. X. lím. X. .... lím. X = (lím. $X)^m$.

Corolario 2.° $\frac{X}{Y} = Z. - X = Y.Z$; lím. X = lím. Y. lím. Z; lím. $Z = \frac{\text{lím. } X}{\text{lím. } Y}$.— *Nota.*

Corolario 3.° $\sqrt{X} = Y$; $Y^2 = X$; lím. Y^2 = (lím. $Y)^2$ = lím. X; lím. $Y = \sqrt{\text{lím. } X}$.

Escolio.

Operaciones con los números inconmensurables

(SÍGASE LA PIZARRA)

Medida de la magnitud inconmensurable.

Designemos por A una magnitud inconmensurable, y por U, una cierta unidad de su especie; dividamos esta unidad U, en *n* partes iguales, y supongamos que A contiene *m* de éstas partes, sin llegar á contener *m + 1:* es claro que, entonces, $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ (números conmensurables), expresarán las medidas, con respecto á la misma unidad U, de dos magnitudes conmensurables, tales como, $P=\frac{m}{n}U$ y $Q=\frac{m+1}{n}U$, que serán, $P < A < Q$, por ser sus medidas, referidas á la misma unidad, menor y mayor, respectivamente, que la medida de A; deduciéndose, que las diferencias A-P y Q-A, son menores que Q-P, (por tener ésta mayor minuendo que la primera, y menor substraendo que la segunda), y menores, por lo tanto que $\frac{U}{n}$, puesto que Q y P se diferencian en *una enésima parte de la unidad U.*

Dividamos, ahora, U, en *n'* partes iguales, siendo $n' > n$, y *suficientemente grande* para que $\frac{U}{n'}$ sea menor que las dos diferencias A–P y Q–A, (cosa siempre posible haciendo *n'* tan grande como sea preciso), y supongamos que A contiene *m'* de estas partes sin llegar á contener $m' + 1$; resultará, como antes, que $\frac{m'}{n'}$ y $\frac{m'+1}{n'}$ serán las medidas de dos magnitudes conmensurables P' y Q', tales que $P' < A < Q'$; deduciéndose también, por ser $\frac{U}{n'} < \left\{\begin{matrix}A\text{-}P\\ \text{y}\\ Q\text{-}A\end{matrix}\right\}$, que $A\text{-}P' < A\text{-}P$, ó $P < P'$, y $Q'\text{-}A < Q\text{-}A$, ó $Q' < Q$. — Luego, $P < P'$ — — — $< A <$ — — — $<$

$Q' < Q$, y como en el mismo orden estarán sus medidas, puesto que *para la misma unidad*, á mayor magnitud, mayor medida, será también, $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < ---- < \frac{m'+1}{n'} < \frac{m+1}{n}$. —

Si dividimos á U en n'' partes iguales, siendo $n'' > n'$ y *suficientemente grande* para que $\frac{U}{n''}$ sea menor que las diferencias $A - P'$ y $Q' - A$, obtendremos, de igual modo que anteriormente, otras dos magnitudes P'' y Q'', que serán, $P' < P''$ y $Q'' < Q'$; luego, continuando así, obtendríamos dos series de magnitudes, que colocadas por orden de magnitud creciente, y lo mismo sus medidas, tendríamos:

$$P < P' < P'' < ---- < A < ---- < Q'' < Q' < Q.$$

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \frac{m''}{n''} < -------- < \frac{m''+1}{n''} < \frac{m'+1}{n'} < \frac{m+1}{n}$$

Ahora bien; A, es constante, por ser una magnitud fija y determinada; la diferencia entre A y la variable creciente P, puede ser tan pequeña como se quiera, por ser menor que $\frac{U}{n}$; según hemos demostrado al principio; y, por último, esta diferencia no puede ser nunca *cero*, porque los valores de P, serán siempre menores que el de A; luego, A es el límite de los valores $P < P' < P'' < .....$ que la variable P puede tomar.—Por análogas consideraciones, se deduce que es, también, A límite de los valores $Q > Q' > Q'' > ...$ que puede tomar la variable decreciente Q: *es, pues, A, límite común de esas magnitudes crecientes y decrecientes.* —

Los números $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \frac{m''}{n''} < ....$, van creciendo; pero nunca podrán tomar los valores por exceso, $...... < \frac{m''+1}{n''} < \frac{m'+1}{n'} < \frac{m+1}{n}$; luego tienen necesariamente un límite superior x.—Por igual motivo, los números $\frac{m+1}{n} > \frac{m'+1}{n'} > \frac{m''+1}{n''} > \ldots\ldots$, que no pueden tomar, no obstante su decrecimiento, los valores por defecto .... $\frac{m''}{n''} > \frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$, tendrán un límite inferior y; pero estos dos límites serán dos constantes comprendidas entre dos variables de la forma $\frac{m+1}{n}$ y $\frac{m}{n}$, cuya diferencia, $\frac{1}{n}$, puede ser tan pequeña como se quiera; luego $x = y$; y ese límite común, es el que se toma por medida de A, resultando la definición del texto.

No creemos necesaria la demostración que algunos autores hacen para probar que, cualquiera que sea el procedimiento seguido para hallar la medida de A, mientras la unidad U sea la misma, se obtiene siempre igual medida; pues, es una cosa fácilmente comprensible á todos los alumnos, que *siendo constantes la magnitud conmensurable ó inconmensurable, y la unidad, constante será su medida*, cualquiera que sea la parte alícuota de la unidad que se utilice.

Vamos, ahora, á probar, que el número inconmensurable que procede de una raiz inexacta, *si lo consideramos como medida de una magnitud inconmensurable*, es, como antes decimos, el límite común de dos series de números que miden magnitudes conmensurables, de las que dicha magnitud inconmensurable es también límite.

Sea $\sqrt{N} = E'3094$ .... — Tomando valores aproximados por defecto y por exceso de la $\sqrt{N}$, resulta: 1.°, que los valores por defecto forman *una serie creciente;* pues aunque por cada *cero* que haya en la raiz, habrá dos valores iguales, según se ve en la pizarra, como todas las demás cifras de la raiz, á partir de esa no pueden ser *ceros*, pues entonces sería esta exacta, necesariamente tienen que ir aumentando; 2.°, que los valores por exceso forman otra *serie decreciente;* pues, aunque se ve que por cada cifra *nueve* de la raiz, hay dos valores iguales, como tampoco pueden ser *nueves* todas las cifras de la raiz, porque ésta sería exacta, (1) tienen forzosamente que ir disminuyendo.—

Consideremos ahora á todos esos valores, por defecto y por exceso, que son números conmensurables, como medidas, con respecto á una misma unidad U, de las magnitudes conmensurables, A_1, A_2, A_3, A_4, — — — y A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 — — — (2) y llamemos X á la magnitud inconmensurable, cuya medida, con relación á la misma unidad U, *suponemos es el número inconmensurable* $\sqrt{N}$.—Por el cálculo de la pizarra, se ve en efecto, que ese número inconmensurable procedente de la $\sqrt{N}$, y que consideramos como medida de X, *es el límite común de dos series de números que miden magnitudes conmensurables, de las que, X, es también límite*, según nos proponíamos demostrar.

NOTAS:

1.ª En la pizarra representamos por V_d y V_e, respectivamente, dos valores *correspondientes* por defecto y por exceso, cuya diferencia es, evidentemente de la forma $\frac{1}{10^n}$ —

2.ª Las magnitudes $A_1 = A_2 < A_3 < A_4 <$ — — —, las representamos en general por A, y las $A'_1 > A'_2 = A'_3 > A'_4 >$ — — —, por A'.—La diferencia entre los números que miden dos magnitudes *correspondientes*, una mayor y otra menor que X, es $\frac{1}{10^n}$; luego, la diferencia entre las magnitudes mencionadas, será $\frac{U}{10^n}$.—

---

(1) Por ser periódica la fracción decimal.

(2) Cualquiera de estas magnitudes, será igual á la unidad U, multiplicada por su medida.—

Operaciones con los números inconmensurables

Pizarra de la medida de la magnitud inconmensurable.

$$\left.\begin{array}{l} A, \\ U,, \\ n,, \end{array}\right\} \left\{\frac{m}{n} \text{ y } \frac{m+1}{n}\right\} \left\{\begin{array}{l} P=U.\,\frac{m}{n} \\ Q=U.\,\frac{m+1}{n} \end{array}\right\} P < A < Q,, \left\{\begin{array}{c} A-P \\ \text{y} \\ Q-A \end{array}\right\} < Q-P=\frac{U}{n}. \text{—}$$

$$n' > n,, \frac{U}{n'} < \left\{\begin{array}{c} A-P \\ \text{y} \\ Q-A \end{array}\right\} \left\{\frac{m'}{n'} \text{ y } \frac{m'+1}{n'}\right\} \left\{\begin{array}{l} P' = U.\frac{m'}{n'} \\ Q' = U.\frac{m'+1}{n'} \end{array}\right\} P' < A < Q'. \text{—}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A-P' < Q'-P' = \frac{U}{n'} < A-P,,\ P < P',, \\ Q'-A < Q'-P' = \frac{U}{n'} < Q \quad A,,\ Q' < Q,. \end{array}\right\}$$

$$P < P' < --- < A < --- < Q' < Q.$$

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < ------- < \frac{m'+1}{n'} < \frac{m+1}{n}.$$

$$n'' > n',, \frac{U}{n''} < \left\{\begin{array}{c} A-P' \\ \text{y} \\ Q'-A \end{array}\right\} \left\{\frac{m''}{n''} \text{ y } \frac{m''+1}{n''}\right\} \left\{\begin{array}{l} P'' = U\,\frac{m''}{n''} \\ Q'' = U.\frac{m''+1}{n''} \end{array}\right\} P'' < A < Q''.$$

$$\left\{\begin{array}{l} A \quad P'' < Q''-P'' = \frac{U}{n''} < A-P',,\ P' < P'' \\ Q''-A < Q''-P'' = \frac{U}{n''} < Q'-A,,\ Q'' < Q' \end{array}\right\}$$

$$P < P' < P'' < --- < A < --- < Q'' < Q' < Q.$$

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \frac{m''}{n''} < ------ < \frac{m''+1}{n''} < \frac{m'+1}{n'} < \frac{m+1}{n}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A,\ \text{constante.}\\ A-P<Q-P=\frac{U}{n}.\\ A-P\neq^{(1)}0,\ \text{porque}\ P<A.\end{array}\right\}\begin{array}{c}A,\ \text{lí-}\\ \text{mite}\\ \text{de } P.\end{array}\left\{\begin{array}{l} A,\ \text{constante.}\\ Q-A<Q-P=\frac{U}{n}.\\ Q-A\neq 0,\ \text{porque}\ Q>A.\end{array}\right\}\begin{array}{c}A,\ \text{lí-}\\ \text{mite}\\ \text{de } Q.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m}{n}<\frac{m'}{n'}<\frac{m''}{n''}<---<x\\ \frac{m+1}{n}>\frac{m'+1}{n'}>\frac{m''+1}{n''}>---->y\end{array}\right\}\frac{m+1}{n}-\frac{m}{n}=\frac{1}{n},,\ x=y.—$$

Medida de $A = x =$ límite común, etc., etc.

$$\sqrt{N}=E'3094------,,$$

$$\left\{\begin{array}{l}E'3=E'30<E'309<E'3094<--<V_d<--<\sqrt{N}\\ \sqrt{N}<--<V_e<--<E'3095<E'310=E'31<E'4.\end{array}\right\}$$

$$A_1=A_2<A_3<A_4<--<X<--<A'_4<A'_3=A'_2<A'_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{N},\ \text{constante.}\\ \sqrt{N}-V_d<V_e-V_d=\frac{1}{10^n},,\\ \sqrt{N}-V_d\neq 0,\ \text{porque}\ V_d<\sqrt{N}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\sqrt{N},\\ \text{lím.}\\ \text{valores}\\ \text{por de-}\\ \text{fecto.}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{N},\ \text{constante.}\\ V_e-\sqrt{N}<V_e-V_d=\frac{1}{10^n}\\ V_e-\sqrt{N}\neq 0,\ \text{porque}\ V_e>\sqrt{N}\end{array}\right\}$$

luego $\sqrt{N}$, es también lím. de los valores por exceso.

$$\left.\begin{array}{l}X,\ \text{constante.}\\ X-A<A'-A=\frac{U}{10^n}.\\ X-A\neq 0,\ \text{porque}\ A<X.\end{array}\right\}\begin{array}{c}X\ \text{lím.}\\ \text{magnitu-}\\ \text{descrecien-}\\ \text{tes } A.—\end{array}\left\{\begin{array}{l}X,\ \text{constante.}\\ A'-X<A'-A=\frac{U}{10^n}.\\ A'-X\neq 0,\ \text{porque}\ A'>X.\end{array}\right\}$$

luego X, es también lím. de las magnitudes decrecientes A'.—

Resultando: $\sqrt{N}$ = medida X = límite común, etc., etc.

---

(1) Léase, *no puede ser igual*.

Operaciones con los números concretos

RAGLAS PARA OPERAR CON LOS NÚMEROS CONCRETOS

Substracción de números concretos.

Una de las principales aplicaciones de esta operación, es la de hallar el tiempo transcurrido entre dos fechas; p. ej.; entre el 20 de Mayo de 1908, y el 12 de Marzo de 1922.

Para lograrlo, representando el mes por el número de orden que le corresponde, y observando que el 20 del 5.° mes de 1908, *van transcurridos 1907 años, 4 meses y 19 días*, y el 12 del 3.er mes de 1922, *van transcurridos 1921 años, 2 meses y 11 días*, vemos que basta restar, del segundo número, el primero, en la forma dicha y se obtiene el tiempo pedido, según se ve á continuación.

1921	años	2	meses	11	días
1907	años	4	meses	19	días
13	años	9	meses	22	días

En la práctica, se escriben el minuendo y el substraendo tal y como nos los dan, y se obtiene el mismo resultado.

1922	años	3	meses	12	días
1908	años	5	meses	20	días
13	años	9	meses	22	días

Multiplicación de números concretos.

Sígase la explicación del texto, con la siguiente pizarra:

Necesidad de nueva definición: *definición.*

Cuestión práctica que origina una multiplicación de concretos:

$\left.\begin{array}{l}\text{Dado, } M_a \text{ equivalente á } U_b \\ \text{hallar } x_a \text{ equivalente á } m_b.\end{array}\right\}$ Es evidente, que,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } m_b = U_b.\, n = n \text{ unidades del orden de } U_b\text{; será, } x_a = M_a.\, n. \\ \text{y} \\ \text{si } m_b = U_b.\, \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \text{ partes de la unidad } U_b\text{; será, } x_a = M_a.\, \frac{p}{q} \end{array}\right\}$$

luego para hallar el resultado pedido, etc., etc.— (1)

Deducción.—Regla práctica general.—Regla para cuando el multiplicando se transforma en incomplejo.—

Reglas para cuando el multiplicando se conserva en forma compleja, según que el multiplicador resulte un número entero ó fraccionario.

Ejemplo: Si un filtro, en *3 horas 18 minutos y 40 segundos*, filtra *1 Dl.* de agua; *¿cuánto tiempo* tardará en filtrar 6 litros?—

$$\text{Es decir: } \left\{\begin{array}{l} 3 \text{ h. } 18 \text{ m. } 40 \text{ s. } — — — 1 \text{ Dl.} \\ \quad x \quad — — — — — 6 \text{ l.} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_a = 3 \text{ h. } 18 \text{ m. } 40 \text{ s.} = 11920 \text{ segundos.} \\ m_b = 6 \text{ l.} = \frac{6}{10} \text{ Dl.} = \frac{3}{5} \text{ Dl. ,, } m = \frac{3}{5}. — \end{array}\right\}$$

1.^er procedimiento: $x = 11920 \text{ s.} \times \frac{3}{5} = 11920 \times \frac{3}{5} \text{ s.} = \frac{35760}{5} \text{ s.} = 7152 \text{ s.} = \underline{1 \text{ h. } 59 \text{ m. y } 12 \text{ s.}}$ —

2.º procedimiento: $x = (3 \text{h. } 18 \text{m. } 40 \text{s.}).\frac{3}{5} = (9 \text{h. } 56 \text{ m.}$ (2)$):5 =$ $\underline{1 \text{ h. } 59 \text{ m. y } 12 \text{ s.}}$ (3)

---

(1) Para que esta *cuestión* de lugar á una multiplicación, es preciso, como vemos, que si $m_b = U_b.\, n$, sea también $x_a = M_a.\, n$; es decir, exige, que las magnitudes que los números representan, sean lo que más adelante llamaremos directamente proporcionales.—

(2) 40 s. × 3 = 120 s. = 2 m.—18 m. × 3 = 54 m.—54 m. + 2 m = 56 m.—3 h. × 3 = 9 h.—

(3) 9 h. : 5 = 1 h. y sobran 4 horas.—4 h. = 240 m.—240 m. + 56 m. = 296 m.—296 m. : 5 = = 59 m. y sobra 1 minuto.—1 m. = 60 s.—60 s. : 5 = 12 s.—Observemos, que la multiplicación la empezamos por las unidades inferiores, para sacar de cada producto parcial las unidades del orden siguiente; pero la división la empezamos por las de orden superior, para convertir cada resto al orden inmediato inferior.—Vemos, por último, que si el multiplicador hubiera sido el número entero 3, p. ej., el producto sería 9 h. 56 m.; luego en este ejemplo van incluidos los dos.—

División de números concretos.—

Definición. - Casos que hay que distinguir.

1.er Caso. Cuestión práctica que, en este caso, conduce á la división:

Conocido M_a equivalente á U_b, y conocido P_a, hallar su equivalencia x_b } Es evidente, que,

si $P_a = M_a . n$, será, $x_b = U_b . n = n$ unidades del orden U_b: pero, $n = P_a : M_a$[1]; luego, sustituyendo este valor de *n*, en el de x_b, será: $x_b = P_a : M_a$, unidades U_b;

y si $P_a = M_a . \frac{p}{q}$, será, $x_b = U_b . \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$ partes de U_b:

pero, $\frac{p}{q} = P_a : M_a$; luego, $x_b = P_a : M_a$ de U_b.

Vemos, pues, que conduce á una división. - *Regla.*

Ejemplo: Si un filtro en *3 h. 18 m. 40 s.*, filtra *1 Dl.* de agua, en *1 h. 59 m. 12 s., ¿cuánta agua filtrará?*

Es decir: { 3 h. 18 m. 40 s. — — 1 Dl. ; 1 h. 59 m. 12 s. — — x } P_a = 1 h. 59 m. 12 s. = 7152 s. = D. ; M_a = 3 h. 18 m. 40 s. = 11920 s = d.

$$x = \frac{7152}{11920} \text{ Dl.} = 0'6 \text{ Dl.} = 6 \textit{ litros.}$$

2.° Caso. Cuestión práctica que origina la división en este caso:

Conocido m_b equivalente á P_a y dada U_b, hallar su equivalencia x_a } Es evidente, que,

si $m_b = U_b . n$, será, $P_a = x_a . n$, ó $x_a = P_a : n$,
y
si $m_b = U_b . \frac{p}{q}$, será, $P_a = x_a . \frac{p}{q}$, ó $x_a = P_a : \frac{p}{q}$ } Vemos,

---

(1) Si P_a es el producto de los números M_a y *n*, evidentemente, por la definición de división, el factor *n*, será el cociente de P_a por M_a.—

pues, que la mencionada cuestión, conduce, efectivamente, á una división.

Regla general.—*Regla* para cuando el dividendo se transforma en incomplejo.—

Reglas para cuando el dividendo se conserva en forma compleja, según sea, el divisor un número fraccionario ó un número entero.

Ejemplo: Si un filtro filtra *6 l.* de agua en *1 h. 59 m. 12 s.; 1 Dl.* ¿en *cuánto tiempo* lo filtrará?

Es decir:

$$\left\{\begin{array}{ll} 6\text{ l.} - - - & 1\text{ h. }59\text{ m. }12\text{ s.} \\ 1\text{ Dl.} - - & x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} D = P_a = 1\text{ h. }59\text{ m. }12\text{ s.} = 7152\text{s.} \\ d = 6\text{ l} = \frac{6}{10}\text{Dl} = \frac{3}{5}\text{ Dl.} \quad \frac{p}{q} = \frac{3}{5}. \end{array}\right\}.$$

1.[er] *procedimiento:* $x = 7152\text{ s.} : \frac{3}{5} = 7152\text{s.} \times \frac{5}{3} = \frac{35760}{3}\text{ s.} =$
$= 11920\text{ s.} =$ *3 h. 18 m. 40 s.*

2.° Procedimiento: $x = (1\text{ h. }59\text{ m. }12\text{s.}) : \frac{3}{5} = (1\text{ h. }59\text{ m. }12\text{ s.}) .$
$\frac{5}{3} = (9\text{ h. }56\text{ m.}^{(1)}) : 3 =$ *3 h. 18 m. 40 s* [(2)].

---

(1) 12 s. × 5 = 60 s. = 1 m.— 59 m. × 5 = 295 m.— 295 m. + 1 m. = 296 m. = 4 h. y 56 m.— 1 h. × 5 = 5 h.—5 h. + 4 h. = 9 h.—

(2) 9 h. : 3 = 3 h.— 56 m. : 3 = 18 m. y sobran 2 m.— 2 m. = 120 s.— 120 s. : 3 = 40 s.—Si el divisor fuese un número entero, dividiríamos por él, como hemos dividido por 3, y no hubiese habido que hacer la multiplicación por 5.—Están, pues, comprendidos en este ejemplo, los dos casos.— Exigen, también, las dos cuestiones que originan la división. que sean magnitudes directamente proporcionales.

Transformación y operaciones en el sistema métrico

Reducción de números métricos.—Para deducir de las *reglas de transformación* dadas para los números concretos en general, las que aquí da el texto para los números métricos, aplicaremos los cinco problemas allí estudiados á los números que expresan *medidas superficiales métricas*, p. ej., y de manera análoga se deducirán las correspondientes á *medidas longitudinales de capacidad y de peso*, y las que corresponden á *medidas cúbicas*.

1.° *Transformar un incomplejo de superficie, en otro incomplejo de orden inferior ó superior.*

Sea el número 357'843258 Dm², que queremos reducirlo á dm². —Aplicando la *regla general* del primer problema mencionado, como cada unidad de superficie contiene 100 del orden inferior, bastará multiplicar por 100 por cada orden que se descienda en la escala de las unidades; luego 357'843258 Dm²=3578432'58 dm²; y observando que hemos descendido *dos* órdenes y que se ha corrido la coma á la derecha *cuatro* lugares, deducimos la regla correspondiente.

Inversamente: Vamos á reducir 3756'74 áreas, á Mm².— Según la *regla general*, bastará dividir por 100 el número propuesto por cada orden que se ascienda, y tendremos: 3756'74 áreas = 0'00375674 Mm²: pero vemos que hemos corrido la coma *seis* lugares á la izquierda, y hemos ascendido *tres* órdenes; luego deducimos la regla del texto.

2.° *Transformar un complejo de superficie en incomplejo de orden inferior.*—

Sea el número, 7 Km² 29 Hm² 9 m² y 25 dm² que queremos reducir á dm².—Aplicándole la *regla general*, será: 7 Km² = = 700 Hm².—700 Hm² + 29 Hm² = 729 Hm² = 72900 Dm².—

72900 Dm^2 = 7290000 m^2. —7290000 m^2 + 9 m^2 = 7290009 m^2 = = 729000900 dm^2.—729000900 dm^2 + 25 dm^2 = 729000925 dm^2.

Luego, 7 km^2 294 m^2 9 m^2 25 dm^2 = 729000925 dm^2.

3.° *Transformar un complejo de superficie en incomplejo de un orden cualquiera.*—

Supongamos el mismo número complejo del problema anterior; lo reduciremos primero á incomplejo de orden inferior, como allí hicimos, y será: 7 Km^2 29 Hm^2 9 m^2 25 dm^2 = = 729000925 dm^2; y reduciendo ahora este incomplejo, á incomplejo del orden que nos pidan. p. ej., á *Dm^2*, para lo cual basta correr la coma cuatro lugares á la izquierda, (aquí suponemos la coma al final, porque todo número entero puede considerarse como decimal poniendo una coma á su derecha y escribiendo á continuación tantos ceros como se quiera); tendremos: 7 Km^2 29 Hm^2 9 m^2 25 dm^2 = 72900'0925 Dm^2; que nos comprueba la regla que la Aritmética da para estos dos problemas, reunidos en uno solo; pues se han puesto unos á continuación de otros los números que representan las unidades de los diversos órdenes; se han escrito dos ceros por los Dm^2 que faltaban; se ha antepuesto un cero á la cifra 9 de los m^2; y, por último, se ha colocado la coma á la derecha de los dos ceros que representan los Dm^2 que nos pedían.—

4.° *Transformar un incomplejo en complejo de órdenes inferiores.*—

Aplicándole la *regla general*, tendremos: 12800'094 Dm^2 = = *12800 Dm^2* + 0'094 Dm^2; pero, 0'094 Dm^2 = 9'4 m^2 = *9 m^2* + 0'4 m^2, y como 0'4 m^2 = *40 dm^2*, resulta, sustituyendo valores: 12800'094 Dm^2 = 12800 Dm^2 9 m^2 y 40 dm^2.—Observemos, que la parte decimal 0'094 Dm^2 = 9 m^2 40 dm^2.—

5.° *Transformar un incomplejo en complejo de órdenes superiores.*—

Sea el mismo número anterior, que, aplicándole la *regla general*, resulta:

$$
\begin{array}{r|l|l}
12800'094\ \mathrm{Dm}^2 & 100 & \\
\underline{0'094\ \mathrm{Dm}^2} & 128\ \mathrm{Hm}^2 & \underline{100} \\
 & \underline{28\ \mathrm{Hm}^2} & \underline{1\ \mathrm{Km}^2}
\end{array}
$$

Luego, 12800'094 = 1 Km² 28 Hm² y 0'094 Dm²; pero, como 0'094 Dm², según el problema anterior, es igual á 9 m² y 40 dm², sustituyendo, nos da: *12800'094* Dm² = 1 Km² 28 Hm² 9 m² 40 dm²; resultado que comprueba la regla dada en el texto para estos dos problemas, reunidos en uno solo; pues, vemos que equivale á descomponer el número en grupos de á dos cifras, como allí se indica, y darles las denominaciones correspondientes.—

Magnitudes proporcionales

RAZONES Y PROPORCIONES

Forma numérica de la proporcionalidad de dos magnitudes

En la *relación constante* que liga dos magnitudes directamente proporcionales, A y B, hay que tener en cuenta, si se trata de la relación de A con B, en cuyo caso es $\frac{a}{b}$, y se reduce al valor que toma A, cuando B toma el valor de la unidad; ó de la relación de B con A, inversa de la anterior, que será $\frac{b}{a}$. y se reduce al valor que toma B, cuando el valor de A se hace igual á la unidad.—

Así p. ej.: si un móvil, con velocidad constante, recorre 12 km. en 4 minutos; hallar:

1.° La relación constante que liga la *distancia recorrida* por dicho móvil, con el *tiempo* empleado en recorrerla.—Representando las dos magnitudes por sus iniciales, será: $\frac{D}{T} = \frac{12}{4} = 3$; que vemos es el valor que toma la magnitud *distancia*, cuando la magnitud *tiempo* toma el valor de la unidad correspondiente igual en este caso á *un minuto;* pues, es evidente, que si el móvil, en *cuatro* minutos, anda *12 km;* en *uno*, andará *3 km.* (División de concretos.)—Ahora bien, la *relación constante*, no son tres km, sino el *número abstracto 3.*—

2.° La relación constante que liga el *tiempo* que el móvil está en movimiento, con la *distancia* recorrida.—Será: $\frac{T}{D}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, inversa de la anterior; y es el valor que toma la magnitud *tiempo*, cuando la *distancia recorrida* toma el valor de la unidad correspondiente, igual, ahora, á *un km;* pues por división de concretos sabemos, que si 12 km. los recorre en 4 minutos, un km. lo recorrerá en 4: 12 minutos $=\frac{4}{12}$ minutos $=\frac{1}{3}$ de minuto; pero también aquí, la relación, es el número abstracto $\frac{1}{3}$.—

En resumen: que mientras no varíen la velocidad del móvil y las unidades respectivas, el número que exprese la medida de la distancia, será siempre *tres veces mayor* que el que exprese la del tiempo, y éste, será la *tercera parte* de aquél, cualquiera que sea el tiempo que el móvil esté andando.—

En el caso de ser las magnitudes inversamente proporcionales, entonces, *la constante*, es el producto $a. b$, lo mismo para expresar la de A con B, que la de B con A, y se reduce al valor que toma *una cualquiera de las dos*, cuando la otra se hace igual á la unidad correspondiente.

Reglas de tres simple y compuesta

Forma numérica y propiedades de la proporcionalidad de varias magnitudes.—

Según se ve en el texto, la *relación constante*, que liga á la magnitud M con otras varias es también el valor, K, que toma dicha magnitud M, cuando las demás se hacen iguales á las unidades respectivas. Por ej.: si 6 hombres hacen 12 m. de un muro en 8 días, y queremos hallar la constante que liga el número *de hombres*, con las otras dos magnitudes, diremos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si 6 hombres, hacen 12 m. en 8 días} \\ \text{k hombres, harán 1 m. en 1 día}\end{array}\right\}$$ De donde, deducimos,

$k = 6.\dfrac{1}{12}.\dfrac{8}{1}=\dfrac{48}{12}=4.$ — Por la fórmula obtenida en el texto, de $k=\dfrac{m\ c\ d}{a\ b}$, observando que el número de hombres es directamente proporcional con el trabajo realizado, é inverso con el tiempo, será: $k=\dfrac{H.\ t}{T}=\dfrac{6.8}{12}=\dfrac{48}{12}=4.$ — Representamos las magnitudes por sus iniciales, empleando t, para el tiempo, y T, para el trabajo.

Método de reducción á la unidad.—Según la Aritmética, debemos hallar, primero, el valor que toma la *magnitud de la incógnita*, cuando las demás se hacen iguales á la unidad, y después hallar el valor de la incógnita en función del anterior, por multiplicaciones y divisiones sucesivas.—Vamos, pues, á exponer el método, separadamente, para las reglas de tres simples, directa é inversa, y para la compuesta.—

Regla de tres simple directa

$$\begin{array}{cc} \underline{A} & \underline{B} \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & x \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} 1.^\circ \left\{\begin{array}{l} a_1 - b_1 \\ 1 - k \end{array}\right\} k = b_1 . \frac{1}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} . \; 2.^\circ \left\{\begin{array}{l} 1 - k \\ a_2 - x \end{array}\right\} x = k . \frac{a_2}{1} =$$

$$= k . a^2 = \frac{b_1}{a_1} . a_2 .$$

Regla de tres simple inversa.

$$\begin{array}{cc} \underline{A} & \underline{B} \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & x \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} 1.^\circ \left\{\begin{array}{l} a_1 - b_1 \\ 1 - k \end{array}\right\} k = b_1 . \frac{a_1}{1} = a_1 . b_1 . \; 2.^\circ \left\{\begin{array}{l} 1 - k \\ a_2 - x \end{array}\right\} x = k . \frac{1}{a_2} =$$

$$= k : a_2 = a_1 . b_1 : a_2 .$$

Regla de tres compuesta.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{M} & \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} & \underline{D} \\ m_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ x & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\end{array}}\right\} 1.^\circ \left\{\begin{array}{l} m_1 - a_1 - b_1 - c_1 - d_1 \\ k - 1 - 1 - 1 - 1 \end{array}\right\} k = m_1 . \frac{1}{a_1} . \frac{1}{b_1} .$$

$$\frac{c_1}{1} . \frac{d_1}{1} = \frac{m_1 \, c_1 \, d_1}{a_1 \, b_1} .$$

$$2.^\circ \left\{\begin{array}{l} k - 1 - 1 - 1 - 1 \\ x - a_2 - b_2 - c_2 - d_2 \end{array}\right\} x = k . \frac{a_2}{1} . \frac{b_2}{1} . \frac{1}{c_2} . \frac{1}{d_2} = k . a_2 . b_2 : c_2 : d_2 =$$

$$= \frac{m_1 \, c_1 \, d_1}{a_1 \, b_1} . a_2 . b_2 : c_2 : d_2 .$$

Vemos, efectivamente, que una vez hallado el valor de la magnitud de la incógnita, simultáneo con los iguales á la unidad correspondiente en las demás magnitudes, se obtiene el de la incógnita, multiplicando el anterior, por los nuevos valores de las magnitudes directamente proporcionales con la de la incógnita, y dividiéndolo por los de las inversas.—

También vemos, que el calcular el valor de k, equivale á determinar *la constante* que liga la magnitud de la incógnita con las demás, según el texto indica.

Cuestiones de Aritmética mercantil

Regla de Compañía

Particiones proporcionales.—Si en este problema quisiéramos descomponer el número *N* en partes *inversamente proporcionales* á varios números dados, entonces, las partes, en vez de guardar con los números dados una misma relación, tendrían que cumplir la condición, de que sus productos por dichos números fuesen iguales; ó sea, empleando la misma notación del caso anterior, que $x.\,p = y.\,q = z.\,r$; pero, $x.\,p = \frac{x}{\frac{1}{p}}$, $y.\,q = \frac{y}{\frac{1}{q}}$, $z.\,r = \frac{z}{\frac{1}{r}}$;

luego vemos que la condición se reduce á $\frac{x}{\frac{1}{p}} = \frac{y}{\frac{1}{q}} = \frac{z}{\frac{1}{r}}$; es decir, que basta con descomponer *N* en partes proporcionales á los números $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ y $\frac{1}{r}$, inversos de los dados, que, si resultan fraccionarios, se reducen á un común denominador, como dice el texto, y luego se descompone *N* en partes proporcionales á los numeradores respectivos.—

Regla de Aligación

Sígase la explicación del texto, al cual procuramos siempre adaptar estos apuntes.

Definiciones.—

Precio $= p = \frac{V}{C}$.—El precio, es el valor de la unidad; pues si *C* unidades valen *V*, y queremos averiguar el valor de una unidad, sabemos, por la división de concretos, que será igual á $\frac{V}{C}$, que es el precio, según la definición dada; luego, si es el valor de la unidad, será independiente de la cantidad que se considere; como ocurre, efectivamente, porque á *n* veces más ó menos cantidad, de la misma substancia, también le corresponderá un valor *n* veces mayor ó menor, y por lo tanto *la relación* $\frac{V}{C}$, ó sea *p*, seguirá siendo la misma.—De $p = \frac{V}{C}$, se deduce, también, que $V = p.\ C$ y $C = \frac{V}{p}$.—

Ley $= l = \frac{p}{P}$.—Es el peso de metal fino contenido en la unidad de peso total; pues, si en *P* unidades de peso total, entran *p* de metal fino, en una unidad de peso total, entrarán $\frac{p}{P}$, (división de concretos), que es la ley, precisamente.—Vemos, pues, que debe ser también independiente del peso total de la aleación, como lo es en realidad; pues, á *n* veces más ó menos peso total, corresponderá también (para la misma aleación), *n* veces más ó menos peso de metal fino; luego la relación $\frac{p}{P}$, no variará.—

De la relación $l = \frac{p}{P}$, se deduce, $p = P.\ l$ y $P = \frac{p}{l}$.—Como el metal fino forma parte de la aleación, su peso, *p*, será menor que el peso total P; luego $l = \frac{p}{P} < 1$.—Claro es que si el metal fino, *es puro;* es decir, si no está aleado con otro, su ley, será igual á la unidad; pero en este caso, no hay aleación. También la ley de un metal *que no contiene parte alguna de metal fino*, será, $l = \frac{o}{P} = o$, y tampoco hay aleación en este caso.—

La relación $p = \frac{V}{C}$, puede ser $\gtreqless 1$.—

Problema directo de las mezclas.

$$\left.\begin{matrix} c,\ c',\ c''\ ---\ \\ p,\ p',\ p''\ ---\ \end{matrix}\right\} p_m. - \left\{\begin{matrix} V = p.\,c + p'.\,c' + p''\,c'' + --- \\ V = p_m\,(c + c' + c'' + ---) \end{matrix}\right\}$$

$$p_m\,(c + c' + c'' + ---) = p.\,c + p'\,c' + p''.\,c'' + ----.$$

$$p_m = \frac{p.\,c + p'.\,c' + p''\,c'' + ---}{c + c' + c'' + ---}.\ \text{— \textit{Regla.}}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{p.\,c}{c} = p \\ \dfrac{p'.\,c'}{c'} = p' \\ \dfrac{p''.\,c''}{c''} = p'' \\ ----- \end{matrix}\right\}$$

Sumando *término á termino* las fracciones de los primeros miembros, resulta: $\dfrac{p.c+p'.c'+p''.c''+---}{c+c'+c''+---}$ $= p_m$; luego, p_m, está comprendido entre la fracción mayor y la menor de las propuestas; es decir, entre el menor y el mayor de los precios: deduciéndose, *que el precio de una mezcla, ha de estar comprendido entre el menor y el mayor de los precios de las substancias mezcladas*, llamándose, por esto, *precio medio.*—

Problema inverso.—Enunciado.—Casos.

1.er Caso.—Teorema.—*Convengamos en llamar siempre p, al precio mayor, y p', al menor.* Claro es, que, como p_m ha de estar comprendido entre ambos según hemos deducido, será siempre: $p > p_m > p'$.—

$$\left.\begin{matrix} c - c' \\ p - p' \end{matrix}\right\} p_m \left\{\begin{matrix} V = p.\,c + p'.\,c'. \\ V = p_m\,(c + c') = p_m.\,c + p_m.\,c'. \end{matrix}\right\} p.\,c + p'.\,c' = p_m.\,c + p_m.\,c';$$

$$p.\,c - p_m.\,c = p_m.\,c' - p'.\,c';\ c\,(p - p_m) = c'\,(p_m - p').\text{—}$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{p_m - p'}{p - p_m}.\ \left\{\begin{matrix} c = p_m - p' = a. \\ c' = p - p_m = b. \end{matrix}\right\} \begin{matrix} c = a.\,n \\ c' = b.\,n \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} c = a : n \\ c' = b : n \end{matrix}$$

Luego, el problema es *inderminado.*—

$$\left.\begin{matrix} \underline{\text{Si } c = N.}\ \ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{p_m - p'}{p - p_m};\ c' = c.\,\dfrac{p - p_m}{p_m - p'} = N.\,\dfrac{p - p_m}{p_m - p'}. \\ \underline{\text{si } c' = M.}\ \ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{p_m - p'}{p - p_m};\ c = c'.\,\dfrac{p_m - p'}{p - p_m} = M.\,\dfrac{p_m - p'}{p - p_m}. \end{matrix}\right\}\ \textit{Determinado.}$$

$$\text{Si } c + c' = s. — \frac{c}{c'} = \frac{p_m - p'}{p - p_m}; \quad \frac{c + c'}{p_m - p' + p - p_m} = \frac{c}{p_m - p'} =$$

$$= \frac{c'}{p - p_m}; \frac{s}{p - p'} = \frac{c}{p_m - p'} = \frac{c'}{p - p_m}. —$$

$$c = s. \frac{p_m - p'}{p - p'}, \text{ y } c' = s. \frac{p - p_m}{p - p'}. — \textit{Determinado.}$$

La diferencia entre las cantidades de las substancias mezcladas, puede ser: $c - c' = d$; $c - c' = o$, y $c' - c = d$; que corresponden, respectivamente, á los casos en que entre *más*, *igual* ó *menos* cantidad de la substancia *más cara*, *c*, que de la *más barata* *c'*.—

$$1.^\circ \quad c - c' = d. — \frac{c}{c'} = \frac{p_m - p'}{p - p_m}; \frac{c - c'}{p_m - p' - p + p_m} = \frac{c}{p_m - p'} =$$

$$= \frac{c'}{p - p_m}; \frac{d}{2\,p_m - (p + p')} = \frac{c}{p_m - p'} = \frac{c'}{p - p_m}; c = d. \frac{p_m - p'}{2\,p_m - (p + p')},$$

$\text{y } c' = d. \dfrac{p - p_m}{2\,p_m - (p + p')}$. — *Determinado*, si $2\,p_m > p + p'$; pues si fuese menor, sería imposible, por no poder hacer la resta; y si fuese igual, sería *cero* el denominador, y los valores de *c* y *c'*, tendrían que ser *infinitamente grandes;* cosa imposible de lograr, por grandes que sean las cantidades tomadas de cada substancia; pues siempre resultarán pequeñas.—

Deducimos, por tanto, que, *para que entre más cantidad de la substancia más cara, es preciso que* $2\,p_m > p + p'$, ó $p_m > \dfrac{p + p'}{2}$; es decir, *que el precio medio sea mayor que la semisuma de los precios.*—

2.° $c - c' = o$, ó $c = c'$. $\frac{c}{c'} = \frac{p_m - p'}{p - p_m} = 1$.—Luego, $p_m - p' = p - p_m$; $2\,p_m = p + p'$, y $p_m = \frac{p + p'}{2}$; es decir, que, *para que entren cantidades iguales de las dos substancias, es preciso que el precio medio sea igual á la semisuma de los precios.*

El problema en este caso, *es indeterminado*, porque los valores de *c* y *c'*, según se ve, solo tienen que satisfacer la condición de $\frac{c}{c'} = 1$, y esta se cumple para todo valor de $c = c'$, siempre que sea $p_m = \frac{p + p'}{2}$, como antes decimos.

3.° $c' - c = d$. $\frac{c}{c'} = \frac{p_m - p'}{p - p_m}$; $\frac{c'}{c} = \frac{p - p_m}{p_m - p'}$; $\frac{c' - c}{p - p_m - p_m + p'} = \frac{c'}{p - p_m} = \frac{c}{p_m - p'}$; $\frac{d}{(p+p') - 2\,p_m} = \frac{c'}{p - p_m} = \frac{c}{p_m - p'}$. — $c = d.\ \frac{p_m - p'}{(p+p') - 2\,p_m}$, y $c' = d.\ \frac{p - p_m}{(p+p') - 2\,p_m}$. —

Determinado el problema, si $p + p' > 2\,p_m$, por razones análogas á las expuestas cuando $c - c' = d$. Luego, $p_m < \frac{p + p'}{2}$; es decir, que, *para que entre menos cantidad de la substancia más cara, es preciso que el precio medio sea menor que la semisuma de los precios.*—

Recíprocamente: Según sea p_m, *mayor*, *igual* ó *menor*, que la semisuma de los precios, así tendrá que ser $c \gtreqless c'$; pues si siendo $p_m > \frac{p + p'}{2}$, p. ej., supusiéramos $c \lesseqgtr c'$, sabemos por las directas, que no podría ser, porque para que $c \lesseqgtr c'$ hemos visto era preciso que $p_m \lesseqgtr \frac{p + p'}{2}$. —

Luego, podemos decir: *que la condición necesaria y suficiente para que en una mezcla entre más, igual ó menos cantidad, de la substancia de mayor precio, que de la de precio menor, es, que el precio de la mezcla, ó precio medio, sea, respectivamente, mayor, igual ó menor, que la semisuma de los precios de las substancias mezcladas;* es decir, que si $p_m \gtreqless \frac{p+p'}{2}$, será $c \gtreqless c'$.

2.° caso. Cuando son más de dos las substancias mezcladas.— Supongamos varias substancias ordenadas con arreglo á sus precios, de mayor á menor, $\left.\begin{matrix} c, & c', & c'', & c''', & c^{IV} \text{———} \\ p > & p' > & p'' > & p''' > & p^{IV} \end{matrix}\right\}$ y como p_m tiene que estar comprendido, según sabemos, entre estos precios, supongamos que lo esté entre p' y p", por ejemplo, y entonces, haciendo lo que indica el texto, tendremos:

$$\left.\begin{matrix} c & \text{———} & p \\ c' & \text{———} & p' \\ c'' & \text{———} & p'' \\ c''' & \text{———} & p''' \\ c^{IV} & \text{———} & p^{IV} \end{matrix}\right\} p > p' > p_m > p'' > p''' > p^{IV}.—$$

$$\left\{\begin{matrix} c_1{}^{(1)} \dots p \\ c'' \dots p'' \end{matrix}\right\} \frac{c_1}{c''} = \frac{p_m - p''}{p - p_m} \left\{\begin{matrix} \textit{Indeterminado};\ \text{pero} \\ \text{una solución, será:} \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} c_1 = p_m - p'' = a \\ c'' = p - p_m = b \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} c' \dots p' \\ c''' \dots p''' \end{matrix}\right\} \frac{c'}{c'''} = \frac{p_m - p'''}{p' - p_m} \left\{\begin{matrix} \textit{Indeterminado};\ \text{pero} \\ \text{una solución, será:} \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} c' = p_m - p''' = d \\ c''' = p' - p_m = f \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} c_2{}^{(1)} \dots p \\ c^{IV} \dots p^{IV} \end{matrix}\right\} \frac{c_2}{c^{IV}} = \frac{p_m - p^{IV}}{p - p_m} \left\{\begin{matrix} \textit{Indeterminado};\ \text{pero} \\ \text{una solución, será:} \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} c_2 = p_m - p^{IV} = g \\ c^{IV} = p - p_m = b \end{matrix}\right\}$$

---

(1) Llamamos $\underline{c_1}$ y $\underline{c_2}$ estos valores, porque, entre los dos, suman el valor de $\underline{c}$; puesto que esta substancia de precio, p, la combinamos dos veces.—

Luego una *solución general*, será la reunión de estas mezclas parciales; pues, por ser todas del mismo precio p_m, la mezcla general, resultante de la de las tres parciales, será, evidentemente, del indicado precio p_m; y resultará, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} c = c_1 + c_2 = a + g \\ c' = d. \\ c'' = b.^{(1)} \\ c''' = f. \\ c^{IV} = b.^{(1)} \end{array}\right\}$$

Multiplicando ó dividiendo estos valores por un misms número, tendremos infinitas soluciones.—

Es claro, que aumenta en este caso la indeterminación, como dice el texto; porque cada una de las infinitas soluciones de cada mezcla parcial, puede combinarse con las infinitas soluciones de las demás mezclas.—

Nota.—

Si conociésemos todas las cantidades, *menos una*, y todos los precios; ó bien, todas las cantidades, y todos los precios, *menos uno;* podríamos hallar la cantidad, *c*, ó el precio, *p*, desconocidos, por medio de la igualdad fundamental que nos sirvió para resolver el problema directo; pues tendríamos:

$p_m (c + c' + c'' + - - -) = p\,c + p'\,c' + p''\,c'' + - - -; p\,c = p_m\,(c + c' + c'' + - - -) - p'\,c' - p''\,c'' - \ldots\ldots\ldots;$

$$y\ p = \frac{p_m (c + c' + c'' + - - -) - p'\,c' - p''\,c'' - \ldots\ldots}{c};$$

que nos da el precio buscado, siempre que las substracciones del numerador sean posibles.

Para hallar *c*, verificando la multiplicación del primer miembro de la primera igualdad, será:

$p_m\,c + p_m\,c' + p_m\,c'' + - - - = p\,c + p'\,c' + p''\,c'' + - - [1]; p\,c - p_m\,c = p_m\,c' + p_m\,c'' + \ldots\ldots - p'\,c' - p''\,c'' - \ldots\ldots; c\,(p - p_m) = p_m\,(c' + c'' + - - -) - p'\,c' - p''\,c'' -$

(1) Son iguales estas dos cantidades, por ser ambas la diferencia $p - p_m$. —

$$\text{..........}; \; c = \frac{p_m(c' + c'' + - - -) - p'c' - p''c'' - \text{.........}}{p - p_m};$$

que exige que las substracciones del numerador sean posibles.—

La del denominador, es siempre posible; pues si el precio de la substancia cuya cantidad buscamos fuese menor que p_m, entonces en la igualdad [1], hubiésemos obtenido:

$$p_m c - p c = p' c' + p'' c'' + \text{..........} - p_m c' - p_m c'' - \text{...}$$

$$\text{.......}; \; c(p_m - p) = p' c' + p'' c'' \text{..........} - p_m (c' + c'' + -$$

$$- -); \; c = \frac{p' c' + p'' c'' + \text{.........} - p_m (c' + c'' + - - -)}{p_m - p};$$

siendo preciso, como antes, que pueda hacerse la substracción indicada en el numerador.

Problemas relativos á las aleaciones.

Sígase la explicación que antecede de mezclas, en un todo análoga á la de aleaciones, y téngase en cuenta lo dicho en el texto y *sus notas;* pues éstas son aquí indispensables, aunque estén suprimidas. –

Problema directo. – Proposición 1.ª del texto.

$$\left.\begin{matrix} P, P', P'' - - - \\ l, l', l'' - - - \end{matrix}\right\} l_m . - \left\{\begin{matrix} \text{Peso metal fino de la aleación (1)} = \\ \text{Id. íd. íd. de la íd. (2)} = \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} = l.\, P + l'.\, P' + l''.\, P'' + - - - \\ = l_m (P + P' + P'' + - - -) \end{matrix}\right\}$$

$$l_m (P + P' + P'' + - - -) = l.\, P + l'.\, P' + l''.\, P'' + - - -;$$

$$l_m = \frac{l.\, P + l'.\, P' + l''.\, P'' + - - -}{P + P' + P'' + - - -}. -$$

(1) Igual á la suma de los pesos de los metales finos, de los metales aleados.

(2) Igual á la ley de la aleación, por el peso total, que es la suma de pesos.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{l.\,P}{P}=l\\[2mm] \dfrac{l'.\,P'}{P'}=l'\\[2mm] \dfrac{l''.\,P''}{P''}=l''\\ -\;-\;-\;-\;-\end{array}\right|\;\frac{l.\,P+l'.\,P'+l''.\,P''+---}{P+P'+P''+--}=l_m;$$

que nos comprueba es *ley media*, por tener que estar comprendida entre la mayor y la menor de las leyes.—

Problema inverso.—Proposición 2.ª del texto.

Cuando son dos los metales aleados: $\left\{\begin{array}{l}\text{Peso metal fino aleación} = l.\ P + l'.\ P'.\\ \text{Id.}\quad \text{íd}\quad \text{íd.}\quad \text{íd.}\quad = l_m\,(P+P')\end{array}\right\}$

$l.\,P+l'.\,P' = l_m\,(P+P') = l_m.\,P+l_m.\,P'$.—Supongamos siempre, que *l* es la mayor ley, y por lo tanto, $l > l_m > l'$, y tendremos:

$$l.\,P - l_m\,P = l_m.\,P' - l'.\,P';\ P\,(l - l_m) = P'\,(l_m - l');\ \frac{P}{P'}=\frac{l_m-l'}{l-l_m}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}P = l_m - l' = a.\\ P' = l - l_m = b.\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}P = a\,.\,n\\ P' = b\,.\,n\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}P = a : n\\ P' = b : n\end{array}\right.. \text{— } \textit{Indeterminado.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{Si } P = N.}\text{—}\dfrac{P}{P'}=\dfrac{l_m-l'}{l-l_m};\ P'=P.\dfrac{l-l_m}{l_m-l'}=N.\dfrac{l-l_m}{l_m-l'}.\\[4mm] \underline{\text{si } P' = M.}\text{—}\dfrac{P}{P'}=\dfrac{l_m-l'}{l-l_m};\ P=P'.\dfrac{l_m-l'}{l-l_m}=M.\dfrac{l_m-l'}{l-l_m}.\end{array}\right\}\ \textit{Determinado.}$$

$$\underline{\text{Si } P+P' = S.}\text{—}\ \frac{P}{P'}=\frac{l_m-l'}{l-l_m};\ \frac{P+P'}{l_m-l'+l-l_m}=\frac{P}{l_m-l'}=$$

$$=\frac{P'}{l-l_m};\ \frac{S}{l-l'}=\frac{P}{l_m-l'}=\frac{P'}{l-l_m}.\text{—}$$

$$P = S.\,\frac{l_m-l'}{l-l'},\ \text{y } P' = S.\,\frac{l-l_m}{l-l'}.\text{—}\textit{Determinado.}$$

La diferencia, puede ser: $P - P' = d$; $P - P' = o$, y $P' - P = d$.

1.° $P - P' = d$.—$\frac{P}{P'} = \frac{l_m - l'}{l - l_m}$; $\frac{P - P'}{l_m - l' - l + l_m} = \frac{P}{l_m - l'} =$

$= \frac{P'}{l - l_m}$; $\frac{d}{2\,l_m - (l + l')} = \frac{P}{l_m - l'} = \frac{P'}{l - l_m}$. — $P = d.\,\frac{l_m - l'}{2\,l_m - (l + l')}$,

y $P' = d.\,\frac{l - l_m}{2\,l_m - (l + l')}$. — *Determinado*, si $2\,l_m > l + l'$,

ó $l_m > \frac{l + l'}{2}$. —

2.° $P - P' = O$, ó $P = P'$. $\frac{P}{P'} = \frac{l_m - l'}{l - l_m} = 1$. — Luego, $l_m - l' =$

$l - l^m$; $2\,l_m = l + l'$; $l_m = \frac{l + l'}{2}$.

Si se cumple la condición, es en este caso, indcterminado el problema; pero siempre $\frac{P}{P'} = 1$, ó $P = P'$.—

3.° $P' - P = d$. $\frac{P}{P'} = \frac{l_m - l'}{l - l_m}$; $\frac{P'}{P} = \frac{l - l_m}{l_m - l'}$; $\frac{P' - P}{l - l_m - l_m + l'} =$

$\frac{P'}{l - l_m} = \frac{P}{l_m - l'}$; $\frac{d}{l + l' - 2\,l_m} = \frac{P'}{l - l_m} = \frac{P}{l_m - l'}$.

$P = d.\,\frac{l_m - l'}{l + l' - 2\,l_m}$, y $P' = d.\,\frac{l - l_m}{l + l' - 2\,l_m}$.—*Determinado*,

si $2\,l_m < l + l'$, ó $l_m < \frac{l + l'}{2}$. —

Recíprocamente: Si $l_m \gtreqless \frac{l + l'}{2}$, será, $P \gtreqless P'$; luego *la condición necesaria y suficiente para que en una aleación de dos metales, entre más, igual ó menos peso, del metal de mayor ley, que del de ley menor, es que l_m sea mayor, igual ó menor que la semisuma de las leyes de los metales aleados.* —

Cuando son más de dos los metales aleados. (Véase el de mezclas.)

$$\left.\begin{array}{l} P \quad - l \\ P' \;- - l' \\ P'' - - l'' \\ P''' - - l''' \\ P^{IV} - \quad l^{IV} \end{array}\right| \begin{array}{l} l > l' > l_m > \\ l'' > l''' > l^{IV}. — \end{array} \left| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P_1 \;- - l \\ P'' - - l'' \end{array}\right\} l > l_m > l''. — \\ \left.\begin{array}{l} P' \;- - l' \\ P''' - - l''' \end{array}\right\} l' > l_m > l'''. — \\ \left.\begin{array}{l} P_2 \;- - l \\ P^{IV} - - l^{IV} \end{array}\right\} l > l_m > l^{IV}. — \end{array}\right.$$

$$\frac{P_1}{P''} = \frac{l_m - l''}{l - l_m}. \left\{ \begin{array}{l} P_1 = l_m - l'' = a. \\ P'' = l - l_m = b. \end{array} \right\} \textit{Indeterminado.}$$

$$\frac{P'}{P'''} = \frac{l_m - l'''}{l' - l_m}. \left\{ \begin{array}{l} P' = l_m - l''' = d. \\ P''' = l' \quad l_m = f. \end{array} \right\} \textit{Indeterminado.}$$

$$\frac{P_2}{P^{IV}} = \frac{l_m - l^{IV}}{l - l_m}. \left\{ \begin{array}{l} P_2 = l_m - l^{IV} = g. \\ P^{IV} = l - l_m = b. \end{array} \right\} \textit{Indeterminado.}$$

Una solución: $P = P_1 + P_2 = a + g$; $P' = d$; P'' b; $P''' = f$, y $P^{IV} = b$. — Multiplicando ó dividiendo estos valores por un mismo número, tendríamos *infinitas* soluciones.—

Aumenta la indeterminación, por la misma causa que hemos dicho en las mezclas.—

Elevar la ley de una aleación, añadiéndole metal fino.

$$\frac{P}{P'} = \frac{l_m - l'}{l - l_m}$$

l, que es siempre la ley mayor, será aquí igual á la *unidad*, que es la ley del metal fino; y P, el peso de dicho metal.—

l', será la ley que tiene el metal; es decir, la que queremos elevar, y P', el peso de este metal. —

l_m, es la ley media que queremos obtener.—

Rebajar la ley de una aleación, añadiéndole metal ordinario.

$$\frac{P}{P'} = \frac{l_m - l'}{l - l_m}$$

l', que es siempre la ley menor, será igual á *cero*, que es la ley del metal distinto del fino, ú ordinario; y P', el peso de dicho metal.
l, es la ley que tiene el metal; es decir, la que queremos rebajar, y P, el peso de este metal.
l_m, es la ley media que queremos obtener.

Nota análoga á la de mezclas.

$$l = \frac{l_m (P + P' + P'' + - -) - l'. P' - l''. P'' - \ldots\ldots}{P}, \text{ y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \dfrac{l_m (P' + P'' + - - - - -) - l'. P' - l'' P'' - \ldots}{l - l_m} \\ \text{ó} \\ P = \dfrac{l'. P' + l'' P'' + \ldots\ldots\ldots - l_m (P' + P'' + - - -)}{l_m - l} \end{array} \right\}$$

según sea $l > l_m$ ó $l_m > l$. — Exigen estas fórmulas, que puedan hacerse las substracciones de los numeradores.

Regla de Conjunta

Procedimiento práctico.

Resolución de la siguiente regla de conjunta por la regla general dada en el texto:

$$\left.\begin{array}{l} x_m = b_n \\ c_n = d_p \\ f_p = g_q \\ h_q = k_m \end{array}\right\} x.\ c.\ f.\ h = b.\ d.\ g.\ k;\ x = \frac{b.\ d.\ g\ k}{c.\ f.\ h},$$ unidades del orden *m*.

Resolución de la misma, por magnitudes proporcionales.

1.ª Regla de tres.

$$\left.\begin{array}{l} h_q - k_m \\ g_q - x'_m \end{array}\right\} x'_m = k.\ \frac{g}{h}.$$

Pero, $g_q = f_p = x'_m$.

2.ª Regla de tres.

$$\left.\begin{array}{l} f_p - - x'_m \\ d_p - - x''_m \end{array}\right\} x''_m = x'.\frac{d}{f} = k.\ \frac{g}{h}.\ \frac{d}{f}.$$

Pero, $d_p = c_n = x''_m$.

3.ª Regla de tres.

$$\left.\begin{array}{l} c_n - - x''_m \\ b_n - - x_m \end{array}\right\} x_m = x''.\ \frac{b}{c} = k.\ \frac{g}{h}.\ \frac{d}{f}.\ \frac{b}{c} = \frac{b.\ d.\ g.\ k}{c.\ f.\ h}.$$

FIN

Precio: 5 pesetas