1.903

ARITMÉTICA

Y

CÁLCULOS MERCANTILES.

TRATADO DE ARITMÉTICA

Y

CÁLCULOS MERCANTILES

POR

JOSÉ ANGULO Y MORALES

Doctor en Ciencias; Profesor mercantil;
Agrimensor; Catedrático de Matemáticas por oposición;
numerario en la actualidad de la asignatura de Aritmética y Cálculos mercantiles
en la Escuela superior de Comercio de Madrid; Director, que ha sido,
de Instituto; autor de obras, etc.

TOMO III

CÁLCULOS MERCANTILES SUPERIORES

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIP. «SUCESORES DE RIVADENEYRA»
Impresores de la Real Casa
PASEO DE SAN VICENTE, NÚM. 20

1890

PROGRAMA DE UN CURSO

DE

ARITMÉTICA Y CÁLCULOS MERCANTILES.

(CONCLUSIÓN DEL CONTENIDO EN LOS TOMOS PRIMERO Y SEGUNDO) *.

Lección 75.

1. Combinaciones, coordinaciones, permutaciones y nombres particulares que reciben; consecuencias inmediatas de estas definiciones.

2. Definición de binomio y número de las coordinaciones; fórmula abreviada.

3. Expresiones generales y abreviadas del número de permutaciones y combinaciones; corolarios referentes al de éstas.

4. Ley que puede observarse en el desarrollo del cubo de un binomio; generalidad de la misma para cualquier exponente entero y positivo y fórmula del binomio de Newton.

5. Casos en que uno ó ambos términos sean negativos; cálculo de los coeficientes, forma del desarrollo cuando el primer término es 1 y observación relativa á su generalidad.

---

* Por un descuido que no acertamos á explicarnos, dejaron de aparecer entre las preguntas, al final de la lección 47, correspondiente al tomo II, las relativas á los dos siguientes párrafos:

82. Comercio de piedras preciosas y análogos; circunstancia que hay que tener presente siempre que se calcule la equivalencia de una ó varias unidades.

83. Trueques; resolución de los casos más frecuentes.

Lección 76.

6. Certidumbre, incertidumbre, posibilidad, imposibilidad y probabilidad; probabilidad matemática, límites entre los cuales varía y diferentes clases de probabilidades.

7. Regla general para encontrar la probabilidad simple absoluta; número de casos favorables y totales, propiedad y valor de las probabilidades contrarias, probabilidad absoluta de que se realice uno de varios hechos y valor de la probabilidad relativa.

8. Probabilidad compuesta, sean los hechos que la motiven independientes entre sí, ó dependientes unos de otros; probabilidades de que un hecho se repita varias veces consecutivas y de que acontezca determinado número de veces dentro de cierto límite.

9. Probabilidad de que se reproduzca por lo menos cierto número de veces y de que no llegue á verificarse tantas; observación relativa al cálculo por logaritmos.

10. Caso de máxima probabilidad dentro de cierto número de hechos; ideas generales sobre el objeto, cálculo y aplicaciones de las probabilidades medias.

Lección 77.

11. Expresiones fundamentales de los problemas de interés simple, cuando el tanto se refiere á la unidad; condición necesaria para que sean aplicables.

12. Interés compuesto; fórmulas directa y logarítmica del capital final en función del primitivo y tanto por 1 para períodos exactos de tiempo.

13. Fórmula práctica para tiempos fraccionarios; inexactitud de la misma y definición de los tantos equivalentes.

14. Variación del capital final cuando el tanto y el tiempo se fraccionan proporcionalmente; relación entre dichos tantos, cálculo del desconocido y generalidad de la expresión hallada para períodos exactos.

15. Valores de los capitales, tanto, tiempo é interés, en sus diversas combinaciones; tiempo necesario para convertir un capital en cualquier múltiplo suyo.

Lección 78.

16. Comparación de las expresiones del capital final en el interés simple y compuesto; observación práctica.

17. Valores directo y logarítmico del capital primitivo del último, según la costumbre usual; cálculo del tiempo y procedimiento para aproximar el tanto.

18. Objeto de las tablas de multiplicadores fijos y definición de éstos; cálculo, disposición y manejo de las mismas.

19. Determinación por su medio de los capitales final y primitivo; caso en que quiera hallarse el interés.

20. Valor directo del multiplicador fijo é investigación del tiempo y tanto; principio que hay que admitir para tiempos fraccionarios.

Lección 79.

21. Interés continuo; fórmulas directa y logarítmica del capital final.

22. Valores directos y logarítmicos de los capitales, tiempo, tanto é interés, en sus diversas combinaciones; observación práctica.

23. Tanto de interés continuo equivalente al compuesto; resolución de los problemas referentes á este último interés por las fórmulas del primero.

24. Tablas que facilitan los cálculos prácticos; observación relativa á la acumulación de intereses.

25. Diferentes clases de descuento racional y expresiones que deben aplicarse á las cuestiones en que intervengan; casos en que suele hallarse cada uno y el llamado comercial.

Lección 80.

26. Relaciones entre el nominal, tiempo, tanto por 1 y descuento comercial simple; valores de éste y del capital líquido en función del otro y del tiempo y tanto.

27. Comparación del descuento comercial simple con los dos racionales; consecuencia que se deduce.

28. Multiplicadores fijos en el descuento racional compuesto; construcción, objeto y uso de las tablas.

29. Descuento comercial compuesto; fórmulas directas y logarítmicas para cuantas combinaciones fundamentales pueden ocurrir.
30. Vencimientos medio y común á interés compuesto; cuentas corrientes y cuestiones análogas.

Lección 81.

31. Rentas generales; carácter, divisiones y nombres de las mismas y de sus términos.
32. Perpetuidad; expresiones directas y logarítmicas de la perpetuidad, capital y tanto por 1 en las inmediatas.
33. Valores de la perpetuidad, capital y tiempo en las diferidas; ídem en las anticipadas.
34. Fórmulas generales; imposibilidad de calcular directamente el valor del tanto.
35. Determinación del mismo en las rentas anticipadas; procedimiento práctico en las diferidas.

Lección 82.

36. Valores directo y logarítmico del capital y término de las rentas limitadas inmediatas; expresión del tiempo.
37. Método para hallar el tanto por aproximación; procedimiento práctico.
38. Fórmulas directas y logarítmicas del capital y término de las diferidas; expresiones del tiempo é investigación del tanto.
39. Deducción de las análogas para las rentas anticipadas; determinación del tanto.
40. Fórmulas generales; observación relativa á su cálculo.

Lección 83.

41. Tablas de multiplicadores fijos en las rentas limitadas; fórmulas prácticas directas del capital, término de la renta y tiempo por que puede diferirse ó anticiparse, para todos los casos.
42. Multiplicadores inversos; fórmulas análogas.
43. Determinación del tiempo y tanto; comparación de estos procedimientos con los generales.

44. Tablas logarítmicas; cálculo de las mismas y expresiones á que se aplican.

45. Inconveniente que presentan; modo de evitarlo.

Lección 84.

46. Anualidades; expresiones del capital final, anualidad y tanto, cuando devengan interés simple.

47. Fórmulas directas y logarítmicas del capital, anualidad y tiempo, cuando devengan interés compuesto; aproximación del tanto y tablas de anualidades.

48. Imposiciones; valores del capital, imposición y tanto, correspondientes al interés simple.

49. Fórmulas directas y logarítmicas del capital, imposición y tiempo, siendo el interés compuesto; aproximación del tanto y tablas de imposiciones.

50. Valores del último término de una renta cuando el tiempo es fraccionario; número de términos.

Lección 85.

51. Vencimientos medio y común de las rentas; capitalización, anualidades atrasadas, anticipadas y arbitrarias, trueques y cuestiones análogas.

52. Amortización; medios de realizar la del capital prestado y resolución de los problemas que pueden ocurrir.

53. Renta que podrá reservarse para el pago de capital é intereses, si éstos son recíprocos; cajas de amortización.

54. Valores de la renta, capital, tiempo y tantos, cuando los de interés y amortización son distintos; casos particulares en que aquélla se exprese á tanto por 100.

55. Empréstitos públicos; diferentes formas de amortizarlos y clasificación de los mismos.

Lección 86.

56. Ideas generales sobre las obligaciones de los empréstitos amortizables y principales casos que ocurren; origen, vida y edad de aquéllas.

57. Expresiones directas y logarítmicas de la cantidad disponible en cualquier época para la amortización, cuando las par-

ciales se hacen por sorteo, al pagar los intereses; número de obligaciones amortizables.

58. Fórmulas para hallar el importe de la deuda en determinado instante; número de obligaciones existentes.

59. Diferencia entre la amortización teórica y la práctica; modo de calcular ésta generalmente, é inconveniente que ofrece.

60. Tablas de amortización; contenido, regla práctica para construirlas, forma y comprobación de las mismas.

Lección 87.

61. Amortizaciones por sorteo, cuyos plazos no coincidan con el de pago de los cupones; tabla.

62. Empréstitos amortizables por compra de las obligaciones al precio de cotización; variación que en los cálculos exige no emitirlas á la par.

63. Valores directos y logarítmicos del nominal y precio de emisión de las obligaciones, duración del empréstito y tanto, cuando se conoce el que realmente corresponde; determinación de éste.

64. Interés medio de una emisión, expresión de los valores nominal y efectivo y cálculo de los tantos y el tiempo; esperanza de obtener determinado interés ó uno mayor ó menor.

65. Cálculo del número y precio de las obligaciones en los empréstitos con lotes; esperanza de obtener determinado lote ó ganancia.

Lección 88.

66. Rentas vitalicias; probabilidad de vida y muerte y tanto de mortalidad.

67. Tablas de supervivencia y mortalidad; fundamentos de su cálculo.

68. Diferentes métodos de calcularlas, diversas causas de error, comparación y correcciones; tablas más importantes y usuales.

69. Aplicaciones generales; vida probable, regla para hallarla, fórmula y cuestiones más frecuentes relacionadas con ella.

70. Cantidad de existencia y vida media; reglas para determinarlas, tablas y fórmula para la última.

Lección 89.

71. Objeto y fundamento del cálculo de las rentas vitalicias; fórmulas teóricas y prácticas para determinar el capital y la anualidad en las inmediatas.

72. Construcción de las tablas de multiplicadores fijos; edad á que con cierto capital podrá constituirse una determinada renta vitalicia, cuestiones análogas y tablas especiales.

73. Procedimiento práctico para el cálculo de las rentas cuando el tanto y el tiempo se refieren á distinta unidad; valores del multiplicador fijo en las semestrales y trimestrales.

74. Rentas vitalicias diferidas; valores directos y logarítmicos del capital y la anualidad.

75. Rentas vitalicias temporales; expresiones del capital y de la anualidad.

Lección 90.

76. Constitución de una renta vitalicia diferida por medio de otra inmediata; valores de ambas anualidades en función una de otra.

77. Rentas vitalicias sobre vidas agrupadas; casos que pueden ocurrir en las constituídas sobre dos cabezas.

78. Fórmulas teóricas y prácticas del capital y de la anualidad, en las cobrables hasta la primer defunción; cálculo y disposición de las tablas de multiplicadores fijos.

79. Determinación de las edades; expresiones del capital y la anualidad en las rentas cobrables hasta la segunda defunción.

80. Esperanza matemática; relación entre las partes del capital y de la anualidad, cuando la renta se constituye hasta la primer defunción.

Lección 91.

81. Valores de los capitales con que deben contribuir dos personas para la formación de una renta vitalicia sobre sus vidas, hasta la segunda defunción; partes de la anualidad que les corresponderán cuando se conozcan los capitales.

82. Caso particular en que aquéllas deban ser iguales; parte

de anualidad que corresponderá á cada uno, cuando lo sean los capitales.

83. Indicación del cálculo que exigirían las rentas vitalicias diferidas ó temporales sobre dos cabezas; rentas de supervivencia.

84. Primas fijas y vitalicias; expresión de la primera y de la anualidad en las rentas vitalicias de supervivencia.

85. Valor de la vitalicia en función de la fija; prima temporal y tablas especiales.

Lección 92.

86. Seguros sobre la vida; división de los mismos y principales casos que pueden ocurrir.

87. Necesidad de que las operaciones sean más aproximadas en caso de muerte que de vida; primas puras, tanto adoptado generalmente y diferencia en los cálculos.

88. Representación moderna de los elementos que intervienen en los problemas de seguros; definición de anualidad vitalicia y método directo para calcular las tablas.

89. Métodos de Maas y Morgan; tablas de conmutación, valores de los números que contienen y de la anualidad vitalicia inmediata sobre una cabeza.

90. Tantos de interés continuo, medio é instantáneo de mortalidad; expresión de las anualidades vitalicias inmediatas, semestrales, trimestrales y continuas.

Lección 93.

91. Representación y cálculo de las anualidades vitalicias inmediatas sobre dos cabezas hasta la primer defunción; ídem hasta la segunda.

92. Valor de las anualidades continuas sobre dos cabezas; ídem de las cobrables por fracciones de tiempo menores que un año.

93. Expresión de las anualidades cobrables por períodos mayores de un año; importancia de la misma.

94. Determinación aproximada de la anualidad ordinaria sobre una cabeza; modo de operar con más ó menos rapidez y exactitud.

95. Fórmula y procedimiento práctico para hallar la anualidad sobre dos ó más cabezas; tablas de que puede hacerse uso.

Lección 94.

96. Representación y cálculo de las anualidades vitalicias diferidas, sobre una cabeza; valores de las constituídas sobre dos, hasta la primera y segunda muerte.

97. Anualidades temporales sobre una cabeza; ídem sobre dos para los mismos casos.

98. Cálculo de las diferidas para una cabeza; expresiones de las constituídas sobre dos.

99. Método de Simpson, para encontrar los valores de las constituídas sobre más de dos cabezas; principio que hay que admitir y tablas que se deben emplear.

100. Primas únicas; representación de las dos fundamentales, casos que pueden ocurrir y valores en cada uno de ellos, de las relacionadas con una ó dos muertes.

Lección 95.

101. Objeto de la transformación de primas en los seguros sobrela vida ; representación y valor de la vitalicia anual sobre una cabeza.

102. Primas exigibles por fracciones de año; fórmulas aproximada y práctica.

103. Primas vitalicias temporales; valor de la relativa á una sola cabeza.

104. Primas reembolsables; condiciones más frecuentes y valores de las mismas en cada una de ellas.

105. Expresiones de las primas sobre dos cabezas hasta la primera y segunda defunción, inmediatas y temporales; determinación de las primas con interés en todos los casos é ideas generales sobre las principales tarifas y tablas usadas por las Compañías.

Lección 96.

106. Valor de la renta vitalicia inmediata, sobre una cabeza, cobrando los herederos la parte correspondiente al último término; tanto vitalicio y determinación del tanto por 100 y renta anual, semestral ó trimestral.

107. Rentas vitalicias á capital reservado; cálculo de las mismas y del valor y término de las constituídas sobre dos cabezas,

cuando éste deba disminuirse después de la primera defunción.

108. Expresiones prácticas del valor de una renta anual, semestral y trimestral, vitalicia y diferida, sobre una cabeza; prima vitalicia anual, tanto si la renta se ha de cobrar al fin como al principio de los años, ó por semestres ó trimestres.

109. Valores de las primas únicas reembolsables á la muerte ó al empezar á percibir la renta, si no ha ocurrido; cálculo de las temporales y aplicación á la comprendida en el primer caso.

110. Compra del usufructo de una renta vitalicia y temporal; adquisición de una propiedad al ocurrir un fallecimiento.

Lección 97.

111. Expresiones prácticas de la prima fija en los seguros de capital sobre la vida de una persona; primas vitalicias.

112. Valores de las primas temporales; cálculo de las que devengan interés.

113. Primas fijas y anuales en los seguros temporales y diferidos; prima vitalicia en los últimos.

114. Determinación de las primas fija y temporal, en los seguros á término fijo; ídem en los contraseguros.

115. Cálculo de ambas primas en los seguros mixtos; préstamos vitalicios.

Lección 98.

116. Principales seguros de rentas de supervivencia; primas única y temporal en los ordinarios y diferidos.

117. Primas de los seguros temporales, de rentas vitalicias ó temporales; rentas perpetuas de supervivencia.

118. Seguro y reembolso de anualidades; casos que pueden ocurrir y resolución de cada uno de ellos.

119. Seguros sobre las cosas; límites fijo y á tanto por 100 de la prima, para no exponer más que cierto capital.

120. Probabilidad de obtener un beneficio conózcase ó no la prima; límite de ésta para que sea posible y probable.

Lección 99.

121. Reservas de las compañías de seguros; ideas generales sobre su importancia y cálculo.

122. Expresión de las reservas en los seguros por la vida entera á prima fija y vitalicia, y correcciones por vencimiento de primas y selección médica; caso en que las primas sean temporales.

123. Reservas en los seguros sobre más de una cabeza; regla general para hallarlas en los contratados á primas vitalicias ó temporales, cuando se conoce la correspondiente á la única.

124. Reservas en los temporales, mixtos, á término fijo, etc.; ídem en los de rentas vitalicias é interpretación de los valores negativos.

125. Ideas generales sobre la rescisión de los contratos; valor de reducción, pólizas de acumulación y participación en los beneficios.

Lección 100.

126. Tontinas; suma probable que corresponderá á los sobrevivientes, sean iguales ó diferentes los capitales y tiempos, y cuestiones relacionadas con estas cantidades.

127. Casos en que se pague una prima anual; cajas dotales.

128. Objeto más frecuente de las sociedades de socorros mutuos; fórmulas prácticas para los casos de enfermedad.

129. Cálculo de los intereses en las cajas de ahorros; cajas de retiro.

130. Tablas especiales que suelen usarse en éstas; particularidad que en los cálculos hay que tener presente.

FIN DE LA PARTE DE PROGRAMA RELATIVA Á LOS CÁLCULOS MERCANTILES SUPERIORES.

APÉNDICE.

131. Formas generales de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita; resolución.

132. Transformación de las de tercero en la forma más sencilla; valores de la incógnita.

133. Resolución de las de cuarto; fórmulas.

134. Aplicaciones; tiempo necesario para que las imposiciones á interés simple produzcan determinado capital y verdadera resolución de las cuestiones á que se aplica la regla de Compañía.

CÁLCULOS MERCANTILES SUPERIORES.

NOCIONES PRELIMINARES.

Ya lo dijimos en el PRÓLOGO de este tratado (T. I., páginas 16 y 17).

No llamamos *superiores* á las cuestiones cuyo estudio vamos á emprender, porque realmente lo sean, sino para distinguirlas de las contenidas en el anterior volumen, que únicamente vamos á ampliar, fundándolas en algunos conocimientos nuevos, pero que no traspasan los límites de las más indispensales nociones de Álgebra ó Aritmética universal, nombre con que algunos las distinguen.

Tan *elementales* son, pues, los unos como los otros, aunque no dejan de existir en gran número cálculos mercantiles realmente *superiores*, de los cuales hoy por hoy no pensamos ocuparnos, y que en nuestra patria son casi del todo desconocidos.

Somos, por consiguiente, los primeros en reconocer la impropiedad del calificativo que, en obsequio á la claridad, aplicamos á los que en este tomo han de comprenderse, pero la inexactitud no es tan grande si se tiene en cuenta que sólo expresa una relación con lo más sencillo, y aun con el que estudia y el que enseña.

Lo más elemental y fácil para cualquier persona medianamente instruída y de regular inteligencia, puede ser para otra muy superior, y es de ello buena prueba que hay autor español para el cual forman parte de la Aritmética mercantil *superior*, no sólo la regla de falsa posición, las más rudimentarias ideas sobre el seguro de vida, logaritmos y fondos públicos, los arbitrajes, pignoraciones, comercio de oro y plata y demás problemas análogos, sino hasta las operaciones de Bolsa, que, según vimos al final del volumen precedente, se reducen siempre á facilísimas sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, que puede y debe saber resolver todo aquel que se halle regularmente impuesto en los principios de Aritmética que abraza la instrucción primaria.

Dada esta pequeña explicación que hemos creído necesaria, para que no pueda achacarse nuestro modo de proceder á presunción, fatuidad, ó desconocimiento completo de las mismas materias sobre las cuales escribimos, pasemos ante todo á exponer los fundamentos del nuevo aspecto bajo el cual hemos de considerar determinadas operaciones mercantiles.

I.—Combinaciones.

1. Muchas veces desde que comenzamos á escribir esta obra, hemos usado la palabra COMBINACIONES en el sentido lato y general en que la emplea todo el mundo, para indicar las distintas maneras de agrupar varias cosas, pero de aquí en adelante limitaremos su significado, pues en Matemáticas sólo se da ese nombre á los *distintos grupos que con varios objetos pueden formarse, de modo que por lo menos se diferencien en uno de ellos*, para distinguirlos de *los que además pueden diferenciarse en el orden en que están colocados*, llamados COORDINACIONES, y aun de *aquellos en que entrando todos los objetos, sólo pueden diferenciarse en su orden de colocación*, que reciben el nombre particular de PERMUTACIONES.

Las primeras y segundas suelen también llamarse BINARIAS, TERNARIAS, CUATERNARIAS, etc., según están *formadas por dos, tres, cuatro, etc.*, de los objetos que se consideran.

Así, por ejemplo, con las tres letras a, b y c, pueden formarse las seis *coordinaciones binarias*,

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bc,\ cb,$$

que se diferencian entre sí en una de las letras, ó en el orden de colocación; y las *permutaciones*, ó *coordinaciones ternarias*,

$$abc,\ bac,\ bca,\ cba,\ cab,\ acb,$$

que sólo se diferencian en dicho orden; pero de las primeras únicamente son *combinaciones binarias* distintas, las

$$ab\,,\ ac,\ bc,\ \text{ó bien},\ ba\,,\ ca,\ cb,\ \text{etc.},$$

que se diferencian en una de las letras, no constituyendo las seis *ternarias*, ó permutaciones, más que una sola combinación, por contener todas las propias letras.

Esta misma consideración nos enseña desde luego que:

1.º *Si en cada una de las combinaciones binarias, ternarias, ó de cualquier otro orden, se efectúan todas las permutaciones posibles, se obtendrán todas las coordinaciones de igual orden*:
de donde se desprende también inmediatamente que:

2.º *El número de coordinaciones de* m *objetos, tomados* n *á* n, *será igual al producto del número de sus combinaciones, por el de las permutaciones que con* n *puedan hacerse*, y por lo tanto que:

3.º *El número de combinaciones de* m *objetos, tomados* n *á* n *será igual al de sus coordinaciones, dividido por el de las permutaciones de* n.

Procuremos ahora precisar estos números.

2. Es evidente que el número de coordinaciones *primarias* que con m objetos podrán formarse, será m.

$a, b, c, d, e \cdots\cdots$ suponiendo m letras.

Las *binarias* podrían hallarse, colocando al lado de cada uno los $m-1$ restantes, lo que dará un total de $m\,(m-1)$ grupos.

$ab,\ ac,\ ad \cdots\cdots\ ba,\ bc,\ bd \cdots\cdots\ ca,\ cb,\ cd \cdots\cdots$

Si al lado de cada una de éstas colocamos uno á uno los $m-2$ objetos que no entran en ellas, obtendremos todas las *ternarias*,

$abc,\ abd \cdots\cdots\ acb,\ acd \cdots\cdots\ adb,\ adc \cdots\cdots$
$bac,\ bad \cdots\cdots\ bca,\ bcd \cdots\cdots\ bda,\ bdc \cdots\cdots$
$cab,\ cad \cdots\cdots\ cba,\ cbd \cdots\cdots\ cda,\ cdb \cdots\cdots$

siendo su número, por consiguiente, $m\,(m-1)\,(m-2)$, puesto que cada coordinación binaria originará $m-2$ ternarias.

Colocando de igual modo y sucesivamente al lado de cada una de las últimas los $m-3$ objetos que no entren en ellas, tendríamos $m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)$ *cuaternarias*, y procediendo análogamente, hallaríamos las que pueden formarse con 5,6$\cdots\cdots$ objetos.

Pero por cada uno de más que deba introducirse, resultará en la fórmula que expresa su número un nuevo factor BINOMIO ó *de dos términos* de la misma forma, é igual al último de la expresión anterior disminuído en una unidad, y como siempre habrá tantos cuantos objetos se consideren en cada grupo, siendo

m el primero, si n expresa en general los que en cada coordinación deben entrar, tendremos que:

El número de coordinaciones que pueden formarse con m *objetos, tomados* n *á* n, *será igual á* m (m—1) (m—2)······(m—n+1).

Si el producto de los n primeros enteros $1.2.3.4.5\cdots\cdots n$ se representa abreviadamente por $n!$ siguiendo la notación de *Kramp* y se observa que

$$m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)\,(m-n)\cdots 1}{1.2.3.4\cdots(m-n)}$$

puesto que el valor del primer miembro no se alterará multiplicándole y dividiéndole por el producto $(m-n)\cdots 1=1.2.3.4\cdots(m-n)$, el número de agrupaciones $A_{m,\,n}$ que con m objetos tomados n á n pueden formarse, quedará también abreviadamente expresado por la fórmula

$$A_{m,\,n}=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. En cuanto á las permutaciones de n objetos, claro está que no siendo otra cosa, según sabemos por la definición, que las coordinaciones de esos n, tomados n á n, su número será

$$n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-n+1)=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 1=1.2.3.4\cdots n$$

ó más sencillamente:

$$P_n=n!$$

y por lo tanto, el de las combinaciones que puedan hacerse con m objetos tomados n á n (1, 3°)

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)}{1.2.3.4\cdots n}=\frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

Con objeto de abreviar la escritura de la primer fracción sin necesidad de introducir los factores comunes á numerador y denominador que la segunda contiene, Euler introdujo también en los cálculos la abreviación de aquella

$$C_{m\,n}=\binom{m}{n}$$

que se lee *m sobre n*, representando el producto de n factores, que empezando por m van disminuyendo de unidad en unidad, dividido por el producto de n factores que comienzan por 1 y aumentan del mismo modo.

Con esta notación se tendría, pues,

$$\binom{m}{1}=m\,;\binom{m}{2}=\frac{m\,(m-1)}{1.2}\,;\binom{m}{3}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}\text{ etc.}$$

el símbolo $\binom{m}{m}$ representaría el número 1 y los $\binom{m}{m+1}$, $\binom{m}{m+2}\cdots$ se reducirían á 0, por contener este factor sus numeradores.

Corolarios.—Siendo $m-(m-n)=n$ (T. I, 181, 2.º), las combinaciones que podrán hacerse con m objetos tomados $m-n$ á $m-n$, serán $\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$, y como esta fracción es evidentemente igual á la $\frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ últimamente hallada:

1.º *El número de combinaciones de* m *objetos tomados* n *á* n *será igual al de los mismos, tomados* m—n á m—n;
es decir, que

$$\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$$

conclusión á la que también puede llegarse, considerando que si de m objetos tomamos n, para formar una combinación, quedarán $m-n$ que formarán otra, y al contrario, luego el total será el mismo, ya que para cada una de n habrá otra de $m-n$ y viceversa.

2.º *El número de las combinaciones que pueden formarse con* m *objetos tomados* n *á* n *y* n—1 *á* n—1, *es igual al de las de* m+1, *tomados* n *á* n;
ó en otros términos:

$$\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n}.$$

En efecto;

$$\binom{m}{n}=\frac{m\,(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{1.2.3\cdots\cdots n}=\binom{m}{n-1}\frac{m-n+1}{n},$$

luego añadiendo á ambos miembros $\binom{m}{n-1}$, se tendrá:

$$\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m}{n-1}\left(\frac{m-n+1}{n}+1\right)=\binom{m}{n-1}\frac{m-n+1+n}{n}$$
$$=\binom{m}{n-1}\frac{m+1}{n}=\binom{m+1}{n}.$$

Escolio.—Prescindimos del modo de formarlas, de los casos en que los objetos ó letras puedan repetirse, y de todas sus restantes propiedades, muy numerosas é importantes por cierto, pero que no han de sernos indispensables para proseguir nuestro estudio.

II.—Binomio de Newton.

4. En el Complemento de Aritmética demostramos (T. I, 249, 2.°) que

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

y como $3=\frac{3}{1}=\frac{3.2}{1.2}$ y $1=\frac{3.2.1}{1.2.3}$, el cubo de $a+b$, puede escribirse en la forma

$$(a+b)^3=a^3+3\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}a\,b^2+\binom{3}{3}b^3$$

lo cual nos enseña que, por lo menos para esta potencia,

1.° *El desarrollo tiene tantos términos más uno, como unidades el exponente.*

2.° *El primer término de la potencia de un binomio es igual á la del mismo grado del primer término de la base, y el exponente de éste va disminuyendo en los restantes de unidad en unidad hasta que desaparece, mientras el del segundo va aumentando de igual modo á partir de O* (T. I, 248, 3.°).

3.° *El coeficiente de un término cualquiera es igual al número de combinaciones que pueden formarse con tantos objetos como exprese el grado, tomados en el que indique el de términos que precedan al que se considere.*

Si esta ley fuese, pues, general para cualquier potencia de grado entero y positivo, deberíamos tener:

$$(a+b)^m=a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\binom{m}{n}a^{m-n}b^n+\cdots\cdots+b^m$$

Con objeto de saber si lo es ó no, veamos si verificándose para un cierto valor de m, puesto que ya sabemos es cierta para $m=3$, tendrá que verificarse forzosamente para el valor siguiente $m+1$.

Bástanos para ello multiplicar ambos miembros de la anterior igualdad por $a+b$, con lo cual tendremos (T. I, 190, 1.°):

$$(a+b)^{m+1}=a^{m+1}+\binom{m}{1}a^m\,b+\binom{m}{2}a^{m-1}b^2+\cdots\cdots\binom{m}{n}a^{m-n+1}b^n$$
$$+\cdots\cdots+a^mb+\binom{m}{1}a^{m-1}b^2+\cdots\cdots\binom{m}{n-1}a^{m-n+1}b^n+\cdots\cdots+b^{m+1}$$

Y como según el último corolario del párrafo anterior,

$$\binom{m}{1}+1=\binom{m+1}{1}\;;\;\binom{m}{2}+\binom{m}{1}=\binom{m+1}{2}\;;\;\cdots\cdots$$
$$\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n},\;\cdots\cdots$$

resultará sacando factor común $a^m b$; $a^{m-1}b^2 \ldots a^{m-n+1}b^n, \ldots$

$$(a+b)^{m+1}=a^{m+1}+\binom{m+1}{1}a^m b+\binom{m+1}{2}a^{m-1}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\binom{m+1}{n}a^{m-n+1}b^n+\cdots\cdots+b^{m+1}$$

desarrollo que sigue igualmente la ley enunciada.

Siendo ésta cierta, por tanto, para $m=3$, tendrá que serlo para $m=3+1=4$, para $m=4+1=5$, etc., y como de unidad en unidad pueden formarse todos los enteros imaginables, puede asegurarse que es completamente cierta para todos los exponentes de esta clase, y escribir restableciendo los verdaderos valores de los coeficientes,

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1.2.3\cdots n}a^{m-n}b^n+\cdots\cdots+b^m,$$

expresión que se conoce con el nombre de *fórmula del binomio de Newton*, por ser este notable matemático quien la encontró por inducción.

Como sólo la fórmula nos interesa para nuestro objeto y no sus inmediatas aplicaciones á la determinación de potencias, prescindiremos de éstas, limitándonos á hacer algunas observaciones y deducir las consecuencias más importantes.

5. *Si* en vez de ser positivos *ambos términos* del binomio, *fueran negativos*, se tendría que sustituir en lugar de a y b, $-a$ y $-b$, y como las potencias pares de los números negativos son positivas y las impares negativas (T. I, 247, 2.º), *todos los términos del desarrollo serán positivos ó negativos según que el grado* m *de la potencia sea par ó impar*, puesto que en el primer caso estarían siempre multiplicadas las potencias impares de $-a$, por otras impares de $-b$, y en el segundo, por el contrario, el primer término sería negativo y en los demás se combinarían potencias pares de $-a$, con potencias impares de $-b$.

Si uno de los términos fuera negativo, que siempre podemos suponer sea el segundo, puesto que $-a+b=b-a$, tendríamos que sustituir $-b$, en vez de b, y como las potencias pares serían positivas y las impares negativas, *los términos del desarrollo serían alternativamente positivos y negativos.*

Teniendo esto presente, pueden desde luego escribirse los signos de cada término sin necesidad de atender al formarlos más que á sus valores numéricos.

En cuanto á éstos, no es preciso, como parece á primera vista, escribir y efectuar todos los productos que figuran indicados en el desarrollo, porque encontrado el valor numérico de un coeficiente cualquiera $\binom{m}{n}$, que corresponde á las potencias $a^{m-n}b^{n}$, el siguiente será según la ley de formación demostrada $\binom{m}{n}\frac{m-n}{n+1}=\binom{m}{n+1}$ y por lo tanto,

1.º *El coeficiente de un término cualquiera será igual al del anterior multiplicado por el exponente de* a *y dividido por el de* b.

Además, el término que en el desarrollo tenga n posteriores, tendrá delante

$$(m+1)-(n+1)=m+1-n-1=m-n \text{ (T. I, 181, 1.º)},$$

ya que entre todos hay $m+1$ (4, 1.º), y como el número de combinaciones de m objetos tomados n á n, es igual (3, 2.º) al de tomarlos $m-n$ á $m-n$,

2.º *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales*, por lo que basta calcular la mitad para tener los valores de todos.

Por último; interesa conocer la expresión más sencilla que toma la fórmula de Newton, cuando el primer término es 1, lo que si conviene puede conseguirse siempre, puesto que $a+b =a\left(1+\frac{b}{a}\right)$ (T. I, 62, 3.º), ó haciendo $\frac{b}{a}=h$,

$$(a+b)^m=a^m\left\{1+m.\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{b^2}{a^2}+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1.2.3\cdots n}.\frac{b^n}{a^n}+\cdots+\frac{b^m}{a^n}\right\}$$

reglas, propiedades y expresiones que permiten calcular con facilidad, bien toda la potencia, bien el valor del término que convenga.

Ejemplo.— ¿Cuál sería el valor numérico del décimo término del desarrollo de la potencia $(1+2)^{15}$?

$$m=15;\ n=9=15-6;\ \binom{15}{9}=\binom{15}{6}=\frac{15.14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5.6}$$
$$=7.13.11.5=5005.$$

$$h=2;\ h^9=2^9=81.$$

$$\binom{15}{9}2^9=5005.\ 81=405405.$$

Escolio. Como ya vimos en el Complemento de Aritmética que las reglas demostradas para los números reales, enteros y positivos son comunes á toda clase y forma de los mismos, la fórmula del binomio se aplica también á los casos en que el exponente es imaginario, inconmensurable, fraccionario ó negativo; pero entonces consta el desarrollo de un número indefinido de términos y al calcular solamente algunos se comete un error que estará representado evidentemente, por la suma de todos los que se desprecien, de la cual es siempre fácil hallar un límite aproximado.

III.—Probabilidades.

6. Certidumbre significa la *seguridad de que un hecho se verifique*, seguridad que no puede tenerse más que conociendo perfectamente todas las causas que pueden producirlo.

Incertidumbre se tiene, *cuando la realización de un hecho es* más ó menos *dudosa.*

Posibilidad, *cuando un hecho puede acontecer ó no.*

Imposibilidad, *cuando un hecho no puede verificarse.*

Probabilidad, *cuando el número de causas que pueden originar un hecho, es mayor que el de aquellas que pueden ocasionar el que deje de verificarse.*

Si en una urna por ejemplo, sabemos que hay 4 bolas y todas de color blanco, tenemos la *certidumbre* de que al coger cualquiera y extraerla será blanca, porque llamando á estas bolas, a, b, c, d, sólo hay *posibilidad* de que ocurran cuatro cosas: extraer la a, la b, la c, ó la d, y en cualquiera de ellos será blanca la extraída.

Cada uno de estos supuestos, será $\frac{1}{4}$ de los posibles, y la certidumbre, reuniéndolos todos, podrá representarse aritméticamente por su conjunto

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

En la misma hipótesis habrá *imposibilidad* de sacar de la urna bola negra, ya que no existe ninguna, ó en términos aritméticos, existen 0 negras, por lo que al sacar cada una se extraerá la 4.ª parte de 0, y la imposibilidad total quedará representada por

$$\frac{0}{4} + \frac{0}{4} + \frac{0}{4} + \frac{0}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

En cualquier otro caso, como, por ejemplo, ser blancas las tres primeras y negra la d, habrá *posibilidad*, representada por $\frac{1}{4}$ de sacar esta ultima; *imcertidumbre* de si se extraerá blanca ó negra y *probabilidad* de que ocurra lo primero, puesto que la posibilidad de sacar la a, la b, ó la c, será

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \text{ y } \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$$

Vemos por consiguiente que, la

PROBABILIDAD MATEMÁTICA no es otra cosa que la *relación que existe entre el número de casos favorables á la realización de un hecho y el total de los que pueden ocurrir*, definición general que los comprende todos, inclusos los de imposibilidad, posibilidad y certidumbre, admitiendo que su valor aritmético pueda variar entre los límites 0 y 1 que ya hemos visto representan la primera y última, por más que en realidad, si se atiende al sentido literal de la palabra, tendría que ser mayor que $\frac{1}{2}$ y menor que 1, ya que el valor $\frac{1}{2}$ representa el caso en que la probabilidad en pro y en contra es igual, como sucedería en el ejemplo, siendo blancas las bolas a, b, y negras las c, d, y los valores más pequeños que $\frac{1}{2}$, sólo indicarían posibilidad de que el hecho acaeciera, aunque lo probable sería que ocurriese otro.

Aun en este caso, sin embargo, se dice vulgarmente que el hecho es *poco probable*, y no hay por tanto inconveniente alguno en dar á la palabra su sentido más general, como se lo daremos de aquí en adelante.

La probabilidad en los casos más distintos que pueden ocurrir, se distingue con los nombres de SIMPLE, *la que resulta de la realización de un solo hecho*, como el de introducir la mano en la urna y extraer una ó varias bolas.

COMPUESTA, *la que resulta del concurso de varios hechos*, como sacar una blanca y una negra, en dos extracciones.

ABSOLUTA, *la que se refiere á los hechos que se consideran en rela-*

ción á todos los demás que pueden ocurrir, como cuantas hemos citado hasta aquí.

Relativa, *la que se refiere á los hechos considerados en su relación á algunos de los restantes que es posible ocurran*, como sería, por ejemplo, la de extraer una bola blanca con preferencia á una negra, de una urna que contuviera además bolas de otros colores.

Por ultimo; son probabilidades contrarias, *las que se refieren á dos hechos* ó conjuntos de hechos, *cada uno de los cuales es la negación del otro*, como sacar una bola blanca, ó una negra, si en la urna no hubiera más que bolas de estos dos colores, pero si hubiera otras, por ejemplo, encarnadas, las probabilidades de sacar una bola blanca y una negra ya no serían contrarias, pues la contrario de extraer una blanca, sería extraerla negra *ó* encarnada, es decir, *no* blanca.

7. De las consideraciones hechas hasta aquí y de la misma definición se deduce que, en general,

1.º *La probabilidad absoluta de que un hecho ocurra, es igual al número de casos favorables á su realización, dividido por el total de los que pueden ocurrir.*

La principal dificultad de su cálculo estriba precisamente, no en su determinación, sino en que no siempre se tienen en cuenta todos los casos posibles, bien por ser desconocidos, bien por error de la inteligencia, sumamente fácil en estas cuestiones, si no se examinan con detención los resultados á que conducirán cuantas combinaciones puedan hacerse con las diferentes hipótesis ó causas que puedan influir en la realización de los hechos.

Para convencerse de la facilidad de este error, basta un sencillo ejemplo.

A buen seguro que preguntando á varias personas si será más probable al coger un puñado de garbanzos y contarlos, que resulte un número par ó impar, la mayoría contestará que tan probable es una cosa como otra, y hasta no faltará quien encuentre inocente la pregunta.

La probabilidad, no obstante, es muy distinta, y para hacerlo ver con claridad concretaremos el ejemplo mas, suponiendo que en lugar de coger garbanzos, se arrojan cuatro bolas que llamaremos a, b, c, d, con intención de que penetren en un agujero más ó menos lejano y se pregunta qué será más fácil, si que se introduzca en él un número par ó impar, en el supuesto de que entren una ó varias.

Aun no precipitándose á contestar, la mayor parte de las personas dirían: pueden entrar 1 ó 3 en número impar y 2 ó 4 en número par, luego la probabilidad es igual.

Sin embargo, al entrar una sola, puede ser la

$$a, b, c \text{ ó } d$$

lo que da 4 casos posibles y en realidad distintos; al entrar 2 pueden ser

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$$

lo que produce otros 6; al entrar 3 podrán ser

$$abc, abd, acd, bcd,$$

lo que origina otros 4; y el caso en que entraran todas

$$abcd$$

junto con los anteriores, compone un total de 15 casos posibles, de los cuales hay 8 favorables al número impar y 7 al número par.

La primer probabilidad $\frac{8}{15}$ es, pues, mayor que la segunda $\frac{7}{15}$, por lo cual es más fácil coger ó hacer penetrar un número impar, que un número par, contra lo que se cree generalmente y puede parecer al pronto.

Conviene, pues, tener presente siempre, que

2.º *El número de casos favorables á la realización de un hecho, es igual al de las combinaciones de cuantas causas puedan producirlo y el total al de cuantas puedan ocurrir.*

Problema 1.º En una urna hay 13 bolas blancas, 13 negras, 13 encarnadas y 13 azules. Sacando de una vez 3, ¿qué probabilidad habrá de que sean blancas?

Las 52 bolas podrán combinarse de 3 en 3, de $\binom{52}{3}$ maneras diferentes (3, 1.º);

Con las bolas blancas podrán hacerse $\binom{13}{3}$ combinaciones distintas;

$$\text{Probabilidad} = \binom{13}{3} : \binom{52}{3} = \frac{13.12.11.}{52.51.50.} = \frac{11}{17.50} = \frac{1}{77'28}.$$

Escolio. Los valores numéricos de las probabilidades suelen expresarse en esta forma para mayor claridad, pues facilita la comprensión de su magnitud.

Si p representa la probabilidad de que un hecho ocurra, q la del contrario, f el número de casos favorables al primero y c el de los contrarios, tendremos según lo dicho,

$$p = \frac{f}{f+c} \; ; \; q = \frac{c}{f+c}$$

puesto que el total de casos será siempre la suma de los favorables y contrarios, luego sumando,

$$p + q = \frac{f+c}{f+c} = 1 \text{, de donde, } p = 1 - q \text{, y } q = 1 - p.$$

Lo cual nos enseña que:

3.º *La suma de las probabilidades contrarias, ha de ser siempre igual á la unidad.*

4.º *Para encontrar la probabilidad contraria á otra conocida, bastará restar ésta de la unidad.*

También es necesario en los cálculos tener un especial cuidado, en no tomar como contrarios hechos solamente *incompatibles*, ó que no puedan ser al mismo tiempo, pero sin que esto implique la necesidad de que se realice uno ú otro.

Así, por ejemplo, la probabilidad de vida y la de muerte, son evidentemente contrarias, pero la de que una persona viva en un instante dado y la de que muera en el mismo, sólo son incompatibles, pues lo contrario de vivir, no será precisamente morir en aquel momento, sino haber muerto en cualquiera de los comprendidos entre aquél y su nacimiento.

Problema 2.º ¿Cuál sería en el supuesto del precedente, la probabilidad de no sacar las tres bolas blancas?

$$q = 1 - \frac{1}{77'28} = \frac{76'28}{77'28} = \frac{1}{1'01}.$$

Supongamos ahora que el hecho pueda realizarse de varias maneras, como ocurriría en el ejemplo resuelto, si en vez de buscar la de que fuesen las 3 bolas de un color determinado, sólo se quisiera hallar la de que fuesen de un mismo color, blanco, negro ó encarnado.

Si llamamos n, n', n'' á los números de casos favorables á cada uno de esos supuestos, N á todos los que pueden ocurrir, p, p', p'' á sus respectivas probabilidades y P á la buscada, el total de casos favorables al hecho será $n + n' + n''$, y la probabilidad buscada por consiguiente,

$$P = \frac{n+n'+n''}{N} = \frac{n}{N} + \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} = p + p' + p''$$

es decir, que:

5.° *La probabilidad absoluta de que se verifique uno cualquiera de varios hechos independientes, es igual á la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.*

Problema 3.° ¿Cuál sería en el mismo supuesto de los anteriores, la probabilidad de sacar tres bolas blancas, negras ó encarnadas?

$$\left\{ \binom{13}{3} + \binom{13}{3} + \binom{13}{3} \right\} : \binom{52}{3} = 3 \binom{13}{3} : \binom{52}{3} = \frac{3.13.12.11}{52.51.50}$$
$$= \frac{3.11}{17.50} = \frac{1}{25'76}.$$

Busquemos ya la probabilidad relativa, suponiendo, por ejemplo, queremos averiguar la que habrá de que esas bolas sean blancas, más bien que negras ó encarnadas.

Siguiendo igual notación, los casos favorables serán n, el total de los que se consideran $n + n' + n''$ y la probabilidad, por tanto,

$$P = \frac{n}{n+n'+n''} = n : (n + n' + n'')$$

ó dividiendo por los N que en totalidad pueden ocurrir, dividendo y divisor,

$$P = \frac{n}{N} : \left(\frac{n}{N} + \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} \right) = \frac{p}{p + p' + p''}$$

luego,

6.° *La probabilidad relativa es igual al cociente de dividir la absoluta del hecho, por la suma de todas las correspondientes á los hechos que se consideran.*

Problema 4.° ¿Cuál será en el supuesto de los precedentes problemas, la probabilidad que habrá de sacar tres bolas blancas, antes que tres negras ó tres encarnadas?

Como en la hipótesis hecha, son iguales las tres probabilidades,

$$P = \frac{\frac{1}{77'28}}{3.\frac{1}{77'28}} = \frac{1}{3}.$$

8. Tratándose de probabilidades compuestas, puede ocurrir que los hechos que influyen en la realización del definitivo, deban ser simultáneos ó sucesivos.

Examinemos el primer caso.

Si entre N casos hay n en los que ocurre un suceso y entre N', n', en que otro se verifica, cada uno de los N primeros combinado con cada uno de los N' segundos, dará un total de combinaciones $N\,N'$, y los casos favorables á que ambos se realicen al mismo tiempo, serán por igual razón $n\,n'$, luego la probabilidad estará representada por

$$P=\frac{n\,n'}{N\,N'}=\frac{n}{N}\cdot\frac{n'}{N'}=p\cdot p'$$

si llamamos como siempre p y p' á las probabilidades simples de cada uno de los hechos que concurren á la realización del supuesto.

Siendo aquéllos más de dos y suponiendo haya n'' de entre N'' favorables al tercero, tendríamos de igual manera:

Número total de casos $=N\,N'\,N''$.

Número de casos favorables $=n\,n'\,n''$.

$$P=\frac{n\,n'\,n''}{N\,N'\,N''}=\frac{n}{N}\cdot\frac{n'}{N'}\cdot\frac{n''}{N''}=p\cdot p'\cdot p''$$

Y aun cuando los hechos fueran sucesivos y dependieran unos de otros, la probabilidad sería la misma, pues una vez realizado el primero ó los primeros, los restantes serán ya independientes y podrá suponerse se realizan simultáneamente, sin más diferencia que la de haber disminuído siempre el número total de casos posibles, por haberse verificado ya algunos, y en ocasiones también el de los favorables á estos hechos, si no son diferentes de los que ya han tenido lugar.

Entonces, por lo tanto, deberán calcularse con cuidado las probabilidades simples p, p', p'',..... de cada uno, teniendo en cuenta la variación que aquellos ya realizados puedan hacer sufrir á sus numeradores y denominadores, pero en cualquier caso según lo demostrado.

1.° *La probabilidad compuesta, será igual al producto de las probabilidades simples de cada uno de los hechos de que dependa el definitivo.*

PROBLEMA 1.° Una baraja de 40 cartas está dividida en 4 paquetes que contienen las 10 de cada uno de los 4 palos. Sacando de ellos una carta cualquiera, ¿cuál será la probabilidad de extraer una figura de oros?

La probabilidad es compuesta ó dependiente de dos hechos:

llevar la mano al paquete de oros $p = \frac{1}{4}$, y extraer de él una figura $p' = \frac{3}{10}$, luego

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40}.$$

La contraria, ó sea la de *no* sacar figura de oros, sería

$$Q = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}.$$

Esta cuestión podría también resolverse por la regla de las probabilidades simples, suponiendo las cartas agrupadas en un solo montón, porque en el enunciado hemos supuesto que todos los casos eran igualmente posibles y probables por ser iguales los paquetes, pero no siempre sucederá así.

PROBLEMA 2.° Formando 4 paquetes de cartas; el primero con las 12 figuras, el segundo con 8 de las restantes cartas, el tercero con 11 y el cuarto con las 9 que quedan, ¿cuál será la probabilidad que tendrá de sacar una figura de oros, cualquier persona que ignore la combinación hecha?

Probabilidad de llevar la mano al paquete de las figuras, $p = \frac{1}{4}$.

Idem de extraer de ella una figura de oros, $p' = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

La probabilidad por consiguiente es algo menor que antes, como debía suceder, pues la de acertar el paquete es la misma, pero la de extraer la figura de oros entre 12 cartas ha de ser más pequeña que entre 10.

Los hechos hasta aquí, han sido independientes unos de otros.

PROBLEMA 3.° Después de barajadas las cartas, ¿cuál será la probabilidad de que las tres primeras sean sucesivamente un rey, un caballo ó una sota, ó de extraer estas tres cartas en ese orden?

Probabilidad de que la primera sea un rey, $p = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

» » segunda » caballo, $p' = \frac{4}{39}$.

» » tercera » una sota, $p'' = \frac{4}{38}$.

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{4}{5.39.19} = \frac{4}{3705} = \frac{1}{926'25}$$

PROBLEMA 4.º ¿Cuál será la probabilidad de extraer las mismas cartas en cualquier orden?

Probabilidad de extraer la primera figura $p = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

» » segunda » $p' = \frac{11}{39}$

» » tercera » $p'' = \frac{10}{38} = \frac{5}{19}$.

$$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{5}{19} = \frac{33}{702} = \frac{1}{21'13}.$$

Ocupémonos ahora del caso particular más interesante para nosotros, que es aquel en que un mismo hecho deba repetirse varias veces.

Si se verifica siempre en iguales condiciones y su probabilidad es p, la de que se repita n veces seguidas, será en virtud de lo dicho:

$$p \cdot p \cdot p \cdots\cdots n \text{ veces} = p^n,$$

ó en otros términos:

2.º *La probabilidad de que un hecho se repita consecutivamente en las mismas circunstancias, es igual á la probabilidad simple del mismo, elevada á la potencia que indique el número de veces que ha de repetirse.*

PROBLEMA 5.º Una persona cuenta á otra un suceso que ha presenciado; ésta á una tercera que lo transmite á una cuarta, y así sucesivamente, hasta que la décima nos la cuenta á nosotros. Suponiendo sea $\frac{9}{10}$ la probabilidad de que cada persona lo refiera tal como se lo contaron, ¿qué grado de veracidad deberemos conceder á la narración?

$$P = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = \frac{3486784401}{10000000000} = 0'35 \text{ aproximadamente.}$$

Si después de verificarse n veces un hecho, quisiéramos que además se realizara $m-n$ veces su contrario, como sucedería, por ejemplo, al buscar la probabilidad de que en $m=20$ extracciones sucesivas de una urna que contuviera bolas blancas y negras, se sacaran consecutivamente $n=13$ blancas y después $m-n=7$ negras, la citada probabilidad se compondría de otras dos igualmente compuestas, la p^n de que el primero aconteciera n veces seguidas y la q^{m-n} de que ocurriera el segundo $m-n$ veces consecutivas también, luego la buscada sería:

$$P=p^n\, q^{m-n}.$$

Problema 6.º Tirando un dado al azar 10 veces seguidas, y suponiendo marcadas sus seis caras con los seis primeros números enteros, ¿cuál será la probabilidad de que el número 1 quede en la parte superior las 3 primeras veces y no vuelva á quedar en las 7 restantes?

$$p=\frac{1}{6};\, q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6};\, P=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7=\frac{1}{216}\cdot\frac{16807}{117649}$$
$$=\frac{1}{1512} \text{ aproximadamente.}$$

La probabilidad aumentaría evidentemente, si aun queriendo que en m ocasiones consecutivas se verificase un suceso n veces y $m-n$ su contrario, fuese indiferente el orden, porque pudiendo hacerse con m elementos cualesquiera tomados n á n (3)

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}=\binom{m}{n}$$

combinaciones, la probabilidad será ese número de veces mayor, quedando expresada por

$$P=\binom{m}{n}p^n\, q^{m-n}$$

término general del desarrollo de la fórmula del binomio de Newton (4, 3.º) que tiene n posteriores ó precedentes, si se supone escrita en orden inverso, lo que no altera el valor del coeficiente, pues ya sabemos son iguales los equidistantes de los extremos (5, 2.º).

Esto nos demuestra que:

3.º *La probabilidad de que un suceso se reproduzca un cierto número de veces, dentro de otro mayor de hechos, es igual al valor del término del desarrollo que se obtendría elevando por la fórmula de Newton á la potencia indicada por el total, la suma de las probabilidades simples correspondientes al hecho y á su contrario, en el cual correspondiese á la primera un exponente igual al número de veces que deba reproducirse aquél.*

Problema 7.º ¿Cuál sería en el supuesto del problema anterior, la probabilidad de que el número 1 quedase en la parte superior 3 de las 10 veces?

$$P=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7=\frac{10.9.8}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1512}=\frac{120}{1512}=\frac{1}{12'6}$$
aproximadamente.

9. Finalmente; la probabilidad aumentaría aun más, si ese número n fuese un máximo ó mínimo, es decir, si quisiera averiguarse, no la de que el suceso ocurriera n veces precisamente, sino *por lo menos* n ó *á lo más* $n-1$.

En ambos casos buscaríamos la probabilidad de que se realizase uno de varios hechos (7, 5.°) debiendo en el primero sumarse las correspondientes á que ocurriera m, $m-1$, $m-2 \cdots\cdots$ n veces, y en el segundo, 0, 1, 2$\cdots\cdots$ $n-1$.

Ambas probabilidades deben ser contrarias, pues evidentemente deberá suceder siempre una de las dos cosas: ó que ocurra n veces por lo menos, ó que no llegue á ocurrir este número.

Conocida una de ellas, puede, por tanto, encontrarse la otra con facilidad, ó bien directamente, por medio de la siguiente regla:

1.° *La probabilidad de que un suceso se reproduzca cierto número de veces por lo menos, ó no llegue á verificarse ese número, es igual á la suma de tantos términos consecutivos más uno como indique dicho número, del desarrollo que se obtendría elevando por la fórmula de Newton á la potencia indicada por el total de hechos, la suma de las probabilidades simples correspondientes al suceso y á su contrario en el primer caso y á la de todos los restantes en el segundo.*

Problema 1.° ¿Cuál será la probabilidad de que tirando un dado 4 veces, la cara marcada con 6 quede en la parte superior 2 de ellas por lo menos?

$$p = \frac{1}{6};\, q = \frac{5}{6} : P = \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6} + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$= \frac{1}{6^4} + 4 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{1+20+150}{6^4}$$
$$= \frac{171}{1296} < \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$$

Problema 2.° ¿Cuál sería la probabilidad de que en las 4 veces no llegara á quedar 2 en la parte superior la cara marcada con 6?

$$P = \binom{4}{3}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5^3}{6^3}$$
$$+ \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} \cdot \frac{5^4}{6^4} = \frac{500+625}{6^4} = \frac{1125}{1296} < 0'87 > 0'86$$

Debiendo verificarse $\frac{171}{1296} + \frac{1125}{1296} = 1$, calculada la anterio probabilidad, hubiera sido más fácil decir:

$$P = 1 - \frac{171}{1296} = \frac{1125}{1296}.$$

Escolio.—Como en la mayoría de los casos, ni las probabilidades simples están expresadas por números tan sencillos, ni los exponentes son tan pequeños, sino que, por el contrario, llegan á tener valores considerables, estos cálculos hay que efectuarlos por logaritmos, cuyo error menor que 0'0000001 y aun que 0'00000005 aumenta extraordinariamente al multiplicarlo por los exponentes, para encontrar los de las potencias (T. I, 287, 3.º), pudiendo afectar hasta á las primeras cifras (T. I, 237, 1.º).

Si se quiere, pues, que las seis primeras de los resultados sean exactas para obtener los verdaderos antilogaritmos, ó por lo menos números suficientemente aproximados, es forzoso operar con logaritmos de más de siete cifras, razón por la cual ofrecimos en el Prólogo insertar en este tomo las mantisas de los correspondientes á los 100 primeros enteros con 30 cifras y las de los restantes hasta 1.000 con 15, para lo cual es suficiente conocer las de los números primos (T. I, 280, 1.º) únicas que con objeto de acortarlas todo lo posible, contendrán las Tablas I y II.

10. Volviendo á la expresión de la probabilidad en la repetición de hechos, no necesita demostrarse, por ser evidente, que cuanto mayor sea el número de veces m que un hecho pueda verificarse, mayor será también la probabilidad de que acontezca ó se repita, y que dentro de un determinado valor de m, unos valores de n darán mayores probabilidades que otros, pudiendo convenir en ocasiones calcular cuál será el caso de mayor probabilidad, y como esta se halla siempre expresada por el término general del desarrollo de la fórmula del binomio, claro es que encontraremos las condiciones necesarias para esa probabilidad máxima, buscando las precisas para que dicho término sea mayor que el que le preceda y el que le siga, es decir, escribiendo,

$$\binom{m}{n} p^n q^{m-n} > \binom{m}{n-1} p^{n+1}\, q^{m-n-1}\,;$$
$$\binom{m}{n} p^n q^{m-n} > \binom{m}{n+1} p^{n-1}\, q^{m-n+1}$$

y como los primeros miembros de la primer desigualdad tendrán los factores comunes

$\binom{m}{n-1} p^n\, q^{m-n-1}$ y los de la segunda $\binom{m}{n} p^{n-1}\, q^{m-n}$, resultará, suprimiéndolos

$$\frac{m-n+1}{n}\cdot q > p; \qquad p > \frac{m-n}{n+1}\cdot q$$

de las cuales se deduce respectivamente,

$$\frac{m-n}{n}+\frac{1}{n} > \frac{p}{q}; \quad \frac{m-n}{n} > \frac{p}{q}-\frac{1}{n}$$

$$\frac{p}{q}\cdot n+\frac{p}{q} > m-n; \quad \frac{m-n}{n} < \frac{p}{q}+\frac{p}{qn}=\frac{p}{q}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

y como n es un número variable que podrá aumentar indefinidamente, el límite de $\frac{1}{n}$ será 0 (T. I, 199, 4.º); los valores de los segundos miembros uno mayor y otro menor que $\frac{p}{q}$ podrán aproximarse á este número cuanto se quiera, y la condición de que $\frac{m-n}{n}$ sea siempre mayor que el primero y menor que el segundo, sólo podrá satisfacerse siendo

$$\frac{m-n}{n}=\frac{p}{q}$$

lo cual demuestra que:

2.º *La mayor probabilidad de que un hecho acontezca varias veces, se verifica cuando el número de ellas y el de aquellas en que ha de suceder el contrario, son directamente proporcionales á las probabilidades de ambos.*

PROBLEMA 3.º—Habiendo en una urna 8 bolas negras y 12 blancas, ¿qué combinación se verificará con mayor probabilidad, al extraer 5 bolas, ó hacer 5 extracciones sucesivas en igualdad de condiciones?

Número total de bolas $8+12=20$; $p=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$;

$$p'=\frac{12}{20}=\frac{3}{5};\ m=5.$$

$5-n:n::\frac{2}{5}:\frac{3}{5}$; $5:n::1:\frac{3}{5}$ (T. II. 57, Cor. 1.º); $n=3$;

$$m-n=5-3=2$$

y como en la proporción escrita, corresponde $5-n$ á la probabilidad $\frac{2}{5}$ de sacar bola negra y n á la $\frac{3}{5}$ de la blanca, lo más probable será que se extraigan 2 negras y 3 blancas.

Siendo según sabemos $1-p$ la probabilidad de que un hecho *no* acontezca, la anterior proposición nos demuestra que

$m-n:n::1-p:p$, de donde $m:n::1:p$; $p=\frac{n}{m}$

por lo cual puede admitirse como *más* probable que si entre m

sucesos análogos, ocurre un hecho n veces, su probabilidad será $\frac{n}{m}$, y repitiendo las observaciones puede llegarse á determinar un valor *medio* (T. II, 68), que cuando el número de experiencias aumente suficientemente, apenas se diferenciará de la probabilidad matemática.

Las PROBABILIDADES MEDIAS, *que se establecen en virtud de los hechos observados*, cuando se desconocen en todo ó parte las causas que los motivan, conducen á la PROBABILIDAD MORAL, ó *tendencia á creer que un hecho se verificará*, á la predicción de los futuros, teniendo en cuenta los acontecidos, y en general á expresar todas las que se inducen como resultado de la observación y la experiencia.

No diferenciándose unas de otras más que en esta circunstancia, evidentemente se podrán aplicar á las últimas cuantos razonamientos hemos hecho, escribiendo para las simples y parciales la relación de los casos favorables con la totalidad de los observados, y determinando las restantes por las reglas demostradas.

La teoría de las probabilidades forma hoy una extensísima rama de las ciencias matemáticas, llamada á transformar del todo en poco tiempo un gran número de operaciones mercantiles dándoles mayor exactitud, rama en la cual no podemos siquiera penetrar por exigir bastantes conocimientos de cálculo integral.

Aun considerada elementalmente no hemos hecho más que bosquejar sus fundamentos, pero las sencillas y ligeras ideas que anteceden, son suficientes para que podamos proseguir el estudio de los cálculos mercantiles hasta el límite que nos hemos propuesto, y á ellas debemos limitarnos dada la índole y el objeto de nuestro trabajo.

Vamos, pues, á dar por terminadas estas Nociones preliminares, resolviendo una cuestión muy fácil de repartición compuesta, algo distinta de las que resolvimos en el volumen anterior, sólo para que acaben de comprenderse la multitud de cuestiones á que las probabilidades pueden aplicarse y la ligereza con que muchos afirman bastan unas cuantas reglas para resolver las más elementales y frecuentes.

PROBLEMA 4.º — Dos personas A y B, poseedoras de 300 pesetas que debían repartirse por igual, convienen en que se las quede la que de cinco partidas de ajedrez logre ganar tres, y cuando la primera ha ganado dos y la segunda una, tienen que separarse dándolas por terminadas. ¿Cuánto debe llevarse cada una?

No faltará quien crea evidente que á la primera corresponden 200 pesetas y á la segunda 100.

Según el convenio hecho, para que las 300 pesetas pertenecieran á *A*, debía ganar la cuarta partida, ó perdiéndola, ganar la quinta.

Probabilidad del primer supuesto $=\frac{1}{2}$.

» del segundo » $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

» de que aconteciera una cualquiera de ambas cosas $=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

» de que *B* ganara las dos segundas $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Cantidad que corresponde á A$=300.\frac{3}{4}=225$ ptas.

» » á B$=300.\frac{1}{4}=\ 75$ »

LIBRO PRIMERO.

INTERESES Y DESCUENTOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

INTERÉS.

I.—Interés simple.

11. En las operaciones algo complicadas en que el interés (T. II, 152) no es objeto final, sino uno de los elementos que intervienen en la cuestión, no se usan jamás las fórmulas conocidas (T. II, 155) en que entra el tanto por 100, aunque esta sea siempre la manera usual de expresarlo, sino las que de ellas ó directamente pueden deducirse en función del tanto por 1 que se determina previamente, cualquiera que sea el dado, *dividiendo su valor por el del cuánto á que se refiera*, con lo cual resultan expresiones mucho más sencillas y fáciles de calcular.

De aquí en adelante, representaremos siempre como es costumbre por r dicho tanto por 1 y como será $r = \frac{t}{100}$ si es t el tanto por 100, de donde $t = 100r$ bastará para introducirlo en cualquier fórmula de las deducidas en el anterior volumen, reemplazar t por $100r$ y simplificar la expresión que resulte, aunque en la mayoría de los casos, será más breve y claro encontrarla directamente.

Si efectuamos dicha sustitución y simplificación en los valores del interés $y=\frac{c\,t\,n}{100}$ é $y=\frac{C\,t\,n}{100+t\,n}$, tendremos:

$$y=\frac{c\cdot 100\,r\cdot n}{100}=cnr\;;\;y=\frac{C\cdot 100\,r\cdot n}{100+100\,rn}=\frac{Cnr}{1+rn}$$

de las que se deduce inmediatamente

$$c=\frac{y}{n\,r}\;;\;n=\frac{y}{c\,r}\;;\;r=\frac{y}{c\,n}\;;\;C=\frac{y\,(1+r\,n)}{n\,r}$$

la segunda y tercera de las cuales, pueden también escribirse, recordando que $C=c+y$, $c=C-y$, $y=C-c$, bajo la forma

$$n=\frac{C-c}{c\,r}\;;\;r=\frac{C-c}{c\,n}$$

de cualquiera de las cuales se desprende además que, $n\,c\,r=C-c$, $c+n\,c\,r=C$, y por consiguiente,

$$C=c\,(1+nr)\;;\;c=\frac{C}{1+n\,r}.$$

Expresiones análogas á las del tanto por 100, que servirán para resolver directamente cuantas cuestiones fundamentales puedan presentarse, siempre que transformadas convenientemente si es preciso, *se refieran* n *y* r *á la misma unidad de tiempo* (T. II, 153).

Problema.—¿En cuántas se convertirán 4000 *pesetas* prestadas por cinco años al 3 por 100 mensual de interés simple?

$$r=0'03;\ 5\text{ años}=5.12=60\text{ meses};\ C=3000\,(1+60.0'03)$$
$$=3000.2'8=8400\ pts.$$

O de otro modo:

$$y=3000.60.0'03=3000.1'8=5400\ pts.;$$
$$C=3000+5400=8400\ pts.$$

II.—Interés compuesto.

12. Recibe el nombre de interés compuesto, el *devengado por un capital, cuando al final de cada período de tiempo á que se refiere el tanto, se le agrega el simple que le corresponde*, para acrecentar su valor y aumentar por consiguiente la ganancia total.

Este es el interés que debe calcularse, siempre que al terminar dichos períodos no se recoja la correspondiente ganancia, puesto que entonces su legítimo dueño se ve privado de ella al mismo tiempo que del capital primitivo.

Habiendo todavía quien suma con los dedos á pesar de los adelantos de la Aritmética, y quien viaja á pie ó en carro, no obstante la existencia de los vapores y ferrocarriles, no es de extrañar haya también quien para calcular este interés resuelva una proporción para cada período de tiempo, ó escriba una serie de igualdades absurdas $100 = 103$, por ejemplo, cuya reunión ni se parece á una conjunta; pero lo más frecuente es valerse de la sencilla fórmula que vamos á determinar, siguiendo la notación empleada hasta el presente.

El capital c según se acaba de ver, adquirirá al terminar el primer período para el que será $n=1$, un valor $C'=c\,(1+r)$, que empezará á devengar interés al concluir dicho período.

Al terminar el segundo, el primitivo se convertirá por consiguiente en

$$C''=C'\,(1+r)=c\,(1+r)\,(1+r)=c\,(1+r)^2.$$

Al terminar el tercero, en

$$C'''=C''\,(1+r)=c\,(1+r)^2\,(1+r)=c\,(1+r)^3.$$

y como siguiendo la misma marcha hasta terminar n períodos, se tendrá que multiplicar c por tantos factores $(1+r)$ como unidades tenga n, en caso de ser entero, se tendrá en definitiva

$$C=c\,(1+r)^n$$

expresión que conteniendo una potencia indicada debe siempre calcularse por logaritmos, empleando su transformada (T. I, 280, 1.°).

$$\text{Log. } C=\text{Log. } c+n \text{ Log. } (1+r)$$

PROBLEMA 1.° ¿En qué se convertirá una capital de 12500 *pesetas*, prestadas por 7 años al $4\frac{1}{2}$ % de interés anual compuesto?

$$r=0'045;\ 1+r=1'045;\ \text{Log. } (1+r)=0'0191163;\ n=7;$$

$$n \text{ Log. } (1+r)=7.0'0191163=0'1338141;$$

$$c=12500;\ \text{Log. } c=4'0969100;\ \text{Log } C=4'0969100+0'1338141$$
$$=4'2307241.$$

$$C=\text{Antlg. } 4'2307241=17010'77 \textit{ pesetas},$$

operaciones que en la práctica pueden disponerse así (T. I, Tabla III).

$$C = \text{Antlg.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Log. } 12500 = & 4'0969100 \\ 7 \text{ Log. } 1'045 = 7.0'0191163 = & 0'1338141 \end{array} \right\} = 17010'77 \textit{ pesetas.}$$

$$\begin{array}{r} 4'2307241 \\ 043 \\ \hline 19800 \\ 19290 \\ 1419 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2553 \\ \hline 0'077 \end{array}$$

13. Cuando el tiempo no constituye un número exacto de períodos, la costumbre es suponer que el capital devenga *interés compuesto durante el expresado por el mayor entero contenido en él, é interés simple en el restante.*

En esta hipótesis, si al número exacto de unidades n se agrega una fracción de tiempo $\frac{p}{q}$, referida á la misma unidad, el interés simple producido por el capital $c\,(1+r)^n$, acumulado al final del tiempo n, será

$$y = c\,(1+r)^n \cdot \frac{p}{q} \cdot r$$

y el capital final, por consiguiente,

$$C = c\,(1+r)^n + c\,(1+r)^n \cdot \frac{p}{q} \cdot r = c\,(1+r)^n\,(1 + \frac{p}{q} \cdot r),$$

de donde,

$$\text{Log. } C = \text{Log. } c + n \text{ Log. } (1+r) + \text{Log. } (1 + \frac{p}{q} \cdot r).$$

Problema 2.º ¿En qué se convertiría prácticamente el capital del problema anterior, si la duración del préstamo fuera de 7 años y 5 meses?

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{12}\,;\ \frac{5}{12} \cdot 0'045 = \frac{0'225}{12} = \frac{0'075}{4}\,;\ 1 + \frac{0'075}{4} = \frac{4'075}{4}\,;$$

$$\text{Log. } \frac{4'075}{4} = 0'6101276 - 0'6020600 = 0'0080676;$$

$$\text{Log. } C = 4'2307241 + 0'0080676 = 4'2387917$$

$$\begin{array}{r} 5479 \\ \hline 24380 \\ 18190 \\ 6210 \\ 1196 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 2507 \\ \hline 0'972 \end{array}$$

$$C = 17329'72 \textit{ pts.}$$

La fórmula práctica que acabamos de aplicar es completamente inexacta, por ser falsa la hipótesis en que se funda, muy distinta de la condición impuesta en el enunciado cuando se pide el interés compuesto devengado por el capital c durante el tiempo $n+\frac{p}{q}$, en razón á que si representamos por x el tanto de interés que deba devengar durante la nueva unidad de tiempo $\frac{1}{q}$, con arreglo al convenido para los períodos á que éste se refiera, el capital $c\,(1+r)^n$ deberá adquirir durante las nuevas p unidades, un valor

$$C=c\,(1+r)^n\,(1+x)^p$$

del todo diferente al

$$C=c\,(1+r)^n\,(1+px),$$

puesto que los factores $(1+x)^p$ y $(1+px)$, distintos en ambas expresiones, sólo podrán tener el mismo valor en el caso particular de ser $p=1$.

En cualquier otro y en general, por lo tanto, queda, pues, demostrada la falsedad de esa fórmula.

Para deducir la verdadera, empecemos por investigar la relación que existe entre los TANTOS EQUIVALENTES, ó *que hacen adquirir á un capital iguales valores en un mismo transcurso de tiempo, expresado en distintas unidades.*

En el interés simple, por ejemplo, son muy fáciles de hallar (T. II, 85) por la proporcionalidad que los une á las unidades de tiempo, cosa que no sucede en el compuesto.

14. El 8 °/₀ anual, 4 °/₀ semestral, 2 °/₀ trimestral, etc., son tantos de interés simple equivalentes, porque en cualquier número n de años harán adquirir al capital c los valores iguales.

$$C=c\,(1+n\cdot 0'08);\; C=c\,(1+2\,n\cdot 0'04)=c\,(1+n\cdot 0'08);$$
$$C=c\,(1+4\,n\cdot 0'02)=c\,(1+n\cdot 0'08),\ \text{etc.},$$

ya que n años, tienen $2\,n$ semestres, $4\,n$ trimestres, etc., por lo que no hay más que dividir el tanto en el mismo número de partes que el tiempo, para obtener iguales resultados, pero las expresiones del capital final cuando el interés es compuesto y el tiempo se divide en q partes, convirtiéndolo en nq y fraccionando el tanto de igual modo, ó sea dándole el valor $\frac{r}{q}$, serían

$$C=c\,(1+r)^n;\quad C'=c\left(1+\frac{r}{q}\right)^{nq}$$

valores que distan mucho de ser iguales, según vamos á demostrar, desarrollando ambas potencias por la fórmula del binomio de Newton (4) con lo que se convierten en

$$C=c\left(1+nr+\frac{n\,(n-1)}{2\,!}\,r^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3\,!}\,r^3+\cdots\cdots\right)$$

$$C'=c\left(1+nq\cdot\frac{r}{q}+\frac{nq\,(nq-1)}{2\,!}\cdot\frac{r^2}{q^2}+\frac{nq\,(nq-1)\,(nq-2)}{3\,!}\cdot\frac{r^3}{q^3}+\cdots\right)$$

ó dividiendo cada factor de los numeradores de los coeficientes del segundo desarrollo por cada uno de los factores q que en igual número se hallan en los denominadores de las potencias de $\frac{r}{q}$,

$$C'=c\left(1+nr+\frac{n\left(n-\frac{1}{q}\right)}{2!}\,r^2+\frac{n\left(n-\frac{1}{q}\right)\left(n-\frac{2}{q}\right)}{3!}\,r^3+\cdots\cdots\right)$$

Este valor y el primero, tienen comunes el factor c, los dos primeros términos del paréntesis, 1 y nr, las potencias de r y los denominadores, pero como

$$1>\frac{1}{q};\ 2>\frac{2}{q};\ 3>\frac{3}{q};\ \cdots\cdots$$

y por consiguiente (T. I, 175, 3.º)

$$n-1<n-\frac{1}{q};\ n-2<n-\frac{2}{q};\ n-3<n-\frac{3}{q};\ \cdots\cdots$$

los numeradores correspondientes al primero son menores que los pertenecientes al segundo, por serlo los factores que los componen (T. I, 188, 3.º), luego $C<C$ (T. I, 216, 3.º y 169, 7.ª), lo cual demuestra que:

El capital final del interés compuesto va aumentado á medida que el tanto y el tiempo se fraccionan proporcionalmente.

Prestado, pues, c al 2 °/₀ trimestral, produciría más que al 4 °/₀ semestral, que á su vez daría mayor valor final, que si se prestase al 8 °/₀ anual.

Para que fuesen iguales los dos valores,

$$C=c\,(1+r)^n;\ C=c\,(1+x)^{nq}$$

llamando x al tanto desconocido equivalente al r, debería verificarse:

$$c(1+r)^n = c(1+x)^{nq}$$

de donde dividiendo ambos miembros por c y extrayendo la raíz de índice n:

$$1+r=(1+x)^q$$

relación que unirá siempre á los *tantos equivalentes* que correspondan á cualquier unidad de tiempo, y á la parte alícuota (T. I, 227) representada por el exponente q.

El valor del nuevo tanto se hallará evidentemente extrayendo de ambos miembros la raíz de indice q, con lo cual tendremos

$$\sqrt[q]{1+r}=1+x, \text{ de donde } x=\sqrt[q]{1+r}-1$$

raíz cuya extracción se evita hallando con el auxilio de los logaritmos

$$\text{Log. } \sqrt[q]{1+r}=\frac{1}{q}\text{Log. } (1+r) \text{ (T. I, 280, 4.°)}$$

y restando una unidad; es decir, que

$$x=\text{Antlg.} \frac{1}{q}\text{Log. } (1+r)-1$$

Problema 1.° ¿Qué tanto de interés compuesto mensual equivaldría al 4 % anual?

$$x=\text{Antlg.} \frac{1}{12}. \text{ Log. } 1'04-1=\text{Antlg.} \frac{1}{12}\cdot 0'0170333-1$$
$$=\text{Antlg. } 0'0014194-1=1'00327-1=0'00327 \;\%$$

$$\begin{array}{r|l} 3009 & \\ \hline 11850 & 4328 \\ \cline{2-2} 31940 & 0'27 \\ 1644 & \end{array}$$

Conocido el valor del tanto equivalente á otro, fácil es deducir la expresión exacta del capital final, para el tiempo $n+\frac{p}{q}$.

En efecto: no habiendo razón que abone el dejar de agregar los intereses al fin de cada una de las q unidades en que se supone dividida la de tiempo al expresar la fracción $\frac{p}{q}$ y siendo $x=\sqrt[q]{1+r}-1=(1+r)^{\frac{1}{q}}-1$ (T. I, 257, 3.º) el tanto correspondiente, la verdadera fórmula del capital final, será (T. I, 262, Cor., y 261, Cor.);

$$C=c\,(1+r)^n\,(1+x)^p=c\,(1+r)^n\left(1+(1+r)^{\frac{1}{q}}-1\right)^p$$
$$=c\,(1+r)^n\left(\left(1+r\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p=c\,(1+r)^n\,(1+r)^{\frac{p}{q}}$$
$$=c\,(1+r)^{n+\frac{p}{q}}$$

que es la misma encontrada para períodos exactos de tiempo n, sin más diferencia que estar este exponente reemplazado por el nuevo $n+\frac{p}{q}$.

La expresión

$$C=c\,(1+r)^n$$

es, pues, la exacta siempre y completamente general, de la cual partiremos como fundamento, por esta razón, para deducir los valores de las demás cantidades, que pueden ser incógnitas en las principales cuestiones.

Problema 2.º ¿En cuánto se convertiría realmente un capital de 12.500 pesetas prestado al $4\frac{1}{2}$ % de interés compuesto durante 7 años y 5 meses?

$$7\tfrac{5}{12}=\tfrac{89}{12};\ \text{Log. } C = 4'0969100+\tfrac{89}{12}.\,0'0191163$$
$$=4'0969100+0'1422792=4'2391892$$

```
                0491
             --------
                1401  | 2510
                 1460 |------
                  2050| 0'558
                    42
```

$C=17345'58$ *pts.*,

resultado que excede en 15'86 pesetas al que hallamos por la fórmula práctica.

15. Del valor del capital final, cuya generalidad hemos demostrado, se deducen á simple vista los siguientes:

$$c = \frac{C}{(1+r)^n}\ ;\ \text{Log. } c = \text{Log. } C - n \text{ Log. } (1+r) \quad (\text{T. I, 280, 2.}^{\circ})$$

$$(1+r)^n = \frac{C}{c}\ ;\ 1+r = \sqrt[n]{\frac{C}{c}}\ ;\ r = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1$$
$$= \text{Antlg. } \frac{1}{n}(\text{Log. } C - \text{Log. } c) - 1$$

y despejando n de la segunda,

$$n \text{ Log. } (1+r) = \text{Log. } C - \text{Log. } c;\ n = \frac{\text{Log. } C - \text{Log } c}{\text{Log } (1+r)}\ .$$

En cuanto al interés compuesto, que representaremos por Y, tendremos:

$$Y = C - c = c\,(1+r)^n - c = c\left((1+r)^n - 1\right);$$
$$\text{Log. } Y = \text{Log. } c + \text{Log. } \left((1+r)^n - 1\right)$$

$$Y = C - \frac{C}{(1+r)^n} = C\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) = C \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}\ ;$$
$$\text{Log. } Y = \text{Log. } C + \text{Log. } \left((1+r)^n - 1\right) - n \text{ Log. } (1+r)$$

para aplicar las cuales se deberá calcular ante todo n Log. $(1+r)$ $=$ Log. $(1+r)^n$ con objeto de restar 1 del número correspondiente y poder encontrar el logaritmo del resultado sin necesidad de hallar directamente la potencia indicada.

Por último, haciendo $C = mc$ en la expresión del tiempo, se tendrá:

$$n = \frac{\text{Log. } mc - \text{Log. } c}{\text{Log. } (1+r)} = \frac{\text{Log. } m + \text{Log. } c - \text{Log. } c}{\text{Log. } (1+r)} = \frac{\text{Log. } m}{\text{Log. } (1+r)}$$

valor del necesario para que cualquier capital se duplique, triplique y en general se convierta en cualquier múltiplo suyo m.

Problema 1.º ¿Qué capital será necesario prestar al 5 % anual de interés compuesto, para recoger á los 9 años 45000 pesetas?

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Log. } 45000 = & 4'6532125 \\ 9.\ \text{Log. } 1'05 = 9.0'0211893 = & 0'1907037 \\ \hline \text{Log. } c = & 4'4625088 \end{array}\right\} c = 29007'40 \text{ pts.}$$

Problema 2.º ¿Á qué tanto por 100 anual de interés compuesto deberán prestarse 18000 pesetas para recoger á los 5 años 23525'28?

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 23525'28 = & 4'3715348 \\ \text{Log. } 18000 \quad = & 4'2552725 \\ \hline & 0'1162623 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{5} \ldots\ldots 0'0232525 = \text{Log. } 1'055.$$

$$r = 1'055 - 1 = 0'055\ ;\ t = 100.0'055 = 5'5 = 5\ {}^1/_2\ {}^0/_0$$

Problema 3.° ¿Durante cuánto tiempo deberán prestarse 240000 pesetas al 4 ½ °/₀ anual de interés compuesto para que se conviertan en 389484'70?

$$\begin{array}{lr|l} \text{Log. } 389484'70 = & 5'5904905 & \\ \text{Log. } 240000 \quad = & 5'3802112 & \\ \hline & 0'2102793 & 0'0191163 = \text{Log. } 1'045 \\ \cline{3-3} & 191163 & 11 \text{ años} \quad = n \\ & 0 & \end{array}$$

Problema 4.° ¿Cuánto tiempo sería preciso para duplicar un capital prestado al 4 °/₀ de interés compuesto anual?

$$\begin{array}{r|l} \text{Log. } 2 = 0'3010300 & 0'0170333 = \text{Log. } 1'04 \\ \cline{2-2} 1306970 & 17 \text{ años } 8 \text{ meses } 28 \text{ días} \\ 114639 & \\ \times\ 12 & \\ \hline 1375668 & \\ 13004 & n = 17 \text{ años } 8 \text{ meses } 29 \text{ días.} \\ \times 365 & \\ \hline 4746460 & \\ 1339800 & \\ 77136 & \end{array}$$

Escolio.—El interés se determina generalmente restando del capital final el primitivo, por ser más sencillas las fórmulas de éstos y más breve y fácil el cálculo.

III.—Comparación y detalles prácticos.

16. Al ocuparnos de la inexactitud de la fórmula que en la práctica se usa para determinar el capital final del interés compuesto (13), vimos que siendo $p=1$, el resultado era igual al del interés simple, lo cual prueba que no siempre será menor que éste, como pudiera creerse.

Para tener certidumbre de cuáles son los casos en que se verificará una cosa ú otra, comparemos los valores de los capitales finales (11 y 14)

$$C' = c\,(1 + nr)$$

$$C = c\left(1 + nr + \binom{n}{2} r^2 + \binom{n}{3} r^3 + \cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n} r^n\right),$$

que desde luego tienen el factor común c é iguales los dos términos del paréntesis de la primera á los dos primeros del de la segunda, por lo que no pudiendo ser negativo r, el que el resultado definitivo de ésta sea mayor, igual ó menor que el de aquélla, sólo podrá depender de que los factores binomios de los numeradores de los coeficientes sean positivos, nulos ó negativos, es decir, de que los minuendos n sean mayores, iguales ó menores que los sustraendos $1, 2, 3 \cdots\cdots n-1$.

Si $n > 1$, la fórmula concluiría en el término

$$\binom{n}{n} r^n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots\,(n-(n-1))}{n!}\,r^n$$

al llegar en los numeradores á un sustraendo inferior á n en 1; todos los factores que en ellos entran, los términos de que forman parte y su suma, por consiguiente, serían positivos, y por lo tanto,

$$C > C'.$$

Si $n = 1$, $\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2!} = 0$, por ser $n-1=0$ (T. I, 175, 5.°, 188, 4.° y 199, 3.°), y como ya no existirían el tercer término, ni ningún otro, por contener todos ese factor,

$$C = C'.$$

Si $n < 1$, también evidentemente $n < 2 < 3 < 4 \cdots\cdots$ y aunque el desarrollo sería indefinido, todos los factores $n-1$, $n-2$, $n-3 \cdots\cdots$ de los numeradores, serían negativos; los términos tercero, quinto$\cdots\cdots$ que contendrían esos binomios en número impar, negativos también (T. I, 192, 1.°); los cuarto, sexto$\cdots\cdots$ que los contendrían en número par, positivos; y el que el resultado de su suma tenga un signo ú otro, dependerá por tanto de que el valor numérico de los términos de lugar impar, sea mayor ó menor que el de los de lugar par.

Pero el término que ocupe un lugar cualquiera $k+2$, ó sea el k después del segundo, sabemos que (5) se forma, multiplicando el anterior, por

$$\frac{n-k}{k+1}\,r$$

y como suponemos $n<1$ y necesariamente ha de ser $k>1$, el valor numérico del numerador será $n-k=-(k-n)<k<k+1$, y por lo tanto

$$\frac{n-k}{k+1}<1 \quad \text{y} \quad \frac{n-k}{k+1}\,r<1$$

mientras sea $r<1$ (T. I, 225, 1.ª), como sucederá siempre en la práctica, ya que ningún capital se presta, aparentemente al menos, á más del 100 % en la unidad de tiempo.

Siendo, pues, menor que 1 el factor por el cual se multiplica cada término para formar el siguiente, sus valores numéricos irán disminuyendo; los resultados de sumar el 3.º y 4.º, 5.º y 6.º........, serán negativos (T. I, 179, 2.º); la suma total que puede descomponerse en esas parciales, lo será igualmente; un número negativo agregado al positivo y mayor que él, $1+nr$, disminuirá el valor de éste y forzosamente deberá ser

$$C<C',$$

de todo lo cual se deduce que:

Un capital prestado á interés compuesto, producirá mayor, igual ó menor interés que prestado á interés simple, según que el tiempo durante el cual devengue ese interés, sea mayor, igual ó menor que la unidad á que el tanto se refiera.

Escolio. Claro está que en la práctica dejará aparentemente de ser cierta esta verdad en su última parte, si se opera bajo el supuesto de que el interés sólo debe agregarse al final de las unidades de tiempo á que se refiera el tanto, es decir, si se calcula el interés simple en vez del compuesto.

17. La fórmula usual para tiempos fraccionarios,

$$C=c\,(1+r)^n\,(1+\frac{p}{q}\,.r)=c\,(1+r)^n\,(1+hr)$$

si para darle forma más sencilla, se representa por h la fracción de tiempo $\frac{p}{q}$, además de su inexactitud y dificultad de cálculo, ofrece aún otros inconvenientes para la determinación de las restantes incógnitas, de los cuales hemos de ocuparnos, por lo mismo que es la empleada generalmente.

El valor del capital primitivo es desde luego fácil de obtener.

$$c = \frac{C}{(1+r)^n\,(1+hr)};\ \text{Log. } c = \text{Log. } C - \left(n \text{ Log. } (1+r) + \text{Log. } (1+hr)\right)$$

Problema 1.º ¿Qué capital debería prestarse al 5 % de interés compuesto anual, para recoger 120.000 *pesetas* á los 5 años y 3 meses?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Log. } 120000 = & 5'0791812 \\ 5 \text{ Log. } 1'05 = 5.0'0211893 = & 0'1059465 \\ \text{Log.}\left(1+\frac{3}{12}.0'05\right) = \text{Log. } 1'0125 = & 0'0053950 \end{array}\right\} c = 92862'32 \textit{ pts.}$$

$$\text{Log. } c = \quad 4'9678397$$

Suprimiendo las operaciones auxiliares de la determinación de los logaritmos y antilogaritmos, como para abreviar y no obscurecer las esenciales, las suprimiremos en lo sucesivo, siempre que sean idénticas á las ya efectuadas en otras ocasiones.

Para calcular el tiempo se hace preciso observar que siendo $h < 1$,

$$1 + hr < 1 + r \text{ y } (1+r)^n\,(1+hr) < (1+r)^n\,(1+r) = (1+r)^{n+1}$$

pero como (T. I, 188, 2.º)

$$1 + hr > 1 \text{ y } (1+r)^n\,(1+hr) > (1+r)^n$$

resulta que

$$\frac{C}{c} = (1+r)^n\,(1+hr) \begin{array}{l} < (1+r)^{n+1} \\ > (1+r)^n \end{array}$$

$$\text{Log. } C - \text{Log. } c \begin{array}{l} < (n+1) \text{ Log. } (1+r) \\ > \quad n \text{ Log. } (1+r) \end{array}$$

$$\frac{\text{Log. } C - \text{Log. } c}{\text{Log. } (1+r)} \begin{array}{l} < n+1 \\ > n \end{array}$$

Luego si se encuentra el valor del primer miembro, la parte entera del cociente determinará el número de los períodos de tiempo completos.

Calculados éstos se tendrá por otra parte:

$$1+hr=\frac{C}{c\,(1+r)^n};\ hr=\text{Antlg.}\Big(\text{Log.}\,C-\text{Log.}\,c-n\,\text{Log.}\,(1+r)\Big)-1$$

y por último,

$$r=\frac{hr}{h}$$

PROBLEMA 2.° ¿Durante cuánto tiempo sería preciso prestar con arreglo á la costumbre práctica y al 4 % anual de interés compuesto, 25000 pesetas para recoger 40000?

$$\frac{\text{Log. }40000-\text{Log. }25000}{\text{Log. }1'04}=\frac{4'6020599-4'3979400}{0'0170333}=\frac{0'2041199}{0'0170333}=11 \text{ años}$$

(parte entera)

$$0'2041199-11\,.\,0'0170333=0'2041199-0'1873663=0'0167536$$
$$=\text{Log. }1'03933\,\ldots\ldots\ldots$$

$$hr=0'03933\,\ldots\ldots\ldots;\ h=\frac{0'03933\,\ldots\ldots}{0'04}=0'983;$$
$$0'983\cdot 360 \text{ días}=353'88 \text{ días.}$$

Debería prestarse por 11 años y 354 días = 11 años, 11 meses (comerciales), 24 días.

Respecto al interés, ya hemos dicho que jamás se calcula en la práctica directamente, y el tanto r que no es posible despejar de la fórmula, tiene que calcularse por aproximación.

Como su valor es muy pequeño ordinariamente y h es también una fracción, la cantidad $1+hr$, se diferencia muy poco de

$$(1+r)^h=1+hr+\binom{h}{2}r^2+\binom{h}{3}r^3+\ldots\ldots\ldots$$

por lo que despreciando desde el tercer término en adelante, se tiene con bastante aproximación

$$C=c\,(1+r)^n\,(1+r)^h=c\,(1+r)^{n+h}$$

de donde

$$(1+r)^{n+h}=\frac{C}{c};\ (n+h)\ \text{Log.}(1+r)=\text{Log.}C-\text{Log.}c;$$
$$\text{Log.}(1+r)=\frac{\text{Log. }C-\text{Log. }c}{n+h}$$

relación que permite calcular un valor r_1 aproximado al de r, aunque un poco excesivo.

Para aproximarlo más, puede sustituirse este valor r_1 en vez de r, volviendo á suponer

$$1+hr_1=(1+r_1)^x, \text{ de donde Log. } (1+hr_1)=x \text{ Log.}(1+r_1);$$
$$x=\frac{\text{Log. }(1+hr_1)}{\text{Log. }(1+r_1)}$$

y como entonces será

$$C=c\,(1+r_1)^{n+x}$$

de donde

$$(1+r_1)^{n+x}=\frac{C}{c};\ (n+x)\text{Log.}(1+r_1)=\text{Log.}C-\text{Log.}c;$$
$$\text{Log. }(1+r_1)=\frac{\text{Log. }C-\text{Log }c}{n+x}$$

se podrá calcular un segundo valor r_2 mucho menos erróneo, siempre suficiente en las aplicaciones y que si aun lo fuese, se podría aproximar al verdadero cuanto se quisiera, continuando el procedimiento.

Problema 3.° ¿Cual habrá sido el tanto por 100 de interés compuesto anual que ha devengado un capital de 10000 pesetas, convertido en 14594'30 á los 8 años y 7 meses, según el cálculo que se acostumbra hacer en la práctica?

$$\text{Log.}(1+r)=\frac{\text{Log. }14594'30-\text{Log. }10000}{8\frac{7}{12}}=\frac{0'1641836\,.\,12}{103}=0'0191282$$
$$=\text{Log. }1'045028\ldots\ldots;\ r_1=0'045028\ldots\ldots$$

$$x=\frac{\text{Log.}\left(1+\frac{7}{12}\,.\,0'045028\right)}{\text{Log. }1'045028}=\frac{\text{Log. }1'026266}{\text{Log. }1'045028}=\frac{0'0112601}{0'0191282}=0'58866\ldots.$$

$$\text{Log.}(1+r_1)=\frac{0'1641836}{8'58866}=0'0191163=\text{Log.}1'045;\ r_2=0'045.$$

$$\text{Tanto por }100=0'045\cdot 100=4'5=4\frac{1}{2}.$$

Escolio. No hemos hecho estas consideraciones ni resuelto estos problemas con más objeto que el de que puedan compararse con sus análogos los anteriores, por la importancia, tanto teórica como práctica, que encierran las cuestiones de interés compuesto.

Es la última prueba que ofrecemos de la diferencia que existe, aun bajo el punto de vista de las dificultades y trabajo, entre resolver los problemas bien con arreglo á los principios científicos y resolverlos mal por terquedad, capricho ó ignorancia.

18. Á semejanza de lo que ocurre cuando se trata de intereses simples (T. II, 159) y con mucha más frecuencia, suelen usarse en los problemas de interés compuesto TABLAS de multiplicadores fijos, cuyo objeto es *abreviar el cálculo.*

El MULTIPLICADOR FIJO, no es otra cosa que el valor para el tiempo y tanto dados adquirido por la fracción $(1+r)^n$ y como este valor resulta de hacer $c=1$, en la fórmula general del capital C, puede definirse diciendo que es: el *valor que adquiere una unidad monetaria prestada por cierto tiempo, á un cierto tanto de interés compuesto.*

De aquí se desprende el modo de CALCULAR estas Tablas, puesto que para hallar sus valores bastará *dar á* n *y* t *los más frecuentes* y efectuar las operaciones indicadas en la expresión $(1+r)^n$ que como siempre facilita la aplicación de los logaritmos, que da

$$\text{Log.}\ (1+r)^n = n\ \text{Log.}\ (1+r).$$

Una vez calculados para los tantos más usuales y los años exactos desde 1 hasta cierto límite, *se colocan los de aquéllos en la parte superior de la página, los de éstos en la primer columna de la izquierda y los de los multiplicadores en las de la derecha,* como puede verse al final en la Tabla III, que contiene los correspondientes á los tantos $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 6, 7, 8$ y 10 por 100, desde 1 á 80 años, con 6 cifras después de la coma.

Con esta disposición, basta para encontrar el multiplicador fijo correspondiente á un tanto y tiempo determinados, *buscar el valor que se halla en la columna encabezada por el tanto y en la línea que principia por el número de años*, ó períodos de tiempo á que aquéllos se refieran.

De este modo hallaríamos en la citada Tabla que al tanto $4\frac{1}{2}$ % y á un tiempo de 25 años, corresponde el multiplicador 3'005434.

19. Si del mismo modo que en el interés simple (T. II, 159) representamos por M el multiplicador fijo $(1+r)^n$, el valor del capital final se convierte en

$$C = cM$$

de donde dividiendo ambos miembros de la igualdad por M

$$c = \frac{C}{M}$$

por consiguiente,

1.° *Para encontrar el capital final, basta multiplicar el primitivo por el multiplicador fijo correspondiente al tanto y al tiempo.*

2.° *Para hallar el capital neto, es suficiente dividir el final por el multiplicador fijo que corresponde al tiempo y tanto dados.*

PROBLEMA 1.° Resolver por este método el 1.° del párrafo 12. (Tabla III.)

$$c = 12500 \ pts.; \ M = 1'360862;$$
$$C = 12500 . 1'360862 = 17010'77 \ pts.$$

PROBLEMA 2.° Resolver por este método el 1.° del párrafo 15. (Tabla III.)

$$C = 45000 \ pts.; \ M = 1'551328; \ c = \frac{45000}{1'551328} = 29007'40 \ pts.$$

El caso en que quisiera hallarse el interés, se resuelve como siempre, *calculando* primero *el capital desconocido y restando del final el primitivo.*

PROBLEMA 3.° ¿Cuál sería el interés devengado por el capital que se prestó en los dos problemas anteriores?

Para el primero tendríamos, después de efectuar el cálculo anterior:

$$Y = 17010'77 - 12500 = 4510'77 \ pts.$$

y para el segundo,

$$Y = 45000 - 29007'40 = 15992'60 \ pts.$$

20. Respecto al tiempo y tanto, parece á primera vista que siendo necesario conocerlos para buscar en la Tabla el valor de M, no podrá aplicarse esta al cálculo de dichas incógnitas; pero cuando uno ú otro sean desconocidos, han de darse en el enunciado c y C, c é Y, ó C é Y, ó en otros términos, han de conocerse siempre los dos capitales, puesto que los dos últimos casos equivalen á dar c y C, ya que siempre han de ser $C = c + Y$; y $c = C - Y$.

Ahora bien; de $C = cM$, se deduce para valor directo del multiplicador fijo

$$M = \frac{C}{c}$$

Y determinado el valor de este cociente, si la incógnita es el tiempo, se buscará su valor en la columna del tanto, y si se encuentra en ella, claro está que á su izquierda se tendrá el tiempo desconocido.

Si no se encuentra, estará comprendido entre dos valores consecutivos de la misma columna, lo que probará que el interés ha sido producido en un tiempo fraccionario, que se hallará con facilidad, pues determinada la parte entera correspondiente al menor de ambos valores, la diferencia de éste con el hallado por cociente, y la que haya entre los multiplicadores consecutivos de la Tabla, podrán considerarse sin gran error como proporcionales al tiempo buscado y al total que componga 1 período, admitiendo, aunque en el interés compuesto no es completamente exacto, que

Para fracciones de tiempo menores que la unidad, las variaciones del interés son directamente proporcionales á las del tiempo y el tanto, lo cual siendo cierto para el interés simple lo sería también para el caso práctico que nos ocupa, dado el modo usual de resolverlo, si los multiplicadores que contiene la Tabla y sus diferencias no se refiriesen al compuesto.

La aproximación, no obstante, siempre es suficiente en la práctica.

PROBLEMA 1.º Resolver por este método el 2.º del párrafo 17. (Tabla III.)

$$C=40000;\ c=25000;\ M=\frac{40000}{25000}=1'6$$

valor que en la columna 4 % está comprendido entre 1'539454 y 1'601032 correspondientes á 11 y 12 años, excediendo en 0'600546 al primero, que se diferencia del segundo en 0'061578, por lo cual se tendrá sin gran error,

$$0'061578 : 360 :: 0'060546 : x$$

$$x=\frac{0'060546\ 360}{0'061578}=354 \text{ (por exceso)}$$

luego el tiempo buscado será:

11 años, 354 días = 11 años, 11 meses, 24 días (comerciales).

Siendo el tanto la incógnita, no habrá dificultad en leerlo en la parte superior de la columna, si el valor de M, calculado directamente, se encuentra en alguna de ellas y en la línea del tiempo dado, pero en otro caso, y á semejanza de lo que ocurre con el tiempo, sólo se podrá hallar aproximadamente fundándose en el principio admitido, lo cual basta en la práctica en la que los tantos por 100 no suelen expresarse más que hasta centésimas, ó por fracciones cuyo denominador sea 2, 4, ó á lo más 8.

La cuestión no se diferencia por tanto de la precedente, sino en ser más sencilla, pues la citada circunstancia permite casi siempre escribir de memoria aproximadamente el valor de la incógnita.

PROBLEMA 2.º Resolver por este método el 3.º del párrafo 17.

$$C = 14594'30 \; ; \; c = 10000 \; ; \; M = 1'459430$$

número que en las líneas correspondientes á 8 y 9 años está comprendido entre 1'422101 y 1'486095 correspondientes al $4\frac{1}{2}$ %, siendo una m edia entre ellos algo más próxima al segundo que al primero, como 8 años y 7 meses lo está con relación á 8 y 9.

Puede pues deducirse á simple vista que dicho $4\frac{1}{2}$ % será el tanto buscado.

ESCOLIO. Parecen tan sencillos estos métodos, que quizás se juzgue inútil para la práctica cuanto anteriormente dijimos, pero hay que tener en cuenta los errores que puede producir el aumento de dificultad cuando el tiempo no es un número exacto de períodos; que no conteniendo las Tablas más que estos períodos, sólo para ellos existe una verdadera aproximación cuyo error sea despreciable; y sobre todo, que en las Tablas sólo pueden hallarse determinados tantos y sólo á éstos contados casos particulares pueden aplicarse, sin que tampoco por su medio sea posible resolver más que los problemas fundamentales, pero no la multitud que sin salir de los límites del interés, pueden resultar de la combinación de los datos, según veremos pronto en algunos ejemplos.

Las fórmulas, como siempre, son, pues, las únicas capaces de resolver cualquier cuestión, con ayuda, si es preciso, de los restantes métodos generales de cálculo.

Por lo demás, las Tablas pueden variar en su disposición, siendo los tantos los que estén en columna vertical y los tiempos en línea horizontal.

IV.—Interés continuo.

21. Una cosa son los procedimientos y métodos prácticos de cálculo, casi siempre erróneos, según hemos hecho ver muchas veces, otra los convenios y costumbres prácticas establecidas con frecuencia arbitrariamente, y otra cosa distinta la verdad científica.

Acabamos de examinar los primeros, relativamente al interés compuesto, después de haber deducido con arreglo á los segundos, fórmulas exactas, pero no verdaderas en absoluto, sino en relación á dichos convenios; justo nos parece que ahora dediquemos á la última algunas palabras.

Ya hemos visto (14) que era un absurdo, admitida la acumulación de intereses al capital, añadirlos solamente al concluir los períodos exactos de tiempo á que el tanto se refiera y no cuando terminen aquellos en que el primero pueda fraccionarse, siendo así que para cada nueva unidad ha de existir por fuerza el correspondiente tanto equivalente al que se haya fijado para otra distinta.

Pero ¿qué razón puede haber para agregar los intereses al capital al fin de cada año en vez de cada mes; de cada mes en vez de cada día; de cada día en vez de cada hora; de cada hora en vez de cada segundo; de cada segundo en vez de cada límite inferior de un instante de tiempo indefinidamente pequeño? Absolutamente ninguna.

Si desde el momento en que un capital se presta fijando un cierto tanto de ganancia como compensación, principalmente de la privación que del mismo se sufre, razón suprema que legitima esa ganancia, empieza esa privación, lo racional, lo lógico, lo justo, y lo científico, será que desde ese instante vaya aumentando su valor por la acumulación continua de los correspondientes intereses, sin interrupción de tiempo grande ni pequeña.

Este INTERÉS CONTINUO, ó *que resulta de añadir la ganancia convenida para el capital en cada instante de tiempo indefinidamente pequeño*, parece al pronto que hará adquirir á dicho capital un valor ∞, puesto que, según sabemos, el final va aumentando (14) á medida que el tiempo y el tanto se fraccionan proporcionalmente en q partes por ejemplo, y esto sucedería en efecto si ese aumento no tuviera como tiene un límite superior finito y determinado, que existiendo como existe, será evidentemente el valor que corresponde al citado capital.

Para buscar ese límite pongamos el valor $\frac{r}{q}$ del tanto, que corresponde al caso en que lo supongamos fraccionado al par que el tiempo proporcionalmente, bajo la forma $\frac{1}{\frac{q}{r}} = \frac{1}{m}$ (T. I, 228, 3.º), representando por m el cociente de dividir q por r, de donde también $q = rm$.

Fraccionados tanto y tiempo en q partes, el n que figure en el enunciado estará representado por nq refiriéndolo á la nueva unidad indeterminada, ó lo que es igual, por nrm, y el tiempo y tanto llegarán á su límite cuando supongamos $q = \infty$, ó lo que es lo mismo, $m = \infty$, puesto que siendo r un número limitado, para $q = \infty$, $m = \frac{q}{r} = \frac{\infty}{r} = \infty$ (T. I, 199, 5.º) y recíprocamente para $m = \infty$, $q = rm = r\infty . = \infty$ (T. I, 188, 6.º).

La expresión del interés compuesto cuando el tanto y el tiempo se subdividen en q partes $C = c\left(1 + \frac{r}{q}\right)^{nq}$, se convertirá por consiguiente, haciendo las sustituciones indicadas y desarrollando la potencia por la fórmula del binomio (4) en

$$C = c\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{nrm} = c\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{nr}$$

$$= c\left\{1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot \frac{1}{m^3} + \cdots\cdots\right\}^{nr}$$

ó efectuando la división de los factores literales de los numeradores por los de los denominadores

$$C = c\left\{1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{3!} + \cdots\cdots\right\}^{nr}$$

cuyo límite cuando sea $m = \infty$ y por consiguiente 0 los valores de $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, ... será llamando K, al que corresponda al primer miembro,

$$K = c\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots\right)^{nr}$$

Ahora bien; quien no sepa que la serie de términos numéricos comprendida en el paréntesis es precisamente el número inconmensurable

$$e = 2'71828182845904523536028747135266249 8\ldots\ldots$$

adoptado por Neper para base de su sistema de logaritmos (T. I, 281) puede convercerse de ello efectuando el cálculo de algunos términos, con lo cual hallaría:

$$1 = 1$$
$$1 = \underline{1}$$
$$ 2$$
$$\frac{1}{2!} = \underline{0'5}$$
$$\phantom{\frac{1}{2!} =} 2'5$$
$$\frac{1}{3!} = \underline{0'16666666666666\ldots\ldots}$$
$$\phantom{\frac{1}{3!} =} 2'66666666666666\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{4!} = \underline{0'04166666666666\ldots\ldots}$$
$$\phantom{\frac{1}{4!} =} 2'70833333333332$$
$$\frac{1}{5!} = \underline{0'00833333333333\ldots\ldots}$$
$$\phantom{\frac{1}{5!} =} 2'71666666666665\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{6!} = \underline{0'00138888888888\ldots\ldots}$$
$$\phantom{\frac{1}{6!} =} 2'71805555555553\ldots\ldots$$

....

....

....

$$\frac{1}{16!} = \underline{0'00000000000005\ldots\ldots}$$
$$\phantom{\frac{1}{16!} =} 2'7182818284590\ldots\ldots$$

....

....

....

valores cada vez mas aproximados al de e.

El final de una cantidad c, prestada al tanto por 1, r, de interés continuo durante un tiempo n referido á igual unidad, será por consiguiente:

$$K = ce^{nr}, \text{ de donde, } \mathrm{Log.}K = \mathrm{Log.}c + nr\mathrm{Log.}e,$$

ó recordando que (T. I, 281)

$$\mathrm{Log.}e = 0'4342944819032518276511289189166050 82\ldots\ldots$$

$$\mathrm{Log.}K = \mathrm{Log.}c + 0'4342944\ldots\ldots \times nr,$$

fórmulas mucho más sencillas que las del interés compuesto, y cuyo resultado, según vamos á ver por medio de un ejemplo, no se diferencia del de éstas tanto como pudiera creerse.

Problema. Resolver el 2.º del párrafo 14, suponiendo prestadas las 12500 pesetas al $4\frac{1}{2}$ % anual de interés continuo por los mismos 7 años y 5 meses.

$$nr = 7\tfrac{5}{12} \cdot 0'045 = \frac{89}{12} \cdot 0'045 = \frac{4'005}{12} = 0'33375.$$

$$\text{Log. } K = 4'0969100 + 0'4342944.\ 0'33375$$
$$= 4'0969100 + 0'1447757 = 4'2416857 = \text{Log. } 17445'59$$

resultado, que solo excede al encontrado allí para el caso del interés compuesto en 100 pesetas y 0'01 de peseta, tratándose de un capital de 12500.

22. De la expresión hallada se deducen también para los demás casos:

$$c = \frac{C}{e^{nr}};\ \text{Log. } c = \text{Log.} C - nr \,\text{Log. } e = \text{Log. } C - nr \cdot 0'4342944 \ldots\ldots$$

$$nr \,\text{Log. } e = \text{Log.} C - \text{Log.} c;\ n = \frac{\text{Log. } C - \text{Log. } c}{r \,\text{Log. } e} = \frac{\text{Log. } C - \text{Log. } c}{r.\ 0'4342944 \ldots.}$$

y también

$$r = \frac{\text{Log.} C - \text{Log.} c}{n \,\text{Log. } e} = \frac{\text{Log.} C - \text{Log.} c}{n\ .\ 0'4342944 \ldots.}$$

En cuanto al interés que representaremos por I, tendríamos

$$I = C - c = ce^{nr} - c = c(e^{nr} - 1);\ \text{Log.} I = \text{Log.} c + \text{Log.} (e^{nr} - 1)$$

$$I = C - \frac{C}{e^{nr}} = C\left(1 - \frac{1}{e^{nr}}\right) = C \cdot \frac{e^{nr} - 1}{e^{nr}};$$

$$\text{Log.} I = \text{Log.} C + \text{Log.} (e^{nr} - 1) - nr.0'4342944 \ldots\ldots..$$

Y si conociéndolo quisiéramos encontrar los capitales directamente

$$c = \frac{I}{e^{nr} - 1};\ \text{Log.} c = \text{Log. } I - \text{Log.} (e^{nr} - 1)$$

$$C = \frac{I e^{nr}}{e^{nr} - 1};\ \text{Log.} C = \text{Log.} I + nr.0'4342944 \ldots. - \text{Log.} (e^{nr} - 1)$$

fórmulas en las cuales, *para aplicar las cuatro últimas*, se empezaría por calcular el valor de $e^{nr} - 1$ por medio de la expresión

$$e^{nr} - 1 = \text{Antlg.}\,(nr.0'4342944\cdots\cdots) - 1,$$

según está efectuado en el siguiente

PROBLEMA. Averiguar el capital que debería prestarse por $10\frac{1}{2}$ años al $5\frac{3}{4}$ % anual de interés continuo, para obtener una ganancia de 1234 pesetas.

$$n = 10\frac{1}{2} = 10'5;\ r = \frac{5\frac{3}{4}}{100} = \frac{23}{400} = 0'0575;$$

$$nr = 10'5 \cdot 0'0575 = 0'60375.$$

$$e^{nr} - 1 = \text{Antlg.}\,(0'60375 . 0'4342944) - 1 = \text{Antlg.}\ 0'2622050 - 1$$
$$= 1'8289625 - 1 = 0'8289625$$

$\text{Log}.c = 3'0913152 - \bar{1}'9185349 = 3'1727803;\ c = 1488'60$ *pts.*

23. Algunos, y creemos ocioso añadir que no son los prácticos españoles, prefieren valerse siempre de la sencilla fórmula del capital final del interés continuo, ó de sus análogas, para resolver los problemas de interés compuesto, lo cual no sólo es posible sino fácil, hallando previamente el tanto x de interés continuo, equivalente al conocido r.

Esto se consigue igualando los valores de ambos capitales, puesto que si los tantos son equivalentes, deberá ser

$$ce^{nx} = c(1 + r)^n$$

de donde dividiendo por c y extrayendo la raíz de índice n

$$e^x = 1 + r$$

y tomando logaritmos,

$$x\,\text{Log}.e = \text{Log}.(1 + r);\ x = \frac{\text{Log}.(1 + r)}{\text{Log}.\,e} = \frac{\text{Log}.(1 + r)}{0'4342944\cdots\cdots},$$

siendo evidente que, conocido el valor de x, se podrán aplicar á los problemas de interés compuesto las fórmulas del continuo, siempre que el tanto se dé en el enunciado; aun siendo incógnita podría determinarse x y en seguida calcular el valor equivalente de r por la igualdad

$$r = e^x - 1 = \text{Antlg.}\,(x.0'4342944\cdots\cdots) - 1.$$

PROBLEMA.—Encontrar, valiéndose de la fórmula del capital final del interés continuo, el compuesto que correspondería al capital hallado en el problema anterior, suponiéndole prestado á igual tanto y por el mismo tiempo.

$$r = 0'0575;\ x = \frac{\text{Log. } 1'0575}{\text{Log. } e} = \frac{0'0242804}{0'4342944} = 0'056;$$

$$nx = 10'5 . 0'056 = 0'588$$

$$\text{Log.} C = 3'1727803 + 0'588 . 0'4342944$$
$$= 3'1727803 + 0'2553651 = 3'4281454$$

$$C = 2680'06 \textit{ pesetas};\ Y = 2680'06 - 1488'60 = 1191'46 \textit{ pesetas}.$$

valor que otra vez nos hace ver que al $5\frac{3}{4}$ % y en $10\frac{1}{2}$ años, el interés continuo y el compuesto sólo se diferencian en 1234—1191'46=42'54 pesetas, para un capital prestado de 1488'60.

24. La aplicación de estas fórmulas se facilita, como la de las relativas al interés compuesto, construyendo unas tablas que contengan los logaritmos de $1+r$ para los tantos más usuales, semejantes á la que al final lleva el número IV, que contiene en columna vertical los tantos por 100 que es más frecuente emplear desde $\frac{1}{2}$ hasta 12, y á la derecha con nueve cifras después de la coma los correspondientes logaritmos de $1+r$, que una vez buscados bastará dividir por el número constante 0'4342944 para obtener el valor del tanto x de interés continuo, equivalente al r de interés compuesto, y claro está que aun sería posible simplificar más las operaciones, añadiéndole otra columna que contuviera los valores de esos cocientes, determinándolos de antemano.

En ella encontraríamos el 0'0242804 = Log.1'0575 correspondiente al $5\frac{3}{4}$ % de que hemos hecho uso en el último problema.

Acabamos, según nos habíamos propuesto, de exponer la verdad científica, desde el momento en que se admite la acumulación de interés al capital, para que á su vez los produzcan *al mismo tanto por* 100; vamos á terminar ahora, haciendo ver el absurdo de tal suposición, admitida sin embargo en la práctica, á pesar de que encierra la más imposible de las imposibilidades, tan pronto como se traspasan ciertos límites no muy grandes.

Supongamos que un antepasado nuestro, contemporáneo del principio de la era vulgar, depositó nada más que 1 peseta, para que devengando intereses compuestos al 4 % anual, recogiéramos nosotros el capital final $1'04^{1890}$, cuyo logaritmo sería $1890.0'0170333 = 32'1929370$.

El capital que deberían entregarnos estaría representado por un número de 33 cifras (T. I, 282, 2.ª), ó sea por algunos *cientos de quillones* de pesetas (T. I, 162, 1.º).

Ahora bien; el mayor radio terrestre, es de 6377398*m* y el volumen por tanto de nuestro planeta (T. II, Tabla V), menor que $^4/_3.3'14\ldots \times 6377398^3$, producto que tendría 22 cifras (T. I, 198, Teor.), representando m^3, y como cada metro cúbico de oro puro cuya densidad es de 19'258 (T. II, Tabla VII) pesa $1000.19'258 = 19258$ *Kilogramos* (T. II, 77), y valdría 19258.3444'44 *pesetas* (T. II, 140), número que á lo más tendría 9 cifras, el valor de aquel volumen de oro, representado como máximo por dos factores de 22 y 9 cifras, sólo podría tener 31 *unidades* de quillón.

Serían, pues, necesarios algunos centenares de Tierras de oro macizo para pagarnos aquella peseta, acumulándole los intereses compuestos al 4 $^0/_0$ anual.

No creemos sea preciso añadir nada más; la acumulación de intereses, tal como hoy se admite y practica, es uno de los mayores absurdos que ha podido concebir la humanidad, y seguirá siéndolo forzosamente mientras no se modifique, haciéndola, sí, continua, para que esté conforme con el dictado de la razón y los principios de la ciencia, pero también progresiva en sentido decreciente, es decir, disminuyendo el tanto de interés á medida que el tiempo aumente, de tal manera que el capital definitivo vaya acercándose á cierto límite que jamás pueda exceder, para que no implique una contradicción con la realidad posible.

CAPÍTULO II.

DESCUENTO.

I.—Descuentos racionales y comercial simple.

25. No siendo el descuento racional simple, más que el interés correspondiente al capital adelantado (T. II, 156) *las expresiones deducidas* (11 y 15) para las diversas incógnitas que en las cuestiones relativas á éste pueden presentarse, en función del tanto *r* por 1, *serán las aplicables* á las que á aquél se refieran.

Según que ese interés vaya ó no acumulándose á la cantidad adelantada cuando terminen unidades de tiempo de mayor ó menor duración, el *descuento racional podrá*, por tanto, *ser* igualmente *compuesto* ó *simple* y *aun* pudiera considerarse como *continuo*.

En la práctica, no obstante, ya sabemos que *nunca se calcula el último, usándose* solamente *el primero* y *segundo para períodos de tiempo mayores que la unidad*, y casi siempre *el* abusivo llamado *comercial* (T. II, 156), cuando se trata de tiempos relativamente de corta duración, por lo que conviene también encontrar sus fórmulas fundamentales, introduciendo en ellas el valor de $r = \frac{t}{100}$.

26. Para el de dicho descuento, tendremos evidentemente (T. II, 158),

$$d = \frac{C.100r.n}{100} = Cnr$$

de la que se obtiene á simple vista, recordando que siempre $d = C - c$,

$$C = \frac{d}{nr};\ n = \frac{d}{Cr} = \frac{C-c}{Cr};\ r = \frac{d}{Cn} = \frac{C-c}{Cn}$$

por cuyo medio pueden resolverse con bastante rapidez todos los problemas fundamentales en que interviene el nominal C, de que se rebaja el descuento.

Además se deduce de la última, multiplicando ambos miembros por Cn, ó de la primera, en virtud del segundo valor del descuento,

$$Cnr = C - c;\ c = C - Cnr = C(1 - nr);\ C = \frac{c}{1-nr}$$

y para el caso en que se quisiera hallar directamente el descuento en función del líquido, ó éste en función de aquél, tendríamos, poniendo en la fundamental $c + d$ en lugar de C,

$$d = (c + d)nr = cnr + dnr;\ cnr = d - dnr = d(1 - nr)$$

$$d = \frac{cnr}{1-nr};\ c = \frac{d(1-nr)}{nr}$$

Problema. Encontrar el descuento comercial simple, de

15625 pesetas exigibles á los 10 meses, siendo $2\frac{1}{2}$ % el tanto semestral.

$$C = 15625;\ n = 1\frac{4}{6} = \frac{5}{3};\ r = \frac{2'5}{100} = 0'025$$

$$d = 15625.\frac{5}{3}.\,0'025 = \frac{15625.0'125}{3} = \frac{1953'125}{3}$$
$$= 651'04\ \textit{ptas.}\ (\text{por defecto}).$$

II.—Comparacion.

27. Ahora que conocemos las tres fórmulas más sencillas (11, 15 y 26)

$$y = \frac{Cnr}{1+nr};\ Y = C.\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n};\ d = Cnr$$

de los únicos descuentos que en la práctica se usan, en función del capital exigible al fin del tiempo, es ocasión de comparar el último con los dos primeros, para tener exacta idea de sus relativos valores, comparación que ya hicimos para éstos.

Desde luego observamos, que según debía suceder (T. I, 199, 3.ª),

$$Cnr > \frac{Cnr}{1+nr},\ \text{ó lo que es igual, } d > y.$$

Pero además tenemos, desarrollando $(1+r)^n$ por la fórmula del binomio (4),

$$(1+r)^n = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2!}r^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}r^4 + \cdots\cdots$$

ó multiplicando ambos miembros por nr (T. I, 190, 1.° y 2.°) y restando de ambos 1,

$$nr(1+r)^n = nr + n^2r^2 + \frac{n^2(n-1)}{2!}r^3 + \frac{n^2(n-1)(n-2)}{3!}r^4 + \cdots\cdots$$

$$(1+r)^n - 1 = nr + \frac{n(n-1)}{2!}r^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}r^4 + \cdots\cdots$$

y como evidentemente

$$n > n-1 > n-2 > n-3 \cdots\cdots$$

también será (T. I, 188, 3.º)

$$n^2 > n(n-1)\ ;\ n^2(n-1) > n(n-1)(n-2);$$

$$n^2(n-1)(n-2) > n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots\cdots$$

y con mayor razón (T. I, 216, 3.º y 5.º)

$$n^2 > \frac{n(n-1)}{2!}\ ;\ \frac{n^2(n-1)}{2!} > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ ;$$

$$\frac{n^2(n-1)(n-2)}{3!} > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\ ;\ \cdots\cdots$$

luego siendo iguales en ambos desarrollos las potencias de r que multiplican á esos coeficientes y el primer término nr, se verificará

$$nr(1+r)^n > (1+r)^n - 1$$

ó dividiendo por $(1+r)^n$

$$nr > \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

y multiplicando por C,

$$Cnr > C \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}\text{, ó lo que es lo mismo, } d > Y.$$

Esta comparación demuestra que *el* abusivo *descuento comercial simple*, si no quiere dársele otro nombre, tan frecuentemente usado en la práctica, no sólo *es mayor*, cualquiera que sea el tiempo, *que el descuento racional simple*, sino mayor también en todo caso, que el que correspondería, descontando el capital *á interés compuesto.*

28. No diferenciándose el descuento racional del interés, puede en gran número de casos prácticos, análogamente á lo que en este ocurre, evitarse el empleo de logaritmos cuando se trate de calcular el compuesto, usando las Tablas de multiplicadores fijos, descritas al ocuparnos de aquél (18, 19 y 20).

Sin embargo; como lo más frecuente en los problemas de descuento es tener que averiguar el valor del capital líquido, que exige la división del nominal por el fraccionario del multiplicador (19'), suelen modificarse esas Tablas para facilitar las operaciones, convirtiendo la división en multiplicación, tomando como MULTIPLICADOR FIJO, el *valor efectivo* que se suele llamar ACTUAL, *de* 1 *unidad monetaria descontada á un cierto tanto por* 100 *por determinado tiempo.*

Dicho multiplicador resultará, pues, de hacer $C = 1$ en la expresión $c = \frac{C}{(1+r)^n}$ (15) teniendo por consiguiente el valor

$$M = \frac{1}{(1+r)^n}$$

en función de n y r, á cuyas cantidades se dan los más usuales para calcular las Tablas, cuya disposición en nada se diferencia de las relativas al interés compuesto, según puede verse en la V del final, que también contiene desde 1 á 80 años, los correspondientes á los mismos tantos que la III, con seis cifras después de la coma.

Haciendo uso de ella, y en virtud de lo dicho, se tendrá

$$c = CM;\ C = \frac{c}{M};\ M = \frac{c}{C}$$

expresiones inversas de las determinadas para el interés, cuyos valores numéricos, así como el del tiempo y el del tanto, se hallarán por consiguiente por las mismas reglas y procedimientos (19 y 20), sin más diferencia que cambiar el capital efectivo ó líquido por el final ó nominal, y éste por aquél.

PROBLEMA. Averiguar el descuento racional compuesto, correspondiente á una suma de 10000 pesetas, que debe cobrarse á los 7 años, siendo $2\frac{1}{2}$ °/₀ el tanto semestral.

$$C = 10000;\ n = 7 \text{ años} = 14 \text{ semestres};\ M = 0'707727$$

$$c = 10000 \cdot 0'707727 = 7077'27;$$

$$d = 10000 - 7077'27 = 2922'73 \ \textit{pts.}$$

III.—Descuento comercial compuesto.

29. Al hablar hasta aquí del descuento comercial hemos añadido la palabra *simple*, porque del mismo modo que en el racional compuesto van acumulándose los intereses al terminar las unidades de tiempo, pudiera calcularse como *resultante de rebajar al nominal el correspondiente descuento comercial simple al principiar cada una de las unidades de tiempo*, en cuyo caso se llamaría COMPUESTO por analogía, aunque nada tenga de comercial, ya que en el comercio nunca se usa, por más que no deja de tener su fundamento lógico, ó tal vez por eso mismo.

En efecto; si de 1 unidad monetaria se debe descontar r en cada 1 de tiempo, al principiar la última del plazo sólo tendrá el valor $1-r$; el nominal C valdrá $C(1-r)$, y de este valor real debería rebajarse el descuento correspondiente al anterior período.

Ahora bien; en cada uno la unidad se reduce á $1-r$, luego al principiar el penúltimo quedaría aquél convertido en

$$C(1-r)(1-r) = C(1-r)^2$$

al comenzar el precedente,

$$C(1-r)^2(1-r) = C(1-r)^3$$

y como por cada período de tiempo que se retroceda habrá que multiplicar por un factor $1-r$, el valor c actual ó líquido, del capital C, cobrable al terminar un tiempo n y descontado al r por 1, debería ser

$$c = C(1-r)^n, \text{ de donde, } \mathrm{Log.}c = \mathrm{Log.}C + n\,\mathrm{Log.}(1-r)$$

expresiones análogas á las que hallamos en el interés compuesto (15), de las cuales se deducen por iguales transformaciones, para valores directos y logarítmicos de las diversas incógnitas, que puede haber precisión de calcular, llamando D al descuento

$$C = \frac{c}{(1-r)^n}; \ \mathrm{Log.}C = \mathrm{Log.}c - n\,\mathrm{Log.}(1-r).$$

$$\frac{c}{C} = (1-r)^n; \ 1-r = \sqrt[n]{\frac{c}{C}}; \ r = 1 - \sqrt[n]{\frac{c}{C}} = 1 - \mathrm{Antlg.}\frac{\mathrm{Log.}c - \mathrm{Log.}C}{n}$$

$$n = \frac{\text{Log. } c - \text{Log. } C}{\text{Log. } (1+r)}$$

$$D = C - c = C - C(1-r)^n = C\left(1-(1-r)^n\right)$$

$$D = \frac{c}{(1-r)^n} - c = c\left\{\frac{1}{(1-r)^n} - 1\right\} = c \cdot \frac{1-(1-r)^n}{(1-r)^n}$$

$$\text{Log.} D = \text{Log.} C + \text{Log.} \left\{1-(1-r)^n\right\}$$

$$\text{Log.} D = \text{Log.} c + \text{Log.} \left(1-(1-r)^n\right) - n \text{ Log. } (1-r)$$

para calcular las cuales, debería empezarse por determinar

$$(1-r)^n = \text{Antlg.} \left(n \text{ Log. } (1-r)\right)$$

Y además

$$C = \frac{D}{1-(1-r)^n}; \ \text{Log.} C = \text{Log } D - \text{Log.} \left\{1-(1-r)^n\right\}$$

$$c = \frac{D(1-r)^n}{1-(1-r)^n};$$

$$\text{Log. } c = \text{Log. } D + n \text{ Log. } (1-r) - \text{Log. } \left\{1-(1-r)^n\right\}$$

en las que habría que hacer la misma operación previa.

PROBLEMA 1.º ¿A qué tanto por 100 anual de interés comercial compuesto deberían descontarse 24366 pesetas, cobrables á los 10 meses, para no tener que entregar más que 15000?

$$C = 24366; \ c = 15000; \ n = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}; \ \text{Log. } 15000 = 4'1760913$$

$$\text{Log. } 24366 = 4'3867842$$

$$\overline{1}'7893071$$

$$\overline{1}'7893071 : \frac{5}{6} = \overline{2}'7358426 : 5 = \overline{1}'7471685 = \text{Log.} 0'55868$$

$$r = 1 - 0'55868 = 0'44132.$$

Al 44 $\frac{1}{7}$ por 100 aproximadamente.

PROBLEMA 2.º Calcular directamente el descuento comercial compuesto, correspondiente á las 15000 pesetas que se desean entregar, encontrando después el valor del capital que debería cobrarse al fin de los 10 meses, para comprobar el problema anterior.

$$(1-r)^n = \text{Antlg.}\left(\frac{5}{6}\text{ Log.}(1-0'44132)\right)$$
$$= \text{Antlg.}\left(\frac{5}{6}\text{ Log. }0'55868\right) = \text{Antlg.}\left(\frac{5}{6}\cdot\bar{1}'7471631\right)$$
$$= \text{Antlg. }(5.\bar{1}'9578605) = \text{Antlg. }\bar{1}'7893025 = 0'6156;$$
$$1 - 0'6156 = 0'3844$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Log. } 15000 = 4'1760913 & \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\} = 3'7608747 \\ \text{Log. } 0'3844 = \bar{1}'5847834 & \\ \frac{5}{6}\text{ Log. } 0'55868 = & \bar{1}'7893025 \\ \hline \text{Log. } D = & 3'9715722 \end{array}\right| \; D = 9366 \textit{ pts.}$$

$$C = 15000 + 9366 = 24366 \textit{ pts.}$$

IV.—Aplicaciones inmediatas.

30. Al ocuparnos por vez primera del interés y descuento, vimos que entre sus aplicaciones más frecuentes é inmediatas, deben incluirse los problemas relativos á los *vencimientos medio y común* (T. II, 168 y 169), pero como entonces sólo nos interesaban estas cuestiones bajo su aspecto verdaderamente comercial, más nos cuidamos de detallar los métodos prácticos relativos á dicho interés y descuento, á cortos plazos, casi siempre referidos á días, que de estudiar las reglas generales aplicables á todos los casos, al contrario de lo que ahora nos corresponde hacer, conociendo como ya conocemos las diferentes clases y maneras de considerar uno ú otro.

Estas reglas generales son, como siempre, más sencillas que cuantas particulares puedan enunciarse, más fáciles de recordar y tan claras y evidentes, que ni verdadera demostración necesitan, bastando algunas palabras para que se comprenda su verdad.

Si varios créditos deben cobrarse en diferentes épocas y se quieren reunir en uno solo, calculando la época en que el total deberá satisfacerse, claro está que en el momento en que se verifique la operación, dichos créditos tendrán un valor efectivo determinado por el que ha resultado para c en las fórmulas hasta aquí deducidas, cuya suma representará el total de la deuda en aquel instante, ó sea la propia cantidad c considerada en su conjunto, luego, tanto si se quiere recibir ó pagar un capital igual exactamente al que representen los créditos, que es el caso de vencimiento medio, como otro cualquiera cuyo vencimiento sea distinto de éste, bastará sustituirlo con el hallado para c en lugar de C en las fórmulas del tiempo, para tener resuelta la cuestión; por consiguiente:

1.° *Para encontrar el vencimiento, medio ó no, que corresponda á varios créditos, bastará hallar sus valores efectivos en el momento del cálculo, efectuar su suma y calcular el tiempo necesario para que se convierta en la cantidad que deba satisfacerse.*

El cálculo convendrá hacerlo evidentemente, por logaritmos, ó valiéndose de los multiplicadores fijos, si es posible.

Problema 1.° Tres pagarés de 6000, 5000 y 10000 pesetas, vencen respectivamente á los 6, 10 y 20 meses, ¿cuál sería el vencimiento medio de los mismos, si se reunieran en uno solo, suponiendo sea 5 °/₀ anual, el tanto de interés ó descuento racional compuesto? (15).

$$\text{Log.}\frac{6000}{1'05^{\frac{6}{12}}}=\text{Log.}6000-\frac{6}{12}\,\text{Log.}1'05$$

$$=3'7781512-\tfrac{1}{2}.\ 0'0211893=3'7781512-0'0105946=3'7675566$$
$$=\text{Log.}5865'40$$

$$\text{Log.}\frac{5000}{1'05^{\frac{10}{12}}}=\text{Log.}5000-\frac{5}{6}.\ 0'0211893$$
$$=3'6989700-\frac{1}{6}.\ 0'1059465=3'6989700-0'0176577=3'6813123$$
$$=\text{Log.}4800'79$$

$$\text{Log.}\frac{10000}{1'05^{\frac{20}{12}}}=\text{Log.}10000-\frac{5}{3}.\ 0'0211893=4-\frac{1}{3}.\ 0'1059465$$
$$=4-0'0353155=3'9646845=\text{Log.}\ 9219'02$$

$$c=5865'40+4800'79+9219'02=19885'21\ \textit{pts.}$$

$$C=6000+5000+10000=21000\ \textit{pts.}$$

$$n=\frac{\text{Log.}21000-\text{Log.}19885'21}{\text{Log. }1'05}=\frac{4'3222193-4'2985301}{0'0211893}$$

$$=\frac{0'0236892}{0'0211893}=1'15=13 \text{ meses } 21 \text{ días.}$$

PROBLEMA 2.º En el mismo supuesto del anterior. ¿A qué plazo debería extenderse un sólo pagaré de 25000 pesetas, en sustitución de los tres?

$$c=19885'21;\ C=25000.$$

$$n=\frac{\text{Log. }25000-\text{Log. }19885'21}{\text{Log. }1'05}=\frac{4'3979400-4'2985301}{0'0211893}=\frac{0'0994099}{0'0211893}$$

$$=4'70=4 \text{ años } 8 \text{ meses } 12 \text{ días.}$$

ESCOLIO. La regla, según se ve, es tan general, que hasta puede aplicarse al caso poco frecuente en que los tantos de interés fuesen distintos para cada crédito, y distinto también el convenido nuevamente.

Del mismo razonamiento que hemos hecho para deducirla, se desprende igualmente la relativa al caso de vencimiento común, puesto que si éste es conocido, el valor que adquiera el capital adeudado en el momento de la operación durante el tiempo que falte para terminar el nuevo plazo, será el nominal buscado, y por lo tanto,

2.º *Para encontrar el capital correspondiente á un vencimiento común dado, bastará sumar los valores efectivos que tengan los créditos en el instante de la operación y calcular el nominal correspondiente.*

PROBLEMA 3.º En la misma hipótesis del primero, ¿de qué cantidad debería ser el pagaré que en sustitución de los tres, se extendiera á los 2 años?

$$n=2;\ c=19885'21 \textit{ pts.}$$

$$C=\text{Antlg.}(\text{Log.}19885'21+2.\text{Log. }1'05)$$

$$=\text{Antlg.}(4'2985301+2.0'0211893)$$

$$=\text{Antlg.}(4'2985301+0'0423786)=\text{Antlg.}4'3409087$$

$$=21923'45 \textit{ pts.}$$

Otra de las aplicaciones más comunes del cálculo de intereses, sabemos que es la liquidación de las *cuentas corrientes* (T. II, 167).

No es costumbre que en estas cuentas se calcule el interés compuesto, pero puede ocurrir, y si así fuera, los métodos direc to, inderecto (T. II, 214 y 216), y cuantos tengan por base reglas particulares y especiales fundadas en los procedimientos abreviados del interés simple, no tendrían aplicación ninguna al caso que nos ocupa, pero sí el que se conoce en España con el nombre de método de los saldos (T. II, 217), fuese el interés constante y recíproco, ó no; pues la que como ejemplo y modelo de cálculo detallamos (T. II, 212), ni en su fondo ni en su forma variaría evidentemente aunque los intereses fuesen compuestos, bien se determinaran directamente, bien por logaritmos, y hasta el empleo de multiplicadores fijos, si los tantos se encontraran en las tablas de que se pudiera disponer, ó se calculasen á propósito para este objeto, podría dar lugar á abreviaciones parecidas, que cualquiera deduciría sin dificultad, á las que producen cuando el interés es simple, los divisores fijos, partes alícuotas, etc.

Cuestión también análoga, ó mejor dicho, idéntica á la tratada ya en otro lugar, sería para el compuesto la de *prórroga de vencimientos* (T. II, 171), comprendida en la segunda de las reglas que acabamos de enunciar; una ligerísima variación en ellas que ni siquiera hay necesidad de indicar puesto que no variaría lo esencial del procedimiento, sería la *determinación del tanto de interés* que resultaría de reunir en uno solo varios créditos, cuando el nominal del nuevo y la fecha á que se extendiera se fijasen arbitrariamente, y del mismo modo podrían presentarse multitud de problemas semejantes á los indicados.

En una palabra; á todo lo que expondremos de aquí en adelante, ha de servir de principal fundamento la consideración del interés, base de las operaciones mercantiles que examinaremos, pero aun prescindiendo de éstas, es decir, de las que podrían presentar alguna dificultad ó merecen especial mención por su importancia y frecuencia, son innumerables las que pueden resolverse con facilidad sin más auxilio que las precedentes fórmulas y un pequeño análisis, ó el planteo de algunas ecuaciones más ó menos sencillas.

Aun pudieran separarse entre éstas, las que siendo de índole más ó menos general, sirvieran para la deducción de nuevas reglas aplicables á determinados casos particulares, pero los estrechos límites en que nos hemos propuesto encerrar nuestro trabajo, el carácter elemental que ha de revestir y el no ser por otra parte sino meras consecuencias de dichas fórmulas, á que en caso de precisión ó conveniencia se llegaría sin dificultad por su medio, nos impiden y al propio tiempo hacen innecesario detenernos en ellas.

Terminaremos, pues, el estudio del interés y descuento, resolviendo tres ejemplos que puedan servir de norma para la marcha que debería seguirse en sus análogos, si la práctica de los negocios exigiese su resolución: uno en que se combinen los intereses simple y compuesto; otro, también numérico, que dependa de ecuaciones, y un tercero, de los que pueden llamarse generales, por ser los datos indeterminados, originando por esta causa nuevas fórmulas especiales que podrían servir para llegar de un modo fijo y seguro á los valores de las incógnitas en cuantos casos particulares comprendieran, todos los cuales serían análogos á aquellos en que quisiera determinarse el *tanto real de una emisión* pagadera en varios plazos, examinados ya en el supuesto de referirse al interés simple (T. II, 168).

PROBLEMA 4.º Un capital de 4000 pesetas se ha tenido durante 2 años en un establecimiento de crédito, recogiendo al final de cada uno los correspondientes intereses, y después se ha dejado por otros 2 años, acumulándolos, con lo cual ha producido 81 pesetas más. ¿Qué tanto por 100 pagaba el establecimiento?

$$C \text{ (interés compuesto)} = 40000(1+r)^2$$

$$C \text{ (interés simple)} = 40000(1+2r)$$

luego si á interés compuesto produjo 81 pesetas más

$$40000(1+r)^2 = 40000(1+2r) + 81$$

ó dividiendo por 40000

$$(1+r)^2 = 1+2r+0'002025\,;\ 1+2r+r^2 = 1+2r+0'002025$$

y suprimiendo $1+2r$ de ambos miembros,

$$r^2 = 0'002025\,;\ r = \sqrt{0'002025} = 0'045$$

El establecimiento pagaba, pues, el 4'5, ó $4\frac{1}{2}$ % anual.

PROBLEMA 5.º Tres personas colocan al mismo tanto de interés compuesto 60000 pesetas cada una, que retiran respectivamente á la terminación de tres años consecutivos, con lo cual la segunda cobra 3966'12 pesetas más que la primera, y la tercera 4156'02 más que la segunda. ¿Cuál debe haber sido para ello la duración de cada plazo?

Si r representa el tanto por 1 de interés y n el tiempo, durante el cual la segunda ha tenido su capital colocado,

$$60000(1+r)^n - 60000(1+r)^{n-1} = 3996'12$$

$$60000(1+r)^{n+1} - 60000(1+r)^n = 4156'02$$

ó dividiendo por 60000,

$$(1+r)^n - (1+r)^{n-1} = 0'066602$$

$$(1+r)^{n+1} - (1+r)^n = 0'069267$$

y sacando en el primer miembro de la primera $(1+r)^{n-1}$ factor común y $(1+r)^n$ en el de la segunda

$$\left.\begin{array}{l} (1+r)^{n-1}(1+r-1) = 0'066602 \\ (1+r)^n (1+r-1) = 0'069267 \end{array}\right| \begin{array}{l} r(1+r)^{n-1} = 0'066602 \\ r(1+r)^n = 0'069267 \end{array}$$

de donde se deduce, dividiendo ésta por aquélla,

$$1+r = \frac{0'069267}{0'066602}\ ;\ r = \frac{69267}{66602} - 1 = 0'04$$

Conocido ya el tanto de interés, la ecuación $r\,(1+r)^n = 0'069267$ se convertirá, sustituyendo y tomando después logaritmos, en

$$0'04\,.\,1'04^n = 0'069267\ ;\ \text{Log.}0'04 + n\text{Log.}1'04 = \text{Log.}\,0'069267$$

de donde

$$n = \frac{\text{Log.}0'069267 - \text{Log.}0'04}{\text{Log.}1'04} = \frac{\bar{2}'8405264 - \bar{2}'6020600}{0'0170333}$$
$$= \frac{0'2384664}{0'0170333} = 14.$$

Los plazos fueron, pues, de 13, 14 y 15 años.

PROBLEMA 6.º ¿Cuál sería en su forma directa más sencilla la expresión del tanto real de interés compuesto á que resultaría colocado anualmente un capital, si en lugar de añadirle r por 1 al final de cada año se le agregase, como suele ser costumbre, el $\frac{r}{2}$ ó $\frac{r}{4}$, cada semestre ó trimestre?

Sean esos tantos X y x.

Teniendo el año 2 semestres ó 4 trimestres, tendríamos, recordando la relación (13) que liga á los equivalentes, el valor del que se desconoce, la fórmula del binomio (4) y la propiedad de los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos,

$$X=\left(1+\frac{r}{2}\right)^2-1=1+2\cdot\frac{r}{2}+\left(\frac{r}{2}\right)^2-1=1+r+\frac{r^2}{4}-1=r+\frac{r^2}{4}$$

$$x=\left(1+\frac{r}{4}\right)^4-1=1+4\cdot\frac{r}{4}+\frac{4.3}{1.2}\cdot\left(\frac{r}{4}\right)^2+4\left(\frac{r}{4}\right)^3+\left(\frac{r}{4}\right)^4-1$$

$$=r+6\cdot\frac{r^2}{16}+4\cdot\frac{r^3}{64}+\frac{r^4}{256}=r+\frac{3r^2}{8}+\frac{r^3}{16}+\frac{r^4}{256}.$$

Escolio. Como el último valor es igual á

$$r+\frac{3}{8}r\left(r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{32}\right)$$

no acostumbrándose en la práctica, según sabemos, á expresar los tantos más que en centésimas, ni á operar más que con fracciones cuyo denominador sea 2, 4 ú 8, y siendo generalmente muy poco superior á 1 el valor de la cantidad comprendida en el paréntesis, casi siempre podría tomarse como valor muy aproximado el $x=r+\frac{3}{8}r=\frac{11}{8}r$.

LIBRO SEGUNDO.

RENTAS GENERALES Y AMORTIZACIONES.

CAPÍTULO PRIMERO.

RENTAS.

I.—Ideas generales.

31. Las rentas (T. II, 193) que sólo á la ligera y bajo uno de sus aspectos particulares consideramos al ocuparnos de los valores públicos, tienen un carácter mucho más general, que ahora nos corresponde y precisa estudiar, recibiendo diversos nombres que dependen de su duración, valores de sus términos, épocas de cobro y otras diferentes circunstancias.

RENTA, en su acepción más general, significa *beneficio periódico producido por cualquier clase de capital*, siendo CONSTANTE ó VARIABLE, según que el *beneficio periódico* que constituye sus TÉRMINOS, *tenga ó no el mismo valor*, pudiendo solamente incluirse la primera en la parte elemental de los Cálculos mercantiles, por lo que bajo el punto de vista aritmético la consideraremos siempre como una *serie de cantidades iguales que se cobran en plazos equidistantes entre sí.*

El que ha de transcurrir desde que el capital empieza á producirla, hasta el pago de su primer término, puede, no obstante, ser distinto de los otros, dividiéndose también por esta causa en INMEDIATAS, DIFERIDAS y ANTICIPADAS, según que *el primer plazo es igual, mayor ó menor que los restantes*, ya sea PERPETUA, ó *de duración indefinida*, sin perjuicio de que pueda cesar por mutuo acuerdo mediante la correspondiente indemnización, ya LIMITADAS Ó TEMPORALES, si *sólo han de cobrarse durante un tiempo deter-*

minado, bien por un plazo fijo, bien por condiciones más ó menos variables.

Aparte de estos calificativos, reciben otros varios en casos particulares, de los cuales nos ocuparemos separadamente cuando encierren suficiente importancia para ello, limitándonos por ahora á consignar, con objeto de hacer comprensibles cuantos enunciados puedan referirse á las generales, que también se llaman ANUALES, SEMESTRALES, TRIMESTRALES, MENSUALES, SEMANALES, DIARIAS, etc., *según sean los plazos que separan el pago de sus términos de un año, semestre, trimestre, mes, semana, día*, etcétera, y que *los términos* suelen también designarse con los nombres de PENSIÓN, *cuando se cobran por algún servicio anterior;* ALQUILER, *por el uso de algún objeto prestado;* CENSO, *por el de un permiso obtenido;* SUELDO, si es *remuneración de un trabajo intelectual realizado durante períodos de tiempo*; SALARIO, *si de uno manual*, y otros que indicaremos más adelante.

EJEMPLOS. Lo que se paga periódicamente para tener el derecho de ocupar una casa durante cierto tiempo, constituye un *alquiler*, ó término de una renta *anual*, *trimestral*, ó *mensual* según que el pago se haga por años, trimestres, ó meses; esta renta sería *perpétua* para el dueño, suponiendo que la casa subsistiera siempre ocupada, ya que aun después de su fallecimiento, seguirían cobrándola los herederos y *limitada* ó *temporal*, para el inquilino.

Si la casa estuviera edificada sobre terreno ajeno, con el correspondiente permiso, el dueño de la misma á su vez, pagaría otra renta ó *censo* al del primero; si pagándose el alquiler por meses quedase terminado el contrato el 1.° de Septiembre y lo convenido para cada mes se empezará á cobrar en 1.° de Octubre, la renta sería *inmediata;* si se pagara por adelantado, *anticipada* en 1 unidad de tiempo; y si en 1.° de Enero, diferida en 3, renta que en realidad sería casi siempre *variable* para el dueño, por su carácter de perpetua, puesto que los alquileres van haciéndose mayores ó menores con las mejoras realizadas en las poblaciones, ó con la disminución de su importancia relativa, pero *constante* mientras durase el contrato con determinado inquilino.

Esa casa, por último, es probable tuviera un administrador que cobrase un *sueldo* y un portero al que se pagase un *salario* mensual, por el trabajo intelectual y manual de que se hallarían encargados, y no sería extraño que, como premio al celo que durante un tiempo mayor ó menor hubieran demostrado al realizarlo, se les señalase una *pensión* igual, mayor ó menor, que ese sueldo ó salario, el día en que por una circunstancia cualquiera se viesen en la imposibilidad de desempeñarlo, ó se conviniera cesarán en él.

II.—Rentas perpetuas.

32. *El valor del término de una renta perpetua*, se llama PERPETUIDAD.

Representándola por P y por c como siempre, el del capital que la origine, es evidente que lo que en cada plazo se cobre, no podrá ser más que el interés simple correspondiente á éste, luego si es inmediata, en cuyo caso no habrá lugar á la acumulación ni descuento de intereses, puesto que se retiran tan pronto como han sido devengados al terminar la unidad de tiempo á que el tanto y el plazo se refieran, estará determinado por lo que resulte de hacer $n=1$ en la expresión $y=cnr$ (11), si seguimos llamando r al tanto por 1 de interés convenido.

La de la perpetuidad será por consiguiente,

$$P=cr, \text{ de donde } \text{Log}.P=\text{Log}.c+\text{Log}.r$$

la del capital,

$$c=\frac{P}{r} \quad » \quad » \qquad \text{Log}.c=\text{Log}.P-\text{Log}.r$$

y la del tanto,

$$r=\frac{P}{c} \quad » \quad » \qquad \text{Log}.r=\text{Log}.P-\text{Log}.c$$

PROBLEMA 1.° El propietario de un terreno y el dueño de una casa edificada sobre el mismo, que satisface un censo de 500 pesetas anuales, convienen en que el pago se haga mensualmente bajo el supuesto de que el capital representado por el terreno produzca un interés de 6 por 100 anual, ¿cuál será el valor de la perpetuidad?

Esta cuestión abraza otras varias, ya que para resolverla hay que determinar:

El capital equivalente á la perpetuidad de 500 pesetas anuales,

$$\text{Log.}c = \text{Log. } 500 - \text{Log. } 0'06 = 2'6989700 - \bar{2}'7781512 = 3'9208188$$
$$= \text{Log. } 8333'33$$

El tanto mensual equivalente al anual 0'06 (14),

$$r = \text{Antlog. } \frac{1}{12} \text{ Log. } 1'06 - 1 = \text{Antlog. } \frac{1}{12} \,.\, 0'0253059 - 1$$
$$= \text{Antlog. } 0'0021088 - 1 = 1'004867 - 1 = 0'004867.$$

La perpetuidad mensual,

$$\text{Log.}P = \text{Log. } 8333'33 + \text{Log. } 0'004867 = 3'9208188 - 3'6872613$$
$$= 1'6080801 = \text{Log. } 40'56$$

$$P = 40'56 \ pts.$$

Escolios. Bastando para la resolución del problema conocer Log.c y Log.r, no había necesidad de calcular c=8333'33 pesetas, valor del capital equivalente al censo, pero lo hemos determinado para presentar este caso con independencia de la cuestión propuesta.

El nuevo censo, pensión, ó perpetuidad mensual, 40'56 pesetas, resulta, como debía suceder, menor que 500:12=41'66 pesetas, á causa de que al pagar mensualmente se anticipan los intereses 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1 meses respectivamente.

Problema 2.º Un capitalista compra una finca por 135318'12 pesetas, incluyendo todos los gastos, y la arrienda ó alquila por 4000 pesetas cada semestre. ¿Qué tanto de interés anual le producirá el dinero empleado? (14)

$$\text{Log.}r \text{ (semestral)} = \text{Log. } 4000 - \text{Log. } 135318'12$$
$$= 3'6020600 - 5'1313559 = 2'4707041 = \text{Log. } 0'02956$$

$$r \text{ (anual)} = \text{Antlg. } 2 \text{ Log. } 1'02956 - 1 = \text{Antlg. } 2 \,.\, 0'0126516 - 1$$
$$= \text{Antlg. } 0'0253032 - 1 = 1'0599 - 1 = 0'0599$$

Tanto por 100 anual = 5'99 = 6 % aproximadamente.

33. Si la renta es diferida y el primer término no ha de cobrarse hasta pasado un transcurso de d unidades de tiempo, el capital c, en que por la acumulación de intereses se habrá convertido en el tiempo d, el que desde luego deba entregarse, cuyo

valor representaremos por c_d, será el final del interés compuesto devengado por éste durante dicho tiempo, y por lo tanto tendremos

$$c = c_d\,(1+r)^d$$

en el momento en que la renta empieza á ser inmediata, luego sustituyendo en el valor de la perpetuidad

$$P = c_d . r(1+r)^d;\ \text{Log}.P = \text{Log}.c_d + \text{Log}.r + d\text{Log}.(1+r)$$

y despejando los valores de c_d y d

$$c_d = \frac{P}{r\,(1+r)^d};\ \text{Log}.c_d = \text{Log}.P - \text{Log}.r - d\text{Log}.(1+r)$$

$$d = \frac{\text{Log}.P - \text{Log}.c_d - \text{Log}.r}{\text{Log}.\ (1+r)}$$

Expresiones por cuyo medio es fácil calcular la perpetuidad, dados el capital á que su percepción equivale, el tiempo durante el cual se difiere y el tanto de interés, ó bien, dicho capital ó tiempo, conociendo las otras tres cantidades.

Por el contrario; si la renta empezara á ser inmediata d unidades de tiempo antes de lo que correspondería al capital entregado que llamaremos c_{-d}, éste equivaldría al terminar dicho tiempo (15) á

$$c = \frac{c_{-d}}{(1+r)^d}$$

y la perpetuidad por consiguiente á

$$P = \frac{c_{-d} . r}{(1+r)^d},\ \text{de donde, Log}.\ P = \text{Log}.\ c_{-d} + \text{Log}.r - d\,\text{Log}.(1+r)$$

de cuyas igualdades se desprende análogamente,

$$c_{-d} = \frac{P\,(1+r)^d}{r};\ \text{Log}.\ c_{-d} = \text{Log}.P + d\ \text{Log}.(1+r) - \text{Log}.r$$

$$d = \frac{\text{Log}.c_{-d} - \text{Log}.P + \text{Log}.r}{\text{Log}.\ (1+r)}$$

fórmulas en todo semejantes á las anteriores.

34. Si se recuerda que (T. I, 231, Cor.)

$$\frac{c_{-d} . r}{(1+r)^d} = c_{-d} . r\,(1+r)^{-d}$$

la analogía es aun mayor, y los valores que hemos deducido hasta aquí pueden ser dados por las tres únicas expresiones

$$P = c_{\pm d} \,.\, r\,(1+r)^{\pm d};\ \text{Log.}P = \text{Log.}c_{\pm d} + \text{Log.}r \pm d\,\text{Log.}(1+r)$$

$$c_{\pm d} = \frac{P}{r\,(1+r)^{\pm d}};\ \text{Log.}\ c_{\pm d} = \text{Log.}P - \text{Log.}r \mp d\text{Log.}(1+r)$$

$$\pm d = \frac{\text{Log.}P - \text{Log.}c_{\pm d} - \text{Log.}r}{\text{Log.}(1+r)}$$

con tal que el tiempo d, por el cual se difiera ó anticipe la renta, se considere como *cero*, como *positivo*, ó como *negativo*, según que sea inmediata, diferida, ó anticipada y viceversa, tomando simultáneamente los signos superiores ó inferiores de d, en los dos últimos casos.

Problema 1.° El propietario de una finca cuyo arrendamiento por 5 años tiene ya cobrado, la vende por 200000 pesetas. ¿En cuánto deberá arrendarla el nuevo dueño para que el capital empleado le produzca 6 %?

La renta es diferida en los 5 años cuyo arrendamiento ya está cobrado.

$$d = 5;\ c_d = 200000;\ r = 0'06.$$

$$\text{Log.}P = \left\{\begin{array}{l} \text{Log. } 200000 = \dots\dots\dots\dots = 5'3010300 \\ + \text{Log. } 0'06 = \dots\dots\dots\dots\dots = \bar{2}'7781512 \\ + \text{Log. } 5\,\text{Log. } 1'06 = 5.0'0253059 = 0'1265295 \end{array}\right\} = 4'2067107$$

$$P = 16095'73\ \textit{ptas.}$$

Problema 2.° Un propietario que percibe por alquiler de una casa 4516 pesetas el 1.° de Enero de cada año, la vende al interés trimestral de $1\frac{1}{2}$ % el 1.° de Marzo ¿Cuánto deberá exigir por ella?

La renta será anticipada en un trimestre ó $\frac{1}{4}$ de año.

$$d = \frac{1}{4};\ P = 4516;\ r = \text{Antlg. } 4\ \text{Log. } 1'015 - 1$$
$$= \text{Antlg. } (4.0'0064660) - 1 = \text{Antlg. } 0'0258640 - 1$$
$$= 1'061 - 1 = 0'061.$$

$$\text{Log.}c_{-\frac{1}{4}}$$

$$=\left\{\begin{array}{lll} \text{Log.}4516= & 3'6547539 & \left.\right\}= \quad 4'8694241 \\ - \quad \text{Log.}0'061= & -\bar{2}'7853298 & \\ +\frac{1}{4}\text{Log.}1'061= & +\frac{1}{4}0'0258640 & =+0'0064660 \end{array}\right\}=4'8758901$$

$$c_{-\frac{1}{4}}=75143'30 \textit{ pts.}$$

Problema 3.° Comprobar el anterior, suponiendo que al interés trimestral de $1\frac{1}{2}$ °/₀ se ha comprado el 1.° de Marzo por 75143'30 pesetas, una casa que produce anualmente 4516 pesetas de renta, y averiguando en qué época deben cobrarse los alquileres,

$$d=\frac{\text{Log.}4516-\text{Log.}75143'30-\text{Log.}0'061}{\text{Log.}1'061}=\frac{3'6547539-4'8758901-\bar{2}'7853298}{0'0258640}$$

$$=\frac{3'6547539-3'6612199}{0'0258640}=\frac{-0'0064660}{0'0258640}=-0'25=-\frac{1}{4}.$$

La renta debe, pues, ser anticipada en $\frac{1}{4}$ de año, ó sea en un trimestre, y los alquileres cobrarse por lo tanto en 1.° de Enero de cada año.

El valor del tanto r, es imposible deducirlo algebricamente de un modo directo, porque, según acaba de verse, entra esta incógnita al tomar logaritmos en dos términos, y de distinta manera: sola en el uno, y agregada á la unidad en el otro, por lo que no es posible despejar en función de los datos, ni Log.r, ni Log.$(1+r)$, y en cuanto á las fórmulas directas, son con respecto á r, del grado (T. II, 112) $d+1$, y el Álgebra no puede resolver directamente tratándose de ecuaciones completas, como lo sería la que resultara de desarrollar $(1+r)^d$ por la regla de Newton, más que las ecuaciones de los cuatro primeros grados.

Esta imposibilidad, es causa de que en la práctica se encuentre sólo aproximadamente por medio de tanteos, que pueden efectuarse de varios modos, directamente y por logaritmos.

35. No obstante, pudiendo calcularse con exactitud cuando la renta sea inmediata, es también fácil hallarlo si ha de ser anticipada, *restando de su valor la parte correspondiente al primer término, con arreglo á la época en que deba cobrarse*, y encontrando

después su valor por medio de la fórmula deducida para aquel caso, puesto que eso equivaldrá á convertir la renta en inmediata.

Problema 1.º Comprobar el mismo problema á que se refiere el anterior, suponiendo que el 1.º de Marzo se compra por 75143'30 pesetas una casa cuyo alquiler anual de 4516 pesetas, se cobra en 1.º de Enero, y calculando el tanto de interés trimestral que aquel dinero producirá.

La perpetuidad será anticipada en un trimestre, ó $\frac{1}{4}$ de año y como 4516 : 4=1129 será la que corresponde á cada trimestre, puede considerarse como valor de la perpetuidad inmediata con muy poco error, 75143'30 — 1129 = 74014'30 pesetas, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Log.}r &= \text{Log.}4516 - \text{Log.}74014'30 = 3'6547539 - 4'8693156\\ &= \bar{2}'7854383 = \text{Log.}0'06101\end{aligned}$$

tanto por 1 anual, equivalente al trimestral

$$\begin{aligned}r &= \text{Antlg.}\ \frac{1}{4}\ \text{Log.}1'06101 - 1 = \text{Antlg.}\left(\frac{1}{4}\cdot 0'0258640\right) - 1\\ &= \text{Antlg.}0'0064660 - 1 = 1'015 - 1 = 0'015\end{aligned}$$

que á su vez equivale al $1'5 = 1\frac{1}{2}\ ^0/_0$.

Este método, aplicable como acabamos de ver á las rentas anticipadas, que siempre lo han de ser por un tiempo menor que la duración de los plazos, originaría grandes errores si se aplicara á las diferidas, por cuya razón se han ideado varios procedimientos para encontrar valores aproximados en este caso y sus análogos.

Todos, sin embargo, son métodos de tanteo más ó menos com, plicados é ingeniosos, que si pueden tener valor científico carecen de interés práctico, tanto por la rareza de este caso, que casi nunca ocurre resolver, como por proponerse aproximar el tanto con el número de cifras que se desee, cuestión principalmente especulativa.

Para la realidad de las operaciones prácticas en la inmensa mayoría de los casos, basta recordar que

$$\frac{P}{c_d} = r(1+r)^d\ ;\ \text{Log.}P - \text{Log.}\,c_d = \text{Log}\,r + d\text{Log.}(1+r)$$

y en una ú otra igualdad *dar á r un valor algo inferior al* $\frac{p}{c}$ *que correspondería á la renta inmediata*, aumentándolo ó disminuyéndolo según que el segundo miembro resulte menor ó mayor que el primero, hasta tener la aproximación suficiente.

Problema 2.° Comprobar el 1.° del párrafo anterior suponiendo se ha comprado por 200000 pesetas una finca que se arrienda por 16095'73 anuales, que no se empezarán á cobrar hasta transcurrir 6 años, y quiere calcularse el interés que producirá el dinero empleado.

Si la renta fuera inmediata, el interés sería 16095'73:200000 =0'08047865 por 1 anual.

Para $r=0'07$, tendríamos $0'07.1'07^5=0'07.1'402552$
$=0'09817864>0'08047865$

Para $r=0'05$, ... $0'05.1'05^5=0'05.1'276282$
$=0'06381410<0'08047865$

Para $r=0'06$, ... $0'06.1'06^5=0'06.1'338226$
$=0'08029356<0'08047865$.

Para $r=0'061$, ... $0'061.1'061^5=0'061.1'344550$
$=0'08201755>0'08047865$

siendo por consiguiente 0'06 un valor poco más pequeño y 0'061 excesivamente grande, puede asegurarse que 0'06 por 1 ó 6°/₀ será con muy poco error por defecto, el tanto pedido.

III.—Rentas limitadas.

36. Si el tiempo durante el cual debe cobrarse una renta inmediata, está limitado á un número de unidades que representaremos por n, dicha renta será evidentemente igual á la diferencia que haya entre una perpetua también inmediata y otra diferida en n unidades de tiempo cuyos términos sean de igual valor, luego el del capital que deberá entregarse para constituirla, será la diferencia entre los hallados en las perpetuas para c y $c_n=c_d$.

Representando, pues, según es costumbre, por V el valor actual, que equivale á la renta en el momento de efectuar la operación y por a el de los términos, se verificará, reemplazando P por a y d por n,

$$c=\frac{a}{r} \quad \text{y} \quad c_n=\frac{a}{r(1+r)^n}$$

y por consiguiente,

$$V=\frac{a}{r}-\frac{a}{r(1+r)^n}=\frac{a(1+r)^n-a}{r(1+r)^n}=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r(1+r)^n}$$

de donde

$$\text{Log.}\,V=\text{Log.}\,a+\text{Log.}\left((1+r)^n-1\right)-\text{Log.}\,r-n\,\text{Log.}\,(1+r)$$

para la aplicación de cuya fórmula, así como de todas las que se encuentran en igual caso por contener una potencia ó raíz indicada, repetimos por última vez deberá empezarse por calcular aparte el logaritmo n Log.$(1+r)$ de esa potencia ó raíz, para si es preciso poder buscar en las Tablas su antilogaritmo y efectuar con él las operaciones indicadas, evitando la generalmente dificultosa potenciación ó radicación directa.

Del valor del capital se deduce también á simple vista,

$$a=\frac{Vr(1+r)^n}{(1+r)^n-1};$$

$$\text{Log.}\,a=\text{Log.}\,V+\text{Log.}\,r+n\,\text{Log.}\,(1+r)-\text{Log.}\left((1+r)^n-1\right)$$

y multiplicando ambos miembros de la primera igualdad por el denominador, haciendo la transposición conveniente, sacando $(1+r)^n$ factor común, despejándolo, tomando logaritmos y dividiendo por el de $1+r$,

$$a\left((1+r)^n-1\right)=Vr(1+r)^n\,;\; a(1+r)^n-a=Vr(1+r)^n\,;$$

$$a(1+r)^n-Vr(1+r)^n=a$$

$$(a-Vr)(1+r)^n=a\,;\;(1+r)^n=\frac{a}{a-Vr};$$

$$n\,\text{Log.}\,(1+r)=\text{Log.}\,a-\text{Log.}\,(a-Vr)$$

$$n=\frac{\text{Log.}\,a-\text{Log.}\,(a-Vr)}{\text{Log.}\,(1+r)}$$

Problema 1.º ¿Qué cantidad podría prestarse al $4\frac{1}{2}$ % á una persona que se comprometiera á pagar durante 10 plazos iguales 421'50 pesetas?

$$a = 421'50\ ;\ n = 10\ ;\ r = 0'045\ ;$$

$$(1+r)^n = 1'045^{10} = 1'552969 \text{ (Tabla III)}\ ;\ (1+r)^n - 1 = 0'552969.$$

$$\text{Log. } V = \left\{\begin{array}{lr} \text{Log. } 421'50 = & 2'6247976 \\ + \text{Log. } 0'552969 = & \bar{1}'7427008 \\ - \text{Log. } 0'045 = & -\bar{2}'6532125 \\ -10 \text{ Log. } 1'045 = & -0'1911629 \end{array}\right. \begin{array}{l} = 2'3674984 \\ \\ = -\bar{2}'8443754 \end{array} \Bigg\} = 3'5231230$$

$$V = 3335'21 \ pts.$$

Escolio. Para que la última cifra de 10Log.1'045 fuese la verdadera, hemos hecho uso de la Tabla IV.

Problema 2.º Una compañía toma prestadas 800000 pesetas al 5 % de interés anual para emprender la explotación de un negocio, comprometiéndose á satisfacer cada año la cantidad suficiente para que al transcurrir 20 queden pagados dicho capital y los correspondientes intereses. ¿Cuál deberá ser esa cantidad?

$$V = 800000\ ;\ n = 20\ ;\ r = 0'05\ ;\ (1+r)^{20} = 2'653298 \text{ (Tabla III)}\ ;$$
$$(1+r)^{20} - 1 = 1'653298$$

$$\text{Log.} a = \left\{\begin{array}{ll} \text{Log. } 800000 & = 5'9030900 \\ + \text{Log. } 0'05 & = \bar{2}'6989700 \\ + 20 \text{ Log. } 1'05 & = 0'4237860 \\ - \text{Log. } 1'653298 & = \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \begin{array}{l} = 5'0258460 \\ \\ = -0'2183512 \end{array} \Bigg\} = 4'8074948$$

$$a = 64194'10 \ pts.$$

Problema 3.º Comprobar el anterior, calculando el número de años que la compañía tendrá que pagar 64194'10 pesetas para satisfacer el capital de 800000 pesetas, tomado al 5 %, y sus correspondientes intereses.

$$Vr = 800000.0'05 = 40000\ ;\ a - Vr = 64194'10 - 40000 = 24194'10$$

$$n = \frac{\text{Log. } 64'19410 - \text{Log. } 24194'10}{\text{Log. } 1'05} = \frac{4'8074948 - 4'3837095}{0'0211893}$$

$$= \frac{0'4237853}{0'0211893} = 19'99 \dots\dots = 20 \text{ años.}$$

37. El cálculo del tanto ofrece igual dificultad que el referente á las rentas perpetuas diferidas ó anticipadas (34), por depender también su valor de una ecuación del grado $n+1$, pero entre otros varios procedimientos de tanteo menos seguros y rápidos, puede seguirse para determinarlo un método de aproximación sumamente fácil y breve, cuando n es bastante grande.

En efecto; suponiendo conocida la potencia $(1+r)^n$ y despejando r en la igualdad demostrada

$$Vr(1+r)^n = a(1+r)^n - a$$

se obtiene

$$r = \frac{a(1+r)^n - a}{V(1+r)^n} = \frac{a}{V} - \frac{a}{V(1+r)^n}$$

Ahora bien; como siempre será $a < V$ y con mayor razón $a < V(1+r)^n$ también $\frac{a}{V(1+r)} < 1$ y tanto más pequeño cuanto mayor sea n (T. I, 248, 3.ª, y 199, 5.ª) por lo que, despreciándolo se obtendrá un primer valor $\frac{a}{V}$ aproximado por exceso á r, que puede representarse por r_1 y ser sustituído en vez de r en el segundo miembro de la igualdad, para hallar un segundo valor más cercano al verdadero

$$r_2 = r_1 - \frac{a}{V(1+r_1)^n} = r_1 - \frac{r_1}{(1+r_1)^n}$$

que puede calcularse, y en el que ya no se desprecia nada, cometiendo únicamente el error de tomar por sustraendo un valor que en general será muy aproximado.

Es, sin embargo, evidente que si la aproximación del tanto no bastase, se tendría, procediendo de igual modo,

$$r_3 = r_1 - \frac{r_1}{(1+r_2)^n}\ ;\ r_4 = r_1 - \frac{r_1}{(1+r_3)^n}$$

y así sucesiva é indefinidamente.

Problema 4.º Una persona ha comprado por 40000 pesetas una renta inmediata anual de 2400, exigible durante 100 años. ¿Qué interés producirá aquel dinero?

$$r_1 = \frac{2400}{40000} = 0'06; \quad r_2 = 0'06 - \frac{0'06}{1'06^{100}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. } 0'06 = \bar{2}'7781513 \\ -100 \text{ Log. } 1'06 = -2'5305865 \end{array}\right\} = \bar{4}'2475648 = \text{Log. } 0'0001768$$

$$r_2 = 0'06 - 0'0001768 = 0'0598232; \quad r_3 = 0'06 - \frac{0'06}{1'0598232^{100}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. } 0'06 = \bar{2}'7781513 \\ -100 \text{ Log. } 1'0598232 = -2'5233420 \end{array}\right\} = \bar{4}'2548093 = \text{Log. } 0'0001798$$

$$r_3 = 0'06 - 0'0001798 = 0'0598202$$

....

....

Escolio. Los logaritmos de $1+r_1$ y $1+r_2$, que han de multiplicarse por 100, deben buscarse por medio de la Tabla II, considerando por lo menos nueve cifras.

El valor de r_3, es erróneo en menos de 0'000003, y por lo tanto, el de r_2 tenía ya exactas las cinco primeras cifras después de la coma.

Este método da, pues, como hemos dicho, una aproximación grande y relativamente rápida, debiendo emplearse *cuando se trate de operaciones muy aproximadas*, ya que para la mayoría de los casos prácticos, bastaría obtener el primer valor r_1, siendo el de n suficientemente grande.

Si esto no se verifica, es, sin embargo, el método bastante largo, porque siendo de importancia el término despreciado, es preciso calcular muchos valores de r, para tener la conveniente aproximación.

Expuesto ya, no obstante, este método seguro, podemos prescindir de otros tan complicados como el que exigen, por ejemplo, las fórmulas de Baily para determinar un primer valor y verificar después las correspondientes correcciones, y aun de otros más sencillos, como la igualdad logarítmica de Vázquez Queipo, casi todos los cuales, como para alguno veremos más adelante, hacen precisas Tablas especiales, limitándonos á indicar *para los casos más frecuentes, en que no sea indispensable una gran aproximación*, el procedimiento de tanteo que nos parece más comprensible y fácil, cuando no se posea Tabla alguna ó á lo más quiera usarse únicamente la que contiene las potencias de $1+r$ (Tabla III) para los tantos y plazos más usuales, si se quiere evitar la potenciación directa.

El procedimiento consiste en despejar $(1+r)^n$ de la igualdad deducida al encontrar el valor del tiempo, $(a - Vr)(1+r)^n = a$, de donde

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Vr} = \frac{1}{1 - \frac{V}{a} . r}$$

dividiendo ambos términos de la fracción por a.

Siendo $\frac{V}{a}$ muy fácil de calcular, basta sustituir su valor en el denominador, efectuar la multiplicación, sustracción y división indicadas, dando á r los arbitrarios más usuales y comparar los resultados con los del primer miembro, para aumentar ó disminuir aquéllos según resulten éstos mayores ó menores.

Problema 5.° Una persona ha comprado por 10000 pesetas una renta anual inmediata de 1907'62 exigible durante seis años. ¿Qué interés producirá aquel dinero?

$$\frac{V}{a} = \frac{10000}{1907'62} = 5'24213$$

valor que, multiplicado por 0'03, 0'035, 0'04, convierte al segundo miembro después de verificar las operaciones indicadas,

Para $r = 0'03$ en $1'186611 < 1'194052$ (Tabla III).
Para $r = 0'035$ en $1'224701 < 1'229255$ »
Para $r = 0'04$ en $1'265318 < 1'265319$ »

Y como los últimos sólo se diferencian en 0'000001 y por lo tanto pueden considerarse iguales si se tiene en cuenta el error inherente á todas las operaciones aproximadas, puede deducirse, poco menos que con exactitud, que $r = 0'04$ y que el capital de 10000 pesetas empleado, producirá por consiguiente 4 %.

38. Suponiendo ahora como en las perpetuas, que la renta se difiera en d unidades de tiempo y representando análogamente por V_d el valor que para constituirla deba tener el capital, el mismo razonamiento hecho al estudiar aquéllas demuestra, que si V_d ha de convertirse en V, capital correspondiente á la inmediata, durante el tiempo d, deberá verificarse (15)

$$V_d = \frac{V}{(1+r)^d}$$

ó reemplazando V por su valor, en función del término de la renta, el tiempo y el tanto,

$$V_d = \frac{\dfrac{a\left((1+r)^n - 1\right)}{r(1+r)^n}}{(1+r)^d} = \frac{a\left((1+r)^n - 1\right)}{r(1+r)^n (1+r)^d}$$

de donde tomando logaritmos

$$\text{Log.}V_d = \text{Log.}a + \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right) - \text{Log.}r - n\,\text{Log.}(1+r) \\ - d\,\text{Log.}(1+r)$$

y despejando a de la penúltima igualdad y d de la última

$$a = \frac{V_d \cdot r(1+r)^n (1+r)^d}{(1+r)^n - 1}$$

$$\text{Log.}a = \text{Log.}V_d + \text{Log.}r + n\text{Log.}(1+r) \\ + d\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right)$$

$$d = \frac{\text{Log.}a - \text{Log.}V_d - \text{Log.}r - n\text{Log.}(1+r) + \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right)}{\text{Log.}(1+r)}$$

Por último; multiplicando por el denominador

$$a(1+r)^n - a = V_d \cdot r(1+r)^n (1+r)^d$$

y por consiguiente,

$$a(1+r)^n - V_d \cdot r(1+r)^n (1+r)^d = a;$$

$$(1+r)^n\left(a - V_d r(1+r)^d\right) = a;$$

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - V_d r(1+r)^d}$$

$$n\ \text{Log.}\ (1+r) = \text{Log.}a - \text{Log.}\ \left(a - V_d r(1+r)^d\right);$$

$$n = \frac{\text{Log.}a - \text{Log.}\left(a - V_d r(1+r)^d\right)}{\text{Log.}\ (1+r)}$$

expresión, para cuyo cálculo deberá encontrarse previamente el valor de

$$V_d r(1+r)^d = \text{Antlg.}\left\{\text{Log.}\,V_d + \text{Log.}\,r + d\,\text{Log.}\,(1+r)\right\}$$

La igualdad deducida

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - V_d r(1+r)^d} = \frac{1}{1 - \dfrac{V_d}{a} r(1+r)^d}$$

puede además servir para hallar el valor de r por tanteo, de un modo semejante al detallado últimamente.

39. Si en vez de ser diferida se anticipase la renta en un tiempo d referido á igual unidad que n, el capital V_{-d}, equivalente á la misma, debería ser igual á $V(1+r)^d$ siendo V el de la inmediata, puesto que se cobra d unidades de tiempo antes, y por lo tanto

$$V_{-d} = \frac{a\left((1+r)^n - 1\right)}{r(1+r)^n}(1+r)^d = \frac{a\left((1+r)^n - 1\right)(1+r)^d}{r(1+r)^n}$$

$$\begin{aligned}\text{Log.}\,V_{-d} = \text{Log.}\,a + \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right) + d\,\text{Log.}(1+r)\\ -\text{Log.}\,r - n\,\text{Log.}(1+r)\end{aligned}$$

Despejando a de la penúltima igualdad y d de la última

$$a = \frac{V_{-d}\,.\,r\,(1+r)^n}{\left((1+r)^n - 1\right)(1+r)^d}$$

$$\begin{aligned}\text{Log.}\,a = \text{Log.}\,V_{-d} + \text{Log.}\,r + n\,\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right)\\ -d\,\text{Log.}(1+r)\end{aligned}$$

$$d = \frac{\text{Log.}\,V_{-d} - \text{Log.}\,a - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right) + \text{Log.}\,r + n\,\text{Log.}(1+r)}{\text{Log.}(1+r)}$$

Multiplicando ambos miembros de la expresión de a por $(1+r)^n - 1$

$$a(1+r)^n - a = \frac{V_{-d} r(1+r)^n}{(1+r)^d}$$

y por consiguiente.

$$a(1+r)^n-\frac{V_{-d}r(1+r)^n}{(1+r)^d}=a\ ;\ (1+r)^n\left(a-\frac{V_{-d}r}{(1+r)^d}\right)=a\ ;$$

$$(1+r)^n=\frac{a}{a-\dfrac{V_{-d}r}{(1+r)^d}}$$

$$n\text{Log.}(1+r)=\text{Log.}a-\text{Log.}\left(a-\frac{V_{-d}r}{(1+r)^d}\right)\ ;$$

$$n=\frac{\text{Log.}a-\text{Log.}\left(a-\dfrac{V_{-d}r}{(1+r)^d}\right)}{\text{Log.}(1+r)}$$

expresión para cuyo cálculo deberá encontrarse previamente el valor de

$$\frac{V_{-d}r}{(1+r)^d}=\text{Antlg.}\left\{\text{Log.}V_{-d}+\text{Log.}r-d\text{Log.}(1+r)\right\}$$

Finalmente, transformando el valor

$$(1+r)^n=\frac{a}{a-\dfrac{V_{-d}r}{(1+r)^d}}=\frac{1}{1-\dfrac{V_{-d}}{a}\cdot\dfrac{r}{(1+r)^d}}$$

puede determinarse por tanteo el valor de r.

40. La simetría que presentan las fórmulas halladas hasta aquí, que sólo se diferencian como las semejantes de las rentas perpetuas en el signo de d, ó en ser $d=0$ si se trata de inmediatas, permite análogamente (34) encerrarlas todas en las completamente generales,

$$V_{\pm d}=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r\,(1+r)^n\,(1+r)^{\pm d}}$$

$$\text{Log.}V_{\pm d}=\text{Log.}a+\text{Log.}\left((1+r)^n-1\right)-\text{Log.}r-n\,\text{Log.}(1+r)$$
$$\mp d\,\text{Log.}(1+r)$$

$$a=\frac{V_{\pm d}\,r\,(1+r)^n\,(1+r)^{\pm d}}{(1+r)^n-1}$$

$$\text{Log.}a = \text{Log.}V_{\pm d} + \text{Log.}r + n\text{Log.}(1+r) \pm d\,\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right)$$

$$\pm d = \frac{\text{Log.}a - \text{Log.}V_{\pm d} - \text{Log.}r - n\,\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right)}{\text{Log.}(1+r)}$$

$$n = \frac{\text{Log.}a - \text{Log.}\left(a - V_{\pm d}\,r(1+r)^{\pm d}\right)}{\text{Log.}(1+r)}$$

con la auxiliar

$$V_{\pm d}\,r(1+r)^{\pm d} = \text{Antlg.}\left\{\text{Log.}V_{\pm d} + \text{Log.}r \pm d\,\text{Log.}(1+r)\right\}$$

y para hallar r por tanteo

$$(1+r)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{V_{\pm d}}{a}\cdot r(1+r)^{\pm d}}$$

en todas las cuales deberán tomarse para d los signos superiores, inferiores, ó igualarla á cero, según se trate de rentas diferidas, anticipadas ó inmediatas.

Como el cálculo detallado de estas cantidades, apenas se diferenciaría de los ya efectuados en los anteriores problemas, vamos á resolver uno solo, indicando las operaciones que podrían efectuarse, con objeto de hacer ver que si bien las expresiones logarítmicas que anteceden son aplicables á los diversos casos que pueden ocurrir, en muchos de ellos es conveniente *sustituir en las directas los números conocidos, para simplificar* en lo posible *las fracciones resultantes* y hacer uso de los logaritmos, ó Tablas y cálculo directo, después de esta transformación.

Problema. Una compañía toma prestadas al 5 °/₀ anual 300000 pesetas, que se compromete á pagar en 10 plazos anuales á contar desde 5 años después. ¿Cuánto deberá satisfacer al terminar cada uno?

$$V_d = 300000;\ r = 0'05;\ n = 10;\ d = 5;\ 1+r = 1'05 \text{ (Tabla III)}$$

$$a = \frac{300000.0'05.1'05^{10}.1'05^{5}}{1'05^{10}-1} = \frac{15000.1'05^{15}}{1'05^{10}-1}$$

$$= \frac{15000.2'078928}{1'628495-1} = \frac{31183'92}{0'628495} = 49585'34\ pts.$$

IV.—Detalles prácticos.

41. En la mayoría de los casos en que se trata de calcular el capital, el término ó el tiempo por que puede diferirse ó anticiparse la renta, teniendo su duración y el tanto los valores más frecuentes, no suelen, sin embargo, aplicarse las fórmulas generales, sino otras derivadas de las mismas, cuyo cálculo es mucho más sencillo disponiendo de Tablas adecuadas, en todo semejantes á las de los multiplicadores fijos, que describimos en el interés y descuento (18 y 28).

Si en la expresión del *capital* equivalente á las inmediatas (36) hacemos $a=1$ y llamamos $F_n(r)$, que se lee *función subene de* r, al *correspondiente á la renta de* 1 *unidad monetaria*, ó en otros términos, al *valor que ha de entregarse para constituir la renta de* 1 *unidad, según el tanto y tiempo convenidos*, el del MULTIPLICADOR FIJO será:

$$F_n(r)=\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}$$

expresión cuyos valores pueden calcularse dando á n y r los más usuales, por medio de la igualdad

$$\text{Log.}F_n(r)=\text{Log.}\left((1+r)^n-1\right)-\text{Log.}r-n\text{Log.}(1+r)$$

formando con ellos Tablas análogas á la que al final lleva el número VI, cuya disposición y manejo son idénticos á los del interés y descuento compuesto, en la cual hemos incluído también, con seis cifras después de la coma, los que se refieren á iguales tantos y tiempos.

De este modo se evita casi siempre el empleo de logaritmos, puesto que las fórmulas relativas á las rentas inmediatas se convierten en (36)

$$V=a\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r\,(1+r)^n}=aF_n(r)\;;\;a=\frac{V}{F_n(r)}$$

Las referentes á las diferidas (38), en

$$V_d=\frac{a}{(1+r)^d}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r\,(1+r)^n}=\frac{a}{(1+r)^d}\,F_n(r)\;;\;a=\frac{V_d(1+r)^d}{F_n(r)}\;;$$

de donde

$$\text{Log.}\,a = \text{Log.}\,V_d + d\,\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\,F_n(r)\ ;$$

$$d = \frac{\text{Log.}\,a - \text{Log.}\,V_d + \text{Log.}\,F_n(r)}{\text{Log}\,(1+r)}$$

Y las deducidas para las anticipadas (39), en

$$V_{-d} = a\,(1+r)^d \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r\,(1+r)^n} = a(1+r)^d F_n(r)\ ;\ a = \frac{V_{-d}}{(1+r)^d F_n(r)}$$

y por lo tanto,

$$\text{Log.}\,V_{-d} = \text{Log.}\,a + d\text{Log.}(1+r) + \text{Log.}\,F_n(r)\ ;$$

$$d = \frac{\text{Log.}\,V_{-d} - \text{Log.}\,a - \text{Log.}\,F_n(r)}{\text{Log.}(1+r)}$$

Problema 1.º Resolver el 1.º del párrafo 36, por la Tabla de multiplicadores fijos.

$$a = 421'50;\ n = 10;\ t = 4\tfrac{1}{2}\ \%;\ F_n(r) = 7'912718 \text{ (Tabla VI)}$$

$$V = 421'50 . 7'912718 = 3335'210\ pts.$$

conforme al resultado allí obtenido.

Problema 2.º Resolver de igual modo el 2.º del propio párrafo.

$$V = 800000;\ n = 20;\ t = 5\ \%;\ F_n(r) = 12'462210 \text{ (Tabla VI)}$$

$$a = \frac{800000}{12'462210} = 64194'07\ pts.,$$

resultado que sólo se diferencia del calculado por logaritmos en menos de 0'02, pues está tomado por defecto, mientras el 64194'10 es erróneo por exceso.

Problema 3.º Resolver por el mismo procedimiento, el del párrafo 40.

$$V = 300000;\ n = 10;\ t = 5\ \%;\ F_n(r) = 7'721735;\ d = 5;$$
$$(1+r)^d = 1'276282 \text{ (Tabla III)}.$$

$$a = \frac{300000 . 1'276282}{7'721735} = \frac{382884'6}{7'721735} = 49585'31\,pts.,$$

que también se diferencia del encontrado directamente en unos 0'03 de peseta, á causa de lo mucho que aumenta el error del dividendo la multiplicación por 300000 del valor aproximado á $(1+r)^5$.

42. Para evitar esta acumulación de error, y sobre todo la división directa cuando se trata de calcular el término de la renta, suelen también usarse, á semejanza de lo que se hace en los problemas de descuento (28) relativamente al interés (18), las Tablas que contienen los MULTIPLICADORES INVERSOS

$$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=1:\frac{(1+r)^n-1}{r(1+r)^n}=1:F_n(r)=\frac{1}{F_n(r)}$$

que resultando de hacer $V=1$, en la expresión del término de las límitadas inmediatas (36), representarán la *renta producida por* 1 *unidad monetaria*, que para los valores más frecuentes de n y r, se pueden calcular y disponer de igual modo, como lo están en la Tabla VII.

Entonces es evidente que llamando M á este multiplicador, se tendrá

$$a=V.\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=VM;\ V=\frac{a}{M}$$

en las rentas limitadas;

$$a=V_d(1+r)^dM;\ V_d=\frac{a}{(1+r)^dM};$$

$$\text{Log.}a=\text{Log.}V_d+d\text{Log.}(1+r)+\text{Log.}M;$$

$$d=\frac{\text{Log.}a-\text{Log.}V_d-\text{Log.}M}{\text{Log.}(1+r)}$$

en las diferidas;

$$a=\frac{V_{-d}M}{(1+r)^d};\ V_{-d}=\frac{a(1+r)^d}{M};$$

$$\text{Log.}\ V_{-d}=\text{Log.}a+d\text{Log.}(1+r)-\text{Log.}M;$$

$$d=\frac{\text{Log.}V_{-d}-\text{Log.}a+\text{Log.}M}{\text{Log.}(1+r)}$$

en las anticipadas.

PROBLEMA 1.º Resolver valiéndose de estas Tablas el 2.º de los párrafos 36 y 41.

$$V=800000;\ n=20;\ t=5\ {}^{0}/_{0};\ M=0'080243\ (\text{Tabla VII})$$

$$a=800000.0'080243=64194'40\ pts.,$$

resultado que se diferencia en 0'30 del calculado por logaritmos y en 0'33 del últimamente hallado, á causa de lo mucho que aumenta el error la multiplicación por 800000.

PROBLEMA 2.º Resolver el 1.º de dichos párrafos, valiéndose de la propia Tabla.

$$a=421'50;\ n=10;\ t=4\tfrac{1}{2}\ {}^{0}/_{0};\ M=0'126379\ (\text{Tabla VII}).$$

$$V=\frac{421'50}{0'127369}=3335'23\ pts.,$$

que excede al encontrado anteriormente en 0'02, por el error que produce la división.

PROBLEMA 3.º Resolver por el mismo procedimiento el del párrafo 40, último del anterior.

$$V=300000;\ n=10;\ t=5\ {}^{0}/_{0};\ M=0'129505;\ d=5;$$

$$(1+r)^{d}=1'276282\ (\text{Tabla III}).$$

$$a=300000.1'276282.0'129505=382884'6.0'129505$$
$$=49585'47\ pts.,$$

que también se diferencia en 0'13 y 0'16 de los valores antes calculados.

43. Claro está que siendo, en virtud de los convenios hechos,

$$F_{n}(r)=\frac{V}{a};\ F_{n}(r)=\frac{V_{d}}{a}(1+r)^{d};\ F_{n}(r)=\frac{V_{-d}}{a(1+r)^{d}}$$

y también

$$M=\frac{a}{V};\ M=\frac{a}{V_{d}(1+r)^{d}};\ M=\frac{a(1+r)^{d}}{V_{-d}}$$

según se trate de rentas inmediatas, diferidas ó anticipadas, el multiplicador fijo puede calcularse directamente, cuando la incógnita sea el tanto r ó el tiempo n, y encontrar para ella un valor aproximado por medio de las Tablas, *buscándolo en la línea ó columna que corresponda á la otra cantidad*, como indicamos igualmente al ocuparnos del interés (20), y admitiendo el principio allí enunciado para aproximarlo, si se hallara comprendido entre dos valores consecutivos.

Vamos á comprobar por este medio los problemas anteriores.

PROBLEMA 1.º $V=800000$; $a=64194'10$; $n=20$.

$$F_n(r)=\frac{V}{a}=\frac{800000}{64194'10}=12'462204;\ M=\frac{a}{V}=0'080243.$$

Si buscamos el primer valor en la Tabla VI y líneas correspondientes á los 20 años, lo hallaremos comprendido entre 12'462210 y 11'469921, correspondientes á los tantos 5 y $4\frac{1}{2}\,°/_0$, y siendo su diferencia con el primero de 0'000006 únicamente, mientras que su exceso sobre el segundo es de 0'992283, podremos considerar $5\,°/_0$ como valor muy aproximado al del tanto pedido.

Si buscamos el de M, siguiendo las mismas líneas de la VII, lo hallaremos en la página encabezada con las palabras 5 por 100, y ninguna duda habrá ya, por consiguiente, de que ese es el valor que se desconocía.

PROBLEMA 2.º $a=421'50$; $V=3335'21$; $t=4\frac{1}{2}\,°/_0$.

$$M=\frac{a}{V}=\frac{421'50}{3335'21}=0'126379;\ F_n(r)=\frac{V}{a}=7'912716.$$

Buscando el primer valor en la Tabla VII y página correspondiente al $4\,\frac{1}{2}\,°/_0$, lo encontraremos en la línea que empieza por el número 10, deduciendo que éstos son los años buscados.

Si buscásemos el 2.º en análoga página de la VI, hallaríamos los 7'268791 y 7'912718, que lo comprenden, en las líneas que principian por 9 y 10; pero como del 1.º se diferencia en 0'643925 y sólo en 0'000002 del 2.º, consideraríamos también 10 años como valor muy aproximado.

PROBLEMA 3.º $V_d=300000$; $a=49585'31$; $(1+r)^d=1'276282$ (Tabla III).

Para $n=10$, $M=\dfrac{49585'34}{300000.1'276882}=\dfrac{49585'34}{382884'6}=0'129504$

que sólo se diferencia en 0'000001 del valor 0'129505, que en la tabla VII y líneas que empiezan por 10 se encuentra en la página correspondiente al 5 por 100.

Para $t=4\frac{1}{2}\,^{0}/_{0}$,

$$F_n(r)=\frac{300000.1'276882}{49585'34}=\frac{382884'6}{49585'34}=7'721730$$

al que faltan 0'000005 para llegar al 7'721735, que en la página del $4\frac{1}{2}\,^{0}/_{0}$ corresponde á 10 años, pero que excede en 0'613908 al 7'107822 de la línea que principia por 9, por lo que aproximadamente se induciría que el primer valor era el buscado.

Resumiendo cuanto hasta aquí llevamos dicho, vemos que si bien estos procedimientos *evitan en muchos casos el empleo de logaritmos, no son más sencillos* casi nunca, por las multiplicaciones y divisiones que han de efectuarse con números de varias cifras, mientras aquéllos exigen únicamente adiciones y sustracciones, salvo las sencillas operaciones auxiliares necesarias para su determinación, y, por otra parte, *son mucho más inexactos*, llegando á producir en los resultados errores que pueden ser de importancia. La consecuencia que se desprende de esta comparación es, pues, la misma que tantas veces dedujimos en el anterior volumen; *los métodos científicos* son en la inmensa mayoría de los casos no sólo los *más exactos*, sino *los más prácticos*, aunque otra cosa crean los que á sí mismos se otorgan este título.

44. Pueden, no obstante, reunirse las ventajas de ambos procedimientos, construyendo con la suficiente aproximación TABLAS LOGARÍTMICAS que contengan no los valores de $F_n(r)$, ó $M=\dfrac{1}{F_n(r)}$, sino *los logaritmos ó cologaritmos de esos multiplicadores fijos*, lo que es igual, puesto que

$$\text{Log. } M=\text{Log. }\frac{1}{F_n(r)}=\text{Log. } 1-\text{Log. } F_n(r)$$

$$=\text{Colog. } F_n(r) \text{ (T. I, 287)}$$

Supongamos, pues, construída una Tabla de cologaritmos, que es la usada más frecuentemente y puede calcularse por medio de la expresión:

$$\text{Colog. } F_n(r) = \text{Log. } M = \text{Log. } \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$
$$= \text{Log.} r + n \text{Log.} (1+r) + \text{Log.} \left((1+r)^n - 1 \right)$$

dando á n y r los valores más usuales y disponiéndola del mismo modo que las anteriores, según puede verse en la VIII, que insertamos al final del tomo para iguales tantos y plazos que las precedentes.

Recordando que según la penúltima igualdad,

$$\text{Colog. } F_n(r) = \text{Log. } 1 - \text{Log. } F_n(r) = 0 - \text{Log. } F_n(r)$$
$$= - \text{Log. } F_n(r)$$

y por consiguiente,

$$\text{Log. } F_n(r) = - \text{Colog. } F_n(r)$$

tendremos, aplicando el cálculo logarítmico á las expresiones del párrafo 41 y sustituyendo, para las rentas inmediatas,

$$\text{Log.} V = \text{Log.} a + \text{Log.} F_n(r) = \text{Log.} a - \text{Colog.} F_n(r)$$

$$\text{Log.} a = \text{Log.} V - \text{Log.} F_n(r) = \text{Log.} V + \text{Colog.} F_n(r)$$

Para las diferidas,

$$\text{Log.} V_d = \text{Log.} a + \text{Log.} F_n(r) - d \text{ Log.} (1+r)$$
$$= \text{Log.} a - \left(\text{Colog.} F_n(r) + d \text{ Log.} (1+r) \right)$$

$$\text{Log.} a = \text{Log.} V_d - \text{Log.} F_n(r) + d \text{ Log } (1+r)$$
$$= \text{Log.} V_d + \text{Colog.} F_n(r) + d \text{ Log.} (1+r)$$

$$d = \frac{\text{Log } a - \text{Log.} V_d - \text{Colog.} F_n(r)}{\text{Log } (1+r)}$$
$$= \frac{\text{Log.} a - \left(\text{Log.} V_d + \text{Colog.} F_n(r) \right)}{\text{Log.} (1+r)}$$

Para las anticipadas,

$$\text{Log.}V_{-d}=\text{Log.}a+d\ \text{Log.}(1+r)+\text{Log.}F_n(r)$$
$$=\text{Log.}a+d\,\text{Log.}(1+r)-\text{Colog.}F_n(r)$$

$$\text{Log.}a=\text{Log}\ V_{-d}-d\,\text{Log}\,(1+r)-\text{Log.}F_n(r)$$
$$=\text{Log.}V_{-d}+\text{Colog.}F_n(r)-d\,\text{Log.}(1+r)$$

$$d=\frac{\text{Log.}V_{-d}+\text{Colog.}F_n(r)-\text{Log.}a}{\text{Log.}(1+r)}$$

Comprobemos por medio de estas expresiones y la Tabla VIII los mismos problemas que hemos resuelto ya de varios modos:

1.° $a=421'50$; $n=10$; $t=4\frac{1}{2}$; $\text{Colog}\ F_n(r)=\bar{1}'1016743$

$$\text{Log.}\ V=\left\{\begin{array}{l}\text{Log}.421'50=2'6247976\\ \text{Colog.}F_n(r)=\bar{1}'1016743\end{array}\right\}=3'5231233$$

$$V=3335'21\ \text{pesetas},$$

conforme al resultado del párrafo 36.

2.° $V=800000$; $n=20$; $t=5\%$; $\text{Colog.}F_n(r)=\bar{2}'9044049$

$$\text{Log.}a=\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}800000=5'9030900\\ +\text{Colog}\ F_n(r)=\bar{2}'9044049\end{array}\right\}=4'8074949$$

$$a=64194'10\ pts.,$$

resultado también idéntico al del citado párrafo.

3.° $V_d=300000$; $n=10$; $t=5\%$; $\text{Colog.}F_n(r)=\bar{1}'1122851$; $d=5$

$$\text{Log.}a=\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}300000=\dots\dots\dots\dots=5'4771212\\ +\ \text{Colog.}F_n(r)=\dots\dots\dots\dots=\bar{1}'1122851\\ +5\text{Log.}1'05\quad=5.0'0211893=0'1059465\end{array}\right\}=4'6953528$$

$$a=49585'28\ pts.$$

resultado menos erróneo que el del párrafo 40, del que se diferencia en 0'06 á causa del error producido allí por la multiplicación directa.

45. El único inconveniente que ofrecen estas fórmulas en algunos casos y que también presentan las generales, es que al multiplicar los exponentes por los logaritmos de $1+r$, hay que escribir éstos con más de 7 cifras después de la coma si se quiere que el error del producto no llegue á una unidad de séptimo orden, y no siempre es fácil conocer mayor número de cifras.

Este inconveniente se evita facilitando al propio tiempo las operaciones, dando también á n y r los valores más frecuentes, calculando los que corresponden á $\text{Log.}(1+r)^n$ y formando con ellos otras Tablas, que se disponen de un modo análogo á las anteriores, colocando el tanto por 100 en la parte superior de la página y los años en columna, como puede verse en la IX, en la que el uno y los otros tienen los mismos valores que en las que la preceden.

Disponiendo de una Tabla semejante y siempre dentro de los casos prácticos, más comunes en cuanto se refiere al tanto y tiempo, puede dejarse indicado el logaritmo de la correspondiente potencia que podrá buscarse en ella, con lo cual se simplifican cuantas expresiones contienen el producto

$$n\text{Log.}(1+r)=\text{Log.}(1+r)^n, \text{ ó } d\text{Log.}(1+r)=\text{Log.}(1+r)^d,$$

puesto que estos logaritmos pueden buscarse directamente, evitando la multiplicación indicada en los primeros miembros.

En el último problema, por ejemplo, en vez de efectuar el producto 5.0'0211893 puede encontrarse desde luego el resultado 0'1059465, que en este caso no es erróneo por ser el exponente 5 de $(1+r)^5$ relativamente pequeño, en la línea indicada por dicho número y que corresponda igualmente al $5\,^0/_0$, de la referida Tabla IX.

CAPÍTULO II.

CASOS PARTICULARES.

I.—Anualidades.

46. Las palabras ANUALIDAD, MENSUALIDAD y otras semejantes, significan realmente *el término de una renta que se cobra ó paga de año en año*, *mes en mes*, etc., pero el ser aquello lo más co-

mún, es causa de que por extensión se dé generalmente el primer nombre al *valor del término de toda renta*, sea cual sea la duración de los plazos y, aun, como veremos más adelante, al capital equivalente á las mismas.

Las cuestiones referentes á las anualidades, sean perpetuas ó temporales, é inmediatas, diferidas ó anticipadas, son por consiguiente las que hemos estudiado hasta aquí y nada añadiríamos sobre ellas, si no fuera porque en ciertas ocasiones, aunque poco frecuentes, dejan de acumularse los intereses para producirlos á su vez, ó, en otros términos, se considera que devengan interés simple y no compuesto.

Bajo el punto de vista de la renta, nada ofrece este caso de particular, siendo evidente que un valor V producirá Vr en cada una de las unidades de tiempo á que se refiera el tanto, perpetuamente, ó hasta que el capital vuelva á poder de su primitivo dueño, siendo bajo este aspecto, de interés simple, cuantas cuestiones puedan presentarse; pero si se considera el contrario, es decir, no aquel en que se cobre una renta como producto de un capital prestado, sino el inverso en que se entreguen anualidades para que devengando interés produzcan un capital en cierto tiempo, conviene conocer la relación que existe entre una y otro, tanto si el interés es simple como compuesto.

Si continuando con la notación adoptada, es a la anualidad, r el tanto por 1, n el número de anualidades que han de entregarse, y C el capital final en que se convertirá la suma de las mismas y los intereses devengados, en el caso de ser simples, la primera los producirá durante $n-1$ años, convirtiéndose en $a\left(1+(n-1)r\right)$; la segunda durante $n-2$, transformándose en $a\left(1+(n-2)r\right)$ y así sucesivamente, hasta la penúltima, que en 1 año adquirirá el valor $a(1+r)$; y la última a que coincidiendo con el término del tiempo supuesto, completará el capital buscado sin llegar á producir interés.

El producido por la acumulación de todas, será por consiguiente:

$$C=a\left\{1+(n-1)r+1+(n-2)r+\cdots\cdots+1+r+1\right\}$$

ó bien, puesto que habrá n sumandos iguales á 1,

$$C=a\left\{n+r\left((n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1\right)\right\}$$

y como $(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1$ es la suma de los términos de una progresión por diferencia (T. I, 156, 1.°), siendo esta -1, $n-1$ el número de ellos, y $n-1+1=n$ la suma del primero y último,

$$C=a\left(n+rn\cdot\frac{n-1}{2}\right)=an\left(1+r\cdot\frac{n-1}{2}\right)=\frac{an}{2}\left(2+r(n-1)\right)$$

de donde

$$a=\frac{2C}{n\left(2+r(n-1)\right)}$$

y también efectuando algunas operaciones de transposición,

$$\frac{2C}{an}=2+r(n-1);\ \frac{2C}{an}-2=r(n-1);\ r=\frac{2(C-an)}{an(n-1)}$$

expresiones que suelen calcularse directamente, y sirven para determinar, suponiendo que las anualidades devenguen interés simple, el capital que en esta forma podrá pagarse en un número de años conocido; la anualidad que durante los mismos deberá entregarse para pagar un capital dado, y el tanto por 1 de interés que deberá fijarse para que determinada anualidad, en cierto número de años, produzca el capital deseado.

En cuanto al valor de n, depende de una ecuación de segundo grado, y no poseyendo los conocimientos que incluiremos en el Apéndice, ha de aproximarse por tanteo.

Problema 1.° ¿Qué deuda se podrá pagar en 12 años, entregando al fin de cada uno 500 pesetas, y suponiendo que se abone 4 % de interés simple por las cantidades anticipadas?

$$C=\frac{500\cdot 12}{2}\,(2+0'04\cdot 11)=3000\cdot 2'44=7320\ pts.$$

Problema 2.° ¿Qué cantidad deberá entregarse durante 12 años para haber pagado en esa fecha 7320 pesetas, suponiendo que los anticipos devenguen 4 % de interés simple?

$$a=\frac{2\cdot 7320}{12(2+0'04\cdot 11)}=\frac{14640}{12\cdot 2'44}=\frac{1464000}{2928}=500\ pts.$$

Problema 3.° El tenedor de un pagaré de 7320 pesetas, que vence dentro de 12 años, se conforma con cobrar 500 al terminar cada uno. ¿Qué interés simple satisface por las cantidades adelantadas?

$$r=\frac{2(7320-500\cdot 12)}{500\cdot 12\cdot 11}=\frac{2640}{66000}=\frac{33}{825}=\frac{11}{275}=0'04$$

$$t=4\ \%$$

47. De un modo análogo, ó sea como suma de términos de una progresión, se podrían calcular las fórmulas correspondientes al caso en que las anualidades devengaran interés compuesto; pero las nociones que hemos expuesto sobre la teoría general de rentas, permiten determinarlas de otra manera con gran facilidad y sencillez.

En efecto; el capital final C puede considerarse evidentemente como valor de una renta anticipada en n unidades de tiempo; y su expresión será por lo tanto (39)

$$C=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)(1+r)^n}{r(1+r)^n}=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r};$$

$$\text{ó } \operatorname{Log.} C=\operatorname{Log.} a+\operatorname{Log.}\left((1+r)^n-1\right)-\operatorname{Log.} r$$

de las cuales se deducen inmediatamente

$$a=\frac{Cr}{(1+r)^n-1};\ \operatorname{Log.} a=\operatorname{Log.} C+\operatorname{Log.} r-\operatorname{Log.}\left((1+r)^n-1\right)$$

$$a(1+r)^n-a=Cr;\ a(1+r)^n=a+Cr;\ (1+r)^n=\frac{a+Cr}{a}$$

$$n\operatorname{Log.}(1+r)=\operatorname{Log.}(a+Cr)-\operatorname{Log.} a;\ n=\frac{\operatorname{Log.}(a+Cr)-\operatorname{Log.} a}{\operatorname{Log.}(1+r)}$$

para valores de la anualidad y el tiempo, siendo fácil aproximar por tanteo el de r, valiéndose de la igualdad

$$\frac{C}{a}=\frac{(1+r)^n-1}{r},\ \text{ó mejor } \frac{C}{a}\cdot r=(1+r)^n-1$$

cuyos dos miembros aumentarán ó disminuirán con los valores que se supongan para el tanto, pero más rápidamente el segundo que el primero á causa de la potencia que contiene.

Problema. Resolver los precedentes, suponiendo que las anualidades devengaran interés compuesto, y comprobar el último calculando el tiempo.

1.° $a=500$; $n=12$; $r=0'04$; $(1+r)^n-1=0'601032$ (Tabla III)

Log. C

$$=\left\{\begin{array}{ll} \text{Log. } 500 & =2'6989700 \\ +\text{Log. } 0'601032 & =\bar{1}'7788976 \\ -\text{Log. } 0'04 & =\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}= 2'4778676 \\ =-\bar{2}'6020600 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}=3'8758076$$

$$C=7512'91 \textit{ pts.}$$

2.° $C=7320$; $n=12$; $r=0'04$; $(1+r)^n-1=0'601032$

Log. a

$$=\left\{\begin{array}{ll} \text{Log. } 7320 & =3'8645111 \\ +\text{Log. } 0'04 & =\bar{2}'6020600 \\ -\text{Log. } 0'601032 & =\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}= 2'4665711 \\ =-\bar{1}'7788976 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}=2'6876735$$

$$a=487'16 \textit{ pts.}$$

3.° $C=7320$; $a=500$; $n=12$; $\dfrac{C}{a}=\dfrac{7320}{500}=14'64$

Para $t=5\%$.. $14'64\cdot0'05\ =0'7320\ <0'795856=(1+r)^n-1$ (T. III)
Para $t=4\%$.. $14'64\cdot0'04\ =0'5856\ <0'601032$ » »
Para $t=3\%$.. $14'64\cdot0'03\ =0'4392\ >0'425761$ » »
Para $t=3\tfrac{1}{2}\%$. $14'64\cdot0'035=0'51240>0'511069$ » »

El interés pedido es, por consiguiente, muy poco superior á $3\tfrac{1}{2}\%$, puesto que ya ambos miembros tienen comunes las dos primeras cifras después de la coma, por lo que puede tomarse $0'036\ \%$ como valor aproximado de r.

4.° $C=7320$; $a=500$; $r=0'036$; $Cr=263'52$; $a+Cr=763'52$

$$n=\frac{\text{Log } 770'84-\text{Log } 500}{\text{Log } 1'036}=\frac{2'8869642-2'6989700}{0'0153598}=\frac{0'1879942}{0'0153598}$$

$$n=\frac{\text{Log.}763'52-\text{Log.}500}{\text{Log.}1'036}=\frac{2'8828204-2'6989700}{0'0153598}=$$
$$=\frac{0'1838504}{0'0153598}=11'97$$

ó 12 años aproximadamente.

Escolio. El no diferenciarse este resultado del que debía obtenerse más que en 0'03, comprueba que el valor atribuído al tanto en el problema anterior es muy aproximado al verdadero.

Las cuestiones referentes á estas anualidades pueden también resolverse, como todas las de rentas, construyendo *Tablas de multiplicadores fijos* para los tantos y tiempos más comunes, cuya construcción, disposición y manejo sería esencialmente igual al de las generales.

Estas tablas de anualidades podrán también contener dos clases de multiplicadores,

$$\frac{(1+r)^n-1}{r},\text{ ó bien, }\frac{r}{(1+r)^n-1}$$

según se haga $a=1$ en la fórmula del capital, ó $C=1$ en la de la anualidad; los primeros expresarán, pues, el capital que producirá 1 unidad monetaria, entregada al final de cada plazo en el tiempo y al tanto convenidos, y los segundos, la anualidad que deberá entregarse para pagar 1 unidad monetaria en determinado tiempo.

Teniéndolas á la vista, bastaría, como en los problemas de interés y descuento, una multiplicación ó división, para encontrar los valores de C y a; pero juzgamos inútil alargar el presente volumen, incluyéndolas entre las del final, puesto que, considerando, según dijimos, el capital C como valor de una renta anticipada en n unidades de tiempo, pueden ser reemplazadas por las más generales (vi y vii), como vamos á hacer ver resolviendo por su medio los anteriores problemas 1.° y 2.° del mismo modo que resolvimos los de los párrafos 41, 42 y 43, ateniéndonos á las expresiones allí deducidas.

1.° $a=500$; $n=12$; $t=4\,°/_0$; $(1+r)^n=1'601032$ (Tabla iii);
$F_n(r)=9'385074$ (Tabla vi).

$$C=500\cdot1'601032\cdot9'385074=800'516\cdot9'385074=7512'90\ pts.,$$

que sólo se diferencia del obtenido por logaritmos en 0'01, á pesar de las causas tantas veces mencionadas al hablar de los errores que originan estos procedimientos directos.

Haciendo uso de las fórmulas prácticas logarítmicas (44), tendríamos:

$$\text{Log. } 500 = 2'6989700;\ \text{Log. } (1+r)^n = 0'2044001 \text{ (Tabla IX)};$$

$$\text{Colog. } F_n(r) = \bar{1}'0275623 \text{ (Tabla VIII)}.$$

$$\text{Log. } C = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{r} 2'6989700 \\ +0'2044001 \end{array} \right\} = 2'7033701 \\ \qquad\qquad\quad -\bar{1}'0275623 \end{array} \right\} = 3'8758078 = \text{Log.} 7512'91,$$

que es exactamente el valor encontrado por el primer método.

$$2.^{\circ}\quad C = 7320;\ n = 12;\ t = 4\,^{0}/_{0};\ (1+r)^n = 1'601032;$$

$$M = \frac{1}{F_n(r)} = 0'106552 \text{ (Tabla VII)}.$$

$$a = \frac{7320 \cdot 0'106552}{1'601032} = \frac{779'960640}{1'601032} = 487'16 \textit{ pts.},$$

conforme con el resultado obtenido anteriormente, como también lo está el que resulta de operar con Colog. $F_n(r) = \bar{1}'0275623$, aplicando la fórmula del párrafo 44,

$$\text{Log. } a = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Log.} 7320 \qquad\quad = 3'8645111 \\ +\text{Colog.} F_n(r) = +\bar{1}'0275623 \end{array} \right\} = \ \ 2'8920734 \\ -\text{Log.}(1+r)^n = \dots\dots\dots\dots = -0'2044001 \end{array} \right\}$$
$$= 2'6876733 = \text{Log.} 487'16$$

II.—Imposiciones.

48. Las *anualidades que se entregan al principiar cada plazo* en vez de darlas á su terminación, reciben el nombre particular de IMPOSICIONES.

Consideradas aritméticamente, no son, pues, otra cosa, que anualidades anticipadas en 1 unidad de tiempo.

Si devengan interés simple, la primera lo producirá por consiguiente, durante todo el tiempo n, convirtiéndose en $a(1+nr)$; la segunda durante $n-1$ años ó plazos, adquiriendo un valor $a\left(1+(n-1)r\right)$; la tercera durante $n-2$, transformándose en $a\left(1+(n-2)r\right)$ y así sucesivamente, hasta la última que entregada un año antes de terminar el plazo total, equivaldrá al final de éste á $a(1+r)$.

La suma de todas, incluyendo sus intereses, constituirá por tanto un capital

$$C=a\left\{1+nr+1+(n-1)r+1+(n-2)r+\cdots\cdots+1+r\right\}$$

ó bien, puesto que habrá n sumandos iguales á 1,

$$C=a\left\{n+r\left(n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1\right)\right\}$$

y como $n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1$, es la suma de los términos de una progresión por diferencia (T. I, 156, 1.º) siendo ésta -1, n el número de ellos, y $n+1$ la suma del primero y último,

$$C=a\left(n+r(n+1)\cdot\frac{n}{2}\right)=an\left(1+r\cdot\frac{n+1}{2}\right)=\frac{an}{2}\left(2+r(n+1)\right)$$

de donde

$$a=\frac{2C}{n\left(2+r(n+1)\right)}$$

y también, efectuando las necesarias transformaciones para despejar r,

$$2+r(n+1)=\frac{2C}{an};\ r(n+1)=\frac{2C}{an}-2;\ r=\frac{2(C-an)}{an(n+1)}$$

expresiones completamente análogas á las deducidas para las anualidades inmediatas, y que como aquéllas, suelen calcularse directamente y exigen un tanteo para la aproximación del tiempo, si no sabe resolverse la ecuación de segundo grado que resultaría efectuando las operaciones indicadas, y que resolveremos en el Apéndice.

PROBLEMA 1.º Una persona que debía pagar 500 pesetas anuales y no lo verifica, tiene que abonar la totalidad con los intereses simples á 4 %, á los 12 años de haber faltado á su primer compromiso. ¿Qué cantidad deberá entregar entonces?

$$C=\frac{500.12}{2}(2+0'04\cdot13)=3000\cdot2'52=7560 \text{ pesetas.}$$

Problema 2.º ¿Qué imposición deberá hacerse anualmente en la caja de una sociedad que abona el 4 % de interés simple, para poder retirar á los 12 años 7560 pesetas?

$$a=\frac{2\cdot7560}{12(2+0'04\cdot13)}=\frac{1260}{2'52}=500 \text{ pesetas.}$$

Problema 3.º Un acreedor que dentro de 12 años ha de cobrar 7560 pesetas se conforma con recibir 12 entregas de 500, siempre que la primera se efectúe en el acto. ¿Qué interés simple abona por las cantidades adelantadas?

$$r=\frac{2(7560-500\cdot12)}{500\cdot12\cdot13}=\frac{7560-6000}{3000\cdot13}=\frac{156}{3900}=0'04$$

$$t=4\%.$$

49. Devengando las imposiciones interés compuesto, el capital final equivaldría al valor de una renta anticipada en $n+1$ unidades de tiempo, por consiguiente (39)

$$C=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)(1+r)^{n+1}}{r(1+r)^n}=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)(1+r)}{r}$$

y $\operatorname{Log.} C=\operatorname{Log.} a+\operatorname{Log.}\left((1+r)^n-1\right)+\operatorname{Log.}(1+r)-\operatorname{Log.} r$

de donde se deduce inmediatamente

$$a=\frac{Cr}{\left((1+r)^n-1\right)(1+r)};$$

$$\operatorname{Log.} a=\operatorname{Log.} C+\operatorname{Log.} r-\operatorname{Log.}\left((1+r)^n-1\right)-\operatorname{Log.}(1+r)$$

$$a\left((1+r)^n-1\right)(1+r)=Cr;\quad (1+r)^n-1=\frac{Cr}{a(1+r)};$$

$$(1+r)^n=\frac{Cr}{a(1+r)}+1=\frac{Cr+a(1+r)}{a(1+r)}$$

$$n\,\text{Log.}(1+r)=\text{Log.}\big((Cr+a(1+r)\big)-\text{Log.}a-\text{Log.}(1+r);$$

$$n=\frac{\text{Log.}\big(Cr+a(1+r)\big)-\text{Log.}a}{\text{Log}\,(1+r)}-1$$

para valores de la imposición y el tiempo, pudiendo aproximarse por tanteo el de r, valiéndose de la igualdad

$$\frac{C}{a}=\frac{(1+r)^{n+1}-(1+r)}{r}\text{, ó mejor }\frac{C}{a}\cdot r=(1+r)^{n+1}-(1+r)$$

de un modo análogo al detallado en las anualidades inmediatas (47, Problema 3.º).

Problema. Resolver los anteriores, suponiendo que las imposiciones devengaran interés compuesto, y comprobar el último calculando el tiempo.

1.º $a=500$; $n=12$; $r=0'04$; $(1+r)^n-1=0'601032$ (Tabla III)

$$\text{Log.}\,C=\left\{\begin{array}{ll}\text{Log.}500 & =2'6989700 \\ +\text{Log.}0'601032 & =\overline{1}'7788976 \\ +\text{Log.}1'04 & =0'0170333 \\ -\text{Log.}0'04 & =\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}=\;2'4949009 \\ =-\overline{2}'6020600\end{array}\Bigg\}=3'8928409$$

$$C=7813'42\ ptas.$$

2.º $C=7560$; $n=12$; $r=0'04$; $(1+r)^n-1=0'601032$

$$\text{Log.}\,a=\left\{\begin{array}{ll}\text{Log.}7560 & =3'8785218 \\ +\text{Log.}0'04 & =\overline{2}'6020600 \\ -\text{Log.}0'601032 & =\overline{1}'7788976 \\ -\text{Log.}1'04 & =0'0170333\end{array}\right.\begin{array}{l}\Big\}=\;2'4805818 \\ \Big\}=-\overline{1}'7959309\end{array}\Bigg\}=2'6846509$$

$$a=483'78\ ptas.$$

3.º $C=7560$; $a=500$; $n=12$; $\frac{C}{a}=15'12$

Para $t=4\,\%$...... $15'12\cdot 0'04=0'6048<0'625073$

$$=(1+r)^{n+1}-(1+r)\text{ (Tabla III)}$$

Para $t=3\,{}^0/_0 \ldots\ldots 15'12 \cdot 0'03 = 0'4536 > 0'438534$

$$=(1+r)^{n+1}-(1+r) \text{ (Tabla III)}$$

Para $t=3\frac{1}{2}\,{}^0/_0 \ldots 15'12 \cdot 0'035 = 0'5292 > 0'528956$

$$=(1+r)^{n+1}-(1+r) \text{ (Tabla III)}$$

El interés pedido es, pues, muy poco inferior á $3\frac{1}{2}\,{}^0/_0$, puesto que ya ambos miembros sólo se diferencian en 0'000264, por lo que puede tomarse 0'035 $^0/_0$ como valor muy aproximado de r, ya que en el interés compuesto, las variaciones del tanto por pequeñas que sean, influyen en las de los capitales mucho más que las del simple.

4.° $C=7560$; $a=500$; $r=0'035$; $Cr=264'60$; $a(1+r)=517'50$; $Cr+a(1+r)=782'10$.

$$n=\frac{\text{Log.}782'10-\text{Log.}500}{\text{Log.}1'035}-1=\frac{2'8932623-2'6989700}{0'0149403}-1$$

$$=\frac{0'1942923}{0'0149403}-1=13'00-1=12 \text{ años.}$$

También en vez de las de logaritmos, pueden usarse TABLAS DE IMPOSICIONES, que para los tiempos y tantos más comunes se construyen y disponen como todas las descritas, *conteniendo los multiplicadores fijos*

$$\frac{\left((1+r)^n-1\right)(1+r)}{r}, \text{ ó } \frac{r}{\left((1+r)^n-1\right)(1+r)}$$

que resultan de hacer $a=1$, ó $C=1$, en las fórmulas del capital y la imposición, siendo, por consiguiente, los valores, del que constituirá una unidad monetaria entregada al principiar cada uno de los plazos convenidos, y de la que deberá entregarse para obtener una unidad monetaria en determinado tiempo.

Algo simplifican los cálculos estas Tablas, reduciendo la investigación del capital é imposición á una sola operación de multiplicar ó dividir; pero como en éstas y las de anualidades intervienen casi siempre números de bastantes cifras, que aumentan considerablemente los errores, operando directamente con valores aproximados, y además pueden ser reemplazadas por las generales (VI y VII), recordando que las imposiciones son rentas anticipadas en $n+1$ unidades de tiempo, no incluímos tampoco al final estas Tablas especiales, y hasta creemos poder prescindir de aplicar aquéllas á ejemplos, que en nada se diferenciarían de los que terminan el párrafo 47.

III. — Tiempos fraccionarios.

50. Entre los problemas fundamentales de las rentas limitadas en que sólo se trate de determinar el valor del capital, término, tiempo ó tanto, no hemos considerado otro que puede ocurrir referente al número de términos de que se compondrán, porque al deducir esos valores hemos supuesto que n representaba á la vez dicho número de términos y el de plazos en que se dividía el tiempo á que el tanto se refiriese.

Calcular la duración de una renta es, por lo tanto, igual á investigar de cuántos términos se compone; pero esta identidad evidentemente no tiene realidad práctica más que cuando n es entero, puesto que si, por ejemplo, resulta $n=11'97$, como en el problema 4.º del párrafo 47, podemos deducir que la renta tendrá una duración total de 12 años 11 meses y 20 días, reduciendo á estas últimas unidades concretas las 0'97 de año, pero nada más, porque si en vez de la duración quiere averiguarse el número de plazos, ó lo que es igual, el número de anualidades que deberán entregarse, ¿qué significa el resultado 11'97? ¿Habrá que entregar 11 anualidades al fin de cada uno de los 11 años y 0'97 de anualidad, ó del valor que se le haya asignado, al terminar los 11 meses y 20 días, como parece á primera vista?

Necesario es que lo averigüemos para no vernos expuestos á dar á esos frecuentes resultados una falsa interpretación.

Supongamos para ello $n=m+\frac{1}{p}$, con lo cual la expresión del capital correspondiente á la renta inmediata se convierte (36) en

$$V=\frac{a\left((1+r)^{m+\frac{1}{p}}-1\right)}{r(1+r)^{m+\frac{1}{p}}}=\frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^{m+\frac{1}{p}}}\right)$$

ó añadiendo $\frac{1}{(1+r)^m}-\frac{1}{(1+r)^m}=0$, con lo cual no se alterará el valor comprendido entre paréntesis,

$$V=\frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^m}+\frac{1}{(1+r)^m}-\frac{1}{(1+r)^{m+\frac{1}{p}}}\right)$$

$$=\frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^m}\right)+\frac{a}{r}\left(\frac{1}{(1+r)^{m+\frac{1}{p}}}\left((1+r)^{\frac{1}{p}}-1\right)\right)$$

$$=\frac{a\left((1+r)^m-1\right)}{r(1+r)^m}+\frac{a}{r}\left((1+r)^{\frac{1}{p}}-1\right)\frac{1}{(1+r)^{m+\frac{1}{p}}}$$

El primer término de este último miembro es el valor según el tanto r, de m términos de una renta de a unidades monetarias, y el segundo se compone de tres factores:

$\frac{a}{r}$, capital que produce el interés a en la unidad de tiempo;

$(1+r)^{\frac{1}{p}}-1$, interés compuesto de 1 unidad monetaria, en la unidad de tiempo $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{(1+r)^{m+\frac{1}{p}}}$, valor de aquella unidad exigible al transcurrir el tiempo $m+\frac{1}{p}$; luego ese producto expresa el valor de *un capital*, exigible después de $m+\frac{1}{p}$ unidades de tiempo, *igual al interés compuesto durante la fracción de tiempo* $\frac{1}{p}$ *de aquel cuyo interés en aquella á que el tanto se refiera, sea la anualidad conocida* a, por lo que el último término de la renta será (12 y 13)

$$\frac{a}{r}\left((1+r)^{\frac{1}{p}}-1\right)$$

componiéndose, por tanto, de $m+1$ términos; m iguales á a y 1 cuyo valor acabamos de establecer.

Ahora podemos, pues, resolver con exactitud el ejemplo á que nos referimos, convenientemente enunciado, lo cual comprobará que la cantidad exigible á los 11 meses y 20 días, no es 500·0'97=485 pesetas, como pudiera creerse.

PROBLEMA. El poseedor de un pagaré de 7320 pesetas propone al deudor satisfaga esa cantidad por medio de anualidades inmediatas de 500 pesetas, abonándole por los valores que adelante 3'6 °/₀ de interés. ¿Cuántas debería satisfacer?

En el párrafo 47 hicimos el cálculo necesario para determinar $n=11'97$ años; luego las anualidades que deberían satisfacerse serían 11 de 500 pesetas y otra á los 11 meses y 20 días, ó 0'97 de año, después de haber entregado las últimas 500, de

$$\frac{500}{0'036}\left((1+r)^{0'97}-1\right)=484'72 \textit{ pts.}$$

según se desprende del siguiente cálculo:

$$\text{Log } 1'036^{0'97}=0'97\cdot 0'0153598=0'0148990=\text{Log. } 1'0349;$$
$$1'0349-1=0'0349.$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}\text{Log. } 500=2'6989700 \\ +\text{Log. } 0'0349=\bar{2}'5428254\end{array}\right\}=1'2417954 \\ -\text{Log. } 0'036 \ldots\ldots\ldots=-\bar{2}'5563025\end{array}\right\}\begin{array}{l}=2'6854929 \\ =\text{Log. } 484'72\end{array}$$

ESCOLIO. La diferencia, que en este ejemplo sólo es de 0'28 de peseta, por los valores relativamente pequeños del capital y anualidad, y ser únicamente de 0'03 la que hay entre la unidad y la fracción de tiempo 0'97, es en muchas ocasiones de verdadera importancia, como veremos en el primer ejemplo del párrafo siguiente.

Establecidos, aunque á la ligera, los principios en que se funda la determinación de cuantas cantidades intervienen en las cuestiones de rentas, prescindiremos de la multitud de fórmulas que aun podrían deducirse, pero que no son indispensables, para los casos en que el tanto no se refiriese á la unidad de tiempo y otros que también revisten cierta generalidad, limitándonos á indicar sus más sencillas aplicaciones.

IV.— Aplicaciones más frecuentes.

51. Siendo equivalente la percepción de una renta á la de un solo valor cobrado en el momento de empezar los plazos, si es inmediata, antes si es diferida, ó después si anticipada, ó en otros términos, no siendo el pago ó cobro de las rentas más que otra forma de satisfacer ó embolsar los capitales adeudados ó acreditados que á ellas equivalen en cualquier momento, con los intereses ó descuento que les correspondan, claro es que cuantos problemas se refieren á éstos, podrán también ocurrir tratándose de aquéllas.

Entre ellos se presentan con frecuencia los de VENCIMIENTO MEDIO y COMÚN (30), cuando se quiere *hallar el tiempo, durante el cual deberá pagarse una renta única en sustitución de varias, ó la renta que durante cierto tiempo habrá que satisfacer en lugar de otras.*

Para resolver estas cuestiones y sus análogas, como sería, por ejemplo, la *subdivisión de una renta*, fijando las duraciones de las parciales, los valores de las anualidades, el del capital que en cualquier instante equivalga á una ó á otras, etc., basta recordar las fórmulas deducidas, teniendo presente que:

El valor de la renta única que equivalga á otras varias en el momento de realizar la operación, ha de ser igual á la suma de los que correspondan á éstas.

PROBLEMA 1.º Un labrador tiene arrendado un prado por 12 años en 500 pesetas anuales, y un olivar por 20 en 3000; pasando ambos á poder de un mismo dueño, el labrador le propone refundir los dos arrendamientos en uno solo, y el dueño accede bajo la base de que sus fincas le produzcan 4 °/₀ anual. ¿Cuánto deberá durar el nuevo?

Para la primer renta tendremos:

$$a=500;\ n=12;\ r=0'04;\ (1+r)^n=1'601032 \text{ (Tabla III.)}$$

Para la segunda:

$$a'=3000;\ n'=20;\ r=0'04;\ (1+r)^{n'}=2'191123$$

Log. V

$$=\left\{\begin{array}{ll} \text{Log.}500 & =2'6989700 \\ +\text{Log.}0'601032 & =\bar{1}'7788976 \\ -\text{Log.}0'04 & =\bar{2}'6020600 \\ -\text{Log.}1'04^{12} & =0'2044001 \end{array}\right. \begin{array}{l} = \quad 2'4778676 \\ \\ =-\bar{2}'8064601 \end{array} \left\}\begin{array}{l} =3'6714075 \\ =\text{Log.}4692'53 \end{array}\right.$$

Log. V'

$$=\left\{\begin{array}{ll} \text{Log.}3000 & =3'4771212 \\ +\text{Log.}1'191123 & =0'0759566 \\ -\text{Log.}0'04 & =\bar{2}'6020600 \\ -\text{Log.}1'04^{20} & =0'3406668 \end{array}\right. \begin{array}{l} = \quad 3'5530778 \\ \\ =-\bar{2}'9427268 \end{array} \left\}\begin{array}{l} =4'6103510 \\ =\text{Log.}40770'97 \end{array}\right.$$

Valor supuesto á ambas fincas:

$$4692'53+40770'97=45463'50 \ pts.$$

Luego para la nueva renta se tendrá (36):

$$V''=45463'50; \quad a''=500+3000=3500; \quad r=0'04;$$

$$a''-V''r=3500-45463'50 \cdot 0'04=3500-1818'54=1681'46$$

$$n=\frac{\text{Log.}3500-\text{Log.}1681'46}{\text{Log.}1'04}=\frac{3'5440680-3'2256865}{0'0170333}$$

$$=\frac{0'3183815}{0'0170333}=18'69$$

El arrendamiento debería, pues, realizarse por 18'69 años, ó 18 años 8 meses y 9 días, pagando el labrador, 18 anualidades de 3500 pesetas, y la última al terminar el contrato, según hemos demostrado al final del capítulo anterior, de

$$\frac{3500}{0'04}(1'04^{0'69}-1)=87500(1'04^{0'69}-1)$$

que efectuando las operaciones indicadas, sería igual en definitiva á

$$0'69 \cdot \text{Log.}1'04=0'69 \cdot 0'0170333=0'0117530=\text{Log.}1'02743;$$

$$1'02743-1=0'02743$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Log. }87500=4'9420080\\ +\text{Log.}0'02743=\bar{2}'4382258\end{array}\right\}=3'3802338=\text{Log.}2400'12$$

2400'12 *pts.*

Problema 2.º Un industrial ha comprado á plazos la maquinaria de una fábrica, teniendo aún que pagar por ella 7 anualidades de 2500 pesetas, calculando los intereses en 8 °/₀ y el edificio por 15 de á 4600, bajo la base de 5 °/₀; conviniéndole que una y otro sean de su exclusiva propiedad á los 10 años, acuerda con el dueño satisfacerlo todo en este plazo y en igual forma, computando el interés á 6 °/₀. ¿Qué anualidad deberá pagar para ello?

Para la primer renta, $a=2500$; $n=7$; $r=0'08$; $(1+r)^n=1'713824$

» segunda » $a'=4600$; $n'=15$; $r=0'05$; $(1+r)^{n'}=2'078928$

$$\text{Log.}V=\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\text{Log.}2500 & =3'3979400\\ +\text{Log.}0'713824 & =\bar{1}'8535911\end{array}\right\}=3'2515311\\ \left.\begin{array}{ll}-\text{Log.}0'08 & =\bar{2}'9030900\\ -\text{Log.}1'08^7 & =0'2339663\end{array}\right\}=\bar{1}'1370563\end{array}\right\}\begin{array}{l}=4'1144748\\ =\text{Log. }13015'92\end{array}$$

$$\text{Log}V'=\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\text{Log.}4600 & =3'6627578\\ +\text{Log }1'078928 & =0'0329924\end{array}\right\}=3'6957502\\ \left.\begin{array}{ll}-\text{Log.}0'05 & =\bar{2}'6989700\\ -\text{Log.}1'05^{15} & =0'3178395\end{array}\right\}=\bar{1}'0168095\end{array}\right\}\begin{array}{l}=4'6789407\\ =\text{Log.}47746'407\end{array}$$

$$V''=V+V'=13015'92+47746'40=60762'32\ pts.;\ n''=10;$$
$$r=0'06;\ (1+r)^{n''}=1'790848$$

$$\text{Log.}a''=\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\text{Log.}60762'32 & =4'7836344\\ +\text{Log.}0'06 & =\bar{2}'7781512\\ +\text{Log.}1'06^{10} & =0'2530587\end{array}\right\}=3'8148243\\ -\text{Log.}0'790848=\ldots\ldots\ldots=\bar{1}'8980931\end{array}\right\}\begin{array}{l}=3'9167312\\ =\text{Log.}8255'27\end{array}$$

La nueva anualidad debería, pues, ser, de 8255'27 pesetas.

No hemos querido complicar más las operaciones, suponiendo que el tanto y tiempo se referían á distinta unidad, pero es evidente que si, por ejemplo, la nueva anualidad se hubiera concertado pagarla por semestres, antes de calcular su valor, hubiéramos determinado el tanto semestral equivalente al 6 °/₀ anual (13) para resolverlo bien, por más que los prácticos suelen realizar la CAPITALIZACIÓN ó *acumulación de los intereses al capital*, fraccionando el tanto proporcionalmente al tiempo, como cuando se trata de interés simple, por cuya razón hay que entender, aunque no sea exacto, cuando en la práctica se dice por ejemplo que los interes anuales se *capitalizan* por semestres, trimestres, etcétera, que al fin de cada uno de estos períodos de tiempo se añade al capital el interés correspondiente á la mitad, cuarta parte, etc., del tanto fijado, como indicamos en el problema 6.° del párrafo 30.

También para mayor sencillez, se ha supuesto en los dos precedentes que las rentas eran limitadas é inmediatas, es decir, refiriéndonos al último, que si las anualidades se pagaban en 1.° de Enero de 1890, la nueva renta se calculaba para esa misma fecha á partir de 1891, pero si así no fuera y aquéllas se cobraran dicho día, conviniendo en satisfacer la nueva renta el 1.° de Marzo de cada año, claro está que la última sería anticipada en $\frac{3}{4}$ de año, ó diferida en $\frac{1}{4}$, según empezara en 1890 ó 1891, como podrían serlo las conocidas, sin que esto afectase en nada á la esencia del procedimiento.

Tampoco puede ofrecer dificultad el pago de las ANUALIDADES ATRASADAS ó *que han dejado de satisfacerse* por cualquier causa, el de las ANTICIPADAS, *que se satisfacen antes de su vencimiento*, ni el de las ARBITRARIAS, *que se entregan en pago de un préstamo ó deuda* durante cierto tiempo, y cuyo valor no corresponde exactamente al capital adeudado, sin perjuicio de liquidar al transcurrir aquél, abonando ó cobrando la diferencia, según que el valor final de la renta en dicha fecha, sea menor ó mayor que la cantidad que debía abonarse.

De las primeras y segundas, tenemos un ejemplo en el problema 1.° del párrafo 48 y en una parte del últimamente resuelto, que aun abraza mayor generalidad, puesto que los términos de la segunda renta, que quedarían pagados en el acto entregando 47746'40 pesetas, se reducen á 10 en vez de 15, así como los de la primera se aumentan al mismo número en lugar de 7 y á distintos tantos de interés.

Igualmente se resuelven las cuestiones referentes á los TRUEQUES, ó *cambios de una clase de renta por otra.*

En el problema del párrafo 40, por ejemplo, vimos que si una compañía toma prestadas 300000 pesetas al 5 °/₀ anual y á pagar por medio de 10 plazos anuales, contando desde 5 años después, ha de satisfacer una anualidad de 49585'34 pesetas.

Partiendo para abreviar de este cálculo ya efectuado, supongamos que al año de comenzar los negocios, y por marchar éstos bien, la compañía desea convertir esa renta en inmediata y el prestamista accede, siempre que en vez del 5 se le abone el 6 °/₀, pagándola en 8 años.

PROBLEMA 3.º En esta hipótesis, ¿cuál sería el valor de la nueva anualidad que la compañía debería satisfacer?

Habiendo pasado un año, sería el de la renta en aquel momento 300000·1'05=315000 pesetas, puesto que las primeras se prestaron al 5 °/₀ de interés, luego

$$V=315000;\ n=8;\ r=0'06;\ (1+r)^n=1'689479$$

$$\text{Log.}a = \left\{\begin{array}{lll} \text{Log.}315000 & =5'4983105 & \\ +\text{Log.}0'06 & =\bar{2}'7781512 & = 4'4789086 \\ +\text{Log.}1'06^8 & =0'2024469 & \\ -\text{Log.}0'689479 & =\ldots\ldots & =-\bar{1}'8385201 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =4'6403885 \\ =\text{Log.}43690'20 \end{array}$$

A pesar del mayor tanto de interés, la compañía tendría, por consiguiente, que pagar sólo 8 anualidades de 43690'20 pesetas en compensación del anticipo con que paga la deuda contraída.

Es evidente que del mismo modo sería fácil determinar el tiempo de duración de la nueva renta, fijando la anualidad; el valor aproximado del tanto, por las fórmulas ó procedimientos de tanteo que hemos aplicado varias veces, cuando se diesen las demás cantidades, y convertir una perpetua en limitada, ó al contrario.

Por otra parte, estos casos comprenden aquellos en que el pago de una renta anticipada ó inmediata quisiera diferirse, ó prolongar el primer plazo de una ya diferida y otras cuestiones semejantes á las de prórrogas de vencimientos; por lo que nos parece basta lo dicho para justificar nuestro aserto de que con las nociones expuestas pueden resolverse la inmensa mayoría de los problemas referentes á las combinaciones de las rentas y aun encontrar, si se quiere, expresiones generales, aunque particulares para cada una, representando por letras los datos de los enunciados, estableciendo las relaciones fundamentales que se desprendan de los mismos, y despejando el valor de la que se suponga desconocida, por lo que sólo atendiendo á su importancia y á los diversos caracteres que en la práctica puede revestir, entraremos en algunos detalles relativos á la más importante de sus aplicaciones.

CAPÍTULO III.

AMORTIZACIONES.

I.—Ideas generales.

52. Llámase AMORTIZACIÓN al *acto de extinguir una deuda*, satisfaciendo el capital tomado á préstamo y sus correspondientes intereses.

Las cuestiones que en los préstamos particulares pueden ocurrir relativamente á este asunto, son muy sencillas y están todas comprendidas en las resueltas anteriormente: ó se amortiza la deuda pagando *al prestamista el valor del capital final correspondiente, al terminar el tiempo convenido*, teniendo en cuenta el interés fijado; ó *se le entrega la renta equivalente.*

Hallar en el primer caso dicho *capital final, el que se recibirá, el tanto* de interés ó *el tiempo*, son sencillos problemas de interés que ninguna duda pueden ofrecernos; calcular en el segundo *estas* mismas *cantidades* ó *el valor del término de la renta*, lo hemos hecho ya también al deducir las fórmulas de las inmediatas, diferidas y anticipadas, si el capital que interviene es el efectivo recibido V, y al aplicar las referentes á las anualidades, si es el nominal C que ha de satisfacerse al fin del tiempo.

53. Esta forma de extinción es, no obstante, más teórica que práctica, si como sucede generalmente se considera el interés compuesto, porque sólo amortiza el capital tomado á préstamo, cuando el prestamista capitaliza los intereses, abonando el mismo tanto por 100 á que aquél se realizó, cosas que ocurren rarísimas veces.

Suponiendo esto último, pero no capitalizando los intereses, la renta que será necesario reservar, no estará dada evidentemente por la expresión de la anualidad que dedujimos en función de C (46), puesto que aquéllos se rebajarán de cada término en los plazos convenidos, pero sí por la general de las limitadas

$$a=\frac{Vr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

siempre que V represente el capital que en definitiva deba pagarse al terminar el tiempo convenido n, háyase ó no recibido en su totalidad.

En efecto; reservando esa cantidad y pagando de ella al fin de cada plazo el interés Vr que se deduce de la expresión del simple $y=cnr$ (11) para $c=V$ y $n=1$, quedará disponible para dedicar á la amortización $a-Vr$, ó reemplazando por V su valor (36) y simplificando

$$a-\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r(1+r)^n}\cdot r=\frac{a(1+r)^n-a(1+r)^n+a}{(1+r)^n}=\frac{a}{(1+r)^n}$$

es decir, otra renta cuyos términos equivaldrán á los de la primera divididos por $(1+r)^n$ cuyo valor será por tanto $\frac{V}{(1+r)^n}$, que colocado á interés compuesto al tanto r se convertirá á la terminación del tiempo n, en

$$\frac{V}{(1+r)^n}(1+r)^n=V$$

que podrá amortizarse en dicha época, pero es condición precisa según vemos, que los sobrantes $a-Vr$ de la renta reservada para ese objeto y para el pago de los intereses, produzcan los compuestos que corresponden á un tanto igual, al convenido para el empréstito.

En esto se fundó el establecimiento de las CAJAS DE AMORTIZACIÓN, *encargadas de entregar el capital al vencimiento* independientemente de los intereses, *mediante el ingreso de los sobrantes de la renta* dedicada al pago, á los que se encargan de hacer producir los correspondientes á igual tanto.

Estas cajas, fundadas por primera vez en 1655, subsisten aún en diversos países, cuyos gobiernos realizan en esa forma las amortizaciones de la deuda pública; pero hoy, á semejanza de lo que pueden hacer los particulares, es más frecuente dedicar un tanto r de la cantidad V á satisfacer los intereses y otro igual ó diferente á la amortización de ese capital, lo que equivale á fijar una anualidad arbitraria que llamaremos A, la cual podrá producir interés al tanto r' durante el tiempo n.

54. Dicha anualidad, de todos modos, se podrá y deberá descomponer en dos partes: la Vr que al terminar cada plazo se ha de satisfacer por intereses, y otra que en n períodos deberá producir V al tanto r', cuyo valor será, por consiguiente, si la representamos por R (47)

$$R=\frac{Vr'}{(1+r')^n-1}\text{, de donde } A=Vr+\frac{Vr'}{(1+r')^n-1}$$

expresión de la cual se deduce inmediatamente

$$A(1+r')^n-A=V\left\{r\left((1+r')^n-1\right)+r'\right\};\ V=\frac{A\left((1+r')^n-1\right)}{r\left((1+r')^n-1\right)+r'}$$

y también de la penúltima,

$$A(1+r')^n-A=Vr(1+r')^n-Vr+Vr';$$

$$(A-Vr)\,(1+r')^n=A-V(r-r')$$

$$(1+r)^n=\frac{A-V(r-r')}{A-Vr};$$

$$n\text{Log.}(1+r')^n=\text{Log.}\left(A-V(r-r')\right)-\text{Log.}(A-Vr),$$

$$n=\frac{\text{Log.}\left(A-V(r-r')-\text{Log.}\,(A--Vr)\right)}{\text{Log.}(1+r')}$$

fórmulas que en función uno de otro, permitirán calcular el valor de la anualidad del empréstito y de su duración, cuando además se conozcan el tanto de interés convenido para éste y el que produzcan los fondos destinados á la amortización.

En cuanto á r y r' se desprende á simple vista del valor de la anualidad

$$r=\frac{A}{V}-\frac{r'}{(1+r)^n-1}$$

relación que servirá para hallar directamente el primero y aproximar por tanteo el segundo.

PROBLEMA 1.º Una persona necesita para emprender un negocio tomar prestada una cantidad que se propone pagar en 10 años, destinando á ello 6000 pesetas anuales con objeto de satisfacer los intereses, depositando el resto en una sociedad de crédito que le abonará 5 % de interés compuesto. Encontrando quien le ofrece dinero al 7 % anual, ¿qué cantidad podrá tomar prestada? (Tabla III.)

$$A=6000;\ n=10;\ r'=0'05;\ (1+r')^n-1=0'628895;\ r=0'07.$$

$$V=\frac{6000 \cdot 0'628895}{0'07 \cdot 0'628895+0'05}=\frac{3773'37}{0'09402265}=40132'56\ pts.$$

PROBLEMA 2.º Comprobar el anterior suponiendo que la misma sociedad de crédito le presta las 40132'56 pesetas, con la condición de que le entregará 6000 anuales durante 10 años para cobrarse los intereses é ir amortizando el préstamo con los residuos, por los cuales le abona 5 % de interés compuesto y calculando el tanto á que le resulta aquel dinero.

$$A=6000;\ n=10;\ V=40132'56;\ r'=0'05;\ (1+r')^n-1=0'628895$$

$$r=\frac{6000}{40132'56}-\frac{0'05}{0'628895}=0'149-0'079=0'070=7\%.$$

Del mismo modo calcularíamos la anualidad que debía reservar si aceptase ese préstamo con las restantes condiciones, análogamente á los demás tanteos que hemos efectuado varias veces, haciendo el necesario para determinar r', y con igual facilidad se averiguaría la duración; pero como este problema es el que casi siempre ocurre cuando se fija arbitrariamente la parte destinada á la amortización y si los dos distintos intereses se capitalizan en diferentes épocas, es muy fácil equivocarse no haciendo un detenido análisis del enunciado, para determinar los verdaderos valores de la anualidad y los tantos, resolveremos uno de este género antes de proseguir, para que sirva de modelo á dicho análisis, aplicando la expresión deducida para n, única que en realidad no es indispensable, pues cuando se conozcan el capital tomado á préstamo y la cantidad destinada al pago en cada período, bastará rebajar de ésta la que hubiese que dar en concepto de intereses para obtener la parte reservada á la amortización y poder hallar el tiempo por la fórmula de las anualidades (47).

PROBLEMA 3.º Una Diputación provincial contrae un empréstito de 6000000 de pesetas al 2 °/₀ semestral, con la obligación de pagar los intereses á los prestamistas y depositar cada año 30000 pesetas en la caja de un banquero que le abona el 5 °/₀ anual de interés compuesto. ¿En cuánto tiempo quedará amortizado el empréstito?

Desde luego sabemos (13) que el tanto semestral 2 °/₀, ó 0'02 por 1 que satisfará por intereses la Diputación, equivale al $1'02^2-1=0'040400$ (Tabla III).

Por otra parte, pagará realmente, ya que referimos el cálculo á años, por ser en este caso lo más sencillo y natural, 2 °/₀ de 6000000=120000 pesetas cada semestre, ó 240000 al año por intereses; más los correspondientes á las 120000 que adelanta el primer semestre, 2 °/₀ de 120000=2400; más las 30000 que ha de entregar al banquero para constituir el fondo de amortización, luego

$$A=240000+2400+30000=272400;\ V=6000000;$$

$$r=0'0404;\ r'=0'05.$$

$$r-r'=0'0404-0'05=-0'0096;\ 1+r'=1'05;$$

$$V(r-r')=6000000(-0'0096)=-57600$$

$$Vr=6000000\cdot 0'0404=242400;$$

$$A-V(r-r')=272400+57600=330000;$$

$$A-Vr=272400-242400=30000$$

$$n=\frac{\text{Log.}330000-\text{Log.}30000}{\text{Log.}1'05}=\frac{5'5185140-4'4771212}{0'0211893}=\frac{1'0413928}{0'0211893}=49'14 \text{ años}$$

$$=49 \text{ años } 1 \text{ mes y } 20 \text{ días.}$$

La Diputación debería, pues, reservar durante 49 años, una renta de 272400 pesetas, para satisfacer los intereses é ingresar las 30000 en la caja del banquero; y al mes y 20 días de hacer la última entrega, tendría aún que dar á los prestamistas el interés simple $6000000 \cdot 0'28 \cdot 0'02 = 33600$ pesetas correspondientes á las 0'14 de año=0'28 de semestre, y completar el fondo de amortización con (50)

$$\frac{30000}{0'05}(1'05^{0'14}-1)=600000(\text{Antlg.}0'14 \cdot 0'0211893-1)$$

$$=600000(\text{Antlg.}0'0029665-1)=600000(1'006854-1)$$

$$=600000 \cdot 0'006854=4112'40 \; pts.$$

Si el fondo destinado á la amortización se expresa como el del interés á tanto por 100, el cálculo del tiempo puede hacerse de un modo muy sencillo, porque siendo entonces igual al necesario, para amortizar 100 unidades mediante el pago de esos tantos, basta *considerar ese número como capital y reemplazar la anualidad* en la fórmula del párrafo 47 ó en la últimamente aplicada, según que el interés sea ó no recíproco, por el valor del tanto destinado á la amortización parcial ó total, para poder determinar el tiempo, que es, según hemos dicho, el problema más frecuente que se presenta en la práctica.

Problema 4.° Un Ayuntamiento contrata un empréstito de 500000 pesetas con interés de 6 °/₀ anual, destinando otro 2 °/₀ á la amortización. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la deuda quede extinguida, si á ese 2 °/₀ le hace producir el mismo interés compuesto, entregándolo en una caja de amortización?

Dedicando como dedica 2 °/₀ á la extinción del préstamo, tendremos según la expresión del párrafo 47,

$$C=100; \; a=2; \; r=0'06; \; Cr=6; \; a+Cr=8$$

$$n=\frac{\text{Log.}8-\text{Log.}2}{\text{Log.}1'06}=\frac{\text{Log.}4}{\text{Log.}1'06}=\frac{0'6020600}{0'253059}=23'79 \text{ años.}$$

Problema 5.° Comprobar el 3.° suponiendo que la Diputación provincial á que se refiere, además del 2 °/₀ semestral ó 4'04 °/₀=0'0404 por 1 anual de intereses, destina $\frac{1}{2}$ °/₀=0'005 por 1 (tanto que es 30000 de 6000000) á la amortización, al 5 °/₀ también anual.

$$V=100;\ A=4'04+0'5=4'54;\ r'=0'0404;\ r'=0'05;$$

$$r-r'=0'0404-0'05=-0'0096;\ 1+r'=1'05$$

$$V(r-r')=100(-0'0096)=-0'96;\ Vr=100\cdot 0'0404=4'04;$$

$$A-V(r-r')=4'54+0'96=5'50;\ A-Vr=4'54-4'04=0'50$$

$$n=\frac{\text{Log.}5'5-\text{Log.}0'5}{\text{Log.}1'05}=\frac{0'7403627-\bar{1}'6989700}{0'0211893}=\frac{1'0413927}{0'0211893}$$

$$=49'14 \text{ años.}$$

Escolio. Es evidente que de un modo análogo se podría calcular la anualidad, expresándola en forma de tanto por 100 del empréstito.

55. Hemos supuesto hasta aquí que el capital prestado se amortizaba *al fin del tiempo*, de una sola vez, ó á lo más sucesivamente, *si se entregaba una renta*, pero en los empréstitos públicos, ó *que se realizan por medio de obligaciones* (T. ii, 109), á que sólo la primera sería aplicable por tener que pagar los intereses independientemente del capital, casi siempre se prefiere la progresiva, ó *por partes*, á lo cual se destina igualmente la renta necesaria, más ó menos relacionada con el nominal de los mismos y que puede igualmente expresarse por una cantidad fija ó á tanto por 100.

Entonces, y de ahí proviene su nombre, á medida que la deuda va extinguiéndose, disminuye la parte de anualidad destinada al pago de intereses y aumenta, por consiguiente, la que puede emplearse en cada amortización parcial.

Pueden éstas hacerse de tantos modos, que su enumeración es imposible, pero lo más común es *adquirir* en épocas determinadas por todo su valor nominal *las obligaciones que resultan de un sorteo* previo, ó ir comprándolas *al precio de cotización*, para inutilizarlas en ambos casos.

Solamente los Gobiernos, por el beneficio que puede reportar al Tesoro público, apelan algunas veces al segundo medio, pero las compañías mercantiles optan siempre por el primero, para conservar su crédito y facilitar la emisión asegurando el reembolso á la par y manteniendo relativamente uniforme el valor de los títulos.

Aun en este sistema de amortización, los plazos de las parciales pueden ó no coincidir con los de pago de los intereses, y con mucha frecuencia se procura facilitar la adquisición de obligaciones, dando además un derecho eventual á ciertos premios ó lotes que también en épocas prefijadas se reparten por sorteo.

Puede por último haber derecho á estos lotes y no á la percepción de intereses, y hasta no existir ni unos ni otros, pero estos casos ocurren rarísimas veces, y como los de empréstitos de renta perpetua se hallan comprendidos en los examinados hasta aquí, por lo cual los más frecuentes y que ofrecen alguna particularidad digna de estudio, para no tropezar con dificultades imprevistas, pueden clasificarse en *empréstitos con lotes y sin lotes*, subdividiéndolos en otros dos grupos, según *que los plazos de amortización y pago de intereses sean iguales ó desiguales.*

II.—Empréstitos sin lotes.

56. Las obligaciones que se amortizan por sorteo, suelen tener un valor nominal de 100, 500 ó 1000 unidades monetarias, cuyo interés varía entre el 2 y el 6 por 100 anual, que se paga en esta forma, ó por mitad al fin de cada semestre, las cuales son emitidas generalmente á un precio más bajo que dicho valor, aunque sin pérdida real para quien realiza el empréstito, pues para compensar la aparente, basta asignarles el tanto de interés correspondiente á ese precio, en vez del que se pagaría para el nominal.

Así, por ejemplo, si un Gobierno ó una compañía emiten obligaciones de 1000 pesetas, conviniéndoles pagar á los compradores 5 $^{0}/_{0}$ de interés, claro está que para facilitar la suscripción, podrán cederlas á 80 $^{0}/_{0}$, ó sea por 800 pesetas cada una, asignándoles sólo un interés de $\frac{80 \cdot 5}{100} = 4$ $^{0}/_{0}$ (T. II, 85).

Cuestión es ésta, por consiguiente, que no puede ofrecer dificultad, como tampoco hallar el tanto real que á la emisión corresponde (T. II, 168), cuando el pago de las mismas se haga en diferentes épocas; la cantidad efectiva que se recibirá por una ó varias obligaciones, y demás problemas fundamentales relacionados con ella (T. II, 199) y anteriormente resueltos, por lo que debemos limitarnos ahora al estudio de aquellos que se refieren al pago progresivo de intereses y capital, por medio de una anualidad que siempre se podrá suponer inmediata, haciendo el cálculo para el principio del primer plazo igual á los sucesivos que ya continuarán sin interrupción, aun cuando éste se anticipe, ó difiera, que es lo más común, durante un tiempo cualquiera.

Tres son las principales combinaciones, que en los empréstitos sin lotes y amortización progresiva se acostumbra hacer:

1.ª *Pagar los intereses en los mismos plazos que se fijan para las amortizaciones parciales y por sorteo.*

2.ª *Satisfacerlos en plazos diferentes á los de éstas.*

3.ª *Amortizar las obligaciones, comprándolas al precio de cotización.*

ORIGEN de una obligación para los efectos del cálculo, no será por lo dicho el de su fecha, sino *el instante en que comience el primer plazo de las amortizaciones parciales;*

VIDA, el *tiempo comprendido entre su origen y su amortización;*

EDAD, el *tiempo comprendido entre su origen y el momento que se considere.*

57. PRIMER CASO.—Habiendo ya demostrado que el capital V, tomado á préstamo por el tiempo n, puede amortizarse por medio de una renta calculada al mismo tanto r que se haya fijado para el interés, pagando éste, y reservando para las amortizaciones parciales una parte R de la anualidad A, que irá aumentando á medida que aquéllas se verifiquen, si representamos por subíndices los plazos transcurridos desde el origen, será (53)

$$R_1 = \frac{A}{(1+r)^n} \quad \text{y} \quad R_m = R_1(1+r)^{m-1}$$

según la fórmula del interés compuesto (12), de donde sustituyendo

$$R_m = \frac{A}{(1+r)^n}(1+r)^{m-1} = \frac{A(1+r)^{m-1}}{(1+r)^n}$$

y dividiendo ambos términos por $(1+r)^{m-1}$ (T. I, 202, 2.º)

$$R_m = \frac{A}{(1+r)^{n-m+1}}; \ \text{Log}.R_m = \text{Log}.A - (n-m+1)\,\text{Log}.(1+r),$$

expresiones que servirán para calcular el fondo R_m de amortización disponible en cualquier época, cuando se conozca la anualidad A destinada á la extinción, en cuyo caso habrá que calcular previamente la duración del empréstito (47); pero como lo frecuente es que ésta sea conocida, conviene también tenerla en función del capital V, reemplazando A por su valor (36), en cuyo caso

$$R_m = \frac{Vr(1+r)^n}{(1+r)^n-1} : (1+r)^{n-m+1} = \frac{Vr(1+r)^{m-1}}{(1+r)^n-1};$$

$$\text{Log.}R_m = \text{Log.}V + \text{Log.}r + (m-1)\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right).$$

PROBLEMA 1.º Una compañía emite en 1.º de Enero de 1889 20736 obligaciones de 500 pesetas con derecho á 15 de interés anual, amortizables por sorteo en 93 años, al propio tiempo que se pagan los intereses. Satisfechos éstos al terminar el año 1891, ¿de qué cantidad podrá disponer para la amortización?

1.ª *Solución.* Directamente. $m=3$; $V=20736\cdot500=10368000$;

$$r = \frac{15}{500} = 0'03; \quad n=93$$

$$\text{Log.}1'03^{93} = 93\cdot\text{Log.}1'03 = 93\cdot0'0128372247 = 1'1938619$$
$$= \text{Log.}15'6266$$

$$\text{Log.}R_3 = \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \text{Log.}10368000 & = 7'0156950 \\ +\text{Log.}0'03 & = +\bar{2}'4771212 \\ +\text{Log.}1'03^2 & = +0'0256744 \end{array}\right\} = 5'5184906 \\ -\text{Log.}14'6266 = \ldots\ldots\ldots = -1'1651401 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 4'3533505 \\ = \text{Log.}22560'60 \end{array}$$

Podrá, pues, disponer de 22560'60 pesetas.

2.ª *Solución.* Calculando primero la anualidad que debe reservarse (36).

$$\text{Log.}A = \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \text{Log.}10368000 & = 7'0156950 \\ +\text{Log.}0'03 & = \bar{2}'4771212 \\ +\text{Log.}1'03^{93} & = 1'1938619 \end{array}\right\} = 6'6866781 \\ -\text{Log.}14'6266 = \ldots\ldots\ldots = -1'1651401 \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 5'5215380 \\ = \text{Log.}332305'80 \end{array}$$

$$\text{Log.}R_3 = \left\{\begin{array}{ll} \text{Log.}332305'80 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & 5'5215380 \\ -91.\ \text{Log.}1'03 = -91\cdot0'0128372247 = & -1'1681874 \end{array}\right\}$$

$$= 4'3533506 = \text{Log.}22560'60$$

Escolio. Aunque los resultados están conformes, debemos advertir que no son completamente exactos, pues para ello es preciso, cuando se opere con números y exponentes relativamente considerables, escribir los logaritmos con 15 cifras por lo menos, así como hemos escrito con 10 el de 1'03, para que el error del producto por 93 no afecte á la cifra de las diezmillonésimas.

Por esta razón las cuestiones precedentes deben resolverse por medio de Tablas especiales que contengan los logaritmos con suficiente número de cifras, ó acudiendo por lo menos á las I y II del final que incluímos principalmente con este objeto, pero como en obsequio á la brevedad hemos suprimido las diferencias tabulares que tendrían muchas cifras y el determinarlas y operar con ellas complicaría y obscurecería las operaciones y cálculos que como ejemplo presentamos, nos ha parecido que en ellos no debía sacrificarse la completa exactitud á la claridad del procedimiento, por lo que hemos empleado y seguiremos empleando la Tabla general de logaritmos con que termina el primer volumen de esta obra, á excepción de aquellos casos en que deban multiplicarse por exponentes, en que el empleo de sólo 7 cifras en las mantisas, produciría errores considerables.

El originado en este caso, por usar sólo mantisas de 7 cifras, es aproximadamente de 5'60 unidades.

Calculado el fondo disponible R_m al final del tiempo m, y suponiendo sea v el valor nominal de cada obligación, es evidente que se obtendrá el número N_m de las amortizables, dividiendo el primero por el segundo, luego

$$N_m = \frac{Rm}{v}$$

número que por su propia naturaleza ha de ser entero, por lo que considerada la cuestión aisladamente de sus análogas, que pronto agruparemos, sólo se podrán amortizar las indicadas por la parte entera del cociente.

Problema 2.° En el supuesto del anterior, ¿cuántas obligaciones podrían amortizarse al fin del propio año?

$$N_3 = \frac{22560'60}{500} = 45'1212$$

Podrían amortizarse 45 obligaciones.

58. Respecto al importe de la deuda en aquel momento, tendrá que ser equivalente al valor V_m que corresponda á la renta, durante los $n—m$ períodos que aun deben transcurrir, por consiguiente (36)

$$V_m = \frac{A\left((1+r)^{n-m}-1\right)}{r(1+r)^{n-m}};$$

$$\text{Log.}\,V_m = \text{Log.}A + \text{Log.}\left((1+r)^{n-m}-1\right) - \text{Log.}r - (n-m)\text{Log.}(1+r)$$

y el número N'_m de obligaciones vivas á partir de aquel momento, será análogamente

$$N'_m = \frac{V_m}{v}$$

el cual, cuando sea inexacto, se tendrá que tomar por exceso, ya que también ese cociente debería ser entero por su propia naturaleza, y el resto indicará, cuando lo haya, que el fondo disponible no amortiza un número exacto de obligaciones y se ha tenido que dejar la parte correspondiente á su resto para el siguiente período.

PROBLEMA 3.° En la misma hipótesis y época de los precedentes, ¿cuánto se adeudaría aún y cuántas obligaciones quedarían existentes al principiar el año 1892?

$$n-m=93-3=90;\ \text{Log.}1'03^{90}=90\ 0'0128372247=1'1553502$$
$$=\text{Log.}14'3005$$

$$\text{Log.}\,V_3 = \left\{\begin{array}{ll} \text{Log.}332305'80 & =5'5215380 \\ +\text{Log } 13'3005 & =1'1238679 \\ -\text{Log.}0'03 & =\bar{2}'4771212 \\ -\text{Log.}14'3005 & =1'1553502 \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\right\} =6'6454059 \\ \left.\right\} =\bar{1}'6324714 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} =7'0129345 \\ =\text{Log.}10302308'42 \end{array}$$

Aun se adeudarían, por tanto, 10302308'42 pesetas,

$$N'_m = \frac{10302308'42}{500} = 20604'61684$$

quedando por amortizar 20605 obligaciones.

59. Determinando el valor de la deuda en cualquier momento, y, por lo tanto, al fin del plazo $m-1$, fácil sería calcular sus intereses simples en la unidad de tiempo, para saber lo que por tal concepto hay que pagar y el total que se deberá satisfacer, añadiéndole el valor de las obligaciones amortizables; pero los residuos que quedan á causa de los valores fraccionarios de N_m hacen que la amortización *teórica* no coincida con la *práctica*, en razón á que *cualquiera de ellos, junto con el anterior aumentado en sus intereses, permite en ocasiones amortizar una obligación más*, correspondiendo entonces á N_m y N'_m, al contrario de lo que hemos dicho hasta aquí, sus valores por exceso y por defecto.

Hay quien tiene la costumbre de *despreciar el residuo si es menor que $\frac{v}{2}$ y amortizar la obligación de más cuando es mayor;* pero como esto puede ocurrir en un gran número de ellos, *los intereses y reintegros que se adelantan, pueden tener importancia*, por lo que conviene hacer el cálculo con toda la exactitud posible.

60. Para ello se construye previamente, con arreglo á las condiciones del empréstito, por el método práctico que vamos á exponer, una TABLA DE AMORTIZACIÓN, *en la que se encuentren cuantos datos referentes al mismo puedan interesar en todo el transcurso de su duración*, con cuyo objeto suele disponerse en siete columnas que contengan:

1.º *Las datas de los años comprendidos entre el origen de las obligaciones y su completa amortización.*

2.º *El número de obligaciones existentes al principio de cada uno.*

3.º *Los intereses que deben pagarse á su terminación.*

4.º *La cantidad disponible para ello.*

5.º *El número de obligaciones amortizables.*

6.º *El residuo sobrante de la amortización con sus intereses durante la unidad de tiempo.*

7.º *El total que deberá satisfacerse al terminar cada año.*

Si los plazos no fuesen anuales, como hemos supuesto, por ser lo más frecuente, una pequeña modificación en las fechas y encabezamientos permitiría darle igual disposición.

Para construir esta Tabla, después de colocar en la primer columna las datas de los años, y calcular el valor de la anualidad constante, puede seguirse evidentemente la siguiente regla práctica:

Anotar en la segunda columna el número de las obligaciones emitidas, y en la tercera el interés simple que á su valor corresponda; res-

tar éste de la anualidad y escribir la diferencia en la cuarta; dividirla por el valor de cada obligación, sentando en la quinta la parte entera del cociente y en la sexta el residuo aumentado en sus intereses; sumar los que han de pagarse con el producto del número de las obligaciones amortizables por su valor (que si se quiere pueden colocarse en otra columna, así como la amortización teórica), *y escribir la suma en la última.*

De este modo, se tendrá la primer línea, y para formar las otras bastará *sentar en la segunda columna la diferencia entre el número ya escrito en ella y el de obligaciones amortizadas, y continuar con igual procedimiento hasta la terminación, teniendo en cuenta la suma del residuo que pueda producir el fondo de amortización disponible con el anterior aumentado en sus intereses,* por si en ella *está contenido el valor de una obligación que pueda amortizarse, además de las obtenidas por el cálculo anterior, en cuyo caso disminuirán y aumentarán respectivamente en una unidad los números de obligaciones existentes y amortizadas, debiendo sólo anotarse el nuevo residuo con sus intereses en la columna correspondiente.*

Así, por ejemplo; en el caso de los problemas últimamente resueltos, se tendría, recordando que la anualidad constante debería ser de 332305'80 *pts.*,

1.° Origen de las obligaciones: 1889, á la primer columna.

2.° Obligaciones emitidas: 20736, á la segunda.

3.° Intereses á fin de año 20736·15=311040, á la tercera.

4.° Fondo disponible: 332305'80−311040=21265'80 *pts.*, á la cuarta.

5.° Obligaciones amortizables: 21265'80 : 500=42 (parte entera), á la quinta, y 265'80 *pts.* de residuo.

6.° Residuo con sus intereses: 265'80+3 °/₀ de 265'80=265'80 +7'97=273'77 *pts.*, á la sexta.

7.° Total que deberá pagarse: 311040 + 42·500 = 311040 +21000=332040 *pts.*, á la séptima.

Para 1890, quedarían 20736−42=20694 obligaciones vivas, y análogamente se calcularía:

3.° ...... 20694·15=310410; 4.° ...... 332305'80+273'77 − 310410=22169'57; 5.°......22169'57:500=44 y 169'57 de residuo. 6.° ...... 169'57 + 3 °/₀ de 169'57 =169'57 + 5'09 = 174'66; 7.° ...... 310410+44·500=310410+22000=332410.

Para 1891: 2.° ...... 20694 − 44 =20650; 3.° ...... 20650·15= 309750; 4.° ...... 332305'80+174'66−309750=22729'66; 5.° ...... 22729'66 : 500=45, conforme al resultado del problema 2.°, y

229'66 de residuo; 6.º ...... 229'66+3 % de 229'66=229'66+6'89 =236'55; 7.º ...... 309750+45·500=309750+22500=332250.

Para 1892: 2.º ......20650—45=20605, conforme con el segundo resultado del problema 3.º; 3.º ...... 20605·15=309075; 4.º ...... 332305'80+236'55—309075=23467'35; 5.º ...... 23467'35:500=46, parte entera y 467'35 residuo; 6.º ...... 467'35+3 % de 467'35=467'35+14'02=481'37; 7.º ......309075+46·500=309075 +23000=332075,

y así sucesivamente, se proseguiría y concluiría la tabla

Años.	Obligaciones vivas al principiar.	Intereses á pagar al final.	Fondos disponibles para la amortización.	Obligaciones amortizables.	Residuo con sus intereses.	Total que ha de pagarse.
1889	20736	311040	21265'80	42	273'77	332040
1890	20694	310410	22169'57	44	174'66	332410
1891	20650	309750	22729'66	45	236'55	332250
1892	20605	309075	23467'35	46	481'37	332075
....	......	......	......	....	......	......
....	......	......	......	....	......	......
1981	......	......	......	....	......	......

Su formación, según se ve, es sencilla, sin necesitar el empleo de logaritmos, pero larga, pesada y difícil de completar sin ninguna equivocación, por el gran número de operaciones que han de efectuarse; conviene, pues, comprobarla frecuentemente por medio de las fórmulas, operando con mantisas de 15 cifras por lo menos, para evitar el error que en el escolio del problema 1.º advertimos podía originarse no haciéndolo así, y que indicamos era para el fondo disponible al terminar el año 1891, de unas 5'60 pesetas, como podemos ahora comprobar, pues si del valor allí encontrado 22560'60 restamos 5'60, quedarán 22555, que aumentadas en el residuo é intereses 174'66 del año anterior, producen el número 22729'66 inscripto en la Tabla.

61. Segundo caso.—Si el pago de los cupones se verifica en épocas distintas á las de amortización, siendo, por ejemplo, semestral aquél y anual ésta, que es lo más frecuente, el pago de intereses se adelanta un semestre, dejando su importe de producirlos durante el siguiente, por lo que si se tratase de un empréstito particular, las rentas semestral y anual necesarias para extin-

guirlo, no serían exactamente iguales, pero en lo que se refiere á los realizados emitiendo obligaciones por los Gobiernos, Diputaciones, Ayuntamientos ó Compañías, en los que no se trata de saber la cantidad que debe imponerse en una Caja para amortizarlos, sino lo que cada año debe dedicarse á ello, la suma de los dos intereses semestrales al tanto $\frac{r}{2}$, será para el primer período $V\cdot\frac{r}{2}+V\cdot\frac{r}{2}=2V\cdot\frac{r}{2}=Vr$, quedando para la amortización $A-Vr$, como si el interés se pagara anualmente, ocurriendo lo mismo en los sucesivos, por lo cual en la práctica se calculan de igual modo los valores contenidos en la Tabla de amortización, con la sola diferencia de que en vez de ascender á $R_m r$ dichos intereses, son de $R_m\cdot\frac{r}{2}$ para cada semestre.

Esto no exige en la Tabla más modificación que el *reemplazo de la columna de intereses por otras dos que contengan los correspondientes al primero y segundo semestre*, para encontrar los cuales bastará dividir por 2 los que se hallen aplicando la regla dada, ó calcularlos directamente.

62. Tercer caso. Los empréstitos que se amortizan por compra de obligaciones, no difieren de los examinados, más que en el interés real que corresponde al precio medio de cotización.

En efecto, si se emiten por el valor nominal v al tanto de interés t por 100 y se calcula es p el precio medio de cotización, el tanto r por 1 que devengarán, no será $\frac{t}{100}$, sino $\frac{t}{p}$ y con arreglo á éste deberá calcularse la anualidad necesaria para extinguirlo en determinado número de años, así como su duración cuando se fije ésta.

La construcción de la Tabla que con arreglo á dicho curso medio podrá formarse, y las restantes cuestiones que pueden originar las combinaciones de ese tanto, tiempo, anualidad y valores, nominal ó efectivo, del empréstito, en nada modificarán, por lo demás, los procedimientos expuestos y fórmulas deducidas en el supuesto de que se hiciese á la par, ó lo que es lo mismo, que el tanto r represente siempre el de interés pagado por cada unidad nominal.

Se amortice ó no por compra, claro está, por consiguiente, que el ceder las obligaciones á otro precio, no exigirá más variación que el cálculo de ese tanto.

Problema. El Gobierno español emite 500000 pesetas en láminas del 4 °/₀ amortizable, proponiéndose cederlas y comprarlas al curso medio de 80. ¿Cuánto habrá que destinar al pago de intereses y amortización, para efectuar ésta en 20 años?

Como el Gobierno paga semestralmente el 2 % del nominal, $r=\frac{2}{80}=\frac{1}{40}=0'025$ y por lo tanto,

$$\text{Log.}A.=\left\{\begin{array}{l} \text{Log } 500000=5'6989700 \\ +\text{Log.}0'025 \;=\bar{2}'3979400 \\ +\text{Log.}1'025^{40}=0'4289546 \\ -\text{Log.}(1'025^{40}-1)=\cdots\cdots \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}=4'5258646 \\ =-0'2266000 \end{array} \Bigg\}\begin{array}{l}=4'2992646 \\ =\text{Log.}19918'87\end{array}$$

Debería, pues, satisfacer 19918'87 pesetas cada semestre ó 39837'74 anuales, pagando de esta cantidad los intereses y destinando el resto á la compra de obligaciones al curso medio de 80.

63. Resueltas las cuestiones más frecuentes que se refieren á los empréstitos sin lotes, fáltanos para dar por terminadas estas breves nociones generales, relacionar entre sí las cantidades consideradas hasta ahora, con el tanto de interés compuesto que al comprador reportan las obligaciones, cuando se ceden por un valor distinto del nominal, tanto de que hasta aquí hemos prescindido, por ser su determinación uno de los problemas más dificultosos y complicados que pueden ocurrir en estos asuntos.

Muchos son los procedimientos de tanteo que se han ideado para resolverlo y varias las relaciones que se han establecido en estos últimos años para enlazarlas y facilitar su cálculo, idénticas en su esencia, como no puede menos de suceder.

En cuanto á su forma, creemos que en estos cálculos deben evitarse cuanto sea posible las multiplicaciones y divisiones directas, siempre expuestas á producir errores de consideración al operar con números aproximados y, por lo tanto, también por nuestra parte vamos á darles la que nos parece más sencilla y que menos inconvenientes presenta.

Representando como hasta aquí por v y r los valores nominales de la obligación y del tanto de interés señalado; por n el tiempo que tarda en ser amortizada; por a y A la anualidad á que su valor equivale y la necesaria para satisfacer aparte sus intereses, llamando además v' y r' al valor efectivo de la misma y al tanto de interés que realmente le corresponde, en virtud del r acordado para el nominal, tendremos (46)

$$a = \frac{vr'}{(1+r)^n - 1}$$

para expresión de la anualidad que debería entregarse ó reservarse en equivalencia de la amortización definitiva del valor v, pero como en cada período hay que pagar vr en concepto de intereses, la verdadera renta que el poseedor percibe, será

$$A = \frac{vr'}{(1+r)^n - 1} + vr = v\left(\frac{r'}{(1+r)^n - 1} + r\right)$$

Pero el verdadero valor á que en el momento de la emisión equivale esa renta es v' y no v, así como el verdadero tanto es r' y no r, luego (36)

$$v' = \frac{A\left((1+r')^n - 1\right)}{r'(1+r')^n}$$

de donde sustituyendo el de A

$$v' = v\left(\frac{r'\left((1+r')^n - 1\right)}{\left((1+r')^n - 1\right)r'(1+r')^n} + \frac{r\left((1+r')^n - 1\right)}{r'(1+r')^n}\right)$$

$$= \frac{V}{(1+r')^n}\left(1 + \frac{r\left((1+r')^n - 1\right)}{r'}\right)$$

y tomando logaritmos

$$\text{Log.}\,v' = \text{Log.}\,v + \text{Log.}\left(1 + \frac{r\left((1+r')^n - 1\right)}{r'}\right) - n\,\text{Log.}\,(1+r')$$

valor fácilmente calculable, determinando primero el antilogaritmo de

$$\text{Log.}\,\frac{r\left((1+r')^n - 1\right)}{r'} = \text{Log.}\,r + \text{Log.}\left((1+r')^n - 1\right) - \text{Log.}\,r'$$

De estas igualdades se desprenden también

$$v = v'(1+r')^n : \left(1 + \frac{r\left((1+r')^n - 1\right)}{r'}\right)$$

$$\text{Log.}\, v = \text{Log.}\, v' + n\,\text{Log.}(1+r') - \text{Log.}\left(1 + \frac{r\left((1+r')^n - 1\right)}{r'}\right)$$

y efectuando la multiplicación indicada en la expresión de v'

$$v' = \frac{v}{(1+r')^n} + \frac{vr\left((1+r')^n - 1\right)}{r'}$$

Multiplicando ambos miembros por los denominadores y sacando $(1+r')^n$ factor común

$$v'r'(1+r')^n = vr' + vr(1+r')^n - vr;\ (v'r' - vr)(1+r')^n = vr' - vr$$

y por consiguiente

$$(1+r')^n = \frac{vr' - vr}{v'r' - vr};\ n\text{Log.}(1+r') = \text{Log.}(vr' - vr) - \text{Log.}(v'r' - vr)$$

$$n = \frac{\text{Log.}(vr' - vr) - \text{Log.}(v'r' - vr)}{\text{Log.}(1+r')}$$

fórmulas que podrán servir para determinar los valores de emisión y nominal y la duración del empréstito, cuando se conozcan dos de estas cantidades y los tantos de interés correspondientes á aquéllos.

De la primer igualdad de forma entera también es fácil deducir para r,

$$v'r'(1+r')^n - vr' = vr\left((1+r')^n - 1\right);$$

$$r'\left(v'(1+r')^n - v\right) = vr\left((1+r')^n - 1\right)$$

$$r = \frac{r'\left(v'(1+r')^n - v\right)}{v\left((1+r')^n - 1\right)};$$

$$\text{Log.}\, r = \text{Log.}\, r' + \text{Log.}\left(v'(1+r')^n - v\right) - \text{Log.}\, v - \text{Log.}\left((1+r')^n - 1\right)$$

El tanto de interés r' que por la obligación obtiene el comprador, que de todas estas cuestiones es la menos interesante, depende, como en otros problemas análogos, de una ecuación de grado $n+1$, por lo que en general ha de aproximarse también por tanteo, que no es difícil de hacer en la expresión que se desprende del valor de r,

$$r\left((1+r')^n-1\right)=r'\left(\frac{v'}{v}(1+r')^n-1\right)$$

quitando el denominador y dividiendo ambos miembros por v.

Problema 1.º Una compañía emite á 800 pesetas obligaciones de 1000, reembolsables por todo su valor á los diez años. ¿Qué interés deberá señalarles para que el comprador obtenga el 6 %?

$$v=1000;\ v'=800;\ n=10;\ r'=0'06;$$

$$(1+r')^n=1'7908477 \text{ (Tabla III)};\ v'(1+r')^n-v=432'6781$$

$$\text{Log.}r=\left\{\begin{array}{lcl} \text{Log.}0'06 & = & \bar{2}'7781512 \\ +\text{Log.}432'6781 & = & 2'6361649 \\ -\text{Log.}1000 & = & -3 \\ -\text{Log.}0'7908477 & = & -\bar{1}'8980929 \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\right\}= 1'4143161 \\ \\ \left.\right\}=-2'8980929 \end{array} \Bigg\}\begin{array}{l}=2'5162232 \\ =\text{Log.}0'03283\end{array}$$

Debería, pues, señalarse á las obligaciones un interés algo menor que 3'283 %, ya que ese valor está tomado por exceso.

En la práctica se señalaría aproximadamente $3\frac{1}{4}$, que es poco inferior á 3'28 y por lo tanto demasiado pequeño, obteniendo los compradores *cerca* del 6 %, como vamos á comprobar con el siguiente

Problema 2.º Una compañía emite á 800 pesetas obligaciones de 1000, al $3\frac{1}{4}$ % de interés, amortizables por sorteos anuales. ¿En cuál de ellos deben serlo las que produzcan á los compradores un interés de 6 %?

$$vr'=60;\ vr=32'50;\ v'r'=48;\ vr'-vr=27'50;\ v'r'-vr=15'50$$

$$n=\frac{\text{Log.}27'50-\text{Log.}15'50}{\text{Log.}1'06}=\frac{1'4393327-1'1903317}{0'0253059}$$

$$=\frac{0'2490010}{0'0253059}=9'8$$

Debería, por consiguiente, ser amortizada entre el noveno y décimo sorteo, y no siéndolo hasta éste, produciría un interés algo menor que 6 %, como también vamos á comprobar.

Problema 3.º Una compañía emite á 800 pesetas obligaciones de 1000 al $3\frac{1}{4}$ % de interés, amortizables por sorteos anuales. La que lo sea en el décimo ¿qué interés habrá producido al comprador?

Á interés simple le habría producido el $3\frac{1}{4}$ que le habrán pagado anualmente, aumentado en las 200 pesetas de ganancia que resultan de su amortización en 10 años, y como 200 es de 800 el 25 % ó el $2\frac{1}{2}$ anual, habría sacado al capital empleado un $5\frac{3}{4}=5'75$ % anual.

Empezando el tanteo por este valor, tendremos por consiguiente:

$$\frac{v'}{v}=0'8;\ r=0'0325;\ r'=0'0575;\ n=10;$$

$$(1+r')^n-1=\text{Antlg.}(10\,\text{Log.}\,1'0575)-1=\text{Antlg.}(10\cdot 0'0240750)-1$$
$$=\text{Antlg.}\,0'240750-1=1'74-1=0'74$$

$$0'0325\cdot 0'74=0'024050>0'0575(0'8\cdot 1'74-1)$$
$$=0'0575\cdot 0'392=0'022540$$

Sustituyendo ahora en vez de r', 0'06, ó sea el 6 %, resultará:

$$(1+r')^n-1=1'790847-1=0'790847=0'79 \text{ aproximadamente}$$

(Tabla III).

$$0'0325\cdot 0'79=0'025675<0'06(0'8\cdot 1'79-1)=0'06\cdot 0'432=0'02592,$$

lo cual nos prueba que el valor del tanto de interés está comprendido entre $5\frac{3}{4}$ y 6, pero mucho más próximo á éste que á aquél, ya que los primeros resultados se diferencian en 0'00151, y los segundos únicamente en 0'000245.

Es por otra parte evidente, que haciendo el cálculo con suficiente número de tanteos y cifras decimales, se llegaría á expresar su valor con cuanta aproximación se deseara.

Como ninguna dificultad ofrecerían las operaciones necesarias para hallar los valores nominal y de emisión, correspondientes á los tantos y tiempo prefijados, análogas en todo á las que muchas veces hemos efectuado, renunciamos á presentar ejemplos de ellas.

64. Hay aún otras dos cuestiones relacionadas con las anteriores y que no debemos pasar en silencio.

El comprador no puede averiguar el interés devengado por el dinero que desembolsa, mientras ignore el sorteo en que ha sido ó debe ser amortizada cada una de las obligaciones que posee, puesto que este interés va decreciendo á medida que la amortización se retarda; pero la empresa que emite un nominal V al tanto r, á cambio de un efectivo V', *habrá pagado á las obligaciones al fin del tiempo total*, un INTERÉS MEDIO r', que le interesa conocer, interés que también sería el obtenido por una sociedad cualquiera que comprara todas las obligaciones.

Este interés puede encontrarse de un modo semejante.

Reservando como siempre la anualidad

$$A=\frac{Vr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

necesaria para extinguir el nominal V emitido, el valor efectivo V' del capital que representa esa renta al tanto real r' que por él se satisface, será

$$V'=\frac{A\big((1+r')^n-1\big)}{r'(1+r')^n}$$

luego sustituyendo en éste el de dicha anualidad, tendremos:

$$V'=\frac{Vr(1+r)^n\big((1+r')^n-1\big)}{r'(1+r')^n\big((1+r)^n-1\big)}$$

$$\text{Log.}V'=\text{Log.}V+\text{Log.}r+n\text{Log.}(1+r)+\text{Log.}\big((1+r')^n-1\big)$$
$$-\text{Log.}r'-n\text{Log.}(1+r')-\text{Log.}\big((1+r)^n-1\big)$$

y también

$$V=\frac{V'r'(1+r')^n\big((1+r)^n-1\big)}{r(1+r)^n\big((1+r')^n-1\big)}$$

$$\mathrm{Log}.V = \mathrm{Log}.V' + \mathrm{Log}.r' + n\mathrm{Log}.(1+r') + \mathrm{Log}.\big((1+r)^n - 1\big)$$
$$- \mathrm{Log}.r - n\mathrm{Log}.(1+r) - \mathrm{Log}.\big((1+r')^n - 1\big)$$

deduciéndose á simple vista, de cualquiera de los dos valores hallados,

$$\frac{V'}{V} \cdot r'(1+r')^n\big((1+r)^n - 1\big) = r(1+r)^n\big((1+r')^n - 1\big)$$

cuya igualdad podrá servir para aproximar por tanteo cualquiera de los tantos r ó r', que dependen de ecuaciones de grado $2n+1$ de una manera análoga á la del problema último, y no mucho más pesada, por ser los valores $\frac{V'}{V}$, $(1+r)^n - 1$, r y $(1+r)^n$, ó bien $\frac{V'}{V}$, $(1+r)^n - 1$, r' y $(1+r')^n$ constantes para todas las operaciones, y no haber, por lo tanto, más que tres variables.

La duración n del empréstito es la que sería bastante difícil de calcular valiéndose tan sólo de los datos; pero puede encontrarse, si es necesario, por medio de la anualidad correspondiente.

Como antes aplicamos las fórmulas análogas á la determinación del tiempo y de los tantos, hallaremos ahora los valores nominal y efectivo, más con el objeto de que los enunciados puedan servir de ejemplo para comprender del todo las cuestiones que resuelven, que porque ofrezcan ninguna novedad en las operaciones.

Problema 1.° Una compañía desea emitir obligaciones de 1000 pesetas al 4 °/₀ anual, amortizables por sorteo en 20 años. ¿A qué precio debe emitirlas para que los compradores obtengan un interés medio de 6 °/₀?

$$V = 1000;\ r = 0'04;\ r' = 0'06;\ n = 20;\ (1+r)^n = 2'191123;$$
$$(1+r')^n = 3'207135 \text{ (Tabla III)}.$$

$$\mathrm{Log}.V' = \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} \mathrm{Log}.1000 & = & 3 \\ +\mathrm{Log}.0'04 & = & \bar{2}'6020600 \\ +\mathrm{Log}.2'191123 & = & 0'3406668 \\ +\mathrm{Log}.2'207135 & = & 0'3438289 \end{array}\right\} = 2'2865557 \\ \left.\begin{array}{lll} -\mathrm{Log}.0'06 & = & -\bar{2}'7781512 \\ -\mathrm{Log}.3'207135 & = & 0'5061173 \\ -\mathrm{Log}.1'191123 & = & 0'0759566 \end{array}\right\} = -\bar{1}'3602251 \end{array}\right\} = 2'9263306 = \mathrm{Log}.843'98$$

Debería emitirlas á 844 *pts.*

Problema 2.° Una compañía desea emitir obligaciones al precio de 844 pesetas y 4 °/₀ anual de interés, amortizables por sorteo en 20 años, deseando produzcan á los suscriptores un interés medio de 6 °/₀. ¿Qué nominal debe señalárseles?

$$\text{Log.}V=\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Log.844} = \text{2'9263424}\\ +\text{Log.0'06} = \bar{2}\text{'7781512}\\ +\text{Log.3'207135} = \text{0'5061173}\\ +\text{Log.1'191123} = \text{0'0759566}\end{array}\right\} = \text{2'2865675}\\ \left.\begin{array}{l}-\text{Log.0'04} = \bar{2}\text{'6020600}\\ -\text{Log.2'191123} = \text{0'3406668}\\ -\text{Log.2'207135} = \text{0'3438289}\end{array}\right\} = -\bar{1}\text{'2865557}\end{array}\right\} \begin{array}{l}=\text{3'0000118}\\ =\text{Log.1000'02}\end{array}$$

Debe señalarles un valor nominal de 1000 pesetas.

Escolio. Los valores V y V' en realidad, serían iguales al nominal y efectivo v y v' de las obligaciones, por el número N de ellas, pero como la relación entre los primeros

$$\frac{V}{V'}=\frac{vN}{v'N}=\frac{v}{v'}$$

es siempre igual á la de los segundos, es indiferente operar con los unos ó los otros, resultando estos problemas independientes del número de las emitidas.

La segunda cuestión es la siguiente:

Ya que el comprador no puede previamente calcular el interés que su dinero devengará mientras ignore el sorteo en que la obligación será amortizada, ¿qué esperanza podrá tener de que le produzca un cierto tanto por 100, ó un tanto mayor ó menor?

Conocido, como es indispensable conocer para ello, y se conoce siempre por las condiciones en que el empréstito se realiza, el número de obligaciones emitidas y el de las que han de amortizarse en cada sorteo, basta, para contestar á estas preguntas, *determinar* como en el problema 2.° del párrafo 63, *el sorteo en que la obligación debe de ser amortizada, para obtener el interés deseado y calcular después la probabilidad de que lo sea precisamente en ese sorteo, antes ó después.*

Supongamos para abreviar, aprovechando el cálculo ya hecho, que las obligaciones emitidas por la compañía á que se refiere el citado problema, sean solamente 120; que hayan de amortizarse en 15 años, sorteando tantas en cada uno como indique su número de orden, es decir, 1 el primero, 2 el segundo, 3 el tercero y así sucesivamente hasta amortizar en el último las 15 únicas que falten, y en este supuesto, resolvamos el siguiente

PROBLEMA 3.° ¿Qué esperanza podrá tener el comprador de que su dinero le produzca más del 6 %, este interés aproximado, ó uno menor?

Para que produzca el 6 % necesita, según sabemos, ser amortizada (63. P. 2.°) en el décimo sorteo.

Determinado este número 10, la probabilidad de que en él precisamente quede amortizada la obligación, estará compuesta (8) de otras dos simples (7): la de que no lo haya sido en los nueve primeros sorteos y la de que lo sea en el décimo.

La de que quede amortizada en los nueve primeros años, es la suma de las simples correspondientes á cada sorteo, que estarán representadas por las fracciones cuyo numerador sea el número de casos favorables á la amortización, determinados por el número de obligaciones sorteadas, y que tengan por denominador el número de las vivas en aquel instante, es decir,

$$\frac{1}{120}+\frac{2}{119}+\frac{3}{117}+\frac{4}{114}+\frac{5}{110}+\frac{6}{105}+\frac{7}{99}+\frac{8}{92}$$
$$+\frac{9}{84}=0'008+0'017+0'026+0'035+0'045+0'057+0'071$$
$$+0'087+0'107=0'45$$

Esta será, por tanto, aproximadamente, la probabilidad de que una obligación determinada quede amortizada en los nueve primeros sorteos, y la representación matemática, por consiguiente de la esperanza que el comprador podrá tener de que el dinero empleado en ella le produzca *más* del 6 %.

La de que en esos sorteos *no* quede amortizada, será la contraria (7) $1-0'45=0'55$, y la de que se amortice en el décimo $\frac{10}{75}$ $=0'133$, luego en virtud de lo dicho, tendremos para la probabilidad de que precisamente lo sea en ese, $0'55 \cdot 0'133=0'07$, que representará igualmente la esperanza de que la cantidad desembolsada produzca 6 % y *no* otro interés distinto.

Por último: sumando la 0'45 de que resulte amortizada en los nueve primeros, con la 0'13 de que lo sea en el décimo, y encontrando la contraria $1-(0'45+0'13)=1-0'58=0'42$, tendremos la de que *no* lo sea en los diez primeros y *sí* en los cinco restantes, obteniendo *menos* del 6 °/₀ de interés.

Con este mismo cálculo queda también resuelto el siguiente:

PROBLEMA 4.° Dadas las condiciones del empréstito, ¿qué será más probable, que cada obligación produzca *por lo menos* 6 °/₀, ó que no llegue á producir este interés?

Probabilidad de que produzca 6 °/₀ ó más...............	0'13+0'45=0'58	0'58>0'42
Probabilidad de que produzca menos....................	0'42	

Lo primero es lo más probable, y el comprador puede abrigar fundadamente esa confianza.

III. – Empréstitos con lotes.

65. Cuando la corporación ó empresa emitente quiere distribuir en lotes determinada cantidad, al realizar las amortizaciones parciales hay que disminuir el número de las amortizables, en lo necesario para que puedan satisfacerse del fondo reservado para la amortización, lo que obliga á calcular á qué precio y cuántas deben emitirse.

Supongamos sea C la cantidad que en lotes debe satisfacerse al final de cada uno de los n plazos.

Considerada como una anualidad, que á semejanza de la destinada al pago de amortización é intereses, se consagra á dicho objeto, y que evidentemente podrá distribuirse en partes desiguales, su valor U en el momento de la emisión será, según sabemos (53),

$$U = \frac{C\left((1+r)^n - 1\right)}{r(1+r)^n}$$

$$\text{Log.}U = \text{Log.}C + \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right) - \text{Log.}r - n\,\text{Log.}(1+r)$$

Determinada esta cantidad quedará $V-U$ para distribuir en obligaciones del nominal v que se desee, al tanto r, cuyo número debería ser por tanto $\frac{V-U}{v}$, emitiéndolas á la par.

Si se quieren ceder á un precio más bajo para que los compradores obtengan un tanto real r' de interés, habrá que hallar ante todo la anualidad destinada al pago de cada obligación,

$$A = \frac{vr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\text{Log.}A = \text{Log.}v + \text{Log.}r + n\text{Log.}(1+r) - \text{Log.}\left((1+r)^n - 1\right)$$

que permitirá calcular el precio v', á que podrá cederse cada una (63),

$$v' = \frac{A\left((1+r')^n - 1\right)}{r'(1+r')^n}$$

$$\text{Log.}v' = \text{Log.}A + \text{Log.}\left((1+r')^n - 1\right) - \text{Log.}r' - n\text{Log.}(1+r')$$

y, por lo tanto, el número $N = \frac{V-U}{v'}$, cuyo conjunto equivaldrá á un efectivo de $V-U$.

Ahora bien: para que ese número produzca V y no solamente $V-U$, habrá que repartir entre ellas aquel valor, y por lo tanto, deberán cederse á un precio

$$v'' = \frac{V}{v'}.$$

La cuestión, según se ve, no ofrece dicultad, pues equivale á la reunión de otras varias parciales que se saben resolver, y calculado el número de las obligaciones y su precio, fácil será construir la correspondiente Tabla de amortización (60), en todo semejante á la de los empréstitos sin lotes.

Problema 1.º Un Gobierno desea realizar un empréstito que le deje 50000000 de pesetas efectivas en 1.º de Enero de 1890, amortizable á la par en 37 años por sorteos anuales, emitiendo láminas de 1000 pesetas al 5 %, pero deseando que el interés medio que reporte á los compradores sea 8 %, aparte de 158000 pesetas que al efectuar cada sorteo se propone repartir en lotes, ¿Cuántas láminas debe emitir y á qué precio?

$$C = 158000;\ n = 37;\ r = 0'05;\ (1+r)^n = 6'081407 \text{ (Tabla III)};$$

$$r' = 0'08;\ (1+r')^n = 17'245626$$

Log. U

$$=\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Log.}158000 = 5'1986571\\ +\text{Log.}5'081407 = 0'7059840\end{array}\right\} = 5'9046411 \\ \left.\begin{array}{l}-\text{Log.}0'05 = -\bar{2}'6989700\\ -\text{Log.}6'081407 = -0'7840040\end{array}\right\} = -\bar{1}'4829740\end{array}\right\} \begin{array}{l}=6'4216671\\ =\text{Log.}2640384\end{array}$$

$$V-U=50000000-2640384=47359616 \textit{ pts.}$$

Log.A

$$=\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Log.}1000 = 3\\ +\text{Log.}0'05 = \bar{2}'6989700\\ +\text{Log.}6'081407 = 0'7840040\end{array}\right\} = 2'4829740 \\ -\text{Log.}5'081407 = \ldots\ldots\ldots\ldots = -0'7059840\end{array}\right\} \begin{array}{l}=1'7769900\\ =\text{Log.}59'84\end{array}$$

Log.v'

$$=\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Log.}59'84 = 1'7769900\\ +\text{Log.}16'245626 = 1'2107364\end{array}\right\} = 2'9877264 \\ \left.\begin{array}{l}-\text{Log. }0'08 = -\bar{2}'9030900\\ -\text{Log.}17'245626 = -1'2366790\end{array}\right\} = -0'1397690\end{array}\right\} \begin{array}{l}=2'8479574\\ =\text{Log.}704'62\end{array}$$

$$N=\frac{47359616}{704'62}=67213 \text{ (por exceso)}$$

$$v''=\frac{50000000}{67213}=743'90 \text{ (por defecto)}$$

Debería, por tanto, emitir 67213 láminas de 1000 pesetas á 743'90.

Escolio. Repetimos (57. Esc) que estos cálculos deben hacerse con logaritmos de 15 ó más cifras en las mantisas, pues el operar sólo con siete produce generalmente errores que pueden ser de consideración en los antilogaritmos de más de cuatro ó cinco.

En cuanto á la esperanza de obtener determinado lote, dependerá no sólo del número de obligaciones vivas al realizar el sorteo en que deba ser concedido, sino también de que sea uno solo ó haya varios iguales, y del orden á que corresponda en la extracción, pero en cualquier caso bastará para hallarlo *calcular la probabilidad de que el número de la obligación sea extraído en el momento correspondiente.*

Como de aquí en adelante intervendrán las probabilidades en todas las cuestiones que aun hemos de tratar, resolveremos á continuación algunos problemas distintos de los anteriores, que comprendan los casos más frecuentes y sirvan de natural enlace con lo que ha de seguir.

Procurando, como siempre, abreviar en lo posible, nos referiremos al empréstito que acabamos de examinar; pero con objeto de facilitar las operaciones y aclararlas, supondremos que el Gobierno, no preocupándose del interés real que puedan obtener los suscriptores, emite 50000 obligaciones á la par, y que en cada sorteo distribuye las 158000 pesetas entre las 60 láminas cuyos números son extraídos primero, en la siguiente forma:

Al 1.°, 2.°, 3.° y 4.°, respectivamente, 50000, 20000, 15000 y 10000 pesetas.

Al 5.° y 6.°, 5000 á cada uno; 3000, desde el 7.° al 12.° inclusive; 2000, desde el 13.° al 20.°; 1000, desde el 21.° al 34.°; 500, desde el 35.° al 59.°, y 2500 al último de los 60.

Supongamos también, para establecer todas las hipótesis, que en los 13 primeros sorteos no amortiza más que esas 60 láminas, para que á todas corresponda lote, lo que le permite sortear muchas más de allí en adelante, desde 1522 sorteables en el 14, hasta 2673 en el último.

Problema 1.° ¿Qué probabilidad habrá de que una lámina, no amortizada aún el año 1903, gane en aquel sorteo uno de los lotes?

El sorteo de ese año será el 13 en que se amortizan 60 láminas de $50000-60 \cdot 12=50000-720=49280$ vivas, luego será (7)

$$\frac{60}{49280}=\frac{1}{8213} \text{ aproximadamente.}$$

Problema 2.° ¿Cuál será en 1905 la probabilidad de ganar el lote de 50000 pesetas?

No habiendo más lote de este valor que el primero, y quedando en el 15.° sorteo $50000-13 \cdot 12-1522=47698$, la probabilidad será

$$\frac{1}{47698}$$

Problema 3.° ¿Cuál sería esa probabilidad para el poseedor de 100 láminas?

$$\frac{100}{47698}=\frac{1}{48} \text{ aproximadamente.}$$

Problema 4.° Si al llegar el año 1927 no hubieran sido amortizadas esas 100 láminas, ¿qué probabilidad tendría su dueño de ganar por lo menos los seis primeros lotes?

Número de láminas vivas=2673.

Para que 6 de los 100 números de las láminas salgan los primeros, pueden ocurrir

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 2667 \cdot 2666 \ldots\ldots (2667-54+1)$$

combinaciones, puesto que esos seis números pueden coordinarse (2) de 100·99·98·97·96·95 modos diferentes, y cada uno de ellos combinarse con cada una de las 2667·2666.......2614 coordinaciones de los 2667 números restantes, tomados 60—6=54 á 54.

El número total de las que podrán verificarse será

$$2673 \cdot 2672 \cdot 2671 \ldots\ldots (2673-60+1=2614);$$

y como al dividir aquéllas por éstas se pueden suprimir los factores comunes desde 2667 hasta 2614, la probabilidad será

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{2673 \cdot 2672 \cdot 2671 \cdot 2670 \cdot 2669 \cdot 2668},$$

cuyo valor, calculado por logaritmos, es

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\text{Log. } 100=2 \\
+\text{Log. } 99=1'9956352 \\
+\text{Log. } 98=1'9912260 \\
+\text{Log. } 97=1'9867717 \\
+\text{Log. } 96=1'9822712 \\
+\text{Log. } 95=1'9777236
\end{array}\right\} = 11'9336277 \\
\left.\begin{array}{l}
-\text{Log.} 2673=3'4269990 \\
-\text{Log.} 2672=3'4268365 \\
-\text{Log.} 2671=3'4266739 \\
-\text{Log.} 2670=3'4265113 \\
-\text{Log.} 2669=3'4263486 \\
-\text{Log.} 2668=3'4261858
\end{array}\right\} = -20'5595551
\end{array}\right\} \begin{array}{l} =\bar{9}'3740726 \\ =\text{Log.} 0'000000002366 \end{array}$$

que será la probabilidad pedida.

Numerosas son aún las cuestiones que sobre rentas, amortizaciones y empréstitos puede ocurrir resolver, como sería por ejemplo el cálculo del valor correspondiente á todos los términos de las primeras y segundas, cuando en un momento dado se cambiara por otro el tanto convenido; el del conjunto de todas las cantidades destinadas á pagar los intereses de las obligaciones en este mismo caso; el de su nuevo valor; los que corresponderían exactamente á tiempos fraccionarios; los que verdaderamente debían tener todos los elementos que hemos considerado cuando el pago de intereses no coincidiera con los sorteos; las probabilidades de que los títulos del empréstito alcanzasen una edad ó vida determinada y otras muchas análogas que sólo exigen conocimientos de Matemáticas muy elementales, pero creemos haber estudiado las más comunes y fundamentales, con la breve extensión que permite la índole de este trabajo, por lo que vamos á pasar á distinto orden de consideraciones sobre otras importantísimas, dado el actual estado de la sociedad y de los negocios mercantiles.

LIBRO TERCERO.

RENTAS VITALICIAS Y SEGUROS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

I.—Ideas generales.

66. Se da el nombre de RENTA VITALICIA, á *aquella cuyos términos no son exigibles más que durante la vida de una ó más personas.*

Para que esto ocurra, se hace indispensable la no existencia, ó renuncia por lo menos en caso de muerte, del capital, á que en cualquier momento equivaldrá como todas las demás rentas, pues de no ser así, los herederos de su propietario tendrían derecho á seguirla cobrando aun después de su fallecimiento.

No tenemos por que ocuparnos del caso en que no exista el capital, por tratarse unicamente de una pensión ó anualidad vitalicia que no se tiene el derecho de capitalizar, ya que el único problema á que podría dar origen, es el cálculo del tiempo durante el cual se percibiría, que de todas maneras hemos de resolver, como fundamento de aquel en que esta renta provenga de un capital al que se renuncia, con el objeto de que produzca una durante la vida, mayor que la que debería obtenerse conservando su propiedad, y cuyo valor no sólo dependerá del de dicho capital y del tanto de interés que devengue, sino también del tiempo durante el cual pueda ser exigible.

Claro está que este tiempo no podrá precisarse de una manera absoluta y dependerá de mil circunstancias imposibles de prever, pero lo que es incierto totalmente considerando una sola persona sin relación ninguna con las demás, puede llegar á adquirir un grado de relativa certidumbre cuando se considera en abstracto como uno de los elementos componentes de un numeroso grupo más ó menos homogéneo, porque aplicando á todos, como inciertos, los resultados de la observación y la experiencia, los errores por defecto y por exceso que puedan cometerse individualmente, tenderán tanto más á destruirse, cuanto mayor sea el número de observaciones y la semejanza de los individuos.

Del mismo modo, pues, que se aprecian todas las probabilidades medias (10), se comprende que es posible calcular la PROBABILIDAD DE VIDA y MUERTE, ó sea, *la que tiene una persona, ó cierto número de individuos, de vivir ó morir en determinado momento, ó período de tiempo.*

Así por ejemplo; si se ha observado repetidas veces para una misma localidad ó número de individuos que de 10000 de 30 años, mueren 80 antes de cumplir los 31, *la probabilidad de muerte para una persona,* ó TANTO DE MORTALIDAD á dicha edad, podrá apreciarse (7) en $\frac{80}{10000}=0'008$, *dividiendo el número de fallecidos á cierta edad por el de observaciones hechas;* y la de vida en $1-\frac{80}{10000}=\frac{9920}{10000}=0'992$, *dividiendo el de sobrevivientes por el total observado.*

II.—Tablas de mortalidad.

67. Fundándose, por lo tanto, en que *todos los individuos observados tienen en igual período de tiempo la misma probabilidad de vivir,* y en vista de los resultados de las estadísticas, registros y observaciones oficiales y particulares, pueden construirse TABLAS DE MORTALIDAD *que contengan la probabilidad de muerte en cada edad* y TABLAS DE SUPERVIVENCIA que, partiendo de cierto número de nacimientos, *indiquen el número de los que sobreviven á cada edad.*

Es, sin embargo, costumbre, que nosotros seguiremos por estar adoptada universalmente, designar unas y otras con el primer nombre.

Su construcción no es tan fácil como á primera vista puede parecer, porque el principio admitido para ello es falso evidentemente, por no haber ni dos personas cuyas condiciones de vida sean idénticas del todo; cuantas más causas de error intervengan en los datos que sirvan de base, mayor será su inexactitud, y como por desgracia estas causas son numerosísimas, se han ideado varios medios para calcularlas, disminuyendo los errores en lo posible.

Ya quedan indicados en general, los dos fundamentos de que puede partirse: *el de un grupo cualquiera de población y el formado por personas de una misma edad.*

Desde luego se comprende que el primero será el más inexacto por contener las dos mayores causas de error; la heterogeneidad de los individuos, que por su diversa constitución y salud, diferentes ocupaciones, etc., se hallan en tan distintas condiciones de vida, y la de que por causa del movimiento de la población, ni siquiera los individuos, cuyo fallecimiento á diversas edades puede registrarse, son los mismos cuyos nacimientos se anotaron.

Estas Tablas, no obstante, pueden ser útiles para la resolución de diversas cuestiones, como son todas aquellas en que tengan que compararse el total de población con los niños de corta edad recogidos en los asilos, con los que concurren á las escuelas, con los mozos obligados á formar parte del ejército, con el número de electores y con cuantas se rozan con la higiene y salubridad, mortalidad de diversos pueblos, años, meses, etc.

68. Construyéndose unas y otras, por procedimientos esencialmente iguales, vamos á hacer algunas ligerísimas indicaciones sobre los cuatro principales métodos de calcularlas.

1.º *Método de las defunciones.*—Para aplicarlo basta conocer durante algunos años consecutivos, el número de muertes de cada edad y calcular el término medio.

Supongamos que durante cuatro, cinco ó más años se ha determinado este término, encontrando que fallecen:

1280	individuos de	0	años	á	1
256	»	»	1	»	»	2
193	»	»	2	»	»	3
....						
....						
1	»	»	99	»	»	100

Total 3740 fallecimientos anuales por término medio.

Con estos datos puede inducirse, que de 3740 individuos nacidos en la población un siglo antes, mueren el primer año 1280, el segundo 256, el tercero 193, etc., y formar la correspondiente Tabla de mortalidad ó supervivencia, admitiendo que en un siglo,

1.° La ley de mortalidad no ha cambiado.

2.° Que no ha habido emigración ni inmigración.

3.° Que el número de nacimientos anuales ha sido el mismo.

Cada uno de estos supuestos encierra un error, pues ni la ley de mortalidad es constante, variando como varían en general las condiciones de salubridad é higiene, ni la población permanece estacionaria, sin que se compensen los errores, por no ser admisible que los emigrantes é inmigrantes deban fallecer á las mismas edades; ni los nacimientos anuales son los mismos, estando como está probado que en general van aumentando, por su exceso sobre las defunciones.

Este error, que es el más importante, se corrige en parte aumentando á los sobrevivientes de cada edad el correspondiente tanto por 100.

Si, por ejemplo, se tomó como punto de partida el año 1790, en que nacieron 1000 individuos, y en 1840 vieron la luz 1400, el número de sobrevivientes de este año se aumenta en 40 $^0/_0$, suponiendo que desde 1790 hubo ese número de nacimientos, y repitiendo lo mismo para todas las edades.

2.° *Método de los registros.*—Acudiendo al empadronamiento de los vecinos de una localidad, pueden construirse tablas de un modo muy sencillo, *restando el número de vivos de una edad del correspondiente á la anterior.*

Si $V_0, V_1, V_2 \cdots V_{n-1} V_n$ representan los números de vivientes de la edad expresada por el subíndice, en cuyo caso V_0 será el de los nacidos, es evidente que el de fallecimientos de 0 á 1 año, de 1 á 2 ...., de $n-1$ á n, estarán indicados por las diferencias $V_1-V_0,\ V_2-V_1 \cdots V_n-V_{n-1}$.

Este método no supone que la ley de mortalidad sea constante, porque todas las muertes se refieren á un mismo año, ó al término medio de algunos consecutivos, pero sí que no hay emigración, inmigración ni crecimiento en el número de vecinos durante todo el tiempo que la tabla abraza, y otra causa de error considerable: la de que haciéndose el reclutamiento con arreglo á esos padrones, no siempre figura en ellos la verdadera edad.

3.º *Método de los nacimientos.*— Este procedimiento, fundado en los datos que suministran los registros de nacimientos y defunciones, consiste en *anotar el número de nacidos en cualquier transcurso de tiempo y de los fallecidos en los siguientes.*

Si en 1890 nacen 10000 niños y en 1891 mueren 1500, los sobrevivientes de 1 año, serán 8500=10000—1500, y el tanto de mortalidad $\frac{1500}{10000}=0'066$.

Además de los errores mencionados referentes á los nacimientos no inscriptos en los registros, inexactitud en las edades de los fallecidos, emigración, inmigración y crecimiento gradual, este procedimiento los supone repartidos por igual durante todo el transcurso del año, lo que tampoco es cierto, pues al mes de Marzo, por ejemplo, suelen corresponderle 93 de cada 100, y sólo 79 al de Junio, aunque éste no es difícil de corregir, tomando un término medio.

4.º *Método directo.*—El llamado así, es una combinación del de empadronamientos con el de registros de defunciones, siendo evidente que para una misma edad, bastará *dividir el número de fallecidos durante un período de tiempo* por el de los vivos, para tener el tanto de mortalidad.

Si para los 30 años da por ejemplo el padrón 5000 vivientes y el registro 200 muertos durante un año, el tanto será

$$\frac{200}{5000}=0'04.$$

Para disminuir el error de las edades, con frecuencia inexactas, que figuran en los padrones y registros, atendiendo á que unas serán mayores y otras menores que las verdaderas, se hace el cálculo para media decena anterior y posterior, es decir, para todos los de 25 á 35 años, y el número de los empadronamientos dividido por el de los difuntos, será con mucha más aproximación el tanto correspondiente á los 30, que se puede hallar lo mismo para las restantes edades y aun aumentar la aproximación, determinando los tantos medios de la edad calculada y las inmediatas.

Por lo mismo que este procedimiento es el menos defectuoso á causa de no contener los errores que dan en los otros la emigración, inmigración y aumento gradual de población, vamos á señalar los que aun influyen en el resultado, y el modo como lo hacen, pues conociéndolo será más fácil disminuirlos en lo posible.

1.° El padrón hecho en una época fija, puede contener una población mayor ó menor que la verdadera media del año, originando un tanto erróneo en contrario sentido, puesto que el número de vivientes forma el denominador.

2.° Algunos de los vecinos pueden escapar al empadronamiento y otros figurar en él más de una vez, lo que dará un tanto demasiado alto ó demasiado bajo.

3.° Las edades declaradas pueden análogamente exceder ó no llegar á las verdaderas; el error entonces será por defecto ó exceso, ya que el número de habitantes es generalmente mayor cuanto menores son las edades.

4.° Omitidas en el registro algunas defunciones y formando su número el numerador del tanto, éste sería demasiado pequeño.

5.° Finalmente: la inexactitud de edades en el registro, da también lugar á error, pero no siempre en igual sentido; tratándose de un período de la vida en que el número de defunciones aumente con la edad, las inexactas por defecto darán un resultado en el mismo sentido, pero que se convertirá en excesivo si se trata de un período como la niñez, en que la mayor edad produzca menos fallecimientos, y es claro que ocurrirá lo contrario, si la inexactitud es por exceso.

Vemos, de todos modos, que no debiéndose usar Tabla alguna, cuyos datos no tengan por lo menos una aproximación de 0'05 en el tanto de mortalidad, las construídas por estos métodos no siempre podrán darla, mientras que las formadas tomando como base las observaciones que se hagan sobre un numeroso grupo de personas de la misma edad y análogas condiciones, podrán considerarse casi como exactas, pues el error será muchísimo menor.

Para calcular aproximadamente la probabilidad que tendrá una persona de vivir más ó menos años, no basta, en efecto, conocer su edad, puesto que depende también de otras muchas circunstancias que sería preciso investigar, como el estado de su salud, su temperamento, el de sus parientes, el clima que habita ó ha de habitar, su grado de bienestar, la índole de sus ocupaciones, la naturaleza de su carácter, los peligros de toda clase que puedan rodearle, etc.

Esta investigación individual es desde luego imposible en todos sus detalles, pero no en los más importantes que una colectividad puede reunir, si sus miembros presentan cierta homogeneidad; los individuos que forman el ejército, por ejemplo, los que pasan toda su vida en determinados lugares, cárceles, conventos ú otros análogos, y, sobre todo, los unidos por los lazos financieros que han de pagar ó recibir cantidades en relación con su edad ó con la que otro tenga al morir, cuyos justificantes tienen y conservan las administraciones de ciertas compañías y dependencias del Estado, pueden suministrar datos para la construcción de Tablas, no sólo generales, sino aplicables á las diferentes clases sociales que, aunque construídas por los métodos expuestos, se referirán á grupos homogéneos formados por personas de la misma edad, presentando un grado de aproximación mucho mayor.

Ejemplos: las sociedades de socorros mútuos y cajas de ahorro podrán suministrar documentos valiosos para calcular aproximadamente la mortalidad de las clases menos acomodadas; la Junta de clases pasivas, Diputaciones, Ayuntamientos, etc., para la de retirados y huérfanos; las administraciones de las llamadas órdenes militares, para las personas de posición relativamente desahogadas, que podrían dividirse en civiles y militares, por las diversas condiciones y peligros de su existencia; la estadística de todas las carreras oficiales, para la clase media, y así análogamente.

Por último, es evidente que aun estas mismas capas sociales podrían subdividirse según el sexo, los oficios y las profesiones, y que de la reunión del mayor número de datos posible, y, sobre todo, de los que puedan obtenerse de ciertas sociedades mercantiles que se dedican á realizar los mismos negocios de que vamos á ocuparnos, sólo con las personas que ni por su salud, ni por su género de vida, ni por el clima en que habiten, presenten condiciones extraordinarias, considerando las restantes como casos excepcionales, es posible construir Tablas generales bastante aproximadas.

Estos han sido los procedimientos seguidos para la formación de las más usuales y modernas, entre las que pueden considerarse como principales: las dos de Deparcieux, una para la generalidad de las personas y otra para los religiosos y religiosas, basadas en los datos referentes á cerca de 10000 individuos y publicadas en 1746; la de Duvillard, en los de 101542 defunciones, en 1806; la de Beanvisage, en 38951 muertes, en 1864; la publicada por el Ministerio de Comercio de Francia, que parte de 100000 nacimientos, en 1865; la confeccionada por acuerdo de veinte compañías inglesas, con igual punto de partida, pero que sólo contiene los resultados desde los 10 años en adelante, en 1869; y la de Kertanguy, fundada solamente en 24699 observaciones de una compañía francesa, en 1874.

Después de calculadas estas Tablas, por los métodos expuestos para las que se fundan en grupos de población, y especialmente el directo con las ligeras modificaciones indispensables al carácter de los datos, han sido corregidas por sus mismos autores ó por otras personas, valiéndose, como indicamos, de los resultados medios de las edades contiguas, y se les ha dado el punto de partida más conveniente para la facilidad de los cálculos, ó el que ha resultado de su prolongación, si como la de Deparcieux, por ejemplo, empezaba en los 3 años y se quería tener desde el instante del nacimiento, disponiéndolas en columnas, cuya cabeza exprese claramente su contenido.

Después de estas correcciones y de calcular algunos otros números que facilitan determinados cálculos, se comprende sean distintas las que hoy se usan aún con el mismo nombre, tanto por su punto de partida, como por contener el número de sobrevivientes de cada edad, el de fallecimientos, el tanto de mortalidad, etc.

Siendo, pues, imposible darlas á conocer todas en sus detalles, insertaremos al final las que se emplean más comunmente en el día, que son:

La de supervivencia de Deparcienx que parte de 1286 nacimientos, y llevará el número X; la de Duvillard, de 1000000, el XI, y la de las veinte compañías inglesas, el XII.

Respecto á las calculadas con arreglo á los censos de población, son más numerosas todavía las publicadas desde que Halley dió á luz la suya en 1690, pero como son menos usuales y exactas que las anteriores, nos limitaremos á presentar un ejemplo relativo á España, que haga ver cuáles son los datos necesarios para llegar al resultado con facilidad y á insertar con los números XIII y XIV á continuación de las citadas, de que casi siempre se hace uso en Europa, las calculadas para la República Argentina y Estados Unidos, que podrán servir de base aproximada á cuantos problemas se refieran á las naciones americanas del Sur y Norte.

III.—Aplicaciones inmediatas.

69. Prescindiendo de las que en seguida estudiaremos particularmente por su importancia, las Tablas de supervivencia y mortalidad pueden aplicarse á la resolución de un gran número de cuestiones generales que se desprenden de su propia naturaleza, tales como *averiguar el número probable de individuos nacidos en determinado período de tiempo que llegarán á alcanzar cierta edad; la época en que su número quedará reducido á otro dado; el de personas de cierta edad que llegarán á alcanzar otra; el de la edad á que aquellos que tengan la misma quedarán reducidos á una parte cualquiera*, y otros semejantes, para resolver los cuales no es posible dar reglas por su misma sencillez, ya que el valor de la incógnita sólo depende de una proporción, admitiendo, como se admite en la práctica, que *los números de nacidos, sobrevivientes y muertos que figuran en las Tablas y otros cualesquiera, serán proporcionales siendo iguales las edades*, y despreciando las fracciones.

PROBLEMA 1.° Suponiendo que en España hayan nacido durante un año 482540 niños, y que de cada 10000 sobrevivan á los 60 años 1788 aproximadamente, ¿cuántos de aquéllos será probable lleguen á alcanzar dicha edad?

Si de cada 10000 llegan 1788, de 482540 llegarán (T. II, 64)

$$x = \frac{482540 \cdot 1788}{10000} = 86277$$

PROBLEMA 2.° Si hubieran nacido en Francia, ¿cuál sería la edad de los sobrevivientes cuando su número se hubiera reducido á 200000?

Si queremos valernos de la Tabla X, que, siendo la de Deparcieux, parte de 1286 nacimientos, hallaremos los sobrevivientes que corresponden á este número,

$$x = \frac{1286 \cdot 200000}{482540} = 533$$

que en la columna correspondiente está comprendido entre los 538 y 526 de 54 y 55 años; luego la edad pedida será 54.

Problema 3.° De entre 30000 jóvenes ingleses de 20 años, ¿cuántos llegarán á cumplir 55?

Consultando la Tabla XII de las veinte compañías inglesas, veremos que los supervivientes de 20 y 55 años son 96223 y 66513 de cada 100000, punto de partida que es indiferente, puesto que se supone constante la relación entre aquéllos y los nacidos para iguales edades; luego si de 96223 sobreviven 66513, de 30000 sobrevivirán probablemente

$$x = \frac{30000 \cdot 66513}{96223} = 20737$$

Problema 4.° ¿Á qué edad quedará reducido á sus $\frac{3}{5}$ partes el número de sobrevivientes nacidos el mismo año en New-York?

Según la Tabla XIV, los $\frac{3}{5}$ de su punto de partida, que es 100000, ó sea 60000, está comprendido entre 60779 y 59385, que corresponden á 58 y 59 años, edades entre las cuales se verificará probablemente lo supuesto.

Problema 5.° Averiguar, comparando los sobrevivientes de 40 años, qué Tabla da una mortalidad más rápida, si la de Deparcieux ó la de Duvillard.

El primero parte de 1286 nacimientos y el segundo de 1000000, resultando á los 40 años 657 y 369404 sobrevivientes respectivamente, y como en la segunda corresponderían á 1286,

$$x = \frac{1286.369404}{1000000} = 475 < 657$$

resulta que la de Duvillard da una mortalidad mucho más rápida.

Escolio. Habiendo mejorado notablemente las condiciones favorables á la vida de un siglo á esta parte, sobre todo en las grandes poblaciones, debe considerarse en vista del anterior resultado más aproximada la de Deparcieux á las circunstancias actuales, por lo cual la usaremos en los problemas con preferencia á la de Duvillard.

Aparte de estas cuestiones tan sencillas, tienen que aplicarse las Tablas con gran frecuencia á la determinación de la

Vida probable, ó *número de años que una persona de cierta edad puede vivir con arreglo á las leyes de la probabilidad.*

Para calcularla, es evidente bastará *buscar* en la Tabla *la mitad* *del número de sobrevivientes de esa edad, ver á cuál corresponde y restar la conocida*, ya que á esa mitad de vivos corresponderá siempre otra mitad de muertos.

PROBLEMA 6.° ¿Cuál es la vida probable de una persona de 33 años en Buenos Aires?

La Tabla americana (XIII) da para 33 años 530, cuya mitad es 265, comprendido entre 275 y 262, pero mucho más cerca del segundo que corresponde á 75 años, luego los que probablemente le quedarán de vida, serán 75—33=42.

Siendo la mortalidad bastante uniforme pasados los primeros años de la niñez y antes de una edad demasiado avanzada, la experiencia ha hecho observar que representando x la edad é y la vida probable, se obtienen para Europa resultados bastante aproximados entre los 6 y 64 años por medio de la relación

$$y=59-\frac{3}{4}x$$

que enlazando entre sí ambas cantidades, puede facilitar la resolución de un gran número de cuestiones.

Si la aplicásemos al problema anterior, daría por resultado $y=32$ que se diferencia en 10 años del obtenido, pero es próximamente el que resultaría haciendo el cálculo directo por medio de cualquier Tabla europea, á causa de que en nuestro continente, sea por su clima, sea por las malas condiciones higiénicas de la mayoría de las poblaciones, es mucho más rápida la mortalidad que en la República Argentina y otros puntos de América.

PROBLEMA 7.° ¿Cuál es generalmente la mitad de la vida probable en Europa?

Debiendo ser $x=y$

$$x=59-\frac{3}{4}x; \quad \frac{7}{4}x=59; \quad x=33\frac{5}{7}$$

Para que sirvan de norma en lo sucesivo, vamos ahora á resolver las cuestiones más frecuentes, relacionadas con la vida probable, de un modo general, para lo cual, según hemos hecho ya y haremos de aquí en adelante, representaremos siempre por la inicial V el número de vivos, de una edad que indicaremos por medio de un subíndice.

1.° *Probabilidad de que una persona viva cierto número de años.*

Siendo n la edad de la persona, y t el tiempo referido á igual unidad, cuya probabilidad se busca, tendremos según se demostró al estudiar éstas (7):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Número de casos favorables} = V_{n+t}\\ \text{Número total} = V_n\end{array}\right\} \text{Probabilidad} = \frac{V_{n+t}}{V_n}$$

2.° *Probabilidad de muerte en el mismo periodo.*
Siendo esta contraria á la de vida, se tendrá:

$$\text{Probabilidad} = 1 - \frac{V_{n+t}}{V_n} = \frac{V_n - V_{n+t}}{V_n}$$

3.° *Probabilidad de que una persona de edad conocida, viva durante un año determinado*

Esta equivale á la de que un individuo de la edad n viva t años más, ó sea durante el $t+1$, que ya sabemos es $\frac{V_{n+t+1}}{V_n}$, pero que en realidad es una probabilidad compuesta de la de llegar á la edad $n+t$ y vivir después un año, y por lo tanto calculada matemáticamente (8):

$$\text{Probabilidad} = \frac{V_{n+t}}{V_n} \cdot \frac{V_{n+t+1}}{V_{n+t}} = \frac{V_{n+t+1}}{V_n}$$

4.° *Probabilidad de morir durante el mismo.*

Esta no es contraria de la anterior, como al pronto puede parecer y vemos consignado en un libro que á la vista tenemos, sino solamente incompatible con ella, pues, lo contrario de *vivir* durante un año, es *no vivir*, para lo cual basta haber muerto en *cualquiera* de los anteriores, y *no* precisamente en el supuesto.

La pedida es compuesta de estas dos: llegar á la edad $n+t$ y morir en el año siguiente, y la multiplicación de ambas da:

$$\text{Probabilidad} = \frac{V_{n+t}}{V_n} \cdot \frac{V_{n+t} - V_{n+t+1}}{V_{n+t}} = \frac{V_{n+t} - V_{n+t+1}}{V_n}$$

que también puede hallarse como simple, por este razonamiento:

Número de casos favorables $= V_{n+t} - V_{n+t+1}$

Número total de casos $= V_n$

$$\text{Probabilidad} = \frac{V_{n+t} - V_{n+t+1}}{V_n}$$

5.° *Probabilidad de que dos personas de diferentes edades, vivan ó hayan muerto al transcurrir un cierto número de años.*

Sean n y m las edades y t los años que deban transcurrir.

$$\text{Probabilidad de vida para la primera} = \frac{V_{n+t}}{V_n}$$

$$\text{» » » segunda} = \frac{V_{m+t}}{V_m}$$

$$\text{» de muerte » primera} = \frac{V_n - V_{n+t}}{V_n}$$

$$\text{» » » segunda} = \frac{V_m - V_{m+t}}{V_m}$$

Probabilidad de que ambas vivan: $\frac{V_{n+t}}{V_n} \cdot \frac{V_{m+t}}{V_m} = \frac{V_{n+t}\, V_{m+t}}{V_n\, V_m}$

Probabilidad de que ambas hayan muerto:

$$\frac{V_n - V_{n+t}}{V_n} \cdot \frac{V_m - V_{m+t}}{V_m} = \frac{(V_n - V_{n+t})(V_m - V_{m+t})}{V_n\, V_m}$$

Probabilidad de que la primera viva y la segunda haya muerto, ó viceversa:

$$\frac{V_{n+t}}{V_n} \cdot \frac{V_m - V_{m+t}}{V_m} = \frac{V_{n+t}(V_m - V_{m+t})}{V_n\, V_m}$$

ó bien,

$$\frac{V_n - V_{n+t}}{V_n} \cdot \frac{V_{m+t}}{V_m} = \frac{(V_n - V_{n+t})\, V_{m+t}}{V_n\, V_m}$$

PROBLEMA 8.° En un matrimonio en que el marido tiene 40 años y la mujer 30, ¿qué probabilidad habrá de que al transcurrir 10 años se verifique cada una de esas hipótesis?

Según la Tabla de Deparcieux (x), se tendrá:

Probabilidad de vida y muerte para el hombre

$$\frac{581}{657}=0'884 \text{ y } 1-0'884=0'116$$

Probabilidad de vida y muerte para la mujer

$$\frac{657}{734}=0'895 \text{ y } 1-0'895=0'105$$

De que ambos vivan $=0'884 \cdot 0'895=0'791180$

De que ambos hayan muerto $=0'116 \cdot 0'105=0'012180$

De que viva el primero y haya muerto la segunda

$$0'884 \cdot 0'105=0'092820$$

De que viva la segunda y haya muerto el primero

$$0'116 \cdot 0'895=0'103820$$

Comprobación.

Probabilidad de que ocurra una de estas cuatro cosas:

$$0'791180+0'012180+0'092820+0'103820=1,$$

expresión de la certeza (6).

70. También se llaman,

CANTIDAD DE EXISTENCIA, al *conjunto de los años que deben vivir todos los individuos de un grupo*, y

VIDA MEDIA, á *la que corresponde á cada una de las personas.*

Partiendo de una edad cualquiera n, y en el supuesto de que la $n+4$, por ejemplo, sea el límite de una Tabla de supervivencia en la que se suponga han muerto todos los que sirvieron de punto de partida para formarla, durante el primer año que sigue á la n habrán dejado de existir $V_n - V_{n+1}$, á cada uno de los cuales corresponderá por término medio $\frac{1}{2}$ año de vida, lo que da para ese año una cantidad de existencia igual á $\frac{1}{2}\left(V_n - V_{n+1}\right)$; para el segundo, en que mueren $V_{n+1} - V_{n+2}$ que habrán vivido $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ resultarán $\frac{3}{2}\left(V_{n+1} - V_{n+2}\right)$; para el tercero $V_{n+2} - V_{n+3}$

fallecidos, á $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ de vida, $\frac{5}{2}(V_{n+2}-V_{n+3})$; y para el cuarto en que debe suponerse como medio, habrán vivido $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ los V_{n+3} supervivientes, $\frac{7}{2}V_{n+3}$, lo que da un total de existencia,

$$\frac{1}{2}(V_n-V_{n+1})+\frac{3}{2}(V_{n+1}-V_{n+2})+\frac{5}{2}(V_{n+2}-V_{n+3})+\frac{7}{2}V_{n+3}$$

$$=\frac{1}{2}V_n-\frac{1}{2}V_{n+1}+\frac{3}{2}V_{n+1}-\frac{3}{2}V_{n+2}+\frac{5}{2}V_{n+2}-\frac{5}{2}V_{n+3}+\frac{7}{2}V_{n+3}$$

$$=\frac{1}{2}V_n+V_{n+1}+V_{n+2}+V_{n+3},$$

luego,

La cantidad probable de existencia de los sobrevivientes de una edad de cualquier Tabla, puede encontrarse, sumando la mitad del número correspondiente á la misma, con los de todas las edades sucesivas que contenga.

Respecto á la vida media, según la regla en virtud de la cual se calculan todas las cantidades de esta clase (T. II, 68), se hallará evidentemente

Dividiendo la cantidad de existencia que corresponda al grupo, por el número de individuos que lo compongan.

Claro es, que siguiendo las reglas anteriores y valiéndose de cualquiera de las Tablas, se pueden construir y han construído otras *de vida probable y media* que simplifican notablemente los cálculos y operaciones, pero que no insertamos, porque siendo costumbre usar casi siempre las de supervivencia, que son las más conocidas y vulgarizadas, determinaremos por ahora las fórmulas necesarias para resolver cualquier problema en función de los números que contengan, con objeto de que basten para la resolución de todos.

PROBLEMA 1.º ¿Qué cantidad de existencia corresponde según Deparcieux (Tabla X), á los 463 supervivientes de 60 años?

Mitad de los supervivientes de 60 años......................	$\frac{1}{2}\cdot 463=231\frac{1}{2}$
Suma de todos los números que siguen á 463................	6366
Cantidad de existencia.....	$6597\frac{1}{2}$ años.

Problema 2.° ¿Cuál será, según la propia Tabla, la vida media de una persona de 60 años?

$$\text{Vida media} = \frac{6597'5}{463} = 14'25 \text{ años} = 14 \text{ años y } 3 \text{ meses.}$$

Las vidas probable y media, que muchos confunden, vemos que son dos cosas distintas, y así como un gran número de experiencias han conducido á una fórmula que expresa la primera con bastante aproximación, también han hecho observar que si se representa la segunda por y y por x la edad, como en aquélla, la expresión

$$y = 53'30 - 0'65x$$

no es menos aproximada y puede facilitar la resolución de varios problemas.

Problema 3.° ¿Á qué edad excede en 5 años la vida probable á la media?

Según las dos fórmulas empíricas, dadas por la observación, deberá verificarse:

$$59 - 0'75x = 53'30 - 0'65x + 5$$

y por lo tanto,

$$59 - 53'30 - 5 = 0'75x - 0'65x;\ 0'70 = 0'10x;\ x = \frac{0'70}{0'10} = 7 \text{ años.}$$

Como ejemplo de las muchas cuestiones, que aunque ajenas en cierto modo á los cálculos verdaderamente mercantiles, y para no ocuparnos ya más que de éstos, se relacionan con las anteriores y tienen por fundamento las Tablas de mortalidad, resolveremos por último en general, y lo aplicaremos á un caso particular, el siguiente

Problema 4.° Determinar el número de habitantes de una ciudad en la que durante un año han nacido 10000 niños.

Representando en general por N el número de nacimientos, el término medio de los vivientes que no hayan cumplido 1 año será $\frac{1}{2}(N+V_1)$, es decir, la mitad de los nacidos y de los que lleguen á cumplirlo; el de los que no hayan cumplido 2, $\frac{1}{2}(V_1+V_2)$, y así sucesivamente hasta el límite de la Tabla en que se suponga han muerto todos, luego, relativamente al principio de la misma, la población será el resultado de sumar

$$\frac{1}{2}(N+V_1)+\frac{1}{2}(V_1+V_2)+\frac{1}{2}(V_2+V_3)+\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{2}N+V_1+V_2+V_3+$$

que aplicada á la Tabla de Deparcieux daría, tomando la mitad de los 1286 nacimientos, y agregándole la suma de todos los restantes números de sobrevivientes,

$$643+50181=50824$$

y si á 1286 nacimientos corresponden 50824, á 10000 de los primeros, corresponderá un

$$\text{Número de habitantes}=\frac{508240000}{1286}=395210.$$

CAPÍTULO II.

RENTAS VITALICIAS.

I.—Rentas inmediatas.

71. La renta vitalicia que en virtud del tanto de interés convenido deba percibir una persona, tendrá que ser equivalente á la producida por el capital que entregue, con arreglo al mismo tanto; *calcular*, pues, *el valor de dicho capital y del término de aquélla* serán los dos objetos que debemos proponernos.

Para ello empezaremos por observar, que si una cantidad c, entregada en un momento dado, equivale á otra a, que se deba cobrar á los n años, en virtud del interés devengado por aquélla, y su propietario renuncia á ella en caso de muerte, si sólo tiene probabilidad de vivir $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ $\cdots\cdots$ de n, es natural admitir que para cobrar a en caso de vida, sólo tenga que entregar $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{3}c$, $\frac{1}{4}c\cdots\cdots$, es decir, que

El valor de un capital disminuye en razón directa de la probabilidad que haya de cobrarlo.

Supongamos, por consiguiente, que a sea, en efecto, el valor de las anualidades que deban cobrarse, en cuyo caso el capital c tendrá que ser equivalente á la suma de los que en el momento de celebrar el contrato tengan todas aquéllas.

Ahora bien: por la fórmula del capital efectivo del interés compuesto (15), sabemos que el de las que deban cobrarse al transcurrir 1, 2, 3, ... k años, suponiendo sea k el número de los que pueden vivir aún segun la Tabla de supervivencia que se use, serían

$$\frac{a}{1+r}, \frac{a}{(1+r)^2}, \frac{a}{(1+r)^3} \cdots\cdots \frac{a}{(1+r)^k},$$

si se tuviera seguridad de percibirlas, pero como las probabilidades de vida de una persona de n años, al fin de los mismos, son respectivamente (69, 1.º)

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}, \frac{V_{n+2}}{V_n}, \frac{V_{n+3}}{V_n} \cdots\cdots \frac{V_{n+k}}{V_n}$$

los verdaderos valores de cada una estarán dados por los respectivos productos de estas fracciones por las primeras, y, por lo tanto,

$$c = \frac{a}{1+r} \cdot \frac{V_{n+1}}{V_n} + \frac{a}{(1+r)^2} \cdot \frac{V_{n+2}}{V_n} + \frac{a}{(1+r)^3} \cdot \frac{V_{n+3}}{V_n} + \cdots\cdots + \frac{a}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{n+k}}{V_n}$$

ó sacando a factor común de los numeradores y V_n de los denominadores,

$$c = \frac{a}{V_n}\left(\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}\right)$$

y por consiguiente:

$$a = c\, V_n\left(\frac{V_{n+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots + \frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}\right)$$

Problema. Suponiendo que una sociedad abone $4\frac{1}{2}\,{}^0/_0$ de interés, ¿qué cantidad debería entregarse á los 90 años para constituirse una renta vitalicia de 1200 pesetas anuales?

Haciendo el cálculo con arreglo á la Tabla de Deparcieux (x),

$$n=90;\ V_{90}=11;\ V_{91}=7;\ V_{92}=4;\ V_{93}=2;\ V_{94}=1;\ V_{95}=0;\ r=0'045$$

$$S_{90}=\frac{7}{1'045}+\frac{4}{1'045^2}+\frac{2}{1'045^3}+\frac{1}{1'045^4}$$

$$=6'69856+3'66292+1'75259+0'83856=12'95263$$

$$c=\frac{1200}{11}\cdot 12'95263=1413'01\ pts.$$

El cálculo, según se ve, es bastante pesado, aun cuando se haga por logaritmos, cuyo detalle nos ha parecido ya innecesario, por lo que en la práctica se usan otras expresiones, atendiendo á que la suma comprendida dentro del paréntesis puede calcularse previamente para las diferentes edades y representarla para abreviar por S_n, en cuyo caso

$$c=\frac{a}{V_n}\cdot S_n=a\cdot\frac{S_n}{V_n}=aA_n,\ \text{de donde},\ a=\frac{c}{A_n}$$

si llamamos, como es costumbre, A_n al cociente de dividir esa suma por los sobrevivientes de la edad n, el cual puede igualmente calcularse de antemano, formando Tablas con sus valores, que en la práctica servirán de multiplicadores fijos del término a de la renta que se quiera cobrar, ó de divisores del capital c, si la incógnita fuese dicho término.

72. Para que esas expresiones tengan aplicación se necesita, por consiguiente, calcular ante todo S_n para de su valor deducir el de A_n, lo que es sencillo, recordando que hemos hecho

$$S_n=\frac{V_{n+1}}{1+r}+\frac{V_{n+2}}{(1+r)^2}+\frac{V_{n+3}}{(1+r)^3}+\cdots\cdots+\frac{V_{n+k}}{(1+r)^k}$$

y por consiguiente, que será:

$$S_{n-1}=\frac{V_n}{1+r}+\frac{V_{n+1}}{(1+r)^2}+\frac{V_{n+2}}{(1+r)^3}+\cdots\cdots+\frac{V_{n+k}}{(1+r)^{k+1}}$$

de donde dividiendo ambos miembros de la primera por $1+r$,

$$\frac{S_n}{1+r}=\frac{V_{n+1}}{(1+r)^2}+\frac{V_{n+2}}{(1+r)^3}+\frac{V_{n+3}}{(1+r)^4}+\cdots\cdots+\frac{V_{n+k}}{(1+r)^{k+1}}$$

y restando esta igualdad de la anterior,

$$S_{n-1}-\frac{S_n}{1+r}=\frac{V_n}{1+r},\text{ ó bien, } S_{n-1}=\frac{V_n}{1+r}+\frac{S_n}{1+r}=\frac{S_n+V_n}{1+r}$$

es decir, que conociendo el valor de S_n para una cierta edad, se tendrá el que corresponde á la inmediatamente inferior *agregando á la suma conocida los sobrevivientes de la edad á que se refiera, y dividiendo por el tanto por* 1 *aumentado en este número.*

Ahora bien; para $n=100$, ó cualquier otro límite de edad que suponga la Tabla de supervivencia, $V_n=0$, lo mismo que V_{n+1}, V_{n+2}........ y como 0 dividido por las diferentes potencias de $1+r$, dará 0 también, $S_n=0$ y $S_{n-1}=0$, pero

$$S_{n-2}=\frac{S_{n-1}+V_{n-2}}{1+r}=\frac{V_{n-2}}{1+r}$$

tendría ya un valor determinado, que después de obtenido podrá sustituirse en

$$S_{n-3}=\frac{S_{n-2}+V_{n-2}}{1+r}$$

que después de efectuar las operaciones indicadas serviría para hallar S_{n-4}, y así sucesivamente hasta llegar á $S_{n-n}=S_0$.

Creemos inútil insertar las Tablas que con estos valores se han formado, puesto que dividiéndolos por los supervivientes respectivos se obtienen los de A_n, que, según la fórmula deducida, será el *capital necesario para constituir á cierta edad una renta vitalicia de* 1 *unidad monetaria.*

Las que con ellos se forman son análogas á todas las de multiplicadores fijos, conteniendo las edades en columna, á cuya derecha y en otra se encuentran dichos números, como puede verse en la XV.

En esta Tabla incluímos los correspondientes á la de mortalidad de Duvillard y tanto 4 %, que es el más usual, así como los calculados con arreglo á la de Deparcieux y los tantos 4 y $4\frac{1}{2}$ %, ya que algunas Compañías ofrecen este último, no usando jamás la primera en este caso, sino más bien con frecuencia, para compensar el exceso, otra que da una mortalidad más lenta aún que la de Deparcieux y lleva el nombre de *Hubbard*, la cual contiene los multiplicadores correspondientes á las edades de 21 á 90 años, é insertaremos también con el número XVI.

PROBLEMA 1.° Una persona de 47 años que dispone de 35000 pesetas, encarga á un agente le constituya una renta vitalicia al $4\frac{1}{2}$ %, quedándose por su trabajo y gastos 5 % del capital efectivo que en equivalencia de la misma entregue. ¿Qué anualidad deberá cobrar, y cuánto importarán los gastos?

El efectivo de que podrá disponerse será, según sabemos,

$$c=35000\cdot\frac{100}{105}=33333'33 \text{ y como } A_n=12'672$$

si se hace el cálculo con arreglo á la Tabla de Deparcieux (XV), y al tanto dado, resultará

$$a=\frac{33333'33}{12'672}=2630'47\ pts.$$

Los gastos importarían $5\cdot333'3333=1666'67$ pesetas que, sumadas con 33333'33, dan efectivamente las 35000 supuestas.

Por medio de esas Tablas y análogamente á lo que sucede con sus semejantes, puede también calcularse la edad á que con un capital determinado se podrá constituir una renta vitalicia dada y otros problemas parecidos, *hallando directamente* $\frac{c}{a}=A_n$, *buscando este cociente en la Tabla y viendo la edad á que* exacta ó aproximadamente *corresponde.*

PROBLEMA 2.° ¿A qué edad podría doblarse la renta que al $4\frac{1}{2}$ de interés produce un capital, destinándolo á constituir una vitalicia al mismo tanto por 100?

Para que la renta se duplique será preciso que el capital c en vez del $4\frac{1}{2}$ % produzca en realidad el $2\cdot4\frac{1}{2}=9$ %, ó sea una anualidad, $a=\frac{9c}{100}=0'09c$, por lo cual deberá verificarse

$$c=0'09c\cdot A_n;\ A_n=\frac{c}{0'09c}=\frac{1}{0'09}=11'111\cdots\cdots$$

valor que en la Tabla calculada con arreglo á la de Deparcieux y á dicho tanto (XV), hallaremos comprendido entre 11'195 y 10'938, que corresponden á 53 y 54 años, diferenciándose del primero en 0'084, y del segundo en 0'173, que es poco más del doble, luego la edad pedida serán los 53 años y 4 meses aproximadamente.

Intencionadamente hemos incluído en el enunciado de estos problemas una condición que obligue á realizar algún análisis preliminar, antes de aplicar las fórmulas, para hacer ver que como siempre pueden dichas condiciones ser sumamente variadas y existir multitud de *cuestiones análogas*, que pueden resolverse *por su medio, combinándolas con los procedimientos necesarios* ó convenientes, *para encontrar* antes ó después *los valores de las verdaderas incógnitas.*

Los dos siguientes en que entran el capital y la anualidad, pueden, en unión del último, servir de ejemplos para estos casos.

PROBLEMA 3.º Una persona que posee títulos de la deuda española 4 °/₀ desea constituirse á los 59 años una renta vitalicia de 2400 pesetas. Suponiendo que el interés se calcule á $4\frac{1}{2}$ °/₀, que el curso del papel sea 75'40 y que además del corretaje, 1 °/₀₀, que en la venta de éste debe abonar, tenga que pagar 5 °/₀ del capital necesario para dicha renta, en concepto de gastos de comisión, sellos, etc. ¿Qué cantidad de papel deberá vender?

Haciendo uso de la misma Tabla que en el problema anterior, tendremos desde luego a=2400; A_n=9'631, y por consiguiente: c=2400·9'631=23114'40, cantidad que aumentada en su 5 °/₀ se convertirá en

$$23114'40 \cdot \frac{105}{100} = 24270'12$$

El curso del papel 75'40, disminuído en el corretaje 0'0754, equivaldrá para el vendedor á 75'40—0'0754=74'9246, luego tendrá que vender (T. II, 199)

$$\frac{2427012}{74'9246} = 32392'72 \text{ pts.}$$

ó más bien 32400 pesetas, debiendo quedarle en metálico 7'28 puesto que los títulos más pequeños son los de la serie F, de 100 pesetas nominales.

PROBLEMA 4.° Un empleado cuyo sueldo va aumentando con la edad, impone anualmente al $4\frac{1}{2}$ °/₀ de interés: 200 pesetas desde los 25 á los 32 años; 300 hasta los 39; 450 hasta los 47, y 640 hasta los 60, en cuya época retira su capital para constituirse una renta vitalicia, ¿de qué valor será ésta, calculándola por la tabla de Hubbard, y teniendo que pagar 5 °/₀ de gastos?

Á los 60 años podrá disponer de un capital formado por cuatro series de imposiciones: la de 200 pesetas durante 35 años; la de las 100 del primer aumento durante 28; la de 150 durante 21, y la de 190 durante 13 (49). $r=0'045$.

$$C = \frac{200(1'045^{35}-1)}{0'045} = 16299'33 \text{ pts.}$$

$$C' = \frac{100(1'045^{28}-1)}{0'045} = 5399'34 \text{ »}$$

$$C'' = \frac{150(1'045^{21}-1)}{0'045} = 5067'47 \text{ »}$$

$$C''' = \frac{190(1'045^{13}-1)}{0'045} = 3260'38 \text{ »}$$

$$30026'52 \text{ pts.}$$

$$c=30026'52 \cdot \frac{100}{105} = 28596'68; \quad n=60; \quad A_n = 9'393$$

$$a = \frac{28596'68}{9'393} = 3044'43 \text{ pts.}$$

Las sociedades que se dedican á esta clase de negocios establecen por las fórmulas deducidas, haciendo generalmente $a=100$ y $c=1000$, y con arreglo al tanto de interés y Tabla de supervivencias acordados, las ESPECIALES ó TARIFAS de la compañía, en que constan el *capital que á cada edad debe entregarse para constituir una renta de* 100 *unidades monetarias y la renta que se percibirá por cada* 1000 *entregadas*, que suelen calcularse para ambos sexos atendiendo á la diferencia de su mortalidad.

73. Algunas de ellas contienen en el segundo caso, no sólo la renta anual, sino también la semestral y trimestral, para cuando convenga percibirla en esta forma, y aunque ya sabemos determinar la equivalente, si se varía la unidad de tiempo con la

exactitud posible, como en la práctica suele calcularse con más facilidad por aproximación, vamos á exponer el método que para hallarla se sigue generalmente.

Ya hemos dicho que el valor de A_n es el que ha de entregarse para cobrar la renta anual de 1 unidad monetaria al tanto convenido, puesto que de $a=1$ resulta $c=A_n$.

Si la renta ha de cobrarse semestralmente, la que corresponda al fin del primer semestre de cada año se considera equivalente, con poco error, al término medio que haya, entre el que le correspondería si tuviera que cobrarse una renta de $\frac{1}{2}$ unidad al principio y al fin de cada año; la segunda equivaldría á $c=\frac{1}{2}A_n$ y para obtener la primera se supone anticipada la $\frac{1}{2}$ unidad que no devengaría intereses durante ese año, por lo que en este supuesto, $c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}A_n$, lo que da para valor del término medio

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{2}A_n}{2}=\frac{A_n+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{4}$$

que agregado al $\frac{1}{2}A_n$ de la renta cobrable al terminar el segundo semestre, lo convierte en

$$\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}A_n=A_n+\frac{1}{4}=A_n+0'25$$

En las mismas hipótesis, pero cobrándose por trimestres, el valor de A_n correspondiente al primero sería medio entre el $\frac{1}{2}\left(A_n+\frac{1}{4}\right)$ de fin del semestre, y el $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(A_n+\frac{1}{4}\right)$ del principio, equivaliendo por tanto á

$$\frac{\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{8}}{2}=\frac{A_n+\frac{4}{8}}{2}=\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{4}$$

luego sumando con el primero, resultaría para valor total

$$\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{8}=A_n+\frac{3}{8}=A_n+0'375$$

con lo cual pueden utilizarse las Tablas de multiplicadores fijos para rentas anuales, aun cuando deban ser semestrales ó trimestrales, aumentándoles respectivamente 0'25 y 0'375.

De una manera análoga se procedería si se tuviera que cobrar por meses, semanas, etc, y aun si se quisiera calcular la parte correspondiente á los días que mediaran entre el último cobro y el fallecimiento, que se supone proporcional al tiempo transcurrido.

PROBLEMA. Calcular la renta vitalicia trimestral que al 4 % y á los 57 años, podría obtenerse mediante la entrega de 10000 pesetas.

Según la Tabla de Deparcieux, correspondiente á ese tanto (XV),

$$\mathrm{A}_n = 10'5972 : \mathrm{A}_n + 0'375 = 10'9722; \quad a = \frac{10000}{10'9722} = 911'40$$

Cada trimestre se cobrarían 911'40:4 = 927'85 pesetas.

II.—Rentas diferidas.

74. Las vitalicias, como todas las rentas, pueden ser DIFERIDAS, *cuando no se deben empezar á cobrar hasta una edad determinada,* suponiendo que se llegue á ella.

Si el término a de la renta ha de empezar á cobrarse á la edad n y hasta entonces han de transcurrir t años, por ejemplo, aquella á que se entregue el capital será $n-t$ y, por lo tanto, siguiendo el mismo método que expusimos en las inmediatas (71), pueden hallarse los valores de las distintas anualidades, en relación á los tiempos que deban transcurrir para cobrarlas y de las diferentes probabilidades de alcanzar la necesaria edad y sumándolos todos, obtener análogamente el del capital preciso para constituirla.

Esta es la marcha, algo larga y pesada, que para deducir las fórmulas referentes á este caso, siguen la mayoría de los pocos autores que de estos asuntos se han ocupado, pero á nosotros nos parece que puede llegarse á ellas de otro modo sumamente breve y sencillo.

En efecto, al empezar la renta á ser inmediata, se ha demostrado ya que el capital necesario para originarla, es $c = a\mathrm{A}_n$ luego si hubiera seguridad de vida, su valor t años antes, sería, atendiendo al interés convenido (15),

$$c=\frac{a\mathrm{A}_n}{(1+r)^t}$$

y como la probabilidad de que alcance los n años una persona de $n-t$, es $\frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-t}}$ (69, 1.°) el que verdaderamente corresponderá á c, según lo admitido en estos cálculos (71), será

$$c=\frac{a\mathrm{A}_n}{(1+r)^t}\cdot\frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-t}}=\frac{a}{(1+r)^t}\cdot\frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-t}}\cdot\mathrm{A}_n$$

de donde se deduce inmediatamente,

$$a=c\cdot\frac{(1+r)^t}{\mathrm{A}_n}\cdot\frac{\mathrm{V}_{n-t}}{\mathrm{V}_n}$$

fórmulas cuyo cálculo debe hacerse casi siempre por logaritmos, recordando que

$$\mathrm{Log.}c=\mathrm{Log.}a+\mathrm{Log.V}_n+\mathrm{Log.A}_n-t\mathrm{Log.}\,(1+r)-\mathrm{Log.V}_{n-t}$$

$$\mathrm{Log.}a=\mathrm{Log.}c+t\mathrm{Log.}(1+r)+\mathrm{Log.V}_{n-t}-\mathrm{Log.A}_n-\mathrm{Log.V}_n$$

Escolio. Si no se tuvieran Tablas de multiplicadores fijos, deberían sustituirse en lugar de A_n su igual $\frac{\mathrm{S}_n}{\mathrm{V}_n}$, y en vez de S_n la suma que representa (71), lo que permitiría hacer el cálculo directo, semejante al del problema del párrafo citado.

Problema 1.° ¿Qué capital será necesario entregar á los 45 años para constituir desde los 60 en adelante una renta vitalicia de 1800 pesetas, suponiendo el interés $4\frac{1}{2}$ °/₀ y atendiendo á la tabla de Deparcieux? (xv)

$$a=1800;\ r=0'045;\ n=60;\ t=15;\ n-t=45;\ \mathrm{V}_{n-t}=622;$$

$$\mathrm{V}_n=463;\ \mathrm{A}_n=9'346$$

$$c=\frac{1800}{1'045^{15}}\cdot\frac{463}{622}\cdot9'346=6470'95\ \mathit{pts.}$$

ó mejor,

$$\text{Log.}c=\text{Log.}1800+\text{Log.}463+\text{Log.}9'346-\text{Log.}1'045^{15}-\text{Log.}622$$
$$=\text{Log.}6470{,}95$$

Escolio. Después de haber desarrollado tantos cálculos logarítmicos, creemos que ya conviene para mayor brevedad suprimir los detalles de las operaciones, que más bien sirven para obscurecerlas, cuando se aplican fórmulas algo complicadas.

Problema 2.° Una persona de 37 años entrega 50000 pesetas, á cambio de una renta vitalicia que debe cobrar desde los 55, con arreglo á la Tabla de *Hubbard* (XVI) ¿Qué anualidad percibirá mientras viva?

$$c=50000;\ r=0'045;\ n=55;\ t=18;\ n-t=37;$$
$$V_{n-t}=8731;\ V_n=6991;\ A_n=11'075$$
$$a=50000\cdot\frac{1'045^{18}}{11'075}\cdot\frac{8731}{6991}=12452'15\ pts.$$

ó bien,

$$\text{Log.}a=\text{Log.}50000+\text{Log.}1'045^{18}+\text{Log.}8731-\text{Log.}11'075$$
$$-\text{Log.}6991=\text{Log.}12452'15$$

Escolio. El caso en que la renta fuese anticipada, ni ofrecería ninguna dificultad por ser enteramente análogo, ni ningún interés práctico, porque jamás se presenta, por cuya razón prescindiremos de él.

III.—Rentas temporales.

75. Llámase temporal la renta vitalicia, *cuando en caso de vivir el que ha de percibirla, sólo la cobra durante un determinado número de años.*

La que hasta la edad n podrá disfrutar una persona de $n-t$ años, será evidentemente la diferencia que haya entre una inmediata y una diferida por t unidades de tiempo, cuyos términos sean iguales, luego en virtud de los valores encontrados para los capitales equivalentes á ambas (71 y 74) tendremos para el caso que nos ocupa,

$$c = a\,\mathrm{A}_{n-t} - \frac{\mathrm{A}}{(1+r)^t} \cdot \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-t}} \cdot \mathrm{A}^n = a\left(\mathrm{A}_{n-t} - \frac{\mathrm{A}_n}{(1+r)^t} \cdot \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-t}}\right)$$

de la cual se deduce:

$$a = c : \left(\mathrm{A}_{n-t} - \frac{\mathrm{A}_n}{(1+r)^t} \cdot \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-t}}\right)$$

para valor del término de la renta, que como el del capital, sólo es calculable en parte por logaritmos, razón por la cual se prefiere casi siempre en el primer caso, hallar directamente la diferencia entre los capitales á que equivalen la diferida y la inmediata.

PROBLEMA 1.º ¿Qué capital deberá entregar una persona de 28 años para cobrar hasta los 50, una renta vitalicia temporal de 2400 pesetas, suponiendo sea 4 ½ °/₀ el tanto convenido y se haga el cálculo con arreglo á la Tabla de Deparcieux? (XV)

$$r = 0'045;\ n = 50;\ n-t = 28;\ t = 22;\ \mathrm{V}_n = 581;\ \mathrm{V}_{n-t} = 750;$$

$$\mathrm{A}_n = 11'921;\ \mathrm{A}_{n-t} = 15'905$$

$$\begin{array}{lll} \text{Inmediata.......} & c = 2400 \cdot 15'905 & = 38172'16 \\ \text{Diferida.........} & c = \dfrac{2400}{1'045^{22}} \cdot \dfrac{581}{750} \cdot 11'921 = & \underline{\ \ 8415'50} \\ \text{Temporal..............................} & c = & 29756'66\ pts. \end{array}$$

PROBLEMA 2.º Haciendo el cálculo por la tabla de Hubbard. ¿Qué renta vitalicia se podría constituir hasta los 55 años con 25000 pesetas, una persona de 39? (Tabla XVI.)

$$r = 0'045;\ n = 55;\ n-t = 39;\ t = 16;\ \mathrm{V}_n = 6991;\ \mathrm{V}_{n-t} = 8591;$$

$$\mathrm{A}_n = 11'075;\ \mathrm{A}_{n-t} = 14'830.$$

$$a = 25000 : \left(14'830 - \frac{11'075}{1'045^{16}} \cdot \frac{6991}{8591}\right) = 25000 : 10'374$$

$$= 2409'87\ pts.$$

IV.—Constitución por medio de otras rentas.

76. Cuando la renta vitalicia no se quiere cobrar hasta transcurrir cierto tiempo, puede constituirse por medio de otra inmediata, es decir, que si la primera no ha de comenzar hasta la edad n y faltan aún t años para llegar á ella, en lugar de satisfacer de una vez el capital c que deba originarla, pueden entregarse t anualidades, renunciando igualmente á ellas, sea cual sea la época del fallecimiento.

En este caso, dicha anualidad, que llamaremos x, constituirá una renta temporal de un término más que la ordinaria, ó anticipada en una unidad de tiempo, puesto que su primer término se pagaría en el momento de celebrar el contrato; luego su valor x, sumado con el de la renta temporal que acabamos de ver, es

$$x\left(A_{n-t}-\frac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\right)$$

tendrá que ser igual al que debería entregarse para constituir la diferida, ó sea á (74)

$$\frac{a}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\cdot A_n$$

por consiguiente,

$$x+x\left(A_{n-t}-\frac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\right)=\frac{a}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\cdot A_n;$$

$$x\left(1+A_{n-t}-\frac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\right)=\frac{a}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\cdot A_n$$

$$x=\frac{\dfrac{a}{(1+r)^t}\cdot\dfrac{V_n}{V_{n-t}}\cdot A_n}{1+A_{n-t}-\dfrac{V_n}{V_{n-t}}\cdot\dfrac{A_n}{(1+r)^t}}$$

valor de la anualidad inmediata, del cual puede deducirse el de la diferida, que correspondería al de x, si ésta se entregaba desde la edad $n-t$ hasta la n.

Empezando para ello por quitar el denominador, volveremos á la penúltima igualdad, y cambiando los factores a y A_n tendremos:

$$x\left(1+A_{n-t}-\frac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\right)=a\cdot\frac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}$$

$$a=x.\frac{1+A_n-\dfrac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\dfrac{V_n}{V_{n-t}}}{\dfrac{A_n}{(1+r)^t}\cdot\dfrac{V_n}{V_{n-t}}}$$

Para dar á este valor una forma más sencilla, multiplicaremos los dos términos por $\dfrac{(1+r)^t}{A_n}\cdot\dfrac{V_{n-t}}{V_n}$, con lo cual resultará:

$$a=x\left(\frac{(1+r)^t}{A_n}\cdot\frac{V_{n-t}}{V_n}+\frac{A_{n-t}(1+r)^t}{A_n}\cdot\frac{V_{n-t}}{V_n}-1\right)$$

$$=x\left(\frac{V_{n-t}}{V_n}\left(\frac{(1+r)^t}{A_n}+\frac{A_{n-t}(1+r)^t}{A_n}\right)-1\right)$$

$$=x\left((1+r)^t\cdot\frac{V_{n-t}}{V_n}\left(\frac{1}{A_n}+\frac{A_{n-t}}{A_n}\right)-1\right)$$

ó finalmente,

$$a=x\left((1+r)^t\cdot\frac{V_{n-t}}{V_n}\cdot\frac{1+A_{n-t}}{A_n}-1\right)$$

expresión que á semejanza de las anteriores, sólo parcialmente puede calcularse por logaritmos.

Problema 1.º Calcular la anualidad que debería pagarse al nacer un niño para constituirle una renta vitalicia de 1000 pesetas desde los 40 años en adelante, suponiendo el interés 4 % y la mortalidad dada por la Tabla de Deparcieux (x y xv).

$a=1000$; $r=0'04$; $t=40$; $n=40$; $n-t=0$; $V_{n-t}=1286$; $V_n=657$;

$A_{n-t}=14'0697$; $A_n=15'1326$; $(1+r)^t=4'801021$ (Tabla, III).

$$\frac{a}{(1+r)^t}\cdot\frac{V_n}{V_{n-t}}\cdot A_n=\frac{1000}{4'801021}\cdot\frac{657}{1286}\cdot 15'1326=1610'63$$

$$1+A_{n-t}-\frac{V_n}{V_{n-t}}\cdot\frac{A_n}{(1+r)^t}=1+14'0697-1'61063=13'45907$$

$$x=\frac{1610'63}{13'45907}=119'67 \textit{ pts.}$$

PROBLEMA 2.º Una persona entrega desde los 25 años 120 pesetas á una compañía que ajusta sus operaciones á la Tabla de Hubbard (XVI) para constituirse á los 55 una renta vitalicia. ¿Cuánto deberá pagarle la compañía anualmente, si llega á dicha edad?

$x=120$; $r=0'045$; $t=30$; $(1+r)^t=3'745318$ (Tabla, III); $n=55$;

$n-t=25$; $V_{n-t}=9672$; $V_n=6991$; $A_{n-t}=16'767$; $A_n=11'075$

$$a=120\left(3'745318\cdot\frac{9672}{6991}\cdot\frac{1+16'767}{11'075}-1\right)$$

$$=120\left(\frac{643603'896}{77425'325}-1\right)=120\cdot 7'31258=877'51 \textit{ pts.}$$

V.—Rentas constituídas sobre varias vidas.

77. Del mismo modo que hasta aquí se han supuesto las rentas vitalicias constituídas sobre una sola persona, pueden calcularse en la hipótesis de *que se funden sobre la probabilidad de vida que tengan varias* en las diversas combinaciones que pueden presentar, es decir, *pagaderas hasta el fallecimiento de todas las que constituyan la agrupación*, ó *hasta el primero*, *segundo*, *ó cualquier otro que ocurra*.

No es costumbre contratarlas en la práctica más que *sobre dos vidas*, en cuyo caso suele dárseles el nombre de RENTAS constituídas SOBRE DOS CABEZAS, pero aunque fuesen más, el cálculo necesario para determinar el capital ó la anualidad, sería evidentemente análogo, por lo que, como ejemplo, nos limitaremos á estudiar este caso particular, en el que podrá ocurrir, que la renta deba pagarse mientras *vivan ambas personas* ó *hasta el fallecimiento de las dos*, pudiendo en uno y otro determinarse el capital y la anualidad por el mismo método empleado al ocuparnos de las que tienen por fundamento la probabilidad de vida de una persona, sin más diferencia que la de ser compuesta, en vez de simple, la que se refiere á más de una.

78. PRIMER CASO. *Rentas vitalicias sobre dos cabezas, hasta el primer fallecimiento.*

Suponiendo que dos personas tengan las edades n y m y siguiendo en lo demás la misma notación hasta aquí convenida, los valores del término a de la renta que se cobraría al fin de cada año, en caso de que hubiera seguridad de que ambas personas vivirían hasta transcurrir k años, serían, según sabemos (71),

$$\frac{a}{1+r},\ \frac{a}{(1+r)^2},\ \frac{a}{(1+r)^3} \cdots\cdots \frac{a}{(1+r)^k}$$

y las probabilidades de que viviesen en cada uno de los años (69, 5.º)

$$\frac{V_{n+1}V_{m+1}}{V_nV_m},\ \frac{V_{n+2}V_{m+2}}{V_nV_m},\ \frac{V_{n+3}V_{m+3}}{V_nV_m} \cdots\cdots \frac{V_{n+k}V_{m+k}}{V_nV_m}$$

los verdaderos valores serán, pues, los productos de estas fracciones por las primeras; su suma el del capital que deberá entregarse; y por lo tanto

$$c = \frac{a}{1+r}\cdot\frac{V_{n+1}V_{m+1}}{V_nV_m} + \frac{a}{(1+r)^2}\cdot\frac{V_{n+2}V_{m+2}}{V_nV_m}$$

$$+ \frac{a}{(1+r)^3}\cdot\frac{V_{n+3}V_{m+3}}{V_nV_m} + \cdots\cdots + \frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}V_{m+k}}{V_nV_m}$$

$$= \frac{a}{V_nV_m}\left(\frac{V_{n+1}V_{m+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2}V_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3}V_{m+3}}{(1+r)^3} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. + \frac{V_{n+k}V_{m+k}}{(1+r)^k}\right)$$

y por consiguiente,

$$a = c V_n V_m \left(\frac{V_{n+1} V_{m+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2} V_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3} V_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots\dots\dots \right.$$
$$\left. + \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{(1+r)^k} \right).$$

Estas fórmulas podrían servir, como sus semejantes del párrafo 71, para hallar directamente los valores de c y a; pero las operaciones que en cada caso especial se tendrían que efectuar serían pesadísimas, por lo que es preferible, siguiendo también un procedimiento análogo en todo al expuesto allí, representar por $S_{n,m}$ la suma comprendida entre paréntesis, que puede calcularse previamente para las combinaciones de diferentes edades, con lo cual se reducen esas expresiones á

$$c = \frac{a}{V_n V_m} \cdot S_{n,m} = a \cdot \frac{S_{n,m}}{V_n V_m} = aA_{n,m}, \text{ de donde, } a = \frac{c}{A_{n,m}}$$

llamando $A_{n,m}$ al cociente de dividir esa suma por el producto de los sobrevivientes de las edades n y m, que se puede igualmente calcular de antemano, formando Tablas con sus valores, los cuales en la práctica servirán de multiplicadores fijos de la anualidad a que se quiera cobrar, ó de divisores del capital c.

Para determinar $A_{n,m}$ en cualquier combinación, ó sea el *capital necesario para constituir la renta de* 1 *unidad monetaria*, bastará encontrar antes los de $S_{n,m}$ para dividirlos por los de $V_n V_m$, que pueden conocerse por medio de cualquier Tabla de supervivencia.

Según el convenio hecho, deberá ser

$$S_{n,m} = \frac{V_{n+1} V_{m+1}}{1+r} + \frac{V_{n+2} V_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+3} V_{m+3}}{(1+r)^3} + \dots\dots + \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{(1+r)^k}$$

y por lo tanto

$$S_{n-1,m-1} = \frac{V_n V_m}{1+r} + \frac{V_{n+1} V_{m+1}}{(1+r)^2} + \frac{V_{n+2} V_{m+2}}{(1+r)^3} + \dots\dots + \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{(1+r)^{k+1}}$$

de donde dividiendo ambos miembros de la primera por $1 + r$,

$$\frac{S_{n,m}}{1+r}=\frac{V_{n+1}V_{m+1}}{(1+r)^2}+\frac{V_{n+2}V_{m+2}}{(1+r)^3}+\frac{V_{n+3}V_{m+3}}{(1+r)^4}+\cdots\cdots+\frac{V_{n+k}V_{m+k}}{(1+r)^{k+1}}$$

y restando esta igualdad de la anterior,

$$S_{n-1,m-1}-\frac{S_{n,m}}{1+r}=\frac{V_n V_m}{1+r}, \text{ ó bien,}$$

$$S_{n-1,\,m-1}=\frac{S_{n,\,m}}{1+r}+\frac{V_n V_m}{1+r}=\frac{S_{n,\,m}+V_n V_m}{1+r},$$

que permite encontrar el valor de $S_{n,\,m}$ cuando se conozca el que debe tener en el año posterior, *agregando á la suma conocida el producto de los sobrevivientes de cada edad, y dividiendo por el tanto por* 1 *aumentado en este número.*

Ahora bien; para $n=100$, $m=100$, ó cualquier otro límite de edad que suponga la Tabla de supervivencia, $V_n=0$, ó $V_m=0$, lo mismo que V_{n+1}, $V_{n+2}\cdots\cdots$ ó V_{m+1}, $V_{m+2}\cdots\cdots$ y como 0 dividido por las diversas potencias de $1+r$, dará 0 también $S_{n,\,m}=0$ y $S_{n-1,\,m-1}=0$; pero los valores siguientes serían ya números determinados.

Si, por ejemplo, suponemos $m=100$ y $n=65$, tendríamos

$$V_m=V_{100}=0;\ S_{n,m}=0;\ S_{n-1,\,m-1}=S_{64,99}=\frac{V_{65}V_{100}}{1+r}=0,$$

$$\text{pero, } S_{n-2,\,m-2}=S_{63,98}=\frac{V_{64}V_{99}}{1+r}$$

ya no será 0, ni tampoco ninguno de los comprendidos desde

$$S_{62,97}=\frac{S_{63,98}+V_{63}V_{98}}{1+r}, \text{ hasta } S_{0,35}=\frac{S_{1,36}+V_1 V_{36}}{1+r}$$

Pudiendo darse á n todos los valores comprendidos entre 0 y 100 para servir de punto de partida, se podrán calcular todas las combinaciones que se quieran, y como consecuencia los valores que en las mismas correspondan á $A_{n,\,m}$.

Las Tablas que los contienen se calcularon hasta hace poco tiempo para las combinaciones de edades, cuyas diferencias fuesen múltiplas de 5, y que empezaban generalmente por 20···25, siguiendo debajo y en columna 21····26,···· 22····27, etc., y escribiendo á su derecha los multiplicadores fijos, hasta el límite que permitiese la Tabla de supervivencia adoptada, que en la XVII colocada al final es la de Deparcieux, en el supuesto de ser $4\frac{1}{2}$ % el tanto convenido.

Las modernas, sin embargo, son más completas, empiezan por la edad 0 y se suelen disponer de otro modo; en la primer columna se escriben las edades consecutivas 0, 1, 2····, hasta el límite de supervivencia supuesto en la Tabla adoptada, y en la primer línea horizontal los mismos números si contienen todas las combinaciones posibles, ó las diferencias de edad, si sólo para las más frecuentes se han construído, escribiendo los multiplicadores en columna, enfrente y debajo respectivamente de cada edad y diferencia, como puede verse en la Tabla XVIII calculada con arreglo al tanto 4 % y Tabla de Deparcieux.

79. No diferenciándose de las ya resueltas las cuestiones en que sólo intervienen las cantidades n, m, r, c y a, nos concretaremos á aplicar las fórmulas á un problema en que la incógnita sea la edad de las personas, que exigirá *calcular directamente el valor* $A_{n,m}=\frac{c}{a}$, *buscarlo en la Tabla y ver á qué combinación corresponde*, y á otro que se relacione con estos asuntos, de entre los numerosos que se podrían presentar.

Claro está que el primero será generalmente indeterminado, pero por lo mismo vamos á hacer ver con un ejemplo, que eso en este caso, como en todos los semejantes, dependerá de las condiciones que contenga el enunciado.

Problema 1.° Dos esposos constituyen con 67878 pesetas, una renta de 6000 sobre sus vidas cobrable hasta el primer fallecimiento. Sabiendo que el interés es $4\,{}^1/_2$ % y que el marido tiene cinco años más que la mujer. ¿Cuál es la edad de ambos? (Tabla XVII.)

$$c=67878;\ a=6000;\ A_{n,m}=\frac{67878}{6000}=11'313\cdots\cdots$$

Valor que buscado en la Tabla XVII y en la columna correspondiente á las edades que se diferencian en cinco años, corresponde á las de 39 y 44.

El marido tendría, pues, 44 y la mujer 39.

Problema 2.° Dos hermanos de 57 y 62 años, disfrutan de una renta de 5000 pesetas sobre sus vidas, hasta la muerte de uno de ellos. Suponiendo el mismo tanto de interés. ¿Les convendría ceder esta renta por su valor equivalente, para constituir con las dos mitades del capital dos rentas vitalicias sobre las de cada uno de ellos?

$n=57$; $m=62$; $a=5000$ *pts.*; $A_{n,m}=7'291$; $A_n=10'163$; $A_m=8'738$

$$c\,(\text{sobre las dos vidas})=5000\cdot 7'291=36455 \ \textit{pts.}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 36455=18227'50$$

$$a\,(\text{sobre la del primero})=\frac{18227'50}{10'163}=1793'51 \ \textit{pts.}$$

$$a\,(\text{sobre la del segundo})=\frac{18227'50}{8'738}=2086 \quad \text{»}$$

$$\text{Suma de ambas}\ldots\ldots\ldots=3879'51 \ \textit{pts.}$$

Luego no les convendría, puesto que cobrarían al año $5000-3879'51=1120'49$ pesetas menos.

Segundo caso. *Rentas vitalicias sobre dos cabezas, hasta el segundo fallecimiento.*

Aunque la marcha del cálculo deba ser en este caso idéntica á la del anterior, las probabilidades y fórmulas que en su virtud resultan, son completamente diferentes.

En efecto; la probabilidad de que al transcurrir k años, viva por lo menos *una cualquiera* de las dos personas, será la contraria de que *ambas* hayan muerto, es decir (69, 5.° y 7),

$$1-\frac{(V_n-V_{n+k})(V_m-V_{m+k})}{V_nV_m}$$

$$=\frac{V_nV_m-V_nV_m+V_{n+k}V_m+V_nV_{m+k}-V_{n+k}V_{m+k}}{V_nV_m}$$

$$=\frac{V_{n+k}}{V_n}+\frac{V_{m+k}}{V_m}-\frac{V_{n+k}V_{m+k}}{V_nV_m}$$

luego los valores $\frac{a}{1+r}$, $\frac{a}{(1+r)^2}$, $\frac{a}{(1+r)^3}$ .... deberían multiplicarse por los que resultasen de hacer $k=1, 2, 3$ .... en el segundo miembro de esa igualdad, pero como esos valores multiplicados por los que adquiriría $\frac{V_{n+k}}{V_n}$ darían la suma aA_n (71), multiplicados por los de $\frac{V_{m+k}}{V_m}$ producirían aA_n por la misma razón; y multiplicados por los de $\frac{V_{n+k}V_{m+k}}{V_n V_m}$, $aA_{n,m}$ (78), puede deducirse sin necesidad de repetir los cálculos, que su conjunto sería

$$c = aA_n + aA_m - aA_{n,m}$$

ó sacando a factor común,

$$c = a(A_n + A_m - A_{n,m}) \text{ de donde, } a = \frac{c}{A_n + A_m - A_{n,m}}.$$

PROBLEMA 1.º ¿Cuánto debe entregarse para constituir al 4 % una renta vitalicia de 4500 pesetas sobre las vidas de dos personas de 53 y 58 años, hasta la muerte de ambas?

$$a = 4500;\ n = 53;\ m = 58;\ A_{53} = 11'7258 \text{ (Tabla x)};\ A_{58} = 10'314;$$

$$A_{53,58} = 0'160 \text{ (Tabla xviii)}$$

$$c = 4500(11'725 + 10'314 - 8'160) = 4500 \cdot 13'879 = 62455'50 \textit{ pts.}$$

PROBLEMA 2.º Dos esposos de 59 y 49 años disfrutan cada uno una renta vitalicia de 1800 pesetas y 1200 respectivamente al $4\frac{1}{2}$ %, con las cuales constituyen un sola, cobrable hasta la última muerte, ¿qué renta disfrutarán de este modo?

$$a = 1800;\ a' = 1200;\ n = 49;\ m = 59;\ A_n = 12'176 \text{ (Tabla xv)};$$

$$A_m = 9'631;\ A_{n,m} = 8'060 \text{ (Tabla xvii)}$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 1800 \cdot 9'631 = 17335'80 \\ c' = 1200 \cdot 12'176 = 14611'20 \end{array}\right\} c + c' = 31947 \textit{ pts.}$$

$$a = \frac{31947}{12'176 + 9'631 - 8'060} = \frac{31947}{13'747} = 2323'92 \textit{ pts.}$$

80. *Reparto del capital y la anualidad.*

Llámase ESPERANZA MATEMÁTICA al *valor que resulta para un capital en virtud de la probabilidad que se tiene de cobrarlo*, valor fundamental para el cálculo de las rentas vitalicias, que sabemos (71) es igual al *que puede cobrarse multiplicado por la probabilidad*.

Si dos personas convienen, pues, en constituir sobre sus vidas una renta determinada, debiendo percibir la de edad n una parte cualquiera a' de la anualidad a y la de edad m la otra parte a'' suponiendo $a'+a''=a$, es evidente que cada una deberá contribuir con una parte de capital directamente proporcional á la esperanza que tenga de percibir su parte de renta, ó lo que es lo mismo, proporcional á los valores que la parte de anualidad que deban cobrar tenga en el momento del contrato, según la probabilidad que exista de percibirlo.

Cuando la renta se constituye hasta la primer defunción, dejan las dos de cobrarla en el mismo momento, y las partes de anualidad a' y a'' correspondientes á cualquier transcurso de tiempo k, tienen, según hemos visto, un valor representado por

$$\frac{a'}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{V_n V_m} \quad \text{y} \quad \frac{a''}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{V_n V_m}$$

porque no debiendo cobrarlas más que durante el tiempo que las dos vivan, la probabilidad representada por el segundo factor, es igual para ambas.

En este caso, por consiguiente, deberá verificarse, si llamamos c' y c'' á las correspondientes partes del capital,

$$c' : c'' :: \frac{a'}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{V_n V_m} : \frac{a'}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{n+k} V_{m+k}}{V_n V_m}$$

ó bien (T. II, 57, 1.º)

$$c' : c'' :: a' : a''$$

lo cual nos demuestra que:

Las partes de capital que deben entregarse y las de anualidad que deben percibirse, son directamente proporcionales.

Si una persona contribuye, pues, á formar la renta con doble, triple, etc., capital que otra, la parte de anualidad que á la primera corresponde deberá ser también doble, triple, etc., que la correspondiente á la segunda y recíprocamente, la que deba cobrar la mitad, tercera parte, etc., de la anualidad total, deberá contribuir también á la constitución de la renta con la mitad, tercera parte, etc., que la otra, sean cuales sean las edades.

81. La cuestión no es tan sencilla cuando la renta ha de cobrarse hasta la segunda defunción, porque entonces el que primero fallece, sólo cobra durante su vida la parte de anualidad que se convino, pero el sobreviviente además de la suya hasta ese momento, percibe desde allí en adelante la anualidad completa.

De esta consideración resulta, que la esperanza matemática para cada uno se compone de dos partes: la de cobrar su fracción de renta mientras ambos vivan, y la de cobrar la total si sobrevive al otro.

Representemos en este caso, para llegar á un resultado sencilo, por $\frac{p}{q}.a$ y $\frac{s}{q}.a$, suponiendo $p+s=q$, las fracciones de anualidad total que deban percibir cada uno, hasta que ocurra la primer muerte.

Las esperanzas matemáticas que de cobrar su parte de anualidad tendrán las dos personas de edades n y m durante ese intervalo, serán como antes

$$\frac{s}{q}\cdot\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q}\cdot\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}$$

pero á estas esperanzas deberán agregarse las que puedan abrigar de cobrar toda la renta a, viviendo el uno cuando el otro haya muerto, que para cada transcurso k de tiempo, serán (69, 5.°)

$$\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}\,(V_m-V_{m+k})}{V_n\,V_m} \quad \text{y} \quad \frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{m+k}\,(V_n-V_{n+k})}{V_n\,V_m}$$

por lo cual las totales tendrán por expresión

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}+\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}(V_m-V_{m+k})}{V_n\,V_m}$$

$$=\frac{a}{(1+r)^k}\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}+\frac{V_{n+k}}{V_n}-\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}\right)$$

$$\frac{s}{q}\cdot\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}+\frac{a}{(1+r)^k}\cdot\frac{V_{m+k}\left(V_n-V_{n+k}\right)}{V_n\,V_m}$$

$$=\frac{a}{(1+r)^k}\left(\frac{s}{q}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}+\frac{V_{m+k}}{V_m}-\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}\right)$$

ó lo que es lo mismo, recordando que $\frac{p}{q}-1=\frac{p-q}{q}=-\frac{s}{q}$,

y $\frac{s}{q}-1=\frac{s-q}{q}=-\frac{p}{q}$

$$\frac{a}{(1+r)^k}\left(\frac{V_{n+k}}{V_n}-\frac{s}{q}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}\right)$$

$$\text{y}\ \frac{a}{(1+r)^k}\left(\frac{V_{m+k}}{V_m}-\frac{p}{q}\cdot\frac{V_{n+k}\,V_{m+k}}{V_n\,V_m}\right)$$

Ahora bien; si haciendo $k=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$ calculáramos las esperanzas para todos los años que pueden transcurrir y las sumásemos, los productos de los valores del primer factor por los de los minuendos ya hemos visto (71) que serían aA_n y aA_m, así como los análogos de aquél por los de la segunda fracción de los sustraendos serían $aA_{n,m}$ (78); luego esas esperanzas se convertirán en definitiva en

$$aA_n-\frac{s}{q}\cdot aA_{n,m}=a\left(A_n-\frac{s}{q}A_{n,m}\right)$$

$$\text{y}\quad aA_m-\frac{p}{q}aA_{n,m}=a\left(A_m-\frac{p}{q}A_{n,m}\right)$$

por lo que parece que el capital debería repartirse en partes proporcionales á estos valores; pero no hay necesidad de semejante reparto, si se observa que sumados producen precisamente dicho capital, porque

$$aA_n-\frac{s}{q}aA_{n,m}+aA_m-\frac{p}{q}aA_{n,m}=a\left(A_n+A_m-A_{n,m}\right)=c\ (79),$$

lo cual demuestra que esos valores son ya los de las partes c' y c'' del capital c, que debe constituir la renta.

Problema 1.º Dos personas de 53 y 58 años desean constituir sobre sus vidas, al 4 $\frac{1}{2}$ °/₀ y hasta la segunda defunción, una renta de 3000 pesetas, con objeto de percibir mientras vivan ambas 2000 la primera y 1000 la segunda. ¿Con cuánto debe contribuir cada una?

$n=53$; $m=58$; $A_n=11'195$ (Tabla xv); $A_m=9'902$; $A_{n,m}=7'886$;

$$a=3000;\ \frac{p}{q}=\frac{2000}{3000}=\frac{2}{3};\ \frac{s}{q}=\frac{1000}{3000}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{p}{q}A_{n,m}=\frac{2}{3}\cdot 7'886=5'257;\ \frac{s}{q}A_{n,m}=\frac{1}{3}\cdot 7'886=2'629.$$

$$c'=3000\ (11'195-2'629)=3000\cdot 8'566=25698\ pts.$$
$$c''=3000\ (\ 9'902-5'257)=3000\cdot 4'645=13935\ »$$

Respecto á las partes de anualidad que mientras vivan ambos deben percibir, según el capital con que contribuyan á constituirla, acabamos de ver que:

$$c'=aA_n-\frac{s}{q}aA_{n,m}\quad \text{y}\quad c''=aA_m-\frac{p}{q}aA_{n,m}$$

de donde se deduce inmediatamente

$$\frac{s}{q}aA_{n,m}=aA_n-c'\quad \text{y}\quad \frac{p}{q}aA_{n,m}=aA_m-c''$$

y por consiguiente

$$a'=\frac{p}{q}a=\frac{aA_m-c''}{A_{n,m}}\quad \text{y}\quad a''=\frac{s}{q}a=\frac{aA_n-c'}{A_{n,m}}$$

Problema 2.° Comprobar el anterior, suponiendo que dos personas de 53 y 58 años contribuyen con 25698 pesetas la primera y 13935 la segunda á constituir al 4 $\frac{1}{2}$ °/₀ una renta vitalicia sobre sus vidas hasta el segundo fallecimiento, y calculando lo que deberá cada una percibir anualmente.

$$\left.\begin{array}{l} c'=25698 \\ c''=13935 \end{array}\right\} c=39633;\ a=\frac{39633}{11'195+9'902-7'886}=\frac{39633}{13'211}$$
$$=3000\ pts.\ (79)$$

valor de la anualidad vitalicia que desde la primer muerte cobrará quien sobreviva.

Mientras aquélla no ocurra, corresponderán respectivamente á cada una

$$a' = \frac{3000 \cdot 9'902 - 13935}{7'886} = \frac{29706 - 13935}{7'886}$$

$$= \frac{15771}{7'886} = 1999'88 \; pts.$$

$$a'' = \frac{3000 \cdot 11'195 - 25698}{7'886} = \frac{33585 - 25698}{7'886}$$

$$= \frac{7887}{7'886} = 1000'12 \; pts.$$

lo que sólo da un error con respecto á los supuestos del precedente de 0'12, á pesar de haber operado en ambos con tres valores aproximados y en éste con los resultados del anterior, dados por dichos valores.

82. Estos problemas se simplifican en el frecuente caso de contribuir ambas personas con igual parte de capital, ó convenir en repartirse por mitad la anualidad correspondiente.

En este caso particular, claro es que por lo dicho, si la renta se constituye hasta la primer defunción, la parte de anualidad que cobren, ó la de capital con que contribuyan, deberán ser iguales, y si se constituye hasta la segunda muerte, será $\frac{p}{q} = \frac{s}{q} = \frac{1}{2}$ y las expresiones se convertirán en

$$c' = a\left(A_n - \frac{1}{2} A_{n,m}\right); \quad c'' = a\left(A_m - \frac{1}{2} A_{n,m}\right)$$

si es conocida la anualidad y si lo fuese el capital, sería $c' = c'' = \frac{1}{2} c$, y por lo tanto

$$a' = \frac{aA_m - \frac{1}{2} c}{A_{n,m}} \quad \text{y} \quad a'' = \frac{aA_n - \frac{1}{2} c}{A_{n,m}}$$

Problema Resolver los precedentes en este supuesto.

1.° Si cada una de las personas de 53 y 58 años ha de percibir 1500 pesetas de la renta de 3000, tendremos $a = 3000$, $\frac{1}{2} A_{n,m} = \frac{1}{2} . 7'886 = 3'943$, y por consiguiente,

$$c'=3000\ (11'195-3'943)=3000\cdot 7'252=21756\ pts.$$
$$c''=3000\ (\ 9'902-3'943)=3000\cdot 5'959=17877\ »$$
$$c=39633\ pts.$$

capital igual al anteriormente hallado, como debía suceder, puesto que el necesario para constituir la renta ha de ser independiente del reparto que se haga de la anualidad.

2.º Si cada una, por el contrario, contribuyera á formarlo con $c'=c''=\frac{1}{2}\cdot 39633=19816'50$ pesetas, las partes de anualidad que les corresponderían deberían ser

$$a'=\frac{3000.9'902-19816'50}{7'886}$$
$$=\frac{29706-19816'50}{7'886}=\frac{9889'50}{7'886}=1254'06\ pts.$$
$$a''=\frac{3000\cdot 11'195-19816'50}{7'886}$$
$$=\frac{33585-19816'50}{7'886}=\frac{13768'50}{7'886}=1745'94\ »$$
$$a=3000$$

83. Las rentas vitalicias sobre vidas agrupadas, bien se paguen al ocurrir la primer defunción, bien cualquier otra, pueden por lo demás dar origen á las mismas cuestiones que las constituídas sobre una vida, siendo DIFERIDAS ó TEMPORALES por un tiempo t, pero nos parece ya innecesario entrar en detalles sobre las mismas, puesto que los cálculos serían completamente semejantes, reduciéndose siempre á *encontrar la expresión de su valor, sumando los que tengan las anualidades en relación al tanto de interés, multiplicados por las probabilidades de que ambas personas, ó una por lo menos, vivan en la época en que deben cobrarse* y simplificando los resultados por medio de los de A_n, A_m y $A_{n,m}$.

Prescindiremos, pues, de estos casos, que por otra parte rara vez se presentan en la práctica, ocupándonos sólo de otro muy frecuente que es el relativo á las RENTAS DE SUPERVIVENCIA, ó *que deben pagarse á una persona al ocurrir la muerte de otra*, el cual tiene por lo tanto gran analogía con el de las vitalicias cobrables hasta la última muerte.

VI.—Rentas vitalicias de supervivencia.

84. Como en todas las cuestiones que se refieren al cobro de rentas, calculadas con arreglo á las probabilidades de vida y muerte, es costumbre designar con el nombre de PRIMAS FIJAS y VITALICIAS *al capital ó anualidad que durante la vida debe entregarse para constituirlas*, en adelante usaremos estos nombres, representándolas por P y p.

Si n es la edad de quien debe constituir la renta y m la del que ha de cobrarla durante su vida, el valor del término de la renta al transcurrir k años, será, como en los problemas anteriores $\frac{a}{(1+r)^k}$ y la probabilidad de que se deba pagar, estará compuesta de la $\frac{V_{m+k}}{V_m}$ de que viva quien ha de percibirla, por la $\frac{V_n - V_{n+k}}{V_n}$ de que haya muerto quien la constituyó, luego la esperanza matemática estará representada en general, por

$$\frac{a}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{m+k}(V_n - V_{n+k})}{V_m V_n} = \frac{a}{(1+r)^k} \cdot \frac{V_{m+k}V_n - V_{m+k}V_{n+k}}{V_m V_n}$$

$$= \frac{a}{V_m} \cdot \frac{V_{m+k}}{(1+r)^k} - \frac{a}{V_m V_n} \cdot \frac{V_{m+k}V_{n+k}}{(1+r)^k}$$

Dando por consiguiente á k los valores $1, 2, 3 \cdots\cdots$ y sumando los resultados, se tendría el valor de la prima fija P que debería entregarse, pero el desarrollo de los segundos factores de minuendo y sustraendo, sabemos que serían S_m y $S_{m,n}$ (72 y 78), luego

$$P = \frac{a}{V_m} S_m - \frac{a}{V_m V_n} S_{m,n} = a \cdot \frac{S_m}{V_m} - a \cdot \frac{S_{m,n}}{V_m V_n} = a A_m - a A_{m,n}$$

$$= a(A_m - A_{m,n})$$

$$a=\frac{P}{A_m-A_{m,n}}$$

PROBLEMA 1.º ¿Cuánto deberá pagar una persona de 54 años para que una hermana suya de 49 pueda disfrutar una pensión vitalicia de 600 pesetas en el caso de sobrevivirle, suponiendo que el interés sea $4\frac{1}{2}\,\%$?

$$a=600\ pts.;\ m=49;\ n=54;\ A_m=12'176\ \text{(Tabla XV)};$$

$$A_{m,n}=8'846\ \text{(Tabla XVII)}$$

$$P=600(12'176-8'846)=600\cdot 3'330=1998\ pts.$$

PROBLEMA 2.º Un hombre de 58 años dispone de 12000 pesetas que emplea en constituir una renta vitalicia para que su mujer, de 48 años de edad, pueda disfrutarla si él fallece antes. Suponiendo el mismo tanto, ¿á cuánto ascenderá la anualidad que podrá cobrar?

$$P=12000;\ m=48;\ n=58;\ A_m=9'756;\ A_{m,n}=8'312.$$

$$a=\frac{12000}{9'756-8'312}=\frac{12000}{1'444}=8310'25\ pts.$$

85. Si en lugar de satisfacer de una vez la prima fija P, quisiera pagarse una p vitalicia, ésta constituirá siempre otra renta anticipada en una unidad de tiempo, que en el momento de celebrar el contrato tendrá un valor igual pA_n (71), que sería el de la vitalicia inmediata, aumentado en las p unidades que se pagan en aquel instante; es decir, que deberá verificarse

$$p+pA_n=P,\ \text{ó lo que es igual,}\ p(1+A_n)=P,$$

de donde se deduce:

$$p=\frac{P}{1+A_n}$$

PROBLEMA. Calcular la prima anual que debería pagarse durante la vida del que constituye la renta en los dos problemas últimos.

1.° $n=54$; $A_n=10'938$; $p=\frac{1998}{11'938}=167'36$ *pts.* anuales.

2.° $n=58$; $A_n=9'902$; $p=\frac{12000}{10'902}=1100'71$ *pts* anuales,

en vez de las 12000.

También la prima pudiera ser TEMPORAL, ó *pagarse únicamente durante cierto tiempo;* pero como este caso es poco frecuente y su cálculo no se diferenciaría del que acabamos de hacer, conociendo, como conocemos (75), la fórmula del capital á que equivalen esta clase de rentas, prescindimos de su expresión, así como del detalle de las TABLAS ESPECIALES ó *Tarifas que forma cada una de las Sociedades dedicadas á estos negocios* en las distintas combinaciones que pueden realizarse, y que serían análogas á las mencionadas al estudiar las rentas sobre una sola vida (72).

CAPÍTULO III.

FUNDAMENTOS DE LOS SEGUROS SOBRE LA VIDA.

I.—Ideas generales.

86. Si la palabra seguro se ha de emplear en su verdadera acepción (T. II, 96), SEGURO SOBRE LA VIDA será la *cantidad que al morir una persona se ha de entregar á los herederos;* pero se usan estas palabras para designar todas las *operaciones mercantiles que tienen por fundamento la duración de la vida humana.*

Bajo este punto de vista, pertenecen al estudio de los seguros la mayoría de las cuestiones que hemos tratado últimamente, y pueden dividirse en dos grandes grupos.

SEGUROS EN CASO DE VIDA, *cuando tienen que pagarse capitales ó rentas mientras vivan una ó varias personas;* constituyen lo que hasta aquí hemos llamado rentas vitalicias, ó la entrega del capital equivalente á ellas.

SEGUROS EN CASO DE MUERTE, *cuando tienen que pagarse capitales ó rentas al ocurrir una ó varias muertes.*

Éstos, lo mismo que aquéllos, pueden ser INMEDIATOS, *si se pagan al ocurrir la defunción;* DIFERIDOS, *si la muerte de que dependen ha de ser posterior á una edad que se fija;* en uno y otro caso, TEMPORALES, *si la defunción ha de ser anterior á una edad determinada,* y de SUPERVIVENCIA, *si es condición precisa que otra persona viva al fallecer el asegurado.*

Los últimos, en realidad, no constituyen tampoco un verdadero seguro en caso de muerte, sino, como se vió al tratarlo en su forma más común é importante (84), una combinación de ambos, que no es única, pues entre ellas pueden incluirse también los llamados MIXTOS, *si el pago ha de hacerse al ocurrir la muerte antes de cierta edad, ó al llegar á ella;* los PRÉSTAMOS VITALICIOS, ó *reembolsables por primas vitalicias,* y las operaciones de CONTRASEGURO, ó *reembolso de las anualidades que por cualquier concepto se hayan tenido que pagar.*

87. Con el nombre de rentas vitalicias hemos estudiado algunos de los llamados seguros en caso de vida, pero bajo la forma que antiguamente se resolvían los problemas con ellos relacionados, y lo hemos hecho así por dos razones: la primera, para dar á conocer los principales métodos de resolución; la segunda, porque aun hoy se calculan con frecuencia de ese modo, en razón á que, siendo en dichos casos las personas interesadas quienes deben medir las probabilidades de cobrar la renta, ya que las Compañías aseguradoras nada pierden, sino que, por el contrario, ganan al ocurrir el fallecimiento antes de la época dada por las Tablas, las que suelen usarse sólo tienen un grado mayor ó menor de aproximación, por no ser preciso que los resultados tengan una gran exactitud.

No sucede lo mismo cuando se trata de un seguro en caso de muerte; entonces el cálculo de la probabilidad de vida es de gran importancia para la Compañía, que empieza por someter al futuro asegurado á un reconocimiento facultativo y no asegura á quienes por su salud ú otras circunstancias ofrezcan probabilidades excepcionales de muerte, ni emplea para los cálculos, entre las diferentes Tablas de mortalidad, más que aquellas cuyo error es insignificante, en relación con las condiciones exigidas á la clase asegurable.

Desde luego hay que desechar por esta causa las fundadas en grupos de población, y aun debería prescindirse de las de Deparcieux y Duvillard, que respectivamente dan una mortalidad siempre inferior á la verdadera y muy superior en las primeras edades é inferior en las últimas, siendo hoy la de las Compañías inglesas la preferida generalmente.

Por otra parte, el tanto de interés que se convenga para las cantidades adelantadas, tiene también mayor importancia en los verdaderos seguros que en las rentas vitalicias, porque éstas, saben las Compañías en qué épocas fijas hay que satisfacerlas, y el capital que en sus manos se ha depositado puede mientras tanto emplearse en otros negocios seguros, que les hagan producir mayor interés y les permitan satisfacer los gastos de administración y obtener aun sobre ellos la debida ganancia; en los seguros de capitales, no es ésta tan fácil de realizar, compensando con exceso el tanto abonado, porque su propia índole obliga, si la Sociedad ha de conservar el crédito y buen nombre que le son indispensables, á poder disponer siempre de un capital respetable con el que pueda atenderse en cualquier momento á la eventualidad de los fallecimientos, y esta parte de capital permanece improductiva ó poco menos.

Esta es la principal razón en virtud de la cual se calcula tan aproximadamente como es posible la PRIMA PURA, ó *que representa el valor exacto del riesgo que se corre* con arreglo á las Tablas de mortalidad y al tanto de interés que se calcula pueden producir la totalidad de capitales recibidos, que hoy se supone generalmente ser de 4 $^{0}/_{0}$, de tal manera que dicha prima no represente beneficio ni pérdida, aumentándola después al calcular la tarifa especial, en proporción á los gastos que la empresa origine y á la ganancia que se desee ó pueda obtener, ya que, como en las operaciones comerciales, ha de tenerse en cuenta la competencia de otras Compañías y la conveniencia de no presentar al público tarifas excesivas que retraigan á los que pudieran asegurarse.

Para que no lo parezcan tanto, se ha ideado modernamente ofrecer á los asegurados en una ú otra forma una parte de los beneficios que se obtengan; se han creado pólizas llamadas INDISPUTABLES, ó *contratos sin* tantas *condiciones restrictivas* como las que muchas veces han servido de excusa á ciertas Sociedades para faltar á sus compromisos, y se ha acudido á cuantas combinaciones y ofrecimientos pueden deslumbrar al público, pues claro está que todas esas ventajas han de ser más aparentes que reales. Ellas son, no obstante, causa de que las operaciones numéricas se dificulten y compliquen algo, aunque no se diferencien esencialmente de las estudiadas hasta aquí.

En una palabra; los cálculos referentes á los seguros son más complejos y delicados, aunque muy semejantes á los de rentas vitalicias, y se pueden hacer del mismo modo, pues la única diferencia estriben en que *en lugar de las probabilidades de vida, hay que tener en cuenta las de muerte*, como las tuvimos al estudiar lás rentas de supervivencia con arreglo á los procedimientos antiguos; que á propósito incluímos entre aquéllas para que puedan servir de ejemplo, si quieren seguirse esos, como aun siguen algunos, pero el gran incremento que las Compañías de seguros han tomado en la moderna sociedad; los adelantos de la ciencia en estos últimos tiempos y la exactitud y brevedad que en dichos cálculos se desean hoy, han sido causa de que se modificasen los métodos, se formasen nuevas Tablas auxiliares de las de mortalidad que facilitaran las operaciones y simplificaran las fórmulas de que es preciso hacer uso, y hasta se adoptara para conseguir todos estos fines y darles la conveniente claridad y simetría una nueva nomenclatura.

Vamos, pues, á ocuparnos, aunque ligeramente, de los procedimientos que hoy se deben seguir; de las Tablas y fórmulas que conviene usar y de la nomenclatura adoptada actualmente, con arreglo á la cual tendremos que modificar algunas de las expresiones y valores ya conocidos que necesitaremos en adelante, por lo que nos veremos obligados á hacer una especie de resumen del capítulo anterior, pues hasta la palabra «anualidad» ha variado de significado.

II.—Anualidades vitalicias inmediatas sobre una cabeza.

88. Empecemos por hacer constar, que el tanto por 1 de interés se designa hoy por t y no por r; las edades por a, b, c······; las unidades de tiempo que han de transcurrir desde un instante dado, por n; los sobrevivientes de esas edades, por $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$·······, y los de n años después, por $f(a+n)$, $f(b+n)$, $f(c+n)$·······; el límite de la tabla de mortalidad, ó sea el supuesto para la vida humana, por la letra griega ω, que se lee *omega;* y que para mayor sencillez, las fórmulas no se establecen nunca para los verdaderos capitales ni términos de las rentas, sino para el caso de que éstos sean iguales á 1 unidad monetaria, por lo cual los resultados, á semejanza de lo que se hace

para referir el tanto por 1 á tanto por 100, hay que multiplicarlos siempre por el valor de aquéllos.

ANUALIDAD VITALICIA. Llámase así, y se representa por $\mathfrak{X}_a$ *el valor de una serie de cantidades iguales á* 1 *unidad monetaria, cobrables al fin de cada uno de los años que viva una persona*, que al celebrar el contrato tenga la edad a.

Es, pues, lo que hasta aquí hemos designado por $\mathfrak{A}_n$ (71) y el $\frac{1}{(1+r)^k} \cdot \frac{\mathfrak{V}_{n+k}}{\mathfrak{V}_n}$, esperanza de cobrar 1 unidad cuando haya transcurrido cierto número de años n, se representa por $\mathfrak{Q}_a^n$ por lo que su expresión con arreglo, á la nueva nomenclatura, será:

$$\mathfrak{Q}_a^n = (1+t)^{-n} \frac{f(a+n)}{f(a)}$$

que de un modo análogo al expuesto en las rentas vitalicias, es decir, empezando por las edades más avanzadas, permite calcular los valores numéricos de $\mathfrak{X}_a$ para todas las que se quiera, formando con ellas Tablas, que en la actualidad, no obstante, se prefiere construir por otros dos métodos.

Método directo.

En virtud de la definición de anualidad vitalicia y del convenio de representación establecido, se tendrá:

$$\mathfrak{X}_a = \mathfrak{Q}_a^1 + \mathfrak{Q}_a^2 + \mathfrak{Q}_a^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots \mathfrak{Q}_a^{\omega - a}$$

$$\mathfrak{X}_{a+1} = \mathfrak{Q}_{a+1}^1 + \mathfrak{Q}_{a+1}^2 + \mathfrak{Q}_{a+1}^3 + \cdots\cdots\cdots \mathfrak{Q}_{a+1}^{\omega - a}$$

y según la expresión de $\mathfrak{Q}_a^n$

$$\mathfrak{Q}_a^1 = (1+t)^{-1} \cdot \frac{f(a+1)}{f(a)}; \quad \mathfrak{Q}_a^{n+1} = (1+t)^{-(n+1)} \cdot \frac{f(a+n+1)}{f(a)}$$

de donde dividiendo la segunda igualdad por la primera

$$\frac{\mathfrak{Q}_a^{n+1}}{\mathfrak{Q}_a^1} = (1+t)^{-n} \cdot \frac{f(a+n+1)}{f(a+1)} = \mathfrak{Q}_{a+1}^n = \frac{1}{\mathfrak{Q}_a^1} \mathfrak{Q}_a^{n+1}$$

ó dando á n todos los valores posibles á partir de 1

$$Q^1_{a+1}+Q^2_{a+1}+Q^3_{a+1}\cdots\cdots Q^{\omega-a}_{a+1}=\frac{1}{Q^1_a}\left(Q^2_a+Q^3_a+\cdots\cdots\cdots Q^{\omega-a}_a\right)$$

ó lo que es lo mismo,

$$X_{a+1}=\frac{1}{Q^1_a}\left(X_a-Q^1_a\right)=\frac{X_a}{Q^1_a}-1;\ 1+X_{a+1}=\frac{X_a}{Q^1_a}$$

y finalmente,

$$X_a=(1+X_{a+1})Q^1_a$$

por cuyo medio se calcularían directamente las Tablas XV y XVI de la misma manera que indicamos en el párrafo 72 al determinar S_{n-1} en función de S_m.

89. 1.° *Método de Maas.* — Para disponer las operaciones de un modo más sencillo y sistemático cuando se han de formar Tablas completas, se valió este notable autor en 1868 de otras auxiliares, encontrando primero para todas las edades los números

$$T_a=(1+t)^{\omega-a}f(a)$$

determinando luego los que llamó

$$G_a=T_a+T_{a+1}+T_{a+2}+\cdots\cdots+T_\omega$$

y como en virtud de la notación por él adoptada

$$T_{a+n}=(1+t)^{\omega-a-n}f(a+n)$$

igualdad que dividida por la primera, da

$$\frac{T_{a+n}}{T_a}=(1+t)^{-n}\cdot\frac{f(a+n)}{f(a)}=Q^n_a$$

dando á n todos los valores, á partir de 1, hasta llegar al límite de la Tabla de mortalidad, se tendría

$$\frac{T_{a+1}+T_{a+2}+T_{a+3}+\cdots\cdots\cdots T_\omega}{T_a}=Q^1_a+Q^2_a+Q^3_a+\cdots\cdots\cdots+Q^{\omega-a}_a$$

ó lo que es lo mismo:

$$\frac{G_{a+1}}{T_a} = X_a \quad \text{y} \quad 1 + X_a = 1 + \frac{G_{a+1}}{T_a} = \frac{T_a + G_{a+1}}{T_a} = \frac{G_a}{T_a}$$

2.° *Método de Morgan.*—El procedimiento que acabamos de exponer, perfeccionado en 1872 por los calculistas ingleses para simplificar aún más las operaciones, exige igualmente la construcción de una *Tabla auxiliar*, llamada de CONMUTACIÓN, antes de llegar á los valores de X_a, Tabla que además es útil para resolver muchos problemas, y que en cinco columnas, formadas á la derecha de los años que expresan la edad a, contiene los números siguientes:

$$D_a = f(a)(1+t)^{-a}$$

$$N_a = D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \cdots\cdots + D_\omega$$

$$S_a = N_a + N_{a+1} + N_{a+2} + \cdots\cdots + N_\omega$$

$$M_a = \frac{N_{a-1}}{1+t} - N_a$$

$$R_a = M_a + M_{a+1} + \cdots\cdots + M_\omega$$

obtenidos estos números y según la notación adoptada, es evidente que

$$D_{a+n} = f(a+n)(1+t)^{-a-n} = f(a)(1+t)^{-a}(1+t)^{-n} \cdot \frac{f(a+n)}{f(a)} = D_a Q_a^n$$

y por lo tanto

$$Q_a^n = \frac{D_{a+n}}{D_a}$$

y como dando á n todos los valores desde 1 en adelante, el primer miembro se convierte en X_a y el numerador del segundo en N_a, resulta

$$X_a = \frac{N_a}{D_a}$$

valor que fácilmente se calcula, una vez construída la Tabla de conmutación.

Con arreglo á la de mortalidad de las veinte compañías, calculadas por Woolhose, las publicó Hardy en 1873 para los tantos 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5 y 6 %, y de entre ellas incluímos al final, con el número XIX, la correspondiente al 4 %, que es el tanto más usual.

90. Prosigamos ahora el resumen de los conocimientos adquiridos, para ampliar algunos y dar á conocer las expresiones que se deben emplear actualmente en todas las cuestiones vitalicias.

1.° Tanto de interés continuo.

Este tanto, que es, según sabemos, el más racional, y cuyo valor en función de su expresión usual, así como la de éste en función de aquél, encontramos ya (23), se representa por la letra griega ρ, que se lee *ro*.

2. Tantos medio é instantáneo de mortalidad.

Según la definición de todas las cantidades medias, el primero será la *relación que existe entre el de mortalidad* (66) *durante un período de tiempo y el valor de este período*, y tendrá por expresión

$$\frac{f(a)-f(a+n)}{f(a)} : n = \frac{f(a)-f(a+n)}{nf(a)}$$

El segundo, por consiguiente, será el *límite del tanto medio cuando el período de tiempo disminuya indefinidamente;* y aunque con ayuda de las Tablas de mortalidad, por aproximadas á la verdad que sean, no puede calcularse exactamente, por ser desconocidas las leyes en virtud de las cuales varía el número de personas vivas, en la práctica, aun para las operaciones más delicadas, puede tomarse como valor muy cercano al verdadero el medio que resulta de considerar en el numerador los valores inmediatamente anterior y posterior á la edad a, en cuyo caso se tiene

$$\tau = \frac{f(a-1)-f(a+1)}{2f(a)}$$

La letra griega τ se lee *tau*.

Problema 1.° Calcular con arreglo á las Tablas de mortalidad de Duvillard (XI) y de las compañías inglesas (XII) la diferencia entre los tantos ordinario é instantáneo á la edad de 40 años.

n (según la notación antigua)$=a$ (según la moderna)$=40$;

$$a-1=39;\ a+1=41.$$

Con arreglo á la Tabla de Duvillard:

$$\text{Tanto ordinario}=\frac{V_{40}-V_{41}}{V_{40}}$$

$$=\frac{f(40)-f(41)}{f(40)}=\frac{362404-362419}{362404}=\frac{6985}{362404}=0'01891$$

$$\tau=\frac{f(39)-f(41)}{2f(40)}=\frac{376363-362419}{2\cdot 362404}=\frac{13944}{724808}=0'01887$$

Diferencia=0'00004

Con arrreglo á la de las compañías inglesas:

$$\text{Tanto ordinario}=\frac{82284-81436}{82284}=\frac{848}{82284}=0'01031$$

$$\tau=\frac{83122-81436}{2\cdot 82284}=\frac{1686}{164518}=0'01024$$

Diferencia=0'00007

3.º Anualidades semestrales, trimestrales y continuas. Este último es el nombre que toma la *anualidad vitalicia calculada con arreglo á intervalos de tiempo indefinidamente pequeños.*

Siendo el valor ordinario de dicha anualidad

$$X_a=Q_a^1+Q_a^2+Q_a^3+\cdots\cdots$$

$$=\frac{f(a+1)}{(1+t)f(a)}+\frac{f(a+2)}{(1+t)^2f(a)}+\frac{f(a+3)}{(1+t)^3f(a)}+\cdots\cdots$$

si en lugar de pagarse una unidad monetaria al fin de cada año se supone pagada por partes iguales a' $\frac{1}{h}$ en h intervalos equidistantes y llamamos z al número por quien ha de multiplicarse h para producir 1, 2, 3, etc., hasta el límite de la vida, número que se confundirá con estos mismos cuando sea $h=0$, esa suma constará de h términos de la forma

$$\frac{f(a+hz)}{(1+t)^{hz}f(a)}$$

cuyo límite, cuando h tienda hacia 0, expresaría el valor de la anualidad continua que se representa por $\bar{X}_a$.

Este límite no puede determinarse exactamente con los escasos conocimientos matemáticos hasta aquí adquiridos; pero una multitud de cálculos efectuados para diversas fracciones de tantos y tiempos proporcionales, ha hecho ver que la diferencia entre la vitalicia anual y la fraccionada es siempre con un error que por lo insignificante puede despreciarse por mucha aproximación que se desee, de $\frac{m-1}{2m}-\frac{m^2-1}{12m^2}(\tau+\rho)$, expresando por m el número de partes en que se considere el año dividido y que, por lo tanto, ${}^{m}X_a = X_a + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\tau+\rho)$ será un valor cercano al verdadero en cualquier caso, pudiendo, por consiguiente, servir como fórmula práctica para calcular la anualidad continua, haciendo $m=\infty$

$$X_a = X_a + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\tau+\rho)$$

y como expresiones de las semestrales y trimestrales, haciendo $m=2$ y $m=4$, é indicándolas por ${}^{2}X$ y ${}^{4}X$,

$${}^{2}X_a = X_a + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(\tau+\rho) \text{ y } {}^{4}X_a = X_a + \frac{3}{8} - \frac{5}{64}(\tau+\rho)$$

Problema 2.° Encontrar las anualidades vitalicias continua, semestral y trimestral que, según la tabla de Duvillard y tanto 4 % de interés, corresponden á la edad de 40 años.

Buscando en la correspondiente Tabla (xv) el valor $X_{40}=13'286$ y repitiendo las operaciones del problema anterior para determinar $\tau=0'01887$, calcularíamos además (23)

$$\rho = \frac{\text{Log.}\,1'04}{0'4342944} = \frac{0'017033339}{0'4342944} = 0'039$$

hallando por consiguiente

$$\bar{X}_{40}=13'286+0'5-\frac{1}{12}(0'019+0'039)=13'786-\frac{1}{12}\cdot 0'058$$

$$=13'786-0'005=13'781\ pts.$$

y para la semestral y trimestral

$${}^{2}X_{40}=13'286+0'25-\frac{1}{16}\cdot 0'058=13'536-0'004=13'532\ pts.$$

$${}^{4}X_{40}=13'286+0'375-\frac{5}{64}\cdot 0'058=13'661-\frac{1}{64}\cdot 0'290$$

$$=13'661-0'005=13'656\ pts.$$

Escolio. Calculando estos valores para diversos tantos y tiempos, se pueden formar también las correspondientes Tablas de anualidades.

III.—Anualidades vitalicias inmediatas, sobre dos cabezas.

91. 1.º Anualidades vitalicias sobre dos cabezas, cobrables hasta la primer defunción.

Los valores de $X_{a,b}$ ya vimos en el párrafo 78, en que los representamos por $A_{n,m}$ cómo podrían calcularse, y su fórmula arreglada á la notación moderna, es muy fácil de hallar por un procedimiento idéntico al expuesto en el método directo, para las calculadas sobre una cabeza.

Efectivamente, operando de igual modo, tendríamos:

$$Q^{n}_{a,b}=(1+t)^{-n}\cdot\frac{f(a+n)}{f(a)}\cdot\frac{f(b+n)}{f(b)}$$

$$X_{a,b}=Q^{1}_{a,b}+Q^{2}_{a,b}+Q^{3}_{a,b}+\cdots\cdots$$

$$X_{a+1,\,b+1}=Q^{1}_{a+1,\,b+1}+Q^{2}_{a+1,\,b+1}+Q^{3}_{a+1,\,b+1}+\cdots\cdots$$

$$Q^{1}_{a,b}=(1+t)^{-1}\cdot\frac{f(a+1)}{f(a)}\cdot\frac{f(b+1)}{f(b)};$$

$$Q^{n+1}_{a,b}=(1+t)^{-(n+1)}\cdot\frac{f(a+n+1)}{f(a)}\cdot\frac{f(b+n+1)}{f(b)}$$

$$\frac{\mathfrak{Q}^{n+1}_{a,b}}{\mathfrak{Q}^{1}_{a,b}}=(1+t)^{-n}\cdot\frac{f(a+n+1)}{f(a+1)}\cdot\frac{f(b+n+1)}{f(b+1)}=\mathfrak{Q}^{n}_{a+1,b+1}$$

$$=\frac{1}{\mathfrak{Q}^{1}_{a,b}}\cdot\mathfrak{Q}^{n+1}_{a}$$

y debiendo ser la suma del penúltimo miembro, cuando á n se den todos los valores desde 1 en adelante, igual á la del último,

$$\mathfrak{X}_{a+1,b+1}=\frac{1}{\mathfrak{Q}^{1}_{a,b}}\left(\mathfrak{X}_{a,b}-\mathfrak{Q}^{1}_{a,b}\right);\ 1+\mathfrak{X}_{a+1,b+1}=\frac{\mathfrak{X}_{a,b}}{\mathfrak{Q}^{1}_{a,b}}$$

$$\mathfrak{X}_{a,b}=\left(1+\mathfrak{X}_{a+1,b+1}\right)\mathfrak{Q}^{1}_{a,b}$$

expresión que en realidad es la misma por cuyo medio indicamos se podían construir las Tablas XVII y XVIII.

2.º ANUALIDADES VITALICIAS SOBRE DOS CABEZAS, COBRABLES HASTA LA SEGUNDA DEFUNCIÓN.

Estas anualidades, que para distinguirlas de las anteriores se representan por $\mathfrak{X}_{\overline{a,b}}$, ya demostramos en el párrafo 79, tenían por valor

$$\mathfrak{X}_{\overline{a,b}}=\mathfrak{X}_{a}+\mathfrak{X}_{b}-\mathfrak{X}_{a,b}$$

que es el que resulta de hacer $a=1$ y reemplazar c, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_m$ y $\mathfrak{A}_{n,m}$ por sus equivalentes, en la fórmula allí deducida.

92. ANUALIDADES SEMESTRAL, TRIMESTRAL Y CONTINUA SOBRE DOS CABEZAS.

Si han de pagarse los términos hasta la primer defunción, por intervalos de tiempo menores que la unidad, su diferencia con las calculadas sobre una sola cabeza (90,3.º) sólo puede depender, puesto que $\mathfrak{X}_{a,b}$ y ρ quedarán determinadas por el enunciado, en que la verdadera variable τ que expresa el tanto instantáneo de mortalidad, ó la probabilidad instantánea de muerte, será la suma (7) de los que correspondan á cada persona, luego

$$\overline{\mathfrak{X}}_{a,b\ldots}=\mathfrak{X}_{a,b\ldots}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\left(\tau_a+\tau_b+\cdots\cdots+\rho\right)$$

y las que deban cobrarse en cualquier otro período de tiempo, suponiendo que éste se fraccione en m partes, tendrán por expresión

$$ {}^{m}\mathrm{X}_{a,b} = \mathrm{X}^{\cdot}_{a,b\ldots} + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}\left(\tau_a + \tau_b + \cdots\cdots + \rho\right) $$

Cuando se trata de pagar la renta hasta la última defunción, la diferencia de los errores que se comenten al tomar las ordinarias en vez de las semestrales, trimestrales ó continuas, se anulan casi por completo á causa del signo negativo de $\mathrm{X}_{a,b}$ por lo que apenas se diferencian del valor $\mathrm{X}_{\overline{a,b}}$ que se toma también para ellas.

IV.—Anualidades vitalicias cobrables por períodos mayores que un año.

93. Suponiendo, por el contrario, que los términos deban pagarse de h en h años, entregando h unidades monetarias, pues acumulando los intereses se hallarían comprendidas en el caso general, sin más que determinar el tanto equivalente al anual, el valor de la anualidad que se representa por ${}^{\frac{1}{h}}\mathrm{X}$, sería

$$ {}^{\frac{1}{h}}\mathrm{X}_a = \frac{f(a+h)}{f(a)} \cdot \frac{h}{(1+t)^h} + \frac{f(a+2h)}{f(a)} \cdot \frac{h}{(1+t)^{2h}} + \cdots\cdots $$

ó bien,

$$ {}^{\frac{1}{h}}\mathrm{X} = h \cdot \frac{f(a+h)(1+t)^{-h} + f(a+2h)(1+t)^{-2h} + \cdots\cdots}{f(a)} $$

hasta llegar en el numerador á un término nulo, por lo que recordando la expresión de los números D de la Tabla de conmutación (89, 2.º),

$$ \mathrm{D}_{a+h} = f(a+h)(1+t)^{-a-h}; \quad \mathrm{D}_{a+2h} = f(a+2h)(1+t)^{-a-2h}; \quad \cdots\cdots $$

que son los términos de dicho numerador divididos por $(1+t)^a$

$$ {}^{\frac{1}{h}}\mathrm{X} = h \cdot \frac{\mathrm{D}_{a+h} + \mathrm{D}_{a+2h} + \cdots\cdots}{\mathrm{D}_a} $$

No tiene esta fórmula, considerada aisladamente, mucho interés, por no ser natural que este caso se presente; pero sí una gran importancia práctica, porque proporciona el *medio de hacer con facilidad, para cualquier número de cabezas, el*

CÁLCULO APROXIMADO DE LA ANUALIDAD ORDINARIA, y formar las correspondientes Tablas, sin necesidad de encontrar más que los números $\mathfrak{D}$, prescindiendo, al construir las de conmutación, de los $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{R}$.

94. Efectivamente; si en la relación de los tiempos y tantos fraccionarios (90, 3.º) se reemplaza m por $\frac{1}{h}$, resulta

$$ {}^{\frac{1}{h}}X_a = X_a + \frac{\frac{1}{h}-1}{2\cdot\frac{1}{h}} + \frac{\frac{1}{h^2}-1}{12\cdot\frac{1}{h^2}}(\tau+\rho) = X_a + \frac{1-h}{2} - \frac{1-h^2}{12}(\tau+\rho) $$

de donde se deduce,

$$ X_a = {}^{\frac{1}{h}}X + \frac{h-1}{2} - \frac{h^2-1}{12}(\tau+\rho) $$

cambiando los signos de los numeradores, lo que equivale á cambiar los de los términos, al pasarlos de un miembro al otro.

Poniendo ahora en vez de ${}^{\frac{1}{h}}X$, su valor, resultará por último,

$$ X_a = h.\frac{\mathfrak{D}_{a+h} + \mathfrak{D}_{a+2h}\cdots}{\mathfrak{D}_a} + \frac{h-1}{2} - \frac{h^2-1}{12}(\tau+\rho) $$

Siendo arbitrario el valor de h, *cuanto mayor se suponga, más rápido será el cálculo, pero menor la aproximación*, sobre todo, si no se tiene cuidado de que sea $h^2-1=\dot{12}$, ó $h=\sqrt{\dot{12}-1}$, lo que siempre puede conseguirse haciendo $h=11$ ó $h=19$.

PROBLEMA. Calcular por este procedimiento y suponiendo un interés de 4 %, la anualidad vitalicia correspondiente á la edad de 40 años.

Determinados $\tau=0'0189$, $\rho=0'0392$ y $\tau+\rho=0'0581$ como en el problema 2.º del párrafo 90, se tendría para $h=11$

$$ X_{40} = 11.\frac{\mathfrak{D}_{51}+\mathfrak{D}_{62}+\mathfrak{D}_{73}+\mathfrak{D}_{84}+\mathfrak{D}_{95}}{\mathfrak{D}_{40}} + 5 - 10\cdot 0'0581 $$

y sustituyendo los valores (Tabla XIX) de $\mathfrak{D}$,

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{D}_{51}=9682'92\\ \mathfrak{D}_{62}=4859'28\\ \mathfrak{D}_{73}=1759'71\\ \mathfrak{D}_{84}=\ \ 250'992\\ \mathfrak{D}_{95}=\ \ \ \ \ 3'2521\end{array}\right| \quad \mathfrak{D}_{40}=17138'9$$

$$\overline{16556'1541}$$

$$\mathfrak{X}_{40}=\frac{182117'6951}{17138'9}+5-0'581=10'626+4'419=15'045$$

valor que sólo se diferencia del 15'135 que dan las Tablas inglesas, un poco superior al 15'133 calculado con arreglo á la de Deparcieux (Tabla XV) en 0'09.

Para $h=19$,

$$\mathfrak{X}_{40}=19\cdot\frac{\mathfrak{D}_{59}+\mathfrak{D}_{78}+\mathfrak{D}_{97}}{\mathfrak{D}_{40}}+9-30\cdot 0'0581$$

$$\begin{array}{r}\mathfrak{D}_{59}=5984'46\\ \mathfrak{D}_{78}=\ \ 859'938\\ \mathfrak{D}_{97}=\ \ \ \ \ \ 0'2005\\ \hline 6844'5985\end{array}$$

$$\mathfrak{X}_{40}=\frac{130047'3715}{17138'9}+9-1'743=7'588+7'157=14'745$$

el cual se obtiene más pronto, pero es erróneo en 0'39.

Escolio. Haciendo $h=1$, se tendría su verdadero valor (89, 2.º), porque siendo $h-1=0$ y $h^2-1=0$,

$$\mathfrak{X}_a=\frac{\mathfrak{D}_{a+1}+\mathfrak{D}_{a+2}+\cdots\cdots}{\mathfrak{D}_a}=\frac{\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{D}_a}$$

95. A una expresión semejante puede llegarse del mismo modo para la anualidad sobre varias cabezas.

La suma de todos los valores de $\mathfrak{Q}^n_{a.b}$ (91, 1.º), sería efectivamente,

$$
{}^{\frac{1}{h}}\mathrm{X}_{a,b}
$$

$$
=\frac{f(a+h)f(b+h)}{f(a)f(b)}\cdot\frac{h}{(1+t)^{h}}+\frac{f(a+2h)f(b+2h)}{f(a)f(b)}\cdot\frac{h}{(1+t)^{2h}}+\cdots\cdots
$$

que sólo se diferencia de la referente á una sola cabeza, en estar en numerador y denominador multiplicados los factores que son funciones de la edad a por otros de la edad b y de la misma forma, por lo que, haciendo idénticas transformaciones, se llegaría á una expresión completamente análoga, pero que exigiría formar Tablas de conmutación que contuvieran los números $\mathrm{D}_{a,b}$.

Para evitar este inconveniente y referirse siempre á las de una sola cabeza, basta observar que en virtud de los valores de esos números (89, 2.º),

$$
f(a+h)=\mathrm{D}_{a+h}(1+t)^{a+h};
$$

$$
f(a+2h)=\mathrm{D}_{a+2h}(1+t)^{a+2h};\ \cdots\cdots\ f(a)=\mathrm{D}_{a}(1+t)^{a}
$$

$$
f(b+h)=\mathrm{D}_{b+h}(1+t)^{b+h};
$$

$$
f(b+2h)=\mathrm{D}_{b+2h}(1+t)^{b+2h};\ \cdots\cdots\ f(b)=\mathrm{D}_{b}(1+t)^{b}
$$

por lo cual el primer sumando del segundo miembro tendría por valor

$$
\frac{\mathrm{D}_{a+h}\mathrm{D}_{b+h}(1+t)^{a+b+2h}}{\mathrm{D}_{a}\mathrm{D}_{b}(1+t)^{a+b}}\cdot\frac{h}{(1+t)^{h}}=\frac{h}{\mathrm{D}_{a}\mathrm{D}_{b}}\cdot\mathrm{D}_{a+h}\mathrm{D}_{b+h}(1+t)^{h}
$$

el segundo

$$
\frac{\mathrm{D}_{a+2h}\mathrm{D}_{b+2h}(1+t)^{a+b+4h}}{\mathrm{D}_{a}\mathrm{D}_{b}(1+t)^{a+b}}\cdot\frac{h}{(1+t)^{2h}}=\frac{h}{\mathrm{D}_{a}\mathrm{D}_{b}}\cdot\mathrm{D}_{a+2h}\mathrm{D}_{b+2h}(1+t)^{2h}
$$

y así sucesivamente, luego sumando y sacando común el primer factor,

$$
{}^{\frac{1}{h}}\mathrm{X}_{a,b}=\frac{h}{\mathrm{D}_{a}\mathrm{D}_{b}}\left(\mathrm{D}_{a+h}\mathrm{D}_{b+h}(1+t)^{h}+\mathrm{D}_{a+2h}\mathrm{D}_{b+2h}(1+t)^{2h}+\cdots\cdots\right)
$$

por lo que recordando la fórmula práctica para tiempos y tantos fraccionarios (90, 3.º), y reemplazando m por $\frac{1}{h}$

$$\mathfrak{A}_{a,b} = {}^{\frac{1}{h}}\mathfrak{A}_{a,b} + \frac{h-1}{2} - \frac{h^2-1}{12}(\tau_a + \tau_b + \cdots\cdots + \rho)$$

ó lo que es igual,

$$\mathfrak{A}_{a,b} = \frac{h}{\mathfrak{D}_a \mathfrak{D}_b}\left(\mathfrak{D}_{a+h}\mathfrak{D}_{b+h}(1+t)^h + \mathfrak{D}_{a+2h}\mathfrak{D}_{b+2h}(1+t)^{2h} + \cdots\cdots\right)$$
$$+ \frac{h-1}{2} - \frac{h^2-1}{12}(\tau_a + \tau_b + \cdots\cdots + \rho)$$

relación que serviría para los cálculos aproximados de la anualidad ordinaria, dando á h valores arbitrarios, tanto menos superiores á 1 cuanto mayor deba ser la aproximación, con ayuda de las *Tablas de anualidades*, ó construyendo éstas sin más auxilio que *los números D*.

De la misma manera se hallarían las fórmulas para los casos de más cabezas.

PROBLEMA. Determinar la anualidad correspondiente á una renta vitalicia al 4 °/₀ sobre dos personas de 40 y 50 años.

Si ha de ser cobrable hasta la última muerte bastan las Tablas XV y XVIII, calculadas con arreglo á la de mortalidad de Deparcieux.

$$\mathfrak{A}_{\overline{40,50}} = \mathfrak{A}_{40} + \mathfrak{A}_{50} - \mathfrak{A}_{40,50}$$

$$= 15'133 + 12'526 - 10'735 = 27'659 - 10'735 = 16'924 \; pts.$$

Si lo ha de ser hasta la primera y se tuviera la Tabla XVIII, en ella se encontraría el valor 10'735, pero si se tratara de construirla sin más cálculo preliminar que los números $\mathfrak{D}$ de la de conmutación (XIX), ó se conociesen ya como supondremos, tendríamos, haciendo por ejemplo $h=20$,

$$\tau_{40} = 0'01024 \,(90,\ \text{P. } 1.^\circ);\ \tau_{50} = \frac{f(49) - f(51)}{2f(50)} = \frac{73850 - 71566}{2 \cdot 72726}$$
$$= \frac{2284}{145452} = 0'01501 \,(\text{Tabla XII});\ \rho = 0'039 \,(90,\ \text{P. } 2.^\circ)$$

$$\tau_{40}+\tau_{50}+\rho=0'01024+0'01501+0'039=0'06425;$$

$$1'04^{20}=2'191123 \text{ (Tabla, III)}; \; 1'04^{40}=4'801021$$

$$D_{40}=17138'9;\; D_{50}=10233'5;\; D_{60}=5595'83;\; D_{70}=2448'30;$$

$$D_{80}=604'344;\; D_{90}=42'7910$$

$$X_{40\cdot50}=\frac{10}{17138'9\cdot10233'5}\Big(5595'83\cdot2248'30\cdot2'191123$$

$$+604'344\cdot42'7910\cdot4'801021\Big)+9'5-\frac{399}{12}\cdot0'06425$$

$$=\frac{10}{175390933'15}\Big(27566747'630363+124156'727253\Big)$$

$$+9'5-\frac{1}{12}\cdot2'564=\frac{276909043'57616}{175390933'15}+9'5-0'214$$

$$=1'579+9'286=10'865$$

que sólo se diferencia del verdadero en 0'13, á pesar de que para no alargar más las operaciones hemos supuesto para h un valor excesivamente grande y hecho uso de Tablas heterogéneas, puesto que la de conmutación se refiere á la de las compañías inglesas y no á la de Deparcieux.

V.—Anualidades vitalicias diferidas.

96. Si la renta está constituída sobre una sola cabeza de a años, se indica que es diferida por n representando la anualidad por X_a^n y como al empezar á ser inmediata valdrá X_{a+n} y la esperanza de cobrarla es Q_a^n (88), tendremos para expresión de su valor (89, 2.°)

$$X_a^n=X_{a+n}\,Q_a^n=\frac{N_{a+n}}{D_{a+n}}\cdot Q_a^n$$

Ahora bien; según el de los números $\mathfrak{D}$,

$$\mathfrak{D}_{a+n} = f(a+n)(1+t)^{-a-n}; \quad \mathfrak{D}_a = f(a)(1+t)^{-a};$$

$$\frac{\mathfrak{D}_{a+n}}{\mathfrak{D}_a} = \frac{f(a+n)}{f(a)}(1+t)^{-n} = \mathfrak{Q}_a^n$$

por consiguiente

$$\mathfrak{X}_a^n = \frac{\mathfrak{N}_{a+n}}{\mathfrak{D}_{a+n}} \cdot \frac{\mathfrak{D}_{a+n}}{\mathfrak{D}_a} = \frac{\mathfrak{N}_{a+n}}{\mathfrak{D}_a}$$

Problema. Calcular la anualidad constituída sobre una cabeza de 35 años, diferida por 20. (Tabla xxi.)

$$\mathfrak{X}_{35}^{20} = \frac{\mathfrak{N}_{55}}{\mathfrak{D}_{35}} = \frac{84946'32}{21864'9} = 3'885.$$

Diferida sobre dos cabezas, es por la misma razón, según se haya de pagar á la primera ó segunda muerte,

$$\mathfrak{X}_{a,\,b}^n = \mathfrak{X}_{a+n,\,b+n}\,\mathfrak{Q}_{a,\,b}^n \quad \text{ó} \quad \mathfrak{X}_{\overline{a,\,b}}^n = \mathfrak{X}_{\overline{a+n,b+n}}\,\mathfrak{Q}_{\overline{a,\,b}}^n$$

pero no siendo costumbre calcular Tablas de conmutación, más que para una sola cabeza, por el gran trabajo que exigen, no pueden introducirse en estas expresiones los números $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{D}$, por lo que previamente deben determinarse las esperanzas matemáticas $\mathfrak{Q}_{a,\,b}^n$, ó $\mathfrak{Q}_{\overline{a,\,b}}^n$ por medio de las Tablas de mortalidad.

VI.—Anualidades vitalicias temporales.

97. Anualidades temporales inmediatas.

Representándolas, si han de durar n años, por ${}_n\mathfrak{X}_a$ se tendrá, según lo dicho en los párrafos 98, 2.° y 96,

$${}_n\mathfrak{X}_a = \mathfrak{X}_a - \mathfrak{X}_a^n = \frac{\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{D}_a} - \frac{\mathfrak{N}_{a+n}}{\mathfrak{D}_a} = \frac{\mathfrak{N}_a - \mathfrak{N}_{a+n}}{\mathfrak{D}_a}$$

si reposan sobre una sola cabeza, y si sobre dos,

$$ {}_{n}X_{a,b} = X_{a,b} - X_{a,b}^{n} \quad \text{ó} \quad {}_{n}X_{\overline{a,b}} = X_{\overline{a,b}} - X_{\overline{a,b}}^{n} $$

según deba pagarse á la primera ó segunda defunción.

Problema. Encontrar la anualidad inmediata cobrable por 15 años y correspondiente á una persona de 60 (Tabla XXI).

$$ {}_{15}X_{60} = \frac{N_{60} - N_{75}}{D_{60}} = \frac{52931'04 - 6553'366}{5595'83} = \frac{46377'674}{5595'83} = 8'288 $$

98. Anualidades temporales diferidas.

Si el pago en vez de ser inmediato, debiese comenzar á los m años, reposando sobre una sola cabeza, su valor sería evidentemente la diferencia entre la diferida por m años, y la que lo estuviese por $m+n$, luego

$$ {}_{n}X_{a}^{m} = X_{a}^{m} - X_{a}^{m+n} = \frac{N_{a+m}}{D_{a}} - \frac{N_{a+m+n}}{D_{a}} = \frac{N_{a+m} - N_{a+m+n}}{D_{a}} $$

y como lo mismo se verificaría si reposara sobre dos, tanto si era cobrable á la primera muerte como á la segunda,

$$ {}_{n}X_{a,b}^{m} = X_{a,b}^{m} - X_{a,b}^{m+n} \quad \text{y} \quad {}_{n}X_{\overline{a,b}}^{m} = X_{\overline{a,b}}^{m} - X_{\overline{a,b}}^{m+n} $$

Problema. Hallar la anualidad correspondiente á los datos del anterior, suponiendola diferida por 5 años.

$$ {}_{15}X_{60}^{5} = \frac{N_{65} - N_{80}}{D_{60}} = \frac{30314'12 - 2178'256}{5595'83} = \frac{27135'864}{5595'83} = 4'853. $$

Escolio. Las anualidades ordinarias ó continuas, é inmediatas ó diferidas, sobre más de dos cabezas, originarían fórmulas análogas, pero ni es costumbre constituirlas, ni para ellas se calculan Tablas, pues solamente para las combinaciones que pueden ofrecer tres edades, sería preciso determinar 100000 números distintos.

VII.—Anualidades sobre más de dos cabezas.

99. Lo que se hace en este caso, es calcularlas aproximadamente por un método debido á Simpson, sumamente rápido aunque no muy exacto, si bien lo suficiente para que en la práctica pueda emplearse, y que consiste en *buscar*, por medio de las Tablas usuales, *la edad auxiliar que puede reemplazar á dos por medio de la anualidad* $X_{a,b}$ de éstas y *combinar también de dos en dos las edades que se encuentren con cada una de las dadas*, lo cual se hace fácilmente aun cuando sean fraccionarias las que resulten, *admitiendo*, como siempre, *la proporcionalidad para variaciones próximas.*

Problema. Calcular aproximadamente la anualidad correspondiente á cuatro personas de 30, 40, 50 y 60 años y al tanto 4 %.

Agrupadas las dos primeras, hallaremos en la Tabla xx, $X_{30,40}=12'972$, valor que se encuentra comprendido entre los $X_{49}=12'807$ y $X_{48}=13'077$ de la xv, por lo que puede tomarse 48'50 como edad aproximada al conjunto de las dos.

Combinándolas con la siguiente, tendríamos $X_{45,50}=10'264$; $X_{50,50}=9'623$, ó sea 0'641 de disminución para 5 de diferencia en las edades, luego para $48'50-45=3'50$, $5:0'641::3'50:x$; $x=0'449$ y aproximadamente por lo tanto $X_{48'50,50}=9'815$, sería la anualidad sobre las tres cabezas de 30, 40 y 50 años.

Para introducir la cuarta y las demás que hubiese, procederíamos de igual manera.

Ese valor se encuentra en la xv comprendido entre $X_{60}=9'713$ y $X_{59}=10'020$, que se diferencian en 0'307, siendo $10'020-9'815=0'205$, ó sea poco más de las dos terceras partes.

Edad única aproximada 59'68, tomando por exceso la tercera parte de 100.

$X_{55,60}=7'635$; $X_{60,60}=7'065$, es decir, 0'570 de disminución por 5 de aumento en la edad, $5:0'570::4'68:x$; $x=0'534$ y

7'635—0'534=7'101, por lo que aproximadamente resulta en definitiva,

$$X_{30,\,40,\,50,\,60}=7'101$$

Escolio. Tal como nosotros hemos hecho el cálculo no se puede tener completa seguridad ni aun en la cifra de las unidades, porque para estas aproximaciones debe operarse siempre con Tablas que por lo menos contengan todas las combinaciones de las edades enteras, que siendo bastante extensas no incluímos al final por no aumentar demasiado este volumen y no ser indispensable, puesto que los procedimientos en nada se modifican.

No obstante, á pesar de haber usado la de Deparcieux, que contiene sólo las combinaciones de cinco en cinco años, el valor hallado se diferencia únicamente en 0'109 del 6'692, que se hallaría por las Tablas de las Compañías inglesas.

CAPÍTULO IV.

DIVERSAS CLASES DE PRIMAS.

I.—Primas únicas.

100. Este es el nombre que se da también á las *primas fijas correspondientes á una unidad monetaria, que se debe pagar á la muerte de una persona.*

Si su edad es a y no interviene en el contrato ninguna otra, se representa por P_a; si ha de pagarse á la primera muerte de una de las dos personas de edades a y b, por $P_{a,b}$. Las demás que en alguna cuestión especial tengan que calcularse, se deducen fácilmente de éstas, como iremos viendo.

En cualquiera de estos casos podrá tener dos valores, según *que la unidad monetaria se suponga pagada al final*, ó *al principio del período de tiempo en que la muerte ocurra; un valor intermedio* que en la práctica es el más aproximado á la verdad, si para compensar los errores por defecto y por exceso se supone pagada *á la mitad de dicho período*, y un cuarto valor que sería el verdaderamente exacto y científico, si se pagara en el mismo instante de la muerte, pero que ni puede tener hoy el más remoto interés práctico ni determinarse sin el auxilio del cálculo integral, ya que debe calcularse, no sólo con arreglo al interés continuo, sino teniendo en cuenta los valores del indefinido número de tantos instantáneos de mortalidad correspondientes á todos los momentos de la vida. Prescindiremos por consiguiente de este valor y determinaremos los otros.

1.º PRIMAS RELACIONADAS CON UNA SOLA MUERTE.

Si la prima se paga á fin de año, deberá ser la suma de las diferentes fracciones que expresan las esperanzas matemáticas de cobrarlas; porque si, por ejemplo, se supone que ha de pagarse al haber transcurrido $n+1$ años, el valor de 1 unidad monetaria sería $\frac{1}{(1+t)^{n+1}}$; pero como la persona de a años, de cuya vida depende el pago, sólo tiene una probabilidad de morir dentro de n representada por $\frac{f(a+n)-f(a+n+1)}{f(a)}$ (69, 4.º), quien haya de pagarla sólo deberá cobrar por esta probabilidad la parte de prima representada por

$$\frac{f(a+n)-f(a+n+1)}{f(a)} \cdot \frac{1}{(1+t)^{n+1}}$$

siendo su valor total el que resulte del conjunto de los que adquiera esa expresión, para todos los años, es decir, desde $n=0, 1, 2, 3$, etc., hasta llegar al valor nulo de $f(a+n+1)$ que arroje la Tabla de mortalidad.

Ahora bien; dicha expresión es igual á

$$\frac{1}{1+t} \cdot \frac{f(a+n)}{f(a)}(1+t)^{-n} - \frac{f(a+n+1)}{f(a)}(1+t)^{-n-1}$$
$$= \frac{1}{1+t}\mathfrak{Q}_a^n - \mathfrak{Q}_a^{n+1}$$

y como para todos los valores posibles de n, el sustraendo se convertiría en (88)

$\mathfrak{Q}_a^1 + \mathfrak{Q}_a^2 + \mathfrak{Q}_a^3 + \cdots\cdots = \mathfrak{X}_a$ y el segundo factor del minuendo en

$\mathfrak{Q}_a^0 + \mathfrak{Q}_a^1 + \mathfrak{Q}_a^2 + \cdots\cdots = 1 + \mathfrak{X}_a$, por ser

$\mathfrak{Q}_a^0 = \frac{f(a)}{f(a)} \cdot \frac{1}{(1+t)^0} = 1 \cdot 1 = 1$, resulta que

$$P_a = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t} X_a - X_a = \frac{1}{1+t} + \left(\frac{1}{1+t} - 1\right) X_a$$

$$= \frac{1}{1+t} + \frac{1-1-t}{1+t} X_a = \frac{1}{1+t} - \frac{tX_a}{1+t} = \frac{1-tX_a}{1+t}.$$

Pagándose la unidad monetaria al fin del primer semestre del año en que ocurra la muerte, esa unidad valdrá $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ por el adelanto de medio año al tanto t anual, y la prima, por lo tanto,

$$P'_a = \frac{1-tX_a}{1+t} (1+t)^{\frac{1}{2}} = \frac{1-tX_a}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Suponiendo, por último, que se pagara al principiar el mismo, valdría $1+t$, y la prima

$$P''_a = \frac{1-tX_a}{1+t} (1+t) = 1-tX_a$$

Problema 1.º ¿Qué primas debería entregar una persona de 40 años á otra que se comprometiera á pagar 1 peseta al final de aquel en que ocurriera su muerte, al terminar el primer semestre ó al principio del mismo, suponiendo 4 % el tanto de interés y calculándolas con arreglo á la Tabla de conmutación? (xxi.)

$$X_{40} = \frac{N_{40}}{D_{40}} (89,\ 2.^{\circ}) = \frac{259391'5}{17138'9} = 15'135;$$

$$P''_{40} = 1 - 0'04 \cdot 15'135 = 1 - 0'6054 = 0'3946 \text{ de } pta.$$

$$P_{40} = \frac{0'3946}{1'04} = 0'3794 \text{ de } pta.$$

$$P'_{40} = \text{Antlg. } (\text{Log. } 0'3946 - \tfrac{1}{2} \text{ Log. } 1'04) = \text{Antlg. } (\bar{1}'5961571$$

$$- 0'0085167) = \text{Antlg. } \bar{1}'5886404 = 0'3878 \text{ de } pta.$$

2.º Primas relacionadas con la primer muerte de dos personas.

No debiendo diferenciarse en este caso la probabilidad de muerte en cada año de la referente á la anterior, más que en estar multiplicada ésta por el factor $\frac{f(b+n)-f(b+n+1)}{f(b)}$ (69, 5.º) es evidente que, repitiendo el cálculo, tendríamos:

$$P_{a,b}=\frac{1-tX_{a,b}}{1+t}\,;\quad P'_{a,b}=\frac{1-tX_{a,b}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\,;\quad P''_{a,b}=1-tX_{a,b}\,.$$

Problema 2.º ¿Cuál sería la prima única que debería exigirse para entregar una peseta al morir una de dos personas de 30 y 40 años, al principiar el año en que muriese, el segundo semestre, ó al terminar aquél, suponiendo el interés 4 °/₀ y haciendo el cálculo con arreglo á la Tabla de Deparcieux? (xx).

$$X_{30,40}=12'972;\ P''_{30,40}=1-0'04\cdot 12'972=1-0'51888=0'4811 \text{ de } pta.$$

$$P_{30,40}=\frac{0'4811}{1'04}=0'4626 \text{ de } pta.$$

$$P_{30,40}=\text{Antlg.}(\text{Log.}0'4811-\frac{1}{2}\cdot\text{Log.}1'04)$$

$$=\text{Antlg.}(\bar{1}'6822354-0'0085167)$$

$$=\text{Antlg.}\bar{1}'6737187=0'4717 \text{ de } pts.$$

Escolio. Si en estos ejemplos y en todos sus análogos se calculase la prima con toda la exactitud posible, acudiendo al cálculo integral, el valor que se encontrase no se diferenciaría del de P', más que en 0'0001 aproximadamente, para los tantos más usuales.

II.—Transformación de las primas.

101. En la mayoría de los casos se prefiere pagar primas anuales, semestrales, trimestrales, etc., por lo que es indispensable saber *calcular las periódicas cuando se conocen las fijas*, que es el objeto de esta transformación.

Primas sobre una cabeza. Si es una sola persona de edad a quien debe satisfacerla anualmente, la serie de todas ellas constituirá una anualidad vitalicia de un término más que la ordinaria, puesto que la primera deberá entregarse al celebrar el contrato, y como la correspondiente á una unidad monetaria será, por consiguiente, $1+\mathfrak{I}_a$, la totalidad de primas p_a que deberá ser equivalente al pago de $\mathfrak{P}$ de una vez, equivaldrá á $p_a(1+\mathfrak{I}_a)$, luego

$$p_a(1+\mathfrak{I}_a)=\mathfrak{P}, \text{ de donde } p_a=\frac{\mathfrak{P}}{1+\mathfrak{I}_a}$$

102. Si ha de pagarse por fracciones $\frac{1}{m}$ suponiendo m entregas anuales, en cuyo caso se representa su valor anual por ${}^m p$ del mismo modo que se hace con la anualidad ${}^m\mathfrak{I}$, es evidente que por igual razón deberá verificarse, reemplazando la primer entrega de 1 unidad monetária por la fracción $\frac{1}{m}$, $\mathfrak{I}_a$ por ${}^m\mathfrak{I}_a$ y esta por su expresión (90, 3.º)

$${}^m p\left(\frac{1}{m}+{}^m\mathfrak{I}_a\right)=\mathfrak{P};\ {}^m p\left(\frac{1}{m}+\mathfrak{I}_a+\frac{m-1}{2m}-\frac{m^2-1}{12m^2}(\tau+\rho)\right)=\mathfrak{P};$$

$${}^m p\left(\mathfrak{I}_a+\frac{m+1}{2m}-\frac{m^2-1}{12m^2}(\tau+\rho)\right)=\mathfrak{P}$$

$${}^m p=\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{I}_a+\frac{m+1}{2m}-\frac{m^2-1}{12m^2}(\tau+\rho)}$$

valor más exacto y al cual se aproxima mucho, el de forma más sencilla adoptado en la práctica

$${}^m p=\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{I}_a+\frac{m+1}{12m^2}}.$$

Problema. ¿Cuáles serían los valores de las primas anual y trimestral, equivalentes á la única del penúltimo, suponiendo debiese hacerse el pago á la mitad del año en que la muerte ocurriera?

$$p_{40}=\frac{0'3794}{16'135}=0'0235;\ {}^4p=\frac{0'3794}{15'135+\frac{5}{192}}=\frac{0'3794}{15'135+0'026}$$

$$=\frac{0'3794}{15'161}=0'0250$$

Prima trimestral $=\frac{1}{4}\cdot 0'0250=0'0062$.

Escolio. Tratándose de semestres ó trimestres, que es lo más frecuente, el aumento que en la prima anual resulta, es aproximadamente de 4 y 5 %, por lo que basta calcular la anual y aumentarle dicho tanto, dividiendo el resultado por 2 ó 4.

Comprobación. Prima anual = 0'0235;

$$0'0235+\frac{0'0235}{100}=0'0235+0'0012=0'0247.$$

Prima trimestral$=\frac{1}{4}\cdot 0'0247=0'0062.$

103. Si la prima debiera ser temporal ó *exigible sólo durante cierto número de años*, cesando como siempre en caso de muerte, se adelantaría también la entrega de la primera; pero como el número de años ó pago se habría fijado en n, por ejemplo, la anualidad temporal ordinaria, tendría un término menos, es decir, que sería ${}_{n-1}X_a$, luego adoptando para la prima igual notación

$$^{n}p_a\,(1+{}_{n-1}X_a)=P;\quad {}_{n}p_a=\frac{P}{1+{}_{n-1}X_a}$$

Problema. ¿Qué prima anual debería pagarse durante 10 años en el mismo caso del precedente? (xix.)

$${}_{9}X_{40}=\frac{N_{40}-N_{49}}{D_{40}}=\frac{259391'5-138520'6}{17138'9}=\frac{120870'9}{17138'9}=7'0524$$

$${}_{10}p_{40}=\frac{0'3794}{8'0524}=0'0471$$

104. Primas reembolsables. Cuando las primas vitalicias ó temporales *han de ser reembolsadas en caso de vida ó muerte*, pueden serlo bajo muchas condiciones, pero las más frecuentes son en el primer caso, que el pago se verifique *al morir una persona en cualquier época*, ó *si fallece después de cierto número de años;* y en el segundo, *si esté viva ó muerta*, *hay que reembolsar las temporales en igual número de años; si únicamente hay que reembolsarlas en caso de vida* y *si*, por el contrario, *se han de reembolsar en caso de muerte.*

1.° Si las pagadas durante la vida, han de reembolsarse á la muerte, la primera unidad que se entregue dejará al asegurador el interés t durante la vida de aquél y equivaldrá, por tanto, á tX_a; el pago eventual de la segunda, será del mismo modo equivalente á tX_a^1; el de la tercera á tX_a^2, etc; luego si en vez de entregar 1 se entrega p, el conjunto será igual á $pt(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)$, debiendo por consiguiente verificarse

$$pt(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)=P, \text{ de donde } p=\frac{P}{t(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)}$$

2.° Reembolsándose tan sólo, en caso de que esa muerte no ocurra antes de n años, todas las primas de 1 unidad que se entreguen; se compondrán del valor X_a^n de la anualidad diferida n años, aumentado en el interés que producirán las temporales durante n, $n-1$, $n-2\cdots\cdots1$, luego su conjunto será igual á

$$n\,X_a^n+t({}_nX_a+{}_{n-1}X_a^1+{}_{n-2}X_a^2+\cdots\cdots)$$

y como ya sabemos que (97 y 98)

$${}_nX_a=X_a-X_a^n;\ {}_{n-1}X_a^1=X_a^1-X_a^n;\ {}_{n-2}X_a^2=X_a^2-X_a^n;\cdots\cdots$$

ese valor podrá escribirse bajo la forma más sencilla

$$nX_a^n+t(X_a-X_a^n)+t(X_a^1-X_a^n)+t(X_a^2-X_a^n)+\cdots\cdots$$

$$=(n-t)X_a^n+t(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)$$

y como á p unidades, corresponderá uno p veces mayor, deberá verificarse,

$$p\Big((n-t)X_a^n+t(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)\Big)=P$$

$$\text{y } p=\frac{P}{(n-t)X_a^n+t\left(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots\right)}$$

3.° No existiendo condición de vida ó muerte, además de entregarse una unidad en el acto, se dará la anualidad vitalicia temporal ${}_{n}X_{a}$ disminuída en el valor que tenga al celebrar el contrato $\frac{{}_{n}X_{a}}{(1+t)^{n}}$, es decir:

$$1+{}_{n}X_{a}-\frac{{}_{n}X_{a}}{(1+t)^{n}}=1+{}_{n}X_{a}\cdot\frac{(1+t)^{n}-1}{(1+t)^{n}}$$

y por lo tanto,

$$p\left(1+{}_{n}X_{a}\cdot\frac{(1+t)^{n}-1}{(1+t)^{n}}\right)=P$$

$$\text{y } p=\frac{P}{1+{}_{n}X_{a}\cdot\frac{(1+t)^{n}-1}{(1+t)^{n}}}=\frac{P}{1+{}_{n}X_{a}\left(1-\frac{1}{(1+t)^{n}}\right)}$$

4.° Si solamente se tuvieran que reembolsar en caso de vida, el verdadero valor de dicha anualidad en el acto del contrato sería la esperanza de recibirlo, ó sea de vivir n años, que sabemos (80), es su producto por la probabilidad, por consiguiente,

$$p=\frac{P}{1+{}_{n}X_{a}\left(1-\frac{1}{(1+t)^{n}}\cdot\frac{f(a+n)}{f(a)}\right)}$$

5.° Por último, si esa probabilidad fuera la de muerte,

$$p=\frac{P}{1+{}_{n}X_{a}\left(1-\frac{1}{(1+t)^{n}}\cdot\frac{f(a)-f(a+n)}{f(a)}\right)}$$

105. Primas sobre dos cabezas.

1.° *Primas vitalicias hasta la primer defunción.*—El valor de la primera, aumentado en la anualidad vitalicia $X_{a,b}$, será, representándola por $p_{a,b}$, é igualándola á su equivalente la prima única,

$$p_{a,b}\left(1+X_{a,b}\right)=P,\quad \text{de donde}\quad p_{a,b}=\frac{P}{1+X_{a,b}}$$

2.° *Primas vitalicias hasta la segunda defunción.*—Como lo único que en este caso varía, es la expresión de la anualidad $X_{\overline{a,b}}$ (91, 2.°) tendremos, adoptando, para la prima análoga notación y sustituyendo el valor de aquélla,

$$p_{\overline{a,b}} = \frac{P}{1+X_{\overline{a,b}}} = \frac{P}{1+X_a+X_b-X_{a,b}}$$

3.° *Primas temporales.*—Del mismo modo que cuando se trata de una sola cabeza (103) y por las mismas razones, es evidente que su valor será, si ha de cesar á la primer muerte, cuando ésta ocurra antes del tiempo fijado,

$$_n p_{a,b} = \frac{P}{1+_{n-1}X_{a,b}}$$

y si ha de pagarse hasta la segunda

$$_n p_{\overline{a,b}} = \frac{P}{1+_{n-1}X_{\overline{a,b}}}$$

4.° *Primas con interés.*—Hay algunas Compañías que abonan un interés por las primas que se les entregan lo cual, naturalmente, hace aumentar su valor.

Llamemos θ, que se lee *zeta*, al tanto estipulado, mientras viva la persona de a años y π al valor de la prima.

Por la primera tendrá que pagar la Compañía $\theta\pi X_a$, ó sea el interés correspondiente á la anualidad vitalicia X_a por el número de unidades entregadas π; por la segunda $\theta\pi X_a^1$; por la tercera X_a^2 y así sucesivamente, luego la prima única P deberá aumentarse en estas cantidades, sustituyéndola por

$$P+\theta\pi(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)$$

si se trata de una sola vida; y por

$$P+\theta\pi\,(X_{a,b}+X_{a,b}^1+X_{a,b}^2+\cdots\cdots)$$

si el pago del interés ha de subsistir durante la vida de dos.

La prima anual vitalicia, por ejemplo, daría, reemplazando la única por su valor, en la igualdad $p(1+X_a)=P$ que la determina antes de despejarla, más cómoda que la $p=\dfrac{P}{1+X_a}$ para obtener el de π, que también entra en el segundo miembro,

$$\pi_a(1+X_a)=P+\theta\pi_a(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots)$$

ó recordando que (89, 2.º)

$$1+X_a=\frac{D_a+N_a}{D_a}=\frac{D_a+D_{a+1}+D_{a+2}+\cdots\cdots}{D_a}=\frac{N_{a-1}}{D_a}$$

que $X_a=\dfrac{N_a}{D_a}$; $X_a^1=\dfrac{N_{a+1}}{D_a}$; $X_a^2=\dfrac{N_{a+2}}{D_a}\cdots\cdots$

y que, por consiguiente,

$$X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots=\frac{N_a+N_{a+1}+N_{a+2}+\cdots\cdots}{D_a}=\frac{S_a}{D_a}$$

resultaría para fórmula práctica

$$\pi_a\cdot\frac{N_{a-1}}{D_a}=P+\theta\pi_a\cdot\frac{S_a}{D_a};\ \pi N_{a-1}=PD_a+\theta\pi_a S_a;\ \pi_a(N_{a-1}-\theta S_a)=PD_a$$

$$\pi_a=\frac{PD_a}{N_{a-1}-\theta S_a}$$

Análogamente se tendría para las primas reembolsables (104)

$$\pi t\left(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots\right)=P+\theta\pi\left(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots\right)$$

$$\pi(t-\theta)\left(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots\right)=P$$

$$\pi=\frac{P}{(t-\theta)\left(X_a+X_a^1+X_a^2+\cdots\cdots\right)}=\frac{P}{(t-\theta)\dfrac{S_a}{D_a}}=\frac{PD_a}{(t-\theta)S_a}$$

y lo mismo en cualquier otro caso.

Habiendo calculado ya varias veces los valores de las cantidades que entran en estas igualdades, nos parece ocioso enunciar problemas que se reducirían á sencillos ejemplos numéricos, y preferimos añadir algunos detalles prácticos.

Ya hemos dicho (87), que dando las primas calculadas por las formulas, son las *puras*, que el valor real del riesgo con toda la exactitud posible, al tanto de interés usual, no producirían pérdidas ni beneficios, por lo cual las Compañías dedicadas á estos negocios calculan sus tarifas, aumentando esas primas más ó menos, si no tienen otros medios seguros de hacer que lo produzcan mayor.

No puede, sin embargo, haber una regla fija para realizar ese aumento; primero, porque al establecerse una Compañía y calcular los precios que por cada servicio debe exigir, ha de tener en cuenta las condiciones mercantiles del país, la competencia de otras sociedades análogas, etc; segundo, porque aun no siendo así, no existe conformidad de pareceres, pues mientras unos opinan que el aumento debe ser igual, siempre que lo sean las cantidades aseguradas, hay quienes creen que debería ser proporcional al valor de la prima; otros sostienen que ha de constar de una parte fija y otra variable, y no faltan tarifas cuyas primas son aún más pequeñas que las puras.

Lo general es que las Compañías hagan hoy uso de una ó dos clases de estas tres tarifas para los seguros en caso de muerte; una tomando por base la Tabla de Duvillard, que da en los primeros años una mortalidad muy elevada, pero como en cambio es demasiado lenta en los últimos, se hace un aumento en las primas puras de bastante consideración, que procura compensarse con una participación en los beneficios; otra sin participación, rebajando 10 °/₀ á las primas de la primera; y una tercera ajustada á la Tabla de las Compañías inglesas, con el correspondiente aumento en la prima.

Respecto al caso de vida, siguen ajustándose casi siempre á la Tabla de Deparcieux, completada para los tres primeros años por Kerseboom, y sin aumento en las primas, á no ser para las edades más avanzadas.

Siendo en esta clase de seguros muy conveniente para la práctica, valerse de los números representados por las letras X_a T y G (89, 1.°), incluiremos entre las Tablas la de conmutación correspondiente á los dos últimos, que llevará el número XX y contendrá sus valores con arreglo á dicha mortalidad y al tanto 4 %, aunque algunos calculan las tarifas para el 4 ½.

Admitiendo como correspondientes á la prima pura estos valores, claro está que si quiere averiguarse lo que una Compañía ha aumentado en concepto de gastos y ganancia, bastará calcular aquélla y compararla con la que figure en la tarifa.

Esta puede contener las diferentes primas únicas, vitalicias ó temporales, de seguros sobre una, dos, ó más cabezas, inmediatas ó diferidas, las cantidades asegurables, y tanto unas como otras, en la gran multitud de combinaciones que pueden hacerse.

Sabiendo calcularlas por los medios expuestos, no creemos haya necesidad de insertarlas, ni podríamos hacerlo dentro de los límites que nos hemos impuesto, pues ellas solas necesitarían un gran número de páginas.

Partiendo de los fundamentos que anteceden, pasaremos por tanto á dar algunos aunque ligeros detalles sobre los más frecuentes problemas que ocurre resolver.

CAPÍTULO V.

CÁLCULO DE LOS SEGUROS EN CASO DE VIDA.

I.—Rentas vitalicias inmediatas.

106. Conocidos los valores de las primas y anualidades vitalicias en todas sus combinaciones, fácil es resolver cualquier cuestión de seguros, por lo que sólo haremos una breve reseña de las principales operaciones á que dan lugar, empezando por ampliar las que ya conocemos.

Las rentas vitalicias sobre una ó varias cabezas, no son más que las anualidades últimamente estudiadas, cuyo valor en el primer caso sabemos es igual á X_a para cada unidad monetaria, cobrando el último término al principiar el año en que ocurre la defunción del asegurado, pero éste ó sus herederos tienen en realidad derecho á percibir la parte de renta que corresponde á los días transcurridos desde el último vencimiento hasta la muerte de aquél, cosa que algunas veces se estipula y que preceptuan los Códigos de varias naciones.

Entonces las Compañías aseguradoras tienen que aumentar el valor X_a que para constituir las de 1 unidad deben recibir, en la prima que corresponde al capital que han de entregar al ocurrir el fallecimiento, capital que tomando como término medio el principio del segundo semestre, sería de $\frac{1}{2}$ unidad subdividiendo en dos partes la renta, luego el verdadero valor exigible, será (100)

$$X_a + \frac{1}{2}\left(1 - tX_a\right) = X_a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,tX_a = X_a\left(1 - \frac{1}{2}\,t\right) + \frac{1}{2}$$

Problema 1.° ¿Qué capital necesitaría entregar una persona de 41 años para constituir una renta vitalicia de 5000 pesetas, cobrando sus herederos la parte correspondiente al último término?

Según la Tabla de Deparcieux (xv):

$$X_a = 14'908;\ 14'908\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 0'04\right) + \frac{1}{2} = 14'908 \cdot 0'98 + 0'5$$

$$= 14'60984 + 0'5 = 15'10984 \textit{ pts},$$

para la renta de 1 peseta y para 5000 por consiguiente,

$$15'10984 \cdot 5000 = 75549'20 \textit{ pts.}$$

Lo más común, sin embargo, es que se renuncie á estos intereses, entregando X_a, y si se trata de rentas semestrales ó trimestrales, ya sabemos (73) tienen por expresión $X_a + \frac{1}{4}$ y $X_a + \frac{3}{8}$.

El valor de estas rentas, como el de todas, suele también expresarse á tanto por 100, es decir, por el valor que produce un capital de 100 unidades, determinado por el TANTO VITALICIO ó *que produce* 1 *unidad monetaria*, igual evidentemente á $\frac{1}{X_a}$ que da para aquél $\frac{100}{X_a}$ y $\frac{c}{X_a}$ para un capital cualquiera c.

Problema 2.° ¿Qué tanto por 100 y qué renta vitalicia deberá producir un capital de 5000 pesetas entregado á los 41 años?

Si los términos se cobran solamente á su vencimiento, $X_a = 14'908$ (Tabla xv), por lo que el tanto vitalicio será $\frac{1}{X_a}=\frac{1}{14'908}=0'0671$ por 1, ó $6'71\,°/_0=\frac{100}{14'908}$

y la renta $\frac{5000}{14'908}=50\cdot 6'71=335'50$ pesetas anuales.

Si fuera semestral, el precio de 1 unidad sería $14'908+0'25=15'158$, y la renta $\frac{5000}{15'158}=329'86$ pesetas anuales, ó 164'93 pesetas cada semestre, y si trimestral, $\frac{5000}{14'908+0'375}=\frac{5000}{15'283}=327'16$ pesetas anuales, ú 81'79 cada trimestre.

Si los herederos cobrasen la parte correspondiente, debería verificarse, llamando R al término desconocido de la renta,

$$5000=(14'908\cdot 0'98+0'5)R;\quad R=\frac{5000}{15'10984}=309'10\ pts.,$$

ó bien $6'18\,°/_0=0'0618$ por 1, etc.

107. Hasta aquí hemos supuesto que el asegurado renunciaba á su capital, porque de no ser así, claro es que la Compañía sólo podría pagarle el interés correspondiente encargándose de sus fondos, lo cual no constituiría una operación de seguro, pero dentro de éste puede convenirse que *el capital sea reembolsado si al transcurrir determinados años vive aún el interesado*, originándose la renta que se llama Á CAPITAL RESERVADO.

Claro es que entonces el tanto vitalicio abonado por la Compañía, deberá ser más pequeño; supongamos sea x, y como siempre a los años del asegurado y n los que han de transcurrir hasta el reintegro.

Aquélla debe entregar una anualidad vitalicia temporal de

$$x\left({}_nX_a\right)=x\left(X_a-\overset{n}{X}_a\right)\ (97).$$

$$\text{Pero } X_a=\frac{G_{a+1}}{T_a}(89, 1.°);\ \overset{n}{X}_a=X_{a+n}\overset{n}{Q}_a=\frac{G_{a+n+1}}{T_{a+n}}\cdot\frac{T_{a+n}}{T_a}$$

$$=\frac{G_{a+n+1}}{T_a}(96 \text{ y } 89,\ 1.°);\quad {}_nX_a=\frac{G_{a+1}-G_{a+n+1}}{T_a}$$

por consiguiente

$$x\,({}_{n}X_{a})=x\,\frac{G_{a+1}-G_{a+n+1}}{T_{a}}$$

es lo que deberá exigirse al asegurado, y como el compromiso de restituir el capital al trascurrir n años, caso de vida, reduce el valor de 1 unidad monetaria á $1-Q_{a}^{n}=1-\frac{T_{a+n}}{T_{a}}=\frac{T_{a}-T_{a+n}}{T_{a}}$ (89, 1.º), es decir, al suyo verdadero, menos el que tiene en atención al pago eventual á los n años, esto será lo que realmente recibe la Compañía, luego tendrá que ser

$$x\cdot\frac{G_{a+1}-G_{a+n+1}}{T_{a}}=\frac{T_{a}-T_{a+n}}{T_{a}} \quad \text{y} \quad x=\frac{G_{a+1}-G_{a+n+1}}{T_{a}-T_{a+n}}$$

PROBLEMA 1.º Una persona de 45 años entrega un capital de 80000 pesetas, con la condición de percibir una renta vitalicia hasta los 70, en que se le devolverán, si aun vive. ¿Qué renta se le podrá entregar? (Tabla XX.)

$$x=\frac{T_{45}-T_{70}}{G_{46}-G_{71}}=\frac{4250'34-794'63}{59097'65-5080'65}=\frac{3455'71}{54017}$$

$$=0'063974 \text{ por } 1$$

Podrá entregársele una renta de $0'063974\cdot 80000=5117'92$ pesetas.

Este caso nunca ocurre cuando se trata de rentas sobre dos cabezas, cuyas expresiones ya conocemos (91), pues referidas á la unidad, no son más que las anualidades $X_{a,b}$ y $X_{\overline{a,b}}$, pero en cambio es frecuente, cuando se ha de pagar hasta la última muerte, reducirla desde la primera á una fracción K del valor que hasta entonces tuvo.

El de la renta en tal hipótesis, se podría descomponer en una $KX_{a,b}=KX_{a}+KX_{b}-KX_{a,b}$ de dicha fracción K cobrable hasta la segunda muerte, más otra $(1-K)\,X_{a,b}$ de la fracción complementaria, cobrable hasta la primera, siendo el total, por tanto,

$$KX_{a}+KX_{b}-KX_{a,b}+X_{a,b}-KX_{a,b}=K(X_{a}+X_{b})+(1-2K)X_{a,b}$$

Problema 2.° Calcular la renta vitalicia que podría entregarse á cambio de un capital de 30000 pesetas á dos personas de 40 y 50 años, reduciéndola á $\frac{2}{3}$ de su valor, desde la primera á la segunda muerte (Tablas xv y xviii).

Siendo $X_{40}=15'1326$; $X_{50}=12'5256$; y $X_{40;50}=10'7346$

$$\frac{2}{3}(15'1326+12'5256)+\left(1-\frac{4}{3}\right)10'7346$$

$=\frac{2}{3}\cdot 27'6582-\frac{1}{3}\cdot 10'7346=18'4388-3'5782=14'8606$ pesetas, sería el valor de 1 peseta de renta hasta la primer defunción, y de $\frac{2}{3}$ hasta la segunda; luego por 30000 pesetas podrían darse $\frac{30000}{14'8606}=2018'76$ pesetas, reducidas después del primer fallecimiento á 1345'84.

Escolio. En el caso particular de que la renta debiera reducirse á la mitad, sería $1-2K=1-2\cdot\frac{1}{2}=1-1=0$, el último término se anularía y la expresión adquiriría la forma más sencilla

$$K(X_a+X_b)\cdot$$

II.—Rentas vitalicias diferidas.

108. Estas rentas, cuyo valor para el supuesto de una unidad monetaria, será el de la anualidad vitalicia diferida (96) $X_a^n=X_{a+n}C_a^n$ acabamos de ver en el párrafo anterior, tienen por expresión numérica

$$X_a^n=\frac{G_{a+n+1}}{T_a}$$

debiéndose cobrar anualmente, y si como ocurre en la mayoría de los casos, han de percibirse por semestres ó trimestres, X_{a+n}

deberá ser reemplazado por $\mathfrak{X}_{a+n}+\frac{1}{2}$, ó $\mathfrak{X}_{a+n}+\frac{3}{8}$ (106), y por consiguiente, recordando que

$$\mathfrak{X}_{a+n}+\frac{1}{4}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}}{\mathfrak{T}_{a+n}}+\frac{1}{4}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}+\frac{1}{4}\mathfrak{T}_{a+n}}{\mathfrak{T}_{a+n}};$$

$$\mathfrak{X}_{a+n}+\frac{3}{8}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}+\frac{3}{8}\mathfrak{T}_{a+n}}{\mathfrak{T}_{a+n}}; \text{ y } \mathfrak{E}_a^n=\frac{\mathfrak{T}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a}$$

se convertirá dicho valor en

$$\mathfrak{X}_a^n=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}+\frac{1}{4}\mathfrak{T}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a} \text{ y } \mathfrak{X}_a^n=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}+\frac{3}{8}\mathfrak{T}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a}$$

Este será el capital que por cada unidad de renta deberá entregarse de una vez; pero ya vimos en el párrafo 76 que generalmente se prefiere en la práctica satisfacer una prima inmediata y temporal, cuyo valor demostramos era (103, 107, 89, 2.º)

$$_np_a=\frac{\mathfrak{P}}{1+{}_{n-1}\mathfrak{X}_a}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}}{\mathfrak{T}_a}:\left(1+\frac{\mathfrak{G}_{a+1}-\mathfrak{G}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a}\right)$$

$$=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}}{\mathfrak{T}_a}:\frac{\mathfrak{T}_a+\mathfrak{G}_{a+1}-\mathfrak{G}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}}{\mathfrak{T}_a}:\frac{\mathfrak{G}_a-\mathfrak{G}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n+1}}{\mathfrak{G}_a-\mathfrak{G}_{a+n}}$$

si la renta se ha de pagar por años, al final de los mismos, en cuyo caso entre el pago de la última prima y el de su primer término, mediarán en realidad 2, por satisfacerse aquélla al principio.

Si quiere, pues, cobrarse sin esta intermitencia, habrá que anticipar un año la renta; su valor, en vez de $\mathfrak{X}_a^n$, será $\mathfrak{X}_a^{n-1}=\frac{\mathfrak{G}_{a+n}}{\mathfrak{T}_a}$, y el de la prima anual, por tanto,

$$_np_a=\frac{\mathfrak{G}_{a+n}}{\mathfrak{G}_a-\mathfrak{G}_{a+n}}$$

Por último, si se quisiera percibir por semestres ó trimestres, hemos visto que el numerador de la anualidad vitalicia debía aumentarse en $\frac{1}{4}$ ó $\frac{3}{8}$ de T_{a+n}, pagándose á fin de año y en $\frac{1}{4}$ ó $\frac{3}{8}$ de T_{a+n-1}, por consiguiente, si se pagara al principio; luego las primas anuales, en uno y otro caso, serían

$$\frac{G_{a+n+1}+\frac{1}{4}T_{a+n}}{G_a-G_{a+n}}; \quad \frac{G_{a+n+1}+\frac{3}{8}T_{a+n}}{G_a-G_{a+n}}$$

mediando año y medio entre la última y el primer término de la renta, ó bien

$$\frac{G_{a+n}+\frac{1}{4}T_{a+n-1}}{G_a-G_{a+n}}; \quad \frac{G_{a+n}+\frac{3}{8}T_{a+n-1}}{G_a-G_{a+n}}$$

mediando sólo uno.

Problema 1.° ¿Qué capital ó prima vitalicia anual sería preciso satisfacer para asegurar á un niño al nacer una renta de 3000 pesetas desde los 25 años en adelante? (Tabla XX.)

Para asegurarle una peseta de renta, cobrable á fin de año puesto que a=0,

$$\frac{G_{26}}{T_0}=\frac{201873'37}{54244'23}=3'72174;$$

$$\text{para } 3000, \quad 3'72174 \cdot 3000=11165'22 \; pts.$$

de prima única, ó bien 25 anuales de

$$\frac{G_{26}}{G_0-G_{25}}=\frac{201873'37}{817447'06-213462'24}=\frac{201873'37}{603984'82}$$

$$=0'33506 \text{ de } pta.$$

para una peseta, y para 3000, $0'33506 \cdot 3000=1005'18$ *pts.*

Problema 2.° ¿Cuáles serían esas primas si se quisiera cobrar la renta por semestres vencidos?

$$\text{Prima única}=\frac{G_{26}+\frac{1}{4}T_{25}}{T_0}=\frac{201873'37+\frac{1}{4}\cdot 11588'87}{54244'23}$$

$$=\frac{201873'37+2897'22}{54244'23}=\frac{204770'59}{54244'23}=3'77497 \; pts.$$

$$\text{Prima anual} = \frac{G_{26} + \frac{1}{4}T_{25}}{G_0 - G_{25}} = \frac{204770'59}{603984'82} = 0'33903 \textit{ pts.}$$

para la renta de $\frac{1}{2}$ peseta semestral y para la de 1500 ó 3000 anuales, por consiguiente, 3'77497·3000=11324'91 pesetas de una vez, ó 0'33903·3000=1017'09 pesetas cada año.

109. No es frecuente diferir las rentas sobre más de una cabeza, cuyo cálculo, por otra parte, sería del todo análogo al anterior, pero sí entregar las primas con la condición de que sean reembolsadas al ocurrir el fallecimiento ó al empezar á percibir la renta.

1.° Pagando una prima única P, el asegurado no se desprende más que del interés que durante su vida le corresponde, luego el valor X_a^n de la anualidad diferida debe ser igual al interés PtX_a de la vitalicia inmediata, por lo cual deberá verificarse $PtX_a = X_a^n$ de donde (108 y 89, 1.°)

$$P = \frac{X_a^n}{tX_a} = \frac{G_{a+n+1}}{T_a} : \frac{tG_{a+1}}{T_a} = \frac{G_{a+n+1}}{tG_{a+1}}$$

cualquiera que sea la época del fallecimiento.

2.° Si debiese restituirse al empezar á percibir la renta, ó en caso de muerte anterior, esos intereses serían los correspondientes al valor de la anualidad vitalicia y temporal (107) ${}_nX_a = \frac{G_{a+1} - G_{a+n+1}}{T_a}$ y la prima exigible, por consiguiente,

$$P = \frac{G_{a+n+1}}{t(G_{a+1} - G_{a+n+1})}$$

Del mismo modo se calcularían en función de los números contenidos en las Tablas de conmutación las demás combinaciones menos usuales que podrían hacerse, y en cuanto á los valores de las primas anuales, también reembolsables, cuyas expresiones ya conocemos (104), se deducirían para cualquier caso por una sencilla sustitución.

Así, por ejemplo, si quisiéramos aplicar la Tabla á la determinación de las comprendidas en el primer supuesto, ó sea de las reembolsables en cualquier época que la muerte ocurra, bastaría reemplazar en la fórmula del párrafo 104 las cantidades P, X_a, X_a^1, $X_a^2 \cdots\cdots X_{a+n-1}$ por sus valores (108)

$$\frac{G_{a+n+1}}{T_a}, \frac{G_{a+1}}{T_a}, \frac{G_{a+2}}{T_a}, \frac{G_{a+3}}{T_a} \cdots\cdots\cdots \frac{G_{a+n}}{T_a}$$

para que suprimiendo el denominador común á los dos términos de la fracción, resultase

$$p = \frac{G_{a+n+1}}{t(G_{a+1}+G_{a+2}+G_{a+3}+\cdots\cdots\cdots+G_{a+n})}$$

PROBLEMA 1.° Calcular la cantidad que necesitaría una persona de 35 años para constituirse una renta vitalicia de 3000 pesetas desde los 50, con la condición de que fuera restituída á su familia al ocurrir su muerte (Tabla XX).

$$P = \frac{G_{51}}{0'04 \cdot G_{36}} = \frac{40873'55}{0'04 \cdot 112907'11} = \frac{40873'55}{4516'2844} = 9'04805$$

Necesitaría 9'04805·3000=27144'15 *pts.*

PROBLEMA 2.° Calcularla en el supuesto de que se devolviese á su familia, si moría antes de disfrutar la renta, ó á él mismo, si cumplía los 50 años.

$$P = \frac{G_{51}}{0'04(G_{36}-G_{51})} = \frac{40873'55}{0'04(112907'11-40873'55)}$$

$$= \frac{40873'55}{0'04 \cdot 72033'56} = \frac{40873'55}{2881'3424} = 14'18559$$

Necesitaría 14'18559·3000=42556'77 *pts.*

PROBLEMA 3.° ¿Qué primas anuales debería pagar si al ocurrir su muerte en cualquier época tenían que ser entregadas á sus herederos?

$$p = \frac{G_{51}}{0'04(G_{36}+G_{37}+G_{38}+G_{39}+G_{40}+G_{41}+G_{42}+G_{43}+G_{44}+G_{45}+G_{46}+G_{47}+G_{48}+G_{49}+G_{50})}$$

$$= \frac{40873'55}{0'04 \cdot 1162789'60} = \frac{40873'55}{46511'584} = 0'87878.$$

La prima sería de 0'87878·3000=2636'34 *pts.*

III.—Adquisición de rentas vitalicias y capitales.

110. Las rentas vitalicias, como todo cuanto representa el valor de un capital, pueden traspasarse, *cediendo definitiva ó temporalmente la que deba cobrarse en vida*, ó *la cantidad que la produzca en caso de muerte*. Lo primero constituye la COMPRA DE UN USUFRUCTO; lo segundo, la DE UN CAPITAL.

Pudiera también comprarse el usufructo de un capital, pero el primero de los casos citados comprende á éste, puesto que el capital sólo tiene verdadero valor y se aprecia por el empleo que de él se puede hacer, para obtener por su medio un producto periódico.

1.º Comprado el usufructo total de una renta vitalicia, ésta deja de percibirse al morir la persona que lo cedió, y el valor del correspondiente á 1 unidad monetaria será, por consiguiente, X_a siendo a la edad á que se cede, mas es claro que esta prima pura, calculada al tanto 4 °/₀ ó al corriente en la plaza en que la operación se verifique, no produciría ganancia ninguna, y por lo tanto, el precio que por el mismo podrá ofrecerse, será $PX_a - B$, llamando B al beneficio que se desee obtener y P á la prima fija.

PROBLEMA 1.º ¿Cuánto podría darse por el usufructo de una renta vitalicia de 2000 pesetas sobre una cabeza de 40 años, deseando quedase un beneficio de 5000? (Tabla XIX.)

$$\text{Valor neto} = 2000 \cdot X_{40} = 2000 \cdot \frac{N_{40}}{D_{40}} = 2000 \cdot \frac{259391'5}{17138'9}$$

$$= 2000 \cdot 15'13443 = 30268'86 \textit{ pts.},$$

Podrían darse, 30268'86 — 5000 = 25268'86 *pts.*

2.º Si el usufructo debiera ser temporal, el de la renta de 1 unidad, cobrable á lo más durante n años sobre la cabeza de su propietario, tendría por valor la anualidad ${}_nX_a$ y el beneficio que se quisiera obtener debería rebajarse como en el caso anterior, del que correspondiera á la prima.

Problema 2.º ¿Cuánto podría darse en el caso anterior, si sólo se comprara la renta por 15 años? (97).

$$\text{Valor neto}=2000\,{}_{15}X_{40}=2000\cdot\frac{N_{40}-N_{55}}{D_{40}}=2000\cdot\frac{259391'5-84946'32}{17138'9}$$

$$=2000\cdot\frac{174445'18}{17138'9}=2000\cdot 10'17832=20356'64 \text{ pts.}$$

Podrían darse 20356'64 − 5000 = 15356'64 *pts.*

3.º Por último, si lo que se traspasa es el capital, desde que ocurra el fallecimiento, el comprador estará privado de sus intereses durante toda la vida del vendedor, es decir, de tX_a por cada unidad de capital, luego el verdadero valor de esta propiedad sólo será de $1-tX_a$, que análogamente y por iguales motivos, deberá multiplicarse por el valor del capital, restando del producto la ganancia que se quisiera realizar.

Problema 3.º ¿En cuánto podría comprarse un capital de 50000 pesetas, cuya renta ha de disfrutar durante su vida una persona de 40 años, para ganar 10000 pesetas?

$$1-0'04X_{43}=1-0'04\cdot\frac{N_{43}}{D_{43}}=1-0'04\cdot\frac{259391'5}{17138'9}$$

$$=1-0'04\cdot 15'13443=1-0'6053772=0'3946228$$

Valor neto = 0'3946228 · 50000 = 19731'14 *pts.*

Podrían darse 19731'14 − 10000 = 9731'14 *pts.*

Estas cuestiones pueden naturalmente originar combinaciones particulares, en las que no creemos preciso detenernos, no pudiendo ofrecer su resolución grandes dificultades.

CAPÍTULO VI.

SEGUROS EN CASO DE MUERTE.

I.—Seguro de un capital sobre la vida entera de una persona.

111. Calculados para todos los casos más importantes los valores de las primas únicas y periódicas, réstanos sólo, como hemos hecho en los de vida, ampliar algo los detalles prácticos referentes á cada uno de ellos.

1.° *Primas fijas.*—El valor $1-t\mathfrak{X}_a$ que entra en la expresión de todas las primas únicas (100, 1.°) se convierte, refiriéndolo á la Tabla de conmutación (XIX), en

$$1-t\mathfrak{X}_a=1-t\cdot\frac{\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{D}_a}=\frac{\mathfrak{D}_a-t\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{D}_a}$$

y por lo tanto, según que la Compañía aseguradora quiera suponer disponible el capital al principiar el año en que la muerte ocurra, al tener lugar ésta ó al terminar aquél, la cantidad exigible sin recargo por cada unidad asegurada, será (100, 1.°)

$$\mathfrak{P}_a=\frac{\mathfrak{D}_a-t\mathfrak{N}_a}{\mathfrak{D}_a};\ \ \mathfrak{P}_a=\frac{\mathfrak{D}_a-t\mathfrak{N}_a}{(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}_a};\ \ \mathfrak{P}_a=\frac{\mathfrak{D}_a-t\mathfrak{N}_a}{(1+t)\,\mathfrak{D}_a}$$

Observando ahora que (89, 2.°)

$$\mathfrak{D}_a-t\mathfrak{N}_a=\mathfrak{D}_a+\mathfrak{N}_a-\mathfrak{N}_a-t\mathfrak{N}_a=\mathfrak{D}_a+\mathfrak{N}_a-(1+t)\mathfrak{N}_a$$

$$=\mathfrak{N}_{a-1}-(1+t)\mathfrak{N}_a=(1+t)\mathfrak{M}_a$$

pueden convertirse en las fácilmente calculables por logaritmos,

$$\mathfrak{P}_a=\frac{(1+t)\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{D}_a};\ \text{Log.}\mathfrak{P}_a=\text{Log.}(1+t)+\text{Log.}\mathfrak{M}_a-\text{Log.}\mathfrak{D}_a$$

$$\mathfrak{P}_a=\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{D}_a};\ \text{Log.}\mathfrak{P}_a=\frac{1}{2}\text{Log.}(1+t)+\text{Log.}\mathfrak{M}_a-\text{Log.}\mathfrak{D}_a$$

$$P_a = \frac{M_a}{D_a}\ ;\ \text{Log.}P_a = \text{Log.}M_a - \text{Log.}D_a$$

Para facilitar la aplicación de estas fórmulas, á cuyo segundo miembro puede agregarse el logaritmo del capital asegurado, se han construído también Tablas que contienen para todas las edades los de M y D, pero que no siendo indispensables nos abstenemos de insertar.

Problema 1.º ¿Qué prima pura debería exigirse por el seguro de un capital de 30000 pesetas, teniendo el asegurado 40 años? (Tabla XIX.)

Pagándolo al fin del año en que tuviera lugar el fallecimiento,

$$P_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} = \frac{6503'07}{17138'9} = 0'379442$$

Deberían exigirse, 0'379433·30000=11382'99 *pts.*

Pagándolo al ocurrir lo defunción

$$\text{Log.}P_{40} = \frac{1}{2}\text{Log.}1'04 + \text{Log.}6503'07 - \text{Log.}17138'9$$

$$= 0'0085167 + 3'8131185 - 4'2339849 = 3'8216352 - 4'2339849$$

$$= \bar{1}'5876503 = \text{Log.}0'386955$$

Deberían exigirse, 0'386955·30000=11608'65 *pts.*

Suponiéndolo disponible al principio del año en que ocurra la muerte,

$$P_{40} = \frac{1'04 \cdot M''_{40}}{D_{40}} = 1'04 \cdot 0'379442 = 0'394620$$

Deberían exigirse 0'394620·30000=11838'60 *pts.*

2.º *Primas vitalicias.*— También reemplazando P y X_a por sus respectivos valores, se convierten las primas anuales (101) en las expresiones calculables por logaritmos

$$p_a=\frac{\frac{M_a}{D_a}}{1+\frac{N_a}{D_a}}=\frac{M_a}{D_a+N_a}=\frac{M_a}{N_{a-1}};\ p_a=\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}M_a}{N_{a-1}};\ p_a=\frac{(1+t)M_a}{N_{a-1}}$$

según se suponga, cobrable el capital al fin del año en que la muerte ocurra, inmediatamente á ésta, ó al principiar aquél, y en cuanto á las que se paguen por fracciones de año, se determinarán, primero los valores de P y X_a, como acabamos de hacerlo, y se sustituirán en las expresiones conocidas (102).

PROBLEMA 2.° ¿Qué prima anual debería exigirse en el primer caso del problema anterior?

$$p_{40}=\frac{M_{40}}{N_{39}}=\frac{6503'07}{259391'5}=0'025070$$

Prima anual $=0'025070\cdot30000=752'10$ *pts.*

ESCOLIO. En todos los problemas expresamos los resultados hasta centésimas, aunque en la práctica sólo se toma la parte entera, para tener seguridad de que las cifras de ésta son exactas, la cual no podría tenerse, si sólo se calcularan las que deben componerla.

112. 1.°—*Primas temporales.*—Siendo ${}_{n-1}X_a=\frac{N_a-N_{a+n-1}}{D_a}$ (97)

será $1+{}_{n-1}X_a=\frac{D_a+N_a-N_{a+n-1}}{D_a}=\frac{N_{a-1}-N_{a+n-1}}{D_a}$

y la prima temporal, si el capital se supone reservado al principiar el año de la muerte

$${}_np_a=\frac{(1+t)M_a}{N_{a-1}-N_{a+n-1}}$$

y si se pagase al ocurrir ésta ó terminar aquél, sería por consiguiente,

$${}_np_a=\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}M_a}{N_{a-1}-N_{a+n-1}};\ \text{ó}\ {}_np_a=\frac{M_a}{N_{a-1}-N_{a+n-1}}$$

PROBLEMA 1.º ¿Cuál sería, en el caso de los anteriores, el valor de la prima exigible por 12 años, si el capital se supusiera disponible al principiar aquel en que la muerte ocurriese? (Tabla XIX.)

$$ {}_{12}p_{40} = \frac{1'04 \cdot M_{40}}{N_{39} - N_{51}} = \frac{1'04 \cdot 6503'07}{259391'5 - 118604'2} = \frac{6763'1928}{140787'3} $$

$$ = 0'048038 $$

Prima por 12 años $= 0'048038 \cdot 30000 = 1441'14$ *pts.*

2.º *Primas con interés.*—Si en la fórmula de estas primas vitalicias (105, 4.º) reemplazamos P por sus valores, tendremos para el principio, medio y fin del año, suprimiendo el factor D_a común á los dos términos

$$ \pi = \frac{(1+t)M_a}{N_{a-1} - \theta S_a}; \quad \pi = \frac{(1+t)^{\frac{1}{2}} M_a}{N_{a-1} - \theta S_a}; \quad \pi = \frac{M_a}{N_{a-1} - \theta S_a} $$

PROBLEMA 2.º ¿Qué prima anual podría satisfacerse en el caso de los precedentes, si el capital se abonara al ocurrir la muerte y la Compañía aseguradora abonase por ellas 3 % de interés? (Tabla XIX.)

$$ \pi = \frac{(1'04)^{\frac{1}{2}} M_{40}}{N_{39} - 0'03 \cdot S_{40}} = \frac{\sqrt{1'04} \cdot 6503'07}{259391'5 - 0'03 \cdot 3277936} $$

$$ = \frac{1'02 \cdot 6503'07}{259391'5 - 98338'08} = \frac{6633'1314}{161053'42} = 0'041186 $$

Podrían satisfacerse $0'041186 \cdot 30000 = 1235'58$ pesetas anuales.

Para las primas reembolsables hay que aplicar las fórmulas deducidas en el párrafo 104.

ESCOLIO. De aquí en adelante sólo determinaremos las primas fijas y las vitalicias anuales, suponiendo, en conformidad con la costumbre, que el capital se refiere al pago á fin de año de 1000 unidades, tipo adoptado generalmente en las tarifas, pues los ejemplos resueltos nos parecen suficientes para el cálculo de cualquier otra, al variar alguna de las condiciones examinadas.

II.—Seguros temporales y diferidos.

113. *Prima fija en los temporales* (86).—La pura correspondiente á este caso será la diferencia entre los precios de dos seguros por la vida entera á las edades a y $a+n$, refiriendo este último al valor que tenga en el momento de celebrar contrato, para lo cual bastará multiplicar el de la prima ordinaria por la esperanza matemática Q_a^n de cobrar una unidad al transcurrir n años, por consiguiente (89, 2.º),

$$_nP_a = P_a - P_{a+n}\,Q_a^n = \frac{M_a}{D_a} - \frac{M_{a+n}}{D_{a+n}} \cdot \frac{D_{a+n}}{D_a} = \frac{M_a - M_{a+n}}{D_a}$$

2.º *Primas anuales.*—Respecto á la prima que periódicamente se prefiera pagar durante un número m de años, casi siempre igual á la duración n del seguro, sería sustituyendo este valor en la expresión de la vitalicia temporal (103 así como el de $1 + {}_{m-1}X_a$ (112)

$$_mp_a = \frac{M_a - M_{a+n}}{D_a} : \frac{N_{a-1} - N_{a+m-1}}{D_a} = \frac{M_a - M_{a+n}}{N_{a-1} - N_{a+m-1}}$$

Problema 1.º Calcular la prima fija y la que debería pagarse durante 10 años, para constituir un seguro temporal de 15 sobre una cabeza de 30 (Tabla xix).

$$1.^{\circ}\ \text{Prima única} = {}_{15}P_{30} = \frac{M_{30} - M_{45}}{D_{30}} = \frac{8385'77 - 5694'72}{27707'1}$$

$$= \frac{2691'05}{27707'1} = 0'097$$

Para un seguro de 1000 pesetas, \$, etc, 97 pesetas ó \$.

$$2.^{\circ}\ \text{Prima temporal} = {}_{10}p_{30} = \frac{M_{30} - M_{45}}{N_{29} - N_{39}} = \frac{2691'05}{502353'5 - 276530'4}$$

$$= \frac{2691'05}{225823'1} = 0'012$$

Para un seguro de 1000 pesetas, 12 pesetas anuales.

3.° *Primas fijas y temporales en los diferidos.*—Si el seguro, por el contrario, se difiere n años, su valor será evidentemente el sustraendo del caso anterior, es decir, el de la vida entera á la edad $a+n$, referido a n años antes, ó sea $P_{a+n}\,Q_a^n$, luego

$$P_a^n = \frac{M_{a+n}}{D_a} \quad \text{y} \quad {}_mp_a = \frac{M_{a+n}}{N_{a-1} - N_{a+m-1}}$$

Problema 2.° Determinar la prima fija y la que debería pagarse durante 10 años para constituir un seguro diferido en 20, sobre una cabeza de 40.

$$1.^{\circ} \quad P_{40}^{20} = \frac{M_{60}}{D_{40}} = \frac{3344'79}{17138'9} = 0'193, \text{ ó } 193 \text{ por } 1000 \textit{ pts.}$$

$$2.^{\circ} \quad {}_{10}p_{40} = \frac{M_{60}}{N_{39} - N_{49}} = \frac{3344'79}{276530'4 - 138520'6} = \frac{3344'79}{128009'8}$$

$=0'026$, ó 26 pesetas anuales por 1000.

4.° *Prima vitalicia.*—En el seguro temporal no es posible la prima vitalicia, puesto que al transcurrir los n años termina el contrato, pero sí en las diferidas, cuyo valor (101 y 111, 2.°) será

$$p_a = \frac{M_{a+n}}{D_a} : \frac{N_{a-1}}{D_a} = \frac{M_{a+n}}{N_{a-1}}$$

Problema 3.° ¿Cuál sería la prima vitalicia anual correspondiente al seguro anterior? (Tabla XIX.)

$$p_{40} = \frac{M_{60}}{N_{39}} = \frac{3344'79}{276530'4} = 0'013, \text{ ó } 13 \text{ pesetas anuales por } 1000.$$

III.—Seguros á término fijo y contraseguros.

114. Para que un seguro á término fijo, sea tal seguro sobre la vida, es preciso imponer la condición de que otra persona viva al fallecer el asegurado, pues de no existir ésta, la cuestión se reduciría á determinar el valor de un capital cobrable á los n

años, ó sea á un sencillo problema de descuento compuesto si se trataba de prima fija, y á sustituir este valor en las fórmulas conocidas, si de primas periódicas, fuese cual fuese su carácter.

Supongamos, pues, el caso del seguro de un capital de supervivencia, que deba ser pagado á los n años, si ha fallecido una persona de edad b, á otra de a, en caso de vida.

1.° *Prima fija.* — El valor de 1 unidad cobrable á los n años, sin condición, sería $\frac{1}{(1+t)^n}$, luego con la doble condición de vivir la de a años y haber muerto la de b, será (69, 5.°)

$$\mathrm{P} = \frac{f(a+n)}{f(a)} \cdot \frac{f(b)-f(b+n)}{f(b)} \cdot \frac{1}{(1+t)^n}$$

$$= \frac{f(a+n)}{f(a)}(1+t)^{-n} - \frac{f(a+n)f(b+n)}{f(a)f(b)}(1+t)^{-n}$$

$$= \mathrm{P}^n_a - \mathrm{P}^n_{a,b} \quad (88 \text{ y } 91,\ 1.°)$$

2.° *Prima anual.* — Esta prima no puede admitirse en tal clase de seguros, más que reposando sobre las dos cabezas y con el carácter de temporal por un intervalo de tiempo $m < n$; porque de no ser así, al acercarse el término del contrato sin haber muerto el asegurado, el interés de éste estaría en no pagar las primas, y la Compañía aseguradora no llegaría á percibir el equivalente del riesgo corrido.

La expresión de la prima será, por consiguiente, la deducida en el párrafo 105, 3.°, reemplazando n por m, sin que ésta ni la anterior puedan simplificarse más, por no existir, según dijimos (96), Tablas de conmutación referentes á dos cabezas.

Problema. Una persona de 35 años quiere asegurar 1000 pesetas á una hermana suya de 20, para el caso en que haya muerto al llegar ésta á los 40 años. ¿Qué prima fija, ó temporal por 8 años, bastaría que entregase?

Empezando en los 10 años la Tabla de mortalidad inglesa, usaremos la de Deparcieux (x).

$$\mathrm{P} = \frac{f(40)}{f(20)} \cdot \frac{f(35)-f(55)}{f(35)} \cdot \frac{1}{1'04^{20}}$$

$$= \frac{657}{814} \cdot \frac{694-526}{694} \cdot \frac{1}{2'191123} \quad (\text{Tabla III})$$

$$=\frac{657 \cdot 168}{814 \cdot 694 \cdot 2'191123}=\frac{91982}{1237166'04}=0'074.$$

Prima fija $=74$ pesetas.

$$p=\frac{0'074}{1+{}_7X_{35,\,20}}=\frac{0'074}{1+X_{35,\,20}-X^7_{35,\,20}} \quad (97)$$

$$=\frac{0'074}{1+X_{35,\,20}-X_{42,\,22}\dfrac{f(42)}{f(35)}\cdot\dfrac{f(27)}{f(20)}\cdot\dfrac{1}{1'047}} \quad (96 \text{ y } 91,\ 1.^{\circ})$$

$$=\frac{0'074}{1+13'9039-12'7593\cdot\dfrac{643 \cdot 758}{694 \cdot 814 \cdot 1'315931}} \quad (\text{Tablas XX y III})$$

$$=\frac{0'074}{14'9039-12'7593\cdot\dfrac{487391}{745689'12}}=\frac{0'074}{14'9039-12'7593 \cdot 0'65}$$

$$=\frac{0'074}{14'9039-8'2935}=\frac{0'074}{6'6104}=0'011.$$

Prima vitalicia durante 8 años $=11$ pesetas.

3.° El *contraseguro* (86), por el cual se compromete una Compañía á reembolsar las cantidades que una persona deba pagar periódicamente, con cualquier objeto, si esta persona muere en determinado plazo, se diferencia de los demás seguros temporales, en ser variable el capital asegurado.

Prima fija.—Si n designa el número de entregas anuales de 1 unidad monetaria que el asegurado debe efectuar, coincidiendo la primera con el contrato de contraseguro, la Compañía garantiza el reembolso de este seguro temporal, cuyo precio sabemos es ${}_nP_a$ (113, 1.°); la segunda entrega representa un seguro temporal de 1 año menos, cuyo precio por igual razón sería ${}_{n-1}P_{a+1}$ el cual debe ser multiplicado por la esperanza matemática de vivir 1 año Q^1_a para encontrar su valor en el acto del contrato; la tercera, por igual razón, valdría ${}_{n-2}P_{a+2}\,Q^2_a$, y así sucesivamente hasta la última, equivalente á ${}_1P_{a+n-1}\,Q^{n-1}_a$, luego en total

$$P={}_nP_a+{}_{n-1}P_{a+1}\,Q^1_a+{}_{n-2}P_{a+2}\,Q^2_a+\cdots\cdots+{}_1P_{a+n-1}\,Q^{n-1}_a$$

ó sustituyendo en vez de esas cantidades sus expresiones numéricas (113, 1.º, y 89, 2.º)

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{M}_a - \mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{D}_a} + \frac{\mathrm{M}_{a+1} - \mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{D}_{a+1}} \cdot \frac{\mathrm{D}_{a+1}}{\mathrm{D}_a} + \frac{\mathrm{M}_{a+2} - \mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{D}_{a+2}} \cdot \frac{\mathrm{D}_{a+2}}{\mathrm{D}_a} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\mathrm{M}_{a+n-1} - \mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{D}_{a+n-1}} \cdot \frac{\mathrm{D}_{a+n-1}}{\mathrm{D}_a}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}_a}(\mathrm{M}_a - \mathrm{M}_{a+n} + \mathrm{M}_{a+1} - \mathrm{M}_{a+n} + \mathrm{M}_{a+2} - \mathrm{M}_{a+n} + \cdots\cdots + \mathrm{M}_{a+n-1} - \mathrm{M}_{a+n})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}_a}(\mathrm{M}_a + \mathrm{M}_{a+1} + \mathrm{M}_{a+2} + \cdots\cdots + \mathrm{M}_{a+n-1} - n\,\mathrm{M}_{a+n})$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}_a}(\mathrm{R}_a - \mathrm{R}_{a+n} - n\mathrm{M}_{a+n})$$

ó lo que es lo mismo:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{R}_a - \mathrm{R}_{a+n} - n\mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{D}_a}$$

4.º *Prima temporal.*—El contraseguro se paga generalmente por primas vitalicias anuales, cuyo valor será, recordando la expresión de las temporales (103), y el de $1 + {}_{n-1}\mathrm{X}_a$ (112).

$${}_n p_a = \frac{\mathrm{R}_a - \mathrm{R}_{a+n} - n\,\mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{D}_a} : \frac{\mathrm{N}_{a-1} - \mathrm{N}_{a+n-1}}{\mathrm{D}_a} = \frac{\mathrm{R}_a - \mathrm{R}_{a+n} - n\,\mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{N}_{a-1} - \mathrm{N}_{a+n-1}}$$

si se paga en los mismos plazos y el del seguro coincide con el de los pagos, bastando en caso contrario reemplazar n por el número m de años durante los cuales quiera satisfacerse, como hemos hecho en otras ocasiones (113, 2.º).

Problema. Una persona de 20 años tiene que pagar 1000 pesetas durante 18. ¿Qué prima fija ó anual podría satisfacer para asegurar á su muerte el reembolso de las cantidades entregadas por el primer concepto? (Tabla xix.)

$$P=\frac{R_{20}-R_{38}-18\cdot M_{38}}{D_{20}}=\frac{311038'8-153353'2-18\cdot 6855'46}{43914'9}$$

$$=\frac{157685'6-123398'28}{43914'9}=\frac{34287'34}{43914'9}=0'781$$

Prima fija = 781 pesetas.

$${}_{18}p_{20}=\frac{R_{20}-R_{38}-18\cdot M_{38}}{N_{19}-N_{37}}=\frac{34287'34}{862657'6-313447'4}$$

$$=\frac{34287'34}{549210'2}=0'062$$

Prima temporal durante 18 años = 62 pesetas.

IV.—Seguros mixtos y préstamos vitalicios.

115. Si por virtud de un seguro mixto (86) ha de pagarse un capital al terminar cierta época prefijada ó al fallecer durante la misma, la Compañía aseguradora aceptará el doble encargo de asegurar el capital por n años en caso de muerte y en caso de vida.

1.º *Prima fija.*—El primero, según hemos demostrado (113, 1.º) es igual á $\frac{M_a-M_{a+n}}{D_a}$ y el valor del segundo será $Q_a^n=\frac{D_{a+n}}{D_a}$ (89, 2.º), luego recordando que $\frac{M_a}{D_a}=P_a$ (111), tendríamos,

$$P=\frac{M_a-M_{a+n}}{D_a}+\frac{D_{a+n}}{D_a}=\frac{M_a-M_{a+n}+D_{a+n}}{D_a}.$$

2.º *Prima temporal.*—Por la misma naturaleza del seguro mixto, la prima vitalicia anual no podrá ser constante para toda la vida, sino que terminará antes que el plazo, ó al mismo tiempo, que es lo más común.

Supondremos esto último, puesto que en otro caso bastaría reemplazar n por el valor m del tiempo convenido, y sustituyendo como anteriormente en la expresión de la temporal (103) la de la prima fija y la de $1+{}_{n-1}X_a$ (112) tendremos:

$$ {}_{n}p_{a} = \frac{M_a - M_{a+n} + D_{a+n}}{D_a} : \frac{N_{a-1} - N_{a+n-1}}{D_a} = \frac{M_a - M_{a+n} + D_{a+n}}{N_{a-1} - N_{a+n-1}} . $$

PROBLEMA. Determinar las primas fija y temporal correspondientes á un seguro mixto por 20 años de 1000 pesetas, sobre una cabeza de 30. (Tabla XIX.)

$$ P = \frac{M_{30} - M_{50} + D_{50}}{D_{50}} = \frac{8385'77 - 4905'75 + 10233'5}{27707'1} . $$

$$ = \frac{13713'52}{27707'1} = 0'495 $$

Prima fija=495 pesetas.

$$ {}_{20}p_{30} = \frac{M_{30} - M_{50} + D_{50}}{N_{29} - N_{49}} = \frac{13713'52}{502353'5 - 138520'6} $$

$$ = \frac{13713'52}{363832'9} = 0'038 $$

Prima temporal durante 20 años=38 pesetas.

3.º Los *préstamos vitalicios* (86) no son más que seguros en caso de muerte, pero en los cuales la Compañía aseguradora adelanta el capital que debía pagar al ocurrir el fallecimiento, ó en una época fija.

Todas las combinaciones de los seguros, sean por la vida entera ó temporales, quiérase ó no reembolsar el capital al fin del tiempo y páguense las primas durante toda la vida ó temporalmente, serán aplicables á este caso, menos el pago de una prima fija, que rechaza la misma esencia de la cuestión.

La única diferencia consiste, en que el tanto por 100 que por el préstamo exija la Compañía, se fijará naturalmente con arreglo á la ganancia que desee obtener, y deberá agregarse á la prima del correspondiente seguro, referido á igual unidad.

Así, por ejemplo, refiriéndonos al último problema para abreviar; si una persona de 30 años tomase 100000 pesetas á préstamo vitalicio y al 5 % deseando amortizarlo en 20 años, sin más que pagar las primas, debería satisfacer la correspondiente al seguro mixto que reembolsaría el capital, y calculada con las necesarias cifras sería 0'03772 por unidad, que aumentada en 0'05, se convierte en 0'08772 ó sea 8772, pesetas anuales por las 100000.

17

Si al finalizar los 20 años se quisieran pagar las 100000 pesetas, el seguro en vez de ser mixto, sería temporal, sin que el cálculo ofreciese más diferencia.

V.—Seguro de rentas.

116. El seguro de una renta en caso de muerte, puede también hacerse de varios modos, siendo los más importantes, el de una RENTA VITALICIA ordinaria, *pagadera á una persona durante su vida, al ocurrir la muerte de otra*, que puede ser DIFERIDA ó TEMPORAL, agregando la condición de *que el fallecimiento ocurra después ó antes de una época fija;* el SEGURO TEMPORAL DE UNA RENTA TEMPORAL, si *sólo ha de pagarse hasta cierta edad;* y el de una RENTA PERPETUA, *que cobrarán los herederos* sean quienes sean.

1.° El valor de la renta de supervivencia, sin condiciones accesorias, lo determinamos ya (84) por el procedimiento más conocido, y se deduce además de una consideración muy sencilla.

Pagar dicha renta á una persona de edad b á la muerte de un asegurado de a años, será evidentemente lo mismo que satisfacer desde el momento del contrato una vitalicia á aquélla, y recibir otra igual sobre las dos cabezas, hasta la primera muerte, luego

$$P = X_b - X_{a,b}; \quad p = \frac{P}{1 + X_{a,b}} \quad (105,\ 1.^\circ)$$

si se supone, como es lo natural y frecuente, que la vitalicia se pague sólo hasta la primera muerte, pues si el asegurado se comprometiese á pagarla durante toda su vida, aun cuando la persona sobre quien reposa falleciese primero, debería aplicarse la fórmula deducida en el párrafo 84.

2.° El seguro diferido, sería análogamente diferencia entre las dos rentas de la misma clase, y por lo tanto

$$P = X^n_b - X^n_{a,b}; \quad p = \frac{P}{1 + {}_{n-1}X_{a,b}} \quad (105,\ 3.^\circ)$$

suponiendo temporal esta última, ya que de no ser así, debería aplicarse la anterior.

117. 1.° Si fuese temporal, equivaldría evidentemente, siendo vitalicia la renta, al seguro ordinario calculado en el momento del contrato, menos el del que se hiciera al fin del tiempo n, si ambas personas vivían aún, referido á aquel instante, es decir, multiplicado por la esperanza matemática $Q^n_{a,b}$ por consiguiente

$$P = X_b - X_{a,b} - \left(X_{b+n} - X_{a+n,\,b+n}\right) Q^n_{a,b}$$

determinándose cualquier prima anual, una vez calculada la única, por las fórmulas ya citadas tantas veces.

Problema 1.° Una persona de 40 años quiere asegurar 1000 pesetas de renta á su esposa que tiene 30, para el caso en que muera antes de llegar ésta á los 50. ¿Cuál sería la prima única correspondiente? (Tablas III., X, XV y XVIII)

$$P = X_{30} - X_{40,30}\,(X_{50} - X_{60,50})\,Q^{20}_{40,30}$$

$$= 16'8095 - 12'9715 - (12'5256 - 8'0596)\frac{463\cdot581}{657\cdot734}\cdot\frac{1}{1'04^{20}}\ (91,\ 1.°)$$

$$= 3'8380 - 4'4660\cdot\frac{269003}{482238}\cdot\frac{1}{2'191123} = 3'838 - \frac{1201367'398}{1056583'458}$$

$$= 3'838 - 1'137 = 2'701$$

Prima fija=2701 pesetas.

2.° Debiendo ser temporal la renta, además del seguro, tendría que ser diferencia entre el mismo seguro ordinario y el diferido por el tiempo n que se fijara para aquélla, luego,

$$P = X_b - X_{a,b} - (X^n_b - X^n_{a,b})$$

Problema 2.° Si la renta anterior sólo debiese pagarse hasta los 50 años, en caso de morir antes el asegurado ¿qué prima vitalicia debería pagarse durante 10 años? (Tablas III, X y XV.)

$$P = X_{30} - X_{40,30} - (X^{20}_{30} - X^{20}_{40,30}) = 3'8380 - X_{50}Q^{20}_{30} + X_{60,50}X^{20}_{40,30}\ (96)$$

$$= 3'8380 - 12'9715\cdot\frac{581}{734}\cdot\frac{1}{2'19123} + 8'0596\cdot\frac{269003}{1056583'458}\ (88)$$

$$= 3'838 - \frac{7536'4415}{1608'194} + \frac{2168056'5788}{1056583'458}$$

$$= 3'838 - 4'686 + 2'052 = 5'890 - 4'686 = 1'204$$

Prima fija=1204 pesetas.

$$\text{Prima anual por 10 años (105, 3.º)} = \frac{1204}{1 + {}_{9}X_{40,30}}$$

$$= \frac{1204}{1 + X_{40,30} - X^{9}_{40,30}} \text{(97)} = \frac{1204}{1 + 12'9715 - X_{49,39}\,0^{9}_{40,30}} \text{(96)}$$

$$= \frac{1204}{13'9715 - 10'9940 \cdot \dfrac{590 \cdot 664}{657 \cdot 734 \cdot 1'04^{9}}} \text{(91, 1.º)}$$

$$= \frac{1204}{13'9715 - \dfrac{4307009'44}{686374'17}} = \frac{1204}{13'9715 - 6'2750}$$

$$= \frac{1204}{7'6965} = 156\,pts.$$

Escolio. Hemos procurado detallar estos ejemplos con objeto de que se desvaneciese toda duda que pudiese quedar, sobre las diferentes maneras de calcular los elementos que entran en las fórmulas, según las Tablas de que se disponga, lo que los hace aparecer más largos y difíciles de lo que realmente son, pues disponiendo de Tablas de anualidades que ya sabemos cómo pueden calcularse fácilmente, que contengan, no sólo los valores de las vitalicias inmediatas sobre una y dos cabezas, sino de las diferidas X^{n}_{a} y aun de las temporales ${}_{n}X_{a}$, se hace innecesario el empleo de las de mortalidad y las operaciones se reducen á un par de adiciones ó sustracciones.

3.º El valor de una renta perpetua de supervivencia, sería igual análogamente al de la perpetua inmediata que para 1 unidad sabemos (32) es $\frac{1}{t}$, menos el de la vitalicia ordinaria X_{a}, luego en este caso,

$$P = \frac{1}{t} - X_{a} = \frac{1 - t\,X_{a}}{t}$$

Problema 3.º Una persona de 40 años quiere asegurar á sus herederos una renta perpetua de 1000 pesetas después de su muerte. ¿Qué cantidad deberá entregar para ello, con arreglo al tanto usual? (Tabla XV.)

$$P = \frac{1 - 0'04 \cdot X_{40}}{0'04} = \frac{1 - 0'04 \cdot 15'1326}{0'04} = \frac{1 - 0'605304}{0'04}$$

$$= \frac{0'394696}{0'04} = 9'8674$$

Debería entregar 9'8674·1000=9867'40 pesetas.

VI.—Seguro y reembolso de anualidades.

118. Para terminar estas nociones generales de seguros sobre la vida, completaremos las dadas al hablar de los contraseguros (114, 3.°) con algunas cuestiones muy análogas que pueden ocurrir.

El contraseguro, según vimos, reembolsa las anualidades entregadas con cualquier objeto, si el fallecimiento sobreviene antes de haberlas satisfecho todas, pero, por el contrario, puede suceder que obligada una persona á pagarlas, *se encargue otra* ó una compañía, *de satisfacer á su muerte las que falte recibir*, lo cual constituye un SEGURO DE ANUALIDADES; el REEMBOLSO ó *pago de las anualidades satisfechas por cualquier concepto*, puede también contratarse en otras condiciones.

1.° En el primer caso, el valor total de las anualidades que han de entregarse, tiene al celebrar el contrato un valor fijo independiente de la vida del asegurado, cuya expresión conocemos (36), siendo n las entregas que deban hacerse, puesto que será el de una renta ordinaria que podemos suponer inmediata, pues á este caso podría referirse cualquier otro sin dificultad.

El asegurado en cambio, sólo las pagará durante su vida, satisfaciendo por tanto el de una vitalicia temporal $X_a - X_a^n$, luego el asegurador deberá recibir la diferencia

$$P = \frac{(1+t)^n - 1}{t(1+t)^n} - (X_a - X_a^n)$$

PROBLEMA. Una persona de 30 años tiene que satisfacer 20 anualidades de 1000 pesetas. ¿Qué cantidad debería entregar, para asegurar el pago en caso de muerte? (Tabla III y P. 1.° y 2.° del párrafo anterior.)

$$P=\frac{1'04^{20}-1}{0'04\cdot 1'04^{20}}-\left(X_{30}-X_{30}^{20}\right)=\frac{2'191123-1}{0'04\cdot 2'1911}-(16'8095-4'686)$$

$$=\frac{1'191123}{0'087644}-12'1235=13'5900-12'1235=1'4665$$

Debería entregar 1466'50 pesetas.

2.° El reembolso, prescindiendo del caso de contraseguro, puede hacerse *sin más condición de vida ó muerte que la del asegurado*, en cierta época fija *si otra persona vive*, ó *en caso de morir ésta*, cuya edad como siempre representaremos por b.

Debiéndose reembolsar de todos modos á los n años, el valor del reembolso será el de la anualidad temporal ${}_nX_a$ referida al que tenga al celebrar el contrato; si solamente ha de hacerse viviendo la otra persona, su valor variará con la probabilidad de vida de ésta para la época fijada; y si bajo condición de muerte, con la de que ésta ocurra en el período acordado, luego para cada uno de los tres casos se tendrá respectivamente

$$P={}_nX_a\cdot\frac{1}{(1+t)^n};\quad P={}_nX_a\cdot\frac{f(b+n)}{f(b)}\cdot\frac{1}{(1+t)^n};$$

$$P={}_nX_a\cdot\frac{f(b)-f(b+n)}{f(b)}\cdot\frac{1}{(1+t)^n}$$

Las primas temporales, vitalicias, reembolsables, con interés, etc., se hallarían por las reglas generales y fórmulas ya aplicadas varias veces, que nos parece inútil repetir una más, sin que tampoco el enunciado de alguna de estas cuestiones pudiera enseñar nada nuevo, después de haber calculado con frecuencia los valores de las cantidades que entran en las respectivas expresiones y no se hallan en las Tablas.

En la necesidad de prescindir de muchas cuestiones, por falta de espacio y tiempo, hemos procurado sean las que inmediatamente se desprendan de las examinadas, como lo son los valores de esas primas, una vez deducidas sus fórmulas; los seguros sobre más de una cabeza, para calcular los cuales, en los principales casos, bastan las expresiones de las primas que dedujimos anteriormente, ya que no pueden simplificarse más á causa de no ser casi posible construir para ellas Tablas de conmutación;

de los seguros diferidos en caso de vida, iguales evidentemente á $Q^n_{a,b}$, $Q^n_{\overline{a,b}}$, etc.

Damos, pues, por terminados estos problemas, para poder decir algo, aun cuando sea muy poco, de los muchos que aun pueden presentarse y nos es imposible del todo tratar detenidamente.

CAPÍTULO VII.

SOCIEDADES DE SEGUROS.

I.—Seguros sobre las cosas.

119. Aparte de las cuestiones hasta aquí resueltas, cuyo cálculo pueden verse obligados á hacer lo mismo los particulares que las compañías, hay algunas que, aunque sólo interesan á éstas, entran por completo en la esfera mercantil, siendo inseparables de las anteriores, por lo que no es posible omitirlas.

Es la primera de ellas la que indicamos al nombrar los seguros por primera vez (T. II, 96), referente á la cantidad que debe exigirse según el riesgo que se corra y lo que se desee ganar ó exponerse á perder, cuando no se trate de la vida humana, cuyas contingencias hemos procurado detallar en lo posible, sino de propiedades de cualquier clase que se quieran poner á cubierto de los siniestros eventuales que bajo algún concepto puedan ocurrir.

Claro está que debiendo ser las primas sumamente variables, según la importancia y eventualidad de los riesgos, es preciso calcularlas también con arreglo á las probabilidades medias que en virtud de observaciones repetidas y estadísticas formadas de antemano deben ser ante todo conocidas, así como los valores de los objetos asegurados, para los que también puede tomarse un término medio cuando se trata de fundar una Sociedad, pues los especiales que sobre alguno de valor determinado se hagan en casos particulares, ninguna dificultad de cálculo pueden ofrecer, desde el momento en que se conozca la probabilidad de que ocurra.

Lo primero que en estos cásos necesita determinarse, análogamente á lo que sucede con la probabilidad de vida ó muerte en los seguros sobre la vida, es la que habrá de que entre m objetos asegurados, por ejemplo, el siniestro no ocurra más de n veces.

Para esto ya sabemos (9) que si p representa la probabilidad simple de que ocurra, y $q=1-p$ la contraria, dicha probabilidad será la suma de los $n+1$ primeros términos del desarrollo de la potencia $(q+p)^m$.

Supongamos ahora, para fijar las ideas, que se trata de fundar una Sociedad de seguros contra incendios, y que la probabilidad se calcula en 1 casa incendiada por cada 100, es decir, que $p=0'01$ y $q=0'99$.

El valor de la prima exigible, además de las circunstancias mencionadas, dependerá del número de los objetos que se aseguren, ó se suponga podrán asegurarse, puesto que el seguro de uno solo no podría dar origen á más cálculo que la esperanza de ganar la prima ó perder el seguro, y siendo m ese número, lo que ante todo deberá hacerse es calcular la probabilidad de que el siniestro ocurra 1, 2, 3········ veces, para fundamentar las operaciones sobre una base tan próxima á la certeza como sea posible.

Admitamos que esa prima quiera calcularse para 200 casas aseguradas.

Si desarrolláramos la potencia $(0'99+0'01)^{200}$ é hiciéramos la suma de sus términos, hallaríamos para los 7 primeros, 0'995706; para 9, 0'999789; para 10, 0'999961; para 11, 0'999994; para 12, 0'999999, y así sucesivamente si los determináramos con más cifras, es decir, que habría esas probabilidades de que las casas incendiadas no pasarían de 6, 8, 9, 10 y 11; la última se diferencia tan poco de la unidad, que puede casi tomarse como expresión de la certeza, y es la que suele buscarse en los cálculos de esta clase.

1.° De esta manera, por tanto, puede apreciarse el número n de siniestros que probablemente ocurrirán entre m objetos asegurados, y como la prima P exigida por cada seguro, producirá mP, mientras llamando v al valor asegurado se tendrá que indemnizar en total nv, si no quiere exponerse más que un capital c deberá verificarse $nv - m\mathrm{P} \leqq c$, de donde

$$\mathrm{P} \geqq \frac{nv-c}{m}$$

límite inferior de la prima que deberá exigirse.

Problema 1.° Suponiendo 200 casas aseguradas, 1 de cada 100 los siniestros probables, 40000 pesetas el valor medio de cada una, y no queriendo exponer en la empresa más de 50000, ¿cuál sería la prima mínima?

Ya hemos visto que elevando $q+p=0'99+0'01$ á la potencia $m=200$, resultaría $n=11$ para el máximo de siniestros, luego

$$\mathrm{P} = \frac{11.40000-50000}{200} = \frac{4400-500}{2} = \frac{3900}{2} = 1950 \textit{ pts.}$$

2.° Para que el cálculo, sea sin embargo, independiente del valor de los objetos, lo más frecuente es no fijar el límite de la pérdida, sino expresarlo por una fracción $\frac{h}{k}$ del total asegurado mv, en cuyo caso siendo $c = \frac{h}{k} mv$

$$\mathrm{P} = \frac{nv - \frac{h}{k} mv}{m} = \frac{v}{m}\left(n - m\frac{h}{k}\right)$$

Problema 2.° ¿Cuál sería la prima mínima queriendo exponer 0'03 partes del total asegurado?

$$\mathrm{P} = \frac{40000}{200}(11-200.0'03) = 200(11-6) = 200 \cdot 5 = 1000 \textit{ pts.}$$

De esta manera, en efecto, puede calcularse la prima á tanto por 100 del valor de los objetos sin necesidad de conocerlo, que es como suele figurar en las tarifas, puesto que esa prima puede ponerse bajo la forma

$$\mathrm{P} = \frac{1}{m}\left(n - m\frac{h}{k}\right)v = \frac{100}{m}\left(n - m\frac{h}{k}\right)\frac{v}{100}$$

$$= \frac{100}{m}\left(n - m.\frac{h}{k}\right) \text{ por 100 del valor } v.$$

Problema 3.° En el supuesto del anterior, ¿qué tanto por 100 del valor asegurado sería la prima?

$$P=\frac{100}{200}(11-200.0'03)=\tfrac{1}{2}(11-6)=\tfrac{1}{2}\cdot 5=2'5=2\tfrac{1}{2}\ \%$$

del valor asegurado.

Comprobación.—2 ½ por 100 de 40000=2'5·400=1000 pesetas.

120. En la práctica no basta tener el límite de la prima, sino que es conveniente calcular la probabilidad de obtener, por lo menos, un beneficio b, para decidirse ó no á emprender el negocio.

1.° Como esto exige que el número de siniestros n', que realmente ocurran, sea menor que el n, calculado del modo dicho, para que se verifique $mP-n'v=b$, resulta

$$n'=\frac{mP-b}{v}$$

y encontrado este valor, bastará hacer en el desarrollo de $(q+p)^m$ la suma de los términos que indique, para obtener la probabilidad buscada.

Problema 1.° Fijando en 1950 pesetas la prima del primer problema del párrafo anterior, ¿qué probabilidad habría de ganar las 50000 pesetas que se exponen?

$$n'=\frac{2000\cdot 1950-50000}{40000}=\frac{390000-50000}{40000}=\frac{34}{4}=8'5$$

Sumando los 8 primeros términos de $(0'99+0'01)^{200}$ hallaríamos 0'998989 para la probabilidad de que no ocurrirían 8 siniestros y de que se ganarían por lo menos las 50000 pesetas.

2.° Esta probabilidad puede hacerse independiente de la prima fijada ó que se fije, reemplazándola por su valor, en cuyo caso:

$$n'=\frac{m\cdot\dfrac{nv-c}{m}-b}{v}=\frac{nv-c-b}{v}=n-\frac{c+b}{v}$$

$$\textit{Comprobación: } n'=11-\frac{50000+50000}{40000}=11-\frac{10}{4}$$

$$=11-2\tfrac{1}{2}=8'5.$$

Y en efecto, si suponemos que en vez de asegurarse por el valor fijo 40000 pesetas, se asegura únicamente el perjuicio sufrido para que sea posible la fracción, incendiándose totalmente 8 casas y teniéndose que abonar por otro las 20000 pesetas correspondientes á la fracción 0'5, se desembolsarían 8'5·40000 =340000, y se habrían cobrado por primas 1950·200=390000, ganando, por consiguiente, 390000—340000=50000 pesetas.

3.° La ganancia mínima está determinada además por la igualdad $b=m\text{P}-nv$, y para que exista es, por tanto, necesario que sea

$$m\text{P}-nv>0, \quad \text{de donde} \quad \text{P}>\frac{nv}{m}$$

límite inferior de P que también se podría deducir haciendo $c=0$ en la primer relación obtenida.

Problema 2.° En el mismo supuesto de los anteriores, ¿qué prima sería necesario establecer para abrigar confianza de obtener un beneficio?

Después de calcular el número $n=11$ como máximo de siniestros, tendríamos,

$$\text{P}>\frac{11\cdot 40000}{200}=2200 \; pts.$$

valor con el cual nada se perdería ni ganaría si ocurriesen todos, recibiendo por primas 200·2200=440000 y teniendo que pagar igual cantidad por los 11 siniestros.

4.° Finalmente, para que hubiese más probabilidad de ganar que de perder, bastaría dar á n el *valor correspondiente á la primer suma del desarrollo de* $(q+p)^m$ *que fuese mayor que* $\frac{1}{2}$.

Así, por ejemplo, en el problema que venimos considerando, la suma de los 2 primeros términos de $(0'99+0'01)^{200}$ sería 0'404247, y la de ésta y el siguiente 0'676681, por lo que es lo más probable que no lleguen á 3 las casas incendiadas y la prima podría fijarse en

$$\text{P}=\frac{3\cdot 40000}{200}=600 \; pts.$$

Claro está que estas primas se refieren á la misma unidad de tiempo que la probabilidad simple que sirve de punto de partida, es decir, que serían fijas si la probabilidad $p=0'01$ se refiriese á la duración total de las casas edificadas; anual si al número de incendios anuales, etc., por lo que en los ejemplos anteriores las primas anuales serían 200 veces más pequeñas, pues el riesgo del incendio durante ese tiempo es aproximadamente de $\frac{1}{20000}$.

De las igualdades establecidas pueden despejarse c, b, v y m, combinándolas como ya lo hemos hecho para eliminar la que se desee, según los datos con los cuales se tenga que resolver alguna otra cuestión relacionada con las pérdidas ó ganancias probables; valor que para ello han de tener los objetos asegurados; número que será necesario asegurar, etc.; pero son tan sencillos todos estos problemas, aun debiendo tener en cuenta los gastos que se ocasionen ó el interés posible de las primas cobradas, que nos parece inútil insistir más sobre este punto.

II. — Ideas generales sobre las reservas.

121. Lo que además de lo dicho tiene verdadera importancia para ciertas compañías de seguros es la determinación de las RESERVAS ó *cantidades que han de tenerse disponibles para hacer frente á los pagos de vencimiento desconocido.*

Las sociedades creadas para prevenir los siniestros que á ciertos objetos puedan ocurrir, como son las de seguros marítimos, contra incendios, etc., las calculan fácilmente, porque su beneficio, en los que se hacen por una sola vez, ó el anual en los restantes casos, siempre es igual á la diferencia entre las primas recibidas y los siniestros pagados, siendo constantes en todo tiempo las probabilidades de que ocurran éstos; pero precisamente en las que hoy revisten mayor importancia, operan con valores más considerables y realizan operaciones más complicadas, que son las de seguros sobre la vida, ocurre lo contrario; el seguro se contrata casi siempre por largos años, y la prima se recibió de una vez ó tiene un valor constante anual, mientras que el riesgo crece de año en año, al mismo tiempo que disminuyen las primas y, por tanto, el excedente.

Considerando, por ejemplo, 500 asegurados de 30 años sobre la vida entera por 10000 pesetas, la prima anual pura de cada uno sería de 167 pesetas, y su totalidad, por consiguiente, de 83500 pesetas, que se cobrarían el primer año; y como la probabilidad de muerte á esa edad es 0'0077, los siniestros ascenderían solamente á 0'0077·10000·500=38500 pesetas, quedando un excedente de 45000 pesetas; pero á los 10 años los sobrevivientes se habrían reducido á 459 y el total de primas á 76653 pesetas, mientras el riesgo de muerte se elevaría á 0'0103, el pago de los seguros exigiría 47277 pesetas, siendo ya sólo el sobrante de 29376, y al transcurrir 12 años más los siniestros excederían ya á las primas en 3132 pesetas, las pérdidas crecerían de año en año con rapidez, y al tener 70 los asegurados se elevarían para aquél á 86248 pesetas.

Es, por consiguiente, indispensable compensar con las primas demasiado elevadas, de los primeros años, la deficiencia de las correspondientes á los últimos, reservando una parte de la prima, que será variable, según las condiciones en que el seguro se contrate; pero siempre tal, que calculada la pura de manera *que los desembolsos de la compañía y de los asegurados sean iguales, con arreglo al tanto de interés y mortalidad*, *su equivalencia subsista, cualquiera que sea el número de los años transcurridos.*

Dependiendo del tanto de interés que se tome por base de la Tabla de mortalidad adoptada, y aun del aumento de la prima pura, las reservas de las Compañías suelen ser diferentes y calcularse de diversos modos; pero para todas tienen grandísima importancia, pues si por una parte la imprevisión tendría por fin el descrédito al no poder cumplir los compromisos adquiridos, una reserva excesiva conduciría á hacer improductivos beneficios ya obtenidos, y que se guardarían para el porvenir.

Creemos serán bastantes estas ideas generales, para que se comprenda la imprescindible necesidad de ocuparse, por ligeramente que sea, de estas cuestiones en los casos más fundamentales, refiriendo los cálculos al tanto y Tablas convenientes, que serán para nosotros el 4 %, admitido hoy por la mayoría de las Sociedades, y las de anualidades y conmutación que tanto facilitan las operaciones y hemos aprendido á calcular.

III.—Seguros por la vida entera.

122. 1.º *Á prima única.*—Al transcurrir n años después del contrato, el asegurado, de edad a, tendrá $a+n$, y el seguro en esa época valdría P_{a+n}, luego, en virtud de la equivalencia que debe haber entre un desembolso y otro, y no tener ya que recibir nada del asegurado, ese será precisamente el valor V_a de la reserva correspondiente á cada unidad, que ha de hacerse al principio del año; es decir, que (100, 1.º)

$$V_a = \frac{1-tX_{a+n}}{1+t}$$

Si en vez de la prima única, se reservara como reservan algunos la de tarifa, que ya sabemos tiene siempre algún recargo, la mayor parte del beneficio no se utilizaría desde luego, aumentando de año en año, siendo así que contratado el seguro, y no teniendo que responder la Compañía más que del resultante de aquélla, está en su perfecto derecho al disponer libremente de los beneficios de cada uno.

Problema 1.º Ciento veinte personas de 40 años han asegurado su vida por 30000 pesetas. ¿Cuánto debe reservar la Compañía al haber transcurrido 5 años, si existen todavía 100 pólizas de dicha época? (Tabla xv.)

$$V_{40} = \frac{1-0'04 \cdot 13'904}{1'04} = \frac{1-0'55616}{1'04} = \frac{0'44384}{1'04} = 0'426730$$

Deberá reservar $100 \cdot 30000 \cdot 0'426730 = 1280190$ *pts.*, cantidad suficiente para poder pagar los 100 seguros, colocada al 4 % de interés compuesto, pudiendo por lo tanto retirar el excedente en concepto de ganancia.

2.º *Á primas vitalicias.*—Pagando las primas anualmente, el equivalente á la prima única que la Compañía debía reservar, y acabamos de ver, es P_{a+n} á los n años, debe rebajarse en el valor de la prima p_a que el asegurado ha de satisfacer de año en año, que es $p_a(1+X_{a+n})$ (101), luego, representando la reserva por ${}_nV_a$

$${}_nV_a = P_{a+n} - p_a(1+X_{a+n})$$

valor que puede expresarse en función solamente de las primas puras ó de las anualidades.

Para lo primero basta recordar que

$$p_{a+n} = \frac{P_{a+n}}{1+X_{a+n}}, \text{ y por consiguiente,}$$

$$1+X_{a+n} = \frac{P_{a+n}}{p_{a+n}} = P_{a+n} \cdot \frac{1}{p_{a+n}}$$

de donde

$${}_nV_a = P_{a+n}\left(1 - \frac{p_a}{p_{a+n}}\right)$$

Para lo segundo, que (100, 1.º)

$$P_{a+n} = \frac{1-tX_{a+n}}{1+t}; \quad P_a = \frac{1-tX_a}{1+t}$$

$$\text{y } p_a = \frac{\dfrac{1-tX_a}{1+t}}{1+X_a} = \frac{1-tX_a}{(1+X_a)(1+t)}.$$

de donde

$${}_nV_a = \frac{1-tX_{a+n}}{1+t} - \frac{1-tX_a}{(1+X_a)(1+t)}(1+X_{a+n})$$

$$= \frac{1+X_a - tX_{a+n} - tX_aX_{a+n} - 1 - X_{a+n} + tX_a + tX_aX_{a+n}}{(1+X_a)(1+t)}$$

$$= \frac{X_a - tX_{a+n} - X_{a+n} + tX_a}{(1+X_a)(1+t)} = \frac{(1+t)X_a - (1+t)X_{a+n}}{(1+X_a)(1+t)}$$

$$= \frac{X_a - X_{a+n}}{1+X_a}$$

La primera expresión tiene la ventaja de ser aplicable igualmente al seguro pagado á fin de año y al principio, con tal que las primas se determinen en una ú otra hipótesis, mientras que si en ésta se supone lo último, habrá que multiplicar el valor hallado por $1+t$ (100, 1.º); pero el cálculo previo de esas primas, si no se tienen Tablas á propósito, es mucho más largo, mientras que para la última basta la de anualidades.

Problema 2.º ¿Cuál debería ser la reserva en el caso del anterior, suponiendo que el asegurado pagara primas anuales vitalicias y que el seguro debiera satisfacerse á fin de año? (Tabla XV.)

$$ {}_5V_{40} = \frac{X_{40}-X_{45}}{1+X_{40}} = \frac{15'133-13'904}{1+15'133} = \frac{1'229}{16'133} = 0'076178 $$

Debería ser de 100·30000·0'076178=228534 *pts.*

De este modo forman también las compañías las correspondientes Tablas de reservas, de las cuales nos parece inútil insertar modelo alguno, pues en nada se diferencian de sus análogas las de anualidades, primas, etc.

Para hacer el cálculo con toda la exactitud posible, hay, sin embargo, que tener aún en cuenta dos consideraciones: que la fórmula supone hechos los seguros á primero de año, lo que no es cierto en la práctica, y que para los mismos asegurados es siempre aplicable la propia ley de mortalidad dada por idéntica Tabla, lo que tampoco es rigurosamente exacto.

Si al contrato hecho en un día cualquiera corresponde un número de años n más la fracción que falte para llegar al fin del mismo y es costumbre representar por la letra griega α (*alfa*) el vencimiento de la prima $n+1$, corresponderá á la parte de año $1-x$, y tardando este tiempo en cobrarse, el valor de la reserva debe aumentarse en el interés $p_a(1-\alpha)$, con lo cual se convierte en

$$ {}_nV_a = P_{a+n} - p_a(1+X_{a+n}) + p_a(1-\alpha) = P_{a+n} - p_a(1+X_{a+n}-1+\alpha) $$
$$ = P_{a+n} p_a(\alpha+X_{a+n}) $$

y para el caso particular de ser $\alpha = \frac{1}{2}$ año, en

$$ {}_nV_a = P_{a+n} - p_a\left(\frac{1}{2} + X_{a+n}\right) $$

En esto fundan las Compañías su cálculo aproximado, del modo que vamos á indicar, pues el detalle de las operaciones nada nuevo nos enseñaría.

Haciendo dicho cálculo á fin de año, agrupan las pólizas existentes según la fecha de los nacimientos; así, por ejemplo, todos los que nacieron en 1849, tendrán el 31 de Diciembre de 1890, 41 años, constituyendo una clase especial que se subdivide en categorías, con arreglo á las edades á que se hicieron los contratos, entre las cuales nos fijaremos en la de 35 años dada por los seguros hechos en 1884.

Si además se supone también que al verificar el contrato todos tenían los 35 años exactos y para compensar los errores, que éstos se hicieron á la mitad del año, ó sea el 30 de Junio, hasta el 31 de Diciembre citado habrán transcurrido $6\frac{1}{2}$ años y la reserva estará dada por la fórmula

$$V = P_{41 \cdot 5} - p_{35}\left(\frac{1}{2} + X_{41 \cdot 5}\right)$$

Ni en las Tablas que contienen las anualidades X, ni en las de primas P, calculadas para años exactos, se encontrarán $X_{41 \cdot 5}$ ni $P_{41 \cdot 5}$ pero buscando en ellas por una parte X_{41}, X_{42}, por otra P_{41}, P_{42} y determinando las medias diferenciales (T. II, 68), se obtendrá una aproximación más que suficiente para la práctica, y hallado el valor de V, claro es que si son aún 100 las pólizas existentes que se hallen en ese caso, el de la reserva será $100\,V$.

4.° En cuanto á la ley de mortalidad, ha hecho ver la experiencia, que no es constante para las mismas personas, como supone la fórmula deducida.

Por bien calculada que esté una Tabla de mortalidad, siempre se funda en observaciones hechas para todas las edades en reuniones de personas diferentes, á las que se supone en buen estado de salud, y sus resultados no pueden coincidir exactamente con los que se obtendrían siguiendo paso á paso la marcha de un mismo grupo de individuos, hasta su total extinción.

Entonces se presenta en general, con el aumento de edad, una falta mayor de salud que hace la mortalidad algo más rápida, disminuyendo el valor total de las primas que se reciben, lo que exige una reserva de más consideración, y como las observaciones de estos últimos años han probado que esta variación de condiciones se hace ya sensible desde que transcurren 5 años á partir de la fecha del seguro, las Compañías inglesas han calculado con arreglo á la nueva mortalidad otra Tabla, que se construye como todas sus homogéneas, en la cual se encuentran además de los sobrevivientes á cada edad de entre 1000000 de 10 años, los correspondientes valores de X, P y p.

Tratándose, pues, de pólizas extendidas 5 ó más años atrás, se debe hacer uso de los valores dados por esta nueva Tabla, sustituyendo los X_{a+n}, P_{a+n} y p_{a+n} en las anteriores fórmulas, en vez de las que se hallan en las ordinarias.

La primera de estas dos CORRECCIONES se hace, por consiguiente, bajo el concepto del *vencimiento de las primas;* la segunda, por lo que se llama *selección médica.*

5.º *A primas temporales.*—Contratado así el seguro y suponiendo sea m el número de primas que se deben pagar en caso de vida y n, como anteriormente, los años transcurridos, el asegurado tendría que satisfacer aun $m—n$, primas iguales á ${}_mp_a$ (112, 1.º), es decir (403), á $\dfrac{P}{1+{}_{m-1}X_a}$ cuyo valor en el momento que consideramos sería,

$$\frac{P}{1+{}_{m-1}X_a}\left(1+{}_{m-n-1}X_{a+n}\right)=\frac{1-tX_a}{1+t}\cdot\frac{1+{}_{m-n-1}X_{a+n}}{1+{}_{m-1}X_a}$$

y como el del seguro seguiría siendo $P_{a+n}=\dfrac{1-tX_{a+n}}{1+t}$, el de la reserva debería ser la diferencia,

$$V=\frac{1-tX_{a+n}}{1+t}-\frac{1-tX_a}{1+t}\cdot\frac{1+{}_{m-n-1}X_{a+n}}{1+{}_{m-1}X_a}$$

si se supone pagado á fin de año, y $V(1+t)$ si al principiar el mismo.

ESCOLIO. Como la aplicación de las fórmulas referentes á estas cuestiones, se reduce á efectuar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con los valores que den las Tablas, prescindiremos ya de ejemplos, limitándonos á determinar las expresiones por cuyo medio deben calcularse esas reservas en cada caso.

IV.—Seguros sobre más de una cabeza.

123. La determinación de las reservas en los seguros sobre dos ó más cabezas, es enteramente análoga, pues los razonamientos que acabamos de hacer son también aplicables á estos casos.

Así, por ejemplo, considerando el más frecuente, que es el hecho sobre dos vidas hasta la primera muerte, si se ha pagado una prima fija, el valor del seguro al haber transcurrido n años y el de la reserva, por consiguiente, sería por las mismas razones que en el anterior (105),

$$V_{a,b} = P_{a+n,b+n} = \frac{1 - tX_{a+n,b+n}}{1+t}$$

y si se pagasen primas anuales, cuyo valor en el instante considerado sería $p_{a,b}(1+X_{a+n,b+n})$ se debería reservar,

$$_nV_{a,b} = P_{a+n,b+n} - p_{a,b}(1+X_{a+n,b+n})$$

que como en el caso de una sola cabeza y por idénticas transformaciones, que hasta es innecesario detallar, si se atiende á la completa simetría de las fórmulas, que forzosamente habrá de conducir á resultados también simétricos, puede escribirse bajo la forma:

$$_nV_{a,b} = \frac{X_{a,b} - X_{a+n,b+n}}{1+X_{a,b}}$$

Vemos, por consiguiente, que estos casos no ofrecerían diferencia esencial con los anteriores, en cuanto á la marcha que para efectuar los cálculos debería seguirse, y aunque tampoco presentarían dificultad los restantes por la semejanza de todos ellos, los examinaremos rápidamente, refiriéndonos á una sola cabeza por no haber empleado hasta ahora más que los valores de las primas y anualidades, y ser en muchos de ellos conveniente, para la mayor rapidez de las operaciones, introducir los números contenidos en las Tablas de conmutación.

En la necesidad, sin embargo, de abreviar, y habiendo expuesto el método que en general debe seguirse, sólo calcularemos las reservas para los seguros contratados á primas únicas, pues conocidas éstas, según hemos visto, bastará en los de primas vitalicias ó temporales, *restar de esas reservas el valor de lo que el asegurado debe entregar aún, con arreglo á las fórmulas deducidas para cada caso.*

V.—Seguros temporales, mixtos, á término fijo, etc.

124. 1.° Si el seguro ha de ser temporal, la prima única correspondiente al mismo á los n años en que el asegurado tendrá $a+n$, por el tiempo que falte $m-n$, será el valor de la reserva, luego (113)

$$V = {}_{m-n}P_{a+n} = P_{a+n} - P_{a+m} Q_{a+n}^{m-n} = \frac{M_{a+n} - M_{a+m}}{D_{a+n}}$$

2.° Tratándose de un seguro mixto (115), y no teniendo, como en los demás contratados á prima única, que recibir á los n años nada del asegurado, la reserva en esa época deberá ser la prima correspondiente á la edad $a+n$, ó sea, si la duración ha de ser aún $m-n$,

$$V = \frac{M_{a+n} - M_{a+n+m-n} - D_{a+n+m-n}}{D_{a+n}} = \frac{M_{a+n} - M_{a+m} - D_{a+m}}{D_{a+n}}$$

3.° En los contratados á término fijo (114) no depende la prima de la edad, sino de la duración del seguro, y si se contrató por m años y han transcurrido n, faltarán, como siempre, $m-n$, luego la prima correspondiente, ó la reserva que es igual, debería tener por valor

$$V = \frac{1}{(1+t)^{m-n}}$$

Creemos bastan también estos ejemplos para que se comprenda cómo deberían calcularse por las mismas fórmulas anteriormente aplicadas las reservas de cualquier otra combinación, cómo serían los diferidos en caso de vida ó muerte, los de anualidades, reembolsos, contraseguros, etc.

4.° El procedimiento no variaría, aunque se tratase de seguros de rentas en vez de capitales.

Una renta vitalicia inmediata, por ejemplo, tiene por valor X_a

á los a años y X_{a+n} á los $a+n$, luego X_{a+n} debe ser la reserva en esta época; la vitalicia diferida por m años, sería del mismo modo á los n, expresándola en función de los números G y T (108)

$$V = X_{a+n}^{m-n} = \frac{G_{a+m+1}}{T_{a+n}}$$

Comprendido, por lo demás, el método que ha de seguirse, todos los casos son semejantes y pueden resolverse, aun sin más auxilio que las Tablas de anualidades ó el cálculo de éstas por los procedimientos conocidos, si se tiene presente cuanto hasta aquí llevamos dicho.

Vamos á hacerlo ver de nuevo, concretando un problema, para indicar el modo cómo la reserva podría calcularse y decir algunas palabras sobre ciertos resultados, que pudieran tal vez ofrecer dudas.

Supongamos que se trata de una renta vitalicia de supervivencia (116) de 1000 pesetas, contratada sobre una vida de 20 años, en provecho de una persona de 60, y se quiera calcular la reserva 10 años después.

La prima única sería de 517 pesetas, calculada como la del problema que resolvimos al ocuparnos de las mismas, y la anual de 52, mientras la correspondiente á las edades 30 y 70, sólo sería de 301 pesetas, y el valor de las primas que probablemente pagaría aun el asegurado, $52(1+X_{30,70})=364$, lo que daría una reserva de 301—364=—63, es decir, negativa, atendiendo á su verdadero valor numérico, lo cual sucederá siempre al llegar á cierto límite, cuando la persona beneficiada tenga más edad que el asegurado, según ocurre generalmente.

Esto, en realidad, representa un beneficio para la Compañía durante todos los años que transcurran desde entonces hasta el fallecimiento, pero apoyado en el supuesto de que se cobrarán las primas sucesivas, lo que es muy eventual, por lo cual, hasta que dicha muerte ocurre no debe retirarse la ganancia, limitándose en la práctica, cuando resultan valores negativos, á no hacer reserva alguna.

Si la primer edad, por el contrario, fuese mayor que la segunda, las reservas alcanzarían por iguales causas valores considerables, y la Sociedad obtendría una ventaja si el contrato se renovase cada año, como la obtendría en el primer supuesto el interesado, pues cada vez le corresponderían menores primas, por la mayor probabilidad de muerte.

Esta es la razón por la cual son muy pocas las Compañías que se presten á hacer aquellos seguros, y serían contadísimas las personas que quisieran asegurar rentas á otras de mayor edad, si conociesen y supieran interpretar esos resultados negativos que el cálculo arroja, pero no es culpa de la ciencia si así sucede, sino de la forma precisamente anticientífica en que tales contratos se realizan, pues de esos mismos resultados y de todo lo dicho se desprende que la verdadera forma de realizarlos, sería pagar, no primas vitalicias de valor constante, como es costumbre práctica, sino crecientes en un caso y decrecientes en otro.

Las rentas de términos variables, sin embargo, están tan poco estudiadas y las leyes que á esta variación deben presidir son tan poco conocidas, que una sola Compañía, según creemos, ha intentado establecer hasta ahora esta variabilidad en las primas, pero todo lo racional, verdadero y justo, cualquiera que sea la esfera en que se desarrolle, acaba por imponerse, y esta forma, por lo tanto, no tardará en ser la única bajo la cual se contraten los seguros de supervivencia.

Por nuestra parte, no podemos entrar ahora por falta de espacio y tiempo en detalles que tal vez daremos en otra ocasión, por lo que nos vemos precisados, aunque con sentimiento, á prescindir de estos seguros que hoy por hoy no se practican, como tuvimos que prescindir de las variables al ocuparnos de las rentas.

VI.—Rescisión de contratos y participación en los beneficios.

125. No son éstas las únicas cuestiones que nos vemos privados de tratar por idéntica causa; aun quisieramos detenernos algo en aquellas á que se refiere el encabezamiento de este párrafo, pero en la imposibilidad de hacerlo, vamos á dar algunas ideas generales que puedan servir de base á la fácil resolución de las mismas.

En los seguros generales, la prima no representa más que el precio ó valor del riesgo, por lo cual, pasado éste, queda el contrato nulo, y aquélla pertenece al asegurador desde el momento en que se le entrega.

En los seguros sobre la vida no sucede así, porque las primas vitalicias constantes constituyen una especie de término medio entre el riesgo casi nulo de los primeros años y el casi cierto de los últimos, á los que en realidad corresponden primas muy diferentes, por lo cual, si al transcurrir cierto número de años deja el asegurado de pagar las primas, la Compañía ha recibido con las primas cobradas cierto exceso, destinado á compensar una eventualidad que ya no puede presentarse, exceso que es precisamente el que da derecho á continuar pagando en la vejez la misma prima que en la juventud.

Si la Compañía no obtuviese en todo caso un beneficio y no tuviera que satisfacer ciertos gastos, todo este exceso debería devolverse al asegurado como valor de compra de su contrato, que sería exactamente igual en cualquier momento á la correspondiente reserva.

Pero como en todas las industrias, existen gastos generales y especiales, según se refieran á la administración, gestión de capitales, organización, etc., ó á las comisiones y otros desembolsos análogos que origina cada póliza en particular, proporcionalmente á su importancia, constituyendo verdaderos adelantos que se hacen á los agentes y que se van cobrando parcialmente con las primas sucesivas que entran en caja.

Las primeras no dejan, por consiguiente, verdadero exceso, y por esta razón, la mayoría de las sociedades de seguros han acordado no tenga derecho á reintegro ninguno, quien no haya satisfecho por lo menos tres primas anuales, y en cuanto á las siguientes, teniendo en cuenta lo variable de esos gastos, ha sido necesario adoptar un procedimiento medio para hallar lo que se llama el VALOR DE REDUCCIÓN, ó *precio de compra del contrato*, inferior, naturalmente, al de la reserva, conviniendo en considerar ésta como la prima única que corresponde á dicho valor.

Así, pues, en la práctica, es costumbre seguir esta regla fija.

Para calcular el valor de reducción de una póliza, se halla el capital asegurado que correspondería á la reserva, considerada como prima única.

Si, por ejemplo, se trata de un seguro por la vida entera, *el valor de la reserva*, que también se llama TEÓRICO de la compra, es (122, 2.º)

$$ {}_nV_a = P_{a+n}\left(1 - \frac{P_a}{P_{a+n}}\right) $$

y como siendo P_{a+n} la prima correspondiente á 1 unidad, esa expresión aseguraría un capital igual á

$$1-\frac{P_a}{P_{a+n}}$$

éste es el que se toma por valor de reducción, calculándolo además casi siempre con arreglo á la Tabla de Duvillard, que dando una mortalidad bastante rápida, produce otra pequeña ventaja.

Esto es lo racional y hasta cierto punto justo; pero la verdad es que en la práctica no se han puesto de acuerdo todas las Compañías, por lo que no hay tarifa obligatoria para la rescisión de los contratos, formando algunas Tablas de reducción especiales, cuyos valores sólo son partes del que da la regla anterior, tanto más próximos á él cuanto mayor es el número de primas ya satisfechas; negando otras todo derecho á la venta del contrato á cambio de la entrega de PÓLIZAS DE ACUMULACIÓN, *que al final de períodos fijos de* 10, 15 *ó* 20 *años tienen derecho al reparto mutuo de los valores que representan las abandonadas*, ó dando, en otra forma cualquiera, una participación en los beneficios.

Desde luego suele reconocerse á todo asegurado la facultad de abandonar su póliza, dejando la reserva en poder de la Compañía, para continuar sin nuevos pagos el seguro primitivo, reduciendo su valor, como es natural, al correspondiente á la reserva considerada como prima única en cualquier momento, y aun á otro más pequeño en proporción á los beneficios que en todo caso quieran realizarse.

Respecto á la participación, suele ser de la mitad de los beneficios para las pólizas de una misma clase, sin mezclar unas con otras, es decir, que las de seguros por la vida entera, temporales, mixtos, etc., tienen derecho al reparto de los que producen cada una de estas categorías por separado, pero no á los totales, y el reparto se hace de varios modos en proporción al beneficio producido por cada una, á la totalidad de primas pagadas, al valor de la anual, etc., sin que falten Sociedades que abonan por las primas satisfechas un interés fijo, y hasta que, á semejanza de ciertos procedimientos de amortización, se sortee anualmente entre las pólizas una parte alícuota de las cantidades á que ascienden las primas cobradas.

No hay, pues, tampoco una regla segura para estos cálculos, por otra parte sencillos, ni convenio ó precepto fijo á que las Compañías tengan que someterse, siendo árbitras para fijar la suma que ha de repartirse y la forma de hacerlo, que, aceptadas por el Consejo de administración y aprobadas en junta de accionistas, son obligatorias para los asegurados, á los que no se concede más derecho que el de someterse á ellas.

De todos modos, estos beneficios, que tan sólo se pueden obtener comprometiendo la buena y prudente marcha de los negocios y aumentando especialmente el valor de las reservas y, por consiguiente, el de las primas, son más aparentes que reales, siendo la mejor y verdadera forma de seguro, aquella que sin aparatosos ofrecimientos de beneficios permite dar á las primas que en las tarifas figuran el menor valor posible.

CAPÍTULO VIII.

ESTABLECIMIENTOS DE PREVISIÓN.

I.—Tontinas y cajas dotales.

126. Llámanse TONTINAS las *asociaciones cuyos miembros constituyen con sus capitales un fondo común, que devengando intereses compuestos, se reparte entre los que sobreviven en cierta época convenida.*

Para calcular lo que al final del tiempo corresponderá á cada uno, observemos ante todo que si de N socios de cierta edad sobreviven N', la relación $\frac{N}{N'}$ será igual á la $\frac{f(a)}{f(a+n)}$ que puede hallarse en las Tablas de mortalidad, por lo cual las expresiones de lo que á cada cual corresponda, serán las mismas para N fundadores de los que sobrevivan N', que para $f(a)$ asociados y $f(a+n)$ sobrevivientes.

Esta es la razón por la cual las Tontinas se consideran subdivididas en tantas parciales ó secciones, como grupos se forman con las edades próximas, suponiendo en el cálculo que todas son iguales.

1.° Como á interés compuesto se convierte cada unidad monetaria en $(1+t)^n$, si llamamos S á la suma que corresponde á los sobrevivientes, tendremos evidentemente para valor de la parte probable

$$S = \frac{f(a)}{f(a+n)} (1+t)^n$$

Problema 1.° Seiscientas cincuenta personas constituyen con 1000 pesetas una Tontina de 20 años de duración, colocando sus capitales al $4 \frac{1}{2}$ de interés compuesto. ¿Qué suma corresponderá probablemente á cada una de las que sobrevivan? (Tablas III y XI.)

$$S = \frac{f(41)}{f(61)} 1'045^{20} = \frac{650}{450} \cdot 2'411714 = 3'487587$$

Les corresponderá 1000·3'487587=3487'59 *pts.*

Problema 2.° Una persona de 35 años pone 1200 pesetas en una Tontina que debe durar 15 años. ¿Cuál será su parte en la liquidación, suponiendo el mismo interés? (Tablas III y X.)

$$S = \frac{f(35)}{f(50)} 1'045^{15} = \frac{694}{581} \cdot 1'935282 = 2'31168$$

Su parte, si sobrevive, será de 1200·2'31168=2774'02 *pts.*

Entrando un nuevo socio de edad $a+n$ á formar parte de una Tontina ya constituída m años antes, y entregando 1 unidad monetaria, su valor referido al origen será $\frac{1}{(1+t)^m}$, y la parte que en la liquidación le corresponderá

$$S = \frac{f(a)}{f(a+n)} \cdot (1+t)^{n-m}$$

Problema 3.° Siete años después de formar varias personas de 40 años una Tontina que ha de durar 20, entrega otra de 47, 2400 pesetas. Con arreglo al mismo tanto de interés, ¿qué parte probable le corresponderá? (Tablas III y X.)

$$S = \frac{f(40)}{f(60)} \cdot 1'045^{13} = \frac{657}{463} \cdot 1'772196 = 2'514757$$

Le corresponderán 2400·2'714757=6035'42 *pts.*

Tomando logaritmos en las expresiones encontradas, será también fácil determinar el tanto y tiempo, y atendiendo á la relación $\frac{N}{N'}=\frac{f(a)}{f(a+n)}$, los que probablemente sobrevivirán y los que al principio constituyeron la asociación, resolviéndose de un modo semejante las cuestiones análogas que puedan ocurrir, como hallar la parte con que cada cual contribuyó ó debe contribuir para llegar á una ganancia probable y otras semejantes.

Problema 4.° Para que en una Tontina formada por personas de 40 años, y que debe durar 10, se tenga la esperanza de recibir 3012'97 pesetas mediante la entrega de 1800. ¿Qué tanto de interés compuesto deben producir los capitales? (Tabla x.)

Cada peseta deberá producir $\frac{3012'97}{1800}=S$, y como $f(40)=657$, y $f(50)=581$, deberá verificarse

$$\frac{657}{581}(1+t)^{10}=\frac{3012'97}{1800};\ \text{Log.}657-\text{Log.}581+10\text{Log.}(1+t)$$

$$=\text{Log.}3012'97-\text{Log.}1800$$

$$\text{Log.}(1+t)=\frac{1}{10}\left\{\text{Log.}3012'97+\text{Log.}581-\text{Log.}1800-\text{Log.}657\right\}$$

$$=0'0170333=\text{Log.}1'04$$

$$t=1'04-1=0'04$$

Deberán producir 4 %.

Problema 5.° Suponiendo que á este interés le han correspondido á los 20 años 3600 pesetas á una persona de 65, ¿qué cantidad debió entregar al constituirse la Tontina?

Por cada peseta le habrán correspondido

$$S=\frac{f(45)}{f(65)}\cdot 1'04^{20}=3'450326$$

luego para cobrar 3600 debieron entregarse

$$\frac{3600}{3'450326}=1043'38\ pts.$$

127. Vemos, por consiguiente, que cuantas cuestiones relacionadas con estas cantidades puedan ocurrir, no son sino casos particulares de otras más generales que ya sabemos resolver y que no presentan, en general, dificultad ninguna, aun cuando,

como es frecuente, se satisfagan primas anuales p en lugar de entregar el capital de una vez, pues estas primas, cuyo valor en función de la única sabemos encontrar en todos los casos, constituirían evidentemente una renta vitalicia temporal de igual duración que la Sociedad, cuyo valor primitivo sería P, y que en conjunto producirían un capital final $\mathrm{P}f(a)(1+t)^n$, repartible entre los $f(a+n)$ sobrevivientes, por lo que á cada cual correspondería

$$\mathrm{S}=\frac{\mathrm{P}f(a)}{f(a+n)}(1+t)^n$$

Problema. Una persona entrega en una Tontina que ha de durar 15 años una prima anual de 500 pesetas. ¿Cuánto le corresponderá si vive á los 62, época en que tendrá efecto la liquidación, suponiendo el interés de $4\frac{1}{2}\,{}^0/_0$? (Tablas III, X y XV.)

Empecemos por determinar el valor de la prima única equivalente, que sabemos es (103, 96 y 88):

$$\mathrm{P}=p\left(1+{}_{n-1}X_a\right)=500\left(1+X_{47}-X_{47}^{14}\right)=500\left(1+12'672-X_{61}Q_{47}^{14}\right)$$

$$=500\left(13'672-9'049\cdot\frac{f(61)}{f(47)1'045^{14}}\right)$$

$$=500\left(13'672-9'049\cdot\frac{450}{607\cdot 1'851945}\right)$$

$$=500(13'672-9'049\cdot 0'409)=500(13'672-3'701)=500\cdot 9'94$$

$$=4985'50$$

por lo cual le correspondería

$$\mathrm{S}=\frac{4985'50\cdot f(47)}{f(62)}\cdot 1'045^{15}=\frac{4985'50\cdot 607}{437}\cdot 1'935282$$

$$=6924'94\cdot 1'935282=13401'71 \text{ } pts.$$

Los problemas que parezcan más complicados pueden, por tanto, referirse siempre á los de rentas y seguros, siendo, en general, más sencillos que el precedente, en el que á propósito hemos supuesto el tanto $4\frac{1}{2}\,{}^0/_0$, en vez del 4, para que, no pudiéndose emplear la Tabla de conmutación, sirviera de resumen, teniendo que calcular el valor de ${}_{n-1}X_a$ por medio del X_{47}^{14}, que hace preciso el de Q_{47}^{14} referido al de las Tablas de mortalidad, únicas que en definitiva son indispensables, no sirviendo las restantes más que para facilitar los cálculos.

Reemplazadas hoy las Tontinas por todas las combinaciones que realizan las compañías de seguros, cuya fundación es posterior, sólo ofrecen verdadero interés actualmente las que con el nombre de CAJAS DOTALES están *formadas con el objeto de constituir un capital para cuando un niño llegue á cierta edad.*

Esta edad se fija generalmente en los 20 años, admitiéndose en la asociación desde el nacimiento hasta los 10, por lo cual, los problemas que á ella se refieren, son todos del género de los que acabamos de resolver, única razón que hemos tenido para detenernos algo en ellos.

II.—Sociedades de socorros mutuos.

128. Esta clase de Compañías, de las que ya nos ocupamos (T. II, 110) en general, y entre las que pueden incluirse algunas de las que después hemos considerado particularmente, no suelen originar problemas que ofrezcan dificultad, abrazando, no obstante, un caso que merece especial atención, por ser precisamente el más común; *aquel en que se forman para obtener un socorro diario en caso de enfermedad, mediante el pago de una prima única, vitalicia, ó temporal.*

Este caso ha de resolverse también con arreglo al cálculo de probabilidades, pues claro es que, para determinar exactamente el valor de esas primas, ó la importancia de dicho socorro, sería preciso que las enfermedades estuvieran sujetas á una ley invariable y conocida.

Aunque esta ley no exista ó sea desconocida como la de mortalidad, del mismo modo que la observación ha permitido formar Tablas de vida probable, repetidas experiencias han hecho ver que para las edades comprendidas entre los 30 y los 70 años, el número de días de enfermedad probable en cada uno, compensando los errores aproximadamente, pueden calcularse por medio de la expresión

$$y = \frac{3670 \cdot 1'01^{a-30}}{f(a)}$$

en la que a, como siempre, representa la edad del individuo.

Si tomándola por base, nos proponemos, pues, encontrar qué prima ha de entregarse para tener derecho desde esa edad hasta cualquier otra $a+n$, al socorro de 1 unidad monetaria durante cada día de enfermedad, suponiendo que esas primas produzcan un tanto por 1 de interés t, y representamos por y_m el valor adquirido por esa fracción al referirla á un año cualquiera, el que tendrá al entregar la prima, será $\frac{y_m}{(1+t)^m}$, multiplicado por la probabilidad de vida, es decir,

$$\frac{y_m}{(1+t)^m} \cdot \frac{f(a+m)}{f(a)}$$

expresión que se convierte reemplazando y_m por su valor $\frac{3670.1'01^m}{f(a+m)}$, en

$$\frac{3670.1'01^m}{f(a+m)} \cdot \frac{1}{(1+t)^m} \cdot \frac{f(a+m)}{f(a)} = \frac{3670}{f(a)} \left(\frac{1'01}{1+t} \right)^m$$

en la que dando á m todos los valores desde 0 hasta $n-1$ y haciendo la suma, resultaría ser igual al primer factor multiplicado por la de los términos de una progresión por cociente de n términos, que empezaría por 1 y cuya razón sería $\frac{1'01}{1+t}$, luego (T. I, 156, 2.º)

$$P = \frac{3670}{f(a)} \cdot \frac{1 - \frac{1'01^n}{(1+t)^n}}{1 - \frac{1'01}{1+t}} = \frac{3670}{f(a)} \cdot \frac{(1+t)^n - 1'01^n}{(t-0'01)(1+t)^{n-1}}$$

Problema. ¿Qué cantidad debería entregar un obrero de 30 años para obtener un socorro de 3 pesetas diarias durante sus enfermedades hasta la edad de 70 años, suponiendo $4\frac{1}{2}$ el tanto por 100 de interés? (Tablas III y X.)

$$P=\frac{3670}{f(30)}\cdot\frac{1'045^{40}-1'01^{40}}{(0'045-0'01)1'045^{39}}$$

$$=\frac{3670}{734}\cdot\frac{5'816365-1'488864}{0'035\cdot5'569899}=5\cdot\frac{4'327501}{0'194946}$$

$$=\frac{21'637505}{0'194946}=111$$

Debería entregar 3·111=333 pesetas.

Si en lugar de esta cantidad, quisiera dar una prima vitalicia ó temporal, la calcularíamos por las fórmulas ya conocidas y aplicadas varias veces, $p_a=\frac{P}{1+X_a}$ ó $_np_a=\frac{P}{1+{}_{n-1}X_a}$ determinando primero la única, sin que las demás incógnitas, ya sean esta misma prima, el socorro que se recibirá, etc., puedan originar problemas que nos sean desconocidos.

III.—Cajas de ahorros y de retiro.

129. Siendo el objeto de las primeras *recibir pequeñas cantidades para con su conjunto y el de los intereses que devenguen ir formando un capital*, todas las cuestiones que han de resolverse en ellas quedan reducidas al cálculo de los intereses y capitales que á cada interesado correspondan según las imposiciones que haga y los fondos que retire, pero como estos cálculos, aunque sencillos, serían casi impracticables si se tuvieran que hacer en el preciso momento en que cada capital experimentase alguna variación, ha sido necesario para abreviarlos, idear un procedimiento análogo al que se sigue en las cuentas corrientes, en armonía con las costumbres establecidas.

Estas son, generalmente, prescindiendo de los límites que suelen fijarse á las cantidades que se reciben, de la parte que se rebaja al tanto por 100 convenido en concepto de gastos de administración y de otros detalles variables que en nada modifican dicho procedimiento, las de *contar los intereses por semanas, empezando por un día fijo, que suele ser el domingo siguiente al de la entrega*, y suponiendo al año 52 exactas.

De esta manera pueden calcularse, tan pronto como se recibe cada imposición, sus intereses ANTICIPADOS, ó *que corresponden hasta el último domingo del año* y los RETRÓGRADOS *correspondientes hasta el propio domingo de las cantidades que se retiran* cuando se recibe la petición de reembolso, con lo cual, á fin de año, basta restar éstos de aquéllos y agregar la diferencia á la de las sumas recibidas y entregadas, para saber lo que al imponente le queda en caja.

Esta es la única particularidad que ofrecen esos cálculos, y que pondremos de manifiesto con un ejemplo.

PROBLEMA. Un comerciante al por menor, deposita en una caja de ahorros al $3\frac{1}{2}\,^{0}/_{0}$, 120 pesetas, 11 semanas después de principiar el año; á las 5 semanas, 130; transcurridas otras 4, 150; 100, al pasar otras 3; 4 semanas más tarde retira 75; vuelve á dar 180 al transcurrir 5, y 250 con intervalo de otras 4; retira 65 á las 3 semanas; entrega 115 á las 5, y por último, 90 á los 15 días. ¿Cuánto tendría en la caja á fin de año?

He aquí el resumen de la cuenta que le correspondería:

CANTIDADES ENTREGADAS.	CANTIDADES RECIBIDAS.	SEMANAS DE INTERÉS.	INTERESES ANTICIPADOS.	INTERESES RETRÓGRADOS.
120	»	40	3'23	»
130	»	35	3'06	»
150	»	31	3'12	»
100	»	28	1'88	»
»	75	25	»	1'26
180	»	19	2'30	»
250	»	15	2'52	»
»	65	13	»	0'56
15	»	7	0'54	»
90	»	5	0'30	»
1135	140		16'95	1'82
140			1'82	
995			15'13	
15'13				
1010'13				

Tendría en caja 1010'30 pesetas.

Todos los demás detalles que pudiéramos dar pertenecen por completo al estudio de la Contabilidad y Práctica de operaciones comerciales, por lo que terminaremos dedicando igualmente algunas palabras á las CAJAS DE RETIRO, cuyo principal fin es *proporcionar una renta vitalicia á partir de cierta edad prefijada*, mediante la entrega de las correspondientes primas.

130. Si estas rentas se calculasen del todo por los métodos generales ya expuestos, nada tendríamos que añadir, pero como se pagan por trimestres, suelen construirse Tablas de anualidades trimestrales, semejantes á las ya descritas, cuyo cálculo no ofrece dificultad después de hallar el tanto trimestral equivalente al fijado y formar otras de mortalidad para iguales períodos de tiempo, que se desprenden de las usuales, repartiendo por igual, en conformidad con la regla de término medio las defunciones anuales, entre los 4 trimestres del año.

Con tales Tablas á la vista, fácil es determinar las primas de cualquier género con arreglo á las fórmulas demostradas, en las que a y $a+n$ serán las edades *en trimestres*, $\mathfrak{X}_a$ la nueva anualidad que para no confundirse representan muchos por $\mathfrak{l}$, y n el número de trimestres por el cual se difiere el cobro de la renta.

La particularidad que ofrecen las que hay que calcular en las cajas de retiro, consiste en la costumbre de *entregar á los herederos del rentista cuando fallece, la parte alícuota que corresponde al tiempo transcurrido desde que se pagó el último término*, que se supone igual á su mitad, para compensar los errores al modificar los valores de las primas.

Estas rentas no son, por tanto, otra cosa, que la combinación de *una renta vitalicia de* 1 *ó más unidades*, *diferida hasta la edad que se conviene*, ó se impone según es frecuente, y de *un seguro diferido también de* $\frac{1}{2}$ *unidad, ó de la mitad del término de la misma*, por lo cual *á la prima de la primera hay que añadir la del segundo.*

Teniendo presente esta circunstancia, y cuanto aquí llevamos dicho, fácil será hallar la única ó temporal que deberá exigirse á cambio de cierta renta y la que podrá cobrarse, atendiendo al valor de aquélla.

En éste como en todos los casos, pueden deducirse fórmulas para los particulares, que simplifiquen las operaciones, y ahora, como en otros muchos, somos los primeros en deplorar la imposibilidad en que nos vemos de continuar detallando los innumerables problemas especiales que cada cual en su esfera, aunque siempre dentro de la mercantil, puede verse obligado á resolver.

Ya dijimos en el Prólogo que únicamente nos sería posible exponer los fundamentos de las más importantes cuestiones, ofreciendo encerrarlo todo en un Programa de 100 lecciones.

Terminadas éstas, que hemos ido formando á medida que escribíamos, nos vemos precisados á dar por concluído nuestro trabajo, ó por mejor decir á empezarlo de nuevo.

Corregidas las erratas que por fuerza han de abundar en los cálculos numéricos; estudiando el orden más conveniente para que las materias hasta aquí tratadas, puedan encerrarse en el menor espacio posible; y sin la obligación que hasta ahora nos habíamos impuesto de justificar algunas opiniones particulares, no conformes con las que se profesan generalmente, y que ya quedan justificadas para siempre en un sentido ú otro, nos parece podremos sintetizar mucho más, abreviando y simplificando lo que llevamos escrito para acortar las lecciones y el volumen de esta obra, sacrificando, si es preciso, lo menos indispensable en teorías, ejemplos y Tablas, é incluyendo algo de lo mucho que falta.

Esto es lo que al presente nos proponemos realizar.

FIN DE LOS CÁLCULOS MERCANTILES SUPERIORES.

APÉNDICE.

ECUACIONES DE SEGUNDO, TERCERO Y CUARTO GRADO.

I.—Resolución de las de segundo.

131. Una ecuación cualquiera de segundo grado con una incógnita x puede contener términos con x^2, con x, é independientes de esta letra.

Suponiendo, por consiguiente, que por la regla dada al estudiar las de primero (T. II, 113), que á todas es aplicable, se hacen desaparecer los denominadores, sacando dichas potencias factor común y llamando a, b y c á cuanto multiplique á x^2, á x y á la suma de todos los términos independientes, la ecuación podrá ponerse siempre bajo la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

si se suponen pasados todos al primer miembro, pudiendo ser a, b y c, después de efectuadas las operaciones numéricas, reales ó imaginarios, positivos ó negativos, racionales ó irracionales y enteros ó fraccionarios, si bien en todo caso es conveniente para la práctica hacer que a sea positivo, lo cual puede conseguirse siempre multiplicando ambos miembros de la igualdad por -1 cuando no lo sea, lo que equivale á cambiar los signos de los tres términos generales.

Diviéndolos también por a, y representando por p y q los cocientes $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$, aun puede dársele forma más sencilla, reduciéndola á

$$x^2+px+q=0.$$

Si ahora pasamos q al segundo miembro y agregamos á ambos $\frac{p^2}{4}$, esa igualdad se convertirá en

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$$

y como el primero será entonces el cuadrado de $x+\frac{p}{2}$ (T. I, 249)

$$\left(x+\frac{p}{a}\right)^2=x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

tendremos sustituyendo,

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

puesto que el segundo podrá ser positivo ó negativo (T. I, 255), y por consiguiente

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

expresión que dará siempre dos valores para la incógnita, haciendo $p=0$, $q=0$, ó ambas cosas á la vez, cuando la ecuación carezca de primeras potencias de x, términos independientes, ó de los unos y de los otros.

II.—Resolucion de las de tercero.

132. De la misma manera que las de segundo y por idénticas transformaciones, pueden siempre reducirse las de tercero, á la forma

$$y^3+my^2+ny+k=0.$$

Observemos ante todo, que si hacemos $y=x-\frac{m}{3}$ y sustituímos este valor en la ecuación, quedará transformada en

$$\left(x-\frac{m}{3}\right)^3+m\left(x-\frac{m}{3}\right)^2+n\left(x-\frac{m}{3}\right)+k=0$$

ó efectuando las operaciones indicadas (T. I., 249)

$$x^3-3x^2\cdot\frac{m}{3}+3x\cdot\frac{m^2}{9}-\frac{m^3}{27}+mx^2-m\cdot 2x\cdot\frac{m}{3}+m\cdot\frac{m^2}{9}$$

$$+nx-n\cdot\frac{m}{3}+k=0$$

$$x^3-mx^2+\frac{m^2}{3}x-\frac{m^3}{27}+mx^2-\frac{2m}{3}x+\frac{m^3}{9}+nx-\frac{nm}{3}+k=0$$

$$x^3+\left(\frac{m^2}{3}-\frac{2m}{3}+n\right)x+\left(k-\frac{m^3}{27}+\frac{m^3}{9}-\frac{nm}{3}\right)=0$$

que representando p y q, las cantidades encerradas entre paréntesis, se convierte en

$$x^3+px+q=0$$

á cuya forma más sencilla, por carecer de segundo término, pueden referirse todas en la práctica, después de reducirlas á la anterior *reemplazando la incógnita* según vemos, *por otra disminuida en el tercio del coeficiente positivo del cuadrado de la misma y efectuando las operaciones indicadas.*

Tratemos, pues, de resolver la última.

Para hacerlo con facilidad, descompondremos x en dos partes indeterminadas u y z con lo cual tendremos:

$$x^3=(u+z)^3=u^3+3u^2z+3uz^2+z^3=u^3+z^3+3uz(u+z)$$

$$=u^3+z^3+3uzx$$

ó pasando al primer miembro todos los términos,

$$x^3-3uzx-u^3-z^3=0$$

por lo cual deberá verificarse

$$x^3+px+q=x^3-3uzx-u^3-z^3$$

para lo cual evidentemente bastará sean

$$p=-3uz;\quad q=-u^3-z^3$$

de cuyas relaciones se desprende que

$$uz=-\frac{p}{3};\quad u^3+z^3=-q$$

que se convierte multiplicando por z^3 y escribiendo en el primer miembro todos los términos en

$$z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0$$

ecuación de sexto grado que puede transformarse en una de segundo, haciendo $z^3=v$, puesto que entonces deberá ser

$$v^2+qv-\frac{p^3}{27}=0$$

de donde, según lo demostrado en el párrafo anterior,

$$v=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

Ahora bien; si en vez de despejar u^3 en la ecuación $u^3z^3=-\frac{p^3}{27}$ para llegar á una ecuación que sólo contenga z, despejásemos z^3, es evidente se llegaría por análogas sustituciones á la misma ecuación final, con la sola diferencia de estar z reemplazada por u, luego el valor de v no sólo es el de z^3, sino también el de u^3.

Tomando, pues, para cada una de estas incógnitas, uno de los de v, tendremos

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}};\quad u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}};\quad z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

y finalmente, recordando que hemos supuesto $x=u+z$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Escolio. Así como la incógnita de una ecuación de segundo grado tiene dos *valores* ó raíces, porque al extraer una cuadrada cualquiera $\sqrt{A}=\sqrt{A\cdot 1}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{1}=\sqrt{A}(\pm 1)=\pm\sqrt{A}$, hay dos números $+1$ y -1 que elevados á la segunda potencia producen 1, así también *la de tercero tiene tres raíces*, porque no sólo 1, sino $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ elevados al cubo, producen la unidad, por lo cual toda raíz cúbica es igual á su valor número aritmético, y á este mismo valor multiplicado por esos dos números.

De aquí se deduce que *multiplicando los dos sumandos* en que x se halla descompuesta, *por las dos raíces cúbicas imaginarias de la unidad*, se tendrían *otros dos* para dicha incógnita, pero como en la práctica del Comercio, no es costumbre operar con esta clase de números, la fórmula deducida basta para todas las aplicaciones.

III. — Resolución de las de cuarto.

133. Reducida la ecuación de cuarto grado, de la misma manera que las de primero, segundo y tercero, á la forma general

$$y^4+my^3+ny^2+sy+k=0$$

si procediendo análogamente hacemos $y=x-\frac{m}{4}$ y sustituímos este valor, se transformará en

$$\left(x-\frac{m}{4}\right)^4+m\left(x-\frac{m}{4}\right)^3+m\left(x-\frac{m}{4}\right)^2+s\left(x-\frac{m}{4}\right)+k=0$$

ó efectuando las operaciones indicadas (4)

$$x^4-4x^3\cdot\frac{m}{4}+6x^2\cdot\frac{m^2}{16}-4x\cdot\frac{m^3}{64}+\frac{m^4}{256}$$

$$+mx^3-3mx^2\cdot\frac{m}{4}+3mx\cdot\frac{m^2}{16}-m\cdot\frac{m^3}{64}+nx^2-2nx\cdot\frac{m}{4}$$

$$+n\cdot\frac{m^2}{16}+sx-s\cdot\frac{m}{4}+k=0$$

$$x^4+\left(\frac{3m^2}{8}-\frac{3m^2}{4}+n\right)x^2+\left(\frac{3m^3}{16}-\frac{m^3}{16}-\frac{nm}{2}+s\right)x$$

$$+\left(\frac{m^4}{256}-\frac{m^4}{64}+\frac{nm^2}{16}-\frac{sm}{4}+k\right)=0$$

que representando por p, q y r las cantidades encerradas entre paréntesis, se convierte en

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

á cuya forma más sencilla, por carecer de segundo término, pueden referirse todas en la práctica después de reducidas á la anterior, *reemplazando*, según vemos, *la incógnita por otra disminuída en el cuarto del coeficiente positivo del cubo de la misma, y efectuando las operaciones indicadas.*

Ésta es, por consiguiente, la que hay necesidad de resolver.

Para emplear también un procedimiento análogo al del párrafo anterior, de entre los varios que pueden seguirse, busquemos el medio de descomponerla en el producto de dos factores de segundo grado $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$ por medio de las cantidades indeterminadas a, b, c, d, haciendo que sea

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

$$=x^4+ax^3+bx^2+cx^3+acx^2+bcx+dx^2+adx+bd,$$

ó lo que es lo mismo,

$$x^4+px^2+qx+r=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd$$

para lo cual basta evidentemente que sean,

$$a+c=0;\ b+ac+d=p;\ bc+ad=q;\ bd=r.$$

De la primer relación se deduce $c=-a$, valor que sustituído en las dos siguientes las transforma en

$$b-a^2+d=p;\ ad-ab=q.$$

Aplicando ahora el método de reducción (T. II, 119) para eliminar b entre estas dos, tendremos, después de sumar con la segunda, el producto de la primera por a,

$$2ad-a^3=pa+q$$

de la cual se deduce á simple vista

$$d=\frac{a^3+pa+q}{2a}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2a}$$

y como ha de ser

$$b=\frac{r}{d}=\frac{2ar}{a^3+pa+q}$$

si en la igualdad $ad—ab=q$, reemplazamos b y d por sus valores, resultará, por último,

$$\frac{a^3+pa+q}{2}-\frac{2a^2r}{a^3+pa+q}=q$$

ó quitando denominadores, pasando al primer miembro todos los términos y simplificando

$$a^6+pa^4+qa^3+pa^4+p^2a^2+pqa+qa^3+pqa+q^2$$
$$-4ra^2-2qa^3-2pqa-2q^2=0$$
$$a^6+2pa^4+(p^2-4r)a^2-q^2=0$$

ecuación que determinará el valor de a, pues aunque es de sexto grado, puede transformarse haciendo $a^2=z$, de donde $a^4=z^2$ y $a^6=z^3$, en la de tercero

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$$

que ya se sabe resolver.

Ahora bien; calculado el valor de a, la ecuación primitiva quedará satisfecha evidentemente, cuando sea igual á cero cualquiera de los dos factores en que se ha descompuesto; es decir, siendo

$$x^2+ax+\frac{2r}{a^2+p+\frac{2}{a}}=0,\text{ ó bien, } x^2-ax+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2a}=0$$

que siendo de segundo grado sabemos dan para x los cuatro valores

$$x'=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{2r}{a^2+p+\frac{q}{a}}};$$

$$x''=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{2r}{a^2+p+\frac{q}{a}}}$$

$$x''' = \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2a}};$$

$$x^{\text{IV}} = \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2a}}$$

IV.—Aplicaciones.

134. En la imposibilidad de detallar lo innumerable, como lo son las aplicaciones de estas fórmulas, procuraremos únicamente hacer palpable hasta dónde llega el desconocimiento que de los más frecuentes, sencillos é importantes problemas tienen los que dicen, según hemos oído más de una vez, que en los cálculos relacionados con el mundo mercantil para nada se necesita apelar á la resolución de ecuaciones.

Ninguna nueva enseñanza podría obtenerse con la aplicación numérica de estas fórmulas á casos particulares; creemos será mejor que eso, realizar nuestro propósito completando en parte algo de lo mucho que hasta aquí ha quedado incompleto, examinando un par de cuestiones generales, suficientes para probar que sin acudir á una ecuación de segundo grado, es imposible resolver algunas tan elementales y frecuentes como la de hallar el tiempo necesario para constituir el capital que se desee por medio de imposiciones que devenguen interés simple, y que sin valerse de otras de grado más superior, la resolución, por ejemplo, de aquellas á que se aplica la tan conocida regla de Compañía, es completamente absurda en gran número de ocasiones.

Para lo primero, recordaremos lo dicho en el párrafo 48 al ocuparnos de las imposiciones a, que al tanto por 1, r de interés simple, forman el capital que llamamos C, al transcurrir un tiempo n.

Allí determinamos ese capital

$$C = \frac{an}{2}\Big(2 + r(n-1)\Big)$$

deduciendo de su expresión los valores de a y de r, pero haciendo caso omiso del tiempo, no porque su cálculo fuera demasiado fácil, ni por desconocer la importancia del problema, ni por olvido, sino por ser indispensable para despejarlo resolver una ecuación de segundo grado.

En efecto; si multiplicamos por 2 ambos miembros de esa igualdad y efectuamos las operaciones indicadas, resulta

$$2C=2an+arn^2+arn.$$

ó sacando n factor común, pasando al primer miembro todos los términos y dividiendo por ar

$$n^2+\frac{r+2}{r}n-\frac{2C}{ar}=0$$

ecuación de la forma $x^2+px+q=0$, en la que $p=\frac{r+2}{r}$, $q=-\frac{2C}{ar}$ que ahora y sólo ahora, es decir, después de conocer la fórmula que la resuelve (131) nos permite afirmar, que en cualquier caso en que se conozcan r, C y a, bastará para determinar el tiempo n, sustituir esas letras por sus valores numéricos, en la expresión

$$n=-\frac{r+2}{2r}\pm\sqrt{\frac{r^2+4r+4}{4r^2}+\frac{2C}{ar}}$$

ó bien en la más sencilla

$$n=\frac{-r-2\pm\sqrt{r^2+4r+4+8Car}}{2r}$$

y efectuar las operaciones que están indicadas.

Pasemos á la llamada regla de Compañía, suponiendo también uno de los más elementales y frecuentes casos, en que sólo se asocien dos personas juntando sus capitales C, C' y suponiendo que necesitándose al fin del primer año aumentar en c' el fondo común, facilita esta cantidad el segundo socio, añadiendo el primero c al terminar el siguiente, y disolviéndose la Sociedad al transcurrir un tercer año, en que ya se ha obtenido una ganancia G, que ha de descomponerse en las g y g' que á cada uno correspondan.

El problema está comprendido en el cuarto caso de dicha regla, y es más sencillo aún que los resueltos en el párrafo 108 del anterior volumen con arreglo á la costumbre práctica, pues se reduce á una Compañía que dura 3 años, en la que una persona ha puesto la cantidad C por todo ese tiempo y la c por 1 año, mientras otra ha contribuído al negocio con C' por los mismos 3 años y c' por 2.

Siendo distintos los capitales y tiempos, ya vimos (T. II, 108) que en la práctica se reparte la ganancia G en proporción á los productos de los primeros por los segundos, aun cuando está muy lejos de existir semejante proporcionalidad.

Efectivamente; si al fin del primer año hubo que añadir c' al fondo común y al acabar el segundo c, para llevar á cabo las operaciones productoras de la ganancia G, es prueba de que las ya obtenidas, positivas ó negativas, pues bien pudieron ser pérdidas, agregadas á los capitales primitivos no bastaban para continuarlas, ó en otros términos, bastasen ó no bastasen, los interesados no las retiraban, y á medida que los negocios se sucedían iban realizándolos con las cantidades primitivas, aumentadas en las ganancias ya obtenidas, si las había, que tanto como aquéllas, por consiguiente, contribuían á formar las posteriores.

Resulta pues, que en toda Compañía en que los beneficios no se retiran al terminar cada unidad de tiempo, se van acumulando á los capitales, lo que equivale á producir éstos, mientras dura la Sociedad, un interés compuesto á un tanto desconocido, que viene á ser, por consiguiente, la verdadera incógnita del problema.

Sea x este tanto en el caso que nos ocupa.

Los capitales C, C' habrán producido en los 3 años (15)

$$C\big((1+x)^3-1\big) \quad \text{y} \quad C'\big((1+x)^3-1\big)$$

y los c y c',

$$cx \quad \text{y} \quad c'\big((1+x)^2-1\big)$$

luego á cada uno corresponderán al fin de dicho tiempo

$$g=C\big((1+x)^3-1\big)+cx \quad \text{y} \quad C'\big((1+x)^3-1\big)+c'\big((1+x)^2-1\big)$$

siendo x, como hemos dicho, la verdadera incógnita, si la cuestión no ha de resolverse caprichosamente apoyándose en falsos convenios.

Para determinarla, basta expresar que los dos beneficios reunidos componen el G, es decir, que

$$(C+C')(1+x)^3+c'(1+x)^2+cx=G+C+C'+c'$$

$$C+C'+3(C+C')^2x+3(C+C')x^2+(C+C')x^3+c'+2c'x+c'x^2+cx$$
$$=G+C+C'+c'$$

$$(C+C')x^3+\left(3(C+C')+c'\right)x^2+\left(3(C+C')^2+2c'+c\right)x=G$$

$$x^3+\frac{3(C+C')+c'}{C+C'}x^2+\frac{3(C+C')+2c'+c}{C+C'}x-\frac{G}{C+C'}=0$$

ecuación de tercer grado, cuyas transformaciones es innecesario proseguir, sabiendo, como sabemos, que al reemplazar x por

$$x-\frac{C+C'-\frac{1}{3}c'}{C+C'}=x-1+\frac{c'}{3(C+C')}$$ desaparecería la segunda

potencia de la incógnita, reduciéndose á la forma

$$x^3+px+q=0$$

que en virtud de los valores que correspondiesen á p y q, resolveríamos por la fórmula ya deducida (132).

No queremos insistir más, recordando los casos en que sin necesidad se apela al muchas veces impracticable y siempre anticientífico procedimiento del tanteo, ó quedan sin resolver cuestiones de importancia, dificultándose otras, por desconocer las bases en que su planteo, sencillo casi siempre, debe apoyarse y los métodos generales de resolución que se les puede y debe aplicar.

Creemos basta lo dicho para nuestro objeto, ya que por medio de los ejemplos de las imposiciones y de las Compañías nos parece hemos hecho ver con claridad suficiente, no sólo la imprescindible necesidad de las ecuaciones para la resolución de un gran número de cuestiones mercantiles, sino también los errores á que conduce no estudiarlas bien á fondo y limitarse á la aplicación de reglas prácticas, no siempre tan exactas como fuera de desear, aun cuando con su autoridad las patrocinen determinados autores y ciertos prácticos especialmente, para quienes no hay nada que sea necesario, ni siquiera útil, como no pertenezca á la clase de los procedimientos con frecuencia rutinarios y desprovistos de fundamento sólido, de que alguna vez han tenido noticia.

Téngase presente que el Cálculo es la más importante de las ciencias, por apoyarse en ella todas las demás, y que una ciencia deja de serlo cuando se la quiere convertir en una simple colección de reglas aprendidas de memoria y no hijas de la inteligencia, cuando ésta se halla tan sujeta á error, si no está suficiente y claramente apoyada por la razón.

Acúdase, pues, á ésta en todo como única autoridad legítima y admisible; prescíndase de aplicar regla alguna que pudiera ofrecer la más pequeña duda, teniendo siempre presente que esta duda, sin embargo, según hizo constar el gran Descartes, es el único camino que puede conducir á la verdad y á la certidumbre; y no se olvide lo que quizá inútilmente por su propia evidencia dijimos ya en el prólogo: «El que sigue una senda cualquiera con el propósito de llegar á un punto determinado, ha de tener certeza de que siguiéndola conseguirá lo que se propone, y ha de saber por qué la ha escogido y por qué la sigue, sin lo cual el extravío es casi seguro, é imposible salvar el más insignificante obstáculo imprevisto.»

FIN DEL APÉNDICE.

TABLA I.

Números primos enteros hasta 100 y Mantisas de sus logaritmos, con 30 cifras.

N.	M. Log.	N.	M. Log.
1	000000000000000000000000000000	41	612783856719735494509411849968
2	301029995663981195213738894724	43	633468455579586526405088153229
3	477121254719662437295027903255	47	672097857935717464414219399449
5	698970004336018804786261105276	53	724275869600789045632992291627
7	845098040014256830712216258593	59	770852011642144190260656384535
11	041392685158225040750199971243	61	785329835010767033885748513757
13	113943352306836769206505157942	67	826074802700826434149131629226
17	230448921378273928540169894328	71	851258348719075286092829435035
19	278753600952828961536333475757	73	863322860120455901074386900470
23	361727836017592878867777112251	79	897627091290441427994821386478
29	462397997898956087332846762969	83	919078092376073903832760352027
31	491361693834272679566704100118	89	949390006644912784723543369702
37	568201724066994996808450689539	97	986771734266244851784361811666

TABLA II.

Números primos enteros desde 101 hasta 1.000 y Mantisas de sus logaritmos, con 15 cifras.

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
101	004321373782643	241	382017042574868	409	611723308007342
103	012837224705172	251	399673721481038	419	622214022966295
107	029383777685210	257	409933123331295	421	624282095835668
109	037426497940624	263	419955748489758	431	634477270160732
113	053078443483420	269	429752280002408	433	636487896353365
127	103803720955957	271	432969290874406	439	642464520242121
131	117271295655764	277	442479769064449	443	646403726223070
137	136720567156407	281	448706319905080	449	652246341003323
139	143014800254095	283	451786435524290	457	659916200069850
149	173186268412274	293	466867620354109	461	663700925389648
151	178976947293169	307	487138375477186	463	665580991017953
157	195899652409234	311	492760389026838	467	669316880566112
163	212187604403958	313	495544337546448	479	680335513414563
167	222716471147583	317	501059262217751	487	687528961214634
173	238046103128795	331	519827993775719	491	691081492122968
179	252853030979893	337	527629900871339	499	698100545623390
181	257678574869185	347	540329474790874	503	701567985055927
191	281033367247728	349	542825426959180	509	706717782336759
193	285557309007774	353	547774705387823	521	716837723299524
197	294466226161593	359	555094448578319	523	718501688867274
199	298853076409707	367	564666064252089	541	733197265106569
211	324282455297693	373	571708831808688	547	737987326333431
223	348304863048161	379	578639209968072	557	745855195173729
227	356025857193123	383	583198773968623	563	750508394851346
229	359835482339888	389	589949601325708	569	755112266395071
233	367355921026019	397	598790506763115	571	756636108245848
239	378397900948138	401	603144372620182	577	761175813155731

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
587	768638101247614	719	856728890382883	859	933993163831242
593	773054693364263	727	861537410859038	863	936910795715210
599	777426822389311	733	865103974641128	877	942999593366041
601	778874472002740	739	868644438394826	881	944975908412048
607	783188691075258	743	870988813760575	883	945960703577569
613	787460474518415	751	875639937004168	887	947923619831726
617	790285164033242	757	879095879500073	907	957607287060095
619	791690649020118	761	881384656770573	911	959118376972098
631	800029359244134	769	885926339801431	919	963315511386111
641	806858029518817	773	888179493918325	929	968015713993642
643	808210972924222	787	895974732359065	937	971739590887778
647	810904280668700	797	901458321396112	941	973589623427257
653	814913181275074	809	907948521612272	947	976349979003273
659	818885414594010	811	909020854211156	953	979092900638326
661	820201459485640	821	914343157119441	967	985426474083002
673	828015064233977	823	915399835212270	971	987219229908005
677	830588668685144	827	917505509552547	977	989894563718773
683	834420703681533	829	918554530550274	983	992553517832136
691	839478047374198	839	923761960828700	991	996073654485275
701	845718017966659	853	930949031167523	997	998695158311656
709	850646235183067	857	932980821923198		

TABLA III.

Multiplicadores fijos $(1+r)^n$ para el interés compuesto.

1 por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'010000	17	1'184304	33	1'388690	49	1'628348	65	1'909366
2	1'020100	18	1'196147	34	1'402577	50	1'644632	66	1'928460
3	1'030301	19	1'208109	35	1'416603	51	1'661078	67	1'947745
4	1'040604	20	1'220190	36	1'430769	52	1'677689	68	1'967222
5	1'051010	21	1'232392	37	1'445076	53	1'694466	69	1'986894
6	1'061520	22	1'244716	38	1'459527	54	1'711410	70	2'006763
7	1'072135	23	1'257163	39	1'474123	55	1'728525	71	2'026831
8	1'082857	24	1'269735	40	1'488864	56	1'745810	72	2'047099
9	1'093685	25	1'282432	41	1'503752	57	1'763268	73	2'067570
10	1'104622	26	1'295256	42	1'518790	58	1'780901	74	2'088246
11	1'115668	27	1'308209	43	1'533978	59	1'798710	75	2'109128
12	1'126825	28	1'321291	44	1'549318	60	1'816697	76	2'130220
13	1'138093	29	1'334504	45	1'564811	61	1'834864	77	2'151522
14	1'149474	30	1'347849	46	1'580459	62	1'853212	78	2'173037
15	1'160969	31	1'361327	47	1'596263	63	1'871744	79	2'194768
16	1'172579	32	1'374941	48	1'612226	64	1'890462	80	2'216715

1 ½ por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'015000	17	1'288020	33	1'634479	49	2'074130	65	2'632042
2	1'030225	18	1'307341	34	1'658996	50	2'105242	66	2'671522
3	1'045678	19	1'326951	35	1'683881	51	2'136821	67	2'711595
4	1'061364	20	1'346855	36	1'709140	52	2'168873	68	2'752269
5	1'077284	21	1'367058	37	1'734777	53	2'201406	69	2'793553
6	1'093443	22	1'387564	38	1'760798	54	2'234428	70	2'835456
7	1'109845	23	1'408377	39	1'787210	55	2'267944	71	2'877988
8	1'126493	24	1'429503	40	1'814018	56	2'301963	72	2'921158
9	1'143390	25	1'450945	41	1'841229	57	2'336493	73	2'964975
10	1'160541	26	1'472710	42	1'868847	58	2'371540	74	3'009450
11	1'177949	27	1'494800	43	1'896880	59	2'407113	75	3'054592
12	1'195618	28	1'517222	44	1'925333	60	2'443220	76	3'100411
13	1'213552	29	1'539981	45	1'954213	61	2'479868	77	3'146917
14	1'231756	30	1'563080	46	1'983526	62	2'917066	78	3'194121
15	1'250232	31	1'586526	47	2'013279	63	2'554822	79	3'242032
16	1'268986	32	1'610324	48	2'043478	64	2'593144	80	3'290663

2 por 100.

Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$
1	1'020000	17	1'400241	33	1'922231	49	2'638812	65	3'622523
2	1'040400	18	1'428246	34	1'960676	50	2'691588	66	3'694974
3	1'061208	19	1'456811	35	1'999890	51	2'745420	67	3'768873
4	1'082432	20	1'485947	36	2'039887	52	2'800328	68	3'844251
5	1'104081	21	1'515666	37	2'080685	53	2'856335	69	3'921136
6	1'126162	22	1'545980	38	2'122299	54	2'913461	70	3'999558
7	1'148686	23	1'576899	39	2'164745	55	2'971731	71	4'079549
8	1'171659	24	1'608437	40	2'208040	56	3'031165	72	4'161140
9	1'195093	25	1'640606	41	2'252200	57	3'091789	73	4'244363
10	1'218994	26	1'673418	42	2'297244	58	3'153624	74	4'329250
11	1'243374	27	1'706886	43	2'343189	59	3'216697	75	4'415835
12	1'268242	28	1'741024	44	2'390053	60	3'281031	76	4'504152
13	1'293607	29	1'775845	45	2'437854	61	3'346651	77	4'594235
14	1'319479	30	1'811362	46	2'486611	62	3'413584	78	4'686120
15	1'345868	31	1'847589	47	2'536344	63	3'481856	79	4'779842
16	1'372786	32	1'884541	48	2'587070	64	3'551493	80	4'875439

2 ½ por 100.

Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$
1	1'025000	17	1'521618	33	2'258851	49	3'353277	65	4'977958
2	1'050625	18	1'559659	34	2'315322	50	3'437109	66	5'102407
3	1'076891	19	1'598650	35	2'373205	51	3'523036	67	5'229967
4	1'103813	20	1'638616	36	2'432535	52	3'611112	68	5'360717
5	1'131408	21	1'679582	37	2'493349	53	3'701390	69	5'494734
6	1'159693	22	1'721571	38	2'555682	54	3'793925	70	5'632103
7	1'188686	23	1'764611	39	2'619574	55	3'888773	71	5'772905
8	1'218403	24	1'808726	40	2'685064	56	3'985992	72	5'917228
9	1'248863	25	1'853944	41	2'752190	57	4'085642	73	6'065159
10	1'280085	26	1'900293	42	2'820995	58	4'187783	74	6'216788
11	1'312087	27	1'947800	43	2'891520	59	4'292478	75	6'372207
12	1'344889	28	1'996495	44	2'963808	60	4'399790	76	6'531513
13	1'378511	29	2'046407	45	3'037903	61	4'509784	77	6'694800
14	1'412974	30	2'097568	46	3'113851	62	4'622529	78	6'862170
15	1'448298	31	2'150007	47	3'191697	63	4'738092	79	7'033725
16	1'484506	32	2'203757	48	3'271490	64	4'856545	80	7'209568

3 por 100

Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$
1	1'030000	17	1'652848	33	2'652335	49	4'256219	65	6'829983
2	1'060900	18	1'702433	34	2'731905	50	4'383906	66	7'034882
3	1'092727	19	1'753506	35	2'813862	51	4'515423	67	7'245929
4	1'125509	20	1'806111	36	2'898278	52	4'650886	68	7'463307
5	1'159274	21	1'860295	37	2'985227	53	4'790412	69	7'687206
6	1'194052	22	1'916103	38	3'074783	54	4'934125	70	7'917822
7	1'229874	23	1'973587	39	3'167027	55	5'082149	71	8'155357
8	1'266770	24	2'032794	40	3'262038	56	5'234613	72	8'400017
9	1'304773	25	2'093778	41	3'359899	57	5'391651	73	8'652018
10	1'343916	26	2'156591	42	3'460696	58	5'553401	74	8'911578
11	1'384234	27	2'221289	43	3'564517	59	5'720003	75	9'178926
12	1'425761	28	2'287928	44	3'671452	60	5'891603	76	9'454293
13	1'468534	29	2'356566	45	3'781596	61	6'068351	77	9'737922
14	1'512590	30	2'427262	46	3'895044	62	6'250402	78	10'030060
15	1'557967	31	2'500080	47	4'011895	63	6'437914	79	10'330962
16	1'604706	32	2'575083	48	4'132252	64	6'631051	80	10'640891

3 ½ por 100.

Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$
1	1'035000	17	1'794676	33	3'111942	49	5'396065	65	9'356701
2	1'071225	18	1'857489	34	3'220860	50	5'584927	66	9'684185
3	1'108718	19	1'922501	35	3'333590	51	5'780399	67	10'023132
4	1'147523	20	1'989789	36	3'450266	52	5'982713	68	10'373941
5	1'187686	21	2'059431	37	3'571025	53	6'192108	69	10'737029
6	1'229255	22	2'131512	38	3'696011	54	6'408832	70	11'112825
7	1'272279	23	2'206114	39	3'825372	55	6'633141	71	11'501774
8	1'316809	24	2'283328	40	3'959260	56	6'865301	72	11'904336
9	1'362897	25	2'363245	41	4'097834	57	7'105587	73	12'320988
10	1'410599	26	2'445959	42	4'241258	58	7'354282	74	12'752223
11	1'459970	27	2'531567	43	4'389702	59	7'611682	75	13'198550
12	1'511069	28	2'620172	44	4'543342	60	7'878091	76	13'660500
13	1'563956	29	2'711878	45	4'702359	61	8'153824	77	14'138617
14	1'618695	30	2'806794	46	4'866941	62	8'439208	78	14'633469
15	1'675349	31	2'905031	47	5'037284	63	8'734580	79	15'145640
16	1'733986	32	3'006708	48	5'213589	64	9'040291	80	15'675738

4 por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'040000	17	1'947901	33	3'648381	49	6'833349	65	12'798735
2	1'081600	18	2'025817	34	3'794316	50	7'106683	66	13'310685
3	1'124864	19	2'106849	35	3'946089	51	7'390951	67	13'843112
4	1'169859	20	2'191123	36	4'103933	52	7'686589	68	14'396836
5	1'216653	21	2'278768	37	4'268090	53	7'994052	69	14'972710
6	1'265319	22	2'369919	38	4'438813	54	8'313814	70	15'571618
7	1'315932	23	2'464716	39	4'616366	55	8'646367	71	16'194483
8	1'368569	24	2'563304	40	4'801021	56	8'992222	72	16'842262
9	1'423312	25	2'665836	41	4'993061	57	9'351910	73	17'515953
10	1'480244	26	2'772470	42	5'192784	58	9'725987	74	18'216591
11	1'539454	27	2'883369	43	5'400495	59	10'115026	75	18'945255
12	1'601032	28	2'998703	44	5'616515	60	10'519627	76	19'703065
13	1'665074	29	3'118651	45	5'841176	61	10'940413	77	20'491187
14	1'731676	30	3'243398	46	6'074823	62	11'378029	78	21'310835
15	1'800944	31	3'373133	47	6'317816	63	11'833150	79	22'163268
16	1'872981	32	3'508059	48	6'570528	64	12'306476	80	23'049799

4 ½ por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'045000	17	2'113377	33	4'274030	49	8'643671	65	17'480702
2	1'092025	18	2'208479	34	4'466362	50	9'032636	66	18'267334
3	1'141166	19	2'307860	35	4'667348	51	9'439105	67	19'089364
4	1'192519	20	2'411714	36	4'877378	52	9'863865	68	19'948385
5	1'246182	21	2'520241	37	5'096860	53	10'307739	69	20'846063
6	1'302260	22	2'633652	38	5'326219	54	10'771587	70	21'784136
7	1'360862	23	2'752166	39	5'565899	55	11'256308	71	22'764422
8	1'422101	24	2'876014	40	5'816365	56	11'762842	72	23'788821
9	1'486095	25	3'005434	41	6'078101	57	12'292170	73	24'859318
10	1'552969	26	3'140679	42	6'351615	58	12'845318	74	25'977987
11	1'622853	27	3'282010	43	6'637438	59	13'423357	75	27'146996
12	1'695881	28	3'429700	44	6'936123	60	14'027408	76	28'368611
13	1'772196	29	3'584036	45	7'248248	61	14'658641	77	29'645199
14	1'851945	30	3'745318	46	7'574420	62	15'318280	78	30'979233
15	1'935282	31	3'913857	47	7'915268	63	16'007603	79	32'373298
16	2'022370	32	4'089981	48	8'271456	64	16'727945	80	33'830096

5 por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'050000	17	2'292018	33	5'003189	49	10'921333	65	23'839901
2	1'102500	18	2'406619	34	5'253348	50	11'467400	66	25'031896
3	1'157625	19	2'526950	35	5'516015	51	12'040770	67	26'283190
4	1'215506	20	2'653298	36	5'791816	52	12'642808	68	27'597665
5	1'276282	21	2'785963	37	6'081407	53	13'274949	69	28'977548
6	1'340096	22	2'925261	38	6'385477	54	13'938696	70	30'426426
7	1'407100	23	3'071524	39	6'704751	55	14'635631	71	31'947747
8	1'477455	24	3'225100	40	7'039989	56	15'367412	72	33'545134
9	1'551328	25	3'386355	41	7'391988	57	16'135783	73	35'222391
10	1'628895	26	3'555673	42	7'761588	58	16'942572	74	36'983510
11	1'710339	27	3'733456	43	8'149667	59	17'789701	75	38'832686
12	1'795856	28	3'920129	44	8'557150	60	18'679186	76	40'774320
13	1'885649	29	4'116136	45	8'985008	61	19'613145	77	42'813036
14	1'979932	30	4'321942	46	9'434258	62	20'593802	78	44'953688
15	2'078928	31	4'538039	47	9'905971	63	21'623493	79	47'201372
16	2'182875	32	4'764941	48	10'401270	64	22'704667	80	49'561441

6 por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'060000	17	2'692773	33	6'840590	49	17'377504	65	44'144972
2	1'123600	18	2'854339	34	7'251025	50	18'420154	66	46'793670
3	1'191016	19	3'025599	35	7'686087	51	19'525364	67	49'601290
4	1'262477	20	3'207135	36	8'147252	52	20'696885	68	52'577368
5	1'338226	21	3'399564	37	8'636087	53	21'938698	69	55'732010
6	1'418519	22	3'603537	38	9'154252	54	23'255020	70	59'075930
7	1'503630	23	3'819750	39	9'703507	55	24'650322	71	62'620486
8	1'593848	24	4'048935	40	10'285718	56	26'129341	72	66'377715
9	1'689479	25	4'291871	41	10'902861	57	27'697101	73	70'360378
10	1'790848	26	4'549383	42	11'557033	58	29'358927	74	74'582001
11	1'898299	27	4'822346	43	12'250455	59	31'120463	75	79'056921
12	2'012196	28	5'111687	44	12'985482	60	32'987691	76	83'800336
13	2'132928	29	5'418388	45	13'764611	61	34'966952	77	88'828356
14	2'260904	30	5'743491	46	14'590487	62	37'064969	78	94'158058
15	2'396558	31	6'088101	47	15'465917	63	39'288868	79	99'807541
16	2'540352	32	6'453387	48	16'393872	64	41'646200	80	105'795993

7 por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'070000	17	3'158815	33	9'325340	49	27'529930	65	81'272861
2	1'144900	18	3'379932	34	9'978114	50	29'457025	66	86'961962
3	1'225043	19	3'616528	35	10'676581	51	31'519017	67	93'049299
4	1'310796	20	3'869684	36	11'423942	52	33'725348	68	99'562750
5	1'402552	21	4'140562	37	12'223618	53	36'086122	69	106'532142
6	1'500730	22	4'430402	38	13'079271	54	38'612151	70	113'989392
7	1'605781	23	4'740530	39	13'994820	55	41'315001	71	121'968650
8	1'718186	24	5'072367	40	14'974458	56	44'207052	72	130'506455
9	1'838459	25	5'427433	41	16'022670	57	47'301545	73	139'641907
10	1'967151	26	5'807353	42	17'144257	58	50'612653	74	149'416840
11	2'104852	27	6'213868	43	18'344355	59	54'155539	75	159'876019
12	2'252192	28	6'648838	44	19'628460	60	57'046427	76	171'067342
13	2'409845	29	7'114257	45	21'002452	61	62'002677	77	183'042055
14	2'578534	30	7'612255	46	22'472623	62	66'342864	78	195'854998
15	2'759032	31	8'145113	47	24'045707	63	70'986865	79	209'564848
16	2'952164	32	8'715271	48	25'728907	64	75'955945	80	224'234388

8 por 100.

Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$	Años.	$(1+r)^n$
1	1'080000	17	3'700018	33	12'676050	49	43'427419	65	148'779847
2	1'166400	18	3'996020	34	13'690134	50	46'901613	66	160'682234
3	1'259712	19	4'315701	35	14'785344	51	50'653742	67	173'536813
4	1'360489	20	4'660957	36	15'968172	52	54'706041	68	187'419758
5	1'469328	21	5'033833	37	17'245626	53	59'082524	69	202'413339
6	1'586874	22	5'436540	38	18'625276	54	63'809126	70	218'606406
7	1'713824	23	5'871464	39	20'115298	55	68'913856	71	236'094918
8	1'850930	24	6'341181	40	21'724522	56	74'426965	72	254'982512
9	1'999005	25	6'848475	41	23'462483	57	80'381122	73	275'381113
10	2'158925	26	7'396353	42	25'339482	58	86'811612	74	297'411602
11	2'331639	27	7'988061	43	27'366640	59	93'756540	75	321'204530
12	2'518170	28	8'627106	44	29'555972	60	101'257064	76	346'900892
13	2'719624	29	9'317275	45	31'920449	61	109'357629	77	374'652964
14	2'937194	30	10'062657	46	34'474085	62	118'106239	78	404'625201
15	3'172169	31	10'867669	47	37'232012	63	127'554738	79	436'995217
16	3'425943	32	11'737083	48	40'210573	64	137'759117	80	471'954834

10 por 100.

Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$	Años..	$(1+r)^n$
1	1'100000	17	5'054470	33	23'225154	49	106'718957	65	490'370725
2	1'210000	18	5'559917	34	25'547670	50	117'390853	66	539'407798
3	1'331000	19	6'115909	35	28'102437	51	129'129938	67	593'348578
4	1'464100	20	6'727500	36	30'912681	52	142'042932	68	652'683435
5	1'610510	21	7'400250	37	34'003949	53	156'247225	69	717'951779
6	1'771561	22	8'140275	38	37'404343	54	171'871948	70	789'746957
7	1'948717	23	8'954302	39	41'144778	55	189'059142	71	868'721652
8	2'143589	24	9'849733	40	45'259256	56	207'965057	72	955'593818
9	2'357948	25	10'834706	41	49'785181	57	228'761562	73	1051'153200
10	2'593742	26	11'918177	42	54'763699	58	251'637719	74	1156'268519
11	2'853117	27	13'109994	43	60'240069	59	276'801490	75	1271'895371
12	3'138428	28	14'420994	44	66'264076	60	304'481640	76	1399'084909
13	3'452271	29	15'863093	45	72'890484	61	334'929804	77	1538'992399
14	3'797498	30	17'449402	46	80'179532	62	368'422784	78	1692'892739
15	4'177248	31	19'194343	47	88'197485	63	405'265062	79	1862'182013
16	4'594973	32	21'113777	48	97'017234	64	445'791568	80	2048'400215

TABLA IV.

Logaritmos de $(1+r)$ para los tantos más usuales.

t %	Log. $(1+r)$	t %	Log. $(1+r)$	t %	Log. $(1+r)$
$\frac{1}{2}$	0'002166062	$3\frac{1}{4}$	0'013890060	$5\frac{1}{4}$	0'022222105
1	0'004321374	$3\frac{3}{8}$	0'014415523	$5\frac{3}{8}$	0'022737588
$1\frac{1}{2}$	0'006466042	$3\frac{1}{2}$	0'014940350	$5\frac{1}{2}$	0'023252460
$1\frac{5}{8}$	0'007000559	$3\frac{5}{8}$	0'015464544	$5\frac{5}{8}$	0'023766722
$1\frac{3}{4}$	0'007534418	$3\frac{3}{4}$	0'015988105	$5\frac{3}{4}$	0'024280376
$1\frac{7}{8}$	0'008067622	$3\frac{7}{8}$	0'016511037	$5\frac{7}{8}$	0'024793423
2	0'008600172	4	0'017033339	6	0'025305865
$2\frac{1}{8}$	0'009132070	$4\frac{1}{8}$	0'017555014	$6\frac{1}{4}$	0'026328939
$2\frac{1}{4}$	0'009663317	$4\frac{1}{4}$	0'018076064	$6\frac{1}{2}$	0'027349668
$2\frac{3}{8}$	0'010193915	$4\frac{3}{8}$	0'018596489	$6\frac{3}{4}$	0'028367884
$2\frac{1}{2}$	0'010723865	$4\frac{1}{2}$	0'019116290	7	0'029383778
$2\frac{5}{8}$	0'011253170	$4\frac{5}{8}$	0'019635471	$7\frac{1}{2}$	0'031408464
$2\frac{3}{4}$	0'011781831	$4\frac{3}{4}$	0'020154032	8	0'033423756
$2\frac{7}{8}$	0'012309848	$4\frac{7}{8}$	0'020671974	9	0'037426498
3	0'012837225	5	0'021189299	10	0'041392685
$3\frac{1}{8}$	0'013363962	$5\frac{1}{8}$	0'021706009	12	0'049218023

TABLA V.

Multiplicadores fijos $\dfrac{1}{(1+r)^n}$ para el descuento racional compuesto.

1 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'990099	17	0'844378	33	0'720103	49	0'614119	65	0'523734
2	0'980296	18	0'836017	34	0'712973	50	0'608039	66	0'518548
3	0'970590	19	0'827740	35	0'705914	51	0'602019	67	0'513414
4	0'960980	20	0'819545	36	0'698925	52	0'596058	68	0'508331
5	0'951466	21	0'811430	37	0'692005	53	0'590157	69	0'503298
6	0'942045	22	0'803396	38	0'685153	54	0'584313	70	0'498315
7	0'932718	23	0'795442	39	0'678370	55	0'578528	71	0'493381
8	0'923483	24	0'787566	40	0'671653	56	0'572800	72	0'488496
9	0'914340	25	0'779768	41	0'665003	57	0'567129	73	0'483660
10	0'905287	26	0'772048	42	0'658419	58	0'561514	74	0'478871
11	0'896324	27	0'764404	43	0'651900	59	0'555954	75	0'474130
12	0'887449	28	0'756836	44	0'645445	60	0'550450	76	0'469435
13	0'878663	29	0'749342	45	0'639055	61	0'545000	77	0'464787
14	0'869963	30	0'741923	46	0'632728	62	0'539604	78	0'460185
15	0'861350	31	0'734577	47	0'626463	63	0'534261	79	0'455629
16	0'852821	32	0'727304	48	0'620260	64	0'528971	80	0'451118

1 ½ por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'985222	17	0'776385	33	0'611816	49	0'482130	65	0'379933
2	0'970662	18	0'764912	34	0'602774	50	0'475005	66	0'374318
3	0'956317	19	0'753608	35	0'593866	51	0'467985	67	0'368787
4	0'942184	20	0'742470	36	0'585090	52	0'461069	68	0'363337
5	0'928260	21	0'731498	37	0'576443	53	0'454255	69	0'357967
6	0'914542	22	0'720688	38	0'567924	54	0'447542	70	0'352677
7	0'901027	23	0'710037	39	0'559531	55	0'440928	71	0'347465
8	0'887711	24	0'699544	40	0'551262	56	0'434412	72	0'342330
9	0'874592	25	0'689206	41	0'543116	57	0'427992	73	0'337271
10	0'861667	26	0'679021	42	0'535089	58	0'421667	74	0'332287
11	0'848933	27	0'668986	43	0'527182	59	0'415435	75	0'327376
12	0'836387	28	0'659099	44	0'519391	60	0'409296	76	0'322538
13	0'824027	29	0'649359	45	0'511715	61	0'403247	77	0'317771
14	0'811849	30	0'639762	46	0'504153	62	0'397288	78	0'313075
15	0'799852	31	0'630308	47	0'496702	63	0'391417	79	0'308449
16	0'788031	32	0'620993	48	0'489362	64	0'385632	80	0'303890

2 por 100.

Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'980392	17	0'714163	33	0'520229	49	0'378958	65	0'276051
2	0'961169	18	0'700159	34	0'510028	50	0'371528	66	0'270638
3	0'942322	19	0'686431	35	0'500028	51	0'364243	67	0'265331
4	0'923845	20	0'672971	36	0'490223	52	0'357101	68	0'260129
5	0'905731	21	0'659776	37	0'480611	53	0'350099	69	0'255028
6	0'887971	22	0'646839	38	0'471187	54	0'343234	70	0'250028
7	0'870560	23	0'634156	39	0'461948	55	0'336504	71	0'245125
8	0'853490	24	0'621722	40	0'452890	56	0'329906	72	0'240319
9	0'836755	25	0'609531	41	0'444010	57	0'323437	73	0'235607
10	0'820348	26	0'597579	42	0'435304	58	0'317096	74	0'230987
11	0'804263	27	0'585862	43	0'426769	59	0'310878	75	0'226458
12	0'788493	28	0'574375	44	0'418401	60	0'304782	76	0'222017
13	0'773033	29	0'563112	45	0'410197	61	0'298806	77	0'217664
14	0'757875	30	0'552071	46	0'402154	62	0'292947	78	0'213396
15	0'743015	31	0'541246	47	0'394268	63	0'287203	79	0'209212
16	0'728446	32	0'530633	48	0'386538	64	0'281572	80	0'205110

2 ½ por 100.

Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años....	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'975610	17	0'657195	33	0'442703	49	0'298216	65	0'200886
2	0'951814	18	0'641166	34	0'431905	50	0'290942	66	0'195986
3	0'928600	19	0'625528	35	0'421371	51	0'283846	67	0'191206
4	0'905951	20	0'610271	36	0'411094	52	0'276923	68	0'186542
5	0'883854	21	0'595386	37	0'401067	53	0'270169	69	0'181992
6	0'862297	22	0'580865	38	0'391285	54	0'263579	70	0'177554
7	0'841265	23	0'566697	39	0'381741	55	0'257151	71	0'173223
8	0'820747	24	0'552875	40	0'372431	56	0'250879	72	0'168998
9	0'800728	25	0'539391	41	0'363347	57	0'244760	73	0'164876
10	0'781198	26	0'526235	42	0'354485	58	0'238790	74	0'160855
11	0'762145	27	0'513400	43	0'345839	59	0'232966	75	0'156932
12	0'743556	28	0'500878	44	0'337404	60	0'227284	76	0'153104
13	0'725420	29	0'488661	45	0'329174	61	0'221740	77	0'149370
14	0'707727	30	0'476743	46	0'321146	62	0'216332	78	0'145727
15	0'690466	31	0'465115	47	0'313313	63	0'211055	79	0'142172
16	0'673625	32	0'453771	48	0'305671	64	0'205908	80	0'138705

3 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'970874	17	0'605016	33	0'377026	49	0'234950	65	0'146413
2	0'942596	18	0'587395	34	0'366045	50	0'228107	66	0'142149
3	0,915142	19	0'570286	35	0'355383	51	0'221463	67	0'138009
4	0'888487	20	0'553676	36	0'345032	52	0'215013	68	0'133989
5	0'862609	21	0'537549	37	0'334983	53	0'208750	69	0'130086
6	0'837484	22	0'521893	38	0'325226	54	0'202670	70	0'126297
7	0'813092	23	0'506692	39	0'315754	55	0'196767	71	0'122619
8	0'789409	24	0'491934	40	0'306557	56	0'191036	72	0'119047
9	0'766417	25	0'477606	41	0'297628	57	0'185472	73	0'115580
10	0'744094	26	0'463695	42	0'288959	58	0'180070	74	0'112214
11	0'722421	27	0'450189	43	0'280543	59	0'174825	75	0'108945
12	0'701380	28	0'437077	44	0'272372	60	0'169733	76	0'105772
13	0'680951	29	0'424346	45	0'264439	61	0'164789	77	0'102691
14	0'661118	30	0'411987	46	0'256737	62	0'159990	78	0'099700
15	0'641862	31	0'399987	47	0'249259	63	0'155330	79	0'096796
16	0'623167	32	0'388337	48	0'241999	64	0'150806	80	0'093977

3 ½ por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'966184	17	0'557204	33	0'321343	49	0'185320	65	0'106875
2	0'933511	18	0'538361	34	0'310476	50	0'179053	66	0'103261
3	0'901943	19	0'520156	35	0'299977	51	0'172998	67	0'099769
4	0'871442	20	0'502566	36	0'289833	52	0'167148	68	0'096395
5	0'841973	21	0'485571	37	0'280032	53	0'161496	69	0'093130
6	0'813501	22	0'469151	38	0'270562	54	0'156035	70	0'089986
7	0'785991	23	0'453286	39	9'261413	55	0'150758	71	0'086943
8	0'759412	24	0'437957	40	0'252573	56	0'145660	72	0'084003
9	0'733731	25	0,423147	41	0'244031	57	0'140734	73	0'081162
10	0'708919	26	0'408838	42	0'235779	58	0'135975	74	0'078418
11	0'684946	27	0'395012	43	0'227806	59	0'131377	75	0'075766
12	0'661783	28	0'381654	44	0'220102	60	0'126934	76	0'073204
13	0'639404	29	0'368748	45	0'212659	61	0'122642	77	0'070728
14	0'617782	30	0'356278	46	0'205468	62	0'118495	78	0'068337
15	0'596891	31	0'344230	47	0'198520	63	0'114488	79	0'066026
16	0'576706	32	0'332590	48	0'191807	64	0'110616	80	0'063793

4 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'961539	17	0'513373	33	0'274094	49	0'146341	65	0'078133
2	0'924556	18	0'493628	34	0'263552	50	0'140713	66	0'075128
3	0'888996	19	0'474642	35	0'253416	51	0'135301	67	0'072238
4	0'854804	20	0'456387	36	0'243669	52	0'130097	68	0'069460
5	0'821927	21	0'438834	37	0'234297	53	0'125093	69	0'066788
6	0'790315	22	0'421955	38	0'225285	54	0'120282	70	0'064219
7	0'759918	23	0'405726	39	0'216621	55	0'115656	71	0'061749
8	0'730690	24	0'390122	40	0'208289	56	0'111207	72	0'059374
9	0'702587	25	0'375117	41	0'200278	57	0'106930	73	0'057091
10	0'675564	26	0'360689	42	0'192575	58	0'102817	74	0'054895
11	0'649581	27	0'346817	43	0'185168	59	0'098863	75	0'052784
12	0'624597	28	0'333478	44	0'178046	60	0'095060	76	0'050754
13	0'600574	29	0'320651	45	0'171198	61	0'091404	77	0'048802
14	0'577475	30	0'308319	46	0'164614	62	0'087889	78	0'046925
15	0'555265	31	0'296460	47	0'158283	63	0'084508	79	0'045120
16	0'533908	32	0'285058	48	0'152195	64	0'081258	80	0'043384

4 ½ por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'956938	17	0'473176	33	0'233971	49	0'115692	65	0'057206
2	0'915730	18	0'452800	34	0'223896	50	0'110710	66	0'054743
3	0'876297	19	0'433302	35	0'214254	51	0'105942	67	0'052385
4	0'838561	20	0'414643	36	0'205028	52	0'101380	68	0'050129
5	0'802451	21	0'396787	37	0'196199	53	0'097015	69	0'047971
6	0'767896	22	0'379701	38	0'187750	54	0'092837	70	0'045905
7	0'734829	23	0'363350	39	0'179666	55	0'088839	71	0'043928
8	0'703185	24	0'347704	40	0'171929	56	0'085014	72	0'042037
9	0'672904	25	0'332731	41	0'164525	57	0'081353	73	0'040226
10	0'643928	26	0'318403	42	0'157440	58	0'077849	74	0'038494
11	0'616199	27	0'304691	43	0'150661	59	0'074497	75	0'036837
12	0'589664	28	0'291571	44	0'144173	60	0'071289	76	0'035250
13	0'564272	29	0'279015	45	0'137964	61	0'068219	77	0'033732
14	0'539973	30	0'267000	46	0'132023	62	0'065282	78	0'032280
15	0'516720	31	0'255502	47	0'126338	63	0'062470	79	0'030890
16	0'494469	32	0'244500	48	0'120898	64	0'059780	80	0'029560

5 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'952381	17	0'436297	33	0'199873	49	0'091564	65	0'041947
2	0'907030	18	0'415521	34	0'190355	50	0'087204	66	0'039949
3	0'863838	19	0'395734	35	0'181290	51	0'083051	67	0'038047
4	0'822703	20	0'376890	36	0'172657	52	0'079096	68	0'036235
5	0'783526	21	0'358942	37	0'164436	53	0'075330	69	0'034510
6	0'746215	22	0'341850	38	0'156605	54	0'071743	70	0'032866
7	0'710681	23	0'325571	39	0'149148	55	0'068326	71	0'031301
8	0'676839	24	0'310068	40	0'142046	56	0'065073	72	0'029811
9	0'644609	25	0'295303	41	0'135282	57	0'061974	73	0'028391
10	0'613913	26	0'281241	42	0'128840	58	0'059023	74	0'027039
11	0'584679	27	0'267848	43	0'122704	59	0'056212	75	0'025752
12	0'556837	28	0'255094	44	0'116861	60	0'053536	76	0'024525
13	0'530321	29	0'242946	45	0'111297	61	0'050986	77	0'023357
14	0'505068	30	0'231377	46	0'105997	62	0'048558	78	0'022245
15	0'481017	31	0'220360	47	0'100949	63	0'046246	79	0'021186
16	0'458112	32	0'209866	48	0'096142	64	0'044044	80	0'020177

6 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'943396	17	0'371364	33	0'146186	49	0'057546	65	0'022653
2	0'889996	18	0'350344	34	0'137912	50	0'054288	66	0'021370
3	0'839619	19	0'330513	35	0'130105	51	0'051215	67	0'020161
4	0'792094	20	0'311805	36	0'122741	52	0'048316	68	0'019020
5	0'747258	21	0'294155	37	0'115793	53	0'045582	69	0'017943
6	0'704961	22	0'277505	38	0'109239	54	0'043002	70	0'016927
7	0'665057	23	0'261797	39	0'103056	55	0'040567	71	0'015969
8	0'627412	24	0'246979	40	0'097222	56	0'038271	72	0'015065
9	0'591899	25	0'232999	41	0'091719	57	0'036105	73	0'014213
10	0'558395	26	0'219810	42	0'086527	58	0'034061	74	0'013408
11	0'526788	27	0'207368	43	0'081630	59	0'032133	75	0'012649
12	0'496969	28	0'195630	44	0'077009	60	0'030314	76	0'011933
13	0'468839	29	0'184557	45	0'072650	61	0'028598	77	0'011258
14	0'442301	30	0'174110	46	0'068538	62	0'026980	78	0'010620
15	0'417265	31	0'164255	47	0'064658	63	0'025453	79	0'010019
16	0'393646	32	0'154957	48	0'060998	64	0'024012	80	0'009452

7 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'934579	17	0'316574	33	0'107235	49	0'036324	65	0'012304
2	0'873439	18	0'295864	34	0'100219	50	0'033948	66	0'011499
3	0'816298	19	0'276508	35	0'093663	51	0'031727	67	0'010747
4	0'762895	20	0'258419	36	0'087536	52	0'029651	68	0'010044
5	0'712986	21	0'241513	37	0'081809	53	0'027712	69	0'009387
6	0'666342	22	0'225713	38	0'076457	54	0'025899	70	0'008773
7	0'622750	23	0'210947	39	0'071455	55	0'024204	71	0'008199
8	0'582009	24	0'197147	40	0'066780	56	0'022621	72	0'007663
9	0'543934	25	0'184249	41	0'062412	57	0'021141	73	0'007161
10	0'508349	26	0'172196	42	0'058329	58	0'019758	74	0'006693
11	0'475093	27	0'160930	43	0'054513	59	0'018465	75	0'006255
12	0'444012	28	0'150402	44	0'050946	60	0'017257	76	0'005846
13	0'414964	29	0'140563	45	0'047614	61	0'016128	77	0'005463
14	0'387817	30	0'131367	46	0'044499	62	0'015073	78	0'005106
15	0'362446	31	0'122773	47	0'041588	63	0'014087	79	0'004772
16	0'338735	32	0'114741	48	0'038867	64	0'013166	80	0'004460

8 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'925926	17	0'270269	33	0'078889	49	0'023027	65	0'006721
2	0'857339	18	0'250249	34	0'073045	50	0'021321	66	0'006224
3	0'793832	19	0'231712	35	0'067635	51	0'019742	67	0'005763
4	0'735030	20	0'214548	36	0'062625	52	0'018280	68	0'005336
5	0'680583	21	0'198656	37	0'057986	53	0'016926	69	0'004940
6	0'630170	22	0'183941	38	0'053691	54	0'015672	70	0'004574
7	0'583490	23	0'170315	39	0'049713	55	0'014511	71	0'004236
8	0'540269	24	0'157699	40	0'046031	56	0'013436	72	0'003922
9	0'500249	25	0'146018	41	0'042621	57	0'012441	73	0'003631
10	0'463194	26	0'135202	42	0'039464	58	0'011519	74	0'003362
11	0'428883	27	0'125187	43	0'036541	59	0'010666	75	0'003113
12	0'397114	28	0'115914	44	0'033834	60	0'009876	76	0'002883
13	0'367698	29	0'107328	45	0'031328	61	0'009144	77	0'002669
14	0'340461	30	0'099377	46	0'029007	62	0'008467	78	0'002471
15	0'315242	31	0'092016	47	0'026859	63	0'007840	79	0'002288
16	0'291891	32	0'085200	48	0'024869	64	0'007259	80	0'002119

10 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'909091	17	8'021553	33	9'569432	49	9'906296	65	9'979607
2	1'735537	18	8'201412	34	9'608575	50	9'914815	66	9'981461
3	2'486852	19	8'364920	35	9'644159	51	9'922559	67	9'983147
4	3'169865	20	8'513564	36	9'676508	52	9'929599	68	9'984679
5	3'790787	21	8'648694	37	9'705917	53	9'935999	69	9'986072
6	4'335261	22	8'771540	38	9'732651	54	9'941817	70	9'987338
7	4'868419	23	8'883218	39	9'756956	55	9'947107	71	9'988489
8	5'334926	24	8'984744	40	9'779051	56	9'951915	72	9'989535
9	5'759024	25	9'077040	41	9'799137	57	9'956286	73	9'990487
10	6'144567	26	9'160946	42	9'817397	58	9'960260	74	9'991352
11	6'495061	27	9'237223	43	9'833998	59	9'963873	75	9'992138
12	6'813692	28	9'306567	44	9'849089	60	9'967157	76	9'992853
13	7'103356	29	9'369606	45	9'862808	61	9'970143	77	9'993502
14	7'366688	30	9'426915	46	9'875280	62	9'972857	78	9'994093
15	7'606080	31	9'479013	47	9'886618	63	9'975325	79	9'994630
16	7'823709	32	9'526376	48	9'896926	64	9'977568	80	9'995118

TABLA VI.

Multiplicadores fijos $F_n(r)$ para los valores de las rentas.

1 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'990099	17	15'562251	33	27'989693	49	38'588079	65	47'626608
2	1'970395	18	16'398269	34	28'702666	50	39'196118	66	48'145156
3	2'940985	19	17'226009	35	29'408580	51	39'798136	67	48'658571
4	3'901966	20	18'045553	36	30'107505	52	40'394194	68	49'166902
5	4'853431	21	18'856983	37	30'799510	53	40'984351	69	49'670200
6	5'795477	22	19'660379	38	31'484663	54	41'568664	70	50'168514
7	6'728195	23	20'455821	39	32'163033	55	42'147192	71	50'661895
8	7'651678	24	21'243387	40	32'834686	56	42'719992	72	51'150392
9	8'566018	25	22'023156	41	33'499689	57	43'287121	73	51'634051
10	9'471305	26	22'795204	42	34'158108	58	43'848635	74	52'112922
11	10'367628	27	23'559608	43	34'810008	59	44'404589	75	52'587051
12	11'255078	28	24'316443	44	35'455454	60	44'955038	76	53'056486
13	12'133740	29	25'065785	45	36'094508	61	45'500038	77	53'521274
14	13'003703	30	25'807708	46	36'727236	62	46'039642	78	53'981459
15	13'865053	31	26'542285	47	37'353699	63	46'573903	79	54'437088
16	14'717874	32	27'269590	48	37'973960	64	47'102874	80	54'888206

1 ½ por 100

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0,985222	17	14'907649	33	25'878954	49	34'524683	65	41'337786
2	1'955883	18	15'672561	34	26'481729	50	34'999688	66	41'712105
3	2'912200	19	16'426168	35	27'075595	51	35'467673	67	42'080891
4	3'854385	20	17'168639	36	27'660684	52	35'928742	68	42'444228
1	4'782645	21	17'900137	37	28'237127	53	36'382997	69	42'802195
6	5'697187	22	18'620824	38	28'805052	54	36'830539	70	43'154872
7	6'598254	23	19'330861	39	29'364583	55	37'271467	71	43'502337
8	7'485925	24	20'030405	40	29'915845	56	37'705879	72	43'846467
9	8'360517	25	20'719611	41	30'458961	57	38'133871	73	44'181938
10	9'222185	26	21'398632	42	30'994050	58	38'555538	74	44'514224
11	10'071118	27	22'067618	43	31'521232	59	38'970973	75	44'841600
12	10'907505	28	22'726717	44	32'040622	60	39'380269	76	45'164138
13	11'731532	29	23'376076	45	32'552337	61	39'783516	77	45'481910
14	12'543382	30	24'015838	46	33'056490	62	40'180804	78	45'794985
15	13'343253	31	24'646146	47	33'553192	63	40'572221	79	46'103433
16	14'131264	32	25'267139	48	34'042554	64	40'957853	80	46'407324

2 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'980392	17	14'291872	33	23'988564	49	31'052078	65	36'197466
2	1'941561	18	14'992031	34	24'498592	50	31'423606	66	36'468104
3	2'883883	19	15'678462	35	24'998619	51	31'787849	67	36'733435
4	3'807729	20	16'351433	36	25'488843	52	32'144950	68	36'993564
5	4'713460	21	17'011209	37	25'969453	53	32'495049	69	37'248592
6	5'601431	22	17'658048	38	26'440641	54	32'838283	70	37'498619
7	6'471991	23	18'292204	39	26'902589	55	33'174788	71	37'743744
8	7'325481	24	18'913926	40	27'355479	56	33'504694	72	37'984063
9	8'162237	25	19'523457	41	27'799490	57	33'828131	73	38'219670
10	8'982585	26	20'121036	42	28'234794	58	34'145227	74	38'450657
11	9'786848	27	20'706898	43	28'661562	59	34'456104	75	38'677114
12	10'575341	28	21'281272	44	29'079963	60	34'760887	76	38'899132
13	11'348374	29	21'844385	45	29'490160	61	35'059693	77	39'116796
14	12'106249	30	22'396456	46	29'892314	62	35'352640	78	39'330192
15	12'849264	31	22'937702	47	30'286582	63	35'639843	79	39'539404
16	13'577709	32	23'468335	48	30'673120	64	35'921415	80	39'744514

2 ½ por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'975610	17	13'712198	33	22'291881	49	28'071370	65	31'964577
2	1'927424	18	14'353364	34	22'723786	50	28'362312	66	32'160563
3	2'856024	19	14'978891	35	23'145157	51	28'646158	67	32'351769
4	3'761974	20	15'589162	36	23'556251	52	28'923081	68	32'538311
5	4'645829	21	16'184549	37	23'957318	53	29'193250	69	32'720303
6	5'508125	22	16'765413	38	24'348603	54	29'456829	70	32'897857
7	6'349391	23	17'332111	39	24'730344	55	29'713979	71	33'071080
8	7'170137	24	17'884986	40	25'102775	56	29'964858	72	33'240078
9	7'970866	25	18'424376	41	25'466122	57	30'209617	73	33'404954
10	8'752064	26	18'950611	42	25'820607	58	30'448407	74	33'565809
11	9'514209	27	19'464011	43	26'166446	59	30'681373	75	33'722740
12	10'257765	28	19'964889	44	26'503850	60	30'908657	76	33'875844
13	10'983185	29	20'453550	45	26'833024	61	31'130397	77	34'025214
14	11'690912	30	20'930293	46	27'154170	62	31'346728	78	34'170941
15	12'381378	31	21'395407	47	27'467483	63	31'557784	79	34'313113
16	13'055003	32	21'849178	48	27'773154	64	31'763692	80	34'451817

3 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'970874	17	13'166119	33	20'765792	49	25'501657	65	28'452892
2	1'913470	18	13'753513	34	21'131837	50	25'729764	66	28'595040
3	2'828611	19	14'323799	35	21'487220	51	25'951227	67	28'733049
4	3'717098	20	14'877475	36	21'832253	52	26'166240	68	28'867038
5	4'579707	21	15'415024	37	22'167235	53	26'374990	69	28'997124
6	5'417191	22	15'936917	38	22'492462	54	26'577661	70	29'123421
7	6'230283	23	16'443608	39	22'808215	55	26'774428	71	29'246040
8	7'019692	24	16'935542	40	23'114772	56	26'965464	72	29'365088
9	7'786109	25	17'413148	41	23'412400	57	27'150936	73	29'480668
10	8'530203	26	17'876842	42	23'701359	58	27'331006	74	29'592881
11	9'252624	27	18'327032	43	23'981902	59	27'505831	75	29'701826
12	9'954004	28	18'764108	44	24'254274	60	27'675564	76	29'807598
13	10'634955	29	19'188455	45	24'518713	61	27'840353	77	29'910290
14	11'296073	30	19'600441	46	24'775449	62	28'000343	78	30'009990
15	11'937935	31	20'000429	47	25'024708	63	28'155673	79	30'106786
16	12'561102	32	20'388766	48	25'266707	64	28'306478	80	30'200763

3 ½ por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'966184	17	12'651321	33	19'390208	49	23'276565	65	25'517849
2	1'899694	18	13'189682	34	19'700684	50	23'455618	66	25'621110
3	2'801637	19	13'709837	35	20'000661	51	23'628616	67	25'720880
4	3'673079	20	14'212403	36	20'290494	52	23'795765	68	25'817275
5	4'515052	21	14'697974	37	20'570525	53	23'957260	69	25'910411
6	5'328553	22	15'167125	38	20'841087	54	24'113295	70	26'000397
7	6'114544	23	15'620411	39	21'102500	55	24'264053	71	26'087340
8	6'873956	24	16'058368	40	21'355072	56	24'409713	72	26'171343
9	7'607687	25	16'481515	41	21'599104	57	24'550448	73	26'252505
10	8'316605	26	16'890352	42	21'834883	58	24'686423	74	26'330923
11	9'001551	27	17'285365	43	22'062689	59	24'817800	75	26'406689
12	9'663334	28	17'667019	44	22'282791	60	24'944734	76	26'479892
13	10'302739	29	18'035767	45	22'495450	61	25'067376	77	26'550621
14	10'920520	30	18'392045	46	22'700918	62	25'185871	78	26'618957
15	11'517411	31	18'736276	47	22'899438	63	25'300358	79	26'684983
16	12'094117	32	19'068866	48	23'091244	64	25'410974	80	26'748776

4 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'961539	17	12'165669	33	18'147646	49	21'341472	65	23'046682
2	1'886095	18	12'659297	34	18'411198	50	21'482185	66	23'121810
3	2'775091	19	13'133939	35	18'664613	51	21'617485	67	23'194048
4	3'629895	20	13'590326	36	18'908282	52	21'747582	68	23'263507
5	4'451822	21	14'029160	37	19'142579	53	21'872675	69	23'330296
6	5'242137	22	14'451115	38	19'367864	54	21'992957	70	23'394515
7	6'002055	23	14'856842	39	19'584485	55	22'108612	71	23'456264
8	6'732745	24	15'246963	40	19'792774	56	22'219819	72	23'515639
9	7'435332	25	15'622080	41	19'993052	57	22'326749	73	23'572730
10	8'110896	26	15'982769	42	20'185627	58	22'429567	74	23'627625
11	8'760477	27	16'329586	43	20'370795	59	22'528430	75	23'680408
12	9'385074	28	16'663063	44	20'548841	60	22'623490	76	23'731162
13	9'985648	29	16'983715	45	20'720040	61	22'714894	77	23'779963
14	10'563123	30	17'292033	46	20'884654	62	22'802783	78	23'826888
15	11'118387	31	17'588494	47	21'042936	63	22'887291	79	23'872008
16	11'652296	32	17'873552	48	21'195131	64	22'968549	80	23'915392

4 ½ por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'956938	17	11'707191	33	17'022862	49	19'651298	65	20'950979
2	1'872668	18	12'159992	34	17'246758	50	19'762008	66	21'005722
3	2'748964	19	12'593294	35	17'461012	51	19'867950	67	21'058107
4	3'587526	20	13'007937	36	17'666041	52	19'969330	68	21'108236
5	4'389977	21	13'404724	37	17'862240	53	20'066345	69	21'156207
6	5'157873	22	13'784425	38	18'049990	54	20'159182	70	21'202112
7	5'892701	23	14'147775	39	18'229656	55	20'248021	71	21'246040
8	6'595886	24	14'495478	40	18'401584	56	20'333034	72	21'288077
9	7'268791	25	14'828209	41	18'566110	57	20'414387	73	21'328303
10	7'912718	26	15'146611	42	18'723550	58	20'492236	74	21'366797
11	8'528917	27	15'451303	43	18'874210	59	20'566733	75	21'403634
12	9'118581	28	15'742874	44	19'018383	60	20'638022	76	21'438884
13	9'682852	29	16'021889	45	19'156347	61	20'706241	77	21'472616
14	10'222825	30	16'288889	46	19'288371	62	20'771523	78	21'504896
15	10'739546	31	16'544391	47	19'414709	63	20'833993	79	21'535785
16	11'234015	32	16'788891	48	19'535607	64	20'893773	80	21'565345

5 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'952381	17	11'274066	33	16'002549	49	18'168722	65	19'161070
2	1'859410	18	11'689587	34	16'192904	50	18'255926	66	19'201019
3	2'723248	19	12'085321	35	16'374194	51	18'338977	67	19'239066
4	3'545951	20	12'462210	36	16'546852	52	18'418073	68	19'275301
5	4'329477	21	12'821153	37	16'711287	53	18'493403	69	19'309811
6	5'075692	22	13'163003	38	16'867893	54	18'565146	70	19'342677
7	5'786373	23	13'488574	39	17'017041	55	18'633472	71	19'373978
8	6'463213	24	13'798642	40	17'159086	56	18'698545	72	19'403788
9	7'107822	25	14'093945	41	17'294368	57	18'760519	73	19'432179
10	7'721735	26	14'375185	42	17'423208	58	18'819542	74	19'459219
11	8'306414	27	14'643034	43	17'545912	59	18'875754	75	19'484970
12	8'863252	28	14'898127	44	17'662773	60	18'929290	76	19'509495
13	9'393573	29	15'141074	45	17'774070	61	18'980276	77	19'532853
14	9'898641	30	15'372451	46	17'880067	62	19'028834	78	19'555098
15	10'379658	31	15'592811	47	17'981016	63	19'075080	79	19'576284
16	10'837770	32	15'802677	48	18'077158	64	19'119124	80	19'596461

6 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'943396	17	10'477260	33	14'230230	49	15'707572	65	16'289123
2	1'833393	18	10'827604	34	14'368141	50	15'761861	66	16'310493
3	2'673012	19	11'158117	35	14'498246	51	15'813076	67	16'330654
4	3'465106	20	11'469921	36	14'620987	52	15'861393	68	16'349674
5	4'212364	21	11'764077	37	14'736780	53	15'906974	69	16'367617
6	4'917324	22	12'041582	38	14'846019	54	15'949976	70	16'384544
7	5'582381	23	12'303379	39	14'949075	55	15'990543	71	16'400513
8	6'209794	24	12'550358	40	15'046297	56	16'028814	72	16'415578
9	6'801692	25	12'783356	41	15'138016	57	16'064919	73	16'429791
10	7'360087	26	13'003166	42	15'224543	58	16'098980	74	16'443199
11	7'886875	27	13'210534	43	15'306173	59	16'131113	75	16'455848
12	8'383844	28	13'406164	44	15'383182	60	16'161428	76	16'467781
13	8'852683	29	13'590721	45	15'455832	61	16'190026	77	16'479039
14	9'294984	30	13'764831	46	15'524370	62	16'217006	78	16'489659
15	9'712249	31	13'929086	47	15'589028	63	16'242458	79	16'499679
16	10'105895	32	14'084043	48	15'650027	64	16'266470	80	16'509131

7 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'934579	17	9'763223	33	12'753790	49	13'766799	65	14'109940
2	1'808018	18	10'059087	34	12'854009	50	13'800746	66	14'121439
3	2'624316	19	10'335595	35	12'947672	51	13'832473	67	14'132186
4	3'387211	20	10'594014	36	13'035208	52	13'862125	68	14'142230
5	4'100197	21	10'835527	37	13'117017	53	13'889836	69	14'151617
6	4'766540	22	11'061241	38	13'193473	54	13'915735	70	14'160389
7	5'389289	23	11'272187	39	13'264929	55	13'939939	71	14'168588
8	5'971299	24	11'469334	40	13'331709	56	13'962560	72	14'176251
9	6'515232	25	11'653583	41	13'394120	57	13'983701	73	14'183412
10	7'023582	26	11'825779	42	13'452449	58	14'003459	74	14'190105
11	7'498674	27	11'986709	43	13'506962	59	14'021924	75	14'196359
12	7'942686	28	12'137111	44	13'557908	60	14'039181	76	14'202205
13	8'357651	29	12'277674	45	13'605522	61	14'055310	77	14'207668
14	8'745468	30	12'409041	46	13'650020	62	14'070383	78	14'212774
15	9'107914	31	12'531814	47	13'691608	63	14'084470	79	14'217546
16	9'446649	32	12'646555	48	13'730474	64	14'097635	80	14'222005

8 por 100.

Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$	Años.	$F_n(r)$
1	0'925926	17	9'121638	33	11'513888	49	12'212163	65	12'415983
2	1'783265	18	9'371887	34	11'586934	50	12'233485	66	12'422207
3	2'577097	19	9'603599	35	11'654568	51	12'253227	67	12'427969
4	3'312127	20	9'818147	36	11'717193	52	12'271506	68	12'433305
5	3'992710	21	10'016803	37	11'775179	53	12'288432	69	12'438245
6	4'622880	22	10'200744	38	11'828869	54	12'304103	70	12'442820
7	5'206370	23	10'371059	39	11'878582	55	12'318614	71	12'447055
8	5'746639	24	10'528758	40	11'924613	56	12'332050	72	12'450977
9	6'246888	25	10'674776	41	11'967235	57	12'344491	73	12'454608
10	6'710081	26	10'809978	42	12'006699	58	12'356010	74	12'457971
11	7'138964	27	10'935165	43	12'043240	59	12'366676	75	12'461084
12	7'536078	28	11'051079	44	12'077074	60	12'376552	76	12'463967
13	7'903776	29	11'158406	45	12'108402	61	12'385696	77	12'466636
14	8'244237	30	11'257783	46	12'137409	62	12'394163	78	12'469107
15	8'559479	31	11'349799	47	12'164267	63	12'402003	79	12'471396
16	8'851369	32	11'434999	48	12'189137	64	13'409262	80	12'473514

10 por 100.

Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$	Años...	$\frac{1}{(1+r)^n}$
1	0'909091	17	0'197845	33	0'043057	49	0'009370	65	0'002039
2	0'826446	18	0'179859	34	0'039143	50	0'008519	66	0'001854
3	0'751315	19	0'163508	35	0'035584	51	0'007744	67	0'001685
4	0'683014	20	0'148644	36	0'032349	52	0'007040	68	0'001532
5	0'620921	21	0'135131	37	0'029408	53	0'006400	69	0'001393
6	0'564474	22	0'122846	38	0'026735	54	0'005818	70	0'001266
7	0'513158	23	0'111678	39	0'024304	55	0'005289	71	0'001151
8	0'466507	24	0'101526	40	0'022095	56	0'004809	72	0'001047
9	0'424098	25	0'092296	41	0'020086	57	0'004371	73	0'000951
10	0'385543	26	0'083905	42	0'018260	58	0'003974	74	0'000865
11	0'350494	27	0'076278	43	0'016600	59	0'003613	75	0'000786
12	0'318631	28	0'069343	44	0'015091	60	0'003284	76	0'000715
13	0'289664	29	0'063039	45	0'013719	61	0'002986	77	0'000650
14	0'263331	30	0'057309	46	0'012472	62	0'002714	78	0'000591
15	0'239392	31	0'052099	47	0'011338	63	0'002468	79	0'000537
16	0'217629	32	0'047362	48	0'010307	64	0'002243	80	0'000488

TABLA VII.

Multiplicadores fijos $\frac{1}{F_n(r)}$ para los términos de las rentas.

1 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'010000	17	0'064258	33	0'035727	49	0'025915	65	0'020997
2	0'507512	18	0'060982	34	0'034840	50	0'025513	66	0'020771
3	0'340022	19	0'058052	35	0'034004	51	0'025127	67	0'020551
4	0'256281	20	0'055415	36	0'033214	52	0'024756	68	0'020339
5	0'206040	21	0'053031	37	0'032468	53	0'024400	69	0'020133
6	0'172548	22	0'050864	38	0'031762	54	0'024057	70	0'019933
7	0'148628	23	0'048886	39	0'031092	55	0'023726	71	0'019739
8	0'130690	24	0'047073	40	0'030456	56	0'023408	72	0'019550
9	0'116740	25	0'045407	41	0'029851	57	0'023102	73	0'019367
10	0'105582	26	0'043869	42	0'029276	58	0'022806	74	0'019189
11	0'096454	27	0'042446	43	0'028727	59	0'022520	75	0'019016
12	0'088849	28	0'041124	44	0'028204	60	0'022244	76	0'018848
13	0'082415	29	0'039895	45	0'027705	61	0'021978	77	0'018684
14	0'076901	30	0'038748	46	0'027228	62	0'021720	78	0'018525
15	0'072124	31	0'037676	47	0'026771	63	0'021471	79	0'018370
16	0'067945	32	0'036671	48	0'026334	64	0'021230	80	0'018219

1 ½ por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'015000	17	0'067080	33	0'038641	49	0'028965	65	0'024191
2	0'511278	18	0'063806	34	0'037762	50	0'028572	66	0'023974
3	0'343383	19	0'060878	35	0'036934	51	0'028195	67	0'023764
4	0'259445	20	0'058246	36	0'036152	52	0'027833	68	0'023560
5	0'209089	21	0'055866	37	0'035414	53	0'027485	69	0'023363
6	0'175525	22	0'053703	38	0'034716	54	0'027151	70	0'023172
7	0'151556	23	0'051731	39	0'034055	55	0'026830	71	0'022987
8	0'133584	24	0'049924	40	0'033427	56	0'026521	72	0'022808
9	0'119610	25	0'048263	41	0'032831	57	0'026223	73	0'022634
10	0'108434	26	0'046732	42	0'032264	58	0'025937	74	0'022465
11	0'099294	27	0'045315	43	0'031725	59	0'025660	75	0'022301
12	0'091680	28	0'044001	44	0'031210	60	0'025393	76	0'022141
13	0'085240	29	0'042779	45	0'030720	61	0'025136	77	0'021987
14	0'079723	30	0'041639	46	0'030251	62	0'024888	78	0'021836
15	0'074944	31	0'040574	47	0'029803	63	0'024647	79	0'021690
16	0'070765	32	0'039577	48	0'029375	64	0'024415	80	0'021548

2 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'020000	17	0'069970	33	0'041687	49	0'032204	65	0'027626
2	0'515050	18	0'066702	34	0'040819	50	0'031823	66	0'027421
3	0'346755	19	0'063782	35	0'040002	51	0'031459	67	0'027223
4	0'262624	20	0'061157	36	0'039233	52	0'031109	68	0'027032
5	0'212158	21	0'058785	37	0'038507	53	0'030774	69	0'026847
6	0'178526	22	0'056631	38	0'037821	54	0'030452	70	0'026668
7	0'154512	23	0'054668	39	0'037171	55	0'030143	71	0'026494
8	0'136510	24	0'052871	40	0'036556	56	0'029847	72	0'026327
9	0'122515	25	0'051220	41	0'035972	57	0'029561	73	0'026165
10	0'111327	26	0'049699	42	0'035417	58	0'029287	74	0'026007
11	0'102178	27	0'048293	43	0'034890	59	0'029022	75	0'025855
12	0'094560	28	0'046990	44	0'034388	60	0'028768	76	0'025708
13	0'088118	29	0'045778	45	0'033910	61	0'028523	77	0'025564
14	0'082602	30	0'044650	46	0'033453	62	0'028286	78	0'025426
15	0'077825	31	0'043596	47	0'033018	63	0'028058	79	0'025291
16	0'073650	32	0'042611	48	0'032602	64	0'027839	80	0'025161

2 ½ por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'025000	17	0'072928	33	0'044859	49	0'035623	65	0'031285
2	0'518827	18	0'069670	34	0'044007	50	0'035258	66	0'031094
3	0'350137	19	0'066761	35	0'043206	51	0'034909	67	0'030910
4	0'265818	20	0'064147	36	0'042452	52	0'034574	68	0'030733
5	0'215247	21	0'061787	37	0'041741	53	0'034254	69	0'030562
6	0'181550	22	0'059647	38	0'041070	54	0'033948	70	0'030397
7	0'157495	23	0'057696	39	0'040436	55	0'033654	71	0'030238
8	0'139467	24	0'055913	40	0'039836	56	0'033372	72	0'030084
9	0'125457	25	0'054276	41	0'039268	57	0'033102	73	0'029936
10	0'114259	26	0'052769	42	0'038729	58	0'032842	74	0'029792
11	0'105106	27	0'051377	43	0'038217	59	0'032593	75	0'029654
12	0'097487	28	0'050088	44	0'037730	60	0'032353	76	0'029520
13	0'091048	29	0'048891	45	0'037268	61	0'032123	77	0'029390
14	0'085537	30	0'047778	46	0'036827	62	0'031901	78	0'029265
15	0'080766	31	0'046739	47	0'036407	63	0'031688	79	0'029143
16	0'076599	32	0'045768	48	0'036006	64	0'031482	80	0'029026

3 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'030000	17	0'075953	33	0'048156	49	0'039213	65	0'035146
2	0'522611	18	0'072709	34	0'047322	50	0'038866	66	0'034971
3	0'353530	19	0'069814	35	0'046539	51	0'038534	67	0'034803
4	0'269027	20	0'067216	36	0'045804	52	0'038217	68	0'034642
5	0'218355	21	0'064872	37	0'045112	53	0'037915	69	0'034486
6	0'184598	22	0'062747	38	0'044459	54	0'037626	70	0'034337
7	0'160506	23	0'060814	39	0'043844	55	0'037349	71	0'034193
8	0'142456	24	0'059047	40	0'043262	56	0'037084	72	0'034054
9	0'128434	25	0'057428	41	0'042712	57	0'036831	73	0'033921
10	0'117231	26	0'055938	42	0'042192	58	0'036588	74	0'033792
11	0'108077	27	0'054564	43	0'041698	59	0'036356	75	0'033668
12	0'100462	28	0'053293	44	0'041230	60	0'036133	76	0'033548
13	0'094030	29	0'052115	45	0'040785	61	0'035919	77	0'033433
14	0'088526	30	0'051019	46	0'040363	62	0'035714	78	0'033322
15	0'083767	31	0'049999	47	0'039961	63	0'035517	79	0'033215
16	0'079611	32	0'049047	48	0'039578	64	0'035328	80	0'033112

3 ½ por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'035000	17	0'079043	33	0'051572	49	0'042962	65	0'039188
2	0'526400	18	0'075817	34	0'050760	50	0'042634	66	0'039030
3	0'356934	19	0'072940	35	0'049998	51	0'042322	67	0'038879
4	0'272251	20	0'070361	36	0'049284	52	0'042024	68	0'038734
5	0'221481	21	0'068037	37	0'048613	53	0'041741	69	0'038595
6	0'187668	22	0'065932	38	0'047982	54	0'041471	70	0'038461
7	0'163544	23	0'064019	39	0'047388	55	0'041213	71	0'038333
8	0'145477	24	0'062273	40	0'046827	56	0'040967	72	0'038210
9	0'131446	25	0'060674	41	0'046298	57	0'040732	73	0'038092
10	0'120241	26	0'059205	42	0'045798	58	0'040508	74	0'037978
11	0'111092	27	0'057852	43	0'045325	59	0'040294	75	0'037869
12	0'103484	28	0'056603	44	0'044878	60	0'040089	76	0'037765
13	0'097062	29	0'055445	45	0'044453	61	0'039892	77	0'037664
14	0'091571	30	0'054371	46	0'044051	62	0'039705	78	0'037567
15	0'086825	31	0'053372	47	0'043669	63	0'039525	79	0'037474
16	0'082685	32	0'052442	48	0'043306	64	0'039353	80	0'037385

4 por 100.

Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'040000	17	0'082199	33	0'055104	49	0'046857	65	0'043390
2	0'530196	18	0'078993	34	0'054315	50	0'046550	66	0'043249
3	0'360349	19	0'076139	35	0'053577	51	0'046259	67	0'043115
4	0'275490	20	0'073582	36	0'052887	52	0'045982	68	0'042986
5	0'224627	21	0'071280	37	0'052240	53	0'045719	69	0'042863
6	0'190762	22	0'069199	38	0'051632	54	0'045469	70	0'042745
7	0'166610	23	0'067309	39	0'051061	55	0'045231	71	0'042633
8	0'148528	24	0'065587	40	0'050523	56	0'045005	72	0'042525
9	0'134493	25	0'064012	41	0'050017	57	0'044789	73	0'042422
10	0'123291	26	0'062567	42	0'049540	58	0'044584	74	0'042323
11	0'114149	27	0'061239	43	0'049090	59	0'044388	75	0'042229
12	0'106552	28	0'060013	44	0'048665	60	0'044202	76	0'042139
13	0'100144	29	0'058880	45	0'048262	61	0'044024	77	0'042052
14	0'094669	30	0'057830	46	0'047882	62	0'043854	78	0'041969
15	0'089941	31	0'056855	47	0'047522	63	0'043692	79	0'041890
16	0'085820	32	0'055949	48	0'047181	64	0'043538	80	0'041814

4 ½ por 100.

Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años…	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'045000	17	0'085418	33	0'058745	49	0'050887	65	0'047730
2	0'533998	18	0'082237	34	0'057982	50	0'050602	66	0'047606
3	0'363773	19	0'079407	35	0'057270	51	0'050332	67	0'047488
4	0'278744	20	0'076876	36	0'056606	52	0'050077	68	0'047375
5	0'227792	21	0'074601	37	0'055984	53	0'049835	69	0'047267
6	0'193878	22	0'072546	38	0'055402	54	0'049605	70	0'047165
7	0'169701	23	0'070682	39	0'054856	55	0'049388	71	0'047068
8	0'151610	24	0'068987	40	0'054343	56	0'049181	72	0'046975
9	0'137574	25	0'067439	41	0'053862	57	0'048985	73	0'046886
10	0'126379	26	0'066021	42	0'053409	58	0'048799	74	0'046802
11	0'117248	27	0'064719	43	0'052982	59	0'048622	75	0'046721
12	0'109666	28	0'063521	44	0'052581	60	0'048454	76	0'046644
13	0'103275	29	0'062415	45	0'052202	61	0'048295	77	0'046571
14	0'097820	30	0'061392	46	0'051845	62	0'048143	78	0'046501
15	0'093114	31	0'060443	47	0'051507	63	0'047998	79	0'046434
16	0'089015	32	0'059563	48	0'051189	64	0'047861	80	0'046371

5 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'050000	17	0'088699	33	0'062490	49	0'055040	65	0'052189
2	0'537805	18	0'085546	34	0'061755	50	0'054777	66	0'052081
3	0'367209	19	0'082745	35	0'061072	51	0'054529	67	0'051978
4	0'282012	20	0'080243	36	0'060434	52	0'054294	68	0'051880
5	0'230975	21	0'077996	37	0'059840	53	0'054073	69	0'051787
6	0'197017	22	0'075971	38	0'059284	54	0'053864	70	0'051699
7	0'172820	23	0'074137	39	0'058765	55	0'053667	71	0'051616
8	0'154722	24	0'072471	40	0'058278	56	0'053480	72	0'051536
9	0'140690	25	0'070952	41	0'057822	57	0'053303	73	0'051461
10	0'129505	26	0'069564	42	0'057395	58	0'053136	74	0'051390
11	0'120389	27	0'068292	43	0'056993	59	0'052978	75	0'051322
12	0'112825	28	0'067123	44	0'056616	60	0'052828	76	0'051257
13	0'106456	29	0'066046	45	0'056262	61	0'052686	77	0'051196
14	0'101024	30	0'065051	46	0'055928	62	0'052552	78	0'051138
15	0'096342	31	0'064132	47	0'055614	63	0'052424	79	0'051082
16	0'092270	32	0'063280	48	0'055318	64	0'052304	80	0'051030

6 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'060000	17	0'095445	33	0'070273	49	0'063664	65	0'061391
2	0'545437	18	0'092357	34	0'069598	50	0'063444	66	0'061310
3	0'374110	19	0'089621	35	0'068974	51	0'063239	67	0'061235
4	0'288591	20	0'087185	36	0'068395	52	0'063046	68	0'061163
5	0'237396	21	0'085005	37	0'067857	53	0'062866	69	0'061096
6	0'203363	22	0'083046	38	0'067358	54	0'062696	70	0'061033
7	0'179135	23	0'081278	39	0'066894	55	0'062537	71	0'060974
8	0'161036	24	0'079679	40	0'066462	56	0'062388	72	0'060918
9	0'147022	25	0'078227	41	0'066059	57	0'062247	73	0'060865
10	0'135868	26	0'076904	42	0'065683	58	0'062116	74	0'060815
11	0'126793	27	0'075697	43	0'065333	59	0'061992	75	0'060769
12	0'119277	28	0'074593	44	0'065006	60	0'061876	76	0'060725
13	0'112960	29	0'073580	45	0'064701	61	0'061766	77	0,060683
14	0'107585	30	0'072649	46	0'064415	62	0'061664	78	0'060644
15	0'102963	31	0'071792	47	0'064148	63	0'061567	79	0'060607
16	0'098952	32	0'071002	48	0'063898	64	0'061476	80	0'060573

7 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'070000	17	0'102425	33	0'078408	49	0'072639	65	0'070872
2	0'553092	18	0'099413	34	0'077797	50	0'072460	66	0'070814
3	0'381052	19	0'096753	35	0'077234	51	0'072294	67	0'070760
4	0'295228	20	0'094393	36	0'076715	52	0'072139	68	0'070710
5	0'243891	21	0'092289	37	0'076237	53	0'071995	69	0'070663
6	0'209796	22	0'090406	38	0'075795	54	0'071861	70	0'070620
7	0'185553	23	0'088714	39	0'075387	55	0'071736	71	0'070579
8	0'167468	24	0'087189	40	0'075009	56	0'071620	72	0'070541
9	0'153486	25	0'085811	41	0'074660	57	0'071512	73	0'070505
10	0'142378	26	0'084561	42	0'074336	58	0'071411	74	0'070472
11	0'133357	27	0'083426	43	0'074036	59	0'071317	75	0'070441
12	0'125902	28	0'082392	44	0'073758	60	0'071229	76	0'070412
13	0'119651	29	0'081449	45	0'073500	61	0'071147	77	0'070385
14	0'114345	30	0'080586	46	0'073260	62	0'071071	78	0'070359
15	0'109795	31	0'079797	47	0'073037	63	0'071000	79	0'070336
16	0'105858	32	0'079073	48	0'072831	64	0'070934	80	0'070224

8 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'080000	17	0'109629	33	0'086852	49	0'081886	65	0'080541
2	0'560769	18	0'106702	34	0'086304	50	0'081743	66	0'080501
3	0'388034	19	0'104128	35	0'085803	51	0'081611	67	0'080464
4	0'301921	20	0'101852	36	0'085345	52	0'081490	68	0'080429
5	0'250456	21	0'099832	37	0'084924	53	0'081377	69	0'080397
6	0'216315	22	0'098032	38	0'084539	54	0'081274	70	0'080368
7	0'192072	23	0'096422	39	0'084185	55	0'081178	71	0'080340
8	0'174015	24	0'094978	40	0'083860	56	0'081090	72	0'080315
9	0'160080	25	0'093679	41	0'083561	57	0'081008	73	0'080292
10	0'149029	26	0'092507	42	0'083287	58	0'080932	74	0'080270
11	0'140076	27	0'091448	43	0'083034	59	0'080862	75	0'080250
12	0'132695	28	0'090489	44	0'082802	60	0'080798	76	0'080231
13	0'126522	29	0'089619	45	0'082587	61	0'080738	77	0'080214
14	0'121297	30	0'088827	46	0'082390	62	0'080683	78	0'080198
15	0'116830	31	0'088107	47	0'082208	63	0'080632	79	0'080183
16	0'112977	32	0'087451	48	0'082040	64	0'080585	80	0'080170

10 por 100.

Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$	Años...	$\frac{1}{F_n(r)}$
1	1'100000	17	0'124664	33	0'104499	49	0'100946	65	0'100204
2	0'576190	18	0'121930	34	0'104074	50	0'100859	66	0'100186
3	0'402115	19	0'119547	35	0'103690	51	0'100780	67	0'100169
4	0'315471	20	0'117460	36	0'103343	52	0'100709	68	0'100153
5	0'263797	21	0'115624	37	0'103030	53	0'100644	69	0'100139
6	0'229607	22	0'114005	38	0'102747	54	0'100585	70	0'100127
7	0'205406	23	0'112572	39	0'102491	55	0'100532	71	0'100115
8	0'187444	24	0'111300	40	0'102259	56	0'100483	72	0'100105
9	0'173641	25	0'110168	41	0'102050	57	0'100439	73	0'100095
10	0'162745	26	0'109159	42	0'101860	58	0'100399	74	0'100087
11	0'153963	27	0'108258	43	0'101688	59	0'100363	75	0'100079
12	0'146763	28	0'107451	44	0'101532	60	0'100330	76	0'100072
13	0'140779	29	0'106728	45	0'101391	61	0'100299	77	0'100065
14	0'135746	30	0'106079	46	0'101263	62	0'100272	78	0'100059
15	0'131474	31	0'105496	47	0'101147	63	0'100247	79	0'100054
16	0'127817	32	0'104972	48	0'101041	64	0'100225	80	0'100049

TABLA VIII.

Cologaritmos de los multiplicadores $F_n(r)$.

1 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0043214	17	$\bar{2}$'8079276	33	$\bar{2}$'5530019	49	$\bar{2}$'4135469	65	$\bar{2}$'3221504
2	$\bar{1}$'7054467	18	7852021	34	5420778	50	4067569	66	3174474
3	5315071	19	7638154	35	5315259	51	4001373	67	3128406
4	4087166	20	7436298	36	5213252	52	3936810	68	3083270
5	3139511	21	7245277	37	5114562	53	3873820	69	3039041
6	2369109	22	7064081	38	5019010	54	3812339	70	2995687
7	1721014	23	6891831	39	4926430	55	3752313	71	2953185
8	1162434	24	6727762	40	4836672	56	3693688	72	2911510
9	0672210	25	6571204	41	4749592	57	3636413	73	2870638
10	0235902	26	6421565	42	4665062	58	3580440	74	2830545
11	$\bar{2}$'9843206	27	6278320	43	4582959	59	3525723	75	2791212
12	9486515	28	6141000	44	4503170	60	3472217	76	2752616
13	9160053	29	6009187	45	4425589	61	3419882	77	2714736
14	8859330	30	5882506	46	4350117	62	3368680	78	2679554
15	8580785	31	5760617	47	4276663	63	3318573	79	2641051
16	8321549	32	5643214	48	4205142	64	3269527	80	2605210

1 ½ por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0064660	17	$\bar{2}$'8265908	33	$\bar{2}$'5870533	49	$\bar{2}$'4618703	65	$\bar{2}$'3836527
2	$\bar{1}$'7086571	18	8048600	34	5770537	50	4559357	66	3797378
3	5357787	19	7844637	35	5674220	51	4501673	67	3759150
4	4140449	20	7652642	36	5181371	52	4445580	68	3721813
5	3203319	21	7471437	37	5491795	53	4391015	69	3685340
6	2443395	22	7300010	38	5405314	54	4337919	70	3649701
7	1805736	23	7137488	39	5321762	55	4286234	71	3614874
8	1257545	24	6983103	40	5240987	56	4235909	72	3580832
9	0777669	25	6836184	41	5162849	57	4186890	73	3547553
10	0351662	26	6696141	42	5087218	58	4139132	74	3515012
11	$\bar{2}$'9969223	27	6562446	43	5013968	59	4092587	75	3483189
12	9622745	28	6434633	44	4942990	60	4047213	76	3452062
13	9306452	29	6312284	45	4874178	61	4002969	77	3421613
14	9015854	30	6195022	46	4807432	62	3959815	78	3391821
15	8747389	31	6082510	47	4742661	63	3917713	79	3362668
16	8498190	32	5974440	48	4679779	64	3876627	80	3334134

2 por 100.

Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F^n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$
1	0'0086002	17	$\bar{2}$'8449109	33	$\bar{2}$'6199958	49	$\bar{2}$'5079093	65	$\bar{2}$'4413218
2	$\bar{1}$'7118490	18	8241395	34	6108589	50	5027440	66	4380868
3	5400223	19	8046966	35	6020840	51	4977388	67	4349385
4	4193340	20	7864442	36	5936499	52	4928873	68	4318738
5	3266602	21	7692648	37	5855372	53	4881828	69	4288901
6	2517010	22	7530573	38	5777280	54	4836196	70	4259847
7	1889621	23	7377340	39	5702059	55	4791918	71	4231550
8	1351638	24	7232183	40	5629556	56	4748944	72	4203986
9	0881908	25	7094433	41	5559632	57	4707220	73	4177131
10	0465987	26	6963497	42	5492153	58	4666700	74	4150963
11	0093571	27	6838850	43	5427002	59	4627338	75	4125459
12	$\bar{2}$'9757056	28	6720024	44	5364061	60	4589093	76	4100601
13	9450663	29	6606602	45	5303230	61	4551919	77	4076367
14	9169905	30	6498207	46	5244406	62	4515782	78	4052739
15	8911217	31	6394501	47	5187497	63	4480642	79	4029699
16	8671735	32	6295177	48	5132420	64	4446466	80	4007229

2 ½ por 100.

Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$	Años..	Colog. $F_n(r)$
1	0'0107239	17	$\bar{2}$'8628929	33	$\bar{2}$'6518533	49	$\bar{2}$'5517364	65	$\bar{2}$'4953310
2	$\bar{1}$'7150227	18	8430463	34	6435193	50	5472584	66	4926763
3	5442383	19	8245204	35	6355399	51	5429336	67	4901020
4	4245842	20	8071772	36	6278939	52	5387555	68	4876050
5	3329368	21	7908994	37	6205618	53	5347176	69	4851827
6	2589962	22	7755857	38	6135259	54	5308140	70	4828324
7	1972680	23	7611485	39	6067698	55	5270392	71	4805517
8	1444726	24	7475114	40	6002783	56	5233878	72	4783380
9	0984945	25	7346072	41	5940372	57	5198548	73	4761891
10	0578895	26	7223768	42	5880336	58	5164354	74	4741029
11	0216273	27	7107677	43	5822553	59	5131252	75	4720772
12	$\bar{2}$'9889473	28	6997331	44	5766911	60	5099199	76	4701099
13	9592717	29	6892313	45	5713306	61	5068153	77	4681991
14	9321516	30	6792247	46	5661635	62	5038078	78	4663431
15	9072311	31	6696794	47	5611812	63	5008934	79	4645399
16	8842230	32	6605649	48	5563748	64	4980690	80	4627879

3 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0128372	17	$\bar{2}$'8805422	33	$\bar{2}$'6826515	49	$\bar{2}$'5934316	65	$\bar{2}$'5458736
2	$\bar{1}$'7181784	18	8615864	34	6750627	50	5895642	66	5437093
3	5484267	19	8439418	35	6678198	51	5858421	67	5416183
4	4297959	20	8274708	36	6609015	52	5822586	68	5395978
5	3391623	21	8120558	37	6542885	53	5788078	69	5376451
6	2662258	22	7975957	38	6479630	54	5754832	70	5357576
7	2054922	23	7840029	39	6419086	55	5722798	71	5339329
8	1536819	24	7712009	40	6361104	56	5691922	72	5321686
9	1086795	25	7591227	41	6305541	57	5662152	73	5304627
10	0690407	26	7477092	42	6252268	58	5633442	74	5288127
11	0337351	27	7369079	43	6201163	59	5605753	75	5272168
12	0020022	28	7266720	44	6152117	60	5579035	76	5256730
13	$\bar{2}$'9732643	29	7169600	45	6105023	61	5553253	77	5241794
14	9470725	30	7077341	46	6059785	62	5528367	78	5227341
15	9230708	31	6989607	47	6016310	63	5504341	79	5213356
16	9009723	32	6906091	48	5974514	64	5481142	80	5199821

3 ½ por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0149403	17	$\bar{2}$'8978642	33	2'7124175	49	$\bar{2}$'6330811	65	$\bar{2}$'5931560
2	$\bar{1}$'7213163	18	8797657	34	7055187	50	6297531	66	5914020
3	5525881	19	8629678	35	6989557	51	6265617	67	5897142
4	4349697	20	8473325	36	6927074	52	6235003	68	5880895
5	3453372	21	8327426	37	6867546	53	6205628	69	5865257
6	2733907	22	8190967	38	6810796	54	6177435	70	5850201
7	2136359	23	8063076	39	6756661	55	6150366	71	5835702
8	1627932	24	7942986	40	6704989	56	6124373	72	5821740
9	1187474	25	7830029	41	6655643	57	6099406	73	5808292
10	0800539	26	7723613	42	6608492	58	6075419	74	5795339
11	0456827	27	7623215	43	6563416	59	6052367	75	5782860
12	0148730	28	7528367	44	6520304	60	6030211	76	5770838
13	$\bar{2}$'9870474	29	7438654	45	6479053	61	6008911	77	5759253
14	9617567	30	7353699	46	6439566	62	5988430	78	5748089
15	9386451	31	7273167	47	6401752	63	5968733	79	5737331
16	9174258	32	7196752	48	6365527	64	5949787	80	5726961

4 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0170333	17	2'9148640	33	3'7411797	49	$\bar{2}$'6707756	65	2'6373916
2	1'7244365	18	8975904	34	7349180	50	6679216	66	6359782
3	5567228	19	8816050	35	7289810	51	6651948	67	6346235
4	4401059	20	8667702	36	7233480	52	6625890	68	6333248
5	3514622	21	8529684	37	7179995	53	6600981	69	6320797
6	2804916	22	8400986	38	7129183	54	6577164	70	6308859
7	2217001	23	8280735	39	7080879	55	6554385	71	6297411
8	1718078	24	8168166	40	7034933	56	6532596	72	6286432
9	1286997	25	8062612	41	6991209	57	6511745	73	6275901
10	0909312	26	7963480	42	6949578	58	6491791	74	6265799
11	0574723	27	7870248	43	6909920	59	6472691	75	6256108
12	0275623	28	7782452	44	6872127	60	6454404	76	6246809
13	0006238	29	7699673	45	6836094	61	6436893	77	6237889
14	2'9762077	30	7621540	46	6801727	62	6420122	78	6229326
15	9539582	31	7547714	47	6768937	63	6404056	79	6221111
16	9335885	32	7477892	48	6737639	64	6388664	80	6213225

4 ½ por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0191163	17	2,9315473	33	2'7689674	49	2'7066087	65	$\bar{2}$'6787957
2	$\bar{1}$'7275393	18	9150667	34	7632926	50	7041690	66	6776624
3	5608309	19	8998607	35	7579306	51	7018469	67	6765807
4	4452050	20	8857916	36	7528608	52	6996365	68	6755480
5	3575378	21	8727421	37	7480641	53	6975317	69	6745622
6	2875294	22	8606113	38	7435230	54	6955271	70	6736209
7	2296856	23	8493118	39	7392214	55	6936174	71	6727220
8	1807268	24	8387674	40	7351448	56	6917978	72	6718636
9	1385379	25	8289113	41	7312791	57	6900637	73	6710437
10	1016743	26	8196846	42	7276118	58	6884106	74	6702606
11	0691061	27	8110349	43	7241312	59	6868347	75	6695125
12	0400727	28	8029160	44	7208264	60	6853319	76	6687978
13	0139967	29	7952863	45	7176873	61	6838987	77	6681151
14	$\bar{2}$'9904291	30	7881085	46	7147045	62	6825316	78	6674627
15	9690141	31	7813492	47	7118691	63	6812274	79	6668393
16	9494650	32	7749781	48	7091731	64	6799831	80	6662436

5 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0211893	17	$\bar{2}$'9479194	33	$\bar{2}$'7958108	49	$\bar{2}$'7406757	65	$\bar{2}$'7175802
2	1'7306248	18	9322008	34	7906752	50	7385961	66	7166758
3	5649128	19	9177418	35	7858401	51	7366249	67	7158160
4	4502673	20	9044049	36	7812846	52	7347558	68	7149988
5	3635645	21	8920730	37	7769901	53	7329832	69	7142221
6	2945047	22	8806450	38	7729392	54	7313016	70	7134834
7	2375936	23	8700340	39	7691160	55	7297062	71	7127811
8	1895515	24	8601637	40	7655058	56	7281922	72	7121134
9	1482635	25	8509674	41	7620953	57	7267552	73	7114785
10	1122851	26	8423866	42	7588719	58	7253910	74	7108746
11	0805865	27	8343689	43	7558241	59	7240957	75	7103003
12	0524070	28	8268683	44	7529411	60	7228657	76	7097540
13	0271692	29	8198433	45	7502131	61	7216975	77	7092343
14	0044244	30	8132570	46	7476309	62	7205878	78	7087400
15	2'9838170	31	8070756	47	7451858	63	7195337	79	7082698
16	9650601	32	8012694	48	7428698	64	7185320	80	7078224

6 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0253059	17	$\bar{2}$'9797523	33	$\bar{2}$'8467881	49	$\bar{2}$'8038909	65	$\bar{2}$'7881023
2	$\bar{1}$'7367445	18	9654677	34	8425995	50	8023925	66	7875329
3	5729990	19	9524091	35	8386845	51	8009836	67	7869965
4	4602835	20	9404396	36	8350233	52	7996587	68	7864909
5	3754741	21	9294422	37	8315974	53	7984125	69	7860146
6	3082711	22	9193164	38	8283900	54	7972399	70	7855656
7	2531805	23	9099756	39	8253858	55	7961368	71	7851426
8	2069228	24	9013439	40	8225704	56	7950986	72	7847438
9	1673830	25	8933551	41	8199311	57	7941215	73	7843680
10	1331171	26	8859509	42	8174557	58	7932016	74	7840137
11	1030950	27	8790797	43	8151334	59	7923356	75	7836797
12	0765568	28	8726955	44	8129538	60	7915202	76	7833649
13	0529252	29	8667575	45	8109077	61	7907524	77	7830681
14	0317513	30	8612291	46	8089860	62	7900293	78	7827883
15	0126801	31	8560774	47	8071809	63	7893482	79	7825245
16	$\bar{2}$'9954252	32	8512726	48	8054849	64	7887067	80	7822758

7 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0293838	17	$\bar{1}$'0104068	33	$\bar{2}$'8943608	49	$\bar{2}$'8611671	65	$\bar{2}$'8504748
2	$\bar{1}$'7427972	18	$\bar{2}$'9974414	34	8909614	50	8600974	66	8501211
3	5809838	19	9856645	35	8878083	51	8591002	67	8497907
4	4701578	20	9749395	36	8848821	52	8581702	68	8494821
5	3871952	21	9651499	37	8821649	53	8573029	69	8491939
6	3217969	22	9561962	38	8796409	54	8564939	70	8489248
7	2684685	23	9479918	39	8772951	55	8557391	71	8486734
8	2239312	24	9404618	40	8751142	56	8550350	72	8484387
9	1860701	25	9335406	41	8730858	57	8543779	73	8482193
10	1534414	26	9271703	42	8711987	58	8537647	74	8480144
11	1250156	27	9213000	43	8694423	59	8531924	75	8478230
12	1000326	28	9158847	44	8678072	60	8526582	76	8476442
13	0779158	29	9108839	45	8662848	61	8521596	77	8474772
14	0582170	30	9062618	46	8648667	62	8516941	78	8473211
15	0405810	31	9019861	47	8635455	63	8512595	79	8471754
16	0247223	32	8980278	48	8623145	64	8508537	80	8470391

8 por 100

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0334238	17	$\bar{1}$'0399272	33	$\bar{2}$'9387780	49	$\bar{2}$'9132074	65	$\bar{2}$'9060189
2	$\bar{1}$'7487843	18	0281729	34	9360314	50	9124498	66	9058013
3	5888692	19	0175660	35	9335038	51	9117495	67	9055998
4	4798930	20	0079705	36	9311765	52	9111022	68	9054134
5	3987322	21	$\bar{2}$'9992709	37	9290325	53	9105036	69	9052408
6	3350874	22	9913682	38	9270568	54	9099500	70	9050812
7	2834649	23	9841769	39	9252354	55	9094381	71	9049334
8	2405861	24	9776228	40	9235557	56	9089647	72	9047966
9	2043363	25	9716412	41	9220062	57	9085268	73	9046699
10	1732722	26	9661752	42	9205763	58	9081218	74	9045527
11	1463648	27	9611747	43	9192567	59	9077470	75	9044441
12	1228546	28	9565953	44	9180383	60	9074004	76	9043437
13	1021654	29	9523979	45	9169132	61	9070796	77	9042507
14	0838495	30	9485471	46	9158740	62	9067827	78	9041646
15	0675527	31	9450118	47	9149141	63	9065081	79	9040849
16	0529895	32	9417638	48	9140271	64	9062541	80	9040112

10 por 100.

Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$	Años.	Colog. $F_n(r)$
1	0'0413927	17	$\bar{1}$'0957415	33	$\bar{1}$'0191138	49	$\bar{1}$'0040887	65	$\bar{1}$'0008865
2	$\bar{1}$'7605660	18	0861114	34	0173410	50	0037154	66	0008059
3	6043501	19	0775382	35	0157356	51	0033763	67	0007326
4	4989592	20	0698886	36	0142813	52	0030683	68	0006659
5	4212707	21	0630495	37	0129635	53	0027885	69	0006053
6	3609859	22	0569241	38	0117688	54	0025342	70	0005503
7	3126121	23	0514297	39	0106857	55	0023032	71	0005003
8	2728716	24	0464944	40	0097032	56	0020933	72	0004547
9	2396511	25	0420557	41	0088121	57	0019026	73	0004134
10	2115087	26	0380597	42	0080036	58	0017293	74	0003757
11	1874168	27	0344586	43	0072699	59	0015718	75	0003416
12	1666175	28	0312105	44	0066040	60	0014287	76	0003105
13	1485364	29	0282787	45	0059994	61	0012986	77	0002823
14	1327277	30	0256304	46	0054506	62	0011804	78	0002566
15	1188391	31	0232369	47	0049522	63	0010730	79	0002333
16	1065873	32	0200723	48	0044997	64	0009753	80	0002121

TABLA IX.

Logaritmos de los multiplicadores $(1+r)^n$.

1 por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$
1	0'0043214	17	0'0734634	33	0'1426053	49	0'2117473	65	0'2808893
2	0'0086427	18	0'0777847	34	0'1469267	50	0'2160687	66	0'2852107
3	0'0129641	19	0'0821061	35	0'1512481	51	0'2203901	67	0'2895320
4	0'0172855	20	0'0864275	36	0'1555695	52	0'2247114	68	0'2938534
5	0'0216069	21	0'0907488	37	0'1598908	53	0'2290328	69	0'2981748
6	0'0259282	22	0'0950702	38	0'1642122	54	0'2333542	70	0'3024962
7	0'0302496	23	0'0993916	39	0'1685336	55	0'2376756	71	0'3068175
8	0'0345710	24	0'1037130	40	0'1728550	56	0'2419969	72	0'3111389
9	0'0388924	25	0'1080343	41	0'1771763	57	0'2463183	73	0'3154603
10	0'0432137	26	0'1123557	42	0'1814977	58	0'2506397	74	0'3197817
11	0'0475351	27	0'1166771	43	0'1858191	59	0'2549611	75	0'3241030
12	0'0518565	28	0'1209985	44	0'1901404	60	0'2592824	76	0'3284244
13	0'0561779	29	0'1253198	45	0'1944618	61	0'2636038	77	0'3327458
14	0'0604992	30	0'1296412	46	0'1987832	62	0'2679252	78	0'3370672
15	0'0648206	31	0'1339626	47	0'2031046	63	0'2722465	79	0'3413885
16	0'0691420	32	0'1382840	48	0'2074259	64	0'2765679	80	0'3457099

1 ½ por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$
1	0'0064660	17	0'1099227	33	0'2133794	49	0'3168361	65	0'4202927
2	0'0129321	18	0'1163888	34	0'2198454	50	0'3233021	66	0'4267588
3	0'0193981	19	0'1228548	35	0'2263115	51	0'3297682	67	0'4332248
4	0'0258642	20	0'1293208	36	0'2327775	52	0'3362342	68	0'4396909
5	0'0323302	21	0'1357869	37	0'2392436	53	0'3427009	69	0'4461569
6	0'0387963	22	0'1422529	38	0'2457096	54	0'3491663	70	0'4526230
7	0'0452623	23	0'1487190	39	0'2521756	55	0'3556323	71	0'4590890
8	0'0517283	24	0'1551850	40	0'2586417	56	0'3620984	72	0'4655550
9	0'0581944	25	0'1616511	41	0'2651077	57	0'3685644	73	0'4720211
10	0'0646604	26	0'1681171	42	0'2715738	58	0'3750304	74	0'4784871
11	0'0711265	27	0'1745831	43	0'2780398	59	0'3814965	75	0'4849532
12	0'0775925	28	0'1810492	44	0'2845059	60	0'3879625	76	0'4914192
13	0'0840585	29	0'1875152	45	0'2909719	61	0'3944286	77	0'4978852
14	0'0905246	30	0'1939813	46	0'2974379	62	0'4008946	78	0'5043513
15	0'0969906	31	0'2004473	47	0'3039040	63	0'4073607	79	0'5108173
16	0'1034567	32	0'2069134	48	0'3103700	64	0'4138267	80	0'5172834

2 por 100.

Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$
1	0'0086002	17	0'1462029	33	0'2838057	49	0'4214084	65	0'5590112
2	0'0172003	18	0'1548031	34	0'2924058	50	0'4300086	66	0'5676113
3	0'0258005	19	0'1634033	35	0'3010060	51	0'4386088	67	0'5762115
4	0'0344007	20	0'1720034	36	0'3096062	52	0'4472089	68	0'5848117
5	0'0430009	21	0'1806036	37	0'3182064	53	0'4558091	69	0'5934119
6	0'0516010	22	0'1892038	38	0'3268065	54	0'4644093	70	0'6020120
7	0'0602012	23	0'1978040	39	0'3354067	55	0'4730094	71	0'6106122
8	0'0688014	24	0'2064041	40	0'3440069	56	0'4816096	72	0'6192124
9	0'0774015	25	0'2150043	41	0'3526070	57	0'4902098	73	0'6278125
10	0'0860017	26	0'2236045	42	0'3612072	58	0'4988100	74	0'6364127
11	0'0946019	27	0'2322046	43	0'3698074	59	0'5074101	75	0'6450129
12	0'1032021	28	0'2408048	44	0'3784076	60	0'5160103	76	0'6536131
13	0'1118022	29	0'2494050	45	0'3870077	61	0'5246105	77	0'6622132
14	0'1204024	30	0'2580052	46	0'3956079	62	0'5332107	78	0'6708134
15	0'1290026	31	0'2666053	47	0'4042081	63	0'5418108	79	0'6794136
16	0'1376027	32	0'2752055	48	0'4128082	64	0'5504110	80	0'6880137

2 ½ por 100.

Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$
1	0'0107239	17	0'1823057	33	0'3538876	49	0'5254694	65	0'6970513
2	0'0214477	18	0'1930296	34	0'3646114	50	0'5361933	66	0'7077751
3	0'0321716	19	0'2037534	35	0'3753353	51	0'5469171	67	0'7184990
4	0'0428955	20	0'2144773	36	0'3860592	52	0'5576410	68	0'7292228
5	0'0536193	21	0'2252012	37	0'3967830	53	0'5683649	69	0'7399467
6	0'0643432	22	0'2359250	38	0'4075069	54	0'5790887	70	0'7506706
7	0'0750671	23	0'2466489	39	0'4182308	55	0'5898126	71	0'7613944
8	0'0857909	24	0'2573728	40	0'4289546	56	0'6005365	72	0'7721183
9	0'0965148	25	0'2680966	41	0'4396785	57	0'6112603	73	0'7828422
10	0'1072387	26	0'2788205	42	0'4504023	58	0'6219842	74	0'7935660
11	0'1179625	27	0'2895444	43	0'4611262	59	0'6327081	75	0'8042899
12	0'1286864	28	0'3002682	44	0'4718501	60	0'6434319	76	0'8150138
13	0'1394103	29	0'3109921	45	0'4825739	61	0'6541558	77	0'8257376
14	0'1501341	30	0'3217160	46	0'4932978	62	0'6648797	78	0'8364615
15	0'1608580	31	0'3324398	47	0'5040217	63	0'6756035	79	0'8471854
16	0'1715818	32	0'3431637	48	0'5147455	64	0'6863274	80	0'8579092

3 por 100.

Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$
1	0'0128372	17	0'2182328	33	0'4236284	49	0'6290240	65	0'8344196
2	0'0256744	18	0'2310700	34	0'4364656	50	0'6418612	66	0'8472568
3	0'0385117	19	0'2439073	35	0'4493029	51	0'6546985	67	0'8600941
4	0'0513489	20	0'2567445	36	0'4621401	52	0'6675357	68	0'8729313
5	0'0641861	21	0'2695817	37	0'4749773	53	0'6803729	69	0'8857685
6	0'0770233	22	0'2824189	38	0'4878145	54	0'6932101	70	0'8986057
7	0'0898606	23	0'2952562	39	0'5006518	55	0'7060474	71	0'9114430
8	0'1026978	24	0'3080934	40	0'5134890	56	0'7188846	72	0'9242802
9	0'1155350	25	0'3209306	41	0'5263262	57	0'7317218	73	0'9371174
10	0'1283722	26	0'3337678	42	0'5391634	58	0'7445590	74	0'9499546
11	0'1412095	27	0'3466051	43	0'5520007	59	0'7573963	75	0'9627919
12	0'1540467	28	0'3594423	44	0'5648379	60	0'7702335	76	0'9756291
13	0'1668839	29	0'3722795	45	0'5776751	61	0'7830707	77	0'9884663
14	0'1797211	30	0'3851167	46	0'5905123	62	0'7959079	78	1'0013035
15	0'1925584	31	0'3979540	47	0'6033496	63	0'8087452	79	1'0141408
16	0'2053956	32	0'4107912	48	0'6161868	64	0'8215824	80	1'0269780

3 ½ por 100.

Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$
1	0'0149403	17	0'2539859	33	0'4930315	49	0'7320771	65	0'9711227
2	0'0298807	18	0'2689263	34	0'5079719	50	0'7470175	66	0'9860631
3	0'0448210	19	0'2838666	35	0'5229122	51	0'7619578	67	1'0010034
4	0'0597614	20	0'2988070	36	0'5378526	52	0'7768982	68	1'0159438
5	0'0747017	21	0'3137473	37	0'5527929	53	0'7918385	69	1'0308841
6	0'0896421	22	0'3286877	38	0'5677333	54	0'8067789	70	1'0458245
7	0'1045824	23	0'3436280	39	0'5826736	55	0'8217192	71	1'0607648
8	0'1195228	24	0'3585684	40	0'5976140	56	0'8366596	72	1'0757052
9	0'1344631	25	0'3735087	41	0'6125543	57	0'8515999	73	1'0906455
10	0'1494035	26	0'3884491	42	0'6274947	58	0'8665403	74	1'1055859
11	0'1643438	27	0'4033894	43	0'6424350	59	0'8814806	75	1'1205262
12	0'1792842	28	0'4183298	44	0'6573754	60	0'8964210	76	1'1354666
13	0'1942245	29	0'4332701	45	0'6723157	61	0'9113613	77	1'1504069
14	0'2091649	30	0'4482105	46	0'6872561	62	0'9263017	78	1'1653473
15	0'2241052	31	0'4631508	47	0'7021964	63	0'9412420	79	1'1802876
16	0'2390456	32	0'4780912	48	0'7171368	64	0'9561824	80	1'1952280

4 por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$
1	0'0170333	17	0'2895668	33	0'5621002	49	0'8346336	65	1'1071671
2	0'0340667	18	0'3066001	34	0'5791335	50	0'8516670	66	1'1242004
3	0'0511000	19	0'3236334	35	0'5961669	51	0'8687003	67	1'1412337
4	0'0681334	20	0'3406668	36	0'6132002	52	0'8857336	68	1'1582671
5	0'0851667	21	0'3577001	37	0'6302336	53	0'9027670	69	1'1753004
6	0'1022000	22	0'3747335	38	0'6472669	54	0'9198003	70	1'1923338
7	0'1192334	23	0'3917668	39	0'6643002	55	0'9368337	71	1'2093671
8	0'1362667	24	0'4088001	40	0'6813336	56	0'9538670	72	1'2264004
9	0'1533001	25	0'4258335	41	0'6983669	57	0'9709003	73	1'2434338
10	0'1703334	26	0'4428668	42	0'7154003	58	0'9879337	74	1'2604671
11	0'1873667	27	0'4599002	43	0'7324336	59	1'0049670	75	1'2775004
12	0'2044001	28	0'4769335	44	0'7494669	60	1'0220004	76	1'2945338
13	0'2214334	29	0'4939668	45	0'7665003	61	1'0390337	77	1'3115671
14	0'2384668	30	0'5110002	46	0'7835336	62	1'0560670	78	1'3286005
15	0'2555001	31	0'5280335	47	0'8005669	63	1'0731004	79	1'3456338
16	0'2725334	32	0'5450669	48	0'8176003	64	1'0901337	80	1'3626671

4 ½ por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)_n$
1	0'0191163	17	0'3249769	33	0'6308376	49	0'9366982	65	1'2425589
2	0'0382326	18	0'3440932	34	0'6499539	50	0'9558145	66	1'2616752
3	0'0573489	19	0'3632095	35	0'6690702	51	0'9749308	67	1'2807915
4	0'0764652	20	0'3823258	36	0'6881865	52	0'9940471	68	1'2999078
5	0'0955815	21	0'4014421	37	0'7073027	53	1'0131634	69	1'3190240
6	0'1146977	22	0'4205584	38	0'7264190	54	1'0322797	70	1'3381403
7	0'1338140	23	0'4396747	39	0'7455353	55	1'0513960	71	1'3572566
8	0'1529303	24	0'4587910	40	0'7646516	56	1'0705123	72	1'3763729
9	0'1720466	25	0'4779073	41	0'7837679	57	1'0896286	73	1'3954892
10	0'1911629	26	0'4970236	42	0'8028842	58	1'1087448	74	1'4146055
11	0'2102792	27	0'5161398	43	0'8220005	59	1'1278611	75	1'4337218
12	0'2293955	28	0'5352561	44	0'8411168	60	1'1469774	76	1'4528381
13	0'2485118	29	0'5543724	45	0'8602331	61	1'1660937	77	1'4719544
14	0'2676281	30	0'5734887	46	0'8793494	62	1'1852100	78	1'4910707
15	0'2867444	31	0'5926050	47	0'8984657	63	1'2043263	79	1'5101869
16	0'3058606	32	0'6117213	48	0'9175819	64	1'2234426	80	1'5293032

5 por 100.

Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$
1	0'0211893	17	0'3602181	33	0'6992469	49	1'0382757	65	1'3773044
2	0'0423786	18	0'3814074	34	0'7204362	50	1'0594650	66	1'3984937
3	0'0635679	19	0'4025967	35	0'7416255	51	1'0806543	67	1'4196830
4	0'0847572	20	0'4237860	36	0'7628148	52	1'1018436	68	1'4408723
5	0'1059465	21	0'4449753	37	0'7840041	53	1'1230328	69	1'4620616
6	0'1271358	22	0'4661646	38	0'8051934	54	1'1442221	70	1'4832509
7	0'1483251	23	0'4873539	39	0'8263827	55	1'1654114	71	1'5044402
8	0'1695144	24	0'5085432	40	0'8475720	56	1'1866007	72	1'5256295
9	0'1907037	25	0'5297325	41	0'8687613	57	1'2077900	73	1'5468188
10	0'2118930	26	0'5509218	42	0'8899506	58	1'2289793	74	1'5680081
11	0'2330823	27	0'5721111	43	6'9111399	59	1'2501686	75	1'5891974
12	0'2542716	28	0'5933004	44	0'9323292	60	1'2713579	76	1'6103867
13	0'2754609	29	0'6144897	45	0'9535185	61	1'2925472	77	1'6315760
14	0'2966502	30	0'6356790	46	0'9747078	62	1'3137365	78	1'6527653
15	0'3178395	31	0'6568683	47	0'9958971	63	1'3349258	79	1'6739546
16	0'3390288	32	0'6780576	48	1'0170864	64	1'3561151	80	1'6951439

6 por 100.

Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$	Años.	Log.$(1+r)^n$
1	0'0253059	17	0'4301997	33	0'8350936	49	1'2399874	65	1'6448812
2	0'0506117	18	6'4555056	34	0'8603994	50	1'2652933	66	1'6701871
3	0'0759176	19	0'4808114	35	0'8857053	51	1'2905991	67	1'6954930
4	0'1012235	20	0'5061173	36	0'9110112	52	1'3159050	68	1'7207988
5	0'1265293	21	0'5314232	37	0'9363170	53	1'3412109	69	1'7461047
6	0'1518352	22	0'5567290	38	0'9616229	54	1'3665167	70	1'7714106
7	0'1771411	23	0'5820349	39	0'9869287	55	1'3918226	71	1'7967164
8	0'2024469	24	0'6073408	40	1'0122346	56	1'4171285	72	1'8220223
9	0'2277528	25	0'6326466	41	1'0375405	57	1'4424343	73	1'8473282
10	0'2530587	26	0'6579525	42	1'0628463	58	1'4677402	74	1'8726340
11	0'2783645	27	0'6832584	43	1'0881522	59	1'4930461	75	1'8979399
12	0'3036704	28	0'7085642	44	1'1134581	60	1'5183519	76	1'9232458
13	0'3289762	29	0'7338701	45	1'1387639	61	1'5436578	77	1'9485516
14	0'3542821	30	0'7591760	46	1'1640698	62	1'5689636	78	1'9738575
15	0'3795880	31	0'7844818	47	1'1893757	63	1'5942695	79	1'9991634
16	0'4048938	32	0'8097877	48	1'2146815	64	1'6195754	80	2'0244692

7 por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$
1	0'0293838	17	0'4995242	33	0'9696647	49	1'4398051	65	1'9099456
2	0'0587676	18	0'5289080	34	0'9990484	50	1'4691889	66	1'9393293
3	0'0881513	19	0'5582918	35	1'0284322	51	1'4985727	67	1'9687131
4	0'1175351	20	0'5876756	36	1'0578160	52	1'5279564	68	1'9980969
5	0'1469189	21	0'6170593	37	1'0871998	53	1'5573402	69	2'0274807
6	0'1763027	22	0'6464431	38	1'1165836	54	1'5867240	70	2'0568644
7	0'2056864	23	0'6758269	39	1'1459673	55	1'6161078	71	2'0862482
8	0'2350702	24	0'7052107	40	1'1753511	56	1'6454916	72	2'1156320
9	0'2644540	25	0'7345944	41	1'2047349	57	1'6748753	73	2'1450158
10	0'2938378	26	0'7639782	42	1'2341187	58	1'7042591	74	2'1743995
11	0'3232216	27	0'7933620	43	1'2635024	59	1'7336429	75	2'2037833
12	0'3526053	28	0'8227458	44	1'2928862	60	1'7630267	76	2'2331671
13	0'3819891	29	0'8521296	45	1'3222700	61	1'7924104	77	2'2625509
14	0'4113729	30	0'8815133	46	1'3516538	62	1'8217942	78	2'2919347
15	0'4407567	31	0'9108971	47	1'3810376	63	1'8511780	79	2'3213184
16	0'4701404	32	0'9402809	48	1'4104213	64	1'8805618	80	2'3507022

8 por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$
1	0'0334238	17	0'5682038	33	1'1029839	49	1'6377640	65	2'1725441
2	0'0668475	18	0'6016276	34	1'1364077	50	1'6711878	66	2'2059679
3	0'1002713	19	0'6350514	35	1'1698314	51	1'7046115	67	2'2393916
4	0'1336950	20	0'6684751	36	1'2032552	52	1'7380353	68	2'2728154
5	0'1671188	21	0'7018989	37	1'2366790	53	1'7714590	69	2'3062391
6	0'2005425	22	0'7353226	38	1'2701027	54	1'8048828	70	2'3396629
7	0'2339663	23	0'7687464	39	1'3035265	55	1'8383066	71	2'3730866
8	0'2673900	24	0'8021701	40	1'3369502	56	1'8717303	72	2'4065104
9	0'3008138	25	0'8355939	41	1'3703740	57	1'9051541	73	2'4399342
10	0'3342376	26	0'8690176	42	1'4037977	58	1'9385778	74	2'4733579
11	0'3676613	27	0'9024414	43	1'4372215	59	1'9720016	75	2'5067817
12	0'4010851	28	0'9358652	44	1'4706452	60	2'0054253	76	2'5402054
13	0'4345088	29	0'9692889	45	1'5040690	61	2'0388491	77	2'5736292
14	0'4679326	30	1'0027127	46	1'5374928	62	2'0722728	78	2'6070529
15	0'5013563	31	1'0361364	47	1'5709165	63	2'1056966	79	2'6404767
16	0'5347801	32	1'0695602	48	1'6043403	64	2'1391204	80	2'6739004

10 por 100.

Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log. $(1+r)^n$	Años.	Log $(1+r)^n$
1	0'0413927	17	0'7036757	33	1'3659586	49	2'0282416	65	2'6905245
2	0'0827854	18	0'7450683	34	1'4073513	50	2'0696343	66	2'7319172
3	0'1241781	19	0'7864610	35	1'4487440	51	2'1110269	67	2'7733099
4	0'1655707	20	0'8278537	36	1'4901367	52	2'1524196	68	2'8147026
5	0'2069634	21	0'8692464	37	1'5315294	53	2'1938123	69	2'8560953
6	0'2483561	22	0'9106391	38	1'5729220	54	2'2352050	70	2'8974880
7	0'2897488	23	0'9520318	39	1'6143147	55	2'2765977	71	2'9388806
8	0'3311415	24	0'9934244	40	1'6557074	56	2'3179904	72	2'9802733
9	0'3725342	25	1'0348171	41	1'6971001	57	2'3593831	73	3'0216660
10	0'4139269	26	1'0762098	42	1'7384928	58	2'4007757	74	3'0630587
11	0'4553195	27	1'1176025	43	1'7798855	59	2'4421684	75	3'1044514
12	0'4967122	28	1'1589952	44	1'8212781	60	2'4835611	76	3'1458441
13	0'5381049	29	1'2003879	45	1'8626708	61	2'5249538	77	3'1872368
14	0'5794976	30	1'2417806	46	1'9040635	62	2'5663465	78	3'2286294
15	0'6208903	31	1'2831732	47	1'9454562	63	2'6077392	79	3'2700221
16	0'6622830	32	1'3245659	48	1'9868489	64	2'6491319	80	3'3114148

TABLA X.

Sobrevivientes $V_n = f(a)$ de cada edad según Deparcieux.

Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$
0	1286	20	814	40	657	60	463	80	118
1	1083	21	806	41	650	61	450	81	101
2	1022	22	798	42	643	62	437	82	85
3	990	23	790	43	636	63	423	83	71
4	966	24	782	44	629	64	409	84	59
5	947	25	774	45	622	65	395	85	48
6	930	26	766	46	615	66	380	86	38
7	915	27	758	47	607	67	364	87	29
8	902	28	750	48	599	68	347	88	22
9	890	29	742	49	590	69	329	89	16
10	880	30	734	50	581	70	310	90	11
11	872	31	726	51	571	71	291	91	7
12	866	32	718	52	560	72	271	92	4
13	860	33	710	53	549	73	251	93	2
14	854	34	702	54	538	74	231	94	1
15	848	35	694	55	526	75	211	95	0
16	842	36	686	56	514	76	192		
17	835	37	678	57	502	77	173		
18	828	38	671	58	489	78	154		
19	821	39	664	59	476	79	136		

TABLA XI.

Sobrevivientes $V_n = f(a)$ de cada edad según Duvillard.

Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$
0	1000000	23	484083	46	326843	69	127347	92	2466
1	767525	24	477777	47	319539	70	117656	93	1938
2	671834	25	471366	48	312148	71	108070	94	1499
3	624668	26	464863	49	304662	72	98637	95	1140
4	598713	27	458282	50	297070	73	89404	96	850
5	583151	28	451635	51	289361	74	80423	97	621
6	573025	29	444932	52	281527	75	71745	98	442
7	565838	30	438183	53	273560	76	63424	99	307
8	560245	31	431398	54	265450	77	55511	100	207
9	555486	32	424583	55	257193	78	48057	101	135
10	551122	33	417744	56	248782	79	41107	102	84
11	546888	34	410836	57	240214	80	34705	103	51
12	542630	35	404012	58	231488	81	28886	104	29
13	538255	36	397123	59	222605	82	23680	105	16
14	533711	37	390219	60	213567	83	19106	106	8
15	528569	38	383360	61	204380	84	15175	107	4
16	524020	39	376363	62	195054	85	11886	108	2
17	518863	40	369404	63	185600	86	9224	109	1
18	513502	41	362419	64	176035	87	7165	110	0
19	507949	42	355400	65	166377	88	5670		
20	502216	43	348342	66	156651	89	4686		
21	496317	44	341235	67	144882	90	3830		
22	490267	45	334072	68	137102	91	3093		

TABLA XII.

Sobrevivientes $V_n f(a)$ de cada edad según las Compañías Inglesas.

Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$
10	100000	28	91192	46	76969	64	51373	82	10032
11	99510	29	90538	47	75973	65	49297	83	8313
12	99113	30	89865	48	74932	66	47156	84	6768
13	98784	31	89171	49	73850	67	44960	85	5422
14	98496	32	88465	50	72726	68	42717	86	4284
15	98224	33	87748	51	71566	69	40443	87	3343
16	97942	34	87021	52	70373	70	38124	88	2570
17	97624	35	86281	53	69138	71	35753	89	1955
18	97245	36	85524	54	67852	72	33320	90	1460
19	96779	37	84745	55	66513	73	30823	91	1052
20	96223	38	83943	56	65114	74	28269	92	723
21	95614	39	83122	57	63652	75	25691	93	469
22	94971	40	82284	58	62125	76	23164	94	274
23	94321	41	81436	59	60533	77	20700	95	135
24	93683	42	80582	60	58866	78	18326	96	49
25	93061	43	79717	61	57119	79	16068	97	9
26	92444	44	78830	62	55289	80	13930	98	0
27	91826	45	77919	63	53374	81	11915		

TABLA XIII.

Sobrevivientes $V_n = f(a)$ de cada edad en la República Argentina.

Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$	Edad.	$V_n=f(a)$
0	1000	20	559	40	513	60	420	80	201
1	750	21	555	41	508	61	412	81	187
2	686	22	552	42	503	62	409	82	173
3	655	23	549	43	498	63	400	83	159
4	627	24	546	44	493	64	390	84	145
5	614	25	543	45	489	65	380	85	131
6	608	26	542	46	484	66	369	86	117
7	602	27	540	47	480	67	358	87	103
8	596	28	538	48	476	68	347	88	89
9	591	29	536	49	472	69	335	89	75
10	587	30	535	50	467	70	323	90	61
11	583	31	533	51	463	71	311	91	47
12	579	32	531	52	459	72	299	92	43
13	575	33	530	53	453	73	287	93	19
14	571	34	528	54	448	74	275	94	3
15	568	35	526	55	443	75	262	95	0
16	567	36	524	56	439	76	250		
17	565	37	521	57	435	77	238		
18	564	38	518	58	430	78	226		
19	562	39	515	59	425	79	215		

TABLA XIV.

Sobrevivientes $V_n = f(a)$ de cada edad en los Estados Unidos.

Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$	Edad..	$V_n=f(a)$
10	100000	28	86878	46	73345	64	51230	82	10419
11	99251	29	86160	47	72497	65	49341	83	8603
12	98505	30	85441	48	71627	66	47361	84	6955
13	97762	31	84721	49	70731	67	45291	85	5485
14	97022	32	84000	50	69804	68	43133	86	4193
15	96285	33	83277	51	68842	69	40890	87	3079
16	95550	34	82551	52	67841	70	38569	88	2146
17	94818	35	81822	53	66797	71	36178	89	1402
18	94089	36	81090	54	65706	72	33730	90	847
19	93362	37	80353	55	64563	73	31243	91	462
20	92637	38	79611	56	63364	74	28738	92	216
21	91914	39	78862	57	62104	75	26237	93	79
22	91192	40	78106	58	60779	76	23761	94	21
23	90471	41	77341	59	59385	77	21330	95	3
24	89751	42	76567	60	57917	78	18961	96	0
25	89032	43	75782	61	56371	79	16670		
26	88314	44	74985	62	54743	80	14474		
27	87596	45	74173	63	53030	81	12383		

TABLA XV.

Multiplicadores fijos $A_n = X_a$ para las rentas vitalicias y seguros, con arreglo al tanto 4 por 100 para la mortalidad indicada por Duvillard y Deparcieux y 4 $^1/_2$ para esta última.

EDAD.	$A_n = X_a$			EDAD.	$A_n = X_a$		
	4 %		4 ½ %		4 %		4 ½ %
	Deparcieux.	Duvillard.	Deparcieux.		Deparcieux.	Duvillard.	Deparcieux.
0	14'070	11'618	»	28	17'066	15'318	15'905
1	17'210	14'743	»	29	16'940	15'171	15'800
2	17'740	16'516	»	30	16'810	15'021	15'691
3	18'243	17'474	»	31	16'675	14'868	15'578
4	18'559	17'961	»	32	16'535	14'711	15'460
5	18'749	18'178	»	33	16'390	14'550	15'338
6	18'877	18'239	»	34	16'240	14'384	15'211
7	18'954	18'209	»	35	16'084	14'214	15'078
8	18'996	18'127	»	36	15'922	14'039	14'941
9	19'022	18'013	»	37	15'755	13'859	14'797
10	19'008	17'882	»	38	15'556	13'673	14'624
11	18'949	17'742	»	39	15'349	13'482	14'444
12	18'844	17'596	»	40	15'133	13'286	14'254
13	18'734	17'447	»	41	14'908	13'083	14'056
14	18'620	17'301	»	42	14'673	12'875	13'849
15	18'502	17'154	»	43	14'427	12'662	13'631
16	18'380	17'009	»	44	14'171	12'443	13'403
17	18'275	16'865	»	45	13'904	12'218	13'164
18	18'167	16'723	»	46	13'625	11'987	12'913
19	18'054	16'582	»	47	13'357	11'752	12'672
20	17'938	16'442	»	48	13'077	11'511	12'419
21	17'841	16'303	16'544	49	12'807	11'266	12'176
22	17'740	16'164	16'462	50	12'526	11'016	11'921
23	17'637	16'026	16'377	51	12'255	10'762	11'675
24	17'530	15'887	16'289	52	11'995	10'204	11'440
25	17'420	15'747	16'198	53	11'725	10'242	11'195
26	17'306	15'606	16'104	54	11'443	9'977	10'938
27	17'188	15'463	16'006	55	11'173	9'709	10'691

EDAD.	$A_n=X_a$			EDAD.	$A_n=X_a$		
	4 %		4 ½ %		4 %		4 ½ %
	Deparcieux.	Duvillard.	Deparcieux.		Deparcieux.	Duvillard.	Deparcieux.
56	10'891	9'439	10'433	84	2'680	3'092	2'641
57	10'597	9'167	10'163	85	2'424	3'105	2'392
58	10'314	8'893	9'902	86	2'185	3'162	2'158
59	10'020	8'618	9'631	87	1'977	3'233	1'955
60	9'713	8'342	9'346	88	1'711	3'249	1'693
61	9'393	8'065	9'049	89	1'446	3'089	1'433
62	9'060	7'789	8'738	90	1'187	2'930	1'178
63	8'734	7'513	8'433	91	0'941	2'773	»
64	8'349	7'238	8'114	92	0'712	2'617	»
65	8'039	6'965	7'780	93	0'481	2'464	»
66	7'691	6'693	7'451	94	0'000	2'313	»
67	7'350	6'424	7'129	95	0'000	2'163	»
68	7'019	6'157	6'814	96	»	2'013	»
69	6'699	5'894	6'511	97	»	1'874	»
70	6'394	5'635	6'221	98	»	1'733	»
71	6'084	5'380	5'925	99	»	1'591	»
72	5'794	5'130	5'648	100	»	1'460	»
73	5'506	4'886	5'373	101	»	1'329	»
74	5'222	4'649	5'101	102	»	1'221	»
75	4'946	4'420	4'836	103	»	1'091	»
76	4'652	4'200	4'553	104	»	0'996	»
77	4'376	3'990	4'281	105	»	0'877	»
78	4'105	3'794	4'025	106	»	0'823	»
79	3'835	3'613	3'763	107	»	0'712	»
80	3'596	3'450	3'533	108	»	0'481	»
81	3'370	3'311	3'313	109	»	0'000	»
82	3'164	3'200	3'114	110	»	0'000	»
83	2'940	3'125	2'895				

TABLA XVI.

Sobrevivientes de cada edad y multiplicadores $A_n = X_a$ según Hubbard con arreglo al tanto 4 $^1/_2$ por 100.

Edad..	$V_n=f(a)$	$A_n=X_a$	Edad..	$V_n=f(a)$	$A_n=X_a$	Edad..	$V_n=f(a)$	$A_n=X_a$
21	10000	17'107	45	8177	13'417	69	4580	6'427
22	9910	17'040	46	8069	13'209	70	4280	6'187
23	9827	16'960	47	7952	13'007	71	3997	5'925
24	9748	16'868	48	7830	12'804	72	3722	5'648
25	9672	16'767	49	7705	12'598	73	3447	5'373
26	9598	16'657	50	7580	12'382	74	3173	5'101
27	9524	16'543	51	7456	12'154	75	2898	4'836
28	9447	16'431	52	7335	11'911	76	2637	4'553
29	9371	16'312	53	7217	11'651	77	2376	4'281
30	9290	16'196	54	7102	11'374	78	2115	4'025
31	9207	16'077	55	6991	11'075	79	1868	3'763
32	9124	15'954	56	6881	10'758	80	1621	3'533
33	9041	15'826	57	6770	10'427	81	1388	3'313
34	8960	15'689	58	6656	10'083	82	1168	3'114
35	8881	15'540	59	6536	9'730	83	976	2'895
36	8805	15'381	60	6395	9'393	84	811	2'641
37	8731	15'211	61	6240	9'061	85	660	2'392
38	8660	15'027	62	6077	8'723	86	523	2'158
39	8591	14'830	63	5907	8'379	87	399	1'955
40	8531	14'608	64	5730	8'027	88	303	1'693
41	8473	14'370	65	5535	7'683	89	220	1'433
42	8412	14'127	66	5323	7'348	90	151	1'178
43	8346	13'881	67	5094	7'024			
44	8271	13'638	68	4847	6'715			

TABLA XVII.

Multiplicadores fijos $A_{n,m}=X_{a,b}$ para las rentas vitalicias
y seguros sobre dos vidas
con arreglo al tanto 4 ½ por 100 y mortalidad
indicada por Deparcieux.

Edades	$A_{n,m}=X_{a,b}$	Edades.	$A_{n,m}=X_{a,b}$	Edades.	$A_{n,m}=X_{a,b}$
20...25	13'784	20...30	13'496	20...50	10'739
21...26	13'699	21...31	13'400	21...51	10'522
22...27	13'612	22...32	13'301	22...52	10'335
23...28	13'522	23...33	13'199	23...53	10'128
24...29	13'429	24...34	13'092	24...54	9'911
25...30	13'333	25...35	12'982	25...55	9'702
26...31	13'233	26...36	12'868	26...56	9'484
27...32	13'131	27...37	12'749	27...57	9'255
28...33	13'024	28...38	12'606	28...58	9'034
29...34	12'914	29...39	12'455	29...59	8'803
30...35	12'799	30...40	12'298	30...60	8'561
31...36	12'680	31...41	12'153	31...61	8'306
32...37	12'556	32...42	11'960	32...62	8'038
33...38	12'408	33...43	11'778	33...63	7'775
34...39	12'252	34...44	11'587	34...64	7'499
35...40	12'089	35...45	11'385	35...65	7'207
36...41	11'918	36...46	11'174	36...66	6'920
37...42	11'739	37...47	10'970	37...67	6'639
38...43	11'531	38...48	10'738	38...68	6'353
39...44	11'313	39...49	10'512	39...69	6'076
40...45	11'082	40...50	10'274	40...70	5'811
41...46	10'839	41...51	10'042	41...71	5'538
42...47	10'601	42...52	9'817	42...72	5'282
43...48	10'349	43...53	9'579	43...73	5'025
44...49	10'102	44...54	9'329	44...74	4'770
45...50	9'841	45...55	9'083	45...75	4'518
46...51	9'583	46...56	8'824	46...75	4'248
47...52	9'345	47...57	8'566	47...77	3'991
48...53	9'095	48...58	8'312	48...78	3'748
49...54	8'846	49...59	8'060	49...79	3'503
50...55	8'602	50...60	7'793	50...80	3'284
51...56	8'360	51...61	7'526	51...81	3'080
52...57	8'120	52...62	7'257	52...82	2'899

Edades.	$A_{n,m}=X_{a,b}$	Edades.	$A_{n,m}=X_{a,b}$	Edades.	$A_{n,m}=X_{a,b}$
53...58	7'886	53...63	6'992	53...83	2'700
54...59	7'639	54...64	6'711	54...84	2'464
55...60	7'394	55...65	6'428	55...85	2'238
56...61	7'136	56...66	6'145	56...86	2'023
57...62	6'862	57...67	5'864	57...87	1'836
58...63	6'605	58...68	5'598	58...88	1'596
59...64	6'333	59...69	5'339	59...89	1'356
60...65	6'045	60...70	5'088	60...90	1'119
61...66	5'757	61...71	4'828	61...91	0'891
62...67	5'467	62...72	4'578	62...92	0'677
63...68	5'191	63...73	4'337	63...93	0'463
64...69	4'917	64...74	4'093	64...94	0'000
65...70	4'647	65...75	3'848	»	»
66...71	4'377	66...76	3'594	»	»
67...72	4'128	67...77	3'351	»	»
68...73	3'885	68...78	3'126	»	»
69...74	3'653	69...79	2'902	»	»
70...75	3'436	70...80	3'709	»	»
71...76	3'203	71...81	2'524	»	»
72...77	2'989	72...82	2'365	»	»
73...78	2'788	73...83	2'195	»	»
74...79	2'585	74...84	1'999	»	»
75...80	2'409	75...85	1'811	»	»
76...81	2'232	76...86	1'627	»	»
77...82	2'076	77...87	1'473	»	»
78...83	1'917	78...88	1'279	»	»
79...84	1'730	79...89	1'082	»	»
80...85	1'562	80...90	0'895	»	»
81...86	1'408	81...91	0'717	»	»
82...87	1'292	82...92	0'559	»	»
83...88	1'130	83...93	0'398	»	»
84...89	0'954	84...94	0'000	»	»
85...90	0'782	»	»	»	»
86...91	0'621	»	»	»	»
87...92	0'489	»	»	»	»
88...93	0'348	»	»	»	»
89...94	0'000	»	»	»	»

TABLA XVIII.

Multiplicadores fijos $A_{n,\,m}=X_{a,\,b}$ para las rentas vitalicias y seguros sobre dos vidas con arreglo al tanto 4 por 100 y mortalidad indicada por Deparcieux.

Edad menor.....	DIFERENCIAS DE EDADES Y VALORES de $A_{n,\,m}=X_{a,\,b}$				Edad menor.....	DIFERENCIAS DE EDADES Y VALORES de $A_{n,\,m}=X_{a,\,b}$			
	0 años.	5 años.	10 años.	15 años.		0 años.	5 años.	10 años.	15 años.
0	8'676	11'581	11'809	11'573	29	14'021	13'673	13'149	12'349
1	12'974	14'279	14'425	14'090	30	13'901	13'541	12'971	12'129
2	13'791	14'803	14'816	14'470	31	13'778	13'403	12'786	11'898
3	14'603	15'288	15'183	14'829	32	13'650	13'261	12'592	11'677
4	15'141	15'613	15'393	15'034	33	13'517	13'093	12'389	11'445
5	15'486	15'803	15'496	15'136	34	13'380	12'917	12'176	11'220
6	15'734	15'907	15'545	15'206	35	13'238	12'733	11'954	10'988
7	15'905	15'931	15'570	15'234	36	13'091	12'541	11'720	10'763
8	16'021	15'924	15'565	15'235	37	12'938	12'340	11'495	10'549
9	16'114	15'902	15'545	15'222	38	12'737	12'110	11'241	10'307
10	16'142	15'844	15'491	15'176	39	12'527	11'869	10'994	10'054
11	16'097	15'748	15'420	15'095	40	12'308	11'616	10'735	9'808
12	15'974	15'629	15'310	14'974	41	12'077	11'350	10'482	9'551
13	15'845	15'506	15'196	14'849	42	11'835	11'089	10'236	9'281
14	15'712	15'378	15'078	14'719	43	11'581	10'815	9'978	9'018
15	15'572	15'245	14'955	14'584	44	11'314	10'547	9'708	8'742
16	15'427	15'126	14'828	14'444	45	11'033	10'264	9'442	8'453
17	15'314	15'022	14'714	14'316	46	10'737	9'985	9'164	8'148
18	15'197	14'915	14'597	14'184	47	10'462	9'728	8'887	7'841
19	15'075	14'804	14'475	14'047	48	10'173	9'458	8'614	7'537
20	14'949	14'689	14'349	13'904	49	9'905	9'190	8'344	7'230
21	14'857	14'589	14'237	13'774	50	9'623	8'927	8'060	6'906
22	14'763	14'487	14'122	13'639	51	9'362	8'667	7'775	6'597
23	14'666	14'381	14'002	13'478	52	9'122	8'411	7'490	6'303
24	14'566	14'272	13'879	13'310	53	8'871	8'160	7'209	6'014
25	14'463	14'160	13'752	13'134	54	8'607	7'896	6'912	5'731
26	14'358	14'044	13'620	12'951	55	8'365	7'635	6'613	5'470
27	14'249	13'924	13'483	12'759	56	8'110	7'361	6'316	5'202
28	14'137	13'801	13'320	12'559	57	7'842	7'071	6'022	4'948

Edad menor....	DIFERENCIAS DE EDADES Y VALORES de $A_{n,m}=X_{a,b}$			
	0 años.	5 años.	10 años.	15 años.
58	7'596	6'799	5'744	4'704
59	7'337	6'513	5'473	4'461
60	7'065	6'211	5'210	4'222
61	6'778	5'908	4'939	3'964
62	6'475	5'605	4'679	3'712
63	6'187	5'317	4'428	3'480
64	5'882	5'032	4'175	3'238
65	5'558	4'751	3'922	3'019
66	5'246	4'471	3'660	2'813
67	4'946	4'212	3'410	2'629
68	4'660	3'962	3'179	2'434
69	4'392	3'722	2'949	2'213
70	4'144	3'497	2'751	2'002
71	3'891	3'258	2'561	1'801
72	3'666	3'038	2'398	1'636
73	3'445	2'832	2'224	1'421
74	3'229	2'624	2'024	1'208
75	3'026	2'443	1'832	1'0005
76	2'800	2'262	1'645	0'7969
77	2'587	2'103	1'488	0'6097
78	2'395	1'941	1'291	0'4246
79	2'194	1'750	1'091	»
80	2'031	1'579	0'9020	»
81	1'883	1'423	0'7223	»
82	1'765	1'304	0'5620	»
83	1'631	1'140	0'3995	»
84	1'456	0'9614	»	»
85	1'288	0'7876	»	»
86	1'138	0'6258	»	»
87	1'0328	0'4923	»	»
88	0'8664	0'3497	»	»
89	0'7036	»	»	»
90	0'5481	»	»	»
91	0'4076	»	»	»
92	0'2982	»	»	»
93	0'2404	»	»	»
94	»	»	»	»
95	»	»	»	»

TABLA XIX.

De conmutación con arreglo al tanto 4 por 100 y mortalidad indicada por las veinte Compañías Inglesas.

EDAD.	D_a	N_a	S_a	M_a	R_a
10	67556'4	1356297'0	24434671	12792'8	429295'1
11	64639'8	1291658'0	23078374	12474'5	416502'2
12	61905'7	1229752'0	21786716	12226'6	404027'7
13	59327'1	1170425'0	20556964	12029'0	391801'2
14	56879'0	1113546'0	19386540	11862'6	379772'2
15	54540'3	1059005'0	18272994	11711'6	367909'6
16	52292'0	1006713'0	17213988	11561'1	356198'0
17	50117'6	956595'8	16207275	11397'8	344636'9
18	48002'9	908593'0	15250679	11210'7	333239'1
19	45935'4	862657'6	14342086	10989'5	322028'4
20	43914'9	818742'6	13479429	10735'8	311038'8
21	41958'6	776784'0	12660686	10468'5	300303'1
22	40073'5	736710'5	11883902	10197'2	289834'5
23	38268'5	698442'0	11147192	9933'49	279637'3
24	36547'8	661894'2	10448750	9684'60	269703'8
25	34908'7	626985'5	9786855	9451'27	260019'2
26	33343'6	593641'9	9159870	9228'73	250567'9
27	31846'8	561795'1	8566228	9014'40	241339'2
28	30410'5	531384'7	8004433	8802'97	232324'8
29	29031'1	502353'5	7473048	8593'27	223521'8
30	27707'1	474646'5	6970695	8385'77	214928'6
31	26435'7	448210'8	6496048	8180'02	206542'8
32	25217'7	422993'2	6047838	7978'77	198362'8
33	24051'2	398941'9	5624844	7782'25	190384'0
34	22934'6	376007'4	5225902	7590'64	182601'8
35	21864'9	354142'4	4849895	7403'12	275011'1
36	20839'5	333302'9	4495753	7218'66	167608'0
37	19855'5	313447'4	4162450	7036'14	160389'3
38	18911'1	294536'3	3849002	6855'46	153353'2
39	18005'9	276530'4	3554466	6677'62	146497'7
40	17138'9	259391'5	3277936	6503'07	139820'1
41	16309'8	243081'7	3018544	6333'24	133317'0
42	15518'1	227563'3	2775463	6168'78	126983'8
43	14761'1	212802'5	2547899	6008'61	120815'0
44	14035'4	198767'2	2335096	5850'68	114806'4
45	13339'6	185427'5	2136329	5694'72	108955'7
46	12670'2	172757'4	1950902	5538'34	103261'0
47	12025'2	160732'2	1778144	5380'69	97722'69
48	11404'3	149327'9	1617412	5222'25	92342'01
49	10807'3	138520'6	1468084	5063'91	87119'76
50	10233'5	128287'2	1329564	4905'75	82055'85

EDAD.	D_a	N_a	S_a	M	R_a
51	9682'92	118604'2	1201276	4748'80	77150'10
52	9155'30	109448'9	1082672	4593'59	72401'30
53	8648'68	100800'3	973223'3	4439'11	67807'70
54	8161'36	92638'91	872423'0	4284'42	63368'60
55	7692'59	84946'32	779784'1	4129'56	59084'17
56	7241'15	77705'17	694837'8	3973'98	54954'61
57	6806'31	70898'86	617132'6	3817'65	50980'63
58	6387'53	64511'33	546233'8	3660'65	47162'98
59	5984'46	58526'87	481722'4	3503'26	43502'34
60	5595'83	52931'04	423195'6	3344'79	39999'08
61	5220'92	47710'12	370264'5	3185'11	36654'29
62	4859'28	42850'85	322554'4	3024'27	33469'18
63	4510'55	38340'30	279703'6	2862'44	30444'91
64	4174'47	34165'83	241363'3	2699'84	27582'47
65	3851'71	30314'12	207197'4	2537'64	24882'62
66	3542'72	26771'40	176883'3	2376'79	22344'99
67	3247'83	23523'58	150111'9	2218'16	19968'20
68	2967'11	20556'47	126588'3	2062'36	17750'04
69	2701'11	17855'35	106031'9	1910'48	15687'68
70	2448'30	15407'05	88176'53	1761'56	13777'20
71	2207'73	13199'32	72769'47	1615'15	12015'65
72	1978'36	11220'97	59570'15	1470'69	10400'50
73	1759'71	9461'258	48349'18	1328'13	8929'809
74	1551'83	7909'431	38887'92	1187'93	7601'675
75	1356'07	6553'366	30978'49	1051'86	6413'742
76	1175'66	5377'711	24425'13	923'602	5361'886
77	1010'19	4367'521	19047'42	803'355	4438'284
78	859'938	3507'583	14679'90	691'957	3634'928
79	724'983	2782'600	11172'31	590'076	2942'972
80	604'344	2178'256	8389'713	497'321	2352'895
81	497'043	1681'213	6211'457	413'264	1855'575
82	402'396	1278'817	4530'244	337'734	1442'311
83	320'620	958'1973	3251'427	271'435	1104'577
84	250'992	707'2053	2293'230	214'138	833'143
85	193'342	513'8635	1586'024	166'142	619'004
86	146'887	366'9769	1072'161	127'123	452'863
87	110'214	256'7631	705'184	96'0993	325'740
88	81'4703	175'2928	448'421	71'5948	229'641
89	59'5908	115'7020	273'128	52'8488	158'046
90	42'7910	72'9110	157'426	38'3409	105'197
91	29'6471	43'2639	84'515	26'8428	66'856
92	19'5917	23'6722	41'251	17'9277	40'013
93	12'2200	11'4522	17'579	11'3096	22'086
94	6'8646	4'5876	6'124	6'4242	10'776
95	3'2521	1'3355	1'536	3'0757	4'352
96	1'1350	0'2005	0'201	1'0836	1'276
97	0'2005	0'0000	0'000	0'1927	0'193

TABLA XX.

De conmutación con arreglo al tanto 4 por 100 y mortalidad indicada por Deparcieux.

Edad.	T_a	G_a	Edad.	T_a	G_a
0	54244'23	817447'06	36	6672'03	112907'11
1	41910'53	763202'83	37	6340'59	106235'08
2	38490'34	721292'30	38	6033'78	99894'19
3	35484'11	682801'96	39	5741'19	93860'71
4	33095'75	647317'85	40	5462'18	88119'52
5	31101'09	614222'10	41	5196'13	82657'34
6	29337'07	583121'01	42	4942'47	77461'21
7	27753'75	553783'94	43	4700'65	72518'74
8	26307'14	526030'19	44	4470'10	67818'09
9	24958'81	499723'05	45	4250'34	63347'99
10	23729'21	474764'24	46	4040'88	59097'65
11	22609'12	451035'03	47	3834'91	55056'77
12	21589'95	428425'91	48	3638'82	51221'86
13	20615'74	406835'96	49	3446'29	47583'04
14	19684'52	386220'22	50	3263'20	44136'75
15	18794'46	366535'70	51	3083'68	40873'55
16	17943'73	347741'24	52	2907'96	37789'87
17	17110'15	329797'51	53	2741'19	34881'91
18	16314'13	312687'37	54	2582'95	32140'72
19	15554'05	296373'24	55	2428'21	29557'77
20	14828'31	280819'19	56	2281'56	27129'56
21	14117'86	265990'88	57	2142'57	24848'00
22	13340'13	251873'02	58	2006'82	22705'43
23	12793'64	238432'89	59	1878'34	20698'61
24	12177'01	225639'25	60	1756'77	18820'27
25	11588'87	213462'24	61	1641'77	17063'50
26	11027'97	201873'37	62	1533'03	15421'73
27	10493'08	190845'40	63	1426'84	13888'70
28	9983'01	180352'32	64	1326'55	12461'86
29	9496'66	170369'31	65	1231'87	11135'31
30	9032'95	160872'65	66	1139'51	9903'44
31	8590'87	151839'70	67	1049'54	8763'93
32	8169'41	143248'83	68	962'05	7714'39
33	7767'69	135079'42	69	877'06	6752'34
34	7384'78	127311'72	70	794'63	5875'28
35	7019'83	119926'94	71	717'23	5080'65

Edad.	T_a	G_a
72	642'25	4363'42
73	571'97	3721'17
74	506'15	3149'20
75	444'54	2643'05
76	388'96	2198'51
77	336'99	1809'55
78	288'44	1472'56
79	244'93	1184'12
80	204'34	939'19
81	168'17	734'85
82	136'09	566'68
83	109'30	430'59

Edad.	T_a	G_a
84	87'34	321'29
85	68'32	233'95
86	52'01	165'63
87	38'16	113'62
88	27'84	75'46
89	19'47	47'62
90	12'87	28'15
91	7'87	15'28
92	4'33	7'41
93	2'08	3'08
94	1'00	1'00
95	0'00	0'00

ÍNDICE DEL CONTENIDO DE ESTE TOMO.

LIBRO II.

RENTAS GENERALES Y AMORTIZACIONES.

CAPÍTULO PRIMERO.

RENTAS.

Páginas.

CAPÍTULO II.

CASOS PARTICULARES.

CAPÍTULO III.

AMORTIZACIONES.

LIBRO III.

RENTAS VITALICIAS Y SEGUROS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

CAPÍTULO II.

RENTAS VITALICIAS.

CAPÍTULO III.

FUNDAMENTOS DE LOS SEGUROS SOBRE LA VIDA.

CAPÍTULO IV.

DIVERSAS CLASES DE PRIMAS.

CAPÍTULO V.

CÁLCULO DE LOS SEGUROS EN CASO DE VIDA.

CAPÍTULO VI.

SEGUROS EN CASO DE MUERTE.

CAPÍTULO VII.

SOCIEDADES DE SEGUROS.

CAPÍTULO VIII.

ESTABLECIMIENTOS DE PREVISIÓN.

APÉNDICE.

Ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado.

FIN DEL TOMO TERCERO

Y DEL TRATADO DE ARITMÉTICA Y CÁLCULOS MERCANTILES.

ANGULO

CALCULOS

MERCANTI

3