ACTAS DEL

XV CONGRESO REGIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE CASTILLA Y LEÓN

IV JORNADA GEOGEBRA DE CASTILLA Y LEÓN

Organiza:

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Colabora:

Junta de Castilla y León

UVa PALENCIA

Universidad de Valladolid
Área de Didáctica de la Matemática

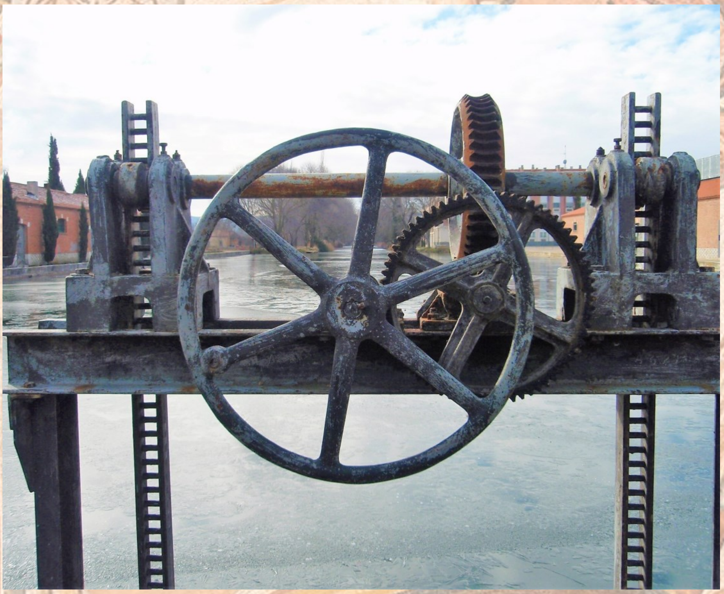
EDUCACIÓN MATEMÁTICA GIR

Diputación DE PALENCIA

PALENCIA AYUNTAMIENTO

sm

CASIO División Educativa



2022

4 Y 5 de noviembre

PALENCIA

XV CONGRESO REGIONAL DE MATEMÁTICAS Y IV JORNADA GEOGEBRA DE CASTILLA Y LEÓN

Palencia, 4 y 5 de noviembre, 2022

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"

Junta de Castilla y León

Editan: Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Cítese como:
Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" (2022). XV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León

Las comunicaciones aquí publicadas, han sido sometidas a evaluación y selección por parte de profesorado en activo de todos los niveles educativos.

Diseño del cartel del congreso: Astrid Cuida Gómez

Diseño de la portada y contraportada: Mª Victoria de la Hera Cuevas

ISBN: 978-84-09-55178-1

ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y PRÓLOGO

PONENCIAS

TALLERES

COMUNICACIONES

CONFERENCIA PLENARIA

PRESENTACIÓN Y PRÓLOGO

PRESENTACIÓN

Estas actas son fruto de la colaboración constante de la Consejería de Educación con la Asociación de Profesores de Matemáticas “Miguel de Guzmán” y el Instituto GeoGebra de Castilla y León. Gracias a ella, se celebró de manera conjunta el XV Congreso Regional de Matemáticas y la IV Jornada GeoGebra de Castilla y León, el 4 y 5 de noviembre en la Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias de Palencia.

La Asociación “Miguel de Guzmán” acumula una larga trayectoria en pro de la Educación Matemática en Castilla y León. Desde principios de los años 90, su labor se ha concretado en quince congresos de Educación Matemática celebrados bianualmente. Además, en el seno de la asociación, nace el Instituto Geogebra de Castilla y León. A través de estas páginas, el lector podrá comprobar cómo el profesorado de Matemáticas de Castilla y León conjuga los problemas clásicos de la matemática con la facilidad y potencia de la tecnología. De esta manera se transmiten a la Comunidad Educativa buenas prácticas y propuestas de éxito para el aula de Matemáticas, sin descuidar el trato a cualquier otra disciplina que, relacionada directa o indirectamente con la matemática, permita el discurrir de la ciencia.

Desde su edad más temprana, nuestro alumnado entra en contacto con los conceptos abstractos que interpreta la matemática, comenzando con los números y su cálculo. El arte, la música, la naturaleza y la tecnología más reciente, relacionada con la inteligencia artificial, también formaron parte de los diálogos que se establecieron en esos días entre los profesores participantes. Bien podrían establecerse como punto de partida hacia un nuevo comienzo al compartirlo con sus compañeros en los centros educativos de nuestra Comunidad.

Este congreso ha contado además con la inestimable colaboración del Campus de Palencia de la Universidad de Valladolid (Uva), que ha acogido su celebración. El lector interesado encontrará aquí la ponencia: “Plan de Mejora de las Matemáticas en Castilla y León”. En ella el grupo de investigación reconocido, “Educación Matemática” de la Uva, presenta este plan desarrollado por la Consejería de Educación como un modelo a seguir basado en la innovación, la investigación y la evaluación. De esta manera contemplamos la educación matemática como un compromiso compartido por el profesorado, las familias y las instituciones.

Finalmente, no podemos olvidar que este congreso se ha enriquecido con participantes de dentro y fuera de España. Así el, contacto con otros, con distinto origen y circunstancias permite crecer, valorar lo que hacemos y abrir nuevos horizontes de trabajo. De esta forma construimos entre todos una mejor manera de enseñar y aprender matemáticas.

La matemática ha acompañado a la humanidad a lo largo de su historia. Valorar la construcción compartida de la ciencia, apoyada en una matemática consciente, e implementarla en el tiempo y el espacio que comparten el profesorado y el alumnado, es el motivo que nos da razones para continuar esta apuesta por el éxito en la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia deductiva que nos ayuda en la resolución de problemas.

Rocío Lucas Navas
Consejera de Educación
Consejería de Educación. Junta de Castilla y Leon

PRÓLOGO

Durante la tarde del viernes 4, y todo el día del sábado, 5 de noviembre de 2022, se celebró, en los espacios de la Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias del Campus de la Yutera de la UVa en la ciudad de Palencia, el XV Congreso Regional de Educación Matemática de Castilla y León y la IV Jornada de Geogebra Castilla y León.

El Congreso y la Jornada han permitido compartir experiencias educativas y saberes matemáticos de todos los niveles educativos: Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad, contando con un número total de 198 asistentes, de los cuales, 26 fueron de Primaria, 142 de Secundaria y 30 de Universidad.

Estos datos de participación sugieren la necesidad de reforzar la presencia, en estas actividades, de profesores de Primaria y de Universidad para conseguir la coordinación y cooperación de todos los niveles de enseñanza de las matemáticas.

El Congreso mantiene el propósito, propio de su carácter de foro de encuentro y debate, de contribuir al intercambio de ideas y experiencias relacionadas con la Educación Matemática de nuestra región, aunque, por supuesto, sin perder de vista las referencias proporcionadas por los entornos educativos nacional e internacional.

Si los anteriores Congresos abrieron las puertas a un periodo de ilusión, esperanza y expectativas en un espacio académico en el cual se comenzaron a debatir las diferentes problemáticas de la educación científica y tecnológica, las actividades llevadas a cabo en este Congreso han cumplido los objetivos de difundir experiencias, promover la actualización formativa del profesorado, reflexionar sobre la propia práctica docente, etcétera, siendo, en definitiva, muy valiosas para el avance académico y profesional de los docentes de matemáticas de la Comunidad de Castilla y León.

El cumplido programa de trabajo consistió en Conferencias plenarias, *para aprender de los expertos*, como figuraba en el eslogan de los organizadores, Comunicaciones, *para compartir experiencias*, y Talleres, *para practicar nuevos métodos y estrategias*, aportaciones, todas ellas, de la máxima calidad, cuyo nexo de unión fundamental, es la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Castilla y León.

El Congreso Regional y el día Geogebra han sido una buena muestra del alto nivel científico y didáctico de los profesores conferenciantes, ponentes, autores de comunicaciones y talleres, así como de los asistentes en general, quienes, además, con su participación, han testimoniado su vocación y compromiso con la Educación Matemática.

También se llevó a cabo en la tarde del sábado un homenaje a D. Francisco Bellot, profesor propuesto por la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán, que en su reunión Ordinaria de la Junta Directiva Regional del 29 de febrero de 2020, en su Punto 3 concerniente a la organización del Congreso Regional de Palencia, acordó realizar un acto de homenaje a un profesor de reconocido prestigio en su labor docente.

La Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán deberá seguir organizando actividades de este tipo para el logro de las competencias matemáticas y científicas, así como de las modernas tecnologías y de esta forma contribuir al enriquecimiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y al mismo tiempo trasmitir a la sociedad que esta Asociación de Profesores tiene gran vitalidad, vocación docente y compromiso, ejerciendo un papel primordial en la Educación Matemática.

Nuestro agradecimiento a la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, en particular, a la Dirección General de Innovación y Formación del Profesorado, a la Universidad de Valladolid, Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias del campus de la Yutera de Palencia, al Ayuntamiento y la Diputación de Palencia, al Instituto Geogebra de Castilla y León, al profesorado del Área de Didáctica de la Matemáticas y miembros del Grupo de Investigación Reconocido "Educación Matemática" de la UVa, y a las entidades Editorial SM y División Educativa de Casio, sin cuya ayuda, apoyo y colaboración, habría sido imposible la celebración de estos eventos.

He de destacar a los Comités Organizador y Científico de este XV Congreso Regional y IV Jornada Geogebra, así como a los profesores de la Asociación Provincial de Palencia y al Coordinador del Congreso y Presidente Provincial de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán, D. Miguel Ángel Curto Rogado, por la excelente preparación, organización y trabajo llevados a cabo, lo que ha garantizado el éxito del Congreso y la Jornada y la satisfacción de todos los participantes.

Termino estas líneas prologales, con el deseo de que esta publicación conjunta de la Consejería de Educación y de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán sirva de ayuda y referencia al trabajo futuro en beneficio de la Educación Matemática de la Comunidad de Castilla y León.

Mª Encarnación Reyes Iglesias

Asociación Miguel de Guzmán

PONENCIAS

GEOGEBRA PARA VER ARTE

Ezequiel Martínez Rosales

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

Resumen

Pretendo mostrar cómo, a lo largo de la historia y en diversas culturas, elementos geométricos han sido utilizados en arquitectura, escultura. pintura. Enseñar el método de trabajo que he utilizado: Construir con GeoGebra un elemento geométrico, insertar imágenes de obras artísticas y visualizar como encajan. Mi objetivo es animar a elaborar proyectos y programar actividades compartidas entre varios departamentos, diseñar estudios sobre la geometría de las obras artísticas de la localidad, organizar paseos matemáticos de divulgación con alumnos, AMPA y asociaciones culturales. Por otra parte, quiero enseñar como podemos modelizar en 3D esculturas y arquitecturas. Como a partir de imágenes medimos y establecemos proporciones para trasladarlos a 3D y reproducir el objeto artístico.

Palabras clave: *formas geométricas planas, ecuaciones para métricas, superficies 3D*

DONDE ENCONTRAR LOS RECURSOS

Todos los recursos, y algunos más, que utilizaré en esta ponencia los podéis encontrar en la página de mis recursos en GeoGebra (https://www.geogebra.org/u/ezq). En concreto en el libro “Arte con geometría” (https://www.geogebra.org/m/z8nxqdfp). El proyecto “Geometría del románico” está en (https://www.geogebra.org/m/pdbpswxp). “Escultura” (https://www.geogebra.org/m/NC5sqb4B), “Arquitectos y arquitecturas” (https://www.geogebra.org/m/atgph9hb), “Depósitos y tanques” (https://www.geogebra.org/m/rxz83qvg) y otros, son libros donde voy colocando mis trabajos. Además de poder descargar las actividades y ver, en la vista algebraica, como he construido el modelo, he comenzado a editar un libro en el que detallaré, paso a paso, el proceso constructivo de la modelización TALLER DE MODELIZACIÓN 3D (https://www.geogebra.org/m/gfq5uxkc)

LAS MATEMÁTICAS COMO PARTE DE UN TODO

Creo que hay un consenso, bastante generalizado entre profesionales de la enseñanza (trabajadores en el aula y teóricos) de dar un valor añadido a las matemáticas, utilizar su conocimiento para una mayor comprensión de las realidades en las que vivimos. No voy a repetir lo que está escrito al respecto en las leyes educativas, que vosotros profesionales en activo conocéis y programáis según sus dictados, pretendo mostraros actividades y proyectos que he elaborado utilizando la geometría para disfrutar más, para entender mejor, para ver cómo se diseñaron las obras artísticas.

QUE FACILITA GEOGEBRA

Platón mando grabar en el frontispicio de la Academia “Que nadie entre sin saber geometría” y Rafael Alberti dejó dicho “quien quiera pintar debe saber geometría”

Si a una persona, con pocos conocimientos matemáticos, le enseñas un concepto geométrico o la construcción de una forma geométrica hecha con GeoGebra le va a entrar por los ojos y le va a llegar a la mente, va a asimilar el cómo y comprender el que. Mi experiencia de charlas en Centros Culturales y Paseo Matemáticos en Cantabria, con personas de características diversas ratifican lo dicho. Me produce gran satisfacción ver como personas cultas, amantes del arte y la historia, enriquecen su visión con la geometría, desechan prejuicios y muestran su alegría por haber aprendido algo que les resultaba ajeno y que les parecía difícil.

¿Y a nuestros alumnos? No es motivo de esta ponencia destacar las numerosas y grandes virtudes del GeoGebra en los procesos de enseñanza-aprendizaje, pero quiero destacar una. El desarrollo de la competencia lingüística, algo a lo que estamos obligados por ley y por nuestro compromiso en el desarrollo integral de nuestros alumnos. Tengamos en cuenta que el lenguaje es el pensamiento.

Cuando vamos exhibiendo el proceso de la demostración de un teorema, podemos ir provocando que los alumnos "vayan contando lo que pasa", al principio con un vocabulario popular avanzado hacia una expresión científica. Esto lo podemos organizar como un trabajo en equipo, para realizar como actividad complementaria aprovechando las posibilidades que nos ofrecen las TIC, competencia informática, en concreto la Classroom de GeoGebra.

CAMINEMOS HACIA LA GLOBALIZACIÓN

De que las matemáticas encierran valores en si misma y de la belleza reside en ella no voy a tratar de convenceros. Por eso, entre otras cosas, estudiamos y enseñamos matemáticas. Pero que podemos participar con ellas y con otras ciencias y con las artes y con la historia en proyectos integrales de análisis y comprensión de fenómenos aparentemente ajenos a las matemáticas si os voy a hablar, exponiendo ejemplos concretos de actuación. En esta ponencia me centraré en la geometría, las artes y las ciencias sociales.

Unos ejemplos vinculando geometría con arte. Desde el libro "Arte con geometría"

Muchas personas han oído hablar del número de oro, de la divina proporción, del rectángulo áureo. En el libro "Arte con geometría" podéis abrir la actividad "Construcción del rectángulo áureo", con ella podrán seguir paso a paso el proceso constructivo y a continuación con la actividad "La proporción áurea en el arte" comprobar como el rectángulo áureo esta presente en el diseño de obras de todo tipo, de distintas épocas, de distintos lugares. Unos pocos ejemplos de la infinidad que hay. Quien nos iba a decir que la proporción raíz de 3 está presente en el arte románico y en el gótico, podemos enseñar en que consiste "La proporción raíz de 3" y a continuación abriendo "La proporción raíz de 3. Propiedad 2" explicar, como se aplica esta propiedad para diseñar la Mandorla o Vésica Piscis que enmarca el Pantocrator de las iglesias bizantinas, románicas o en el diseño de las plantas de iglesias románicas. Esto mismo podemos hacer con el rectángulo de Plata, el Cordobés, que tanto estudió y utilizó Rafael de la Hoz.

En el capítulo de las "Espirales" podemos, además de estudiarlas, hacernos algunas preguntas ¿Por qué hace 15.000 años hay gravadas en piedras espirales en Cantabria, Arizona o las Canarias? Ver espirales en edificios barrocos, en esculturas modernas o en diseños industriales.

Un estudio específico merece el "Paraboloide hiperbólico", como se construye una superficie reglada que contiene parábolas, que propiedades tiene que permite construir cubiertas de grandes superficies diáfanas, Presentar la obra de arquitecto Félix Candela.

Trabajemos con proyectos

El patrimonio de Castilla León es rico, muy rico, Ofrece numerosas posibilidades para elaborar proyectos en los que pueden intervenir departamentos de Geografía e Historia y Artes Plásticas. Hay numerosas publicaciones al respecto, me tomo la libertad de destacar el libro "Santander, mirar y ver…. matemáticas, arquitectura e historia" Ediciones Universidad de Cantabria que hace años escribimos un grupo de profesores de la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria. Y si con los alumnos preparamos un proyecto sobre el patrimonio del lugar, elaboramos un documento y organizamos un paseo con las madres, padres y abuelos en el que los alumnos explican lo que han estudiado sobre lo que vemos todos los días. Preciosa e enriquecedora actividad.

Podemos con las actividades del libro “Geometría del románico” y otras que podéis elaborar plantear un trabajo en colaboración del departamento de Historia. ¿Qué tal, en colaboración del departamento de clásicas, un estudio sobre los templos griegos?

En mis estancias en Castilla León descubrí unos edificios de adobe, en medio de los campos, que desde entonces me maravillan: los palomares. Desde el punto de vista de la arquitectura unas estructuras muy simples y desde el punto de vista geométrico muy rico. Bases circulares, elípticas, poligonales, con un, dos, tres niveles. Y desde el punto de vista de la geografía, de la agricultura y ganadería, de la gastronomía tienen elementos de gran interés. Elaborar un proyecto, involucrando todas estas facetas desde los distintos departamentos, convocando a las sociedades de Amigos de los Palomares se podría presentar un trabajo de gran interés cultural. Nosotros participaríamos en la modelización 3D de palomares. Una primera aproximación la tenéis en el capítulo “Palencia” con, por ahora, tres actividades muy sencillas “Un palomar simple”, “Sección de un palomar” y “Nichos de palomas”.

Modelizar en 3D

En mis recursos GeoGebra podéis ver numerosas actividades de modelización 3D, desde esculturas, puentes, arquitecturas, … podéis descargarlos y ver, en vista algebraica, como han sido construidos. Pero para un mejor aprendizaje he comenzado a elaborar el libro “Modelización 3D”. En él voy describiendo los pasos mas relevantes en el proceso constructivo. Las ecuaciones paramétricas de las curvas y de las superficies solo se escriben una vez. Seleccionar el texto de la ecuación, y con Ctrl+c lo llevamos a la barra de entrada y pegamos Ctrl+v. A continuación, basta con ir cambiando los valores de los parámetros que nos interese.

Nota Final

Mis recursos GeoGebra https://www.geogebra.org/u/ezq

Arte con geometría https://www.geogebra.org/m/z8nxqdfp

Taller de modelación 3D https://www.geogebra.org/m/gfq5uxkc

Por último, mi correo ezq1368@hotmail.com

Me hará muy feliz si algunos de vosotros/vosotras me plantea cualquier cuestión, mi jubilación me permite colaborar con quien desee elaborar proyectos sobre ver el arte con ayuda de la geometría.

Para hacer referencia al artículo:

Ezequiel Martínez Rosales (2022). GeoGebra para ver arte. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 13 - 15). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

MÚSICA = MATEMÁTICAS

David Hernández Benito

IES Julián Marías, Valladolid.

Resumen

Desde el descubrimiento de la escala occidental hasta los ritmos más complejos gracias a la aritmética básica. La composición como lienzo geométrico. De las funciones periódicas a los sintetizadores. De las matrices algebraicas a los secuenciadores. Los algoritmos como principal herramienta en la música actual: de autotune a la compresión y selección de Spotify y de cómo los datos han reemplazado a los instrumentos tradicionales a través del MIDI. Un recorrido por la historia de la música y las matemáticas en el que van de la mano Pitágoras y Motomami.

Palabras clave: *música, matemáticas, divulgación, Pitágoras, ritmo, geometría, composición, sintetizadores, algoritmos, secuenciadores.*

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas están presentes en todas las artes. Desde la pintura del renacimiento hasta las obras más abstractas del siglo XX, Kandinsky, Delaunay o Picasso. La escultura ha evolucionado hacia formas geométricas cada vez más puras, véanse las obras de Chillida u Oteiza o la famosa Cloud Gate de Anish Kapoor en Chicago. Sin matemáticas sería imposible montar una película o construir un edificio. Pero la música es el único arte con raíz plenamente matemática. Sin matemáticas, no habría música.

Cabe preguntarse entonces por qué hay tanta gente a la que le gusta la música (es difícil encontrar a alguien a quien no le guste) y a la vez tanta gente que odia las matemáticas. Pues a estos últimos yo siempre les digo, si te gusta la música, te gustan las matemáticas.

El gran compositor francés Claude Debussy decía que "La música es la aritmética de los sonidos" y el matemático alemán Gottfried Leibniz decía que "La música es el placer que experimente la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando".

LA ESCUELA PITAGÓRICA

Pitágoras descubrió la escala musical occidental y la relación entre las longitudes de una cuerda tensa que produce sonido al vibrar y las fracciones que producen las armonías. Vemos como simples multiplicaciones de fracciones se pueden construir todas las notas de la escala occidental.

La música y la aritmética se estudiaban de forma conjunta en la escuela pitagórica. Estaban tan obsesionados con el tema que creían que los planetas del sistema solar generaban vibraciones armónicas conocidas como música de las esferas.

Se cree que, durante uno de sus paseos en silencio, Pitágoras oyó a un herrero golpeando metal con un martillo. Cuando se acercó a la herrería pudo comprobar cómo al golpear piezas más largas el sonido era más grave y cuando se golpeaban piezas más cortas el sonido era más agudo. Tras este acontecimiento el maestro empezó a estudiar el comportamiento del sonido en otros materiales y objetos. Observó el sonido en campanas y cuencos de diferentes tamaños, hasta que decidió investigar el sonido que producía una cuerda tensa al vibrar.

Pitágoras comenzó dividiendo una cuerda por la mitad, percatándose de que al dividir la cuerda en dos partes exactamente iguales el sonido que se obtenía al hacerla vibrar era el mismo que emitía la cuerda suelta pero más agudo. A esto lo llamamos una octava. Es como si en un piano tocásemos primero un do, y después el siguiente do a la derecha de este. En todos los instrumentos de cuerda ocurre lo mismo. Si en una guitarra tocamos una cuerda al aire, sin colocar la mano en ningún traste, y después colocamos la mano en el traste que justo divide la cuerda por la mitad, las notas que oiremos serán las mismas, pero la primera más grave y la segunda más aguda. Esto ocurre porque la frecuencia a la que vibra la cuerda, cuando la dividimos por la mitad, se duplica.

$$\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{f_1} \cdot 2 \qquad \boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{f_2} \cdot \frac{1}{2}$$

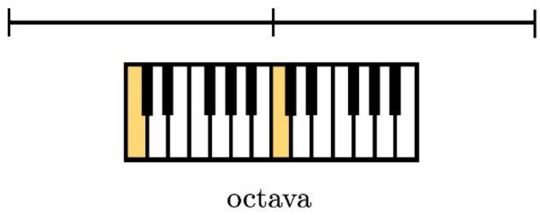


Figura 1. Octava y su frecuencia.

Pitágoras también observó que, si dividía la cuerda en tres partes y tocaba dejando dos de los tercios libres, es decir, haciendo vibrar la parte más larga, obtenía un sonido de quinta. Esto es como pasar de tocar un do a tocar el sol que está a su derecha y ocurre porque la frecuencia de la cuerda se multiplica por 3/2.

$$\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{f_1} \cdot \frac{3}{2} \qquad \boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{f_2} \cdot \frac{2}{3}$$

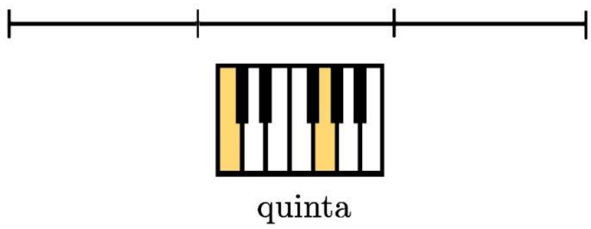


Figura 2. Quinta y su frecuencia.

Al dividir la cuerda en cuatro partes y dejar tres libres para que vibre, observó que obtenía un sonido de cuarta. Como pasar de tocar un do a tocar el fa de su derecha. La frecuencia, en este caso, queda multiplicada por 4/3.

$$\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{f_1} \cdot \frac{4}{3} \qquad \boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{f_2} \cdot \frac{3}{4}$$

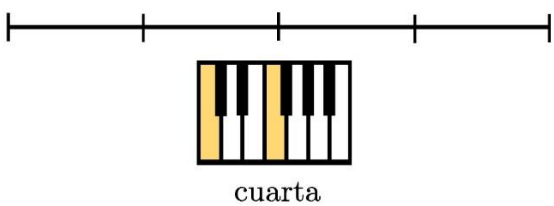


Figura 3. Cuarta y su frecuencia.

En principio, parece que Pitágoras consiguió construir las notas fundamentales de la escala musical que conocemos. Las armonías que se alcanzan con estas tres relaciones se utilizaron en la música occidental durante miles de años. De hecho, en la actualidad se sigue aprendiendo armonía con estos mismos conceptos. Pero, si solo tenemos cuatro notas (do, fa, sol, do) y una de ellas está repetida, ¿cómo logró Pitágoras construir el resto de las notas de la escala musical que conocemos?

Partimos del do fundamental, dividimos la cuerda en dos y obtenemos el do agudo. Es decir, duplicamos la frecuencia. Si dividimos la cuerda en cuatro y dejamos tres partes libres sabemos que obtenemos el fa, y si dividimos en tres y dejamos dos libres, el sol. La frecuencia ha sido multiplicada por 4/3 para fa y por 3/2 para sol. Si desde la nota de sol hacemos este mismo paso, es decir, multiplicar su frecuencia por 3/2, alcanzamos un re agudo, por encima del do agudo. Para conseguir el re de la escala original dividimos la frecuencia entre dos, o lo que es lo mismo, duplicamos la longitud de la cuerda, lo que nos da el re que está junto al do original. Repitiendo el proceso, multiplicando la frecuencia del re por 3/2, obtendríamos una quinta ascendente desde el re, es decir, un la. Y una quinta ascendente desde la nos daría un mi agudo. Si duplicamos la longitud de la cuerda, o dividimos la frecuencia entre dos, obtenemos el mi grave. Y, por último, multiplicando por 3/2 la frecuencia de mi se consigue la última nota: si. Ya hemos completado la octava más famosa solo con acortar o alargar una cuerda usando fracciones muy sencillas.

Hemos descubierto cómo obtener las notas do, re, mi, fa, sol, la y si. Y podríamos seguir fácilmente hacia arriba o hacia abajo, es decir, más agudo o grave, hasta construir todas las notas blancas de un piano entero, si tenemos las cuerdas suficientes, claro.

Pero ¿qué pasa con las teclas negras que hay entre algunas de las blancas en el piano? Estas notas son medios tonos, porque en realidad la escala convencional que utilizamos actualmente no tiene solo siete notas, tiene doce. Entre cada una hay medio tono de diferencia. Para conseguir estas notas con cuerdas y fracciones hay que hacer un proceso análogo al anterior. En este caso partimos del si, multiplicamos la frecuencia por 3/2 y obtenemos una quinta ascendente, que en este caso es una de las notas negras, el fa sostenido. Dividimos la frecuencia entre dos para obtener el fa sostenido de la escala inicial. Repitiendo este proceso varias veces llegaríamos a do sostenido, sol sostenido, re sostenido y por último la sostenido. Ya podemos construir un piano entero, con todas sus teclas blancas y negras, y todo gracias al ingenio de Pitágoras.

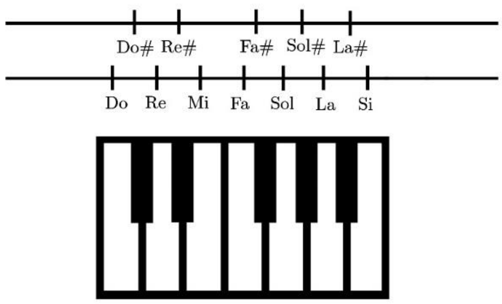


Figura 4. Notas musicales en una octava de un piano.

La relación de frecuencias vista con fracciones es fascinante, como podemos apreciar a continuación. Cada fracción se puede expresar simplemente con una relación de potencias de 2 y 3. Cada vez que tocamos el piano o cualquier otro instrumento estamos multiplicando y dividiendo fracciones a una velocidad a la que jamás hubiésemos pensado que seríamos capaces de hacerlo.

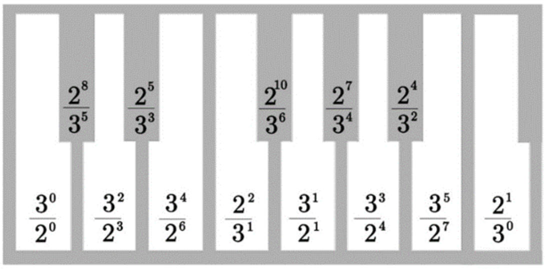


Figura 5. Notas como fracciones de potencias de 2 y 3.

EL RITMO

La relación entre el ritmo y las potencias de dos es clara. Tomando la unidad como duración de referencia de una negra vemos como el resto de las figuras de tiempo son potencias de dos.

Nombre	Figura	Duración
Redonda	𝅝	$2^2 = 4$
Blanca	𝅗𝅥	$2^1 = 2$
Negra	♩	$2^0 = 1$
Corchea	♪	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
Semicorchea	𝅘𝅥𝅯	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
Fusa	𝅘𝅥𝅰	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	$2^{-4} = \frac{1}{16}$
Garrapatea	𝅘𝅥𝅲	$2^{-5} = \frac{1}{32}$

Figura 6. El ritmo como potencias de 2.

El puntillo es una figura que prolonga un 50% la duración de la nota a la que va asociada planteado como sencillas ecuaciones de primer grado.

$$\boldsymbol{x\cdot = x + \frac{x}{2}}$$

$$\boldsymbol{x\cdot\cdot = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4}}$$

$$\boldsymbol{x\cdots = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8}}$$

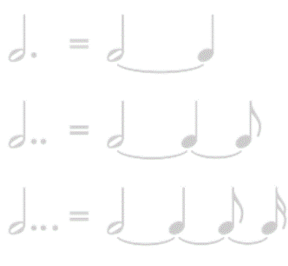


Figura 7. El puntillo como lenguaje algebraico.

Incluso el reguetón se construye con base matemática. Vemos como el ritmo básico de este estilo musical se compone siempre de una corchea con puntillo y una semicorchea seguidas de dos corcheas, es decir la suma de fracciones que va haciendo que se complete la unidad y las cuatro unidades de negra de un compás.

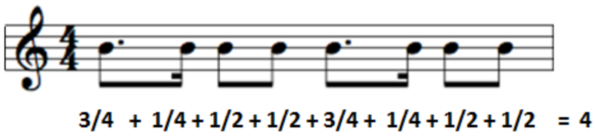


Figura 8. El reguetón como matemáticas.

GEOMETRÍA PARA COMPONER

En música se utilizan desde siempre simetrías y traslaciones para componer, tanto en canciones actuales como clásicas. Escuchamos música de *Bach*, *Mozart*, *Haendel*, *The Beatles*, *Fleet Foxes* o Rosalía. Se estructura en tres tipos de movimientos isométricos para componer:

· **TRASLACIÓN HORIZONTAL:** Ostinato y canon.

· **TRASLACIÓN VERTICAL:** Armonías.

· **REFLEXIÓN:** Composición en espejo e inversión de onda.

FUNCIONES, MATRICES Y ALGORITMOS

Cómo convertir en cualquier sonido una onda sinusoidal a través de la transformada de Fourier.

Una onda sinusoidal suena como se ve: suave y limpia. Es sonido en su forma más básica. Cualquier otra forma de onda se puede crear sumando una serie de ondas sinusoidales. Una onda cuadrada suena más rica y vibrante. También tiene aspecto diferente. Además de la fundamental, la onda cuadrada también contiene armónicos. Un armónico es una especie de tono parcial que es un múltiplo entero de una frecuencia fundamental. En una onda cuadrada, estos armónicos ocurren en múltiplos enteros impares de la frecuencia fundamental. La onda triangular contiene los mismos armónicos impares que una onda cuadrada. A diferencia de una onda cuadrada, disminuyen a medida que se alejan de la fundamental, dándole su forma. Parece una onda sinusoidal angular y suena entre una onda cuadrada y una onda sinusoidal. No es tan ruidoso como un cuadrado, pero tampoco tan suave como una onda sinusoidal. Suena más claro, tal vez incluso más brillante que una onda sinusoidal.

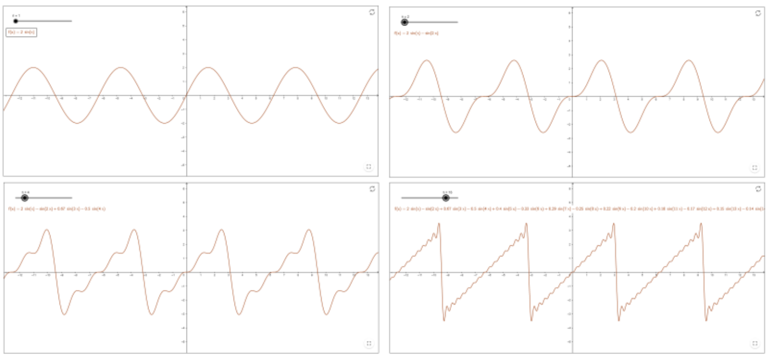


Figura 9. Conversión de onda sinusoidal en triangular.

Una onda de diente de sierra es mucho más irregular. Es el sonido con más zumbido de todos, incluso más áspero que una onda cuadrada, y eso se debe a que es el más rico en términos de armónicos. Es como el sonido de un arco arrastrándose a través de un violín.

La síntesis moderna es una combinación de varios motores y osciladores a la vez, además de múltiples efectos que confieren al sonido una riqueza y una variedad impresionante.

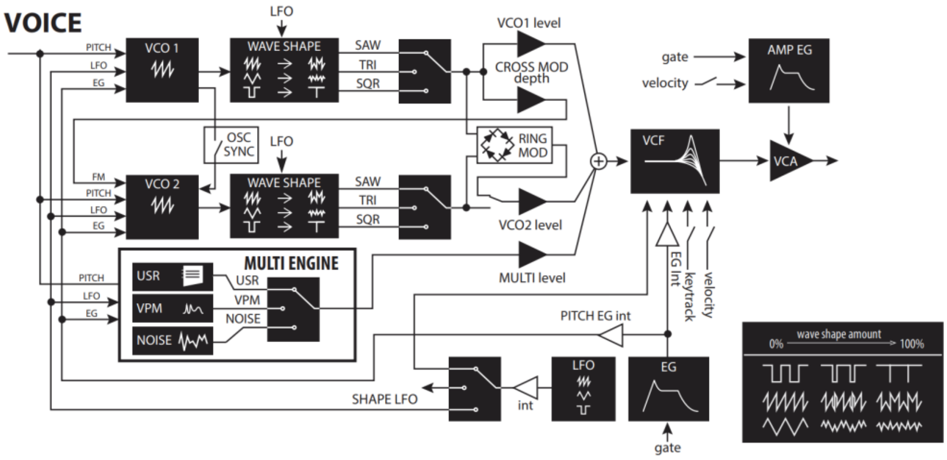


Figura 10. Síntesis moderna.

El MIDI (Musical Instrument Digital Interface) es un estándar técnico que describe un protocolo de comunicaciones, una interfaz digital y conectores eléctricos que conectan una amplia variedad de dispositivos de audio. Un solo cable MIDI puede transportar hasta dieciséis canales de datos MIDI, cada uno de los cuales se puede enrutar a un dispositivo separado. Cada interacción con una tecla, botón, o control deslizante se convierte en un evento MIDI, que especifica instrucciones musicales, como el tono, el tiempo y el volumen de una nota. Lo más común es tocar un teclado MIDI u otro controlador y usarlo para activar un sonido digital, por ejemplo, descargando una librería digital de la Orquesta Sinfónica de Berlín, con un simple teclado de 30 cm podemos hacer que toda la orquesta toque o grabe para nosotros. Como vemos en la imagen, cada nota que tocamos en el teclado MIDI transfiere los datos de intensidad y volumen, tono y duración de la nota, principalmente, que se traduce en este diagrama que es muy fácil de editar con el ratón de nuestro ordenador. El MIDI permite grabar partes técnicamente complejas de tocar de una forma muy sencilla, como si las dibujáramos en un lienzo.

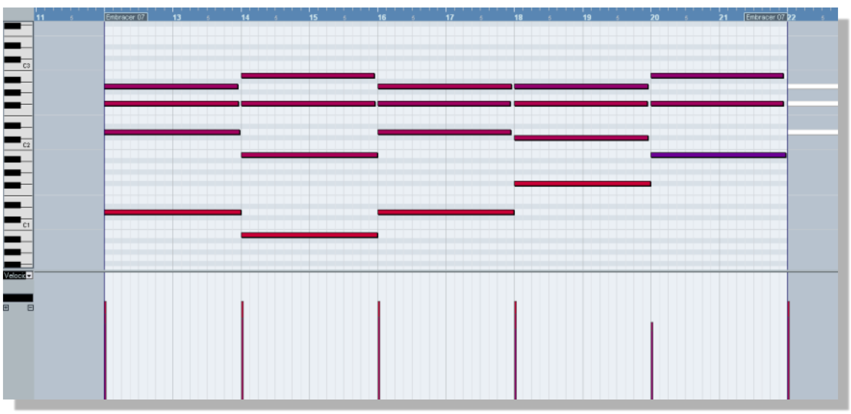


Figura 11. El MIDI.

Escuchamos la diferencia entre *vocoder* y *autotune* y entendemos el uso de los principales algoritmos que se utilizan en música, como el algoritmo de comprensión o el de selección. En la imagen vemos cómo reducir la pista de audio a la vez que vamos "cuadrando" las ondas de sonido. Esto hace que una canción que ocupa al menos un gigabyte en el estudio de grabación pueda convertirse en una pista de un megabyte para escuchar es *streaming* en *Spotify* o *iTunes* en cualquier parte del mundo.

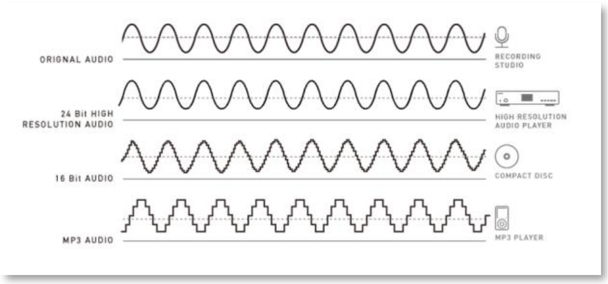


Figura 12. Compresión del sonido.

También vemos la diferencia entre un *vocoder* (sintetizador) y el *Autotune* (algoritmo). En la imagen vemos la onda de tono que genera un programa como autotune que se base en un algoritmo de afinación y que en estos últimos años se ha convertido en un recurso imprescindible en todas las grabaciones de audio.

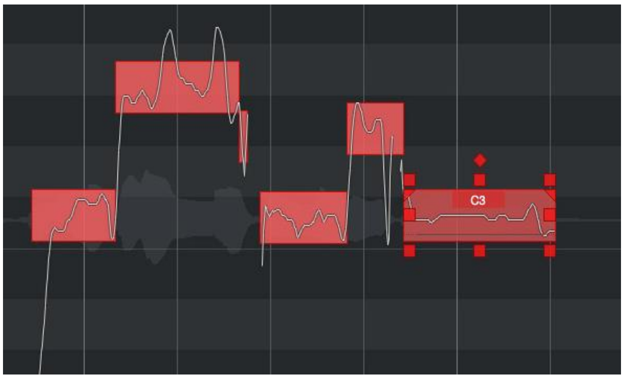


Figura 13. Onda de tono en *Autotune*.

La última sección se centra en explicar los secuenciadores, una herramienta de composición e interpretación cada vez más extendida y que se basa en matrices. Vemos un ejemplo como el de la imagen en el que cada elemento de la matriz representa un instrumento de una batería o caja de ritmos y que al ser sumados generan un ritmo muy complejo.

$$Lf\begin{pmatrix} Sb & 0 & b & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Sh & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \\ h & h & h & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Sn & 0 & 0 & n \\ n & 0 & n & n \\ 0 & Hf\cdot n & 0 & 0 \\ Hf\cdot n & 0 & Hf\cdot n & Hf\cdot n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S(Lf\cdot b+h+n) & h & Lf\cdot b+h & Lf\cdot b+h+n \\ Lf\cdot b+c+h+n & h & h+n & h+n \\ Lf\cdot b+h & n & h+Hf\cdot n & h \\ Lf\cdot b+Hf\cdot n+c+h & h & h+Hf\cdot n & h+Hf\cdot n \end{pmatrix}$$

Figura 14. Matrices de un secuenciador.

Acabamos con una letra de *The Beatles*, la mejor ecuación de todas:

In the end, the love you take is equal to the love you make.

CONCLUSIÓN

La música, incluso en su parte más técnica, es matemáticas. Hasta el detalle más puro de interpretación que podamos darle a una obra tiene su construcción matemática detrás. Leibniz y Debussy tenían razón, la música y las matemáticas son uno pero, sobre todo, hemos entendido que sin matemáticas no habría música.

REFERENCIAS

Arbonés, Javier, y Milrud, Pablo, Música y matemáticas, Madrid, National Geographic, 2018.

Burton, David M., The history of mathematics: an introduction, Nueva York, McGraw-Hill, 2011.

Cid, Lamberto, La sonrisa de Pitágoras: matemáticas para diletantes, Barcelona, Debolsillo, 2007.

Hofstadter, Douglas R., Godel, Escher, Bach, un eterno y grácil bucle, Barcelona, Tusquets Editores, 2015.

Para hacer referencia al artículo:

David Hernández Benito (2022). Música = Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 16 - 23). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

PLAN DE MEJORA DE LAS MATEMÁTICAS EN CASTILLA Y LEÓN: OFRECIENDO RESPUESTAS DESDE LA INNOVACIÓN, LA FORMACIÓN, LA INVESTIGACIÓN Y LA DINAMIZACIÓN DE LAS FAMILIAS[i]

José Mª Marbán[a], Matías Arce[a], Laura Conejo[a], Mª Astrid Cuida[a], Ana I. Maroto[a], Mª Luisa Novo[a], Andrés Palacios[a] y Belén Palop[a].

[a]Universidad de Valladolid

Resumen

La Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León lanzó en 2018 su Plan para la Mejora de las Matemáticas (PMM), combinando de forma notable tres ingredientes que, cada día bajo un consenso más amplio, es imprescindible considerar en todo proyecto educativo de calidad, a saber: innovación, investigación y evaluación. En esta ponencia se presentan, en primer lugar, algunos de los ejes y principios del PMM, con especial atención a cuatro iniciativas de innovación metodológicas puestas en marcha. En una segunda parte se compartirán algunas vivencias de centros y profesorado participante en las mismas. Finalmente, se realiza una síntesis de las principales conclusiones que pueden extraerse sobre el impacto de estas innovaciones en el contexto en que fueron puestas en marcha.

Palabras clave: *evaluación, innovación, investigación educativa, matemáticas, primaria.*

INTRODUCCIÓN

Somos conscientes de que, aún hoy en día, a pesar del impacto social que informes como PISA o TIMSS tienen en el plano local, nacional e internacional, el impacto socio-económico del éxito y del fracaso académico es difícil de medir y de comprender, sobre todo en términos de rentabilidad para quienes tienen la responsabilidad de elaborar e implementar las políticas públicas y las directrices de gasto público. De hecho, James Heckman, Premio Nobel de Economía 2000, afirma que el retorno de la inversión en individuos que recibieron educación temprana adecuada es de 8 a 1, y que las posibilidades de éxito de éstos en el plano personal, social y profesional son mayores, así como alto el beneficio social alcanzado al disminuirse indicadores negativos de criminalidad, delincuencia, violencia y fracaso escolar (Heckman, 2008). Una sociedad bien educada y competente matemáticamente es una sociedad potencialmente avanzada y productiva, siendo el apoyo a proyectos orientados a la mejora del rendimiento académico una buena forma de contribuir a este objetivo.

De todo ello se hizo eco en 2018 la Consejería de Educación, y lo hizo combinando de forma notable tres ingredientes que, cada día bajo un consenso más amplio, es imprescindible considerar en todo proyecto educativo de calidad, a saber: innovación, investigación y evaluación. Para ello, diseñó y puso en marcha un Plan para la Mejora de las Matemáticas enmarcado en un plan global más ambicioso de mejora de los resultados escolares, presentado el 18 de junio de 2018 (Figura 1), siendo

[i] La investigación que da origen a esta ponencia fue llevada a cabo por el Grupo de Investigación Reconocido “Educación Matemática” de la Universidad de Valladolid y financiada por la Junta de Castilla y León a través del contrato con número de expediente B2018-012412.

una de sus materializaciones la puesta en marcha de cuatro propuestas de innovación metodológica[ii] (en adelante denominadas pilotajes) en casi una treintena de centros escolares repartidos por toda la Comunidad Autónoma de Castilla y León bajo una idea de innovación que se ajustó, en gran medida, a la definición de innovación educativa de Juan Escudero, según la cual:

> Innovación educativa significa una batalla a la realidad tal cual es, a lo mecánico, rutinario y usual, a la fuerza de los hechos y al peso de la inercia. Supone, pues, una apuesta por lo colectivamente construido como deseable, por la imaginación creadora, por la transformación de lo existente. Reclama, en suma, la apertura de una rendija utópica en el seno de un sistema que, como el educativo, disfruta de un exceso de tradición, perpetuación y conservación del pasado. (…) innovación equivale, ha de equivaler, a un determinado clima en todo el sistema educativo que, desde la Administración hasta el profesorado y el alumnado, propicie la disposición a indagar, descubrir, reflexionar, criticar, …, cambiar. (Escudero, 1988, p. 86)

Figura 1. Plan de Mejora de Resultados Académicos. Fuente: Junta de Castilla y León.

Los resultados que se presentan en esta breve comunicación constituyen solo una minúscula parte de un extenso informe de resultados y atienden únicamente a ciertos aspectos cualitativos de la investigación para la evaluación de impacto de los pilotajes llevados a cabo, pero muestran, sin ningún género de dudas, el éxito de tales experiencias de innovación como reflejo de la intensidad con la que los centros, el profesorado y el propio alumnado implicado han luchado de forma encomiable contra la inercia, actuando, indagando, buscando fórmulas eficientes para facilitar el autoaprendizaje, creando un clima de superación conjunta de dificultades, etc.

En cuanto a la evaluación, cabe decir que este concepto ha experimentado un cambio conceptual y semántico muy destacable en los últimos años fruto, principalmente, de la creciente preocupación mostrada por las instituciones y la sociedad en general en relación con la educación y los medios para mejorar su calidad día a día. En el marco de evaluación de impacto de los cuatro pilotajes, el concepto fue entendido en el siguiente sentido:

> Proceso continuo, ordenado y sistemático de recogida de información cuantitativa y cualitativa que responda a ciertas exigencias –válida, dependiente, fiable, útil, precisa, viable, etc.-, obtenida a través

[ii] Hubo una quinta propuesta con características singulares, pues su foco estuvo principalmente en las familias, recurriendo a Smartick para mejorar su dominio afectivo en matemáticas, generar un clima de conversación matemática en el hogar entre padres o tutores e hijos y para fomentar roles asociados a labores de asesoría y motivación frente a roles tradicionales de control o monitoreo. Sus resultados no se incluyen en esta ponencia.

> de diversas técnicas e instrumentos, que tras ser cotejada o comparada con criterios establecidos nos permite emitir juicios de valor fundamentados que faciliten la toma de decisiones y que afecten al objeto evaluado.

En definitiva, se buscó, a través de cada paso de la evaluación, provocar un clima de discusión crítica que ayudase al propio proceso de innovación, esto es, como ya mencionamos anteriormente, ayudarle a que propiciase "… la disposición a indagar, descubrir, reflexionar, criticar, …, cambiar".

El camino para llevar a cabo el propósito que acabamos de enunciar consistió en seguir vestigios y en buscar evidencias, esto es, se recurrió a la investigación como proceso natural del avance científico, entendiendo ciencia, por un lado, como una forma de conocimiento a través de la observación y de razonamientos sistemáticamente estructurados y, por otro, como herramienta social, en este caso al servicio de una educación de calidad. Así, se partió de un diseño complejo de investigación que tuvo que adaptarse a las circunstancias y contingencias derivadas de la situación pandémica provocada por el COVID19, recurriendo al uso de enfoques tanto cuantitativos como cualitativos, al uso de instrumentos de toma de datos fiables, válidos y suficientemente contrastados partiendo del análisis del contexto en el que habrían de ser aplicados y, finalmente, de técnicas diversas de análisis de datos para facilitar una mejor comprensión de una realidad tan compleja como es la educativa, en general, y la que ha dado amparo y cobijo a los pilotajes evaluados, en particular.

LOS PILOTAJES

Como ya se ha comentado, entre las medidas que conforman el mencionado PMM se encuentra la que hace referencia al impulso de la formación del profesorado en metodologías innovadoras que impulsen el desarrollo de la competencia matemática. En particular, en el periodo comprendido entre el curso 2018-2019 y el curso 2020-2021 se pusieron en marcha cuatro experiencias de innovación en Infantil y Primaria (en casi todos los casos solo en sus dos primeros cursos), a las que hemos convenido en denominar "pilotajes", y que describimos a continuación de forma breve para destacar sus principales características:

Pilotaje JUMP-Math

Programa de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas creado por John Mighton y que busca optimizar tanto el rendimiento del alumnado como el desempeño del docente. El programa surgió como fruto del trabajo de un equipo multidisciplinar con amplia experiencia en educación matemática y que se definía a sí mismo como un equipo apasionado por las matemáticas. Actualmente, este programa se encuentra implantado en países como Canadá, Estados Unidos, Gran Bretaña, Bulgaria y España. Promovido por UpSocial, sus principios básicos son la adquisición de confianza, la práctica guiada, el descubrimiento guiado, la evaluación continua y a simple vista dentro del aula y la instrucción rigurosamente pautada[iii]. JUMP-Math (Figura 2) es una propuesta que pretende facilitar la generación de entornos de aprendizaje motivantes que permitan al alumnado desarrollar todo su potencial y que ayude al profesorado a maximizar su desarrollo profesional. Con este propósito en mente JUMP-Math propone un itinerario de enseñanza-aprendizaje que recorre el sistema desde los primeros años en la etapa de escolarización (Educación Infantil en España) hasta un nivel equivalente al octavo grado, 2º de la ESO en España. Esta propuesta aspira a facilitar una alfabetización matemática en el alumnado suficiente para abordar los retos que encontrarán tanto en entornos profesionales como personales o sociales, sin olvidarse de fortalecer la autoeficacia del docente facilitándole recursos orientados a conseguir alta calidad en la generación de climas ricos de aprendizaje matemático en las aulas.

[iii] https://JUMP-Math.es/ y https://upsocial.org/es/sic/soluciones/JUMP-Math

Figura 2. Logotipo de JumpMath. Fuente: https://jumpmath.es/es/

Pilotaje Piensa Infinito

La denominación Piensa Infinito corresponde a un proyecto editorial de SM que, en colaboración con la Universidad de Alcalá, ha elaborado libros de texto y materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas basados en la metodología utilizada en los centros educativos de Singapur.

El conocido como Método Singapur, de hecho, es una propuesta metodológica de enseñanza de las matemáticas que se apoya en evidencias que emanan de la investigación y que fue impulsada y avalada por el propio Ministerio de Educación de Singapur como respuesta a una necesidad social de mejora de la educación matemática en el ámbito escolar. Nace a principios de los años ochenta, siendo la base de las diferentes modificaciones posteriores de autores de diferentes países y sitúa la resolución de problemas en el centro de la actividad matemática en el aula, apoyando esta actividad en la argumentación, el aprendizaje cooperativo y la metacognición y prestando especial atención también a aspectos afectivos -en particular, actitudes- así como a la comprensión profunda de conceptos clave, al desarrollo de habilidades básicas y a los diferentes procesos que definen y describen la actividad matemática en diferentes contextos (Figura 3).

Figura 3. Elementos clave del método Singapur. Fuente: Elaboración propia

El Método Singapur, por otra parte, apoya su propuesta de enseñanza en la búsqueda de un cambio de la forma tradicional de enseñar matemáticas por una nueva que fomente el aprendizaje con el alumnado como protagonista del mismo y que parta de lo concreto hasta llegar al conocimiento de lo abstracto, inspirándose en el conocido como enfoque CPA (Concreto-Pictórico-Abstracto), para desarrollar una profunda comprensión de las matemáticas y permitir al alumnado enfrentar en mejores condiciones la resolución de problemas de la vida cotidiana. El enfoque CPA, por su parte, encuentra sus fundamentos en la teoría de Bruner (1984), quien estableció que, para conseguir una enseñanza que lleve a la comprensión profunda de un concepto, es preciso atravesar por los siguientes procesos: Enactivo-Icónico-Simbólico. Durante el primer paso de la terna anterior el alumnado debe usar material concreto, básicamente entendido como material palpable, real y cercano. En la segunda etapa, se debe invitar al alumnado a crear una representación gráfica de las relaciones entre cantidades o entre los procesos matemáticos subyacentes que resuelvan el reto o problema planteado. La tercera etapa enlaza los procesos anteriores con los algoritmos y formulaciones propios de la Matemática más abstracta.

Pilotaje NUMICON

Método de Matemáticas desarrollado por la editorial Oxford bajo el nombre comercial de NUMICON. El enfoque de NUMICON comenzó a desarrollarse por primera vez en 1996 (con financiación del gobierno del Reino Unido) por profesorado en ejercicio en las escuelas ordinarias como enfoque que apoyaría a niños de todas las edades y habilidades.

NUMICON es un enfoque que atiende de manera muy notable aspectos de la competencia matemática vinculados a la comunicación matemática, a la exploración de relaciones y conexiones y a los procesos de generalización. Así, como puede verse en la propia página principal del proyecto, se aborda, de manera particular, el uso de símbolos matemáticos por parte del alumnado mediante actividades y acciones de forma que, si se quedan atascados o dudan, siempre sea posible volver a las actividades e ilustraciones de apoyo de las que surgió la generalización. A su vez, NUMICON hace hincapié en que en aquellos casos en los que el alumnado tenga dudas o no sepa por dónde seguir, deben facilitársele recursos de apoyo basados en actividades e imágenes de partida que le permitan generalizar y hacer uso del simbolismo matemático. Al mismo tiempo, conectando con ideas propias de las teorías de autorregulación del aprendizaje, el método fomenta la perseverancia como actitud de gran relevancia en la actividad matemática, pero desde un enfoque comunicativo, con uno mismo y con los demás.

NUMICON se basa en un enfoque multisensorial (Figura 4) en el que los números se pueden ver y se pueden tocar, facilitando un puente entre lo abstracto y lo concreto. De esta forma, las matemáticas se palpan y se entienden y con ello se pretende ayudar al alumnado a entender la idea de número y las relaciones numéricas que se establecen entre diferentes entidades numéricas. Considera este método que, con el uso de su material, se facilita la conexión entre la imagen del número, su representación y su significado, todo ello desde un planteamiento lúdico que ayuda, además, a fortalecer la confianza en las propias capacidades del alumnado y haciendo que disfrute haciendo matemáticas.

Figura 4. Materiales NUMICON para Primaria. Fuente: http://www.NUMICON.es/primaria/index.php

Pilotaje ABN

No son pocos los trabajos que han constatado la importancia que tiene desarrollar el sentido numérico del alumnado desde edades tempranas para facilitar y alcanzar un conocimiento matemático rico y ciertamente comprensivo. Este desarrollo suele ir asociado, en particular, al aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas, generalmente mediante el uso de algoritmos tradicionales. Ante la controversia que plantea el uso abusivo de este tipo de algoritmos junto con sus dificultades y limitaciones, surge como alternativa la propuesta conocida como ABN (Abierto Basado en Números) (Figura 5) que plantea, de forma innovadora, un enfoque del cálculo más abierto y flexible, centrado en los conceptos de número y cantidad en lugar de hacerlo en el concepto de dígito. A su vez, ABN fomenta el desarrollo de estrategias propias de cálculo, el planteamiento de problemas y la argumentación al tiempo que establece puentes constantes entre las matemáticas escolares y las matemáticas de la vida cotidiana. Tal y como señala su creador, al tratarse de un método abierto, el alumnado puede llegar al resultado de formas muy diferentes y no existe una única forma de resolver las tareas planteadas por lo que, además de romper con las inercias y rigidez de los algoritmos tradicionales cerrados y basados en dígitos, otorga la posibilidad de adaptar el aprendizaje al progreso individual de cada alumna o alumno, fomentando así la motivación y la actitud positiva hacia la materia (Martínez-Montero y Sánchez, 2019).

Figura 5. Logotipo del método ABN. Fuente: https://algoritmosabn.blogspot.com/

El método ABN está siendo implantado en los centros educativos desde el curso 2008-2009 y ya en el año 2017 se constataba que "más de 200.000 escolares (alrededor de 8000 grupos-clase) estaban aprendiendo matemáticas con este procedimiento" (Aragón et al., 2017, p.56) en España.

ALGUNOS RESULTADOS

Se presentan ahora solo algunos de los resultados obtenidos y analizados a partir de la toma de datos de carácter cualitativo mediante grupos focales y entrevistas semiestructuradas, buscando mostrar la percepción de los propios centros y del profesorado sobre el impacto en su entorno de los pilotajes puestos en marcha, percepción que fue contrastada o complementada con todos los análisis de carácter cuantitativo y cualitativo que fueron ejecutados en el proceso de investigación completo. En todo caso, creemos que, teniendo en cuenta el espacio tan reducido habilitado para esta comunicación, estos resultados son la mejor opción a presentar ya que reflejan una visión única de la situación a través de los ojos de quienes han vivido el día a día de cada uno de los pilotajes.

Pilotaje JUMP-Math

La valoración general del método, en general, fue muy positiva y cumplió con las expectativas de todos sus protagonistas. Como puntos fuertes, centros y profesorado destacan que va de lo concreto a lo abstracto, que fomenta diferentes maneras de pensar y de resolver problemas y que las guías didácticas están muy bien estructuradas y sistematizadas, con múltiples ejemplos y ejercicios. También valoran que el método mejora la autonomía y el respeto por los diferentes ritmos de aprendizaje. Por otro lado, entre las críticas a la experiencia se señala que, en ocasiones, es demasiado repetitivo en su propuesta de actividades y que resulta complejo adaptar su secuenciación y propuesta curricular al currículo español y, en concreto, al de Castilla y León, señalando que, incluso, no contempla contenidos que se exigen en las pruebas diagnósticas de tercero. Vemos a continuación algunos extractos de las entrevistas llevadas a cabo con centros y profesorado participantes en este pilotaje:

> Hemos aprendido a trabajar de manera más lúdica y manipulativa y a motivar a los alumnos; una forma de ver la enseñanza distinta; más confianza en mí misma como docente
>
> Ahora son los niños los principales protagonistas de la práctica educativa, se acabaron las clases magistrales, intentamos que estructuren el conocimiento en su cabeza; ahora todo está más estructurado, más sistematizado, las clases ahora son más participativas, activas y dinámicas.
>
> Se han dado cuenta de que entienden las matemáticas y pueden aprenderlas, hay un cambio significativo en un alumno que parecía estar estancado, ahora se siente motivado e ilusionado; cambios en positivo y alta motivación, al estar pormenorizados los pasos hay una alta motivación y piden más dificultad; los alumnos con dificultades lingüísticas realizan bien la práctica porque las indicaciones son claras y concisas.

Piensa Infinito

En general, las opiniones sobre este programa, tanto desde el punto de vista de los centros, como del profesorado, son muy positivas. Destacan algunas de las características del programa como el uso de materiales, la autonomía que fomenta en el alumnado para ser protagonista de su propio aprendizaje, la riqueza de lenguaje matemático adquirida y la diversidad y flexibilidad mostrada en los procesos de resolución de problemas. A su vez, se constata un aumento en la motivación del alumnado, así como mejoras en el rendimiento académico de todo el alumnado, incluyendo a alumnos con dificultades de aprendizaje, junto con un claro desarrollo de la autonomía personal. Mostramos a continuación algunas opiniones que resumen el sentir de centros y profesorado involucrado en este pilotaje:

> Sí, se ha observado que todos los niños en general adquieren el mecanismo de las matemáticas, especialmente los niños con dificultades de aprendizaje o discapacidad. Además, alguno de los profesores que participa en el programa, e imparte clases en cursos superiores usando matemáticas tradicionales, cuando ve que los alumnos presentan dificultades en estas matemáticas, usa cosas de Singapur.
>
> Lo que sí hemos advertido es la evolución positiva de los alumnos, a pesar de las dificultades que se han acumulado en estos grupos; a final de curso se observa un cambio de actitud en la mayoría de los alumnos, mostrándose más motivados, disfrutando del aprendizaje y sintiéndose orgullosos de alcanzar la autonomía suficiente para poder realizar las actividades individuales.
>
> Cuando exploramos, los alumnos plantean diferentes soluciones; con el debate se dan muestras de respeto y colaboración, comparten conocimiento y trabajan en grupo; ha aumentado la participación, queriendo dar la solución; ha ayudado a argumentar y comunicar y también ha ayudado en situaciones disruptivas, disfrutan de las matemáticas.
>
> Sí hay mejora en la competencia matemática en cuanto a la creación de problemas; tienen más invención y creación de ejercicios y problemas, les resulta más natural la descomposición de números, los llamamos números conectados; ahora, además de resolver las tareas, son capaces de explicar cómo las han resuelto y tener en cuenta que hay varios métodos para resolver una misma tarea; mejoran en comprensión y razonamiento.

NUMICON

El profesorado considera que se han producido mejoras en el desarrollo de la competencia matemática del alumnado, destacando aquellas asociadas al trabajo cooperativo, al planteamiento y a la resolución de problemas y al cálculo mental. Centros y profesorado señalan que el alumnado se percibe ahora más capaz de aprender, más motivado y más seguro, viendo las matemáticas como un juego, lo que ha facilitado los procesos de aprendizaje asociados. La mejora en el rendimiento también es algo que destacan, sobre todo en el tiempo empleado en la resolución de problemas. En particular, se ven mejoras notables en alumnado con dificultades, no necesariamente de aprendizaje, sino también en otros casos como el de desconocimiento del idioma de impartición de la docencia en matemáticas o en situaciones asociadas a alguna discapacidad o trastorno del aprendizaje. Esto señalan como puntos fuertes:

> Mejora en la percepción de la capacidad de aprender; muy motivados y más seguros al trabajar las matemáticas, más en Infantil que en Primaria; lo ven como juego y eso facilita el aprendizaje; mejora en el tiempo de resolución de problemas porque hay visualización del resultado; mejora sobre todo en niños con algunas dificultades.
>
> NUMICON es de gran valor pedagógico, favorece el aprendizaje en todos los niveles y se adapta a las necesidades del alumnado y ritmos de trabajo; gusta mucho a los alumnos y eso les motiva.
>
> Su carácter manipulativo y visual; facilita el cálculo mental, descomposición, adquisición del concepto de número y asociarlo a su cantidad; facilita la resolución de problemas, numeración; el material.

ABN

Centros y profesorado participantes en este pilotaje han concebido el ABN como una mejora en su actividad en educación matemática, pues les ha aportado una forma distinta de trabajar las matemáticas mucho más flexible y más atractiva para el alumnado, si bien se apunta que ha requerido más dedicación y que precisa de formación continua. A su vez, señalan que las familias valoran la ventaja del método en cuanto a la agilidad de cálculo que perciben en sus hijos, aunque ven el inconveniente de no entenderlo en la mayoría de los casos pues requiere de una formación que en muchos casos no les llega o, si lo hace, no es siempre atendida por falta de motivación o tiempo. Veamos algunas opiniones significativas y representativas recogidas en las entrevistas:

> El mayor beneficio del método es observar una comprensión y manejo de los números que fomenta la competencia matemática del alumnado. Con esta mayor comprensión se observa, en el alumnado, una actitud mucho más positiva hacia las matemáticas. Para el profesorado ha supuesto un reto no sólo por el cambio, sino porque éste implica desaprender la forma de tratar las matemáticas (con la que se aprendió y con la que se ha estado enseñando) para concebirlas de manera diferente y transmitirlas. Para las familias, el reto no es tan grande, pero, aun así, ese proceso de entender las matemáticas de una forma diferente a la habitual también ha supuesto un reto.

> Ahora el libro es una herramienta más; utilizo mucho más material manipulativo que les permita dar el sentido del número, no solo de la cifra, palillos, tapones, material imprimible creado por nosotras o sacado de internet; la metodología es más activa, los alumnos aprenden jugando y comprenden lo que hacen, la manipulación permite entender el número.

CONCLUSIONES

Las conclusiones emanan de los datos y de su análisis, pero se presentan ahora más como evidencias de tendencias con carácter puramente exploratorio que como conclusiones sólidas. Así, todos los resultados obtenidos en la etapa prepandemia muestran tendencias muy positivas en todos y cada uno de los pilotajes, tanto en lo concerniente a aspectos cognitivos como en lo vinculado a aspectos afectivos. Destacan especialmente las mejoras en resolución de problemas, en el uso de estrategias más complejas y diversas, en los procesos de razonamiento y en su verbalización, en la comprensión de lo “que se hace”, en motivación, en clima de aula, en los niveles de participación activa, en capacidad para llevar a cabo trabajo cooperativo y en autopercepción de eficacia. Y todo ello teniendo en cuenta que la aplicación de los diferentes pilotajes fue muy diferente en función del centro de aplicación correspondiente, incluso entre centros dentro de un mismo pilotaje.

Dicho esto, es importante señalar que la implementación de un proyecto de innovación docente requiere de múltiples ciclos de planificación, acción, observación y reflexión. El apoyo que la administración educativa puede y debe brindar para facilitar que el proceso llegue a buen puerto ha de atender a las cuatro fases mencionadas. En particular, en el apartado de planificación, el profesorado requiere de formación inicial y continua, básica y avanzada, en el método y en sus principios pedagógicos subyacentes, así como en el diseño de tareas (en especial tareas ricas) en marcos inclusivos capaces de atender la diversidad en el aula en sus múltiples facetas. Para esto último se sugiere formación en la aplicación del Diseño Universal del Aprendizaje (DUA) al aula de matemáticas, en el conocimiento de las diferentes Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas (DAM), incluyendo trastornos del aprendizaje como la discalculia, y en el diseño de actividades interdisciplinares como, por ejemplo, las propias de enfoques STEAM.

Referencias

Aragón, E., Canto, M. C., Marchena, E., Navarro, J. I. y Aguilar, M. (2017). Cognitive Profile in Learning Mathematics with Open Calculation Based on Numbers (ABN) Algorithm//Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático con el método algoritmo abierto basado en números (ABN). *Revista de Psicodidáctica*, *22*(1), 54-59.

Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Alianza.

Escudero, J. (1988). *La innovación y la organización escolar*. Narcea.

Heckman J. (2008). Schools Skills and Synapses. NBER Working Papers 14064

Martínez-Montero, J., y Sánchez, C. (2019). *Enrichment of mathematical learning in preschool and primary school with the ABN method*. Pirámide.

Para hacer referencia al artículo:

Marbán, J. M., Arce, M., Conejo, L., Cuida, M. A., Maroto, A. I., Novo, M. L., Palacios, A. y Palop, B. (2022). Plan de Mejora de las Matemáticas en Castilla y León: Ofreciendo respuestas desde la innovación, la formación, la investigación y la dinamización de las familias. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 24 - 32). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

CÓMO ABORDAR EL ESTUDIO MATEMÁTICO DEL PATRIMONIO. MATEMÁTICAS PARA LA BELLEZA

Constantino de la Fuente Martínez

IES Cardenal López de Mendoza, Burgos

Resumen

El proceso de matematización, aplicado al estudio matemático de la Catedral de Burgos, ha permitido identificar algunos pasos específicos, conectados con la belleza, la armonía y el disfrute estético, que, junto con los habituales del proceso, constituyen una propuesta metodológica que puede ser utilizada con otros monumentos: a) cálculo de patrones dinámicos y enlaces orgánicos entre ellos; b) identificación de los ritmos arquitectónicos de armonía; c) disfrute de la significación interior del elemento analizado, así como de las resonancias lógicas y afectivas que llevan a la contemplación.

Una de las principales conclusiones es que, en el patrimonio artístico, material y tangible, existe un patrimonio matemático oculto, inmaterial e intangible, que forma parte de las bases que sustentan las sensaciones estéticas de armonía y belleza, que suscita la contemplación de la obra artística.

Palabras clave: *Catedral de Burgos, patrones dinámicos, ritmos arquitectónicos de armonía, euritmia.*

INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA DE LA SIGNIFICACIÓN INTERIOR.

El análisis matemático de cualquier objeto artístico debe tener, como pilares básicos, algunas reflexiones que fundamenten y enmarquen, por una parte, los problemas que se presentan en este tipo de estudio y, por otra, la necesaria coherencia, de los procesos de resolución y las soluciones que se encuentren, con el marco teórico inicial. En el contexto concreto de la Catedral de Burgos, hay un precedente de estudio matemático, de carácter didáctico, con propuestas para el aula (ESTALMAT, 2009) realizado por un grupo de profesores y profesoras del proyecto ESTALMAT de Castilla y León. Por tanto, para profundizar matemáticamente, es conveniente hacer explícito el marco teórico y el enfoque que va a tener el estudio.

Comenzaremos mencionando Hofstadter (1987, p. 646-647) con la idea de *"significación interior"* de la obra artística y Odifredi (2007, p. 180) con las relaciones entre matemáticas, armonía y arte. En cuanto a las relaciones entre el objeto artístico, en este caso las catedrales, y las matemáticas y, más concretamente, con la aritmética del número y la geometría de las formas, Hani (2000, p. 34) reflexiona sobre esta idea:

> La matemática del número, en su particular relación con la geometría, explica lo que le parece a primera vista inexplicable al admirador de las catedrales: la atmósfera sutil de esos edificios, cuya armonía es cuasi divina, así como la impresión de perfección que producen, no dependen de intenciones subjetivas, sentimiento religioso o afectividad del artista, sino de leyes objetivas que se apoyan en la geometría platónica transmitida a las organizaciones de los constructores. El elemento esencial era, para estos, la noción de relación y de proporción entre las distintas partes del edificio.

Desde un contexto más cercano a las matemáticas, Ghyka (1983) incide en algunos aspectos relacionados con la "*significación interior*" mencionada anteriormente; concretamente plantea que las formas de la naturaleza y las creadas por el artista suscitan en el observador "*resonancias lógicas o afectivas*", de forma que cuando la percepción de estas resonancias se hace consciente, "*practicamos la Estética o ciencia de las relaciones armoniosas."*

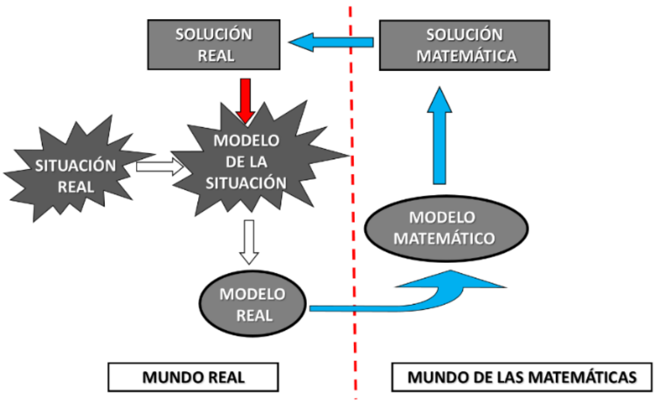
Comienza a aparecer la idea de "*armonía*", por lo que es adecuada una reflexión sobre este concepto, desde una perspectiva general, no restringida a la música. El poeta leonés Antonio Colinas (2010, p. 29) lo muestra acertadamente: *"...pasan los seres humanos y cambian las ideas que se impusieron como definitivas, a veces con leyes crueles, pero lo que siempre permanece es ese ritmo o fluir que todo lo rige. Fundir, en nuestro presente, ese fluir del mundo con nuestro propio fluir es la armonía."* Similares son las palabras de Ghyka (1998, p. 39) en las que plantea que el orden surgido del caos inicial se convierte en armonía, *"percibida esta como la consonancia entre el alma individual y el alma universal."*

Las ideas anteriores originan muchos interrogantes y permiten el planteamiento de un problema, que podemos enunciar de la siguiente forma: la Catedral, como objeto artístico, atesora, como resultado de su proceso de construcción, multitud de elementos arquitectónicos, escultóricos, etc. que suscitan en el visitante sensaciones y emociones difíciles de expresar. ¿Se puede aprehender la significación interior de la Catedral utilizando los conocimientos matemáticos? Por otra parte, asociado al problema anterior surge la natural cuestión metodológica: ¿qué proceso se puede desarrollar para conseguirlo?

MATEMATIZACIÓN Y PATRIMONIO HISTÓRICO-ARTÍSTICO: CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS.

La matematización es *el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real* (OCDE, 2004, p. 39). El esquema del mismo (Blum, 2005, p.20), evidencia las conexiones entre la realidad y las matemáticas.

Figura 1. El proceso de matematización.



En la Figura 1 se puede observar un esquema de las fases de la matematización, situándolas en su espacio específico, ya sea el mundo real o el mundo de las matemáticas.

Contextualizando el proceso dentro del mundo de las matemáticas, se puede caracterizar por medio de los siguientes pasos:

- Paso1. Es el punto de partida y consiste en la construcción de modelos matemáticos, mayoritariamente geométricos, que representen y describan la forma de los elementos a estudiar (recintos, bóvedas, bajorrelieves, arcos, frisos, rosetones, etc.). Para ello se utilizan diferentes herramientas tecnológicas, como programas de geometría dinámica (GeoGebra entre otros). De esta forma obtenemos las configuraciones geométricas que modelizan los elementos reales a analizar.

- Paso 2. Cálculo de los *patrones dinámicos*, números irracionales que subyacen en las proporciones de los elementos o motivos estudiados. Estos patrones representan los acordes o concordancias entre las distintas partes que configuran los motivos que se estudian. La combinación de *patrones dinámicos* (mediante operaciones elementales) conforman los *enlaces orgánicos* o *concatenaciones*, que contribuyen a la simetría y euritmia de la configuración geométrica.

- Paso 3. Tiene como objetivo analizar los cambios, repeticiones, recurrencias y descomposiciones de las formas y tamaños de las configuraciones geométricas, aflorando así los invariantes numéricos que rigen los cambios y variaciones de los acordes o *patrones dinámicos*. Se obtienen, de este modo, los denominados ritmos armoniosos de variación o *ritmos de armonía*, caracterizados por sucesiones numéricas (habitualmente progresiones geométricas) de *patrones dinámicos* y *enlaces orgánicos*.

La consecución de estos pasos permite obtener la solución matemática del problema. El traslado de la solución matemática al mundo real, permite, de forma general, evaluar su validez y sus limitaciones (como para cualquier otro modelo). Pero, en el estudio del patrimonio, se añaden unas características propias que constituyen un último paso:

- Paso 4. Una vez obtenida la solución real e interpretada en el contexto concreto, se obtiene una forma de acceder a la *significación interior* del objeto artístico, lo que permite disfrutar de las sensaciones de belleza, armonía, simetría, euritmia, etc. que el elemento estudiado nos transmite.

El uso exhaustivo del proceso de matematización en la catedral de Burgos, con los matices específicos presentados, permite llegar a disfrutar de una verdadera sinfonía matemática silente, con acordes, ritmos y movimientos que se extienden y esconden por toda la Catedral.

MODELOS, CONFIGURACIONES Y PATRONES DINÁMICOS.

Aplicando los pasos descritos anteriormente, una vez elegido el motivo a estudiar, se procede a la construcción del modelo o modelos geométricos, que lo representen, constituyendo éstos una primera aproximación matemática a las formas y configuraciones. De esta manera pueden comenzar a aflorar los primeros patrones dinámicos, los más elementales, asociados al motivo, que refuerzan las palabras de Jámblico (1991, p. 43): "*La primera esencia es la naturaleza de los números y proporciones que se extiende a través de todas las cosas, de acuerdo con los cuales, todo está armónicamente dispuesto y convenientemente ordenado."* Estas reflexiones resumen la idea principal de la escuela pitagórica: *todo es número* y el orden, la belleza y la armonía del cosmos se deben a él.

Debido a las limitaciones en la extensión del documento, se dan por conocidas algunas configuraciones geométricas como el rectángulo áureo e ideas elementales sobre el número de oro $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, centrando la atención en otras menos habituales, que presentamos a continuación.

Corte Sagrado.

La configuración denominada corte sagrado es un modelo geométrico que resuelve el problema del paso del cuadrado al octógono regular. Esta cuestión se presenta muy a menudo en cuanto se desea obtener una bóveda octogonal en un recinto de planta cuadrada. En la Catedral hay cortes sagrados en varias capillas y recintos, destacando los de la Capilla de la Presentación, la de los Condestables y el Cimborrio. En la Figura 2 se puede observar el modelo geométrico del corte sagrado del Cimborrio, con las trompas que conforman los cuatro triángulos rectángulos interiores al cuadrado y exteriores al octógono regular.

Considerando el lado del cuadrado igual a la unidad de medida, se obtiene fácilmente que: los arcos trazados desde cada vértice tienen por radio la mitad de la diagonal, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la longitud del lado del octógono regular resultante es $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, que es el inverso del número de plata $\boldsymbol{\theta = \sqrt{2} + 1}$. Intervienen, por tanto, varios patrones dinámicos, todos relacionados con $\sqrt{\mathbf{2}}$.

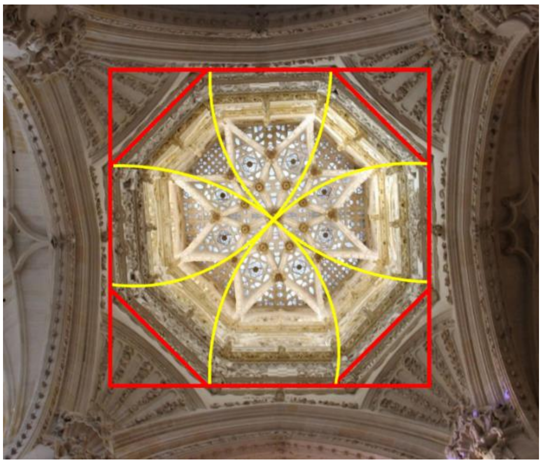


Figura 2. Corte sagrado en el Cimborrio.

Polígonos estrellados y estrellas.

Los polígonos estrellados y estrellas son abundantes en la Catedral y constituyen unas configuraciones geométricas elementales, que se pueden estudiar con matemáticas muy elementales.

La Figura 3A es un ejemplo de polígono estrellado 8/3 en la bóveda de la capilla de la Presentación. En este caso, si el lado del octógono regular es la unidad, el del octógono estrellado 8/3 es igual al número de plata $\theta = \sqrt{2} + 1$.

Esta bóveda, calada en su parte central, contiene también una estrella formada por dos cuadrados yuxtapuestos, obtenidos al recorrer todos los vértices del octógono, saltando de dos en dos vértices; es decir, que esta estrella proviene del polígono estrellado 8/2. Puede observarse el modelo geométrico en la Figura 3B.

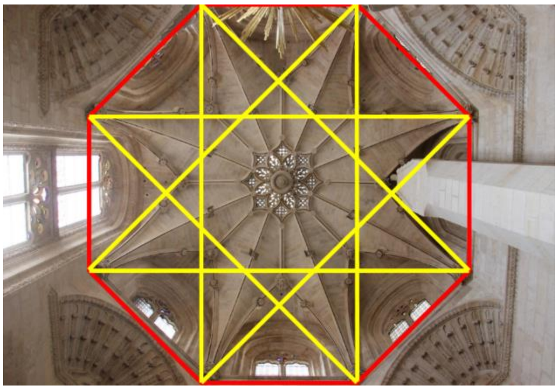


Fig 3A. Polígono estrellado 8/3

Fig 3B. Estrella (dos cuadrados yuxtapuestos)

***Vesica piscis*, Mandorla o Almendra**

Esta simbólica configuración es la región común a dos círculos en los que el centro de cada uno es un punto perteneciente a la circunferencia del otro.

Como puede verse en la Figura 4, perteneciente a un friso situado en la capilla de los Condestables, el patrón dinámico asociado es $\sqrt{3}$, que representa la razón $\frac{AB}{CD}$; es decir que $\frac{AB}{CD} = \sqrt{3}$. En el caso en que el radio de las circunferencias sea la unidad; es decir, que $CD = 1$, entonces $AB = \sqrt{3}$. Es interesante resaltar el simbolismo de la *vesica piscis* en los inicios del cristianismo, y su utilización en otros elementos de la Catedral: como elemento decorativo de algunos arcos de la capilla de los Condestables, en el altar de la capilla Mayor y en el situado en la capilla de San Nicolás. Por último, señalar que la mitad superior de la *vesica piscis* coincide, simbólicamente, con el arco ojival equilátero, estando esta configuración en la raíz y origen del arco ojival elemental.

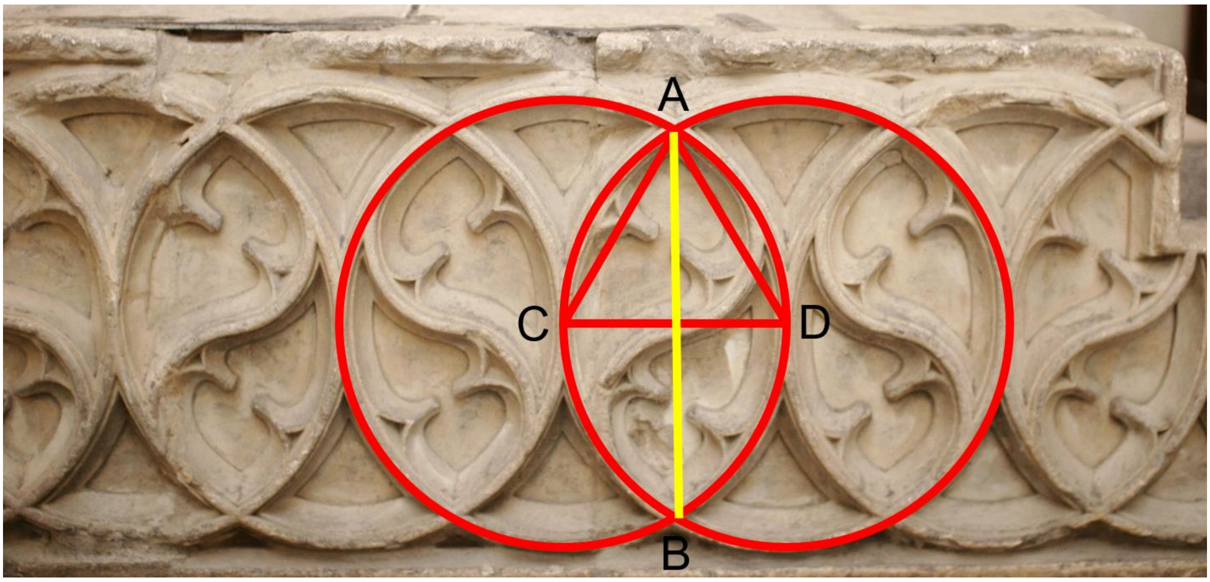
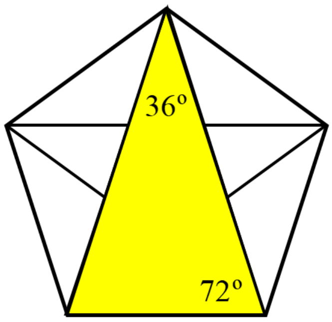


Figura 4. Modelo geométrico de la *vesica piscis*

Triángulo sublime o áureo.

El triángulo sublime se puede obtener a partir de dos configuraciones geométricas: a partir de un pentágono regular o desde un decágono regular.



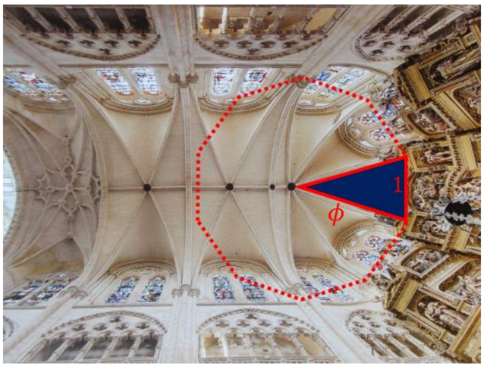


Figura 5A. T. Áureo en pentágono regular. Figura 5B. T. áureo en decágono regular.

En el primero de los casos, en un pentágono regular, se obtiene al trazar las diagonales y considerar el triángulo formado un lado del pentágono y las dos diagonales que, partiendo de los extremos del lado considerado, confluyen en un mismo vértice (Figura 5A). Esta es la forma más conocida, ya que interviene la estrella pitagórica, símbolo de la Hermandad, formada por las diagonales del pentágono regular. El ángulo de la base es 72° y el desigual 36°. Además, la razón entre los lados distintos es el patrón dinámico más famoso: la proporción áurea, $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

En el segundo de los casos, en un decágono regular, es el triángulo isósceles que se obtiene al unir el centro del polígono con dos vértices consecutivos. En la Figura 5B, de la parte alta de la capilla Mayor de la Catedral, se observa que los ventanales de la cabecera forman cinco lados consecutivos de un decágono regular, por lo que los triángulos que se forman con un vértice en el centro del decágono son sublimes o áureos.

Triángulo dorado.

El triángulo dorado es el modelo geométrico que se obtiene a partir de dos rectángulos áureos que comparten una región rectangular que también es un rectángulo áureo. En la Figura 6 se observa que las agujas de la Catedral responden, con bastante exactitud, a esta configuración geométrica. Para profundizar en esta cuestión puede acudirse a De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 124-126 y 134-140). En ella, tomando como medidas de los lados de los rectángulos 1 y $\emptyset$, teniendo en cuenta las propiedades de la proporción áurea: $1+\frac{1}{\emptyset}=\emptyset$ y $1+\emptyset=\emptyset^2$ se obtienen los resultados de la Figura 6.

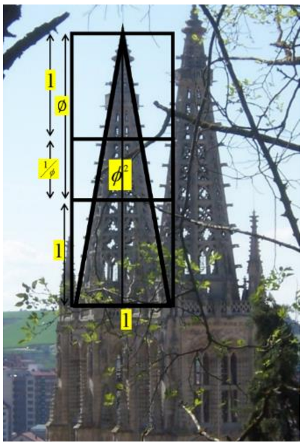


Figura 6. Triángulo Dorado o de Calvimont

Como se puede ver en la Figura 6, la razón entre la altura del triángulo y su base es $\emptyset^2$, que es la propiedad que lo define y caracteriza.

RITMOS DE ARMONÍA.

En primer lugar es necesario aclarar el concepto de ritmo en el contexto artístico-matemático. A este respecto Ghyka (1968, p. 42) lo expone con claridad:

> Pensando en las nociones de número, razón y proporción hemos llegado del modo más natural a la noción de ritmo: periodicidad o recurrencia en el tiempo o en el espacio, que fluye orgánicamente de una cadena de acordes o de proporciones.

Ghyka plantea que el ritmo fluye orgánicamente a partir de una recurrencia de acordes (en el contexto musical) o de proporciones en el espacio (en el contexto artístico bidimensional o tridimensional); es decir, la repetición periódica o recurrente (por medio de sucesiones, descomposiciones, semejanzas, movimientos, etc.) de concordancias entre magnitudes (razones, proporciones, patrones dinámicos, etc.), con los criterios o condiciones que el artista establezca, da lugar a cambios y transformaciones. Las leyes o criterios que rigen esos cambios conforman las bases del ritmo que se percibe, haciendo que tome forma la *significación interior* de la obra artística.

Por otra parte, aunque no hay principio fundamental para el diseño satisfactorio, una de las ideas más atractivas utilizadas para generar sensaciones estéticas, en la construcción de las catedrales, ha sido la repetición de figuras geométricas similares, lo que genera un *ritmo arquitectónico* (Pedoe, 1976).

En la Catedral hay ritmos generados por:

- Modificaciones o transformaciones (crecimiento, igualdad o decrecimiento) de una forma o figura inicial. El caso de la igualdad suele concretarse, por ejemplo, en frisos, muy abundantes en capillas, rejería, etc. En los otros casos, las variaciones se manifiestan en cambios de tamaño, manteniendo relaciones de analogía, semejanza, etc. con la figura primera. Estos cambios generan recurrencias regidas por patrones dinámicos que juegan el papel de invariantes y que contribuyen a generar también distintos *ritmos*.

- Descomposición de una figura por subdivisión en fragmentos, de forma que entre ellos y entre estos y el conjunto se mantienen las mismas relaciones de proporcionalidad y analogía. Este tipo de cualidades son características de la *simetría*, en el sentido clásico de su acepción, y de la *euritmia*:

> La simetría consiste en el acorde de medidas entre los diversos elementos de la obra y entre estos elementos separados y el conjunto. Como en el cuerpo humano, surge de la proporción –la que los griegos llaman analogía– y está reglamentada por el módulo, el marco de medida común –que los griegos llaman el número–. Cuando cada parte importante del edificio está, además, convenientemente proporcionada en razón al acorde entre lo alto y lo ancho, entre lo ancho y lo profundo, y cuando todas estas partes tienen también su lugar en la simetría total del edificio, obtenemos la euritmia.
>
> La euritmia aparece cuando esta simetría se obtiene por el encadenamiento continuo de las proporciones y la analogía recurrente.

Las reflexiones anteriores, de Vitruvio (1997, libro 1, p.10), ilustran el sentido clásico y primario de la simetría, el carácter orgánico de las construcciones, el significado de la *euritmia* y su relación con la idea de *ritmo*.

Concretando la idea, un primer ejemplo de ritmo puede ser el ritmo áureo; es decir, el que está regido por la proporción áurea, que se concreta en la sucesión de las potencias sucesivas del número de oro:

$$1, \emptyset, \emptyset^2, \dots, \emptyset^n, \dots$$

También puede venir dado por la misma con exponentes enteros:

$$1, \emptyset^{-1}, \emptyset^{-2}, \dots, \emptyset^{-n}, \dots$$

La de exponentes naturales para los cambios con aumento o crecimiento y la de exponentes enteros para las variaciones con disminución de decrecimiento. Como se verá en los ejemplos, todo depende de la unidad de medida tomada como referencia.

Observando la primera de ellas, esta sucesión tiene propiedades notables: a) multiplicativas, ya que es una progresión geométrica de razón $\emptyset$, de crecimiento exponencial; b) sumativas o aritméticas, pues cada término (a partir del tercero) es igual a la suma de los dos anteriores; es decir, que si $n \geq 3$ se cumple que $\emptyset^n = \emptyset^{n-1} + \emptyset^{n-2}$

Esta última propiedad es común con la *sucesión de Fibonacci*:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

en esta se cumple que si $n \geq 3$ entonces $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, como en la anterior, y además $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \emptyset$; es decir, que la sucesión de Fibonacci se acerca, asintóticamente, a la del ritmo áureo.

En las líneas que siguen se mostrarán también otros ritmos de armonía, que se identificarán en algunos recintos o motivos de la Catedral.

La Cabecera.

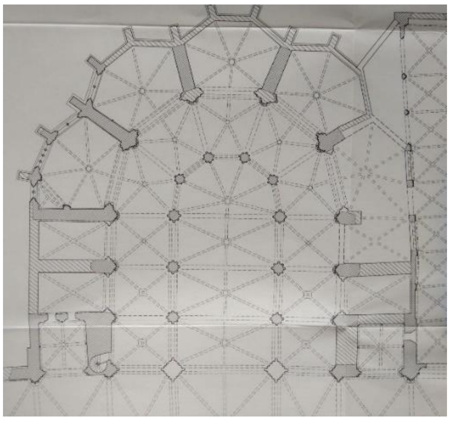


Figura 8A. Cabecera de la Catedral

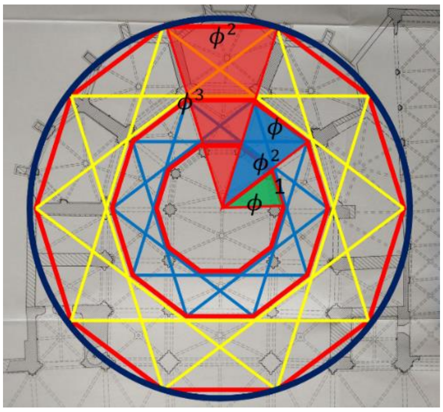


Figura 8B. Modelo geométrico y ritmo de la Cabecera

El conjunto formado por la capilla Mayor, girola y capillas radiales originales configuran un espacio poligonal abierto, de cinco lados, que se puede completar imaginariamente, para hacerlo decagonal (en la Figura 5B se puede ver el que se forma en la capilla Mayor). Utilizando como base los planos (Figura 8A) de Karge (1995), se puede visualizar el modelo geométrico (Figura 8B) consistente en tres decágonos regulares anidados, con decágonos estrellados 10/3 en dos de ellos, y los *triángulos áureos* o *sublimes* de cada decágono regular.

El análisis de las dimensiones, permite confirmar la presencia de varias potencias sucesivas de $\emptyset$. Concretamente, considerando como unidad de medida el lado del decágono regular asociado a la capilla Mayor (las paredes donde se sitúa el retablo mayor), las longitudes de varios de los elementos del conjunto se configuran en varios términos de la sucesión: $1, \emptyset, \emptyset^2, \emptyset^3$

Por tanto, el ritmo de armonía de la Cabecera es áureo, conteniendo cuatro potencias sucesivas de $\emptyset$.

Bóveda calada del Cimborrio.

El Cimborrio renacentista (Figura 10A) es el verdadero centro cosmológico de la Catedral y el ritmo de su bóveda calada plana viene dado por la manera en que varían los octógonos regulares y estrellados anidados que la configuran (en la Figura 10B se pueden ver junto con el corte sagrado). En la Figura 2 se aprecia esta última configuración, que permite el paso de la planta cuadrada al octógono.

Figura 10A. Bóveda calada del Cimborrio

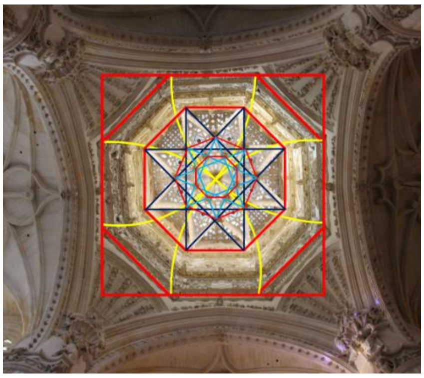


Figura 10B. Corte sagrado y octógonos estrellados

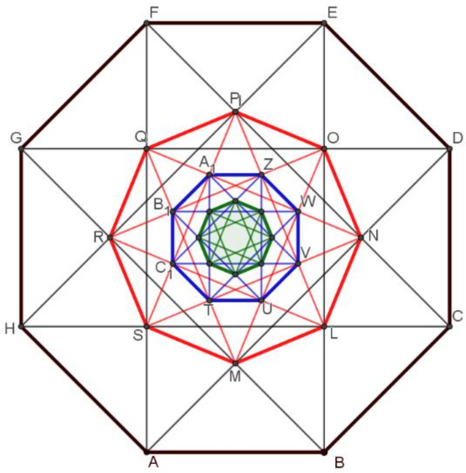


Fig 11. Modelo: octógonos regulares y estrellados

El análisis matemático del modelo de la Figura 11 permite descubrir que el ritmo de los lados, $EF, NO, WZ, \ldots$, de los octógonos regulares queda caracterizado por la progresión geométrica:

$$l, \quad l \cdot \frac{c}{\theta}, \quad l \cdot \left(\frac{c}{\theta}\right)^2, \; l \cdot \left(\frac{c}{\theta}\right)^3, \ldots$$

donde l es el lado EF del octógono regular exterior, $c = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ es la proporción cordobesa, y $\theta = 1 + \sqrt{2}$ es el número de plata. Si se considera $EF = 1$, unidad de medida, la sucesión anterior queda:

$$1,\quad \frac{c}{\theta},\quad \left(\frac{c}{\theta}\right)^2,\ \left(\frac{c}{\theta}\right)^3,\ldots$$

Para un desarrollo más detallado de estos resultados, puede verse en De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 297-305).

En cuanto al ritmo de armonía de los lados $CF, OR, UZ,$ ..., de los octógonos estrellados, sus longitudes siguen la progresión:

$$l\cdot\theta,\quad l\cdot c,\quad l\cdot\frac{c^2}{\theta},\quad l\cdot\frac{c^3}{\theta^2},\ldots$$

En el caso en que se considere que $l = 1$ resulta:

$$\theta,\quad c,\quad \frac{c^2}{\theta},\quad \frac{c^3}{\theta^2},\ldots$$

La razón de las progresiones es $\frac{c}{\theta}$, que constituye un *enlace orgánico* de estos dos patrones dinámicos, la proporción cordobesa y el número de plata. Estas sucesiones explican y justifican, matemáticamente, los *ecos mudéjares* del Cimborrio, una idea muy comentada por los expertos en arte. También son ejes vertebradores de las sensaciones de dinamismo, simetría, armonía y belleza que transmite esta maravillosa bóveda calada.

Escalera Dorada

El estudio de la Escalera Dorada (Figura 12A), obra maestra del Renacimiento, muestra sorprendentes resultados, uno de los más singulares, sin duda, es el ritmo de armonía, que se obtiene por descomposición de la forma principal, y no por recurrencia y repetición de formas como en los ritmos anteriormente estudiados.

Fig 12A. Escalera Dorada

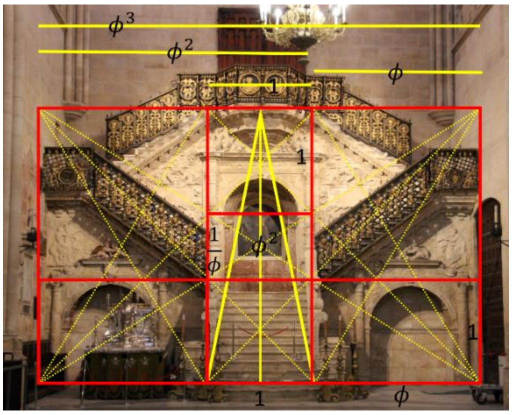


Fig 12B. Modelo geométrico y ritmo de armonía

La escalera responde a la configuración de un gran rectángulo áureo (Figura 12B). Utilizando el *método de las diagonales* de Hambidge, para descomponer armoniosamente el rectángulo, se obtiene que las partes resultantes varian siguiendo el ritmo áureo de armonía; concretamente, tomando como unidad de medida la anchura del primer tramo de escalones, se pueden observar (Figura 12B) cinco potencias sucesivas del número de oro, que corresponden a distintas partes de esta impresionante construcción:

$$\frac{1}{\Phi},\quad 1,\quad \Phi,\quad \Phi^2,\quad \Phi^3$$

Este resultado da una idea de la *armonía* y *simetría* (en sentido clásico) de esta escalera, así como de los *acordes* (en el sentido de *concordancias*) que relacionan unos elementos (partes de ella) con otros, produciendo un ritmo áureo característico del Renacimiento. En De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 349-360) pueden consultarse otros aspectos matemáticos de la Escalera Dorada.

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados presentados en la Ponencia, una pequeña muestra de los *Tesoros Matemáticos de la Catedral de Burgos,* permite extraer las siguientes conclusiones:

- El estudio ha permitido aflorar el inmenso patrimonio matemático de la Catedral, intangible, oculto y casi ignorado hasta ahora. Este patrimonio constituye una forma más de acercarse y admirar la Seo, junto con los enfoques histórico, artístico, religioso y social, y debe ser puesto en valor, para conocimiento y disfrute de la sociedad.

- Los patrones dinámicos y los ritmos de armonía contribuyen, de manera inequívoca, a que los elementos observados, por el visitante sensible, susciten en él *resonancias afectivas o lógicas* (de belleza, armonía, simetría, euritmia, etc.) que eran unos de los objetivos perseguidos por los artistas con sus creaciones. Además también ayudan a descubrir, de una manera argumentada, la *significación interna* de la Catedral, reconociendo que esta significación se basa en *leyes objetivas de la Aritmética y la Geometría* y no tanto en *intenciones subjetivas*, *sentimiento religioso o afectividad del artista.*

- El análisis matemático de la Catedral tiene gran aprovechamiento didáctico en todos los niveles educativos. Es una forma de que el profesorado de matemáticas acerque a sus estudiantes a contextos de la realidad que contribuyen a que sean conscientes del inmenso valor y potencia de esta ciencia.

- Los pasos del proceso de matematización constituyen una metodología válida y eficaz para el estudio matemático del patrimonio en general, no sólo de la Catedral de Burgos.

BIBLIOGRAFÍA

- Blum, W. (2005). “Filling Up”–the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, p. 17-21. San Feliu de Guixols.

- De la Fuente Martínez, C y otros (2021) *Tesoros Matemáticos de la catedral de Burgos.* Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*, Burgos.

- ESTALMAT, Grupo (2009). *Matemáticas en la Catedral de Burgos.* Caja Círculo, Burgos

- Ghyka, M. C. (1968) *El Número de Oro*. *Los ritmos.* Poseidón, Barcelona

- Jámblico (1991) *Vida Pitagórica*. Torrejón de Ardoz. Etnos, Madrid.

- Karge, H. (1995). *La Catedral de Burgos y la Arquitectura del siglo XIII en Francia y España*. Junta de Castilla y León. Consejería de Cultura y Turismo, Valladolid

- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En Gagatsis, A., Papastavridis, S. (Edit), *3er Mediterranean Conference on Mathematical Education.* Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, p. 115-124. Atenas, Grecia.

- OCDE (2004). *Marcos Teóricos PISA 2003.* Ed. MEC-inecse, Madrid.

- Odifredi, P. (2007). *Pluma, pincel y batuta. Las tres envidias del matemático.* Alianza Editorial, Madrid.

- Vitruvio Polion, M. (1997). *Los diez libros de Arquitectura*. Alianza Editorial, Madrid.

Para hacer referencia al artículo:

Constantino de la Fuente Martínez (2022). Cómo abordar el estudio matemático del patrimonio artístico. Matemáticas para la belleza. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 33 - 42). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

GEOGEBRA Y LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

Jose Manuel Arranz. IES Álvaro de Mendaña. Ponferrada. León.

Resumen

El legado de la escuela pitagórica hizo que la matemática griega estuviera dedicada casi exclusivamente al estudio de la Geometría. Mediante construcciones con regla y compás los griegos establecieron todas las proposiciones geométricas. La regla y el compás resultaron ser insuficientes para la resolución de lo que se conoce como los tres problemas clásicos:

Duplicación del cubo, construir un cubo que tenga el doble del volumen que un cubo dado.

Trisección de un ángulo, dividir un ángulo arbitrario en tres ángulos de igual amplitud.

Cuadratura del círculo, construir un cuadrado de igual área que un círculo dado.

La búsqueda de soluciones a estos tres problemas ha dejado múltiples descubrimientos y avances en las matemáticas: el estudio de cónicas y las curvas mecánicas entre otros.

La imposibilidad de las tres construcciones con regla y compás fue establecida en el siglo XIX.

Palabras clave: *matemáticas, geometría, geogebra.*

Con ayuda del software GeoGebra se muestran algunas de las soluciones exactas mediane el uso de curvas, así como construcciones aproximadas con regla y compás que los matemáticos han diseñado en este largo viaje de más de dos mil años. Las imágenes que aparecen en el artículo se han realizado con GeoGebra, y desde ellas se accede a la construcción dinámica que se estudia en cada caso. También, desde https://www.geogebra.org/m/hux9uzqd se accede al libro completo creado como complemento que incluye más construcciones vinculadas a los tres problemas.

DUPLICACIÓN DEL CUBO.

En el año 429 a.C. ocurría en Atenas una terrible epidemia de peste. Cuenta la leyenda que, ante la impotencia para combatirla, los atenienses consultaron el oráculo del dios Apolo, cuyo altar se encontraba en la isla de Delos. Éste mandó duplicar el volumen del altar de Apolo, que tenía la forma de un cubo, dando origen al problema de la duplicación del cubo.

Seguramente el origen del problema fue bien diferente. Los geómetras griegos conocían perfectamente técnicas para duplicar el área de figuras planas, basta multiplicar sus dimensiones por $\sqrt{2}$, aplicando el teorema de la altura para conseguirlo. La imagen muestra un procedimiento de construir un cuadrado y un círculo de área doble que el inicial.

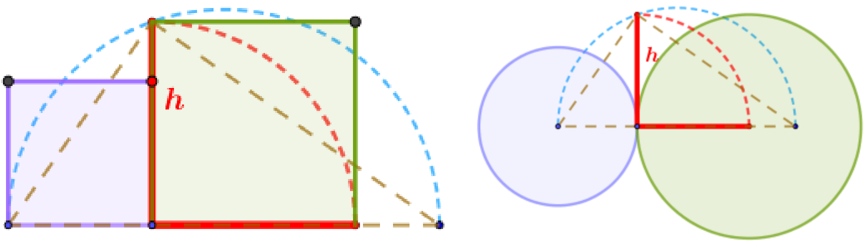


Figura 2. Duplicación de figuras planas.

Resuelto el problema de la duplicación en el plano, los geómetras griegos intentan la solución en el espacio, dado un cubo de volumen V, construir un cubo cuyo volumen sea 2V.

Hipócrates de Chios, (470 a.C-410 a. C)

Hipócrates demuestra que el problema de duplicación del cubo se reduce a encontrar dos medias proporcionales x e y tales que: $a/x = x/y = y/2a$. De donde $x = \sqrt[3]{2}$ y por tanto la solución del problema.

No hay registros de construcción de medias proporcionales por Hipócrates, seguramente no llegó a realizarlo.

Se describen a continuación algunas de las soluciones más relevantes planteadas por los geómetras griegos utilizando las medias proporcionales formuladas por Hipócrates.

Mecanismo de Platón. No es seguro que sea el conocido filósofo.

Dispositivo mecánico que resuelve el problema de las medias proporcionales. El mecanismo consiste en dos reglas paralelas, una fija y otra móvil, imagen de la izquierda.

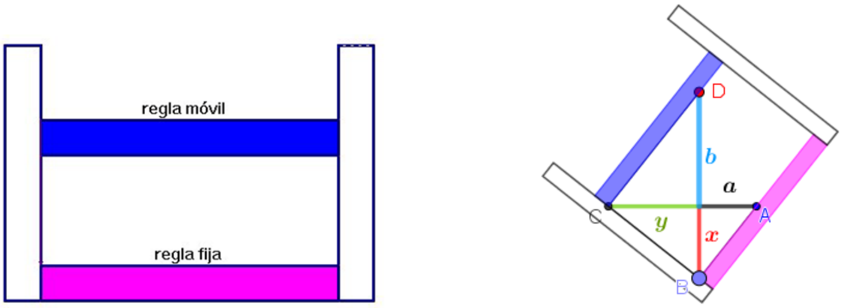


Figura 2. Mecanismo de Platón.

Situando el dispositivo en la posición que se muestra en la imagen de la derecha, por semejanza de triángulos, $a/x = x/y = y/b$. Si se consigue que $b = 2a$, se resuelve el problema. La simulación con GeoGebra demuestra la imposibilidad de lograr de forma exacta esta situación. Si es posible una aproximación tan grande como se desee.

Mesolabio de Eratóstenes (275 a. C – 194 a. C.)

Eratóstenes diseña un sencillo mecanismo que resuelve el problema de la duplicación. Los triángulos pueden desplazarse horizontalmente. Si se sitúan los triángulos en la posición que se indica en la imagen de la derecha, con los cuatro puntos destacados alineados, entonces la medida del segmento x, es la solución que permite duplicar el cubo. Aplicando el teorema de Tales, se tiene: $a/x = x/y = y/2a$.

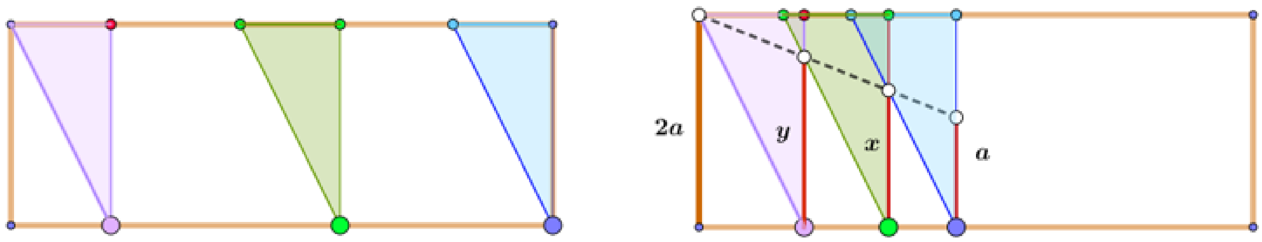


Figura 3. Mesolabio de Eratóstenes.

Aunque teóricamente es posible la disposición que se muestra, la manipulación de la construcción demuestra que no es tan sencillo como puede parecer a la vista de la imagen.

Arquitas de Tarento (430 a. C – 360 a. C.)

Arquitas da una de las soluciones más ingeniosas y complejas para su tiempo. La intersección de un toro, un cilindro recto y un cono, es la media proporcional que resuelve el problema. Las siguientes imágenes muestran la disposición de estas figuras tridimensionales y la traslación del problema al plano. El segmento AD es la medida que resuelve la duplicación.

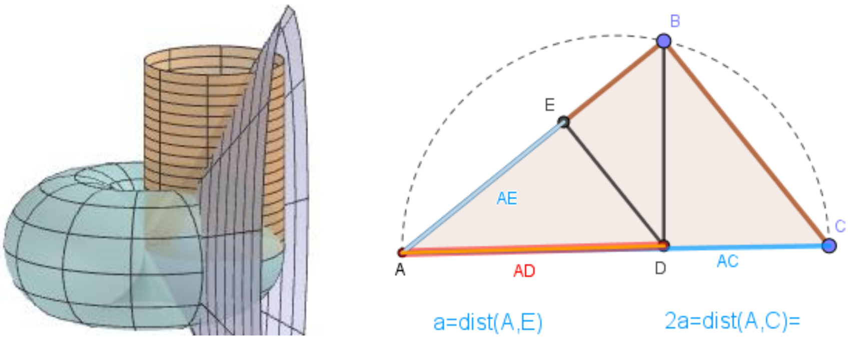


Figura 4. Esquema de la solución de Arquitas.

Cónicas de Menecmo (374 a. C – 325 a. C.)

Menecmo estudia las cónicas (como intersección de un cono y un plano) para resolver el problema de la duplicación del cubo. Su razonamiento, con la notación actual es bastante sencillo:

$a/x = x/y = y/2$a. De estas igualdades se obtiene: $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$; $xy = 2a^2$. Las dos primeras expresiones son parábolas e hipérbola la tercera expresión. Despejando x de cualquier par de estas ecuaciones, se obtiene $x = \sqrt[3]{2}$, esto es, las tres curvas tienen un punto en común, que resuelve el problema de obtener un cubo de volumen doble que el cubo inicial.

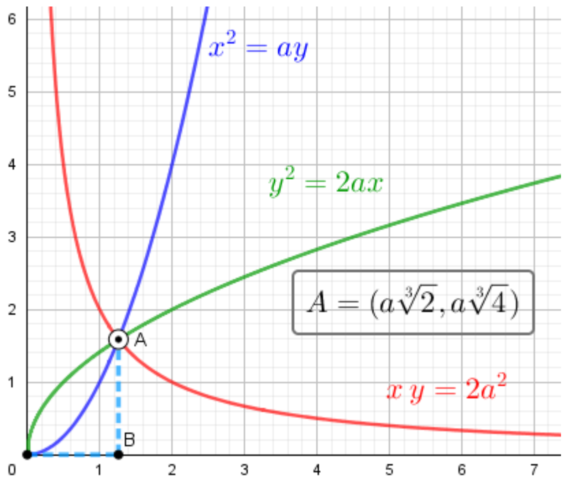


Figura 5. Cónicas de Menecmo para a=1.

La intersección de estas cónicas resuelve de forma exacta y sencilla el problema de la duplicación del cubo, pero estas curvas no pueden construirse globalmente con regla y compas.

¿Cómo es posible que hace más de dos mil años, Menecmo, imaginando estas curvas como cortes de un cono recto, llegara a esta conclusión? Se ha especulado la posibilidad de que Menecmo tuviese conocimientos más allá de la geometría clásica.

Curvas mecánicas.

Se denominan curvas mecánicas a aquellas que se generan por movimiento de un punto, habitualmente intersección de dos rectas, recta y circunferencia o dos circunferencias en movimiento.

Muchas de estas curvas mecánicas fueron diseñadas con el objetivo de resolver alguno de los problemas clásicos. Se muestran a continuación dos de las curvas creadas en la antigüedad para resolver el problema que nos ocupa, la duplicación del cubo.

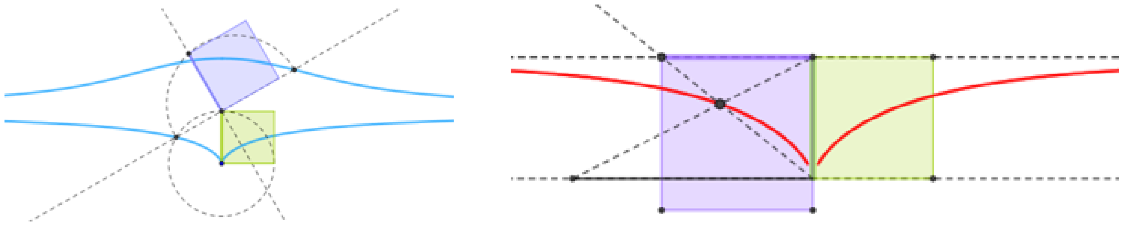


Figura 6. Concoide de Nicomedes y Cisoide de Diocles.

Apolonio de Perga (262 a. C – 190 a. C.)

Apolonio, conocido como el gran geómetra, plantea una solución tan sencilla como brillante, que únicamente precisa de un rectángulo para su demostración.

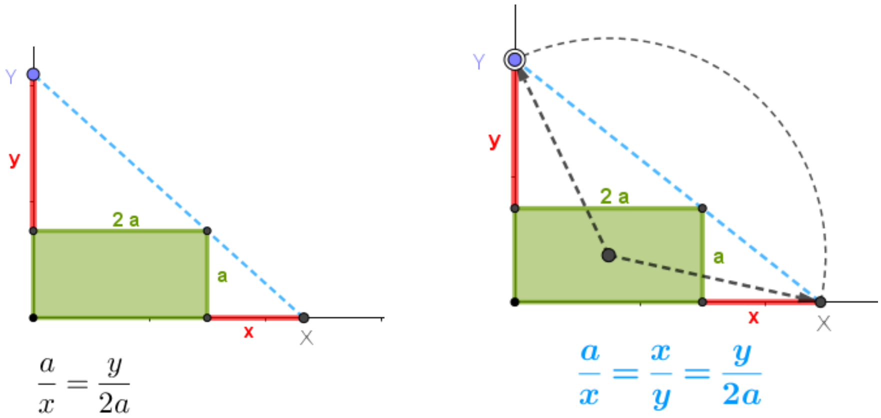


Figura 7. Solución de Apolonio para duplicar el cubo.

Sobre un rectángulo de dimensiones a y 2a, se hace la construcción de la imagen de la izquierda, pudiendo desplazarse el punto Y verticalmente. En cualquier posición de este punto se verifica que $a/x = y/2a$. Apolonio afirma que, si se sitúan X e Y de forma que estén a igual distancia del centro del rectángulo, entonces x e y son las medias proporcionales que resuelven la duplicación del cubo, como se muestra en la imagen de la derecha. La demostración es sencilla, basta aplicar el teorema de Pitágoras. Aunque pueda parecer lo contrario, no es posible determinar la posición exacta de los puntos X e Y utilizando únicamente regla y compás.

TRISECCIÓN DEL ÁNGULO

Como ya se ha indicado, el problema consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos de igual amplitud, utilizando únicamente una regla sin marcas y un compás, en un número finito de pasos.

El problema tiene matices que lo diferencian de los otros dos problemas. Ningún cubo puede duplicarse, ningún círculo puede cuadrarse, pero hay ángulos que sí pueden trisecarse. Dado un ángulo cualquiera, es inmediato construir con regla y compás un ángulo de amplitud tres veces mayor.

No está claro el origen del problema, ni hay leyenda que acompañe su nacimiento. Parece lógico pensar que, conocidas las técnicas geométricas para bisecar un ángulo, el afán investigador de los antiguos geómetras les impulsara a intentar dividir el ángulo en tres partes iguales.

Algunos ángulos trisecables

Es bien conocida la trisección del ángulo recto, y si un ángulo es trisecable, lo es su ángulo mitad.

Una forma de conseguir otros ángulos trisecables es a partir de polígonos regulares construibles. No todo polígono regular puede construirse con regla y compás. Gauss estableció la condición suficiente, ligada a números primos de Fermat, para que un polígono regular pueda construirse, y posteriormente Wantzel completó el teorema.

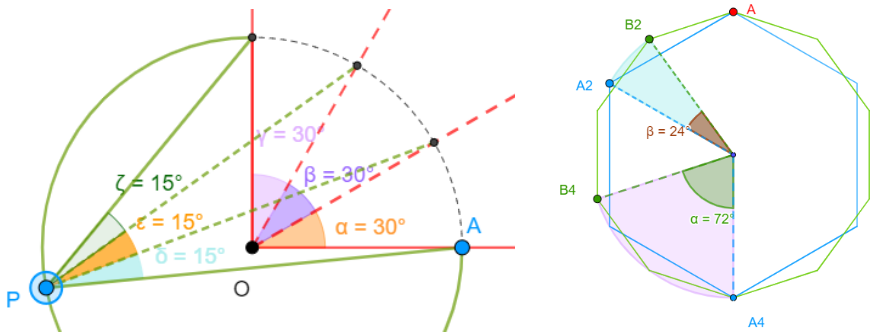


Figura 8. Ángulos trisecables.

Trisectriz de Hipias (443 a.C-399 a.C.)

Primera curva mecánica, no construible con regla y compás, creada con objeto de trisecar el ángulo. Si A recorre el lado del cuadrado en el mismo tiempo que B un cuarto de circunferencia, se obtiene esta curva mecánica.

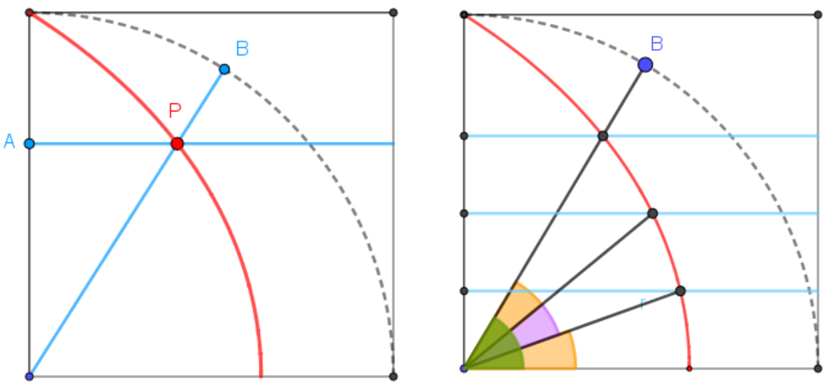


Figura 9. Trisectriz de Hipias y trisección del ángulo.

La trisectriz permite dividir un ángulo en un número cualquiera de partes iguales. Esta curva, también permite cuadrar el círculo.

Método de regla marcada

Conocido también como método Neusis, fue utilizado por Arquímedes para trisecar el ángulo. Consiste en hacer dos marcas sobre una regla a una distancia previamente fijada, de forma que los triángulos AOC y OCP sean isósceles. El uso de regla marcada sobrepasa las normas de regla y compás establecidas en el canon de la geometría griega.

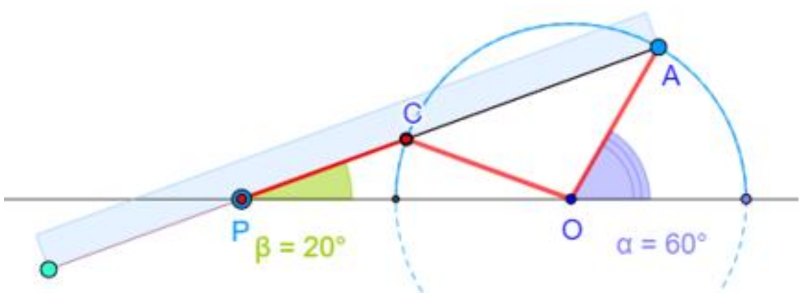


Figura 10. Trisección con regla marcada.

Espiral de Arquímedes (287 a. C-212 a. C.)

Arquímedes diseña la espiral que lleva su nombre como forma de resolver el problema de la trisección del ángulo. Se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante.

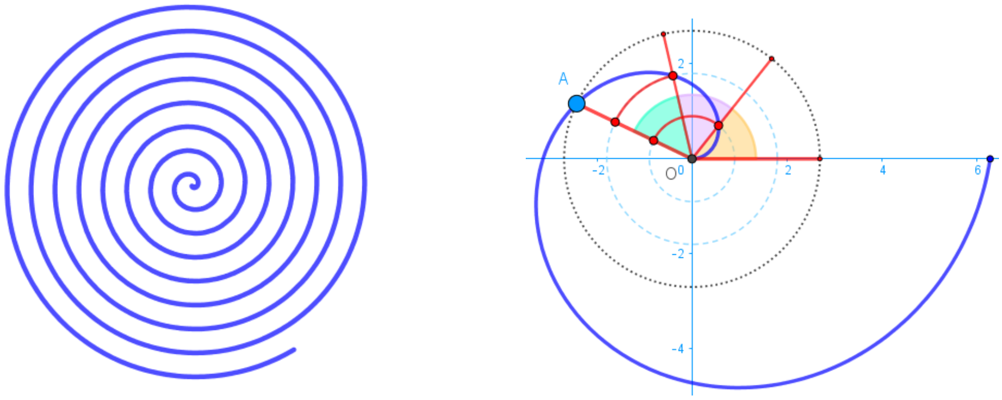


Figura 11. Espiral de Arquímedes. Primera vuelta de espiral y trisección del ángulo.

Esta curva mecánica, creada por el genio de Siracusa, permite dividir un ángulo en un número cualquiera de partes, y como se verá en el siguiente bloque también la cuadratura del círculo.

Otras curvas mecánicas que trisecan el ángulo

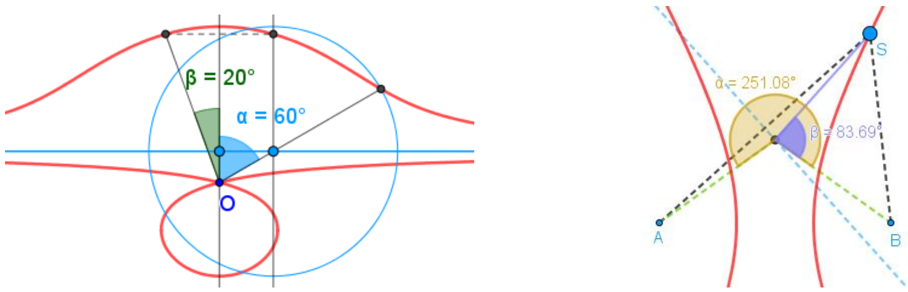


Figura 12. Concoide de Nicomedes e hipérbola de Pappus

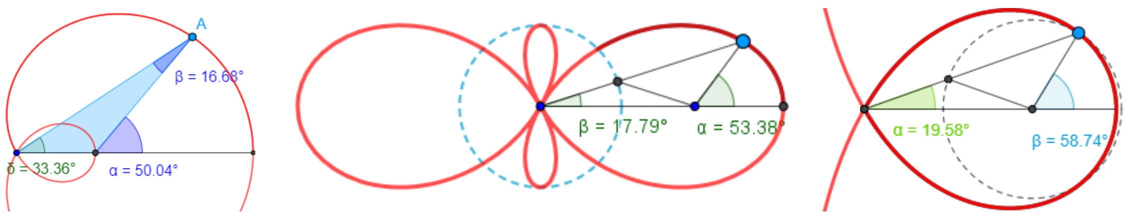


Figura 13. Caracol de Pascal, Trisectriz de Ceva y Trisectriz de Maclaurin.

CUADRATURA DEL CÍRCULO

El problema geométrico consiste en construir un cuadrado de igual área que un círculo dado, utilizando únicamente regla y compás. El problema es equivalente al de rectificación de la circunferencia, esto es, construir un segmento recto de igual longitud que una circunferencia dada.

Los antiguos griegos conocían procedimientos para cuadrar el rectángulo, el triángulo y cualquier polígono, por descomposición en triángulos.

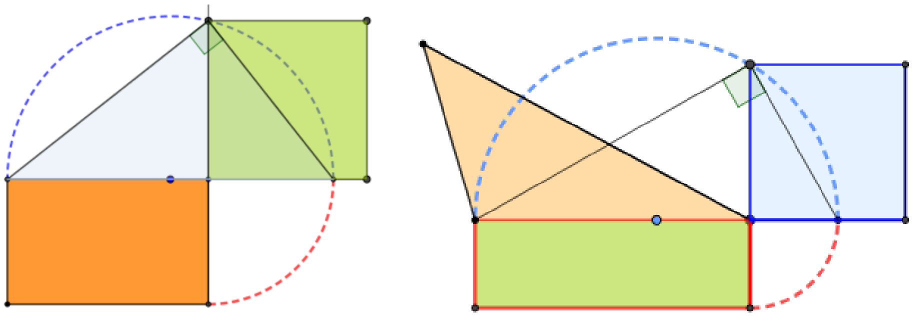


Figura 14. Cuadratura de rectángulo y triángulo.

El afán investigador de los antiguos geómetras seguramente fue el motivo de intentar cuadrar figuras delimitadas por curvas, el objetivo es cuadrar el círculo.

Cuadratura de lúnulas

Una lúnula puede definirse como la región cóncava limitada por dos arcos de circunferencia. Hipócrates demostró que el área de la lúnula construida sobre el cateto de un triángulo rectángulo e isósceles es igual al área del triángulo. Basta demostrar que el área de la lúnula más el área del segmento circular es igual al área del triángulo más el área del segmento circular.

Alhacen (945-1040) con argumentos similares a los de Hipócrates cuadra las lúnulas construidas sobre un triángulo rectángulo cualquiera.

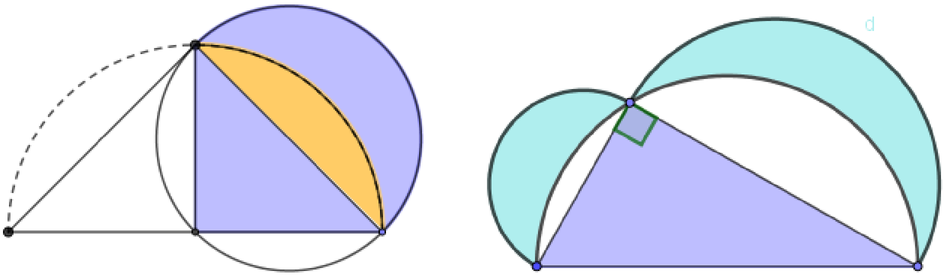


Figura 15. Lúnulas de Hipócrates y Alhacén.

Posteriormente Euler demostró la cuadratura de otras lúnulas, y no fue hasta el siglo XX cuando se demostró que únicamente hay cinco lúnulas que pueden cuadrarse.

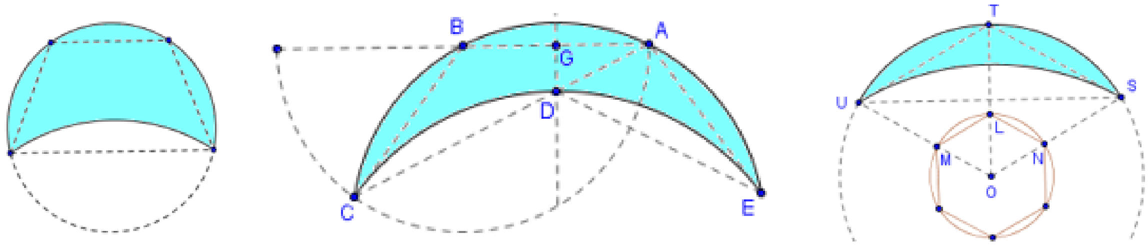


Figura 16. Lúnulas que pueden cuadrarse.

A pesar de los prometedores éxitos logrados al cuadrar lúnulas, la cuadratura del círculo se intuía imposible mediante el uso de las herramientas clásicas. La solución, como en los otros dos problemas, se obtiene mediante las curvas mecánicas.

Cuadatriz de Hipias

Unos cien años después de la construcción de la trisectriz de Hipias, Dinostrato demuestra que esta curva permite también cuadrar el círculo, de ahí que también sea conocida como cuadratriz de Hipias. Si el cuadrado sobre el que se construye la curva tiene lado de medida 1, entonces el punto P está a distancia $2/\pi$, lo que posibilita la cuadratura.

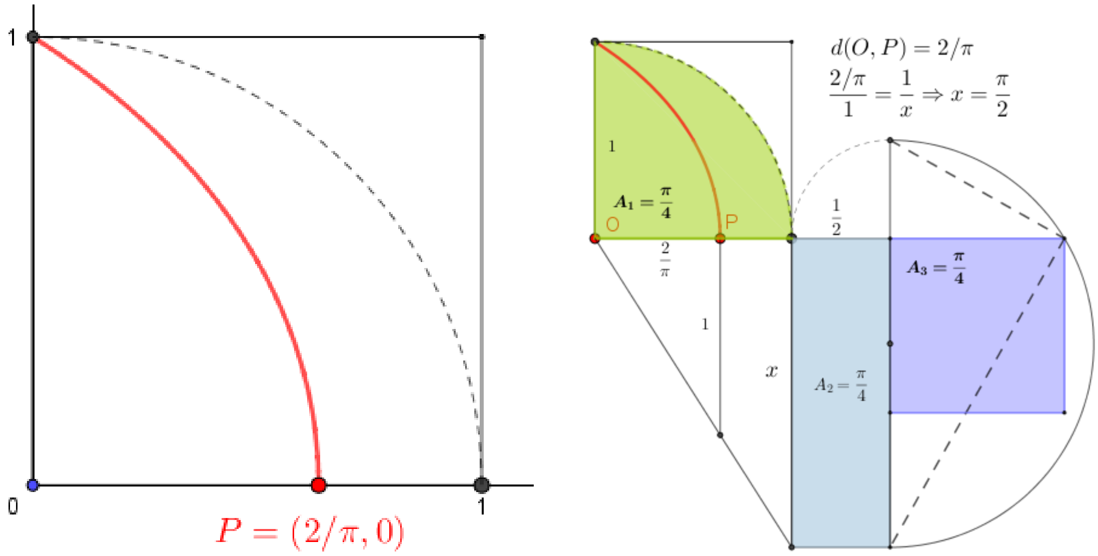


Figura 17. Cuadratriz de Hipias.

Espiral de Arquímedes.

La curva mecánica diseñada por el genio de Siracusa para trisecar el ángulo permite también cuadrar el círculo, con al menos dos razonamientos diferentes. En la imagen se muestra uno de ellos.

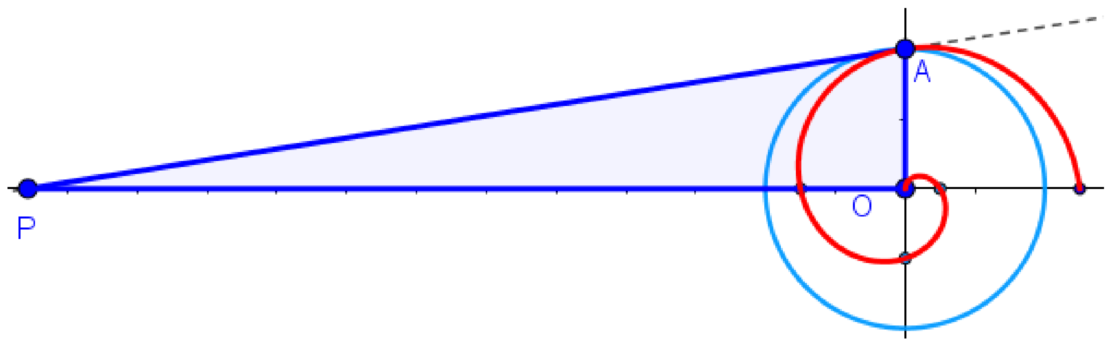


Figura 18. Cuadratura del círculo mediante la Espiral de Arquímedes.

Sea A el punto que alcanza la espiral tras recorrer la primera vuelta. La recta tangente a la espiral en ese punto corta a la perpendicular a OA en P. Arquímedes afirma que la distancia OP es igual a la longitud de la circunferencia de radio OA, y por tanto el área del triángulo OAP es igual al área del círculo de radio OA.

IMPOSIBILIDAD DE LAS CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

Pierre Wantzel, basándose en trabajos previos de Gauss y Galois, publicó en 1837 en una revista de matemáticas francesa la primera prueba completamente rigurosa de la imposibilidad de trisecar un ángulo utilizando únicamente una regla y un compás. Demostró también la imposibilidad de resolver la duplicación del cubo, así como la construcción de un polígono regular cuyo número de lados no es producto de una potencia de dos o distinto a cualquier número de Fermat.

La prueba de la imposibilidad de cuadrar el círculo con las restricciones de impuestas por los geómetras de la antigüedad la proporcionó en el año 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann al demostrar la trascendencia del número π.

Como se ha mostrado, estas construcciones si son posibles, pero se necesita algo más que regla y compás. Las curvas mecánicas, creadas con este propósito, proporcionan la solución exacta a cada uno de los tres problemas clásicos.

Referencias.

Boyer, Carl B. (1986). Historia de la matemática. Alianza Editorial. Ciencia y Tecnología.

Fernández Fernández, S. (1997). Historia de la matemática. Los tres problemas clásicos. IV Seminario regional castellano-leonés de Educación Matemática.

Referencias web.

Arranz, J.M. Los tres problemas clásicos. https://www.geogebra.org/m/hux9uzqd.

Bombal Gordón, F . (2018) Los tres problemas clásicos de la geometría griega y el largo camino hacia la prueba de su irresolubilidad. Seminario de Historia de la matemática Mariano Martínez https://blogs.mat.ucm.es/shm/2266-2/.

Bombal Gordón, F. (2012) La cuadratura del círculo: Historia de una obsesión. https://rac.es/ficheros/doc/01019.pdf.

Contreras, J. y Del Pino, C. El problema de la duplicación de cubo. https://proyectodescartes.org/escenas-aux/bibliografia/duplica_cubo.pdf.

León, Manuel de, Matemáticas y sus fronteras. Historias de Pi. La cuadratura del círculo. https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/tag/cuadratura-del-circulo.

Mora, Juan P. Historia de la duplicación del cubo. https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/257/Duplicacion_cubo.pdf .

Wikipedia. Duplicación del cubo. https://es.wikipedia.org/wiki/Duplicaci%C3%B3n_del_cubo.

Wikipedia. Trisección del ángulo. https://es.wikipedia.org/wiki/Trisecci%C3%B3n_del_%C3%A1ngulo.

Wikipedia. Cuadratura del círculo. https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadratura_del_c%C3%ADrculo.

Para hacer referencia al artículo:

Arranz San José, J.M. (2022). GeoGebra y los tres problemas clásicos. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 43 - 51). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

¿MATEMÁTICAS?... PARA ENTENDER EL MUNDO

Fernando Diez Vegas

IES Alonso Berruguete de Palencia

Resumen

Un breve recorrido por algunas de las actividades desarrolladas por alumnos del IES Virgen de la Calle de Palencia en el marco del concurso "Las matemáticas del planeta Tierra" organizado por el IMUVA. Logaritmos, mediatrices, modelos matemáticos, diagramas de Voronoi, el algoritmo de Kruskal, la idea de distancia y Geogebra van de la mano de bicicarriles, corredores humanitarios, la gestión del transporte de enfermos de radioterapia en la comunidad, los papeles de Bárcenas, invasiones zombis, el ébola o el covid, y mucho más. Todo ello con la idea de dar una respuesta diferente a la eterna pregunta que, en algún momento, nos hacen nuestros alumnos: ¡Profe!, …Y esto de las Matemáticas…, ¿para qué sirve?

Palabras clave: *Matemáticas, Educación Secundaria, Diagramas de Voronoi, Algoritmo de Kruskal, Ley de Benford.*

UN PAR DE PROBLEMAS PARA EMPEZAR

Los negocios son los negocios

Un aula de 3º de ESO en adelante, primer día de curso:

Sois mayoristas de fruta y tenéis 1000 kg de naranjas. Hoy su precio es de 1 €/kg, pero estamos en marzo y hay mucha demanda: el precio aumenta 15 céntimos al día y las naranjas llevan tanto tiempo en la cámara que pierdes 40 Kg cada día que pasa sin venderlas, ¿qué piensas hacer?

Sólo una alumna de 2º de Bachillerato en varios años de problema responde: "Si venden el 9º día para obtener el mayor beneficio posible estarán tirando 360 kg de fruta a la basura". Durante años el sentido de culpa ha invadido mis aulas ese primer día de curso. El máximo beneficio particular puede no coincidir con lo mejor para todos, pero como dice Tessio en la película de El Padrino: "Dile a Mike que sólo lo hice por negocios. Siempre me cayó bien"

Los pobres cada vez más pobres y los ricos, más ricos

Realiza una sencilla encuesta en clase. Recoge el dinero recibido por tus alumnos en una semana. Ordénalos de menor a mayor y realiza la siguiente tabla. El alumno más pobre recibe tal cantidad de dinero, los dos alumnos más pobres reciben… los tres alumnos más pobres, reciben…y así sucesivamente. Pásalo a porcentajes de población y renta y representa en Geogebra. Acabas de obtener la curva de Lorentz que permite calcular el índice de Gini, el índice que suelen tomar como referencia los organismos internacionales para medir la distribución de la riqueza. Según datos del INE, el índice de Gini de España aumentó considerablemente con la crisis del año 2008 hasta 2015 y con la crisis del COVID19 este índice ha vuelto a crecer.

"Dile a Mike que sólo lo hice por negocios. Siempre me cayó bien"

EL ALGORITMO DE KRUSKAL Y EL DISEÑO DE UN BICICARRIL EN LA CIUDAD DE PALENCIA

La ciudad de Palencia dispone en la actualidad de varios tramos de bicicarril. Ninguno de ellos conecta lugares de interés: IES, bibliotecas, centros de trabajo, parques, centros deportivos… Ninguno de ellos resuelve problemas de movilidad. El programa de préstamo de bicicletas del ayuntamiento palentino se abandonó a los pocos años de empezar a prestar servicio y hoy sólo quedan los aparcamientos diseñados para las bicicletas. Un grupo de alumnos del IES Virgen de la Calle de Palencia creyó necesario crear una ciudad por y para la gente, más sana y respetuosa con el medio ambiente; una ciudad con un bicicarril que permita desplazarse de forma segura y práctica entre los lugares más importantes de la ciudad. Para ello, recorrimos los conceptos más elementales de la Teoría de Grafos a partir de juegos muy conocidos y del famoso problema de los Puentes de Königsberg. Planteamos la necesidad de dar soluciones óptimas a problemas de grafos como el del cartero. Estudiamos brevemente problemas actuales relativos a las redes sociales como son la ilusión de la mayoría y la paradoja de la amistad.

Seguidamente nos propusimos la construcción de un bicicarril en la ciudad de Palencia que una los puntos de mayor interés con coste y/o recorrido mínimo, para lo que utilizamos el algoritmo de Kruskal que explicamos previamente. Nos ayudamos para ello de los programas Geogebra y Grafos, este último construido por Alejandro Rodríguez Villalobos de la Universidad Politécnica de Valencia. Ese recorrido de longitud mínima y que recorre todos los puntos de interés se denomina árbol recubridor mínimo en la Teoría de Grafos.

En el diseño del bicicarril nos encontramos con un problema: medir las distancias entres los puntos de interés que debe unir el bicicarril. Para ello utilizamos el visor SIGPAC del Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio ambiente. Obtenemos sus coordenadas y utilizamos una hoja de cálculo para calcular las distancias con una métrica euclídea primero y la métrica "Manhattan" después.

Una vez obtenidas esas distancias se introducen en los programas Geogebra y Grafos para obtener el árbol recubridor mínimo del grafo. En la figura 1 se muestra, a la izquierda, el plano de Palencia con su bicicarril en 2016; a la derecha, el árbol recubridor mínimo obtenido con el software Geogebra y la distancia euclídea.

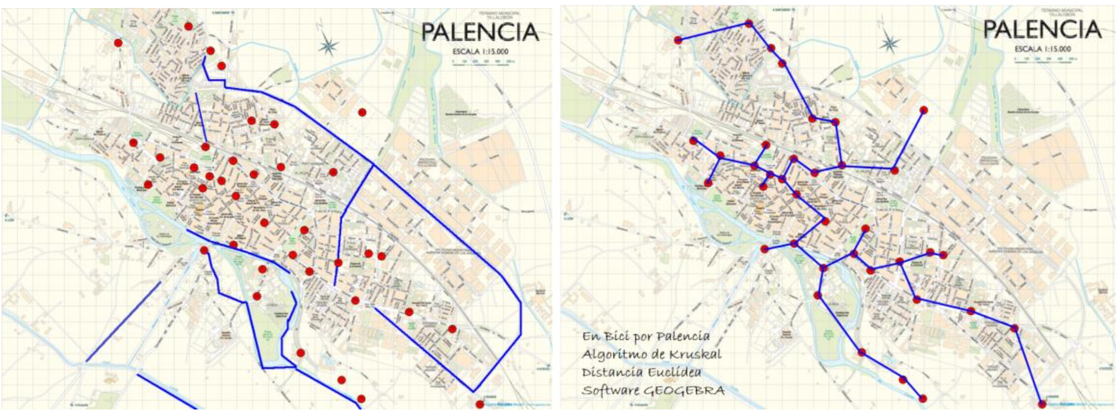


Figura 1.

DIAGRAMAS DE VORONOI, GESTIÓN DEL TRANSPORTE DE PACIENTES DE RADIOTERAPIA Y UN CORREDOR HUMANITARIO

Hacemos un recorrido por los diagramas de Voronoi de tal forma que un alumno de secundaria pueda seguirlos sin complicaciones. Repasamos situaciones clásicas como la epidemia de cólera en Londres en 1854 y la solución geométrica del problema sanitario propuesta por John Snow al que se considera padre de la epidemiología. Analizamos la trayectoria seguida por la flota japonesa en su ataque a Pearl Harbour alejándose lo más posible del resto de bases americanas del Pacífico (Wake, Midway e Islas Aleutianas). Estudiamos si la división administrativa en provincias de la comunidad de Castilla y León, que data de 1833, sigue un criterio marcado por la distancia a la capital y por lo tanto coincide o no con un diagrama de Voronoi cuyos puntos generadores sean las capitales de provincia. La coincidencia es más que evidente y puede comprobarse en el logotipo elegido para el XV Congreso

Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León que se muestra en la figura 2 y que acompaña también al árbol recubridor mínimo que une las capitales de provincia.

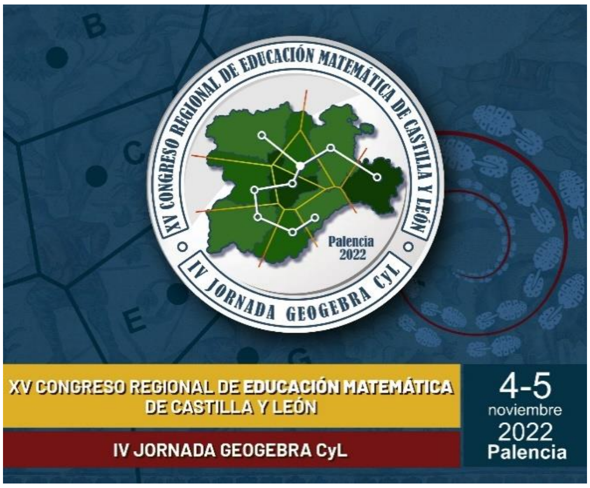


Figura 2.

Del mismo modo, procedemos a dividir el espacio aéreo peninsular tomando como puntos generadores de cada región de Voronoi cada uno de los aeropuertos españoles para diseñar un protocolo de emergencia aérea.

Si bien estos casos pueden considerarse clásicos en el estudio de los diagramas de Voronoi estudiamos ahora investigaciones originales realizadas en 2015 por alumnos de 3º de ESO del IES Virgen de la Calle de Palencia.

Gestión del transporte de pacientes de radioterapia en la comunidad de Castilla y León, 2015

La Junta de Castilla y León dispone de varios hospitales públicos con servicio de Radioterapia. En 2015 había 4 centros situados en Valladolid, Salamanca, León y Burgos. Aunque no todos disponían de los mismos medios, todos ellos contaban de aceleradores de electrones para radioterapia externa. Los pacientes que precisan un tratamiento de radioterapia externa acuden de 20 a 30 días con una frecuencia de 5 días a la semana. Los pacientes de fuera de estas capitales precisan de un servicio de ambulancias que los recoja en sus domicilios y los vaya dejando en sus centros de tratamiento. Los servicios de radioterapia inician sus tratamientos a las 8:00 horas. El tratamiento dura unos 10 minutos a lo sumo y el paciente debe esperar hasta que el servicio de ambulancias complete el viaje para volver a casa. Pacientes con cáncer del norte de Palencia pueden llegar a tener que levantarse a las 5:00 horas, hacer 150 km para llegar a su centro de referencia, tratarse en 10 minutos, esperar a que su ambulancia se complete y recorrer otros 150 km para llegar a su domicilio. Para pacientes con cáncer, repetir esto durante 25 días, puede resultar algo más que incómodo. Teniendo en cuenta el tipo de enfermedad, vista la duración del tratamiento y las distancias recorridas, creemos necesaria una distribución que minimice estas molestias y se olvide de la distribución provincial rígida del Sacyl, para que cada hospital tenga como zona de influencia la región de Voronoi que le corresponde.

Para ello, utilizamos el programa Geogebra y su comando Voronoi[lista de puntos] para ver una primera aproximación del problema. En la figura 3 se muestra las zonas de influencia que corresponden a los servicios de radioterapia de la comunidad en los años 2015 y 2022 respectivamente.

Figura 3

Sin tener en cuenta el tipo de vía concluíamos que los pacientes de Segovia y Valladolid debían tratarse en esta última ciudad. Los enfermos de Salamanca y Ávila en Salamanca, Burgos y los de Soria en Burgos. Los pacientes de Zamora y Palencia deberían acudir a tres centros diferentes, Se debe señalar que a fecha de hoy Castilla y León cuenta con un Servicio de radioterapia en Zamora y un concierto con una entidad privada en Segovia. Ávila, Palencia y Soria continúan a la espera.

Diseño de un corredor humanitario en Siria, 2015

Siria está inmersa en una guerra civil desde 2011, en la que grupos rebeldes luchan contra el ejército gubernamental. Este corredor humanitario debería estar lo suficientemente lejos de cada una de las facciones rebeldes como para garantizar la seguridad y estabilidad de este. Introducimos la posición de los rebeldes sirios en 2015 en el software Geogebra y dibujamos las regiones de Voronoi asociadas a dichas posiciones. El corredor humanitario transcurre por las fronteras de dichas regiones. El objetivo principal era evacuar la ciudad de Homs.

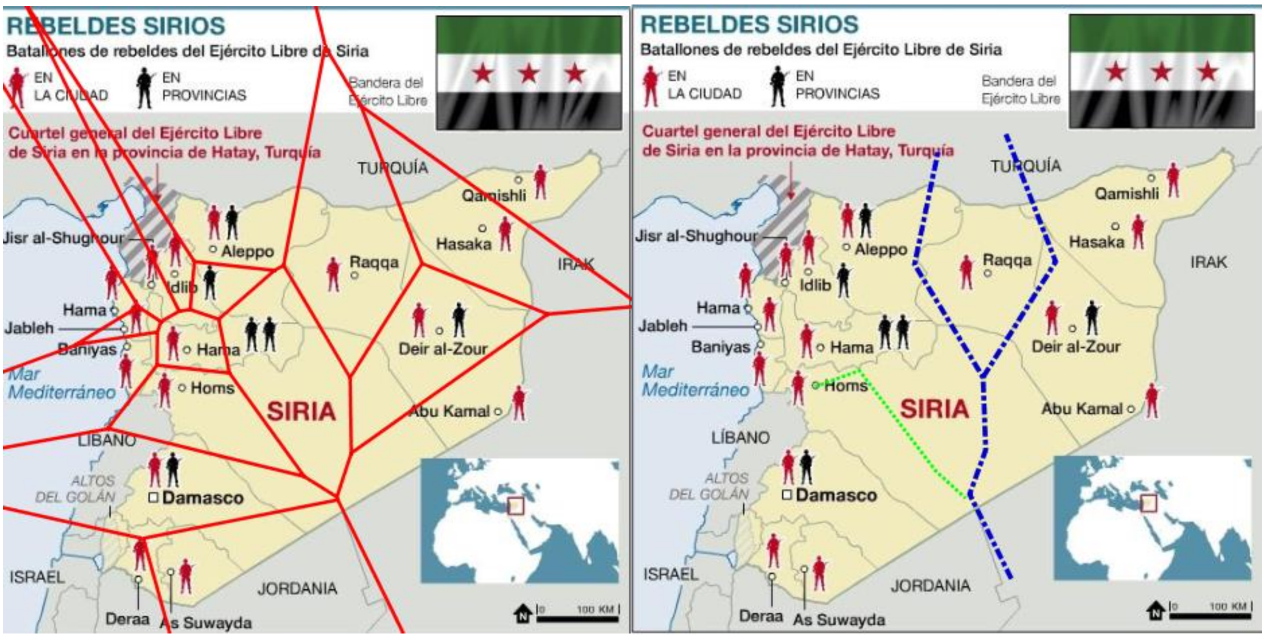


Figura 4.

El corredor principal de entrada y/o salida se muestra en la figura 4. Así, en azul se muestra el corredor principal, mientras que por la línea verde discurre la ruta de evacuación de la ciudad de Homs.

¡PROFE! Y LOS LOGARITMOS, ¿PARA QUÉ SIRVEN? LA LEY DE BENFORD

Si hay un momento en la educación secundaria en que se da un buen número de alumnos desbordados por las matemáticas, es el momento de estudiar los logaritmos. Comenzar haciendo cálculos complicados del tipo $\sqrt{\frac{1024 \cdot 65536}{4096}}$ con una pequeña tabla de logaritmos en base 2, y ver que damos el resultado antes de que ellos sean capaces de introducir los datos en una calculadora les deja atónitos; hablar de Newcomb, Benford y relacionarlos con el "efecto Mateo" y la Ley de Stigler cambia su percepción por completo (Ley de Stigler: "Ningún experimento científico recibe el nombre de quién lo descubrió en primer lugar")

La ley de Benford

Cambiar demasiados números en bases de datos contables, artículos científicos o intentar adulterar unas elecciones puede resultar arriesgado si no se conoce la Ley de Benford. En el IES Virgen de la Calle utilizamos la Ley de Benford del primer dígito para comprobar la posible veracidad o no de la supuesta contabilidad B del Partido Popular e investigar un posible fraude electoral en las elecciones generales de 2016.

En 1881, Simon Newcomb (1835-1909), astrónomo, físico y matemático, se percató de que su libro de tablas de logaritmos tenía más desgastadas las páginas cuyos números comenzaban por 1 ó 2 que el resto del libro. En 1938, el físico Frank Benford estudió 20.229 números provenientes de distintas muestras, y postuló la llamada "Ley de los números anómalos de Benford":

$$P(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right),$$

donde P(d) es la probabilidad de que un número determinado tenga como primer dígito d.

Nos sumergimos en el mundo de los logaritmos y comprobamos la Ley de Benford en distintas series numéricas como la sucesión de Fibonacci, las potencias de distintos números, así como apuntes contables derivados de un interés compuesto. Utilizamos una hoja de cálculo para obtener los primeros 1000 números de dichas series numéricas, extrajimos su primera cifra y comprobamos como las frecuencias de los distintos dígitos coinciden de manera increíble con las frecuencias previstas por la ley de Benford. Estudiamos la población en 2017 de los 8124 municipios españoles, extrajimos su primera cifra y de nuevo una coincidencia total. Lo mismo ocurre con la población masculina, con la población femenina, con los votantes del censo, con los votos válidos emitidos en las elecciones de 2016, con los votos recibidos por los partidos PP, PSOE, Podemos, Ciudadanos: coincidencia total. Comprobamos dicha coincidencia con un test de hipótesis desechando un posible fraude electoral.

Posteriormente, estudiamos los papeles de Bárcenas bajo la lupa de la Ley de Benford pues nos llama la atención la polémica suscitada a partir de la publicación en ABC con fecha 06/02/2013 del siguiente titular:" Un matemático aplica la ley de Benford a los papeles de Bárcenas y concluye que son falsos". Siguiendo el hilo de la noticia nos hicimos con los papeles de Bárcenas publicados en distintos medios de comunicación y aplicamos la ley de Benford a todos ellos. Ingresos y gastos juntos, ingresos y gastos por separado. Aparecieron muchas más coincidencias que las sugeridas en la noticia de ABC. Dichas diferencias se explican en que el matemático citado por ABC sólo analiza 84 apuntes de los papeles de Bárcenas incumpliendo una de las condiciones de aplicabilidad de la ley: la existencia de varios órdenes de magnitud, y muchos números en cada uno de esos órdenes.

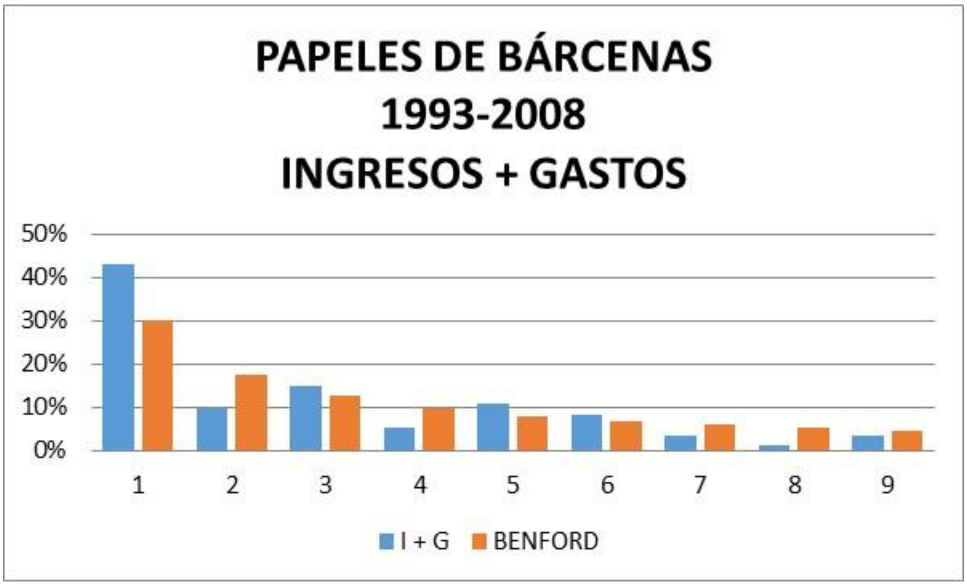


Figura 5. Frecuencia del primer dígito. Papeles de Bárcenas 1993-2008

Es evidente, aún sin aplicar un test de hipótesis, la discrepancia entre la supuesta contabilidad B del Partido Popular y la Ley de Benford, aunque la distribución sí tiene muchas similitudes.

En cualquier caso, tenemos que señalar que los papeles de Bárcenas no cumplen las condiciones de aplicabilidad de la Ley de Benford por varias razones: no cubren varios órdenes de magnitud, no hay suficientes datos en algunos de esos órdenes de magnitud y existen numerosas cifras “tipo” (p.ej. 1 millón y 10 millones de pesetas y sus equivalentes en euros) que desvirtúan el análisis del primer dígito.

ALERTA ZOMBI. MODELOS MATEMÁTICOS PARA ENFERMEDADES INFECCIOSAS

Los zombis son una figura muy popular, tanto en la literatura como en el cine. El comportamiento zombi es muy similar al de una enfermedad infecciosa y su tratamiento matemático prácticamente idéntico.

Proponemos un modelo matemático para predecir los efectos de una infección zombi y calcular el tiempo en el que la población de Palencia se reduce al 10%. Dividimos la población en tres grupos: susceptibles, zombis y “recovery” (recuperados del ataque y fallecidos). Buscamos las ecuaciones que gobiernan el paso de un grupo de población a otro. Esos trasvases dependen de la proporción de susceptibles, del número de zombis, del número de contactos que un zombi sea capaz de mantener, así como de las probabilidades de contagio y muerte zombi en un encuentro entre un susceptible y un infectado. Se tiene en cuenta, además, la posibilidad de una resurrección zombi.

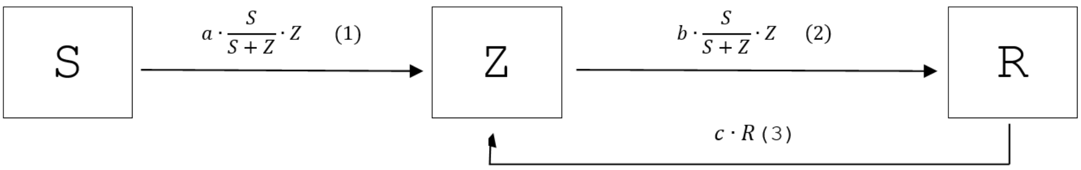


Figura 6. Modelo SZR

Elaboramos un programa que nos permitiera integrar numéricamente esas ecuaciones y procedimos a simular una epidemia zombi en la ciudad de Palencia. En el caso más favorable estudiado, la población de Palencia se reduce al 10% a los 127 días de comenzar la epidemia (80000 habitantes, 1 zombi, 5 contactos/día zombi, probabilidad de contagio del 20%, probabilidad de muerte zombi del 40% y una tasa de resurrección del 1%).

Un modelo matemático para el ébola o el COVID19

De una forma similar trabajamos con el ébola, una enfermedad infecciosa muy contagiosa y con elevado índice de mortalidad. La última epidemia de ébola afectó en 2014 y 2015 a 3 de los países más pobres de África Occidental. Se estima que murieron 11312 personas y se informó de 28457 casos comprobados.

Un modelo matemático similar al de la invasión zombi permite simular y predecir los efectos de una epidemia de ébola y comprobar el resultado de vacunas, tratamientos y cuarentenas. Dividimos a la población en susceptibles, enfermos con el virus en estado latente (no contagioso), infecciosos y "recovery". Posteriormente añadimos, grupos de vacunados e infecciosos en cuarentena hospitalaria. Utilizamos datos reales de la enfermedad extraídos de la literatura científica para poder simular el trasvase de población de unos grupos a otros y simulamos una epidemia en la ciudad de Palencia variando las tasas de vacunación y cuarentena que nuestro sistema de salud podría mantener.

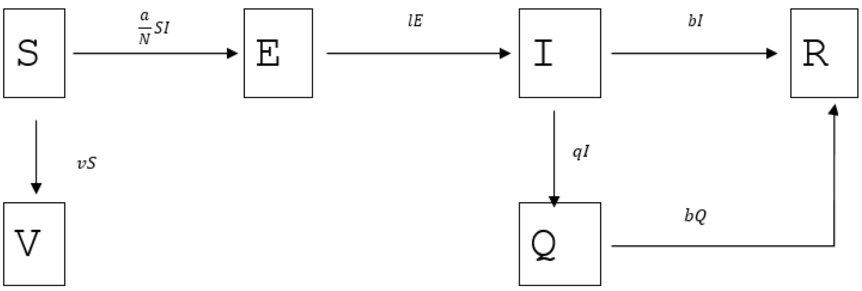


Figura 7. Modelo SEIR con grupos de cuarentena obligatoria y vacunados

La tasa de mortalidad del "ébola 2014" llegó a ser del 70% tiene un período de incubación entre 2 y 21 días (tiempo medio 8 días) hasta que aparecen los primeros síntomas y la enfermedad es contagiosa sólo cuando aparecen éstos. La muerte sobreviene entre el día 6 y 16 del comienzo de los síntomas (tiempo medio 10 días). En cuanto al estudio de la epidemia de ébola sin control ni tratamiento, el modelo predice 63860 afectados en Palencia, falleciendo 44702 personas. En el caso de poder contar con una vacuna y acompañarla de cuarentena hospitalaria (tasa de vacunación 20% al día y tasa de hospitalización 70% al día) el número de afectados se reduce a 97, falleciendo sólo 68 personas.

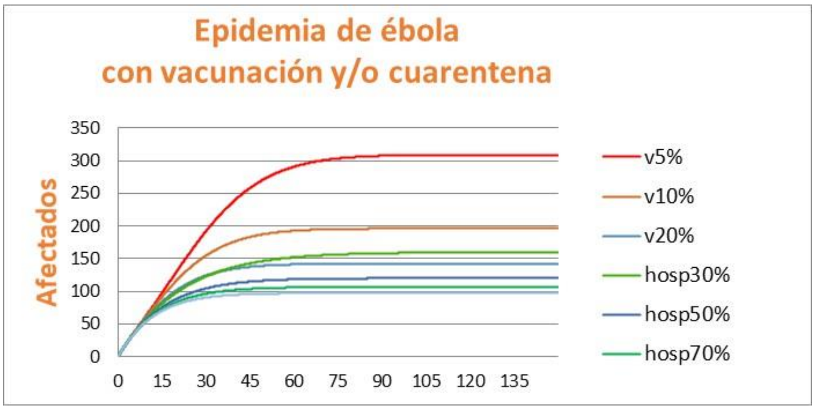


Figura 8. Nº de afectados y duración de la epidemia. Población inicial: 80.000 habitantes y 80 individuos contagiosos.

Estos modelos formaban parte de un trabajo realizado en el curso 2016-17 por alumnos del IES Virgen de la Calle. Tristemente, años después nos vimos en una situación similar de todos conocida: una cuarentena total y la búsqueda angustiosa de una vacuna. No había ningún dato científico, ningún estudio que permitiera introducir datos en un modelo como este. Investigadores de la Universidad de Zaragoza y de la Rovira y Virgili de Tarragona trabajaron sobre un modelo matemático introduciendo datos que provenían de un crucero en cuarentena total: el Diamond Princess. El resto, para los libros de historia.

En cualquier caso, observando la figura 8 se puede concluir que el número de afectados por la epidemia depende de la capacidad de nuestro sistema sanitario para detectar casos, hospitalizar y tratar a los enfermos, aislar a estos y a los posibles contagiados, así como de la disponibilidad de recursos económicos para adquirir y administrar vacunas a la mayor parte de la población.

A MODO DE COROLARIO

Durante varios años, alumnos del IES Virgen de la Calle de Palencia, participaron con éxito en el concurso "Las Matemáticas del Planeta Tierra" organizado por el Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA). Durante los recreos, grupos de 4 ó 5 chavalas y chavales de ESO y Bachillerato se afanaban en entender el mundo. Nadaban entre fórmulas, hojas de cálculo, logaritmos y mediatrices en sus ratos libres para construir un bicicarril en su casa, para organizar un corredor humanitario, para mejorar la vida de los pacientes con cáncer, destripar los papeles de Bárcenas o buscar más proporcionalidad en los sistemas electorales. Participaron muchachos que suspendieron todas sus asignaturas y abandonaron el sistema educativo; alguno había repetido 3º por suspender matemáticas; varios hicieron humanidades después. También hubo alumnos brillantes, de esos que participan en las olimpiadas, y muchos más que ni de los unos, ni de los otros. Pero todos usaron las matemáticas para comprender, transformar y mejorar la realidad. Se pusieron un cartel que decía "Buenos días, estudio matemáticas y hoy voy a hacer algo por ti".

Para hacer referencia al artículo:

Fernando Diez Vegas (2022). ¿Matemáticas? ...para entender el mundo. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 52 - 59). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

(RE)EDUCANDO MATEMÁTICAMENTE EN CONTEXTOS DE DISCALCULIA EN EDADES TEMPRANAS

Espina, E., Marbán, J. M., Maroto, A.[a]

[a] Universidad de Valladolid

Resumen

La discalculia es uno de los trastornos más desconocidos dentro del entorno escolar y familiar. Este desconocimiento implica una incapacidad para la identificación del problema y, como consecuencia, a una intervención, en el mejor de los casos, tardía. Con el objetivo de contribuir a reducir este problema se concibe esta ponencia, que se estructura en tres partes bien diferenciadas. En la primera, se describirán las características más relevantes de la discalculia, su etiología y sus síntomas más característicos. En la segunda parte, se presentarán algunos elementos o claves que facilitan su diagnóstico y se mostrarán algunas de las herramientas de diagnóstico que existen para la identificación del posible riesgo de discalculia dentro del aula, centrando la atención en las que pueden ser de utilidad o aplicación sencilla por parte del profesorado o de las familias. Finalmente, se presentarán algunas pautas sencillas para la intervención dentro del aula.

Palabras clave: *discalculia, trastorno de aprendizaje, matemáticas, primaria.*

INTRODUCCIÓN

Como es bien sabido, las matemáticas son un recurso de gran valor para enfrentarnos a la multitud de problemas cotidianos a los que nos enfrentamos habitualmente. Una adecuada educación matemática es esencial para el desarrollo del pensamiento lógico y crítico, del razonamiento, de la intuición, de la capacidad de abstracción, … Sin embargo, el pleno acceso a niveles suficientes de alfabetización matemática se puede ver obstaculizado por la manifestación de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (DAM). Estas dificultades pueden interferir tanto en el progreso académico como en actividades de la vida cotidiana y pueden ser producidas por diversos factores. Mundia (2012) señala alguno de estos factores: las creencias estereotipadas de carácter negativo que de forma habitual se tienen hacia las matemáticas, una enseñanza insatisfactoria consecuencia de un diseño inadecuado de la instrucción en los materiales curriculares, posibles déficits en el desarrollo cognitivo o factores económicos, entre otros. El concepto de DAM se aplica de forma general al alumnado que se encuentra por debajo de la media de su grupo o al alumnado que presenta un funcionamiento matemático por debajo de su propia media de rendimiento (Fernández-Baroja et al., 1991). Las DAM, en función de su grado de severidad, pueden clasificarse en leves, moderadas o graves. Dentro del grupo de mayor severidad se encuentran los niños en los que se va a centrar esta ponencia, aquellos que presentan comportamientos compatibles con o que apuntan a una posible discalculia. La discalculia, a pesar de haber tenido un gradual aumento de interés dentro de la literatura científica en la última década, ha recibido, en comparación con otros trastornos, como la dislexia, mucha menos atención (Espina et al., 2022). Este hecho contribuye al escaso conocimiento que se aprecia dentro del entorno escolar y familiar, produciéndose una identificación tardía, e incluso, a veces nula, de una situación que precisa, en la mayoría de los casos, algún tipo de intervención. Movidos por esta situación, el objetivo de esta ponencia es facilitar un acercamiento básico y sintético a las características más relevantes de la discalculia, así como a su diagnóstico y a su atención.

CONCEPTUALIZACIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LA DISCALCULIA

Actualmente no existe una definición de la discalculia ampliamente aceptada, sino que con el paso del tiempo la investigación ha ido añadiendo y modificando características a la misma en función de los avances que se producían. La primera definición de discalculia y, de hecho, la propia acuñación del término, pertenece al psicólogo Ladislav Kosc:

> La discalculia del desarrollo es un trastorno estructural de las habilidades matemáticas que tiene su origen en un trastorno genético o congénito de aquellas partes del cerebro que son el sustrato anatómico-fisiológico directo de la maduración de las habilidades matemáticas adecuadas a la edad, sin un trastorno simultáneo de las funciones mentales generales (Kosc, 1970, p. 192).

Por otro lado, una de las últimas referencias conceptuales se encuentra en la última versión de la Clasificación Internacional de Trastornos (CIE-11) de la Organización Mundial de la Salud (2020), donde se incorpora de forma implícita la discalculia al indicar que “el trastorno del desarrollo del aprendizaje con dificultades en matemáticas se caracteriza por dificultades significativas y persistentes en el aprendizaje de habilidades académicas relacionadas con las matemáticas o la aritmética, como el sentido del número, la memorización de hechos numéricos, el cálculo preciso, el cálculo con fluidez y el razonamiento matemático preciso”.

La discalculia es un trastorno que tiene origen multifactorial, y que puede estar causado por factores neurobiológicos, genéticos y ambientales (Kaufmann y Von Aster, 2012). Su origen neurológico muestra que los diferentes déficits en las habilidades matemáticas son producidos por alteraciones persistentes en diversas áreas cerebrales (Butterworth et al., 2011) y por diferencias estructurales en el volumen de la materia gris y blanca (McCaskey et al., 2020). En cuanto a su (posible) origen genético y ambiental, se indica que la discalculia tiende a ser un trastorno hereditario y puede deberse a condiciones ambientales como un nacimiento prematuro o la ingesta de alcohol durante el embarazo.

La discalculia afecta a la correcta adquisición de las habilidades aritméticas, sobre todo a las relacionadas con el sentido numérico, el conteo y el cálculo e interfiere significativamente tanto en el rendimiento académico como en las actividades de la vida cotidiana que están relacionadas con las matemáticas. Parece ser un trastorno duradero que persiste hasta la edad adulta y suele ser “inesperado”, debido a que se presenta en estudiantes con un nivel de inteligencia normal y una escolaridad apropiada (Sans et al., 2012). Tiene carácter heterogéneo, ya que existe una gran variabilidad dentro de cada individuo y entre individuos, se puede presentar de forma comórbida con otros trastornos o dificultades de aprendizaje (dislexia, TDAH, trastorno del lenguaje, …) y tiene una prevalencia estimada de entre el 2,27% y el 6,4% de la población escolar (Emerson, 2015; Estévez et al., 2008).

Sintomatología en edades tempranas

Al igual que con la definición de discalculia, aún no existe un consenso sobre la sintomatología completa o diferencial asociada a este trastorno. Una de las causas de esta ausencia de consenso se encuentra, a juicio de Price y Ansari (2013) en la heterogeneidad de las habilidades matemáticas y en la variación entre los criterios utilizados para identificar a los niños con discalculia en los diferentes estudios realizados. A pesar de ello, sí podemos hablar de los síntomas más frecuentes en niños con discalculia, algunos de los cuales se muestran en la Tabla 1 para el caso de Educación Infantil o Primaria.

Tabla 1. Síntomas de la discalculia en Educación Infantil y Primaria

Nivel escolar	Síntomas discalculia
Educación Infantil	Dificultad en la adquisición de los principios básicos de la numeración y el conteo (secuencia numérica, correspondencia uno a uno, principio cardinalidad).
	Dificultad para clasificar objetos por sus características.
	Dificultad para realizar la correspondencia número-cantidad.
	No adquiere la subitización de cantidades pequeñas (hasta 5).
	Dificultad para entender términos relacionados con las matemáticas.
	Problemas para copiar números arábigos.
	No automatiza el número de dedos de las manos.
	No hace estimaciones pequeñas (hasta 10).
Educación Primaria	Dificultad en tareas de subitización y en la estimación de cantidades.
	Dificultad para aprender, procesar, memorizar o resolver secuencias numéricas (contar hacia atrás, contar de 2 en 2, de 5 en 5…).
	Dificultad para entender la estructura de la recta numérica.
	Problemas para identificar los números, escribirlos o clasificarlos.
	Dificultad para entender el valor posicional de los números (unidades, decenas, centenas).
	Dificultad en la ejecución de operaciones aritméticas (confusión de símbolos, mala ubicación de los dígitos, olvidan el número que se han llevado, …).
	Incapacidad para comprender y recordar conceptos matemáticos, reglas, fórmulas, secuencias (orden de operaciones) y operaciones matemáticas básicas (+, -, x, /).
	Persiste en necesitar estrategias manipulativas para operar (objetos, dedos, …).
	Dificultad para resolver problemas matemáticos.
	Presenta un sentido espacial deficitario (mala presentación de los trabajos en papel, poco sentido de la orientación, …).
	Dificultades relacionadas con el tiempo (conceptos temporales, horarios, secuencias de eventos, …).
	Dedica mucho tiempo y esfuerzo a las matemáticas, pero los resultados no coinciden.

Nota. Información obtenida de Espina et al. (2021, p. 245).

IDENTIFICACIÓN Y DIAGNÓSTICO DE LA DISCALCULIA

Cuando se habla del diagnóstico de la discalculia, se hace referencia habitualmente a un diagnóstico clínico. Este tipo de diagnóstico se basa en el procedimiento mediante el cual un equipo de profesionales expertos, dependiendo de los síntomas, determina la presencia o ausencia de un tipo de enfermedad con la ayuda de un conjunto de herramientas que permiten definir su cuadro clínico (Fundació Adana, 2022). El DSM-V (APA, 2013) establece que se han de cumplir los siguientes cuatro criterios diagnósticos para el trastorno específico del aprendizaje que incluye la discalculia, y al que ya se hizo referencia con anterioridad:

a) Dificultad en el aprendizaje y en la utilización de las aptitudes académicas que ha persistido durante al menos 6 meses, a pesar de haber llevado a cabo una intervención dirigida a paliar esas dificultades.

b) El rendimiento del individuo en las aptitudes académicas afectadas se encuentra sustancialmente por debajo del promedio para la edad cronológica en pruebas estandarizadas.

c) En la mayoría de individuos las dificultades de aprendizaje son muy evidentes en los primeros años escolares. Sin embargo, pueden no manifestarse totalmente hasta que las demandas de las aptitudes académicas afectadas superan sus capacidades limitadas.

d) Las dificultades de aprendizaje no se atribuyen a discapacidades intelectuales, trastornos visuales o auditivos no corregidos, otros trastornos mentales o neurológicos, adversidad psicosocial, falta de dominio en el lenguaje de instrucción académica o directrices educativas inadecuadas.

Una detección temprana de la discalculia es esencial para poder planificar cuanto antes una intervención que mejore la situación de desventaja, real o potencial, en la que se encuentra este alumnado, proporcionando un enfoque alternativo a la forma en que se aborda la docencia en el aula para que esta resulte más inclusiva para este alumnado. Pero, desafortunadamente, uno de los grandes problemas de la discalculia es que, durante periodos prolongados de tiempo, puede pasar desapercibida como una dificultad propia del proceso de aprendizaje (Bernal-Rodríguez, 2009). La discalculia puede diagnosticarse a cualquier edad, pero, mayoritariamente, el diagnóstico se hace posible durante el segundo y el tercer curso de Educación Primaria, cuando ya se ha superado el período crítico para el aprendizaje numérico (entre los 4 y los 7 años). Sin embargo, a finales de la Educación Infantil y en el primer curso de Primaria pueden ya empezarse a observar algunos síntomas relacionados con dificultades en el procesamiento numérico básico.

La detección temprana de la discalculia es un trabajo colaborativo entre especialistas en diagnóstico y tratamiento de trastornos del aprendizaje, el profesorado y los familiares (Calderón-Delgado et al., 2019). Los profesores y los familiares desempeñan un papel crucial en el diagnóstico de este trastorno, ya que son los primeros que pueden observar los síntomas que pueden manifestar los niños a diario en el entorno escolar y familiar. La sospecha de un posible riesgo de discalculia en el aula ordinaria debe ser informada por el profesor al equipo de profesionales del colegio responsables de labores de apoyo psicopedagógico y orientación educativa para un correcto diagnóstico y propuestas de intervención o actuación. En este sentido, estamos trabajando en el diseño y validación de una *checklist* o lista de cotejo dirigida al profesorado y familiares para ayudar a esa labor de identificación temprana del riesgo de discalculia (Espina et al., en prensa).

Instrumentos de diagnóstico

Existe una gran cantidad de instrumentos en el mercado, tanto en papel como en digital, para la evaluación del rendimiento matemático. Estas pruebas pueden ayudar a la identificación e, incluso, un primer diagnóstico, de la discalculia (o de riesgo de discalculia), pero es preciso señalar en este punto que, en la exhaustiva búsqueda que se ha llevado a cabo, se han encontrado dos tipos de pruebas. Por un lado, las pruebas específicamente diseñadas para identificar y evaluar la discalculia y, por otro, las que han sido creadas para la evaluación general del rendimiento aritmético pero que, a su vez, pueden servir de ayuda para detectar el riesgo de este trastorno. Dentro de este último grupo, nos encontramos con múltiples baterías de pruebas de inteligencia y aptitudes escolares en las que se incluyen subpruebas que requieren habilidades matemáticas. Destacan, por ejemplo, la famosa Escala de inteligencia de Weschler para niños V (WISC-V), el Test de Aptitudes Escolares (TEA), la Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales - Renovada (BADyG-R) y la Batería para la Evaluación de la Competencia Matemática (EVAMAT).

Entre las pruebas diagnósticas elaboradas de forma específica para la detección de la discalculia, se distinguen aquellas que se aplican en formato papel y las que se administran en formato digital. En la Tabla 2 se presenta un resumen que incluye solo los instrumentos que se han encontrado en español, a pesar de que se hayan encontrado otros en más idiomas.

Tabla 2. Instrumentos para el diagnóstico de la discalculia

Prueba	**Edad**	**Aplicación**
BERDE (Batería para la Evaluación Rápida de la Discalculia Evolutiva)	6-12 años	Papel
Bidux	6-12 años	Online
CAB-DC (Evaluación Cognitiva para investigaciones sobre Discalculia)	Niños mayores de 7 años, jóvenes y adultos	Online
Diamante	6-10 años	Online
EVADAC (Prueba Analítica para la Evaluación de las Dificultades de Aprendizaje en el Cálculo Aritmético)	6-12 años	Papel
Evaluación Dinamo Números	6-15 años	Online
Neureka-CALC	5-12 años	Online
PREDISCAL (Screening de Dificultades Lectoras y Matemáticas)	7-12 años	Papel
TEDI-MATH (Test para el Diagnóstico de las Competencias Básicas en Matemáticas)	4-8 años	Papel
TEMA-3 (Test de Competencia Matemática Básica)	3-8 años	Papel
TEMT (Test de Evaluación Matemática Temprana)	4-7 años	Papel
Test de Discalculia Smartick	6-10 años	Online

INTERVENCIÓN Y (RE)EDUCACIÓN

Una intervención temprana y eficaz puede ayudar a reducir el impacto posterior en las habilidades aritméticas deficientes del alumnado con discalculia. Como ocurre con la dislexia, la discalculia no se puede evitar y las intervenciones no pueden hacer que su procesamiento cognitivo se iguale al de un niño que tiene desarrollo típico, pero sí puede mejorar la efectividad práctica (Butterworth et al., 2011 y van Luit, 2015). Para que la intervención tenga éxito es imprescindible que el colegio, la familia y los especialistas encargados de llevar a cabo el diagnóstico y la reeducación se encuentren coordinados (Sans et al., 2012).

En cuanto a la intervención de los especialistas, es recomendable que las intervenciones se centren en el entrenamiento de aquellos síntomas o déficits específicos que se han detectado en la evaluación diagnóstica previa (Haberstroh y Schulte-Körne, 2019; Kaufmann y von Aster, 2012). Pero en esta ponencia vamos a centrar la atención en el papel del profesorado. A continuación, se exponen algunas pautas o recomendaciones para la intervención en el aula ordinaria, obtenidas como resultado de diversas investigaciones (Ardila y Roselli, 2002; Emerson, 2015; Gersten et al., 2009; Roca y Vargas, 2018; Sans *et al.*, 2012; Witzel y Mize, 2018, entre otras).

- Utilizar instrucciones explícitas y sistemáticas para enseñar las habilidades matemáticas básicas.
- Dividir las tareas en pequeños pasos y explicar secuencialmente a los estudiantes cada uno de ellos.
- Reducir la cantidad de ejercicios o darlos de manera fraccionada, ya que suelen ser más lentos en llevarlos a cabo.
- Fomentar durante la práctica la auto-verbalización promoviendo que los niños digan en voz alta los procesos de pensamiento y animando a verbalizar cada paso que están haciendo y su razonamiento.
- Repetir frecuentemente el significado del lenguaje matemático y su aplicación en ejercicios.
- Dar muchas oportunidades a los alumnos de aplicar en distintos contextos los nuevos conceptos.
- Repasar con frecuencia los aspectos estudiados para realizar conexiones entre lo que sabían antes y lo que están aprendiendo ahora y así afianzar los conocimientos.
- Combinar el juego y los materiales manipulativos para facilitar la adquisición de los diversos conceptos, procedimientos y habilidades matemáticas.
- Utilizar estrategias multisensoriales para la enseñanza de los nuevos contenidos como, por ejemplo, la secuencia de instrucción (CRA) de lo concreto a lo representativo a lo abstracto (Figura 1).

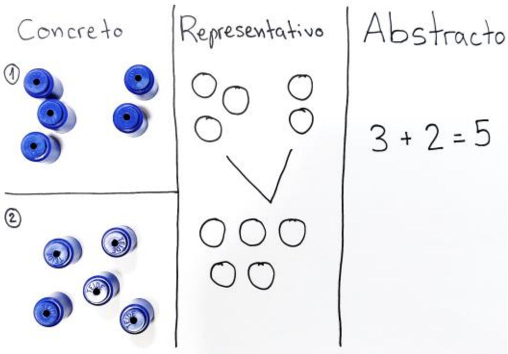


Figura 3. Secuencia de instrucción Concreto-Representativo-Abstracto. Elaboración propia

- Permitir el uso de estrategias de compensación en áreas deficitarias, como por ejemplo, la calculadora o las tablas de multiplicar.
- Utilizar hojas con cuadrículas grandes, ya que facilitan la resolución de las operaciones aritméticas y la ubicación espacial de los números.
- Llevar a cabo la práctica repetida de los ejercicios de modelo complejo hasta que el alumno pueda completarlos con éxito.

- Realizar intervenciones ecológicamente válidas, es decir, enseñar cómo utilizar las matemáticas en la vida real eligiendo ejemplos concretos que permitan la conexión con la vida cotidiana.
- Abordar la ansiedad y las emociones negativas que surgen como consecuencia de los frecuentes fracasos.

Recursos tecnológicos para la intervención

Aparte de los ya conocidos y tradicionales juegos y actividades con materiales manipulativos para la (re)educación matemática del alumnado con discalculia, las intervenciones en entornos tecnológicos son una buena apuesta (Troya y Sánchez, 2017). Cada vez son más numerosos los recursos tecnológicos que pueden ser utilizados por el profesorado y las familias de estos niños para su desarrollo matemático. En la revisión y categorización realizada en Espina et al. (2021) de los recursos tecnológicos para la intervención en discalculia se encontraron, por un lado, recursos diseñados para todo el alumnado, pero recomendados también para aquellos niños con DAM o discalculia y, por otro lado, aquellos específicamente diseñados para niños con discalculia. Dentro de este último grupo, se encuentran recursos formados por un conjunto de actividades o juegos para entrenar diferentes habilidades matemáticas como, por ejemplo, *Calcularis*, *Talasia*, *NeurekaNUM*, *Discalapp*, *DisMAT*, *Dinamo Números* o *Calculic Kids*. Además, destacan también aquellos que son un solo juego formado por varios niveles (*Number race*, *Number catcher*, *Graphogame-Math*, *NumberBeads*).

CONSIDERACIONES FINALES

Al igual que en otros trastornos o dificultades de aprendizaje, existen un conjunto de necesidades que deben ser abordadas para mejorar la situación de (potencial) desventaja en la que se encuentran los niños que presentan discalculia. La primera de ellas es la necesidad de una identificación y diagnóstico lo más precozmente posible. La identificación del trastorno solo es posible, claro está, si se dispone de un sólido conocimiento de las manifestaciones del mismo y, como ya se ha indicado en la introducción, en la actualidad sigue siendo uno de los trastornos del aprendizaje más desconocidos. Afortunadamente, en la última década se ha comenzado a focalizar la atención en esta cuestión, pero todavía queda un largo camino. Todos los estudiantes deben tener la oportunidad de aprender de acuerdo con sus necesidades y habilidades, por lo que es vital que junto con la identificación y diagnóstico tempranos a los que ya se ha hecho referencia, se lleven a cabo las intervenciones pertinentes lo antes posible y se genere, a su vez, una cultura de incorporación de los principios propios del Diseño Universal para el Aprendizaje que elimine barreras y contextos discapacitantes o limitantes, generando entornos de aprendizaje ciertamente inclusivos para lo cual es preciso prestar atención no solo a los factores cognitivos sino también, y de forma muy especial, a lo afectivo. Por último, consideramos que es preciso seguir desarrollando e impulsando investigaciones que puedan aportar más evidencias científicas para avanzar en esta línea de educación matemática inclusiva tan deseable como innegociable y, en particular, en todo lo concerniente a la discalculia.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León a través de las ayudas destinadas a la contratación predoctoral de personal investigador, cofinanciadas por el Fondo Social Europeo.

Referencias bibliográficas

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (DSM-5)* (5th ed.). American Psychiatric Association. https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596.744053

Ardila, A. y Rosselli, M. (2002). Acalculia and dyscalculia. *Neuropsychology Review*, *12*(4), 179-231. https://doi.org/10.1023/a:1021343508573

Bernal-Rodríguez, J. (2009). Discalculia en el aula: reconocimiento y tratamiento del problema. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas, 23*(101).

Butterworth, B., Varma, S. y Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science, 332*, 1049-1053. https://doi.org/10.1126/science.1201536

Calderón-Delgado, M. A., Zamora-Delgado, R. I., Palma-Palma, R. y Moya, M. E. (2019). Dyscalculia and pedagogical intervention. *International Research Journal of Management, IT & Social Sciences, 6*(5), 95-100. https://doi.org/10.21744/irjmis.v6n5.710

Emerson, J. (2015). The enigma of dyscalculia. En S. Chinn (Ed.), *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties* (pp. 217-227). Routledge.

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. (2021). Recursos tecnológicos para la intervención temprana en casos de discalculia. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 245-252). SEIEM.

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. (en prensa). Diseño y validación de una checklist para detectar los síntomas de riesgo de discalculia dirigida al profesorado de Educación Primaria. En Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas XX.*

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A.I. (2022). Una mirada retrospectiva a la investigación en discalculia desde una aproximación bibliométrica. *Revista de Educación, 396*, 205-234. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2022-396-535

Estévez, N., Castro, D. y Reigosa, V. (2008). Bases biológicas de la discalculia del desarrollo. *Revista Cubana Genética Comunitaria*, *2*(3), 14-19.

Fernández-Baroja, F., Llopis, A. M. y Pablo Marco, C. (1991). *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación.* Santillana.

Fundació Adana (2022). *Trastornos del aprendizaje. Diagnóstico y tratamiento*. Fundació Adana. https://bit.ly/31ozWIL

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R. y Witzel, B. (2009). *Assisting Students Struggling with Mathematics: Response to Intervention (RtI) for Elementary and Middle Schools*. NCEE 2009-4060. What Works Clearinghouse. https://bit.ly/3shSN1j

Haberstroh, S. y Schulte-Körne, G. (2019). The diagnosis and treatment of dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt International*, *116*(7), 107-114. https://doi.org/10.3238/arztebl.2019.0107

Kaufmann, L. y von Aster, M. (2012). The diagnosis and management of dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt International*, *109*(45), 767-778. https://doi.org/10.3238/arztebl.2012.0767

Kosc, L. (1970). Psychology and psychopathology of mathematical abilities. *Studia Psychologica, 12*(2), 159-162.

McCaskey, U., Von Aster, M., O'Gorman, R. y Kucian, K. (2020). Persistent differences in brain structure in developmental dyscalculia: a longitudinal morphometry study. *Frontiers in Human Neuroscience, 14*(272). https://doi.org/10.3389/fnhum.2020.00272

Mundia, L. (2012). The assessment of math learning difficulties in a Primary Grade-4 child with high support needs: mixed methods approach. *International Electronic Journal of Elementary Education, 4*(2), 347-366.

Organización Mundial de la Salud (2020). *CIE-11. Clasificación Internacional de Enfermedades, 11.a revisión*. https://bit.ly/38AsmKr

Price, G.R. y Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, causes, and treatments. *Numeracy, 6*(1), 1-16. https://doi.org/10.5038/1936-4660.6.1.2

Roca, J. y Vargas, C. (2018). Alumnado con trastorno específico del aprendizaje. En D. Marín y I. Fajardo (Eds.), *Intervención psicoeducativa en alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo* (pp. 83-113) Tirant Humanidades.

Sans, A., Boix, C., Colomé, R., López-Sala, A. y Sanguinetti, A. (2012). Trastornos del aprendizaje. *Pediatría Integral*, *16*(9), 691-699.

Troya, D., y Sánchez, V. (2017). Las TIC como herramienta de inclusión para niños con discalculia. En M.R. Tolozano Benítez, y R. Arteaga Serrano (Coords.), *3ª Conferencia International de Ciencias Pedagógicas: Por una educación inclusiva: con todos y para el bien de todos* (pp. 1257-1265). Instituto Superior Tecnológico Bolivariano.

Van Luit, J. E. H. (2015). Good math education in kindergarten cannot prevent dyscalculia. *Journal of Psychology and Education*, *10*(2), 43-60.

Witzel, B., y Mize, M. (2018). Meeting the needs of students with dyslexia and dyscalculia. *SRATE Journal*, *27*(1), 31-39.

Para hacer referencia al artículo:

Espina, E., Marbán, J. M., Maroto, A. (2022). (Re)educando matemáticamente en contextos de discalculia en edades tempranas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 60 - 68). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

TALLERES

GEOGEBRA CLASSROOM: EJEMPLOS DE USO EN EL AULA PARA EL DESARROLLO DEL SENTIDO ESPACIAL

Álvaro Vielba Iglesias

IES Jorge Manrique (Palencia)

Resumen

GeoGebra classroom es una reciente funcionalidad incorporada en el sitio web de GeoGebra que nos permite asignar tareas interactivas a los estudiantes para que trabajen en clase o desde casa, y a su vez hacer un seguimiento en vivo del progreso de estos. Más allá de los aspectos técnicos de la herramienta (su funcionamiento es muy sencillo e intuitivo), en este taller se va a explorar su utilidad para generar secuencias didácticas en las que los estudiantes experimenten y pongan en práctica sus conocimientos a través de actividades ricas, y en las que se generen debates y diálogos que se desprendan de las mismas. Todo esto se hará a través de experiencias didácticas que han sido implementadas en contexto real, buscando trabajar el sentido espacial y procurando que sean los alumnos los que vayan construyendo, a partir de las tareas, las definiciones, y descubriendo las propiedades de los objetos geométricos y las relaciones entre estas propiedades.

Palabras clave: *GeoGebra, sentido espacial, secundaria*

Abstract

GeoGebra classroom is a recently incorporated feature to GeoGebra website that allows to asign interactive tasks to students with the aim that they work in the classroom or at home, and at the same time to perform a live monitoring of their progress. Beyond the technical aspects of this tool (its functioning is quite simple and intuitive), in this presentation its usefulness to generate didactic sequences in which students experiment and practice their knowledge through rich activities in which they produce debates and dialogues related to them will be explored. All of this will be done by didactic experiences that have been implemented in a real context, searching to work spatial sense and ensuring that students construct themselves, through the tasks, the definitions and discover the properties of the geometric objects and the relation between these properties.

Keywords: *GeoGebra, spatial sense, secondary*

INTRODUCCIÓN

El título contiene los dos términos fundamentales de esta comunicación. El primero hace referencia a la herramienta, GeoGebra classroom, y en concreto, a la plataforma virtual que nos ofrece el equipo de Markus Hohenwarter. Esta plataforma es de reciente creación. Surge a raíz de la pandemia provocada por el virus SARS-CoV-2 en el año 2020 como un medio para generar un espacio en el que los profesores pudiesen interactuar con los alumnos utilizando GeoGebra. No se trata esta, no obstante, de una comunicación a modo de tutorial técnico sobre la herramienta, sino que la idea es la de compartir una manera de utilizarla para generar propuestas didácticas formadas por secuencias de actividades ricas, que lleven a un aprendizaje por descubrimiento guiado, a la construcción del conocimiento matemático y, en particular, al desarrollo del sentido espacial en alumnos de los primeros cursos de Educación Secundaria.

Este es precisamente el segundo término fundamental del título. El sentido espacial es un concepto amplio sobre la geometría y las habilidades que nos permiten visualizarla. Suscita, además, un especial interés actualmente, ya que es uno de los sentidos que introduce como novedad la nueva ley educativa.

Se espera que estas propuestas didácticas para trabajar el sentido espacial con ayuda de GeoGebra Classroom puedan ser inspiradoras para otros docentes, y que se animen a utilizar la herramienta para fines similares.

MARCO TEÓRICO

El sentido espacial

La motivación al desarrollo de las propuestas didácticas implantadas y compartidas en este taller del XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada GeoGebra de Castilla y León tienen como motor la siguiente premisa: "la geometría debería ser mucho más que la resolución de problemas métricos".

Lamentablemente y basándose el autor en su propia experiencia, como alumno y como docente, es frecuente que el área de geometría se ubique al final del curso (se hace referencia a los tres primeros cursos de la ESO, en los que se implementan las propuestas) junto con la de estadística y probabilidad. Esto suele suponer que el trabajo con números y álgebra se alargue y se le dedique menos horas del curso académico a a la geometría. Por otra parte, y probablemente más preocupante, es el hecho de que dentro de la propia geometría se concede excesiva importancia al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, sin llegar, los alumnos, a una comprensión profunda de estos conceptos y, en muchos casos, sin ver una justificación de las fórmulas que utilizan. Esto conlleva, primero, que se estudie la geometría a partir de procedimientos mecánicos, que están lejos de representar la naturaleza de una asignatura como las Matemáticas por mucho que sean habituales en su enseñanza; y segundo, que se pierda el potencial visual que ofrece la geometría para "ver" las matemáticas, limitando el mismo, y reduciéndose el aprendizaje a la operativa con números y letras que representan valores desconocidos, es decir, nuevamente a los números y el álgebra.

La geometría es mucho más que esto. Adecuadamente presentada posee un enorme valor formativo:

- Proporciona herramientas para la resolución de problemas en los que intervienen el espacio y sus formas.
- Contribuye a desarrollar las destrezas propias del sentido espacial.
- Los elementos que estudia tienen una representación física real y tangible y pueden ser manipulados.
- Proporciona tareas en las que conjeturar, justificar y demostrar.

"La geometría es el lugar natural para desarrollar el razonamiento y las habilidades para la demostración", NCTM.

- Fomenta la comprensión de otros campos: arte, naturaleza, Física.

Por todo ello nos ofrece la oportunidad de desarrollar los procesos matemáticos que introducía el NCTM en su libro "Principios y Estándares para la Educación Matemática" del año 2000, de los que derivan las actuales competencias específicas del currículo LOMLOE. Y, sobre todo, sería muy enriquecedor, como se adelanta en la segunda característica como valor formativo, que la geometría se trabaje en paralelo al sentido espacial.

El sentido espacial es un concepto amplio, una posible definición es la siguiente:

> Es el modo intuitivo de entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellas, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas." (Flores, P. Ramírez, R. Del Río, A. 2015).

Incluye, según la definición, dos dimensiones que precisamente son, según estos y otros investigadores en didáctica de las matemáticas, las dos componentes del sentido espacial. Por un lado, los conceptos geométricos, que podrían dividirse en tres: conocer las propiedades de las formas y figuras, reconocer y establecer relaciones geométricas, y los conceptos de ubicación y movimiento; y, por otro lado, las destrezas para visualizar estos conceptos: la orientación y la visualización. Muy resumidamente, la orientación hace referencia a la capacidad para saber cómo están dispuestos los elementos en el espacio y recordarlos sin confusión. Por su parte, la visualización tiene que ver con la capacidad de elaborar imágenes y pensar mediante ellas: producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos.

Ocurre que la planificación de actividades ricas en las que los conceptos geométricos se relacionen entre sí, y en las que se incorporen las habilidades de visualización, enriquece enormemente el desarrollo de tales conceptos. Así pues, sentido espacial y geometría están íntimamente relacionados y la conjugación de los conceptos de la geometría con las habilidades del sentido espacial, puede repercutir en un beneficio del aprendizaje de los alumnos en términos geométricos.

El modelo de Van Hiele

Un modelo que puede resultar útil para el propósito planteado de generar una secuencia de actividades con la que desarrollar el sentido espacial es el propuesto en los años ochenta por los esposos Pierre Marie Van Hiele y Dina Van hiele-Geldof en sus tesis doctorales (precisamente es un modelo que se ha tenido muy en cuenta en la primera de las propuestas que se ofrecen después). El modelo parte de la frustración que reflejan ambos ante la dificultad que muestran muchos alumnos para entender las Matemáticas y, en especial, la geometría:

> "Cuando empecé mi carrera como profesor de Matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil [...] En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles de pensamiento."

Así, plantea la existencia de diferentes niveles de razonamiento en la persona que aprende y propone una enseñanza organizada en diferentes fases de aprendizaje que tienen como objetivo potenciar el progreso de un alumno en su nivel de razonamiento.

El modelo de razonamiento de Van Hiele original habla de tres niveles de razonamiento, que tras investigaciones posteriores se han ampliado a cinco. Se describen someramente a continuación (supondría una extensión considerable plasmar todas las características propias de cada uno de los niveles):

- Nivel I. Reconocimiento. En este nivel se encuentra el alumno que usa propiedades imprecisas para describir, identificar, ordenar y comparar las formas; con frecuencia utiliza prototipos visuales ("se parece a..."); concibe las figuras como objetos individuales, sin ser capaz de clasificarlas por sus características matemáticas; identifica partes, pero no es capaz de analizar la figura en términos de sus componentes; etc.
- Nivel II. Análisis. El alumno de este nivel es más preciso en sus descripciones y utiliza propiedades matemáticas cuando habla de las formas, siendo capaz de analizar sus partes. Sin embargo, para definir una figura da un listado de sus propiedades, no identifica cuáles son necesarias y suficientes; no ve la necesidad ni la misión de la definición; no es aún capaz de deducir unas propiedades de otras, etc.
- Nivel III. Clasificación. El alumno comienza a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático. Deduce unas propiedades de otras, aunque de manera informal. Comprende pasos individuales de una demostración formal, pero no entiende la estructura y no sería capaz de ver cómo se puede alterar el orden lógico de la misma.
- Nivel IV. Deducción formal. El alumno puede entender y realizar razonamientos matemáticos formales. Las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para él e incluso pude construir, no solo memorizar, una demostración de distintas maneras.
- Nivel V. Rigor. El alumno es capaz de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática. Acepta la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y puede analizarlos y compararlos.

De estos niveles, es probable que los que puedan ser de interés para un docente de la etapa de Educación Secundaria y Bachillerato sean los tres primeros. El nivel I aún puede ser propio de algunos alumnos que llegan de la etapa anterior; otros muchos partirán de un nivel II más o menos avanzado. El desarrollo del pensamiento formal, que se produce durante estos años, permitirá alcanzar el nivel III a gran parte del alumnado en los cursos superiores. Sería óptimo que en Bachillerato y, sobre todo, de cara a preparar a alumnos para el posterior estudio de carreras científicas, se afianzará ese nivel III, y estar así en vía de dar un salto al nivel IV que les será necesario. Al menos esta es la interpretación personal que da el autor de la comunicación.

Hay que tener en cuenta algunas consideraciones sobre la propuesta de Van Hiele. Primero que un estudiante solo puede entender las Matemáticas el profesor le presente a su nivel. Así, si una relación matemática no puede ser expresada de forma comprensible para su actual nivel es necesario esperar. En ese sentido, cada nivel está asociado a un lenguaje específico. Esto se ve muy claro con la palabra "demostrar": para un alumno del nivel 1 no tiene ningún significado matemático, es una palabra que solo conoce en su lenguaje común; para un alumno de nivel 2, adquiere el sentido de probar que una propiedad se cumple para algunos casos; y para un alumno de nivel 3 empieza a tener un significado, aunque todavía informal.

Una pauta muy a tener en cuenta es que Van Hiele plantea un progreso a través de los niveles de razonamiento a partir de la experiencia, es decir, mediante problemas y actividades que ayuden a los alumnos a exteriorizar los elementos de razonamiento implícito propios del nivel siguiente. Esto implica que, aunque el modelo no propone una metodología didáctica concreta, algunos métodos sean más apropiados que otros. Por último, se ha tomado la licencia hasta ahora de hablar de "alumno de nivel...", pero esto no es del todo correcto, ya que los niveles tienen un carácter local. Un alumno puede estar en distintos niveles según el área o temática de la geometría.

En base a todo esto, muy en especial a la idea de progresar mediante la propia experiencia, los Van Hiele proponen la organización de secuencias didácticas en cinco fases de aprendizaje:

- Fase I. Información: El alumno recibe información sobre los materiales, los conceptos y la tipología de problemas que se van a trabajar. El profesor, a su vez, a partir de estas actividades y diálogos iniciales, determina el conocimiento previo de los alumnos. Supone, por lo tanto, una primera toma de contacto.
- Fase II. Orientación Dirigida: Está formada por actividades que ayudan al alumno a descubrir y construir los conceptos, propiedades y relaciones que se espera que aprenda. Están completamente dirigidas hacia los mismos, por lo que no han de ser problemas abiertos.
- Fase III. Explicitación: Más que una fase se trata de una actividad continua durante todo el proceso. Consiste en el diálogo y la reflexión en grupo, entre los estudiantes y/o con el profesor.
- Fase IV. Orientación libre: Tiene como objetivo perfeccionar el conocimiento. Aquí ya pueden entrar en escena problemas abiertos, de varias etapas, más complejos y/o que pongan en relación distintos conceptos y/o propiedades. El profesor actúa de guía y fomenta la discusión.
- Fase V. Integración. Supone una visión general de los contenidos y métodos poniéndolos en relación con otros campos de estudios. Está compuesta por actividades de acumulación, comparación y combinación de los conocimientos que ya tienen. No deben producir nuevo conocimiento.

Con todo esto la idea de Van Hiele es la de llevar a cabo una enseñanza cíclica de la geometría, a través de las fases de aprendizaje, para ascender en los niveles de razonamiento, y en consecuencia, para mejorar la comprensión y el dominio de la geometría.

Geogebra Classroom. La herramienta

Como se mencionaba en la introducción no se trata de describir los aspectos técnicos de la herramienta al detalle. Se ofrecen, no obstante, dos enlaces que ayudarán a iniciarse y progresar con GeoGebra Classroom:

https://www.geogebra.org/m/fstbrmvt (Sitio web de GeoGebra).

https://www.youtube.com/watch?v=t_5rZ97BRg0&t=82s (Vídeos de la S.M.P.M. “Emma Castelnuovo”).

En el primer enlace se nos describen las funciones de GeoGebra Classroom. Son destacables tres de ellas. En primer lugar, facilita la elaboración de tareas interactivas, así como su secuenciación; en segundo lugar, permite monitorizar el progreso de los estudiantes; y en tercer lugar, da pie a iniciar discusiones y debates entre alumnos y entre alumnos y profesor.

El funcionamiento de GeoGebra Classroom se describe a continuación: el profesor puede almacenar en su perfil de GeoGebra (es idóneo tener creado este perfil) diferentes recursos: actividades y libros de actividades. Estos los puede crear él mismo o buscar alguno de los que ya existen de otros autores para utilizarlo directamente o modificarlo. Desde el sitio web de GeoGebra, al seleccionar alguno de estos recursos, tiene la opción de crear una clase. Cuando lo hace, y tras establecer el nombre de la misma y otras opciones, la plataforma genera un código. Este lo utilizarán los alumnos para entrar a la clase. Ellos acceden desde la pestaña “classroom” o “aula” situada en el menú desplegable de la izquierda, introducen el código y su nombre (si acceden con cuenta de GeoGebra el nombre es automáticamente el que han dado para la cuenta) y tienen acceso al recurso elegido. El profesor puede ver en todo momento cómo avanza cada alumno en los applets de GeoGebra del recurso en su propia pantalla, y le quedan registradas las respuestas a las preguntas que haya planteado en el recurso y que los alumnos van respondiendo. Durante el proceso el profesor tiene la opción de pausar la clase. En ese momento la clase queda bloqueada en los dispositivos de los alumnos. Esta opción es ideal para que el profesor aproveche a dar instrucciones, corregir algo que no se está comprendiendo, poner en común alguna solución... puede además acceder a las pantallas de los estudiantes desde su ordenador, mostrar su trabajo y dibujar sobre los applets de GeoGebra sin que lo que haga quede registrado. Al finalizar la sesión de clase, esta queda almacenada con todo el trabajo de los alumnos en el perfil de GeoGebra del profesor. Se puede continuar con la misma a partir del mismo código, o se puede dejar pausada para no continuar.

La idoneidad de esta plataforma para secuenciar actividades y fomentar un aprendizaje por descubrimiento constituyen los principales motivos de su elección como medio de interacción en las propuestas. La capacidad para hacer un seguimiento del trabajo de los alumnos también es interesante, además del papel que siempre juega GeoGebra como DGE (Dynamic Geometry Environment) en el proceso de razonamiento y prueba.

En dicho proceso se distinguen habitualmente dos fases. Una primera fase en la que se explora la situación, se formula una conjetura y se buscan los elementos que serán sistematizados después; y una segunda en la que esos elementos se organizan de acuerdo con las reglas de consecuencia lógica.

El papel de los DGEs es especialmente útil en la primera parte del proceso, ya que la posibilidad de arrastrar permite disponer de múltiples ejemplos al instante y observar cómo varían los distintos elementos. Así resulta más fácil formular conjeturas y dar pie a la segunda fase de la demostración.

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

Las propuestas didácticas que se han planteado y que se han experimentado son tres:

- 1ESO. Unidad de polígonos.
- 3ESO. Proyecto final sobre movimientos en el plano.
- ESTALMAT (1ESO). El triángulo. Puntos y rectas notables.

En todas ellas, con sus diferencias en función del nivel y del número de sesiones, se ha procurado llevar a cabo un aprendizaje por descubrimiento, construyendo las definiciones y las propiedades de los objetos y formas a través de actividades dirigidas; dejando espacio para espacios para la reflexión y la puesta en común; y resolviendo tareas más abiertas y/o que conducen a conjeturar y demostrar.

Se describen a continuación brevemente en qué consisten cada una de las propuestas. Se puede acceder al libro de actividades que forman parte de las mismas en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/rqtmgstk (Libro creado para el XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada de GeoGebra).

Aquí aparece una muestra de las actividades utilizadas en las propuestas. A medida que se vayan revisando y refinando el resto de las actividades puede que se añadan a al libro (en el mismo enlace).

Unidad de polígonos 1ESO

De las tres propuestas en esta se ha seguido, no de manera escrupulosa, pero sí tratando de tener en cuenta las pautas y la estructuración de la enseñanza en fases de aprendizaje, el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Muchas de las actividades de la propuesta han sido tomadas del libro de (Corberán et al., 1994), que ofrece toda una propuesta de actividades basadas en el modelo de Van Hiele para la enseñanza secundaria, o están inspiradas en ellas.

En ella se construyen de manera dirigida y mediante diálogos los conceptos de polígono, concavidad y convexidad o diagonal de un polígono y se incluyen actividades más abiertas como la clasificación y la comparación de los polígonos teniendo en cuenta distintos elementos, o la deducción del número de diagonales de un polígono.

La propuesta fue llevada a cabo con un grupo de 19 alumnos de 1ESO en el IES Jorge Manrique durante el curso 21-22. Además de los contenidos compartidos se trabajó con otros: clasificaciones de triángulos, puntos y rectas notables de triángulos y clasificación de cuadriláteros.

Proyecto de movimientos en el plano y grupos ornamentales 3ESO

Se trata del proyecto diseñado para trabajar durante el mes de junio del curso 21-22 con un grupo de 3ESO del mismo centro. Se eligió el tema de los movimientos en el plano (traslaciones, giros y simetrías) y los grupos ornamentales (rosetones, frisos y mosaicos), pues se trata de un contenido que aparece solo durante este curso en el currículo LOMCE y, en muchos casos o bien se pasa de largo o bien se le dedican muy pocas sesiones, dadas las limitaciones temporales. Mientras las otras dos propuestas se han llevado de manera síncrona durante las sesiones lectivas correspondientes, esta ha combinado una parte síncrona en clase y otra asíncrona de trabajo de los alumnos desde casa. GeoGebra Classroom permite mantener abierta la sesión de clase y los alumnos pueden acceder en cualquier momento y desde cualquier dispositivo con el mismo código que se había generado.

La secuencia de actividades es también guiada hacia los conceptos y propiedades que se quieren poner de manifiesto. En este caso se trata de describir los movimientos, reconocer los elementos del plano que quedan invariantes por cualquiera de ellos, llegar a analizar para algunos casos cuál es el resultado de la composición de dos movimientos (ej: la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos da como resultado una traslación de vector perpendicular a los ejes y de módulo el doble de la distancia entre los ejes) e identificar algunos grupos ornamentales como rosetones y frisos, así como los movimientos que pertenecen a ese grupo ornamental (los que dejan invariante la figura). Tras esta parte más guiada se ofrece también algún problema abierto como el siguiente:

¿Qué horas del reloj digital se ven igual en el espejo?

Esta es la única actividad que se comparte en el libro sobre esta propuesta, el resto están en revisión.

El triángulo. Rectas y puntos notables. ESTALMAT I

En el grupo de primer año de ESTALMAT de la provincia de Palencia se ha realizado una secuencia de actividades y problemas en la que también se ha hecho uso de GeoGebra Classroom, en el curso 21-22 y en el presente curso 22-23.

Con este grupo la dinámica ha sido diferente: no se ha llevado a cabo un proceso de descubrimiento tan marcadamente guiado, sino que se ha partido ya de definiciones que se han construido (los puntos y las rectas notables, fundamentalmente) y analizado para sacar a la luz sus propiedades; y se ha dado prioridad al proceso de razonamiento y prueba mediante problemas en los que intervienen los puntos y rectas notables y los ángulos de triángulos y otros polígonos.

En primer lugar, porque el número de sesión era tres. Si bien estas sesiones son de casi tres horas (restando un breve descanso) parte de las mismas se dedica a la resolución de problemas, no solo de índole geométrica. En segundo lugar, porque las habilidades de estos alumnos para el razonamiento matemático dan pie a la resolución de problemas abiertos y de procesos de prueba.

Los contenidos han sido las triangulaciones de un polígono, la suma de los ángulos interiores (que se deduce del anterior), los puntos y rectas notables del triángulo y sus propiedades y la recta de Euler. En el curso 20-21 se llevó a cabo, además, la construcción de la circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Feuerbach.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. (2019). *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34, 66–72

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M.P., Jaime, A., Margarit, J.B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* CIDE, Ministerio de Educación y Ciencia.

Flores, P. Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Madrid: Pirámide.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Versión castellana: *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción y edición realizada por SAEM Thales (Sevilla, 2003).

Para hacer referencia al artículo:

Álvaro Vielba Iglesias (2022). GeoGebra classroom: ejemplos de uso en el aula para el desarrollo del sentido espacial. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 70 - 77). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

TALLER CASIO: LA CALCULADORA, ¿AMIGA O ENEMIGA?

Claudia Lázaro del Pozo[a], Elena Virseda Marín[b]

[a]Consejería de Educación y FP de Cantabria, [b]Casio División Educativa…

Resumen

La calculadora científica es un recurso que se encuentra bastante generalizado entre el alumnado de ESO y Bachillerato. Además, el uso de la calculadora está contemplado en los currículos de Matemáticas, tanto de la LOMCE como de la LOMLOE. Sin embargo, no siempre se saca provecho de las posibilidades didácticas que ofrece esta herramienta. Por este motivo, el taller tiene como objetivo mostrar aplicaciones didácticas que ofrece la calculadora en las aulas de ESO y Bachillerato, ya que puede favorecer el proceso de aprendizaje del alumnado. Todas las actividades trabajadas se plantean con los modelos de calculadoras ClassWiz de CASIO FX-570/991 SPXII.

Palabras clave: *calculadora, metodología, matemáticas, secundaria…*

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO CON CALCULADORA

Puede que exista profesorado resistente a utilizar la calculadora pensando que no favorece el aprendizaje del alumnado. Sin embargo, vamos a mostrar ejemplos de diferentes contenidos en los que el uso apropiado de la calculadora favorece un enfoque competencial en la enseñanza de las matemáticas.

Resolución de ecuaciones

$Ejercicio$: ***Resuelve la ecuación*** $x - 5 = \frac{x^2-8}{3} + 5$

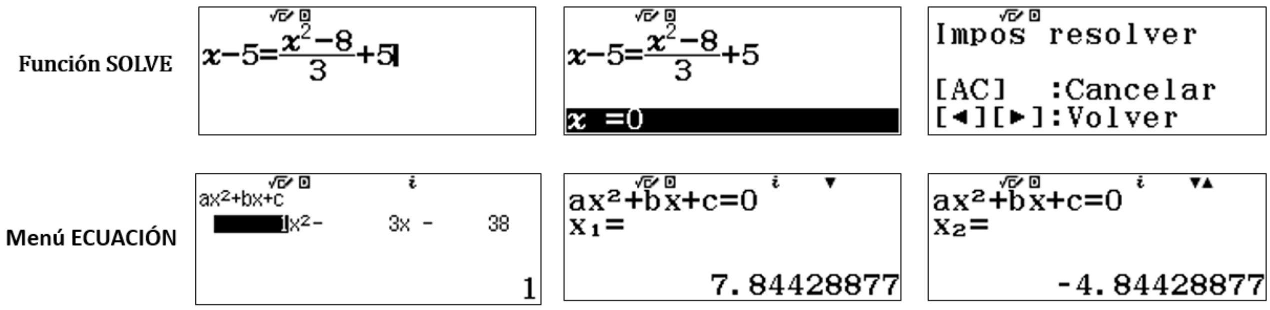
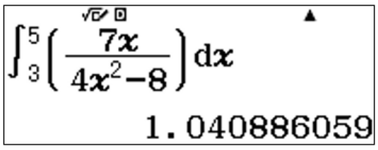


Figura 4. Ejemplo de resolución de una ecuación con la calculadora.

Resolución de integrales definidas

Ejercicio: ***Calcula la integral*** $\int_3^5 \frac{7x}{4x^2-8}\,dx$



*Ejercicio: **Calcula la integral*** $\int_{-3}^{4} \frac{7x}{4x^2-8}\,dx$

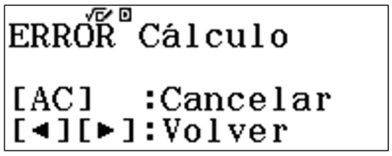
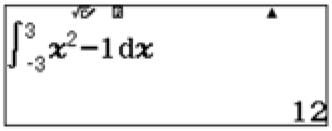
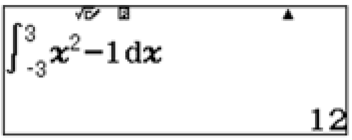
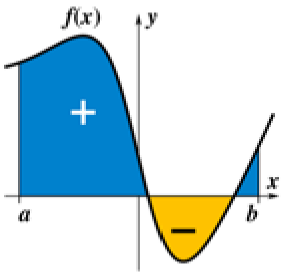


Figura 2. Ejemplo de resolución de una integral definida con la calculadora.

Ejercicio: ¿Cuál es el área delimitada por la curva
$y = x^2 - 1$ *y las rectas* $x = -3$ *y* $x = 3$*?*







Valor de la integral $\neq$ *Área*

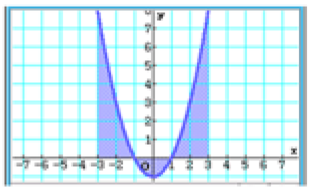
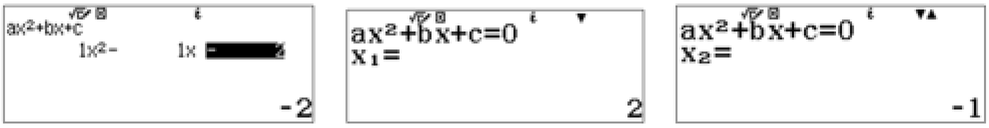


Figura 3. Ejemplo de resolución de un área limitada por curvas con la calculadora.

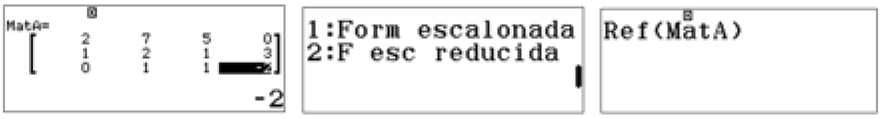
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

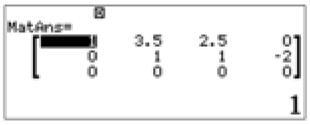
Ejercicio: **Estudia el sistema según los valores del parámetro** $\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 \quad \rightarrow \quad a^2 - a - 2 = 0$$



Si a=2





$rango\ C = rango\ A = 2 < n^{o}\ incógnitas$

Si a=2 el sistema es compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

Figura 4. Ejemplo de resolución de un sistema de ecuaciones con parámetro.

Resolución de problemas con matrices

Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S (sencillas), N (normales) y L (lujo). Cada vivienda sencilla tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda normal tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de lujo tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas. Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras, cada ventana mediana tiene dos cristales y 4 bisagras; y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.

Calcular una matriz que exprese el número de cristales y de bisagras necesarias en cada tipo de vivienda.

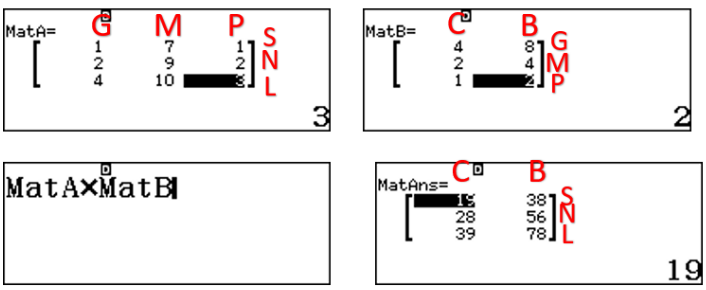
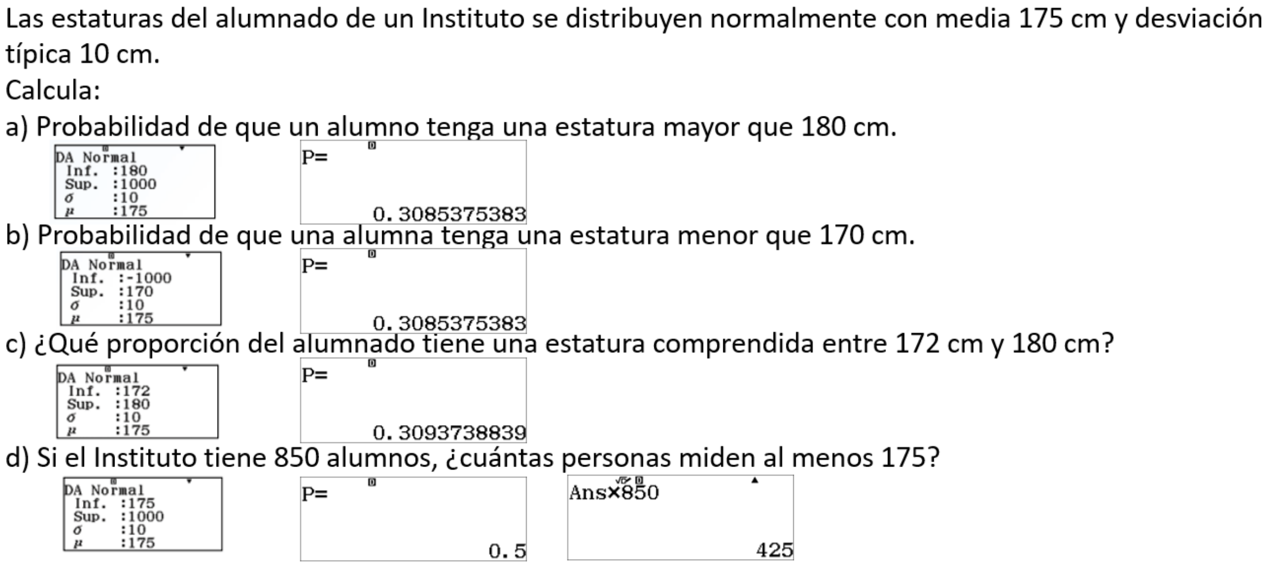


Figura 5. Ejemplo de resolución de un problema con matrices.

El estilo de letra en el cuerpo del texto es el MM Normal. Este estilo usa por defecto la fuente Times New Roman 12, texto justificado, separación anterior y posterior de párrafo de 6 puntos, interlineado sencillo y control de líneas viudas y huérfanas activado.

Resolución de problemas de distribución normal


Las estaturas del alumnado de un Instituto se distribuyen normalmente con media 175 cm y desviación típica 10 cm.

Calcula:

a) Probabilidad de que un alumno tenga una estatura mayor que 180 cm.

b) Probabilidad de que una alumna tenga una estatura menor que 170 cm.

c) ¿Qué proporción del alumnado tiene una estatura comprendida entre 172 cm y 180 cm?

d) Si el Instituto tiene 850 alumnos, ¿cuántas personas miden al menos 175?

Figura 6. Ejemplo de resolución de actividades sobre distribución normal.

SITUACIONES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

En este apartado se muestran dos publicaciones de gran utilidad para plantear situaciones de aprendizaje matemático. Estos libros se han realizado por un grupo de trabajo de la FESPM sobre uso de las calculadoras en el aula con el apoyo de la División Educativa de CASIO.

La incorporación de un recurso didáctico en el aula, como la calculadora, siempre supone un esfuerzo. Por un lado, hay que aprender bien su funcionamiento y por otro, hay que tener el material adecuado para trabajar con los alumnos en clase. Con estos libros se quiere ayudar al profesor en este proceso, dotándole de un conjunto de problemas contextualizados que han sido previamente llevados al aula por sus autores.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) siempre ha apoyado y fomentado el uso de la calculadora científica y gráfica en el aula, por este motivo, existe una estrecha y activa colaboración con la División Educativa de CASIO. La calculadora, usada de forma adecuada en todas las etapas educativas, desde Primaria hasta Bachillerato, favorece y ayuda a aprender Matemáticas.

Puedes descargar los libros en el siguiente enlace.

Figura 7. Libros actividades para el aula con calculadora científica.

También la revista Casio News ofrece recursos educativos para trabajar con la calculadora en el aula.

Para hacer referencia al artículo:

Claudia Lázaro, Elena Virseda Marín (2022). Taller Casio La calculadora, ¿amiga o enemiga? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 78 - 82). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

CÓMO PASAR DE UNA SITUACIÓN MATEMÁTICA A UN PROBLEMA, Y SI ES POSIBLE, RESOLVERLO

Francisco Bellot Rosado
Real Sociedad Matemática Española y Comisión de Olimpiadas RSME

Resumen
Una situación matemática no es (todavía) un problema. Puede ser una figura (en el plano euclídeo, o en el espacio tridimensional), los primeros términos de una sucesión numérica definida por recurrencia, los primeros valores de una función cuya expresión no se conoce…. Hay muchos ejemplos en la literatura sobre resolución de problemas.

En mi caso, el paso de una situación matemática a un problema lo empecé a ver (y a experimentar) durante los Simposios de Educación Matemática que se celebraron durante bastantes de las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas a las que asistí como Jefe de la Delegación de España. Y quien dirigió estos Simposios fue mi admirado colega brasileño Eduardo Wagner, que en la Ibero de Fortaleza (Brasil), nos ofreció varios ejemplos muy interesantes de estas situaciones, algunas de las cuales fueron resueltas en el simposio e incluso incorporadas a la Competición.

Palabras clave: *Resolución de problemas matemáticos, Estrategias de resolución*

Situación 1
Helen divide 365 por cada uno de los números 1, 2, 3,…, 365 y escribe la lista de los 365 restos.
Phil divide 366 por cada uno de los números 1, 2, 3,…, 365, 366 y escribe la lista de los 366 restos.
Problema 1
¿Cuál de las dos listas tiene una suma mayor, y por cuánto?
Origen del problema: Olimpiada británica de 2017.
Solución 1
La descomposición de 365 y 366 en factores primos es $365 = 5X73$ y $366 = 2X3X61$. Por lo tanto, los conjuntos de divisores de ambos números son

$$D_{365} = \{1, 5, 73, 365\};\ D_{366} = \{1, 2, 3, 6, 61, 122, 183, 366\}.$$

A efectos del problema, podemos eliminar 366 de nuestra consideración, pues no añade nada a la lista de Phil, pues su último resto es 0. Por lo tanto nos que damos con 1,2,3,6,61,122,183 (*).
No debemos caer en la "trampa" del enunciado e intentar calcular efectivamente las dos sumas: en realidad lo que se pregunta es "¿cuál, y por cuánto más, de las dos listas tiene una suma mayor?".
Podemos escribir las igualdades siguientes, que dan los cocientes y restos enteros por por defecto en los dos casos: $365 = q{\cdot}k + r$, con $0 \le r \le k-1$ y $366 = 365 + 1 = qk + (r+1)$. Podemos hacer una lista comparativa de los restos en ambos casos, subrayando los casos en los que el resto sea mayor:

d(divisor)	1	2	3	4	5	6	61	122	183	362	363	364	365
Resto Helen	0	<u>1</u>	<u>2</u>	1	0	<u>5</u>	<u>60</u>	<u>121</u>	<u>182</u>	3	2	1	0
Resto Phil	0	0	0	<u>2</u>	<u>1</u>	0	0	0	0	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>

La elección de los valores del divisor que se muestran en la tabla (en la que aparece por error una fila suplementaria vacía) viene justificada por lo que decimos en los párrafos siguientes:
Para todos los números que NO son divisores de 366, el resto de la división de Phil por ellos es una unidad mayor que el resto de la división de Helen, y esto ocurre 365-7=358 veces. Éste es el número de unidades en que la suma de Phil es mayor que la de Helen.
En el caso de los números que SÍ son divisores de 366, los restos para Phil son =; y por lo que a Helen respecta, se tiene: Si $366 = d{\cdot}c$, entonces $365 = d{\cdot}c - 1 = d{\cdot}(c-1) + d - 1$

Luego la suma de restos para Helen en este caso es 0+1+2+5+60+121+182=371 más que Phil.
En conclusión, <u>la suma de Helen es 371-358=13 unidades por encima de la de Phil,</u> y el problema queda resuelto.

Situación 2

Se considera el número (posiblemente irracional) $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}$.

Problema 2

Racionalizar el denominador del número anterior.

<u>Origen del problema: Revista escolar húngara Kömal, 1990</u>

<u>Solución 2</u>

Multiplicando el denominador por $1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}$ se obtiene $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}=\dfrac{1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}}{\left(1-5\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{32}}$ (1)

, porque $\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{32}=\sqrt{32}$. Pero $\left(1-5\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{32}=...=51-14\sqrt{2}$, así que de (1) pasamos a $\dfrac{1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}}{51-14\sqrt{2}}$, y volviendo a racionalizar, resulta

$$\frac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}=...=\frac{\left(51+14\sqrt{2}\right)\left(1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}\right)}{51^2-2\cdot196}=\frac{\left(51+14\sqrt{2}\right)\left(1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}\right)}{2209}.$$

Situación 3

Supongamos que los números reales α y β verifican $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1$ y $\beta^3-3\beta^2+5\beta=5$.

Problema 3

Calcular el valor de $\alpha+\beta$

<u>Origen del problema: Revista rusa Kvant, 1991</u>

<u>Solución 3</u>

El primer miembro de ambas igualdades es el valor del polinomio $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$ en $x=\alpha y\ x=\beta$, respectivamente. Si convenimos en hacer el cambio de variable $y=x-1$, la función se convierte en $g(y)=y^3+2y=y\left(y^2+2\right)$, que es estrictamente creciente en todo su dominio, con un punto de inflexión en el origen de coordenadas. Entonces, los números α y β están determinados unívocamente por las ecuaciones $g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2$ y $g(\beta-1)=f(\beta)-3=2$. Como la función es impar, $\alpha-1=-(\beta-1)$, y $\alpha+\beta=2$.

<u>Situación 4</u>

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C. Los cuadrados $BCDE$ y $ACFG$ se construyen exteriores al triángulo. Además, $H=AE\cap BC$ y $K=AC\cap BG$

Problema 4

Hallar la medida del ángulo $\angle DKH$.

Origen del problema: Revista del Australian Mathematics Trust 1987

<u>Solución 4</u>

Sean a y b las medidas respectivas de los lados de los cuadrados $BCDE$ y $ACFG$. Sean $CK=m$ y $CH=n$. Ya que $KC\parallel GF$, los triángulos $\triangle BCK$ y $\triangle BFG$ son semejantes. Entonces

$\frac{KC}{GF}=\frac{BC}{BF}\Rightarrow\frac{m}{a}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow m=\frac{ab}{a+b}$. De manera similar, como $CH \parallel DE$, los triángulos $\triangle ACH$ y $\triangle ADE$ son semejantes, y $\frac{CH}{DE}=\frac{AC}{AD}\Rightarrow\frac{n}{b}=\frac{a}{a+b}\Rightarrow n=\frac{ab}{a+b}$.
De aquí deducimos que $m=n$. Esto significa que el triángulo $\triangle CKH$ es rectángulo isósceles y $\angle DKH=\angle CKH=45^{\circ}$.

<u>Situación 5</u>
Se considera la igualdad $8^x+27^x+64^x+125^x=24^x+30^x+40^x+60^x$.
Problema 5
Hallar los valores de x que verifican la igualdad
Origen del problema: Revista húngara Kömal, 1987
<u>Solución 5</u>
Hagamos varios cambios de variable: $a=2^x, b=3^x, c=4^x, d=5^x$. De aquí se deduce que $24^x=2^x\cdot 3^x\cdot 4^x=abc$. Análogamente, $30^x=abd$, $40^x=acd$ y $60^x=bcd$. La ecuación es $a^3+b^3+c^3+d^3=abc+abd+acd+bcd$. Por la desigualdad de las medias, es (1) $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$;(2) $\frac{a^3+b^3+d^3}{3}\geq abd$;(3) $\frac{a^3+c^3+d^3}{3}\geq acd$; y (4) $\frac{b^3+c^3+d^3}{3}\geq bcd$. De las cuatro se deduce que $a^3+b^3+c^3+d^3\geq abc+abd+acd+bcd$, y el signo igual vale si y solamente si $a=b=c=d$, es decir $2^x=3^x=4^x=5^x$. Como $2^x=4^x\Leftrightarrow 2^x=1\Leftrightarrow x=0$, esta es la única solución de la ecuación.

<u>Referencias bibliográficas</u>

Se indican en las fuentes de cada problema.

Para hacer referencia al artículo:

Francisco Bellot Rosado (2022). Cómo pasar de una situación matemática a un problema y, si es posible, resolverlo. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 83 - 85). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

DIVERSOS RECURSOS DIDÁCTICOS PARA TRABAJAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA

Novo, M. L.[a], Cuida, A.[a]

[a] Universidad de Valladolid

Resumen

Desde este taller se pretende acercar al profesorado de Educación Infantil y Primaria el significado de la competencia matemática en la escuela. Actualmente vivimos en una etapa social complicada. La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe ayudar a las niñas y niños a comprender el mundo que les rodea. ¿Por qué los recursos manipulativos y el juego favorecen la adquisición de los conceptos y dan lugar a situaciones de aprendizaje? Se expondrá el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. Nuestro objetivo primordial es comprobar algunas oportunidades de aprendizaje significativo que se presentan, a través de los recursos, para trabajar los distintos contenidos: numérico, algebraico, geométrico, de la medida y estocástico.

Palabras clave: *competencia matemática, educación matemática, enfoque de itinerarios didácticos, recursos, juego.*

COMPETENCIA MATEMÁTICA

De acuerdo con Schoenfeld (2004) durante la década de 1990, la enseñanza de las matemáticas se convirtió en un tema lleno de controversias conocidas como las guerras de matemáticas. La génesis de los problemas se puede buscar hasta la "reforma" incitada por el NCTM (2003) y sus principios y estándares curriculares para la educación matemática. Los tradicionalistas temían que los currículos orientados a la reforma, "basados en estándares" fuesen superficiales y que socavasen los valores matemáticos clásicos. Pero, incluso, para los más reformistas, dichos planes de estudio reflejaban una visión más profunda y rica de las matemáticas que el plan de estudios tradicional.

Schoenfeld (2004) lo que hace es describir el contexto y proporciona detalles sobre el estado de la cuestión. En los últimos años se habla de un currículo encaminado a conseguir ciudadanos competentes y lo mismo sucede en la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas. En este contexto se plantean las siguientes cuestiones: ¿las matemáticas son para la élite o para las masas? ¿hay tensiones entre "excelencia" y "equidad"? ¿deberían las matemáticas ser vistas como una fuerza democratizadora o como vehículo para mantener el statu quo?

En el NCTM (2003) la competencia matemática se concibe en términos de Estándares que describen los contenidos y los procesos matemáticos. En lo que se refiere a los contenidos se establecen: números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad y en lo relacionado con los procesos matemáticos: resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, la representación y las conexiones.

Según Niss (2003) la competencia se concibe como una capacidad o habilidad para comprender, juzgar, usar, relacionar, realizar, desarrollar, aplicar, etc. la matemática en una variedad de contextos intra- y extra- matemáticos y en diversas situaciones en las que las matemáticas desempeñan o podrían desempeñar un papel.

Las competencias se desarrollan, se entrenan, etc. Son conjunto de condiciones, cualidades o aptitudes que se enmarcan en una serie de elementos caracterizados con los fines educativos y los diseños curriculares propios del área y del contexto social.

DeSeCo[i] (2003) definió el concepto competencia como “la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada”. La competencia “supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz”. Se contemplan, pues, como conocimiento en la práctica, es decir, un conocimiento adquirido a través de la participación activa en prácticas sociales y, como tales, se pueden desarrollar tanto en el contexto educativo formal, a través del currículo, como en los no formales e informales. También desde el marco del Proyecto PISA 2003, la OECD (2004) plantea un enfoque conceptual relacionado con la competencia matemática.

Partiendo de estas premisas Alsina (2021) propone un planteamiento competencial en el que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se fundamenta en una planificación a través de itinerarios de enseñanza, donde los materiales manipulativos y el juego son considerados herramientas fundamentales.

Enfoque de itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (EIEM)

Alsina (2010, p.14) presenta, de forma sencilla, la organización de distintos contextos y su frecuencia de uso recomendable en el desarrollo del pensamiento matemático en la pirámide de la educación matemática. Los niños llegan a la escuela con conocimientos matemáticos informales, se mejora el aprendizaje usando el entorno, y realizando tareas previas con materiales manipulativos tanto ambientales como estructurados, juegos, refranes, cuentos, conversaciones matemáticas para pasar, por último, a la práctica sobre papel. Resulta de gran utilidad porque, hoy en día, estas recomendaciones, en algunas aulas no se llevan a cabo y, se trabaja principalmente con cuadernos de fichas, ajenas, en ocasiones, a contextos y situaciones reales de la vida diaria de los pequeños, de esta forma no se favorece la competencia matemática (Wilhelmi et al., 2013).

Alsina (2019, 2022) concibe un itinerario didáctico de enseñanza en tres fases: contextos informales, contextos intermedios y contextos formales. Según esta idea, los itinerarios didácticos para cada bloque de contenido se constituyen en tres niveles, en el primero aparecen los contextos imprescindibles para enseñar contenidos matemáticos (situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos); en el segundo se muestran los contextos de enseñanza-aprendizaje que hacen de puente entre los contextos reales y los formales (recursos literarios y tecnológicos), y en el último nivel los recursos gráficos, para completar el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico y avanzar hacia la formalización.

Una implementación de aula de acuerdo con estas pautas se encuentra en Alsina et al. (2016), donde niños y niñas de 5 años observan la Calle Mayor de Palencia con “ojos matemáticos”, a partir de una perspectiva fundamentada en la Educación Matemática Realista (Freudenthal,1991).

Una de las razones que aporta Berdonneau (2008) para explicar que la manipulación brinda situaciones de aprendizaje es que el objetivo primordial de dicha manipulación es suministrar a los niños herramientas que ayuden a la producción de representaciones mentales. Favorecen la asimilación de ideas y conceptos matemáticos a través de la concreción física que suponen dichos materiales.

Se asume, como se ha comentado anteriormente, que la educación matemática es el camino a través del cual las niñas y los niños van integrando los instrumentos para ser ciudadanos matemáticamente competentes. De hecho, tanto en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, como en Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria se establece la evaluación por competencias.

---

[i] Proyecto de Definición y Selección de Competencias (DeSeCo) de la OCDE.

Para conseguir niños y niñas competentes matemáticamente según Canals (1992), es preciso:

-Ayudar a los niños a crecer en el desarrollo de su pensamiento lógico. Cuando este proceso es armonioso, crecen, a la vez, en otros aspectos de su personalidad. No sólo se trata de comprender aspectos cuantitativos, van a descubrir el mundo que les rodea, poco a poco irán construyendo el esquema mental del espacio…

-No se trata de transmitir conocimientos, sino de crear situaciones para que los niños y niñas observen, experimenten, reflexionen, y saquen conclusiones de lo que han hecho

-Plasmar que las matemáticas ponen en juego muchas facultades de los niños. Todas las acciones que realizan y las relaciones que descubren van a aprender a expresarlas verbalmente, gráficamente y, poco a poco, se irá avanzando en el lenguaje matemático.

Se han de poner en juego muchas capacidades como la memoria, la creatividad, la intuición… Las matemáticas desempeñan un importante papel en la educación de la persona. Se trata de disfrutar "haciendo matemáticas".

Alsina y Planas (2008) concluyen, junto con otros investigadores, que la manipulación no es solamente una manera de aprender lúdica, "tocando" se aprende y el procedimiento es más efectivo. Al mismo tiempo, la utilización de recursos manipulativos es una forma de estimular la autonomía de los niños y las niñas.

A continuación, se pondrán ejemplos de algunos recursos para usar en el aula.

Algunos materiales para los sentidos: numérico, algebraico, geométrico, de la medida y estocástico.

Existen diversos materiales para trabajar el sentido numérico, tanto estructurados como ambientales. Dentro de los estructurados: ábacos, bloques multibase, balanza numérica, regletas de cuisenaire, material Montessori, dominó de números y puntos, loto de sumas y restas, material Herbinière-Lebert, entre otros.

Figura 1. Algunos materiales estructurados para trabajar los números en Educación Infantil

Según Cascallana (2002) las regletas de colores sirven básicamente para que los niños aprendan la descomposición de los números e iniciarles en las actividades del cálculo, todo ello sobre una base manipulativa acorde a las características psicológicas del periodo evolutivo de estos niños.

En un dossier muy interesante de Canals (2011) sobre las regletas se presentan numerosas actividades para trabajar en primaria, propiedades de las operaciones, múltiplos y divisores, …

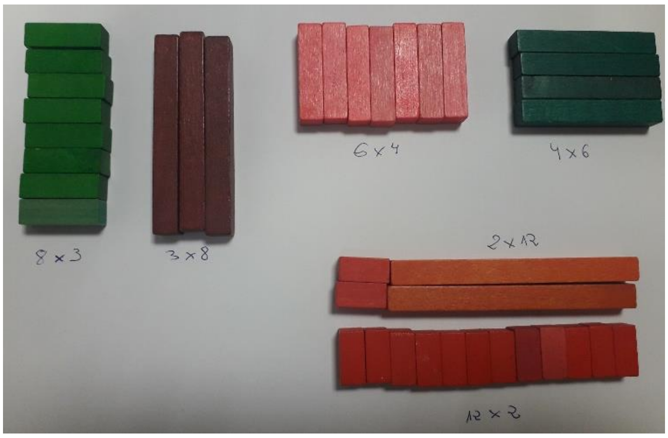


Figura 2. Uso de regletas para Educación Primaria.

Existe un material ambiental como complemento a las regletas de colores (figura 3). Son cartas que tienen el mismo color que las regletas y con puntos, unidos de dos en dos, podemos distinguir números pares e impares, trabajar la asociación de número y cantidad, hacer descomposiciones y composiciones de números, sumas, …

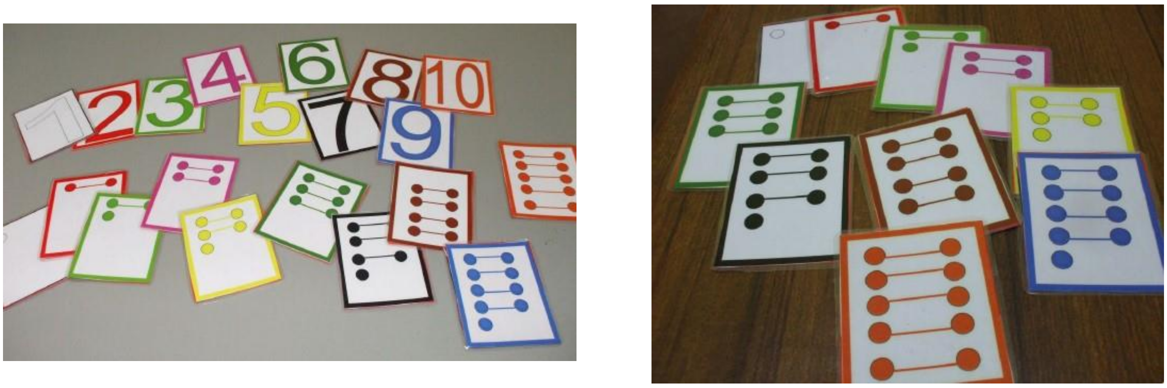


Figura 3. Cartas numéricas y cartas de puntos.

Con flores y manzanas se puede trabajar la composición y descomposición de números, sumas y restas, propiedades de operaciones (figura 4), las manzanas son rojas por un lado y por la parte de atrás son verdes, las flores rosas y moradas.

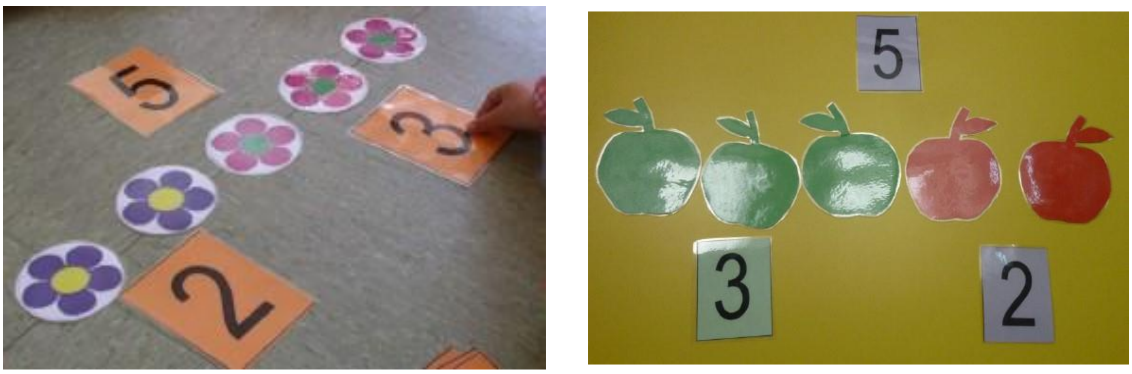


Figura 4. Cartas numéricas y cartas de puntos.

Ejemplo de actividad (figura 5) que presentan Novo et al. (2017, p.35) para trabajar los números junto con la medida de longitud.

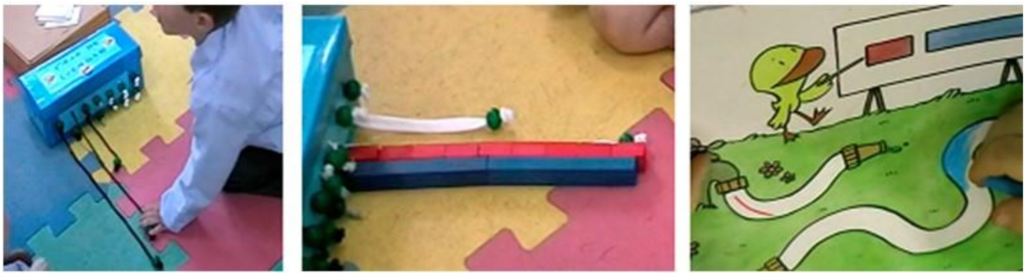


Figura 5. Comparación de longitudes, iniciación a la medida con regletas y en papel.

Ejemplo para trabajar la capacidad (figura 6), a partir de vasos graduados y botellas:

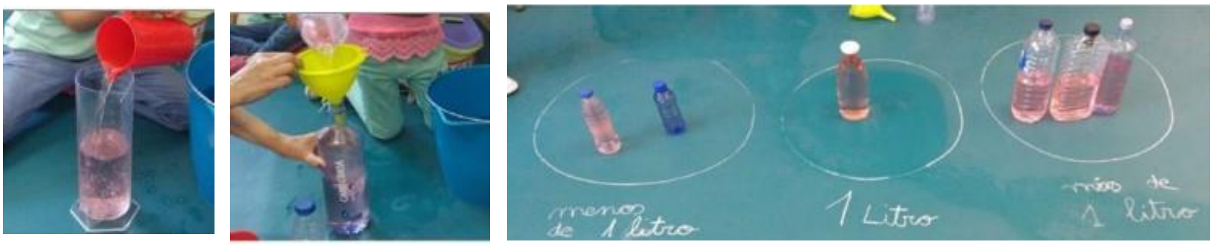


Figura 6. Clasificando por capacidad.

En Teixidor (2010) se presenta el “pajifiguri” también conocido como “cubo didáctico bafi” [ii] que es un cubo construido con pajitas e hilo elástico que, al manipularse, puede convertirse en siete polígonos y tres cuerpos. Si se hace un cubo de 1 mm^3, otro de 1 dm^3 y, el último de 1 m^3 (figura 7) los niños pueden comprobar por ellos mismos mediante la manipulación lo qué es el volumen y comprender conceptos abstractos introduciéndose dentro de un metro cúbico, por ejemplo, acercándose a la realidad.

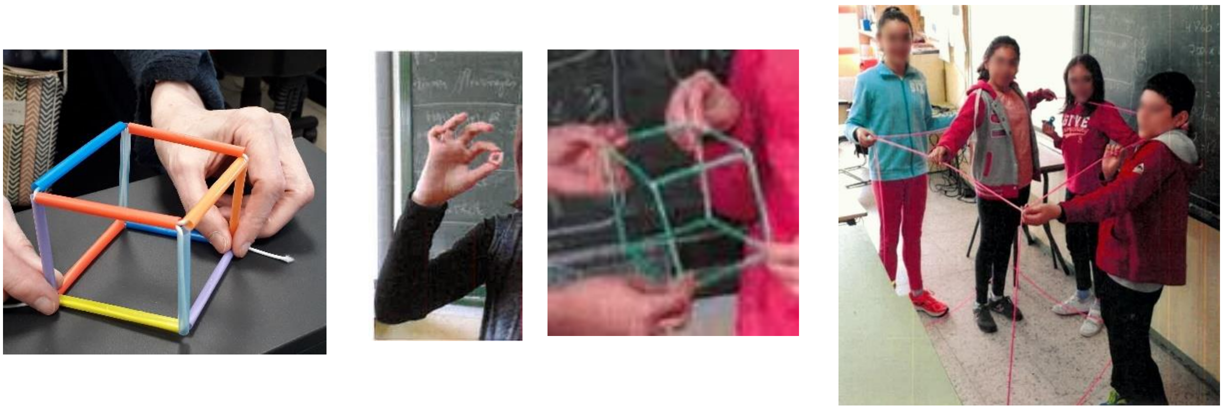


Figura 7. Cubo hecho con pajitas de varias medidas.

Otro material muy útil para fomentar la construcción de los conceptos geométricos, tanto en el plano como en el espacio es el Orbit también comercializado como “Bambuchi”, contiene baritas de diferentes colores y tamaños unas rígidas y otras flexibles y piezas que sirven para realizar uniones, en algunas el número de enganches es par y en otras impar. Se pueden seguir pautas o utilizar libremente (figura 8).

[ii] https://cubodidacticobafi.files.wordpress.com/2014/04/bafi-guicc81a-didacc81ctica-2015.pdf

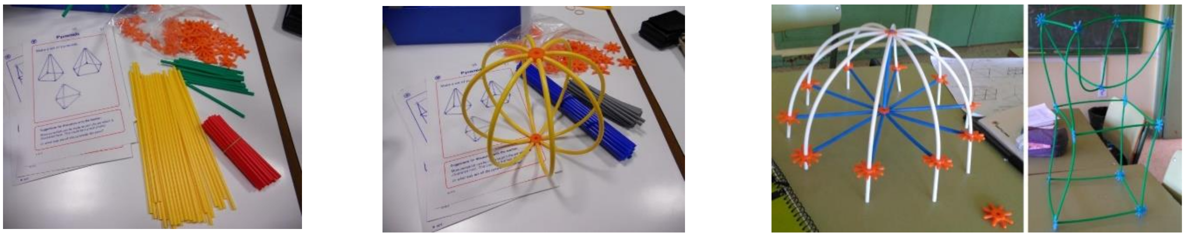


Figura 8. Orbit y construcciones realizadas por los niños y las niñas.

En Novo et al. (2020) se presenta una actividad de representación de datos, se debe hacer un recuento de la forma en la que los niños y niñas llegan al colegio (figura 9).

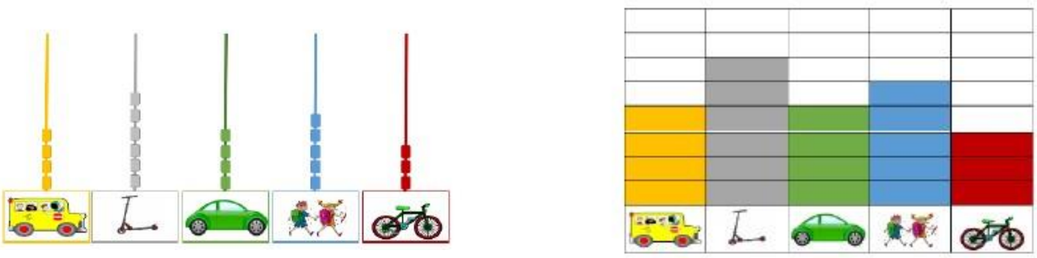


Figura 9. Representación realizada por los niños y las niñas.

El recuento previo a esta representación se hizo con cubos multilink.

Con un libro de espejos se pueden trabajar aspectos geométricos y numéricos (figura10). Podemos ver cómo al modificar el ángulo se obtienen polígonos diferentes, simetrías. En lo que se refiere a números en este caso concreto 4x5=20 y, además, 20 dividido entre 4 son 5

Figura 10. Trabajando con libro de espejos.

El geoplano es un recurso didáctico ideado por Gattegno para que mediante la manipulación investiguen las relaciones geométricas, esto permite a los niños una mejor comprensión de toda una serie de términos abstractos, que muchas veces no entienden o generan ideas erróneas sobre ellos. Se puede trabajar con el geoplano cuadrado, triangular y circular. Se pueden reconocer formar, conceptos dentro y fuera, diferentes segmentos, ángulos, caminos, simetrías, polígonos, frisos, cubrimientos, áreas y perímetros, comparación y ordenación de superficies por su área, construir figuras semejantes.

Se proponen las siguientes cuestiones en papel de trama cuadrada:

- Construir todos los posibles triángulos en un tablero 3x3.

- Trazar todos los posibles cuadriláteros en un tablero 3x3.

- En el tablero 5 por 5 forma: Un cuadrado que deje dentro 5 puntas, dos cruces dejando cada una dentro 5 puntas, tres cuadrados que dejen cada uno dentro 9 puntas.

-Busca cuadrados en un tablero 2x2, 3x3 y 4x4.

- ¿Se puede dibujar u triángulo equilátero en una malla cuadrada?

Se presenta en la figura 11 un dominó de áreas, la actividad en papel posterior y algunas actividades con un geoplano de mala cuadrada 10x10.

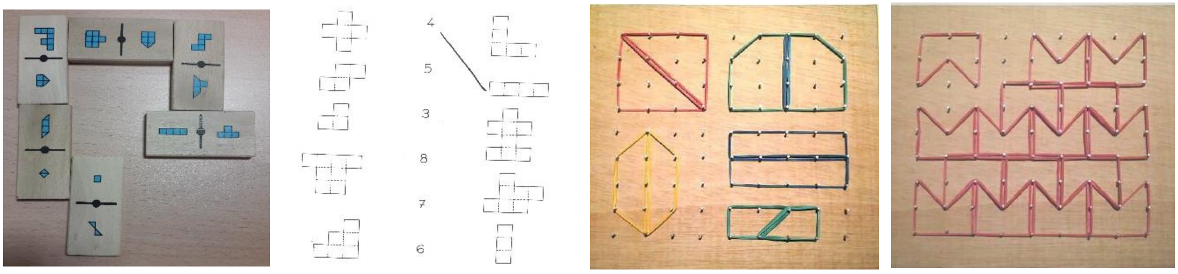


Figura 11. Dominó de áreas, producción en papel y ejemplo de actividades en geoplano cuadrado 10x10.

Otro material interesante para trabajar aspectos geométricos, como por ejemplo estudiar figuras con el mismo perímetro y distinta área, son las tiras de mecano (figura12).

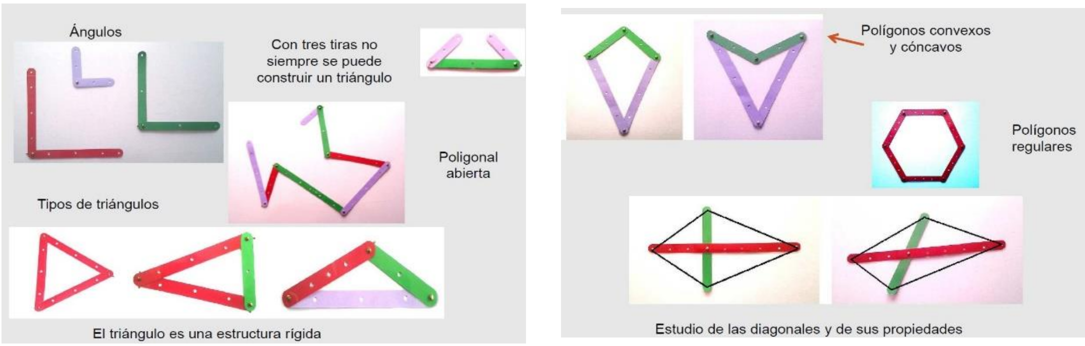


Figura 12. Construcciones con tiras de mecano.

Para trabajar la orientación espacial se pueden hacer muchos juegos, buscar un tesoro escondido, dejando pistas por la clase (Berciano et al. 2016). También se pueden utilizar robots educativos (figura 13) Code & Go Robot Mouse y Cubetto.

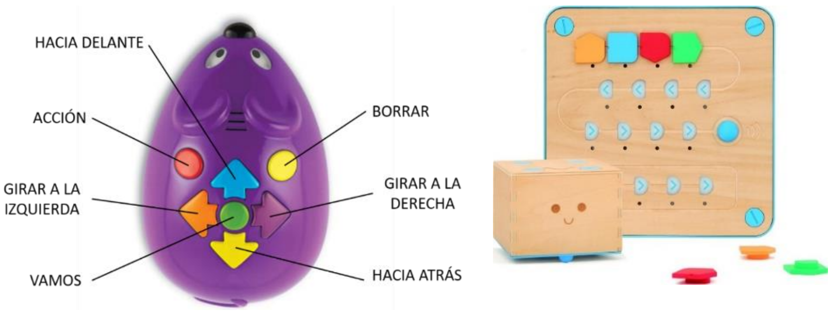


Figura 13. Code & Go Robot Mouse y Cubetto.

Pondremos ejemplos de tareas ya que los niños y niñas aprenderán jugando.

> El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la Matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?[iii]

[iii] De Guzmán M. (1985). Cuentos con cuentas. Labor bolsillo Juvenil

Agradecimientos

Queremos públicamente dar las gracias, por compartir las experiencias realizadas en sus clases, a todas las profesoras del Colegio Público Federico García Lorca de Valladolid, al Colegio Público Blas Sierra y al Colegio Público Sofía Tartilán de Palencia. En general, a todos los profesionales de la educación y también a nuestro alumnado. Hemos ido avanzando en este camino apasionante.

Referencias

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Alsina, Á. (2021). ¿Cómo definir una línea metodológica en el área de Matemáticas? Tomando decisiones en la escuela. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 4*(2), 21-39

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.

Alsina, À., Novo, M. L. y Moreno, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5* (1), 1-20.

Alsina, À. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2016). Tratamiento de la orientación espacial en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. *Revista Números 93*, 31-44

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años).* Graó.

Canals, M. A. (1992). *Per una didàctica de la Matemática a l`escola.* Eumo.

Canals, M. A. (2011). *Las regletas*. Les dossiers de María Antonia Canals. Rosa Sensat.

Cascallana, Mª T. (2002). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Santillana. Aula XXI.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 2 de febrero de 2022, 28, 14561-14595.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 2 de marzo de 2022, 52, 24386-24504.

NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. SAEM Thales.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *In 3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).

Novo, M. L., Alsina, À., Marbán, J. M. y Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Revista Comunicar*, *52*, 29-39. https://doi.org/10.3916/C52-2017-03

Novo, M. L., Encinas, M. y Cuida, A. (2020). Un acercamiento a la sostenibilidad desde la Educación Matemática Realista en un aula de Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 9*(2), 37-50.

OECD (2004). *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003*.OECD.

Schoenfeld, A. H. (2004). The math wars. *Educational policy, 18*(1), 253-286.

Teixidor, E. (2010). Pajifiguri: un material manipulativo y cuento interactivo. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 74,* 75-92.

Wilhelmi, M. R., Belletich, O., Lacasta, E. y Lasa, A. (2013). Uso de fichas en educación infantil: Ilusión y utilidad. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 22-38.

Para hacer referencia al artículo:

Nova, M.L., Cuida, A. (2022). Diversos recursos didácticos para trabajar la competencia matemática en la escuela. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 86 - 94). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

MATEMAGIA COMO RECURSO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[i]

Mª. Mercedes Rodríguez-Sánchez, José Mª. Chamoso Sánchez, Beatriz Sánchez-Barbero, Mª. José Cáceres García y Mª. Teresa González Astudillo

Universidad de Salamanca

Resumen

El uso en el aula de matemáticas de diferentes recursos y metodologías puede ayudar a aumentar en los estudiantes la motivación, el gusto por esta materia y favorecer su aprendizaje. En este trabajo se muestra la posible realización en el aula de algunas actividades basadas en el uso de la matemagia como recurso didáctico para contribuir al aprendizaje de las matemáticas y potenciar el razonamiento matemático y el pensamiento crítico. Se revela el vínculo entre la magia y las matemáticas y se profundiza en el papel que estas tienen para obtener resultados sorprendentes. En las experiencias realizadas, los estudiantes destacaron aspectos como interés, creatividad, motivación, nivel matemático o intención de seguir utilizando la matemagia como recurso didáctico.

Palabras clave: *matemagia, recurso didáctico, didáctica de la matemática, aprendizaje, motivación, razonamiento matemático*

INTRODUCCIÓN

En la profesión docente es importante conocer y utilizar diferentes recursos didácticos. Su uso puede ayudar a mejorar la actitud de los estudiantes y su aprendizaje. En matemáticas, uno de estos recursos puede ser la matemagia (Rodríguez-Sánchez et al., 2022).

Según Muñoz (2004) la matemagia es la ciencia que utiliza las matemáticas para realizar cosas extraordinarias y asombrosas. Por ello, entendemos al docente matemago como aquel que, utilizando matemáticas, realiza cosas sorprendentes con fines educativos. Alegría y Ruiz (2002) explicaron que, mientras que los magos muestran hechos sorprendentes, los matemáticos tratan de explicarlos. Por esto, entendemos que el docente matemago podría encontrarse en la encrucijada de seguir al mago, que debe guardar el secreto, o dejarse llevar por el docente de matemáticas, que puede ayudar a que los alumnos lo descubran, razonen y aprendan matemáticas. En nuestra opinión, la balanza se inclina hacia esta última opción.

Este trabajo pretende mostrar ejemplos que pongan de manifiesto las bondades de la matemagia como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas.

ALGUNOS MATETRUCOS

A continuación, se presentan algunos matetrucos con los que se pueden trabajar diversos aspectos matemáticos, referidos a los sentidos numérico, algebraico, espacial, medida y estocástico, además del aspecto socioafectivo (de elaboración propia y adaptados de Alegría y Ruiz, 2002, Blasco, 2016; Chamoso y Rawson, 2003; Gardner, 1956; Muñoz, 2004; Paenza, 2017; Rodríguez-Sánchez et al., 2022).

[i] Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Innovación y Mejora Docente "Matemagia como recurso para el aprendizaje de las matemáticas en la formación de docentes" (ID2021/145). Universidad de Salamanca.

Matetruco 1: El globo mágico

Desarrollo:

- Un voluntario escribe un número de tres cifras, no capicúa. Invierte el orden de las cifras, obteniendo un segundo número. Resta el menor del mayor. Con el resultado obtenido, vuelve a invertir el orden de las cifras y, suma estos dos últimos números. Ejemplo: 472–274 = 198; 198+891 = 1089.

- ★ El matemago adivina ¡1089!

Observaciones:

1. Cuida la puesta en escena. Una posibilidad, que da título al matetruco, consiste en pedir a cada espectador que piense una cifra del 1 al 9. El matemago, después de leer las mentes de los asistentes, escribe la predicción. La introduce en un globo, lo infla, anuda y lanza al público. La persona que lo coja dice su cifra y vuelve a lanzar el globo. Este proceso se repite tres veces, de forma que se consiguen tres cifras. El último espectador que recoja el globo será el encargado de custodiarlo. Con esas tres cifras, un voluntario escribe un número, no capicúa y realiza las operaciones mencionadas anteriormente. ¡Se explota el globo y se lee la predicción!

Matetruco 2: Números en Salamanca

Desarrollo:

- Un voluntario piensa un número de 2 cifras. Suma los 2 dígitos. Al número elegido le resta la suma de sus dígitos. Ejemplo, si el número elegido es 38, realiza 3 + 8 =11; 38-11=27.

  Busca el resultado final en el cuadro (Figura 1) y recuerda la imagen que le corresponde.

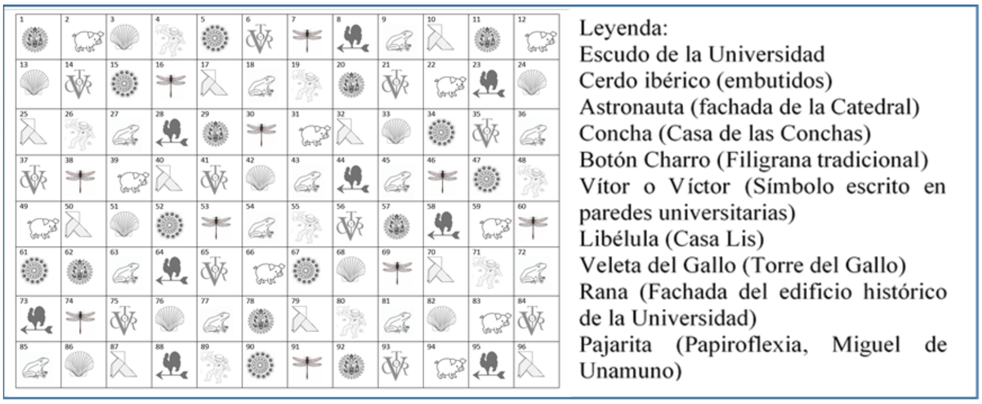


Figura 1. Tablero de imágenes, matetruco "Números en Salamanca"

- ★ El matemago adivina ¡La rana!

Observaciones:

1. Requiere la elaboración del tablero numerado del 1 al 99 (es suficiente del 9 al 81) con diversas imágenes distribuidas en las casillas numeradas. Se recomienda elegir una temática de interés para el público al que se dirige. En la Figura 1 se muestra el tablero (elaborado por los autores) con motivos típicos de Salamanca, que dan título a este matetruco. Se puede utilizar de manera interdisciplinar introduciendo historia, arte, gastronomía, tradiciones, etc.

Matetruco 3: Qué día naciste

Desarrollo:

- Un voluntario busca el día que nació en las tarjetas mágicas (Figura 2) y dice en cuáles está. Ejemplo: su día está en las tarjetas azul, morada y rosa (primera, tercera y cuarta, respectivamente)

Tarjetas mágicas

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Figura 2. Tarjetas mágicas, matetruco "Qué día naciste"

★ El matemago ¡lo adivina al instante, el 13!

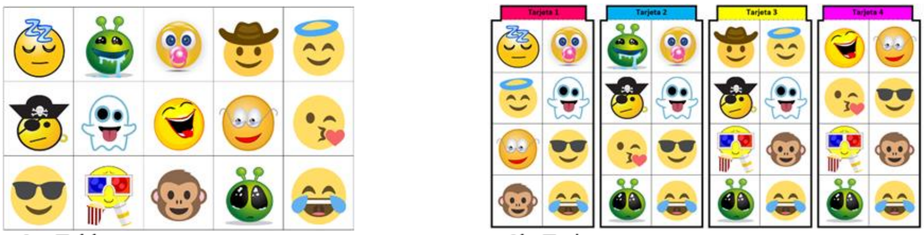
Observaciones:

1. Una variante de este matetruco es el que se presenta a continuación, el Matetruco 4: Qué emoticono te gusta más. En nuestra experiencia, tiene buen resultado hacer los dos, primero el de los emoticonos para despertar la curiosidad y después el del cumpleaños para adivinaciones de números mayores. Entre estos dos, aunque depende de la edad, el matetruco 3 suele ser el preferido.

Matetruco 4: Qué emoticono te gusta más

Desarrollo:

☝ Un voluntario elige un emoticono de los quince que se muestran en el tablero (Figura 3a) y dice al matemago en qué tarjetas está (Figura 3b). Ejemplo: Está en la tarjetas primera y tercera.



3a. Tablero 3b. Tarjetas

Figuras 3a y 3b. Tablero y tarjetas de emoticonos, matetruco "Qué emoticono te gusta más"

★ El matemago, sin ver las tarjetas, lo adivina al instante ¡El santo! 

Observaciones:

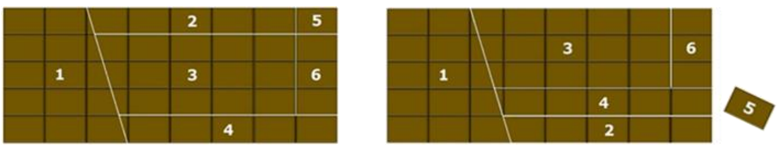
1. Para la puesta en escena, el matemago puede mostrar las tarjetas (Figura 3b), de una en una, de manera ordenada y sin mirarlas, a la vez que pregunta al voluntario si el emoticono elegido está, o no, en cada una de ellas. Cuando termina, al instante lo adivina. Para que resulte sorprendente, el matemago no debe ver las imágenes de las tarjetas en ningún momento y debe ser rápido en la adivinación. En las Figuras 3a y 3b se muestra el material (elaborado por los autores) con imágenes de emoticonos, que da título a este matetruco.

Matetruco 5: Al rico chocolate

Desarrollo:

☝ Un voluntario revisa la tableta de chocolate y observa, de cerca y con atención, mientras el matemago corta el chocolate de forma mágica (Figura 4a) y le ofrece una onza (trozo número 5).

★ El matemago junta las piezas de nuevo ¡La tableta de chocolate vuelve a estar entera! (Figura 4b)



4a. Corte mágico 4b. Reconstrucción después de separar una onza

Figuras 4a y 4b. Tableta inicial y tableta final con una onza separada, matetruco "Al rico chocolate"

Matetruco 6: El calendario adivino

Desarrollo:

✋ Un voluntario elige un mes del calendario, y en él elige cinco días cualesquiera con la condición de que formen una cruz (Figura 5). Suma el valor de estos números y dice el resultado en voz alta. Ejemplo: Según la cruz de la Figura 5, el voluntario dirá noventa (11+17+18+19+25= 90).

Noviembre de 2022						
L	M	X	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Figura 5. Ejemplo, matetruco “El calendario adivino”

★ El matemago ¡Adivina la cruz al instante!

Matetruco 7: La búsqueda del tesoro

Desarrollo:

Se parte de 9 cartas numeradas del 1 al 9, colocadas formando un cuadro 3x3 (Figura 6 Inicio). Debajo de una de ellas hay un tesoro escondido. El matemago irá dando indicaciones a los voluntarios respecto al número de movimientos que deben realizar. Después de que los hayan hecho, el matemago, sin saber en qué carta se encuentran, adivinará aquellas a las que no ha ido nadie e irá descartándolas, hasta llegar al tesoro.

✋ Todos los voluntarios que lo deseen pueden realizar este matetruco simultáneamente. Para ello, tienen que seguir, mentalmente, las indicaciones del matemago. Deben hacerlo sin que él sepa, en ningún momento, cuál es la carta en la que se encuentran, ni qué movimientos hacen.

Solo está permitido moverse en horizontal o vertical, nunca en diagonal. Se puede ir hacia delante o hacia atrás, pero no se puede pasar por una carta que haya sido eliminada.

La búsqueda comienza. El matemago expresa la primera indicación que cada voluntario debe seguir:

✋ Sitúate en una carta cualquiera y muévete tantas veces como indique su número (por ejemplo, si estás en la carta 3, debes hacer 3 movimientos según lo permitido).

★ El matemago adivina que nadie ha llegado al 1 y elimina esa carta, volteándola (Figura 6 A1). Continúa con la siguiente indicación que cada voluntario realiza, a partir de la carta en la que está:

✋ Muévete 3 veces.

★ El matemago adivina que en el 2 y en el 4 no hay nadie, y les da la vuelta (Figura 6 A2).

Se sigue, sucesivamente, esta dinámica. Muévete 5 veces. El matemago da la vuelta al 7 y al 9 (Figura 6 A3). Muévete 7 veces. El matemago da la vuelta al 8 (Figura 6 A4). Pon un toque personal y muévete tantas veces como letras tiene tu nombre. Muévete, por última vez, tantas veces como indica la carta en la que estás. El matemago voltea el 3 y el 5 (Figura 6 A5). Ya solo queda el 6.

★ El matemago adivina ¡Aquí está el tesoro! Da la vuelta a la carta y aparece el tesoro (Figura 6 A6)

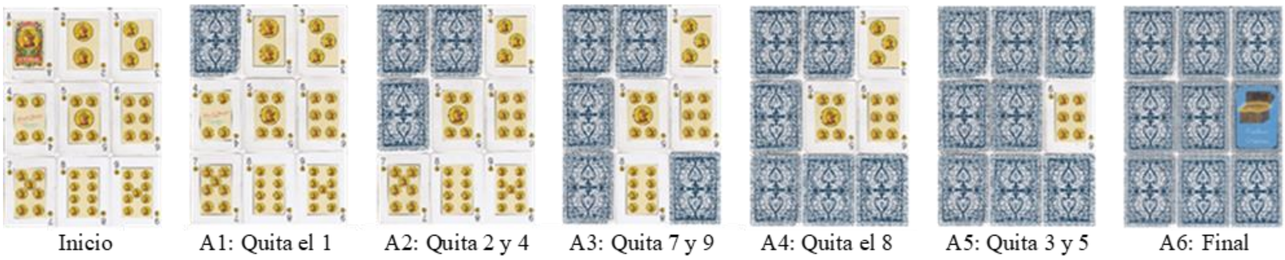


Figura 6. Secuencia de adivinaciones del matemago, matetruco "La búsqueda del tesoro"

MATEMÁTICA OCULTA

Matetruco 1: El globo mágico

Se trata de un conocido truco, donde el resultado de esas operaciones siempre es 1089. Veámoslo:

Sea un número de 3 cifras, abc ($a \neq c$). Suponemos que $a>c$, en caso contrario se haría de igual forma.

Descomponemos abc= a · 100 + b · 10 + c. Invertimos el orden de las cifras cba= c · 100 +b · 10 +a. Restamos abc-cba=(a-1-c) · 100 + (10+b-1-b) · 10 + (10+c-a) = (a-1-c) · 100 + 9 · 10 + (10+c-a). Invertimos el orden de las cifras del resultado obtenido (10+c-a) · 100 + 9 · 10 + (a-1-c). Sumamos (a-1-c+10+c-a) · 100 + (9+9) · 10 + (10+c-a+a-1-c) = 9 · 100 + 18 · 10 + 9 = 900 + 180 + 9 = 1089.

Truco: El resultado es independiente del número inicial; siempre es 1089.

Matetruco 2: Números en Salamanca

Si a un número se le resta la suma de sus dígitos, el resultado siempre es múltiplo de 9. Veámoslo:

Sea un número de dos cifras ab. Descomponemos ab= a · 10 + b. Sumamos sus cifras, a + b. Restamos ab – (a + b) = (a · 10 + b) – (a + b) = a · (10 – 1) = 9 · a. Por tanto, el resultado es múltiplo de 9.

Ejemplo: 43= 4 ·10 + 3; (4 · 10 + 3) – (4 + 3) = 4 · 9

Según esto, se debe construir el tablero de manera que todos los múltiplos de 9 tengan la misma imagen. Así, aunque no se puede adivinar el número resultante, sí se puede saber la imagen correspondiente.

Truco: El resultado de las operaciones, además de múltiplo de 9, siempre es menor que 90, por lo que estos tienen la misma imagen. El truco se puede disimular incluyendo dicha imagen en casillas que no sean múltiplo de 9, y en el 90 por ser un resultado imposible (Figura 1).

Variante: Se puede añadir un paso más a las operaciones que debe realizar el voluntario, por ejemplo, sumar 7, en ese caso la imagen de las casillas múltiplo de 9 más 7 deben ser iguales, ya que esta es la que se adivinará.

Matetruco 3: Qué día naciste

Las tarjetas mágicas se construyen colocando los números en cada una de ellas, según indique su escritura en el sistema de numeración binario. Comenzando por la derecha, las posiciones con valor 1 indican las tarjetas en las que se debe incluir dicho número y, aquellas con valor 0, en las que no. Por ejemplo, $23 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10111_{(2}$ la cifra de la derecha corresponde a la primera tarjeta, la siguiente a la segunda tarjeta y así sucesivamente. En este caso, el $23 = 10111_{(2}$ debe estar en las tarjetas 1, 2, 3 y 5 (Figura 2).

Truco: Sumar el primer número (esquina superior izquierda) de cada tarjeta en la que se encuentra el día elegido. Por ejemplo, si el día elegido está en las tarjetas primera, tercera y cuarta, se suma 1+4+8, y se adivina rápidamente ¡El 13! Para la puesta en escena se debe cuidar que no se note que se está haciendo esas sumas.

Variante: Siguiendo las mismas pautas se podrían construir tarjetas para adivinar números mayores, por ejemplo, del 1 al 63, en este caso se necesitarán 6 tarjetas en lugar de 5. O restringir a números menores como del 1 al 15 (Ver matetruco 4).

Matetruco 4: Qué emoticono te gusta más

Se trata de una variante de las tarjetas mágicas del matetruco 3, usando menos números y sustituyéndolos por imágenes.

Se diseña el tablero con las imágenes (Figura 3a). A cada una le corresponde el número resultante de contar en el tablero, de izquierda a derecha y de arriba a abajo (1. dormilón, 2. baboso, 3. bebé, 4. vaquero, 5. santo, 6. pirata, 7. fantasma, 8. feliz, 9. lector, 10. amoroso, 11. playero, 12. cinéfilo, 13. mono, 14. tristón, 15. graciosillo).

Para elaborar las tarjetas se construyen cuatro tarjetas auxiliares con números del 1 y al 15, repartidos en cada una de ellas según indique su escritura en el sistema de numeración binario (ver matetruco 3). Después se sustituye cada número por su imagen (Figura 7).

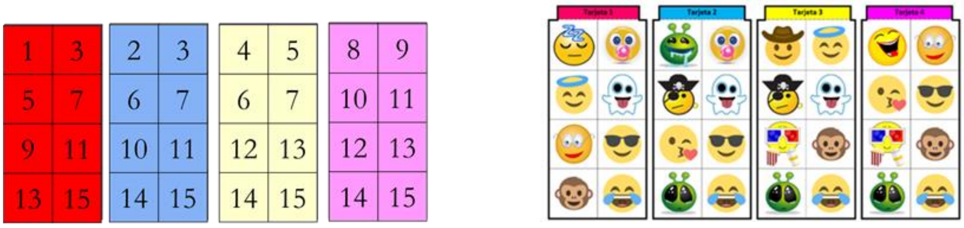


Figura 7. Tarjetas auxiliares y finales, matetruco “Qué emoticono te gusta más”

Truco: Sumar, mentalmente, el valor de referencia de las tarjetas en las que se encuentra el emoticono elegido. Estas referencias vienen dadas por las sucesivas potencias de 2; por tanto, el valor para la primera tarjeta será 1, para la segunda será 2, para la tercera 4 y para la cuarta 8. El resultado de la suma indica la posición del emoticono elegido en el tablero y permite adivinarlo rápidamente. Por ejemplo, si el elegido está en las tarjetas primera y tercera, se suman sus referencias, esto es 1 + 4 = 5, se mira la quinta casilla del tablero, y se adivina rápidamente ¡El santo! (Para que resulte sorprendente, el matemago debe ver únicamente el reverso de las tarjetas, sin ver las imágenes).

Variante: Este truco se puede realizar únicamente con las tarjetas numéricas, adivinando un número del 1 al 15. Y se puede adaptar a niños de Educación Infantil colocando, en el reverso de las tarjetas, tantas marcas como indica la esquina superior izquierda de cada una (1, 2, 4, 8; respectivamente), así se puede adivinar el número elegido mediante conteo.

Matetruco 5: Al rico chocolate

Se puede observar que la línea de corte es oblicua y que, al reconstruir la tableta, se está desplazando las piezas hacia arriba por esa línea (la pieza superior pasa a ser la inferior). Con esto, todas las onzas en la línea de corte han reducido su tamaño. Por ello, la tableta es un poco más corta y sobra una onza (Figura 8).

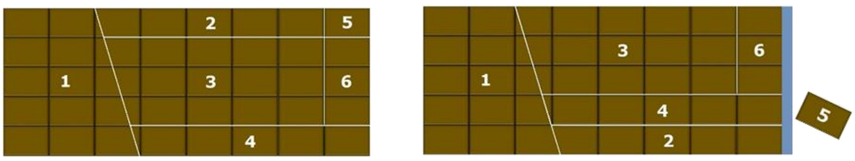


Figura 8. Reordenando el área, matetruco “Al rico chocolate”

Truco: La forma de cortar y reordenar las piezas. Se corta por una línea oblicua y se deslizan las piezas por ella.

Matetruco 6: El calendario adivino

Se puede observar la relación entre cinco números cualesquiera, elegidos en forma de cruz en el calendario, y cómo se compensan unos con otros, arriba y abajo, izquierda y derecha (Figura 9). Según esto, el valor central de la cruz es la media aritmética de los cinco números. Por tanto, si se conoce el valor de la suma, basta dividir entre 5 para calcular su media aritmética, esto es, el valor central. (Figura 9).

	X-7	
X-1	X	X+1
	X+7	

Figura 9. Relaciones entre los valores en cruz, matetruco “El calendario adivino”

Truco: El resultado de la suma se divide entre 5, se obtiene el número situado en el centro de la cruz y, a partir de ahí, se construye la cruz. En el ejemplo de la Figura 5, 90/5=18

Matetruco 7: La búsqueda del tesoro

Se basa en el principio de paridad según el cual, al sumar dos números pares o dos impares, se obtiene un resultado par y, al sumar un número par más uno impar, el resultado es impar.

Con la primera indicación, se realizan tantos movimientos como indique la carta elegida, de esta forma se sitúa al voluntario en una posición par, por lo que se puede eliminar una carta impar (en el ejemplo, la carta 1, Figura 6 A1). Sucesivamente, al realizar 3, 5 y 7 movimientos, se van alternando posiciones impar, par e impar, pudiendo eliminar cartas pares, impares y pares, respectivamente (Figura 6 A2, A3, A4). En este momento, se está situado en una posición impar y, al mover tantas letras como tenga el nombre del voluntario, se puede terminar en cualquiera de las posiciones restantes, par o impar (cartas 3, 5 y 6, Figura 6 A4); por ello, es necesario el siguiente paso y, moverse tantas veces como indique la carta en la que se está, de esta forma se asegura que el voluntario termina en posición par. Según eso, se podrán quitar las cartas impares (Figura 6 A5) y queda, únicamente, la carta número 6, que es la que contiene el tesoro (Figura 6 A6).

Truco: Se debe asegurar de comenzar en posición par y realizar, sucesivamente, un número de movimientos impar en cada caso, de esta forma se va alternando la paridad de las posiciones. Se van eliminando cartas en función de la paridad hasta llegar a la elegida previamente (donde se ha colocado el tesoro).

ALGUNOS RESULTADOS DE EXPERIENCIAS PREVIAS

La implementación de estos matetrucos se ha realizado con estudiantes de distintas etapas educativas, desde Educación Infantil hasta Universidad, en este último caso con estudiantes de Grado y Máster para docentes de matemáticas. Las sesiones siguieron la siguiente estructura (2 horas):

a. Introducción sobre matemagia en educación (5 min.).
b. El docente matemago realizó algunos matetrucos abarcando diferentes contenidos (60-65 min.).
c. Los estudiantes, en grupos de 2 a 4 alumnos, intentaron descubrir cómo funciona cada truco y qué matemáticas esconde; también actuaron como matemagos practicando entre ellos. En algunos casos, diseñaron y experimentaron su propio matetruco. En el caso de los estudiantes para docentes además analizaron su posible uso en el aula (35-40 min.).
d. Puesta en común final y conclusiones (15 min.).

Se analizaron las respuestas de 73 estudiantes para maestros a un cuestionario sobre las posibilidades didácticas de la matemagia para el aprendizaje de las matemáticas (adaptado de Fernández y Lahiguera, 2015). Los resultados mostraron una valoración muy positiva en ítems como interés, creatividad, motivación, nivel matemático o intención de seguir utilizando la matemagia como recurso didáctico. En sus reflexiones resaltaron la motivación, la promoción del razonamiento matemático o la interdisciplinariedad. Además, los estudiantes para docentes señalaron que utilizarían este recurso en sus futuras aulas, lo que parece una implicación educativa que anima a seguir profundizando en ello.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han mostrado una selección de actividades matemágicas que se pueden usar en el aula de matemáticas de diferentes niveles educativos, y con las que se pueden trabajar, además de los distintos contenidos matemáticos, aspectos como la resolución de problemas, la generalización e investigación. Otras de los aspectos positivos de utilizar matemagia en el aula es que despiertan la curiosidad, animan a la iniciativa y al trabajo en equipo, aumentan el interés y potencian el pensamiento crítico y la creatividad, entre otros. Además, son adaptables, lo que permite atender a la diversidad y facilitan la interdisciplinariedad, la socialización o la comunicación lingüística. Muchos de estos aspectos han sido puestos de manifiesto en los resultados expuestos por los estudiantes para maestros con los que se realizó la experiencia.

Una de las limitaciones de este trabajo es que, a pesar de haber experimentado con matemagia en todos los niveles educativos desde Educación Infantil hasta Universidad y docentes en ejercicio, solo se han recogido datos de estudiantes universitarios para maestros, lo que se podría ampliar para conocer el punto de vista de escolares o de futuros profesores de Educación Secundaria.

Por otro lado, la mayoría de los estudiantes encuestados no encontraron grandes dificultades en la implementación de la matemagia y manifestaron que continuarían utilizándola en sus aulas. Esto anima a seguir trabajando en el uso de la matemagia en el aula de matemáticas y a profundizar en sus posibles implicaciones para el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Alegría, P y Ruiz, J.C. (2002). La matemagia desvelada. *Sigma, 21*, 145-174.

Blasco, F. (2016): *Matemagia.* Planeta.

Chamoso, J. y Rawson, W. (2003): *A vueltas con los números.* Colección Diálogos de Matemáticas. Nivola.

Fernández, R. y Lahiguera, F. J. (2015). Matemagia y su influencia en la actitud hacia las matemáticas en la escuela rural. *Números, 89*, 33-53.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Dover.

Muñoz, J. (2004). Una matemática motivadora: la matemagia. *Actas VI Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana.* Sociedad Al- Khwarizmi. https://thales.cica.es/~estalmat/Actividades- ejemplos/MatemagiaEstalmat.pdf

Paenza, A. (2017): *Matemáticas para todos*. Debate

Rodríguez-Sánchez, M. M.; Sánchez-Barbero, B. y Monterrubio, M. C. (2022). Recursos didácticos para el aula de matemáticas. En L. J. Blanco et al. (Eds), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*. Ed. Universidad de Granada.

Para hacer referencia al artículo:

Rodríguez-Sánchez, Mª. M., Chamoso Sánchez, J. Mª., Sánchez-Barbero, B., Cáceres García, Mª. J. y González Astudillo, Mª. T. (2022). Matemagia como recurso para el aprendizaje de las matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 95 - 103). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

MANIPULANDO EL ÁLGEBRA

Marta Carazo Lores[a], Rosa Mª Fernández Barcenilla[b]

[a]IES Río Duero (Tudela de Duero), [b]IES María Moliner (Laguna de Duero)

Resumen

La introducción del álgebra al alumnado de entre 11 y 12 años se encuentra con la dificultad de que, a estas edades, algunos de los niños no han desarrollado todavía el pensamiento abstracto. Este problema se puede solucionar utilizando la "metodología Singapur"; en concreto, trabajando la idea de Concreto-Pictórico-Abstracto o, dicho en otras palabras, utilizando material manipulativo. Se presenta el material con el que se va a trabajar (mostrando cómo los alumnos lo han utilizado previamente para dominar los números enteros); se profundiza en la resolución de ecuaciones (utilizando el método de balanzas), así como la representación y las operaciones con polinomios. Y, para alcanzar un nivel superior, se visualiza la factorización de polinomios y se resuelven las ecuaciones de segundo grado mediante la estrategia de completar cuadrados.

Palabras clave: *metodologías activas, matemática manipulativa, secundaria, álgebra*.

INTRODUCCIÓN

En el presente taller se presentan propuestas de cómo trabajar el álgebra con materiales manipulativos. Para ello, se avanzará según el siguiente índice:

1.- ¿Por qué utilizar materiales manipulativos?

2.- ¿Qué materiales utilizaremos?

3.- Representación de polinomios. Sumas y restas.

4.- Multiplicación de polinomios.

5.- Ecuaciones con materiales

6.- Factorización de polinomios

7.- Completar cuadrados

A continuación, se va a presentar brevemente lo desarrollado en los diferentes apartados.

1.- ¿Por qué utilizar materiales manipulativos?

Según la teoría del aprendizaje definida por Ausubel, un aprendizaje significativo es un proceso por el cual se realiza una relación de información con un aspecto relevante de la estructura cognitiva del individuo. Esto se consigue por medio de un proceso interactivo e integrador de los nuevos conceptos a partir de otros ya "anclados" en la estructura cognitiva del propio individuo. Para dicho autor, es necesario que se den los siguientes criterios para que se produzca un aprendizaje significativo: (Ausubel 2002 a partir de Martínez et al., 2012).

- Disposición del aprendizaje por parte del alumno. Se refiere a la motivación y actitud que el mismo tiene a la hora de aprender.
- Presentación de un material potencialmente significativo. Esto requiere:
    - Material con un significado lógico relacionable con la estructura cognitiva.
    - Ideas de anclaje adecuadas ya existentes en la estructura cognitiva del individuo

Sin embargo, de todas ellas, la idea que más transcendencia tuvo fueron los modos de representación para la presentación de un nuevo contenido matemático: "activo, icónico y simbólico", que han servido de base para multitud de prácticas educativas en el ámbito matemático, siendo una de ellas el llamado Método Singapur. A continuación, se explica brevemente cada una del ellas:

- La representación activa. Consiste en un conjunto de acciones físicas apropiadas para alcanzar un determinado resultado. El aprendizaje se consigue por medio de la realización de las actividades y no por la representación de lo realizado.
- La representación icónica. Consiste en el uso de imágenes para representar los conceptos.
- La representación simbólica. Consiste en el empleo de un conjunto de símbolos y proposiciones lógicas que siguen unas reglas y leyes.

Para Bruner estas tres fases son etapas que tienen una relación secuencial temporal entre ellas y suponen un reflejo del desarrollo cognitivo de los alumnos. Pueden darse en paralelo, puesto que el desarrollo de la siguiente etapa no implica el abandono de uso de la anterior (Tall, 2014).

En el sistema educativo de Singapur se emplea un modelo de currículo similar al propuesto por Bruner pasando de lo pictórico, a lo concreto, para llegar finalmente a lo abstracto.

Para Dienes, el hecho de que un alumno entendiera o no un determinado concepto matemático dependía en la forma de comunicación empleada por el profesor para la transmisión de dicho concepto. La introducción de ideas matemáticas a partir del uso de materiales manipulativos, siguiendo por su representación figurativa y finalmente su representación normalizada es la que permite asimilar correctamente un concepto matemático (Dienes, 1971 citado en Gningue, 2016)

Defiende que la manera que tiene de aprender cada estudiante es diferente y única y, por tanto, no se puede pretender que todos aprendan de la mima manera, con los mismos ejemplos y de la misma forma. No se puede aprender matemáticas por medio de un modelo estímulo respuesta (Dienes, citado en Gningue, 2006)

Expone cuatro principios básicos en el aprendizaje de las matemáticas (Dienes, 1971 citado en Sriraman, 2005).

- Principio dinámico: Todo conocimiento comienza con situaciones vivenciales que consisten en el paso de la experiencia al acto. Dienes creía que la estructura preliminar se construía con juegos, actividades y con el uso de material concreto.
- Principio constructivismo: Consiste en la manipulación con el objetivo de que la construcción preceda al análisis. El pensamiento constructivista facilitará el pensamiento analítico.
- Variabilidad perceptiva: Consiste en la enseñanza de un mismo concepto por medio de su uso en diferentes situaciones y contextos. De este modo lo que se pretende es enriquecer la imagen mental que el alumno tiene sobre un concepto. El fin de esta idea es que el alumno sea capaz de abstraer la estructura y propiedades esenciales de un concepto, independientemente de la forma en que se presente.
- Variabilidad matemática. Consiste en presentar un concepto matemático empleando diferentes formas generadas por cambios de variables de sus atributos. De este modo se logra establecer una relación entre el concepto y su estructura. Cuando un alumno es capaz de encontrar la variable matemática que subyace a diferentes situaciones, entonces se está avanzando en su comprensión.

De los cuatro principios, los que más influencia van a tener, en Educación Secundaria, son los dos últimos, debiendo emplearse de forma conjunta con el fin de promover el proceso de abstracción y generalización de los conceptos matemáticos (Gningue, 2006).

Por todo lo anteriormente expuesto, y con la finalidad de ayudar al alumnado en la comprensión del álgebra se plantea el presente taller.

2.- ¿Qué materiales utilizaremos?

Se combinará el uso de material manipulativo físico y del manipulador virtual accesible en la siguiente página web https://es.mathigon.org/polypad con gran potencial para pizarras digitales. Por un lado, se facilitará al alumnado las llamadas “baldosas algebraicas”, que son elementos de distintos tamaños y colores que ayudarán al alumnado a visualizar los monomios 1, x, x^2. Dicho material manipulativo es de creación propia en material de goma eva y serán cuadrados de *1cm.* de lado para representar el 1, rectángulos de lados 1 y cierta longitud x que representarán a x y cuadrados de lado x que representarán a x^2. De este modo se crea una conexión entre el campo algebraico y el campo geométrico, relacionando la parte literal desconocida con el área de su pieza relacionada. Para representar -1, $-x$, $-x^2$, se utilizarán piezas del mismo tamaño que sus correspondientes negativas, pero de color diferente.

3.- Representación de polinomios. Sumas y restas.

En la actividad 1 se trabajará sobre la representación de polinomios, así como con las operaciones de los mismos con material manipulativo físico. Para ello, se utilizarán los cuadraditos de $1cm^2$, las barras de $x\ cm^2$ y los cuadrados de $x^2\ cm^2$ de área, de dos colores diferentes, especificados anteriormente.

Inicialmente, se les mandará representar con dicho material diferentes polinomios, manteniendo con el alumnado una metodología dialógica que les hará reflexionar sobre lo que representa el conjunto de diferentes piezas, lo que expresado de forma algebraica dará lugar a los diferentes coeficientes y partes literales. Particularmente, se podrá preguntar por el significado de cualquier monomio y se deberá verbalizar, además de construirlo utilizando el material manipulativo aportado. Como extensión a lo mostrado, se les hace reflexionar sobre la representación de x^3, y la necesidad de relacionarlo con un cubo en el espacio.

A continuación, se introducirá la suma de polinomios como agrupación y recuento de piezas, de modo que se computan subgrupos de piezas del mismo tipo, lo que facilitará la comprensión de dicha operación y la formalización simbólica de la misma. Posteriormente, se continúa con la definición del opuesto que conlleva la conservación del tamaño de las piezas, pero el cambio de color respectivo.

Se supone como pre-requisito que el alumnado domina la operatividad de números enteros y, por tanto, visualizarán que la resta de polinomios es como la suma del polinomio minuendo con el opuesto del sustraendo, no siendo dicha operación conmutativa.

4.- Multiplicación de polinomios.

Se comenzará formando el producto de un polinomio por un número, consolidando con ello la consideración de la multiplicación como la suma reiterada de uno de los factores respecto al otro. Seguidamente se continuará con el producto de dos binomios, primero mediante la manipulación del material, segundo plasmándolo en una tabla de doble entrada, dónde en cada celda resultará el producto parcial de los monomios de los factores y, por último, se formalizará mediante lenguaje algebraico.

En la figura 1, a modo de ejemplo, se muestra el producto de los monomios y su visualización de producto como un rectángulo formado por diferentes piezas.

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

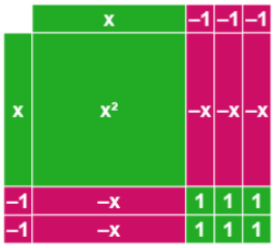


Figura 1: Visualización geométrica de producto de binomios

Para finalizar, se generalizarán resultados extensibles al producto de dos polinomios de cualquier grado.

5.- Ecuaciones de primer grado con materiales

Avanzando en la comprensión del álgebra se presentará una ecuación como una situación de equilibrio en una balanza, representando los dos platos ambos miembros de la igualdad. Se recuerda que en una balanza, para mantener el equilibrio, se tiene que realizar la misma acción en ambos lados (añadir, quitar, duplicar, hacer la mitad…). Inicialmente se resolverán ecuaciones solamente con material manipulativo, mediante las acciones anteriormente expresadas, después mediante el manipulador virtual y finalmente, la formalización con lápiz y papel. Dichas acciones tienen su traducción al lenguaje algebraico como la posibilidad de sumar o restar el mismo monomio, o multiplicar o dividir lo mismo a ambos miembros de la ecuación. Como es bien sabido, resolver una ecuación es encontrar el valor numérico que cumple la igualdad, para ello, se dejará la pieza que representa la *x* en un lado de la balanza y en el otro lado estarán los correspondientes cuadraditos, encontrando así el valor numérico desconocido de *x*. Se provocarán discusiones en el aula para intentar reflexionar sobre ciertas instrucciones que se usan para la resolución de ecuaciones por otras más constructivistas que faciliten la comprensión de los pasos realizados, por ejemplo, se cambiará la frase "lo que está sumando pasa restando" por voy a añadir cierto número de piezas en los dos platos de la balanza, de modo que en un lado me desaparecen cierto número de piezas por anulación de valor y en el otro si permanecerán. Análogamente, se intentará hacer comprender al alumnado que "lo que está multiplicando pasa dividiendo", en realidad eso es una consecuencia de haber reagrupado ambos platos de la balanza, es decir, de haber dividido o multiplicado a ambos miembros de una ecuación.

Cuando el alumnado comprenda verdaderamente, el dinamismo asociado a la resolución de una ecuación podrá formalizar mediante nomenclatura matemática todos los pasos realizados como formalización de la abstracción.

6.- Factorización de polinomios

La factorización es una operación matemática de gran importancia para la resolución de ecuaciones y es muy útil para otras aplicaciones matemáticas de orden superior, como por ejemplo el cálculo de límites. Por ello, se considera que el alumnado debe valorar su utilidad y visualizar geométricamente su proceso. Se partirá de una expresión de segundo grado con su representación de piezas correspondientes y se pedirá al alumnado que reordene todas las piezas en un rectángulo, como indica la figura 2, encontrando así los lados de dicho cuadrilátero, cuyo producto es el área de las piezas iniciales.

Figura 2: Descomposición factorial de un polinomio de segundo grado

7.- Completar cuadrados

Cómo actividad final, se van a resolver ecuaciones de segundo grado mediante la estrategia de completar cuadrados y la utilización de la balanza. Por ejemplo, se propone resolver la ecuación $x^2+4x-1=0$. Inicialmente se sitúa en un platillo la expresión algebraica e igualamos dicha expresión a cero, ya que la ecuación de segundo grado tiene en su segundo miembro el valor cero (figura 3).

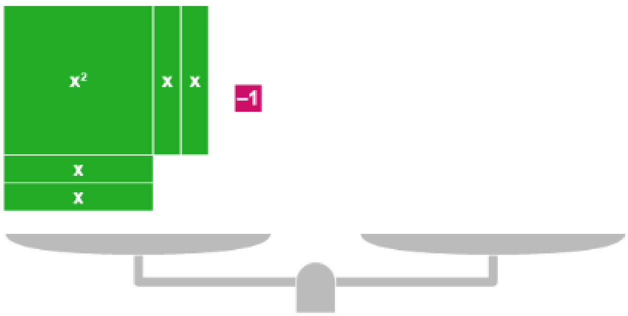


Figura 3: Equilibrio en una ecuación de segundo grado

Utilizando lo explicado en el apartado correspondiente al uso de balanzas para resolver ecuaciones, se trasladará en esta situación, de modo que se completará el cuadrado como indica la figura 4 con tantas unidades como sean necesarias, y se añadirán las mismas en el otro plato de la balanza. La formalización matemática es la formación de un producto notable en un miembro igualado a otro valor numérico, que deberá resolverse como una ecuación radical.

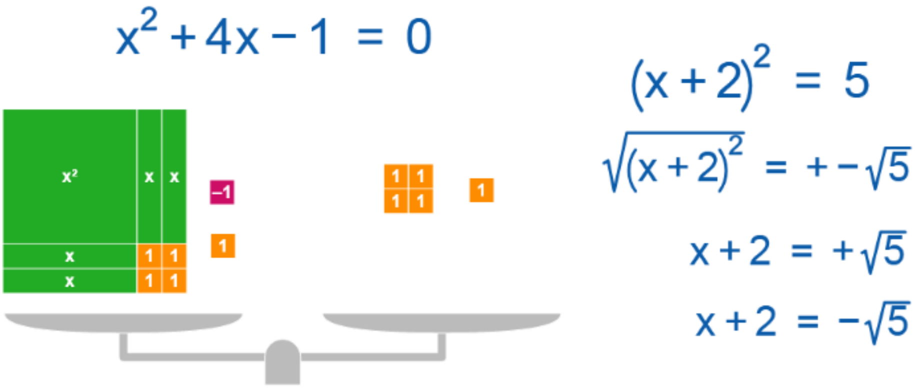


Figura 4: Resolución ecuación de segundo grado

Después de todo este proceso, fundamentado en los principios metodológicos expuestos en la introducción y las bases teóricas en didáctica de la matemática, se considera que ayudará al alumnado a comprender el mundo abstracto del álgebra.

En el anexo adjunto, se presenta una relación de actividades guiadas seguidas en el taller que se llevó a cabo en el Congreso y que puede ser de ayuda para implementar en el aula con alumnado de educación secundaria.

Referencias

Gningue, S. M. (2006). Students Working Within and Between Representations: an Application of Dienes'S Variability Principles. *For the Learning of Mathematics*, *26*(2), 41–47.

Gningue, S. M. (2016). Remembering Zoltan Dienes, a Maverick of Mathematics Teaching andLearning: Applying the Variability Principles to Teach Algebra. *International Journal For Mathematics Teaching and Learning, 17(2).*

Martínez, R., Arrieta, X., & Melán, R. (2012). Desarrollo cognitivo conceptual y características de aprendizaje de estudiantes universitarios. *Omnia*, *18*(3), 35–48.

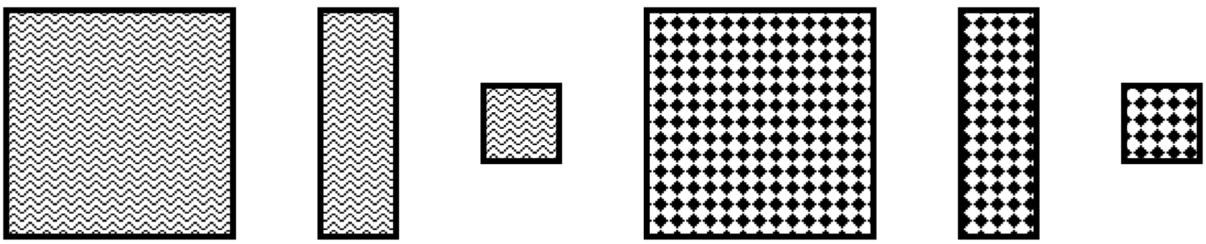
Sriraman, B. (2005). On the teaching and learning of clinical wisdom. *Journal of Family Practice*, *1*(1), 24–27.

ANEXO

Manipulando el Álgebra

ACTIVIDAD 1: Representación de polinomios, sumas y restas

Tenemos el siguiente material



x^2 x 1 $-x^2$ $-x$ -1

a) Representar los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^2 - 3x + 4,$ $Q(x) = 4x^2 + 7x - 7$ y $R(x) = 2x + 5$

¿Qué podemos trabajar?

i) Qué significado tiene el 2 de $2x^2$, el -3 de -3x , 4 de $4x^2$,… ¿Cómo los definirías? ii) ¿Y el número sin x?

iii) ¿Qué figura necesitaríamos para representar x^3?

b) Suma de polinomios

Suma $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $\quad Q(x) = 4x^2 + 7x - 7 \quad$ y $\quad R(x) = 2x + 5$ de dos en dos y explica como lo has realizado, utiliza los conceptos definidos en el ejercicio anterior.

c) Definición del opuesto

i) ¿Qué es el opuesto de un número?

ii) ¿Cómo definirías el opuesto de un polinomio?

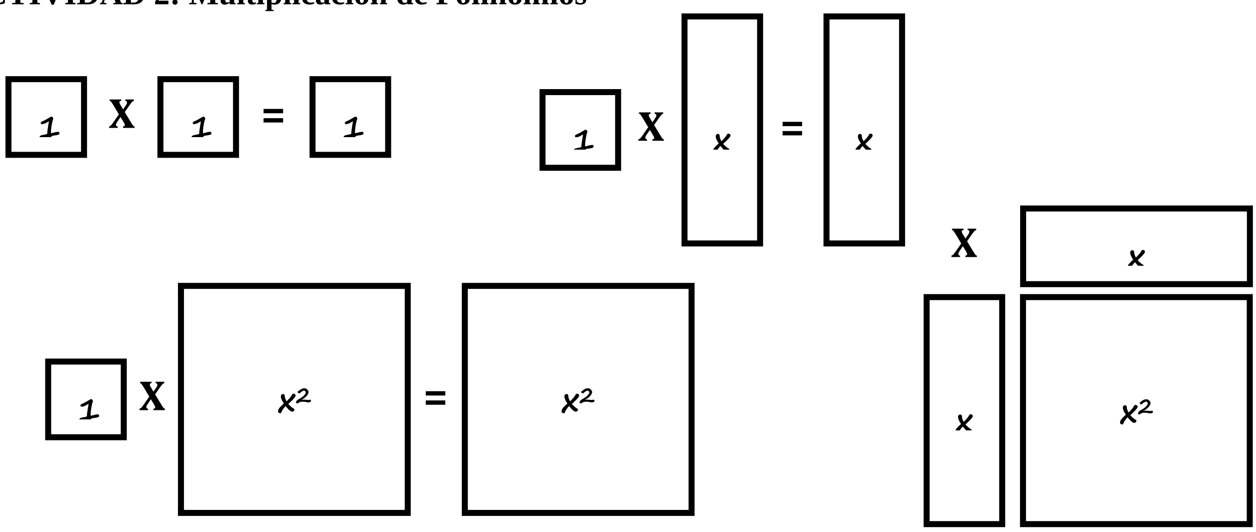
d) Resta de polinomios.

La resta de números enteros se define como la suma de su opuesto, así que definiremos la resta de polinomios como la suma de un polinomio con su opuesto, no siendo dicha operación conmutativa.

i) Resta $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $\quad Q(x) = 4x^2 + 7x - 7 \quad$ y $\quad R(x) = 2x + 5$ de dos en dos y explica como lo has realizado.

ii) Existe alguna relación entre $P(x) - Q(x)$ y $Q(x) - P(x)$, $P(x) - R(x)$ y $R(x) - P(x)$, o $Q(x) - R(x)$ y $R(x) - Q(x)$

ACTIVIDAD 2: Multiplicación de Polinomios



i) Multiplicación por un número $\qquad 2(3x^2 - 2x + 4) \qquad 3(-x^2 + 2x - 1)$

ii) Multiplicación de polinomios de primer grado con coeficiente la

$$(x + 2) \cdot (x + 3), \qquad (x - 4) \cdot (x - 2), \qquad (x + 5) \cdot (x - 2)$$

Como representar en papel

Producto	x	+3
x	x^2	3x
+2	2x	6

Resultado

x^2+5x+6

iii) Cómo realizarías $(2x + 3)(x - 2)$, $\quad (-x - 5) \cdot (3x - 2)$

iv) Puedes generalizar a polinomios de cualquier grado

ACTIVIDAD 3: Resolución de Ecuaciones de Primer grado

Veamos las ecuaciones como balanzas. En estas, para mantener el equilibrio, tenemos que realizar la misma operación en ambos lados (añadir, quitar, duplicar, hacer la mitad,…).

Así que si queremos saber cuál es el valor de x dejaremos una sola x en un lado de la balanza y en el otro nos quedarán las unidades que nos darán el valor de la x

i) Resolver con material

$$3x + 2 = 5x + 4 \qquad 2x - 2 = 5x + 4 \qquad 3x + 3 = 5 - x$$

ii) ¿Cómo lo representarías en el papel?

ACTIVIDAD 4: ¿Y la división? Mejor trabajar antes la factorización para preparar la resolución de la ecuación de 2º grado

a) Factoriza $x^2 + 5x + 6$ $\quad x^2 + 5x + 4$ $\quad x^2 + 6x + 8$ ¿Hay alguna relación entre los coeficientes de la solución y los términos independientes de los factores?

b) Factoriza $x^2 - 5x + 6$ $\quad x^2 - 5x + 4$ $\quad x^2 - 6x + 8$ ¿Por qué los términos independientes no tienen signo negativo?

c) Factoriza $x^2 + x - 6$ $\quad x^2 - x - 6$ $\quad x^2 + 2x - 8$ $\quad x^2 - 2x - 8$ ¿Pasa algo si el término independiente es négativo?

d) ¿En el apartado ii y iii se cumplen las mismas propiedades que en el apartado i?

e) ¿Se pueden sacar conclusiones finales según sean los coeficientes del polinomio a factorizar?

ACTIVIDAD 5: Completar cuadrados. Resolvemos ecuaciones que no se pueden factorizar, el paso a resolver las ecuaciones de 2º grado con la fórmula.

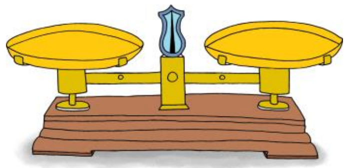
a) Trabajamos con material. Resuelve $x^2 + 4x - 1 = 0$ $\quad x^2 - 2x - 2 = 0$ $\quad x^2 + 6x + 3 = 0$

¿Qué pasos son los que damos?

b) Para generalizar y poder demostrar la fórmula de 2º grado tenemos que pasar por distintos niveles y en las que no utilizaremos material (pero si los pasos que hemos realizado para resolver las ecuaciones con él)

i) Resolver (ecuaciones con coeficiente de grado 1 impar) escribiendo los pasos dados:

$x^2 + 5x + 6$ $\quad x^2 + x - 6$



ii) Resolver (ecuaciones con coeficiente principal distinto de 1) escribiendo los pasos dados:

$2x^2 + 2x - 12 = 0$ $\quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$

iii) Hacer la demostración de la fórmula de 2º grado realizando los pasos realizados en los apartados anteriores

Para hacer referencia al artículo:

Carazo Lores, M. y Fernández Barcenilla, R.M. (2022). Manipulando el álgebra. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 104 - 111). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

ACTIVIDADES AUTOEVALUABLES CON GEOGEBRA PARA NUESTRA AULA VIRTUAL

Rubén Jiménez Jiménez

IES José Luis L. Aranguren

Resumen

El objetivo principal del taller es escoger actividades autoevaluables ya elaboradas con GeoGebra y mediante el programa eXelearning exportalas en formato Scorm para, posteriormente importarla en nuestra aula virtual Moodle de la Junta de Castilla y León. En la segunda parte del taller crearemos algunas actividades autoevaluables con Geogebra. Parece una explicación muy técnica pero es relativamente sencillo y muy útil para los docentes.

Palabras clave: *eXeLeaning, autoevaluables, scorm, GeoGebra, moodle.*

INTRODUCCIÓN

Con las extensiones que disponemos actualmente en el aula virtual que nos facilita la Consejería de Educación a todos los docentes de la Comunidad resulta complicado generar cuestionarios aleatorios y poder controlar los campos de origen de cada parámetro.

GeoGebra y Exelearning nos pueden ayudar a solventar ese problema utilizando actividades autoevaluables ya creadas por diversos autores o generar nosotros nuestras propias construcciones.

El taller constará de tres partes. En la primera identificaremos actividades autoevaluables a través de una pequeña biografía que os ofrezco y las utilizaremos sin pasar por el aula virtual, utilizando una clase de GeoGebra. Es el modo más rápido, pero para mí gusto con algunas carencias. En la segunda parte escogeremos una actividad autoevaluable, la incluiremos en un archivo exelearning, que nos servirá de intermediario para su exportación a formato SCORM y finalmente la importaremos en nuestra aula virtual. La última parte será crear una actividad autoevaluable nuestra. Aunque hay cientos de ellos ya creadas y de casi todos los ámbitos del currículo de Matemáticas en la ESO y Bachillerato puede que no exista una actividad que se ajuste a nuestras necesidades y podremos crearla para su utilización en el aula virtual.

En el taller utilizaré el término actividad autoevaluable aunque podría llamarse perfectamente actividad autocorregible.

OBJETIVOS

Los objetivos que nos proponemos en este taller son:

- Obtener un banco de recursos de actividades autoevaluables de GeoGebra.
- Importar actividades autoevaluables en nuestra aula virtual.
- Crear sencillas actividades autoevaluables.

ACTIVIDADES AUTOEVALUABLES CREADAS CON GEOGEBRA

Todas las actividades autoevaluables ponen una nota final al usuario, pero no todas las actividades que se presentan como autoevaluables en la web de Geogebra son aptas para importarlas a nuestra aula virtual, deben tener unas características especiales que veremos en apartados sucesivos y que hagan que Moodle las entienda y permita poner la calificación.

Aquí os muestro un banco con cientos de actividades de este tipo elaboradas:

- Javier Cayetano.
- Débora Pereiro.
- Ángel Manuel González Guillén.

ACTIVIDADES EN EL AULA GEOGEBRA

En esta primera parte del taller nos vamos a centrar en elegir una actividad autoevaluable del banco anterior y crear una clase o lección de GeoGebra para utilizarlo directamente con nuestra cuenta de GeoGebra sin necesidad de utilizar ningún problema. En este caso veremos las notas de los alumnos directamente en GeoGebra. En nuestra cuenta se guardarán las evidencias del trabajo de cada alumno con sus calificaciones, pero para importarlas a nuestro cuaderno o al aula virtual lo tendremos que hacer a mano.

PASOS

- Seleccionamos la actividad que nos interese.
- Creamos una lección.
- Compartimos el enlace con nuestros alumnos.

No le dedicamos mucho tiempo a esta forma de trabajar con las actividades autoevaluables porque hay un taller específico de creación de lecciones con GeoGebra.

IMPORTAMOS ACTIVIDADES A NUESTRO AULA VIRTUAL

En esta segunda parte y principal del taller, elegiremos una actividad autoevaluable, utilizaremos exelearning como intermediario y posteriormente la importaremos en nuestra aula virtual (Moodle) que nos proporciona la Junta de Castilla y León.

EN GEOGEBRA

Seleccionamos la actividad que nos interese:

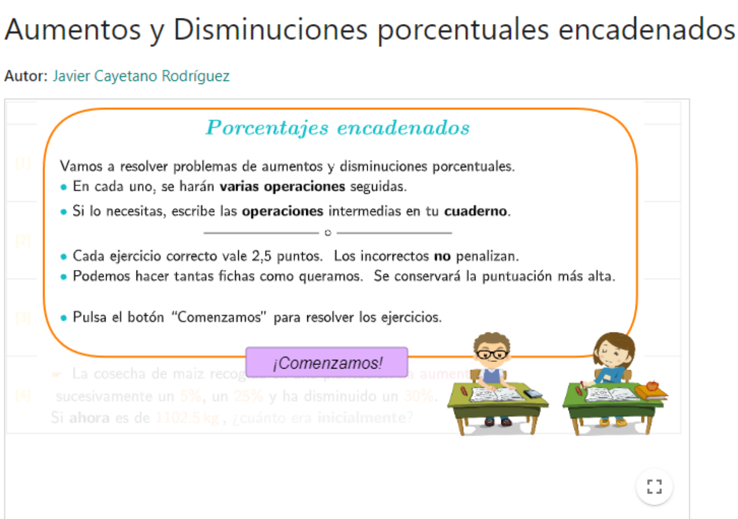


Figura 5: Elegimos la actividad

Le damos a los tres puntos de arriba a la derecha y después al botón *Compartir*:

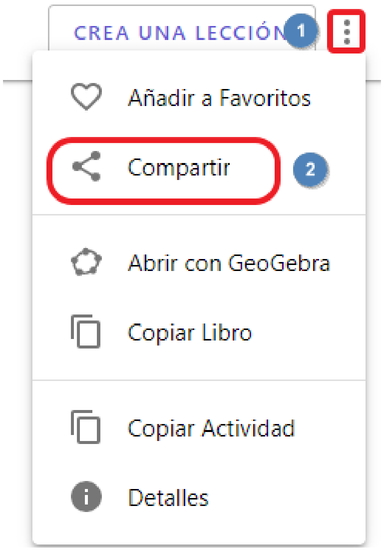


Figura 6: Compartir

Copiamos el enlace de la actividad:

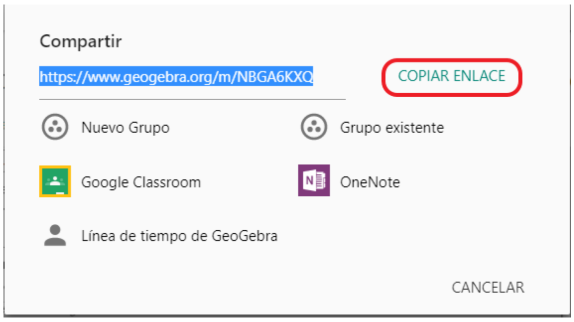


Figura 7: Copiar actividad

Es muy importante copiar la actividad de esta manera porque si la actividad forma parte de un libro GeoGebra y se quiere copiar la URL directamente no va a funcionar en exelearning.

EN EXELEARNING

Abrimos Exelearning, creamos un idevice interactivo de GeoGebra:

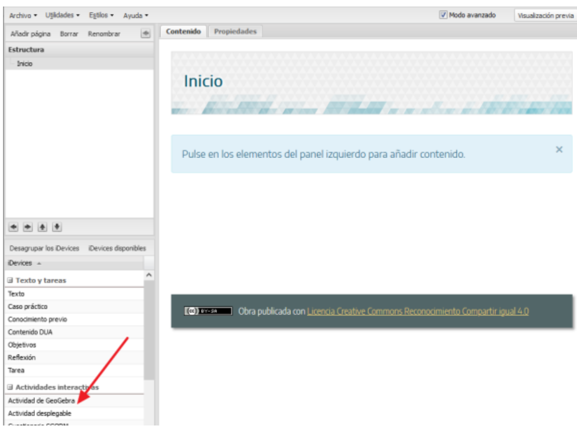


Figura 8: Idevice GeoGebra

En el título de la actividad podemos poner el título que queramos y en *Configuración general*, en el campo *URL o identificador (ID)* pegamos la dirección que hemos copiado anteriormente. Que no se nos olvide dar al botón a la derecha para que lo coja o bien dar al Enter del teclado. Si lo hemos hecho correctamente nos tiene que aparecer en verde la URL, debajo el Título y la Autoría de la actividad.

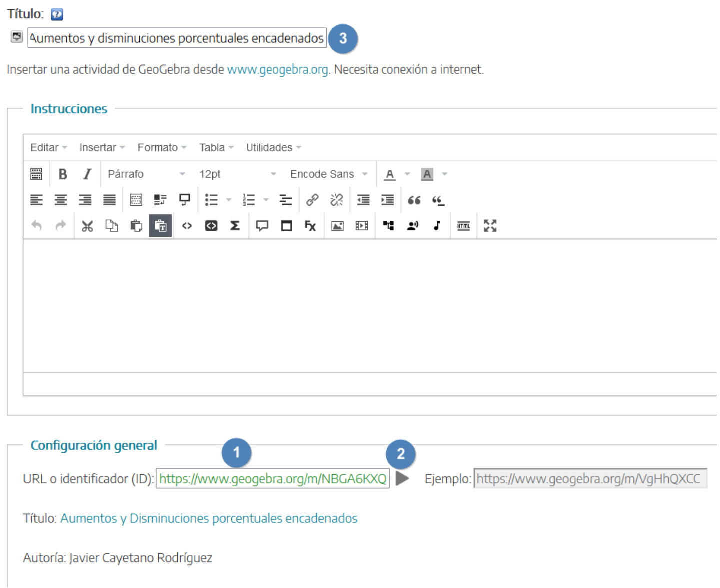


Figura 9: Completamos los datos de la actividad

Podemos escribir instrucciones sobre la actividad en ese mismo campo y aparecerá en la parte superior de la actividad de GeoGebra. También puedes escribir un texto en *Contenido que va después (opcional)* para que aparezca después de la actividad.

El siguiente paso es muy importante si queremos que Moodle nos guarde la nota. Tendremos que ir a *Opciones avanzadas* y marcar la casilla *Botón de guardar la puntuación*. Opcionalmente puedes cambiar el texto que aparecerá en el botón.

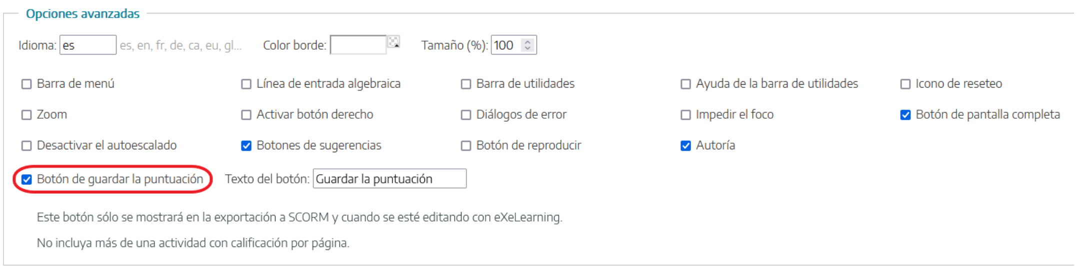


Figura 10: Guardar la puntuación

Completado la actividad de GeoGebra le damos al botón de hecho en la parte inferior del idevice:

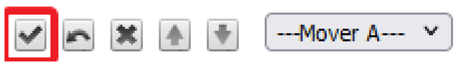


Figura 11: Hecho

Acabada la actividad de GeoGebra guardamos el Archivo (podemos poner un título y completar los metadatos):

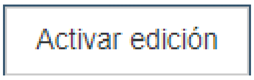
Archivo -> Guardar.

El último paso que nos queda en Exelearning es exportarlo con formato SCORM:

Archivo -> Exportar -> SCORM1.2

Esto nos generará un archivo de extensión zip que guardaremos en nuestro equipo.

EN EL AULA VIRTUAL

Entramos a nuestro curso del aula virtual y activamos la edición: 

Hacemos clic en el botón Agregue una actividad o recurso: 

De entre todas las actividades que aparecen elegimos *Paquete SCORM:*

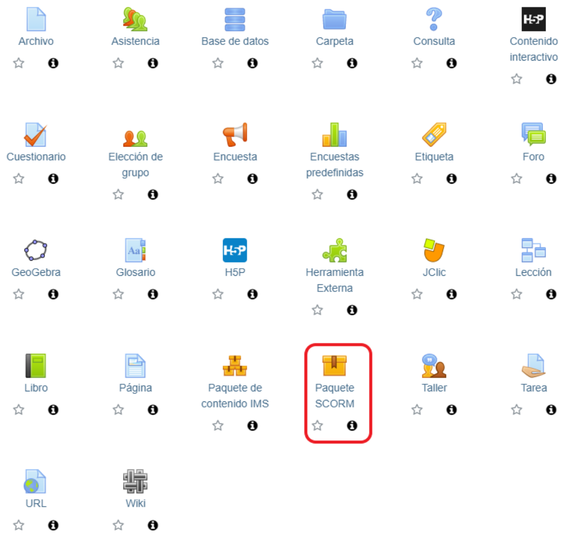
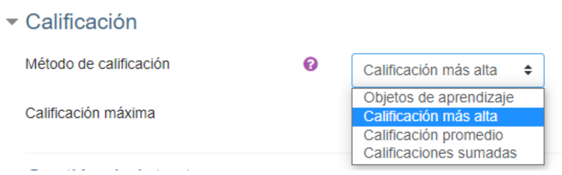


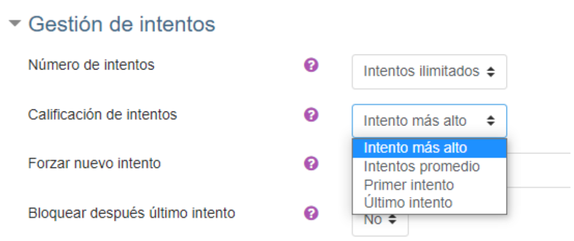
Figura 12: Paquete SCORM

Ahora configuraremos la actividad SCORM:

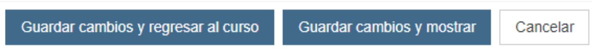
- Nombre: título que deseemos.
- Descripción (opcional): descripción de la actividad.
- Paquete: arrastramos a la ventana el archivo zip que generamos en exelearning.
- Apariencia -> Ver más:
  - Mostrar paquete: Abrir Objetos de Aprendizaje en una ventana nueva.
  - Anchura y altura: ponemos valores mayores, por ejemplo 900 y 1200.
  - Mostrar la estructura del curso en el reproductor: Deshabilitado.
- Calificación: elegimos la forma de calificar y sobre 10. Muy importante.



- Gestión de intentos: elegimos el número de intentos permitidos.



- Guardamos cambios.



Listo. Ya tenemos nuestra actividad autoevaluable preparada para nuestros alumnos.

CREAMOS NUESTRAS ACTIVIDADES AUTOEVALUABLES

No es el objetivo principal de este taller el crear actividades autoevaluables porque probablemente casi nunca necesites crear una actividad autoevaluable, ya hay cientos de ellas creadas en el repositorio de Geogebra, pero aprenderemos a crear una actividad sencilla. Crear una actividad autoevaluable ya requiere unos conocimientos medios o altos de GeoGebra.

En el siguiente enlace tenéis un libro de GeoGebra elaborado por Javier Cayetano sobre cómo crear actividades autoevaluables, con multitud de ejemplos y pequeños trucos que os pueden ser muy útiles.

En ese mismo libro os vais encontrar dos vídeos del propio Javier Cayetano con sendas ponencias que dio en la Semana Geogebra 2020 de la Sociedad madrileña Emma Castelnuovo del Instituto GeoGebra Maslama Al-Mayriti y de los Talleres GeoGebra 2020 de la Asociación catalana Geogebra, Instituto GeoGebra de Valencia y la Asociación matemáticas creatividad GeoGebra.

Antes de empezar con este bloque del taller, vamos a explicar algunas a consideraciones a tener en cuenta al generar actividades autoevaluables.

NÚMEROS ALEATORIOS

La mejor forma de crear números aleatorios es a través de guiones GeoGebra:

- Valor(n,AleatorioEntre(nmin,nmax))
- Valor(n,ElementoAleatorio({lista}))

VARIABLES MOODLE

Para que Moodle entienda nuestra construcción debemos tener tres variables con estos nombres:

- SCORMRawScore=
- SCORMMaxScore=
- SCORMMinScore=

La primera variable nos indica cuál de las variables que hemos creado en GeoGebra me da la puntuación del usuario, las dos últimas nos dan el valor mínimo y máximo de la puntuación.

Las tres variables son importantes, pero la que me da la puntuación máxima tiene que coincidir, como veíamos en el bloque anterior con la calificación máxima con la que configuremos la actividad SCORM en el aula virtual. Normalmente pondremos 10, por tanto en el aula virtual también lo debemos poner así.

CONTADORES

Necesitaremos de alguna forma controlar el estado del ejercicio. Se puede hacer de distintas formas. Nosotros lo vamos a hacer con contadores:

- Contador = 0: Comienzo, con explicaciones de los ejercicios que se van a encontrar.
- Contador = 1: actividad realizada y sin corregir.
- Contador = 2: actividad corregida. Listo para comenzar una nueva actividad.

BOTONES

Necesitaremos crear tres botones:

- Botón *comenzar*: mostrará el enunciado al usuario.
- Botón *corregir*: corregirá la actividad, dará la puntuación de la actividad.
- Botón *otra*: ofrecerá la posibilidad de realizar más actividades.
- Botón *volver a empezar*: me permitirá volver a empezar desde cero, desde la pantalla inicial reseteando todas las puntuaciones.

PASOS

Debido a la extensión de los pasos que tenemos que realizar no los voy a incluir en este documento, pero se pueden consultar en la presentación que me servirá de apoyo durante el taller y a la que se puede acceder desde el siguiente enlace:

ENLACE A LA PRESENTACIÓN

La construcción con la actividad autoevaluable que hemos realizado en el taller se puede visualizar en el siguiente enlace:

ACTIVIDAD AUTOEVALUABLE DISEÑADA EN EL TALLER

En la primera parte de la construcción definiremos todas las variables que vamos a necesitar: aciertos, contador, soluciones, soluciones de los alumnos, correcto, puntuación y las tres del SCORM.

Generamos el primer texto de bienvenida y el botón comenzar que nos creará los datos aleatorios para el ejercicio.

Escribimos el texto del enunciado, las casillas de entrada para que el usuario pueda escribir allí sus soluciones y los textos de solución correcta o incorrecta, además de la puntuación que lleva el usuario.

Creamos el botón corregir que me permitirá corregir la solución de los alumnos. ¿Qué ocurre si no oculto este botón cuando le hemos dado a corregir?

Finalmente creamos los botones para generar nuevas actividades y para volver a empezar.

REFERENCIAS

Las referencias que he utilizado para realizar este taller son las siguientes:

- Actividades autoevaluables de Javier Cayetano en la Web de GeoGebra.
- Actividades autoevaluables de Débora Pereiro en la Web de GeoGebra.
- Actividades autoevaluables de Ángel Manuel González en la Web de GeoGebra.
- Libro “Aprendemos a crear actividades autoevaluables” de Javier Cayetano.
- Vídeo del taller de Pablo Triviño: “Actividades autocorregibles + Aula GeoGebra”.

- Manual de Exelearning 2.7.

Para hacer referencia al artículo:

Rubén Jiménez Jiménez (2022). Actividades autoevaluables con GeoGebra para nuestra aula virtual. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 112 - 119). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

COMUNICACIONES

PROCESOS REFLEXIVOS EN UNA FORMACIÓN CONTINUADA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.
EL CASO DE LA CANTIDAD Y EL NÚMERO [i]

Luis Alexander Castro Miguez[ii a], Olga Lucía León Corredor[iii b]

[a] Colegio Atahualpa I.E.D., [b] Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen

Esta comunicación da cuenta de una experiencia desarrollada con profesores y estudiantes de básica primaria alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la cantidad y el número, procesos permeados por la COVID-19. Se identifican las características emergentes de los procesos reflexivos en la formación continuada de profesores de matemáticas y los elementos constitutivos de una trayectoria de aprendizaje. Se destacan tres tipos de resultados: identificación de algunas situaciones problemáticas; formulación de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la cantidad y el número desde algunos procesos y subprocesos; y caracterización de los procesos reflexivos de profesores sobre las prácticas de enseñanza y aprendizaje de la cantidad y el número desde una trayectoria.

Palabras clave: *procesos reflexivos, subitización, conteo, aprendizaje, matemáticas.*

INTRODUCCIÓN

Identificadas las situaciones problemáticas se construye un macro-problema el cual se formula a través de la siguiente pregunta: ¿Cómo darle continuidad institucional al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares bajo las condiciones dadas por la pandemia? Con la identificación del macro-problema es posible construir un sistema de micro-problemas presente en la práctica profesional del profesor de matemáticas de preescolar y básica primaria, concebidos desde una trayectoria de análisis de situaciones problemáticas que reconocen precariedades en: la comunicación; las condiciones de la familia y la escuela; en el diseño de ambientes de aprendizaje para estudiantes en situación de discapacidad y en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemáticas escolares que refieren a la ausencia del proceso de subitización en el desarrollo de la comprensión del número y la cantidad.

Aplicado el sistema para la formación continuada de profesores se puede establecer una trayectoria en los procesos reflexivos de los profesores desde el reconocer, el repensar y el reconstruir prácticas comunitarias de reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas escolares donde cada una de las ideas expuestas por los profesores "determina la siguiente como su resultado, mientras que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que le precedieron" (Dewey, 1998a, p. 8), esto permite

[i] Esta comunicación corresponde a uno de los productos obtenidos fruto de la investigación: "Formación continuada de profesores de preescolar y básica primaria en una educación matemática escolar accesible" realizada en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia).

[ii] Doctor en Educación. Magister en Docencia de las Matemáticas. Licenciado en Matemáticas. Colegio Atahualpa I.E.D. Bogotá (Colombia) lacastrom@educacionbogota.edu.co

[iii] Doctora en Educación. Matemática. Docente Investigadora, Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. olleon@udistrital.edu.co

identificar tipos de aprendizaje y tipos de transformación en los profesores desde un compromiso y una responsabilidad consciente de las consecuencias que puede tener cada una de sus acciones.

En particular, el desarrollo del macroproceso de cantidad y número implica a su vez el desarrollo de otros procesos como el de subitización y conteo. La gran mayoría de profesores reconocen que la escuela poco promueve el desarrollo de habilidades como la subitización.

PROCESOS REFLEXIVOS EN LA FORMACIÓN CONTINUADA DE PROFESORES

Se entenderá por procesos reflexivos, como aquel proceso dinámico, complejo, presente en el aquí y en el ahora de toda práctica escolar, que permite reconocer, repensar y reconstruir diferentes prácticas de enseñanza de las matemáticas; donde la reflexión,

> no implica tan solo una secuencia de ideas, sino una con-secuencia, esto es, una ordenación consecuencial en la que cada una de ellas determina la siguiente como su resultado, mientras que cada resultado, a su vez, apunta y remite a las que le precedieron. (Dewey, 1998a, p. 8)

Aspecto que se complementa con lo propuesto por Ametller y Alsina i Pastells (2017) quienes reconocen que una formación de profesores desde procesos reflexivos busca la re-construcción a partir de la co-construcción, implicando así un trabajo colaborativo; además de contrastes individuales desde la fundamentación de teorías socioculturales del aprendizaje humano (Alsina i Pastells, 2010).

Reconocer.

Dewey (1998a) afirma que “conocer, captar una cosa intelectual o teóricamente, es salir de la región de la vicisitud, del cambio y de la diversidad” (p. 225); es reflexionar y desarrollar procesos personales, que lleven al crecimiento personal. Se *reconoce* desde la reflexión con el fin de ampliar el significado total y adecuado de lo que sucede; algo ha de haberse comprendido. La mente está en posesión de algún significado que haya dominado, o el pensamiento sería imposible. El constante movimiento en espiral del conocimiento implica que “el incremento del arsenal de conocimientos nos hace conscientes de nuevos problemas, mientras que sólo mediante la trasposición de los nuevos asombros a lo que nos es familiar y llano comprendemos o resolvemos esos problemas” (Dewey, 1998a, p. 67).

Repensar.

El *Repensar* guarda una relación directa con el proceso de reflexión, libera al sujeto de la actividad meramente impulsiva y puramente rutinaria, y le permite actuar deliberada e intencionalmente para alcanzar los objetivos de los que es consciente, a partir de una planificación; y así procurar un dominio de lo ausente y alejado del presente (Dewey, 1998a). El pensar es “el esfuerzo intencional para descubrir conexiones específicas entre algo que nosotros hacemos y las consecuencias que resultan, de modo que ambas cosas lleguen a ser continuas” (Dewey, 1998b, p. 129); es un proceso de indagación, observación e investigación. El pensar reflexivamente implica “1) un estado de duda, de vacilación, de perplejidad, de dificultad mental, en la que se origina el pensamiento, y 2) un acto de búsqueda, de caza, de investigación, para encontrar algún material que esclarezca la duda, que disipe la perplejidad” (Dewey, 1998a, p. 12).

Reconstruir.

Este proceso de reconstrucción no se limita a sustituir la “razón” por la “inteligencia”,

> si el pensar constituye la manera de llegar a una reorganización deliberada de la experiencia, entonces la lógica es la formulación clarificada y sistematizada de los procesos del pensar capaces de hacer posible que la deseada *reconstrucción* avance de una manera más económica y eficaz. (Dewey, 1993, p. 151).

El primer requisito de la "reconstrucción es el llegar a una hipótesis sobre cómo ha sobrevenido este enorme cambio de una manera tan amplia, tan profunda y tan rápida" (Dewey, 1993, p. 22). "La reconstrucción no puede ser menos que la tarea de desarrollar, de formar, de producir (en el sentido literal de este vocablo) los instrumentos intelectuales que habrán de llevar de una manera progresiva" (Dewey, 1993, p. 27) a aquello que se desea completar, fortalecer, etc.

TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE: CANTIDAD Y NÚMERO

Clements y Sarama (2015) afirman que "los niños siguen procesos naturales de desarrollo en su aprendizaje y crecimiento. Para el caso del aprendizaje de las matemáticas los estudiantes siguen procesos naturales de desarrollo en el que adquieren diferentes habilidades e ideas de tipo matemático a su manera. La ruta de desarrollo de acuerdo con Clements y Sarama (2015) se constituye en la base para las trayectorias de aprendizaje (en adelante TA), sus tres elementos son: "una meta matemática, una ruta de desarrollo a lo largo de la cual los niños progresan para alcanzar dicha meta y un conjunto de actividades instructivas, o tareas, propias de cada uno de los niveles de pensamiento de la ruta, que ayudan a los niños a desarrollar niveles de pensamiento cada vez más avanzados" (p. 10).

A partir de una TA es posible proponer una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (en adelante THA) que a la vez se articula con otras THA obteniendo así diferentes entradas para abordar las grandes ideas matemáticas: las "agrupaciones de conceptos y habilidades que son matemáticamente centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños y generadoras del aprendizaje hacia el futuro" (Clements y Sarama, 2015, p. 11). Desarrollada cada una de las THA, es posible identificar la Trayectoria Real de Aprendizaje (en adelante TRA) para cada uno de los estudiantes. La TRA reconoce que la diversificación de las actividades de aprendizaje permite brindar múltiples formas de implicación, de representación y de acción y expresión; aspectos que favorecen un seguimiento al progreso de los estudiantes en relación con su punto de partida y no en comparación con otros; haciéndolo consciente de sus propios conocimientos y actitudes.

Clements y Sarama (2015), afirman que la subitización y el conteo "son las formas principales que utilizan los niños para determinar el número de una colección de objetos" (p. 69), "el tamaño de una cantidad" (Calderón y León, 2016, p. 67); lo que fundamenta el desarrollo de un sentido numérico permitiendo modelar problemas cuantitativos y favoreciendo la toma de decisiones. Algunos de los procesos que se reconocen en THA de la cantidad y el número son:

Subitización.

Lakoff y Núñez (2000) consideran que todo ser humano independientemente de su cultura puede saber instantáneamente de un vistazo si hay uno, dos o tres objetos, esta habilidad llamada subitización, viene del Latín "Repentino", de esta habilidad se puede decir que es un poco más complejo discernir entre cantidades de objetos consecutivas como ocho de nueve, o trece de catorce, respecto a la subitización de cantidades pequeñas, pero se puede hacer el paso progresivo, hasta llegar a trabajar cantidades más grandes.

La subitización se puede dar en secuencias o realizando matrices, refiriéndonos no solo a cantidades de objetos tangibles, sino que también se pueden subitizar golpes, pitos, destellos de luz, en los cuales se facilitaría subitizar hasta cinco o seis de estos. Desde experimentos realizados por Kaufman et al. (1949), se observó la *subitización como un proceso diferente a contar o estimar y a partir de allí se considera que el proceso de subitizar es innato;* es la habilidad de reconocer la numerosidad en una colección de objetos casi de forma instantánea y decir cuántos hay (Clements y Sarama, 2015). "Cuando usted 'simplemente ve' cuántos objetos hay en una colección muy pequeña, usted está usando la *subitización perceptiva*" (p. 19) y cuando ve las partes y las pone juntas para hallar el total está usando la *subitización conceptual*.

Conteo.

El conteo es el proceso en el que ya se empieza a consolidar la idea de número al asociar una cantidad de objetos a la representación numérica, de acuerdo con Calderón y León (2016), el conteo está asociado a las necesidades primarias de establecer la numerosidad de colecciones de objetos y darle la posición a un objeto en una colección ordenada. “El conteo es el primer algoritmo, el más básico y el más importante (…), es el primer procedimiento paso a paso que los niños aprenden para solucionar ciertos problemas – determinando cuántos elementos hay en un conjunto finito” (Clements y Sarama, 2015, p. 37). El conteo favorece el desarrollo de la clasificación y la seriación. Al conectar experiencias de conteo con la subitización, los niños pueden usar la subitización perceptual para elaborar unidades de conteo y así construir ideas iniciales de cardinalidad.

Tabla 1. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la cantidad y número: Subitización y conteo

Procesos		Subprocesos
Subitización	**Subitización Perceptual**	**S1. Percepción de cantidades** *De forma innata los niños son sensibles a diferencias de cantidades en colecciones y a los cambios de cantidad.*
		S2. Nominación de cantidades *Es un proceso en el cual el niño puede expresar con palabras cantidades.*
		S3. Construcción de pequeñas colecciones *Es el proceso de organización que permite al niño favorecer las subitización de forma perceptual*
		S4. Reconocimiento de cantidades hasta 4 *Percibir la cantidad de elementos de una colección, integrando la sensibilidad al numeral y reconociendo la numerosidad por simple vista.*
	Subitización Conceptual	**S5. Reconocimiento de cantidades hasta 5** *Percibir la cantidad de elementos de una colección empleando grupos desde la subitización perceptual e integrando la sensibilidad al numeral.*
		S6. Reconocimiento de cantidades hasta 10 *Percibir la cantidad de elementos de una colección empleando grupos desde la subitización perceptual e integrado la sensibilidad al numeral.*
		S7. Reconocimiento de cantidades hasta 19 *Percibir la cantidad de elementos de una colección empleando grupos desde la subitización perceptual e integrado la sensibilidad al numeral.*
		S8. Con conteo de saltos *Verbalizar nombres de arreglos estructurados, usando grupos y contando por saltos.*
		S9. Con valor posicional (grupos de 10) *Verbalizar nombres de arreglos estructurados, usando grupos de 10, contando por saltos y el valor posicional.*
Conteo		**C1. Conteo de objetos** *Consiste en el etiquetado numérico individual y secuencial de los elementos de una colección, designando la última etiqueta el cardinal de la colección. El Conteo requiere de un sistema lingüístico (conteo oral o gestual) y de la coordinación visual, manual y verbal.*
		C2. Contar con correspondencia *Asignar una palabra de la secuencia numérica convencional, correspondencia término a término entre la serie ordenada, y una colección determinada que forma otra colección.*
		C3. Conteo usando patrones *Habilidad de contar haciendo agrupaciones de igual cantidad de elementos, los saltos más comunes son de 5 en 5, de 2 en 2 y de 10 en 10.*
		C4. Contar de forma mental *Proceso en el cual los niños pueden decir el cardinal de elementos de una colección sin realizar acciones de enumeración uno a uno, este subproceso integra a C2 y C3, e incluso la subitización perceptual, debido a que a partir de agrupaciones subitizables, puede hacer por ejemplo conteo a saltos y hacer un conteo mental.*
		C5. Contar usando valor posicional *Se cuenta por unidades cuantitativas como lo son los grupos de 10 o los grupos de 10 de 10, el niño “entiende el sistema de numeración en base 10 y el concepto de valor posicional”*

CARACTERIZACIÓN PROCESOS REFLEXIVOS DE PROFESORES. PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA CANTIDAD Y EL NÚMERO

A continuación, se presentan algunas reflexiones de los profesores sobre el proceso de desarrollo y aprendizaje que vive un estudiante de grado primero en relación con la cantidad; en adelante se denominará: Estudiante A. La profesora del Estudiante A considera que la actividad pedagógica a desarrollar con el estudiante es un "proceso difícil" por las siguientes razones:

> se me dificulta comprenderle; lo poco que he evaluado en él ha sido con el acompañamiento de la mamá, […], ella dice: *profe, quiero aprovecharlo hoy que está dispuesto a trabajar* […]. Él tiene actitudes de agresividad y cuando no quiere trabajar, bota todo, es lo que la señora ha expresado. La profe que lo tenía el año pasado en preescolar reporta esas situaciones, por eso el niño está en inclusión y la mamita expresa que se le trabaja, se le trabaja, … pero como que se le olvidan las cosas con facilidad. No sé si cognitivamente presente alguna situación de déficit cognitivo en sí. (GR1, 2021, Abril 12)

Al respecto otro profesor reconoce que "hasta el momento no se puede valorar con una discapacidad, hasta que no haya un proceso; […] en el que se pueda identificar que el niño definitivamente tiene dificultad para procesar la información que uno le brinda". Inicialmente algunos de los profesores proponen implementar una estrategia que permita una interacción con el Estudiante A, emplear un set de fichas (Ver Figura 1) que permita establecer una comunicación con el estudiante y unos acuerdos mínimos de trabajo; puesto que identificaron como barrera para la accesibilidad, la comunicación: retraso notorio en el desarrollo del lenguaje.

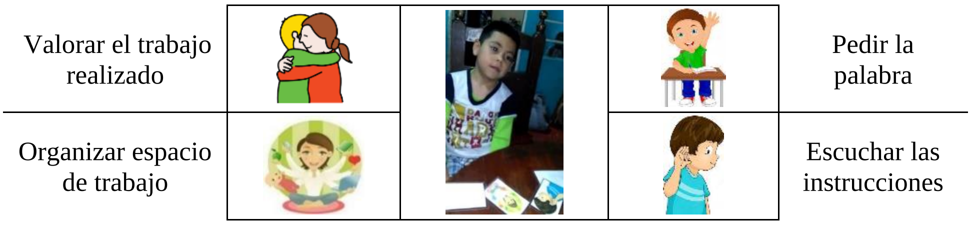
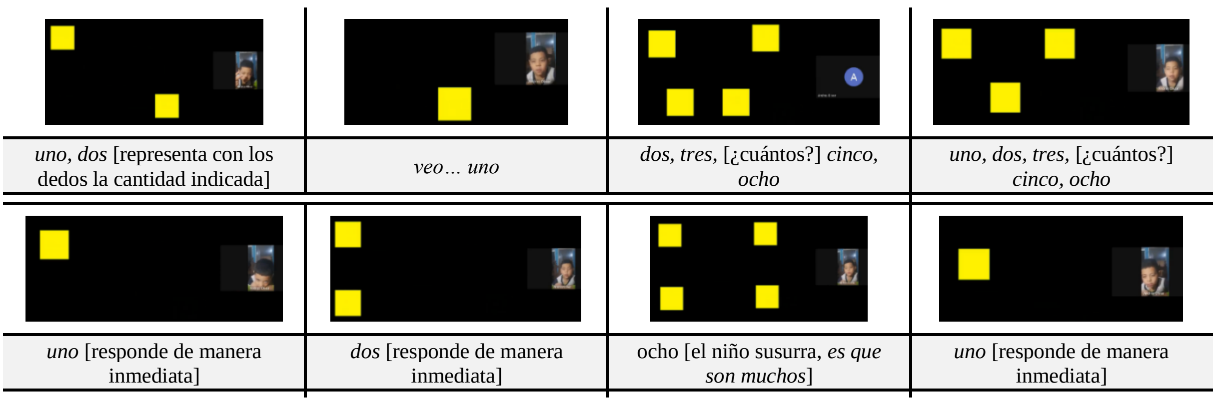


Figura 1. Set de fichas para la interacción con el Estudiante A

La implementación de este set de fichas debe complementarse, en palabras de un profesor, con

> un lenguaje básico, instrucciones muy directas, muy cortas, claras, para saber hasta qué punto él tiene la dificultad. El problema del lenguaje, de pronunciación, le puede generar cierta frustración, también por eso puede ser que él a veces se torne en agresividad. (GR1, 2021, Abril 12)

Atendiendo a esta recomendación e implementado el set de fichas para la interacción con el Estudiante A; el grupo de profesores organiza una actividad de aprendizaje con la cual pretende valorar el estado de desarrollo del proceso subitización (perceptual), proceso fundamental en la adquisición de la cantidad y el número. La actividad de aprendizaje invita a que el estudiante pueda determinar la numerosidad de una colección, figuras de forma cuadrada y de color amarillo; para ello se presenta durante un tiempo (tres segundos) cada una de las colecciones y se le formula al estudiante una de las siguientes preguntas: ¿Cuántas hay?, ¿Cuántas ves?

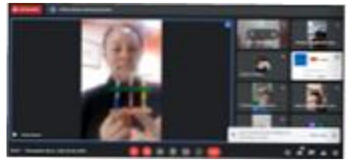


			
dos … tres	*uno, dos* [¿cuántos?] dos	uno, dos, dos, [¿cuántos?] tres	uno, dos, cinco, ocho

Figura 2. Respuestas del Estudiante A frente a una actividad de subitización perceptual

La Figura 2 coloca en evidencia que el Estudiante A realiza subitización perceptual hasta dos elementos indicando la palabra número correspondiente. Cuando la colección tiene tres o cuatro elementos procede a contarlos; sin embargo, las palabras número que pronuncia no corresponde a la secuencia numérica dada por la colección. La Tabla 2 presenta algunas de las ideas expuestas por los profesores sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el caso de la cantidad y el número.

Tabla 2. Procesos reflexivos de profesores sobre las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El caso de la cantidad y el número.

Reconocer	Repensar	Reconstruir	Producto
En particular tengo una dificultad frente al ‘ concepto’ . En el caso de matemáticas, el manejo de conceptos y cómo llevarlo al aprendizaje; porque, yo siempre en el ejercicio que hago, intento que todo sea muy lúdico y muy desde la experiencia. (GR1, 2020, Abril 2	Más allá de pensar en los mínimos pienso en lo fundamental, de esta manera construir alrededor de lo fundamental una ruta que tenga en cuenta procesos de desarrollo y que vincule a todas las poblaciones. Busco un fundamento para un currículo flexible que permita diseñar ambientes de aprendizaje de las matemáticas accesibles. (GR1, 2020, Mayo 21)	*¿Eso es percepción de cantidad, encontré un patín, si fuese esa la expresión?* No, es como el uso, el uso de la matemática de forma […], como ya la propia, porque tiene experiencias matemáticas probablemente constantes, ya las meten dentro de su lenguaje; cuando dicen falta uno o veo tres cosas, en vez de decir veo el carro blanco, el rojo y el azul, dicen veo tres carros o ese tipo de cosas. (GR1, 2020, Agosto 25)	ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 
Nos permitirá construir algo, una ruta, alrededor de lo que es fundamental teniendo en cuenta procesos de desarrollo que vinculen a todas las poblaciones. Cuando yo quiero que sea accesible, quiero que vincule a todas las poblaciones, entonces estoy pensando en […] cómo sería ese proceso natural o cómo es ese proceso para llegar al aprendizaje, ese proceso de desarrollo. (GR1, 2020, Mayo 21)	Si bien en las aulas de clase y de manera presencial-física se requería de la creatividad del docente para acercar a los estudiantes al conocimiento, en los procesos virtuales esta situación es mayor puesto que el ambiente de aprendizaje que se suscita a través de una pantalla necesita transformarse en un espacio de creación, construcción e interacción constante, que en la inmediatez de la tecnología requiere una preparación previa, un diseño pensado en las condiciones actuales y sobre todo un acercamiento directo con el saber, siempre teniendo presente los procesos afectivos inmersos en la cotidianidad del estudiante y del docente. (GR1, 2020, Octubre 28	Se me dificulta comprenderle; lo poco que he evaluado en él ha sido con el acompañamiento de la mamá, […], ella dice: *profe, quiero aprovecharlo hoy que está dispuesto a trabajar* […]. Él tiene actitudes de agresividad y cuando no quiere trabajar, bota todo, es lo que la señora ha expresado. La profe que lo tenía el año pasado en preescolar reporta esas situaciones, por eso el niño está en inclusión y la mamita expresa que se le trabaja, se le trabaja, … pero como que se le olvidan las cosas con facilidad. No sé si cognitivamente presente alguna situación de déficit cognitivo en sí. (GR1, 2021, Abril 12)	EDUCACIÓN MATEMÁTIESCOLAR ACCESIBLE 
En matemáticas considero se deben buscar estrategias para que se lleve al estudiante a construir el concepto de cantidad y alimentarlo de forma estructural llevando una compleja red conceptual desde los primeros años de vida hasta la madurez cognitiva. Dotando de sentido a la matemática escolar y considerando su aporte en la comprensión del mundo. (GR1, 2020, Mayo 21)	Es importante la idea de visualizar, que se tenga en cuenta que es algo que se percibe, que se percibe a través de un reconocimiento visual de organizaciones estructurales. Pero más allá de lo visual, de los ojos, de que se ve con los ojos, hay que hablar de visualización, es decir, que se hace una imagen mental de algo estructural […]. Una población ciega también puede visualizar una organización estructural y establecer una cantidad a través del tacto, de la forma […], a través de la subitización; por eso hablo de la idea de visualización. (GR1, 2020, Julio 14)	La subitización no ha sido casi trabajada; generalmente en los libros de texto, en los colegios, en el currículo y en todos esos documentos que sustentan como el proceso de aprendizaje, aparece es el conteo. Entonces este proceso de subitización es como esa habilidad que le permite el desarrollo de la compresión del número, va a fortalecer esa llegada al número. (GR1, 2020, Agosto 11)	PROCESO DE SUBITIZACIÓN Y CONTEO 

Hasta aquí es posible afirmar con Dewey (1998a) que la reflexión no es tan sólo una secuencia de ideas, sino la responsabilidad con una *con*-secuencia, puesto que se observa una ordenación consecuencial en cada una de las ideas propuestas por los profesores. Algunos de ellos manifiestan su falta de dominio en la disciplina y con ello una preocupación en que las actividades de aprendizaje tengan un sentido para los estudiantes; hay un cuestionamiento sobre los métodos de enseñanza de las matemáticas, pero ven una oportunidad de cambio en pensar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde el desarrollo de habilidades y procesos, lo que implicaría acciones de auto-formación y co-formación. Esta ordenación consecuencial de ideas hace que los procesos reflexivos estén constituidos sistémicamente por el reconocer, el repensar y el reconstruir prácticas de enseñanza de las matemáticas escolares.

En tiempos de pandemia, los profesores han identificado una serie de barreras que no favorecen las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tales como: los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias (dispositivos tecnológicos, conectividad, entre otros) que les permita hacer parte del proceso; no es posible realizar encuentros sincrónicos con los estudiantes para responder sus inquietudes en tiempo real; falta de dominio, por parte de algunos de los profesores, de herramientas tecnológicas, de la propia disciplina, entre otras. Algunos profesores reconocen que la memoria de trabajo desarrollada por algunos niños hace que se favorezcan procesos propios de las matemáticas, uno de los profesores afirma:

> El niño ya hace muchas cosas de subitización, tanto perceptual como conceptual, la parte de conteo, la hace a partir de un número y tiene algo, que tengo que estudiar más a profundidad respecto a tener la conciencia de la población, y es algo que se llama memoria de trabajo. (GR1, 2021, Abril 12)

Reconocidas estas condiciones, le permite a los profesores *repensar* sus prácticas de enseñanza, en particular centran su reflexión en las diferentes formas que utilizan los niños para determinar la numerosidad de una colección de objetos en los que se privilegia los procesos de conteo y subitización (Clements y Sarama, 2015). Uno de los profesores afirma que el conteo es un "proceso por el cual se asocia un número al tamaño de una colección" y está relacionado con "las acciones sobre los objetos físicos, hasta llegar a la constitución de unos objetos mentales denominados números, que permiten operar cantidades" (Calderón y León, 2016, p. 92).

Este conteo puede ser con correspondencia uno a uno, en saltos usando patrones o el valor posicional, regresivo, verbal, entre otros. Para favorecer el aprendizaje de las matemáticas, en particular el desarrollo del proceso de subitización y conteo, implica un *reconstruir* de las prácticas de enseñanza; al respecto uno de los profesores afirma que este reconstruir "debe caracterizarse por el compromiso, la dedicación, trabajo en equipo y flexibilización curricular, que permita lograr interés y más participación de las familias para lograr aprendizajes significativos en los estudiantes, obviamente con la orientación docente".

A MANERA DE CONCLUSIÓN

La formación continuada de profesores ha producido efectos de diferente orden. Uno de ellos es el diseño e implementación de dispositivos didácticos a partir de Ambientes de Aprendizajes Accesibles que puede ser virtuales, remotos y/o presenciales. Estos dispositivos se pueden clasificar en digitales y analógicos. Entre los digitales, se destaca las aplicaciones, los portales web y los videos; entre los analógicos, las guías impresas desde la elaboración de cartillas y talleres, los artefactos desde la elaboración de mallas, tiras y cuadros, el ábaco de soroban, la rejilla o caja de diez y fichas de subitización (Ver Figura 48).

Además se cuenta con una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la cantidad y el número, construida y enriquecida desde los diferentes Grupos de Reflexión y los resultados de diferentes investigaciones (Alonso, 2019; Calderón y León, 2016; Clements y Sarama, 2015; Martínez, 2019);

y una Trayectoria Real de Aprendizaje de la cantidad y el número para dos estudiantes de grado primero.

Finalmente, desde los procesos reflexivos de profesores de matemáticas, se han identificado tres modalidades de interacción para el aprendizaje: auto-aprendizaje, co-aprendizaje y hetero-aprendizaje. Estas experiencias de aprendizaje les permitieron a los profesores de preescolar y básica primara reconocer, repensar y reconstruir prácticas de enseñanza de las matemáticas escolares personalizadas, innovadoras, creativas, flexibles, afectivas, incluyentes, reflexivas, con incorporación de las TIC e involucrando a la familia.

Referencias.

Alonso, N. (2019). *Articulación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje de la aritmética para población sorda en niveles iniciales*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Alsina i Pastells, Á. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación matemática*, *22*(1), 149–166.

Ametller, J., & Alsina i Pastells, Á. (2017). ¿Qué aportan el aprendizaje reflexivo y la enseñanza dialógica a la formación permanente? Un primer análisis con profesorado de ciencias y de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, Núm. Extraordinario*, 2059–2064.

Calderón, D., & León, O. (2016). *Elementos para una didáctica del lenguaje y las matemáticas en estudiantes sordos de niveles iniciales*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Clements, D., & Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad* (O. León, A. Lange, L. León, & A. Toquica (Eds.)). Routledge.

Dewey, J. (1993). *La reconstrucción de la filosofía* (Vol. 49). Planeta-Agostini.

Dewey, J. (1998a). *Cómo Pensamos. Nueva exposición de la relación entre el pensamiento reflexivo y proceso educativo* (1ª ed.). Paidós.

Dewey, J. (1998b). Democracia y Educación. Una introducción a la filosofía de la educación. En *Revista española de la opinión pública* (3ª ed., Número 15). Ediciones Morata. https://doi.org/10.2307/40181166

Kaufman, E., Lord, M., Reese, T., & Volkmann, J. (1949). The Discrimination of Visual Number. *The American Journal of Psychology*, *62*(4), 498–525.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings Mathematics into being*. Basic Books.

Martínez, E. (2019). *Juego y trayectorias de aprendizaje de la aritmética inicial en ambientes de aprendizaje que incluyen estudiantes en situación de discapacidad intelectual*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas Facultad.

Para hacer referencia al artículo:

Luis Alexander Castro Miguez y Olga Lucía León Corredor (2022). Procesos reflexivos en una formación continuada de profesores de matemáticas. El caso de la cantidad y el número. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 121 - 129). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

CONECTANDO ETAPAS. UNA EXPERIENCIA DE INTERCAMBIO DE ROLES

Autores: César Carbajo Olea, Ana García Lema y Amaya Santamaría Gallego

Institución: IES Recesvinto, Venta de Baños, Palencia

Resumen

A través de esta actividad buscamos la conexión de diferentes etapas de nuestro sistema educativo y la investigación acerca de la trasmisión del conocimiento desde la Universidad hasta Primaria pasando por la etapa de Secundaria. Un grupo de alumnos de tercer y cuarto curso de ESO de nuestro instituto han recibido asesoramiento y formación por parte de alumnos del grado de magisterio con el fin de ocupar el rol de profesores y explicar contenidos matemáticos a los alumnos de sexto curso de Primaria del Colegio Cruce de Castilla.

Palabras clave: *etapas, matemáticas, alumnos profesores, cambio de roles*

INSTITUCIONES PARTICIPANTES

Colegio Cruce de Castilla, Venta de Baños, provincia de Palencia.
Instituto de educación secundaria obligatoria Recesvinto, Venta de Baños, provincia de Palencia.
Facultad de Educación de Palencia, Universidad de Valladolid.

JUSTIFICACIÓN

Uno de los principales pilares de la educación es la labor que realizan los docentes, una profesión que quizás no siempre es tan reconocida como debería serlo. Por desgracia, en ocasiones la carrera docente no está lo suficientemente valorada y no son muchos los alumnos cuya vocación es ese camino. Con este proyecto se intenta, entre otras cosas, despertar vocaciones docentes en nuestros alumnos. Y qué mejor forma que hacerlo que con un intercambio de roles que convierta a los alumnos en docentes y les haga sujetos principales del hecho educativo.

La LOMLOE, en su exposición de motivos, incide en la importancia del currículo como elemento estructural que garantice una educación inclusiva, acorde a la adquisición de competencias y que respete la diversidad.

Siguiendo estos principios, durante el curso 2021-2022, hemos desarrollado en el IES Recesvinto la actividad “Conectando etapas. Una experiencia de intercambio de roles”.

Esta actividad ha sido organizada por el departamento de Matemáticas del IES Recesvinto de Venta de Baños en colaboración con el Colegio Cruce de Castilla de Venta de Baños y el Departamento de Pedagogía del grado de Magisterio de la UVA de Palencia.

A través de esta actividad buscamos la conexión de diferentes etapas de nuestro sistema educativo y la investigación acerca de la trasmisión del conocimiento desde la Universidad hasta Primaria pasando por la etapa de Secundaria.

La actividad, desarrollada en varias fases, ha consistido a grandes rasgos, en que un grupo de alumnos de tercer y cuarto curso de ESO del IES Recesvinto de Venta de Baños, han recibido asesoramiento y formación por parte de alumnos del grado de magisterio con el fin de ocupar el rol de profesores y explicar contenidos matemáticos a los alumnos de sexto curso de Primaria del Colegio Cruce de Castilla.

Esta actividad encaja, a nuestro juicio, de manera perfecta con el modelo de situación de aprendizaje planteado por el borrador del currículo de Educación Secundaria Obligatoria publicado por la Junta de Castilla y León y así mismo está en consonancia con el artículo 2 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo

Dicho borrador nos describe con precisión lo que entendemos por situación de aprendizaje.

> *Situación de aprendizaje es el conjunto de momentos, circunstancias, disposiciones y escenarios alineados con las competencias clave y con las competencias específicas a ellas vinculadas, que requieren por parte del alumnado la resolución de actividades y tareas secuenciadas a través de la movilización de estrategias y contenidos, y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las competencias.*

Al situar a nuestros alumnos en el rol de profesores les damos la oportunidad de entender la complejidad del hecho educativo. En vez de ser sujetos meramente pasivos, que se limitan a interactuar acorde a las pautas dictadas por el profesorado, ahora son ellos los que tienen que desarrollar actividades y pensar estrategias para que otros alumnos asimilen unos contenidos que, a su vez, de algún modo contribuyan al desarrollo de unas competencias. Y todo esto, sin perder de vista el marco legal. Este proceso obliga al alumnado a generar un punto de visto más amplio y global y a entender la importancia de dominar los contenidos y desarrollar tareas.

OBJETIVOS

Nuestro objetivo principal es convertir a nuestro alumnado en el actor principal del proceso de enseñanza- aprendizaje. Para ello proponemos un cambio de rol y que alumnos de 3º y 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, ocupen el de profesor de alumnos de 5º y 6º de Educación Primaria. Ayudados por sus profesores, deberán diseñar una pequeña unidad didáctica que permita de forma lúdica alcanzar unos objetivos previamente fijados.

Con esto conseguimos trabajar diferentes competencias.

Competencia lingüística: Es una actividad basada en la comunicación oral

Competencia matemática: Se plantean problemas y situaciones de aprendizaje que desarrollen la lógica y el pensamiento matemático.

Competencia personal, social y de aprender a aprender: Buscamos que los alumnos reflexionen sobre los diversos estilos de aprendizaje y sobre la forma de enseñar y transmitir contenidos.

Competencia ciudadana: Trabajamos en todo momento de forma grupal y cooperativa, con el doble objetivo de aprender y enseñar.

Competencia emprendedora: Se fomenta que sean los propios alumnos los que diseñen situaciones en las que profundizar en los contenidos del currículo

FASES DEL PROYECTO

El desarrollo del proyecto incluye varias fases que se desarrollaron de forma no lineal.

Primera fase

Esta primera fase tuvo un carácter preparatorio. En ella el profesorado responsable de los tres centros participantes coordinamos los pormenores relativos a la organización de la actividad.

Se realizaron dos reuniones online en las que se decidió el alumnado que iba a participar, así como las fechas y los contenidos curriculares a impartir. Se decidió que las actividades a desarrollar versarían alrededor del contenido curricular de los bloques de Geometría y Probabilidad del currículo de 5º y 6º curso de Primaria. Quiero destacar las facilidades de todas las partes implicadas para cuadrar el calendario.

Segunda fase

En esta segunda fase un grupo de alumnos del de educación social, tutorizados por su profesora, prepararon una batería de actividades relacionadas con la Geometría y la Probabilidad y las realizaron con los alumnos de Secundaria del instituto. En estas actividades se busca un enfoque práctico y lúdico a través de situaciones concretas en las que se puedan trabajar contenidos curriculares de Matemáticas. Además, les dieron nociones sobre didáctica de matemáticas, en qué se deben centrar las explicaciones para que el alumnado seleccionado aproveche la actividad.

Tercera fase

En la tercera y última fase son los alumnos de Secundaria los que deben diseñar actividades prácticas, orientadas a los alumnos de quinto y sexto de Primaria, que permitan a dichos alumnos profundizar en contenidos curriculares de matemáticas correspondientes a su nivel educativo. Estas actividades son coordinadas por todos los profesores implicados y se realizan en dos sesiones, una en el colegio y otra en el instituto. Los alumnos le dieron un enfoque totalmente manipulativo, intentando mostrar a los alumnos de 5º y 6º un enfoque curricular más práctico que el que están acostumbrados a ver en clase. Además, los "alumnos profesores" diseñaron la actividad en forma de gymkana. Los alumnos de 5º y 6º se repartieron en grupos de 4 o 5 alumnos. Cada pareja de "alumnos profesores" diseñó una prueba de la gymkana y los alumnos tenían 8 minutos (aproximadamente) para resolver cada prueba. El tiempo era controlado por el profesorado del IES Recesvinto. En total, los alumnos de 5º y 6º pasaron por 8 o 9 pruebas.

ACTIVIDADES REALIZADAS

Geometría

Se realizaron las siguientes actividades que fueron diseñadas por alumnos de 4º de ESO con la supervisión de sus profesores.

Tangram. Proponemos construir una figura sencilla de Tangram y posteriormente calcular su área.

Forma figuras y calcula sus áreas. Los alumnos formarán diferentes figuras geométricas como círculos, cuadrados y rectángulos. Tendrán que colocar en un panel gomas de diferentes formas para así crear las figuras. Una vez creadas cogerán una regla y medirán las distancias necesarias para poder utilizar las fórmulas ya aprendidas.

Simón dice. La actividad consiste en realizar la dinámica de "Simón dice" incorporando aspectos de geometría como formar líneas paralelas, perpendiculares, secantes, triángulos equiláteros, isósceles, escaleno, rectángulos, acutángulos… Este tipo de figuras se formarán o bien con el cuerpo o bien con objetos cualquiera y posteriormente se hallarán perímetros y áreas a partir de la propia figura que ellos hayan creado.

Triangulando. Con los diferentes triángulos entregados, ellos tendrán que crear su propia figura en grupo. Una vez formada esta figura, tendrán que calcular el área. Para ello, tendrán una regla para poder tomar medidas de la base y la altura de los diferentes triángulos entregados y así poder ejecutar la fórmula del área del triángulo. Contarán también con una hoja y un bolígrafo para que realicen los cálculos pertinentes. Una vez calculado el área de cada uno de los triángulos entregados, tendrán que sumarlas para así conseguir el área de la figura que ellos mismos han creado.

Probabilidad

Se realizaron las siguientes actividades que fueron diseñadas por alumnos de 3º de ESO con la supervisión de sus profesores.

Elegimos puerta, ¿cabra o coche? El clásico problema de Monty-Hall. Hay dos puertas con dos cabras y una con un coche. Elegimos puerta y el presentador nos propone cambiar tras enseñarnos una puerta con cabra. ¿Debemos cambiar? ¿Mejoran nuestras opciones de ganar un coche si cambiamos? ¿Dará igual si cambiamos?

Ruleta, ¿es un juego justo? ¿Qué pasa con el 0? Planteamos las reglas de la ruleta y a través del juego, analizamos la injusticia de este juego. La banca siempre gana.

Blackjack ¿Hay alguna estrategia ganadora? ¿Sirve de algo contar las cartas?

Sumamos las caras superiores de 2 dados cúbicos. Organizamos una carrera. Avanzamos según la suma obtenida. ¿Cuál es la probabilidad de cada suma? ¿Por qué el 7 se repite más veces? Profundizamos en la regla de Laplace.

Lanzamiento de dados, ¿Es ventajoso apostar a que obtendremos al menos un 6 al lanzar 4 dados? Se trata de otro clásico problema, el de las apuestas ventajosas que el caballero de Mere, planteó a Pascal. A través del lanzamiento repetido de dados, seguimos profundizando en la regla de Laplace.

CONCLUSIONES

Esta actividad es idónea para la etapa de Secundaria al poner a nuestros alumnos como figura primordial y sujeto principal del hecho educativo. Fomenta y cuida el empleo de una correcta expresión oral y obliga a nuestro alumnado a proponer formas diversas y variadas de abordar los conocimientos y contenidos del currículo.

Resumiendo esta actividad en tres palabras, podemos afirmar que es motivadora, creativa e inclusiva.

Motivadora:

Esta es una actividad que nuestros alumnos nunca habían realizado. Aunque gran parte de nuestro alumnado ya había trabajado la expresión oral en diversas materias, el hecho de adoptar el rol de profesor y dirigirse a alumnos de menor edad, supone un nuevo reto que nos parece que en sí mismo ya justificaría la actividad

Creativa:

En el diseño de la actividad, comenzamos planteando unos contenidos curriculares de Primaria que, en teoría, nuestro alumnado conoce. Son los alumnos de Secundaria los que deben diseñar actividades graduadas para que los alumnos de Primaria alcancen dichos objetivos. Evidentemente esto les obliga a pensar, imaginar situaciones de aprendizaje y fomenta la creatividad.

Inclusiva:

Una vez diseñadas las primeras actividades, hacemos ver a nuestros alumnos, la diversidad que, afortunadamente, habita en nuestras aulas y la necesidad de que dichas actividades contemplen diversos escenarios, tanto como para alumnos con dificultades de aprendizaje del tipo que sean, tanto como para aquellos alumnos con capacidades superiores a la media.

Del mismo modo, les podemos hacer valorar la importancia del lenguaje a la hora de diseñar actividades que no generen rechazo e incluyan a todos por igual.

Para hacer referencia al artículo:

César Carbajo Olea, Ana García Lema y Amaya Santamaría Gallego (2022). Conectando etapas. Una experiencia de intercambio de roles. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 130 - 135). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

CREACIÓN DE TAREAS EN CONTEXTOS REALES ATENDIENDO A LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Lorena García Fernández[a], J.M. Chamoso Sánchez[a] y M. Mercedes Rodríguez Sánchez[a].

[a] Facultad de Educación, Universidad de Salamanca

Resumen

La literatura aconseja que los estudiantes creen tareas partiendo de contextos reales, para vincular su aprendizaje matemático a situaciones cercanas a su contexto cotidiano. El objetivo de este trabajo es analizar las tareas creadas y resueltas por alumnos de Primaria teniendo en cuenta su autenticidad, contexto real, dominio cognitivo y apertura, así como las fases de modelización seguidas. Para ello, los alumnos, en grupos, crearon tareas y las resolvieron durante dos sesiones del desarrollo usual del curso. Los resultados mostraron que los discentes crearon muchas tareas abiertas, pero, a la vez, exigiendo un escaso razonamiento y con limitada explicitación del procedimiento en la resolución. A pesar de la escasez de la muestra, la realización de este trabajo mostró una gran motivación de los estudiantes, así como la importancia de profundizar en la utilización de tareas auténticas, con contexto real y abiertas en el aula de Primaria para favorecer el pensamiento crítico, discursivo y argumentativo de los alumnos.

Palabras clave: *Creación de tareas, contexto real, autenticidad, apertura, dominio cognitivo.*

Introducción

Los contenidos de Matemáticas, en el aula de Primaria, deben presentarse vinculados a un contexto real, donde los alumnos den sentido próximo a lo que hacen. La realización de actividades en situaciones de la vida cotidiana cercanas a los alumnos puede ayudar a que sean conscientes de, por ejemplo, cuánto valen los productos o que hay que planificar, anticipar, organizar las tareas y tomar decisiones de forma responsable (Alberti, 2018).

Además, hay que tener en cuenta dos aspectos importantes: las Matemáticas están presentes en otras áreas de conocimiento como, por ejemplo, la literatura, el arte, las ciencias naturales o la música; y la resolución de problemas se considera un aspecto esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas en todos los niveles educativos (Blanco y Cárdenas, 2013).

Cuando los alumnos resuelven tareas, recorren una serie de fases del proceso de modelización matemática, entendido como los ciclos que describen los procesos a través de los cuales se resuelve un problema real. Estos procesos son: formular (formulación de situaciones matemáticamente), emplear (uso de conceptos, hechos, procedimientos, razonamientos matemáticos para conseguir resultados), interpretar (interpretación de los resultados obtenidos) y evaluar (evaluación de los resultados y de su interpretación como respuesta al problema real; Figura 1).

Las características de las tareas que realizan los discentes tienen un gran efecto en la naturaleza de su aprendizaje. Constituyen uno de los principales medios con los que el docente puede perseguir el aprendizaje de las competencias matemáticas en su alumnado (Hiebert y Grouws, 2007). De ahí la importancia del papel del docente que, por ejemplo, debe partir de la situación y necesidades de sus alumnos, variar sus métodos de enseñanza, seguir un ritmo adecuado, considerar contextos cercanos, y conseguir que los educandos sean los protagonistas de su aprendizaje y trabajen de forma autónoma. Se espera que ello produzca una motivación en el alumno y favorezca su aprendizaje matemático.

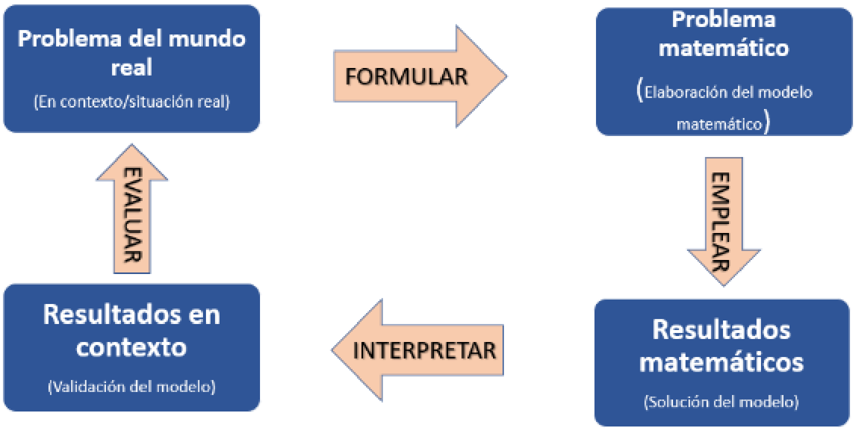


Figura 1. Ciclo de modelización (adaptado de OCDE, 2017).

Este trabajo tiene como objetivo analizar las tareas creadas por un grupo de alumnos de 6º de Primaria en el marco de un contexto real. Existen escasos trabajos que analicen la creación de tareas por los alumnos en el aula de matemáticas, entre los que se puede destacar el de Chamoso y Cáceres (2018) con futuros docentes de Primaria. Sus resultados mostraron que las 306 tareas creadas desarrollaban dominios cognitivos de reproducción (62%), conexiones (33%) y reflexión (5%). Asimismo, las tareas creadas se organizaron en auténticas (47%), verosímiles (7%) y ficticias (46%) atendiendo a las dimensiones en las que se basaban. Se resalta que, pese a que en la mayoría de los proyectos analizados figuraban tareas auténticas, en algunos todas eran ficticias. Además, se destacaba que la autenticidad de las tareas auténticas estaba relacionada con el nivel de capacidad cognitiva que se activara, de manera que las tareas auténticas desarrollaban principalmente capacidades de reflexión mientras que las tareas ficticias desarrollaban sobre todo capacidades de reproducción. Por otro lado, el 18 % fueron abiertas, de las que el 70% de ellas también fueron auténticas.

Objetivo

Analizar las tareas matemáticas creadas por el alumnado de 6º de Educación Primaria vinculadas a un contexto real, atendiendo a la apertura, autenticidad, contexto real, dominio cognitivo y etapas de modelización matemática.

Metodología

Contexto y muestra

La investigación se llevó a cabo con un grupo de 18 estudiantes (10 mujeres, 55,56% y 8 varones, 44,44%) en un aula de Matemáticas de 6º curso de Educación Primaria, en un centro educativo concertado de la provincia salmantina, durante el curso académico 2021-2022. Se realizó en dos sesiones: la primera de 60 minutos y la segunda de 40 minutos.

Procedimiento

El procedimiento para la recogida de datos fue el siguiente:

Sesión 1: Resolución de tareas matemáticas en contextos reales y creación de tareas matemáticas (60 minutos).

a) Los alumnos se distribuyeron en grupos (5 grupos de 3-4 personas; 5 minutos).

b) Se presentó a todos los alumnos, en un Power Point, 5 tareas basadas en contextos reales motivadores y próximos a los alumnos. Estas tareas habían sido creadas por el docente buscando un enfoque globalizado y el desarrollo de diversas competencias matemáticas pero también de otras áreas de conocimiento y de aspectos relacionados con la vida cotidiana. Las tareas abordaban contenidos de, principalmente, Numeración (50%), Medida (20%), Geometría (20%), y Lógica y Organización de la información (10%) (toda la clase; 5 minutos).

c) Los estudiantes, en cada grupo, debían resolver 4 de las 5 tareas propuestas, cada una en uno de los folios que se les aportaron. Para ello, cada grupo disponía de las 5 tareas en tarjetas independientes (en grupos; 25 minutos).

d) Los estudiantes, en cada grupo, debían elegir un contexto próximo a su vida cotidiana y crear 2 tareas reales en ese contexto (en grupos; 20 minutos).

e) Reflexión del trabajo realizado e información del objetivo y desarrollo de la siguiente sesión (toda la clase; 5 minutos).

Sesión 2: Presentación de las tareas creadas y valoración global (40 minutos).

a) Cada grupo expuso las tareas matemáticas creadas al resto de los compañeros (toda la clase; 25 minutos).

b) Valoración del trabajo desarrollado y reflexión final. Para ello se analizaron los aspectos positivos y negativos del desarrollo de las dos sesiones (toda la clase; 15 minutos).

Algunos ejemplos de la resolución de tareas por los alumnos (Figura 2) y de tareas creadas por los propios alumnos (Figura 3, Figura 4 y Figura 5) son:

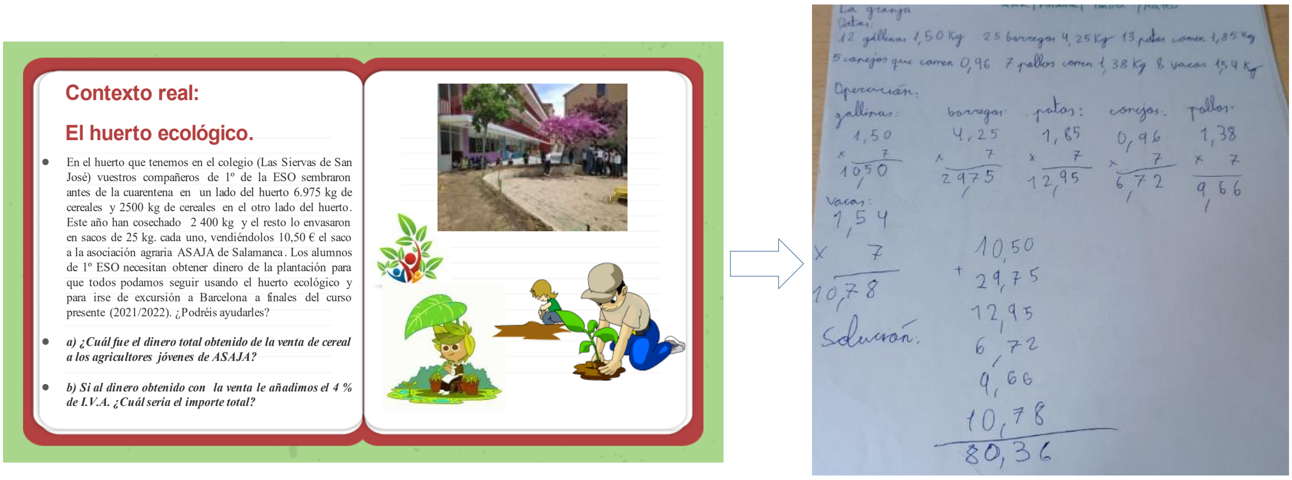


Figura 2. Resolución de la tarea partiendo de un contexto real por un grupo de alumnos.

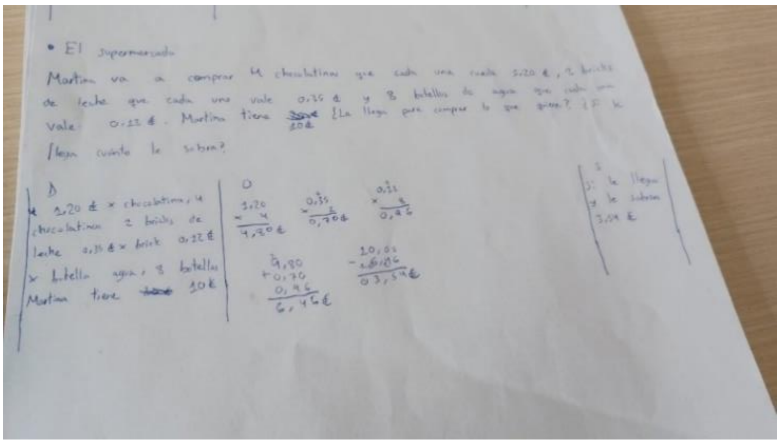


Figura 3. Tarea creada basada en un contexto real por un grupo de alumnos. El supermercado.

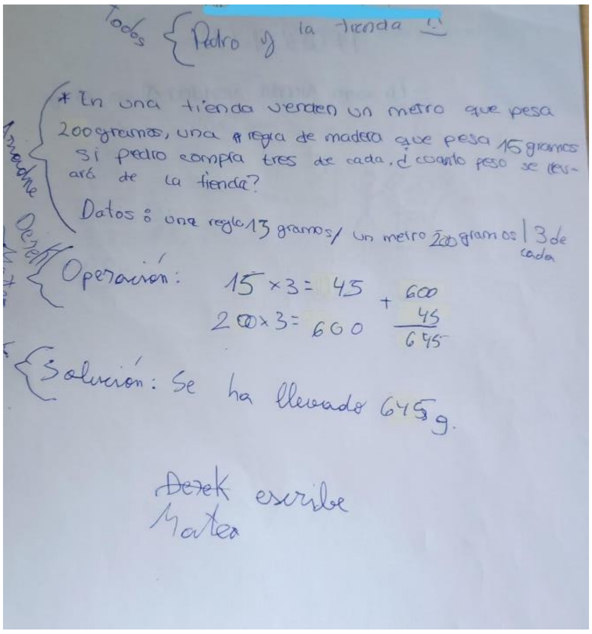


Figura 4. Tarea creada basada en un contexto real por un grupo de alumnos. Pedro y la tienda.

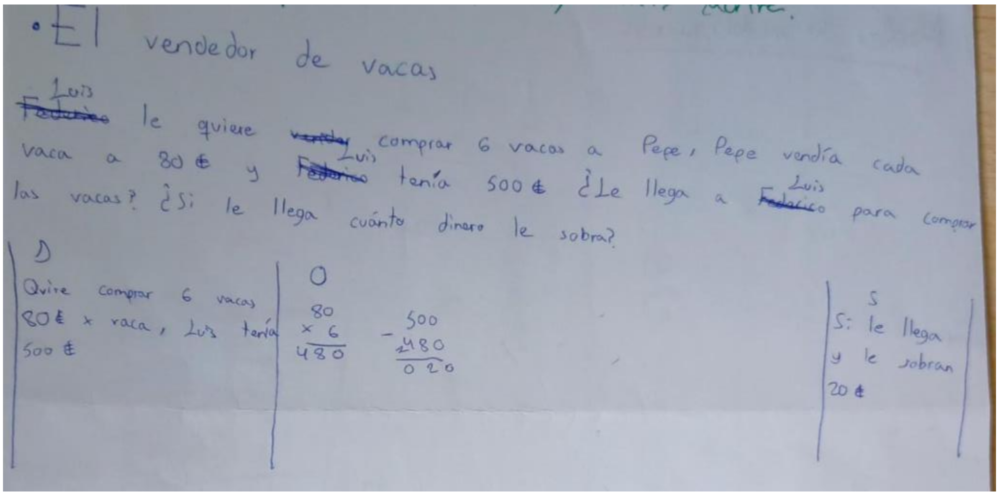


Figura 5. Tarea creada basada en un contexto real por un grupo de alumnos. El vendedor de vacas.

Datos

Cada uno de los 5 grupos de alumnos crearon 2 tareas (10 en total). 4 de ellas no fueron consideradas por estar incompletas. De esa forma, los datos fueron las 6 tareas creadas completas por los alumnos.

Análisis de datos

Las tareas creadas por los alumnos se analizaron en los siguientes sentidos:

a) Autenticidad: Atendiendo a las categorías de auténtica, verosímil y ficticia teniendo en cuenta sus dimensiones principales (evento, pregunta e información) y secundarias (propósito y especificidad de los datos) (más detalle en Cáceres et ál.,2015).

b) Contexto real: Atendiendo a si estaban enmarcadas en un contexto que no es cercano a la vida cotidiana y si lo estaban en un contexto real.

c) Dominio cognitivo: Atendiendo a las categorías de conocimiento, aplicación y razonamiento (más detalle en Mullis y Martin, 2019).

d) Apertura: Atendiendo a si su respuesta era cerrada (una única opción de respuesta correcta) o abierta (varias opciones de respuesta correctas).

e) Ciclo de modelización matemática: Atendiendo a los ciclos de formular, emplear, interpretar, y evaluar, que cada uno de ellos se valoraron de 1-5 (OCDE, 2017).

Resultados y discusión

Los resultados obtenidos al analizar las tareas creadas por alumnos de Primaria, en grupos, en el aula de matemáticas se explican a continuación. El 50% de las tareas creadas fueron auténticas, el 33% verosímiles y el 17% ficticias. Ello hace que la mayor parte de ellas fueron auténticas o con posibilidad de convertirse en auténticas. Además, el 100% se enmarcaban en un contexto real, algo esperable dado el marco en que se crearon las tareas, pero que confirma que la formación fue adecuada y que los alumnos entendieron los objetivos que se pretendían con la actividad. Respecto al dominio cognitivo, el 43% de las tareas creadas fueron de conocimiento, 43% de aplicación y 14% de razonamiento. Estos resultados pueden ser coherentes con la formación recibida por los estudiantes en sus años escolares que, en general, suele basarse en una enseñanza basada en el conocimiento de procedimientos y, en algunos casos, aplicación de los mismos, con escaso razonamiento. Pero es necesario que el alumnado, antes de resolver una tarea, la comprenda, lo cual supone la activación de dominios cognitivos que les permitan seleccionar las herramientas, habilidades cognitivas y competencias necesarias para poder hacer una representación mental que conducirán a la resolución de la tarea (Chamoso et ál., 2013). Respecto a la apertura de las tareas, el 100% de las tareas fueron cerradas, con una única solución correcta. En ello puede tener influencia la enseñanza recibida, basada en el libro de texto, que suele mostrar una ausencia de tareas abiertas que favorezcan la reflexión y el razonamiento.

En lo que se refiere a las fases del ciclo de modelización mostrada en la resolución de las tareas por los grupos de alumnos, respecto a la formulación de datos, en la mayoría de las tareas tendieron a resolverlas de distinta forma, presentando en unos casos niveles 3 y 4 y, en otros, nivel 1. Respecto a la categoría de emplear, la explicitación del procedimiento no se muestra en ninguna de las tareas, quizás porque no estén habituados a hacerlo, ya que en el aula suele primar la velocidad de resolución basada en el empleo de procedimientos algorítmicos de forma memorística, con escasa justificación y sentido de lo realizado. Respecto a la categoría de interpretar, solo en una de las tareas se interpretan los resultados. Con relación a la evaluación, todos los alumnos alcanzaron un nivel 2, donde el resultado responde a la pregunta, pero no explicita que se haya tenido en cuenta el contexto real. Esta forma de resolver las tareas de manera superficial va acorde con el desarrollo de las clases tradicionales de Matemáticas, donde se prima más la automatización de los procedimientos y las respuestas correctas que la adecuada explicación del procedimiento y la justificación del resultado y de lo realizado. Esto debe hacer reflexionar, a la vez que buscar la forma de mejorar esos aspectos que pueden ser importantes para conseguir un mayor razonamiento de los alumnos y puede abrir futuras líneas de investigación.

A pesar de la escasez de la muestra de este trabajo, y la escasez de trabajos realizados con el objetivo de analizar las tareas creadas por alumnos de Primaria, podemos comparar los resultados obtenidos con las tareas creadas con futuros docentes. Por ejemplo, en el estudio de Chamoso y Cáceres (2018), de las 306 tareas creadas, el 47% eran auténticas, el 7% verosímiles y el 46% ficticias. Además, el 62% tuvo un dominio de conocimiento, el 33% de aplicación y el 5% de razonamiento. En otro sentido, el 18% fueron abiertas y, las demás, cerradas. La comparación de los resultados de este trabajo con los de futuros docentes puede sugerir reflexiones y abrir futuras líneas de investigación.

Conclusiones

Este trabajo presenta una forma innovadora de enseñanza de las Matemáticas en el aula de Primaria donde los alumnos, en grupos colaborativos, crearon y resolvieron tareas basadas en contextos reales, cercanos a su vida cotidiana. La planificación del trabajo del docente puede ser interesante, ya que creó varias tareas cercanas al contexto de los alumnos de Primaria, planificó dos sesiones de aula e implementó las sesiones con los estudiantes, que pueden hacer reflexionar y analizar las posibilidades de seguir una enseñanza en sentido similar. Los alumnos trabajaron con una gran motivación que se reflejó en la reflexión final. Algo parecido sucedió con el docente. Los resultados conseguidos en el trabajo desarrollado por los alumnos son interesantes, que no son inferiores a los conseguidos en otros trabajos con futuros docentes de matemáticas.

Referido a la metodología empleada, se destacan varios aspectos. Por ejemplo, la importancia de considerar un contexto real, cercano a los alumnos; el desarrollo de un trabajo colaborativo entre los alumnos, y la creación y resolución de tareas diferentes a las habituales. Todo ello exigió un importante trabajo previo del docente y una planificación adecuada, pero, a la vez, produjo una gran motivación del docente y de los estudiantes, y unos resultados de interés.

Referido a los resultados obtenidos, parece necesario el acercamiento de la enseñanza y el aprendizaje a contextos cercanos a los alumnos de manera que los discentes sepan aplicar los conocimientos en situaciones concretas reales. La mayoría del alumnado suele desarrollar, principalmente, el conocimiento matemático y, si acaso, su aplicación de manera automática y memorística, con escaso razonamiento. Ello suele ser favorecido por el uso del libro de texto donde las actividades suelen seguir una misma línea de aplicar el conocimiento que previamente se ha tratado, lo que lleva a que los alumnos automaticen esa forma de enfrentarse a las tareas y que dificulta el uso del pensamiento reflexivo para comprender qué se está haciendo.

Asimismo, si se observan las fases del ciclo de modelización por las que pasa la resolución de las tareas por los discentes podemos observar que lo hicieron de una forma superficial ya que, en la mayoría de los casos, no justificaron los datos empleados, ni los pasos seguidos en el procedimiento de resolución de la tarea, ni tampoco interpretaron razonadamente los resultados. Quizás los discentes están habituados a la resolución de tareas de esa forma, otorgando mayor importancia a obtener una respuesta correcta que al procedimiento seguido. Es preciso recordar la importancia de que el alumnado tenga capacidad para emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos emitiendo juicios reflexivos y fundamentados, que permita asegurar que comprende lo que está haciendo.

Una de las principales limitaciones que se muestran en este trabajo es el tamaño reducido de la muestra. No es fácil conseguir trabajar en este sentido en los centros educativos. Como perspectiva de futuro, resultaría interesante ampliar la muestra, a la vez que trabajar de una forma similar en otros cursos de Primaria o en diferentes niveles educativos. Y en otros contextos educativos como enseñanza rural y urbana. También se podrían tener en cuenta otras comunidades autónomas y otros países. Desarrollar un trabajo similar con estudiantes con necesidades educativas especiales podría ser de interés. También podría serlo en contextos con estudiantes inmigrantes o que se han formado en otros contextos interculturales. Todo ello podría avanzar en conseguir resultados que podrían compararse con los de este trabajo y abrir futuras líneas de innovación e investigación.

Por otra parte, sería ideal conjugar la presencia en el aula de sesiones que combinen la creación de tareas reales vinculadas a la vida cotidiana y el empleo del libro de texto, donde figuren actividades y tareas que impliquen el desarrollo de la lógica, con tareas motivadoras, reflexivas, en las que el procedimiento que se utilice no sea el uso del habitual libro de texto sino que se añadan otros aspectos que ayuden a los alumnos a reflexionar, razonar, comunicar y ser conscientes de lo que están haciendo.

Referencias

Albertí Palmer, M. (2018). *Las matemáticas de la vida cotidiana. LA REALIDAD COMO RECURSO DE APRENDIZAJE Y LAS MATEMÁTICAS COMO MEDIO DE COMPRENSIÓN*. Catarata. https://www.icmat.es/divulgacion/Material_Divulgacion/miradas_matematicas/05.pdf

Blanco Nieto, L.J. y Cárdenas Lizarazo, J.A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Revista Campo Abierto, 32* (1), 137-156. https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1393/889

Cáceres García, M.J., Chamoso Sánchez, J.M., y Cárdenas, J.A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201-210). Alicante: SEIEM.file:///C:/Users/Usuario/Downloads/ActasXIXSEIEM_caceres%20(2).pdf

Chamoso Sánchez, J.M. y Cáceres García, M.J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 83-94. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/34366/33953

Chamoso Sánchez, J.M., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2013, 6-8 de noviembre). Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ¿Son sólo problemas para el aula? *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (I CEMACYC)*, Santo Domingo, República Dominicana. http://ciaem-redumate.org/memorias-icemacyc/Conferencia_paralela,_Chamoso.pdf

Hiebert, J. y Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. Lester (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.405.3591&rep=rep1&type=pdf

Mullis, I.V.S.; Martin, M.O. TIMSS (2019*). Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Versión preliminar*. Madrid. https://www.ames-fps.com/informe-timss-2019-online-2.pdf

OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preliminar*. Paris: OECD Publishing. https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISAD%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf

Para hacer referencia al artículo:

Lorena García Fernández, J.M. Chamoso Sánchez y M. Mercedes Rodríguez Sánchez (2022). Creación de tareas en contextos reales atendiendo a la modelización matemática por estudiantes de Educación Primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 136 - 142). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

DRONES Y MATEMÁTICAS

Máximo Gómez Flórez, Aurora Martín García y María Teresa Cuella Martín

Colegio Maestro Ávila

Resumen

La presente comunicación pretende mostrar los aspectos más básicos de los drones educativos como una herramienta que permita el desarrollo de las competencias matemáticas en un aula de Primaria o Educación Secundaria y Bachillerato. En particular, enseñaremos los tipos de drones educativos más utilizados, con sus ventajas e inconvenientes, el software y las aplicaciones más utilizadas para la programación, y el control del dron. Por último, mostraremos un conjunto de experiencias o actividades para desarrollar en el aula.

Palabras clave: Drones, *innovación, STEM, trabajo cooperativo, Secundaria.*

INTRODUCCIÓN

Los drones se pueden utilizar como un elemento motivador en el área de las matemáticas. Permiten trabajar el pensamiento computacional, el razonamiento lógico, la resolución de problemas y el trabajo colaborativo entre otras competencias. Como aplicación de los drones en el aula hemos propuesto a nuestros alumnos actividades o problemas matemáticos que permitan el manejo y el control autónomo del vuelo de un dron. Estas actividades están orientadas a alumnos de bachillerato, pero se puede extender a los últimos cursos de primaria y toda secundaria.

Algunos de los conceptos y problemas que podemos trabajar con los drones en el aula son los sistemas de coordenadas: cartesiano, polar, esférico, ecuación del plano, vectores, resolución de ecuaciones, funciones, curvas orientadas, focal de una curva, parametrización de curvas, derivadas, geometría: Teorema de Pitágoras, ángulos, giros, polígonos…etc.

Drones educativos más utilizados.

La mayoría de los drones presentan sus propias plataformas educativas de pago o parcialmente abiertas donde encontramos: documentación, apps para el manejo del dron, cursos de formación, aplicaciones para programar los vuelos, simuladores de vuelo, kits de construcción del dron, foros, actividades o misiones de vuelo… El precio del dron educativo puede variar de los 100 a los 300 euros dependiendo del equipamiento y la autonomía del dron. La siguiente lista muestra los dones más utilizados en educación:

- Rabolink CoDrone Lite & Pro kit educativo.
- Sky Viper e1700 kit de drone acrobático.
- Makeblock Airblock.
- Kit PlutoX de Dronea Aviation.
- DJI Tello EDU drone.
- Parrot Mambo Fly.

En general, todos estos drones se pueden manejar desde un móvil, tablet o un pc. Son muy ligeros, tienen una autonomía de vuelo de 10 a 15 minutos y están equipados con protectores de hélice, lo que les hace muy seguros para utilizar en el aula.

De todos los drones destaca el Parrot Mambo, y sobre todo en DJI TELLO EDU o su hermano más económico DJI RYZE TELLO por su integración en diversas plataformas educativas STEM, la facilidad para adquirir recambios, las numerosas apps abiertas o webs para su programación, y sobre todo por toda la documentación que puedes encontrar en internet.

Dron DJI TELLO EDU y la aplicación DRONEBLOCKS.

Nosotros hemos utilizado el DJI TELLO EDU, Figura 1, que es un dron de dimensiones 98 × 92.5 × 41 mm, y tiene un peso de 80 gramos, con cámara y sistema de posicionamiento por visión. Se puede programar con una app que utiliza un software de bloques similar a scratch llamada DroneBloch o con **TELLO EDU App y de forma más seria en** Swift o **Python.**

Figura 13. Dron educativo DJI Tello Edu e icono de la aplicación DroneBlocks.

DroneBlokcs y los movimientos básicos de TELLO.

DoneBlocks es una aplicación que permite programar los movimientos del dron y manejar su cámara. Se puede instalar en un móvil o tablet desde Apple Store/Google Play Store o desde la web de DroneBlocks *https://droneblocks.io/*. Tello utiliza el sistema de referencia cartesiano de la Figura 2.

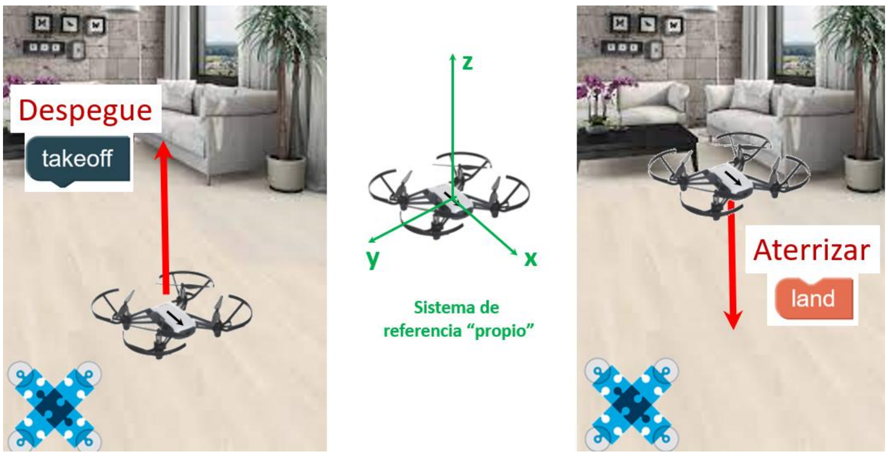


Figura 2. Sistema de referencia cartesiano de dron Tello y bloques DroneBlocks para el aterrizaje y despegue.

y los comandos takeoff/land para el despegue/aterrizaje del dron. El resto de los movimientos básicos del dron se resumen en el Figura 3.

Figura 3. Bloques básicos para el movimiento del dron.

ACTIVIDADES O "MISIONES" PROPUESTAS EN EL AULA.

En este apartado vamos a ver algunas actividades que se pueden trabajar en el aula, aunque nosotros preferimos llámalas misiones. Todas las misiones propuestas en este comunicado se pueden programar con DoneBlocks, y dependiendo de la dificultad, se pueden trabajar desde los últimos cursos de primaria a la ESO y bachillerato.

Misión 0: "Hola mundo"

En esta misión el dron debe despegar del suelo, subir 1 metro y aterrizar en una superficie determinada, por ejemplo, un pupitre situado a 1 metro y medio.

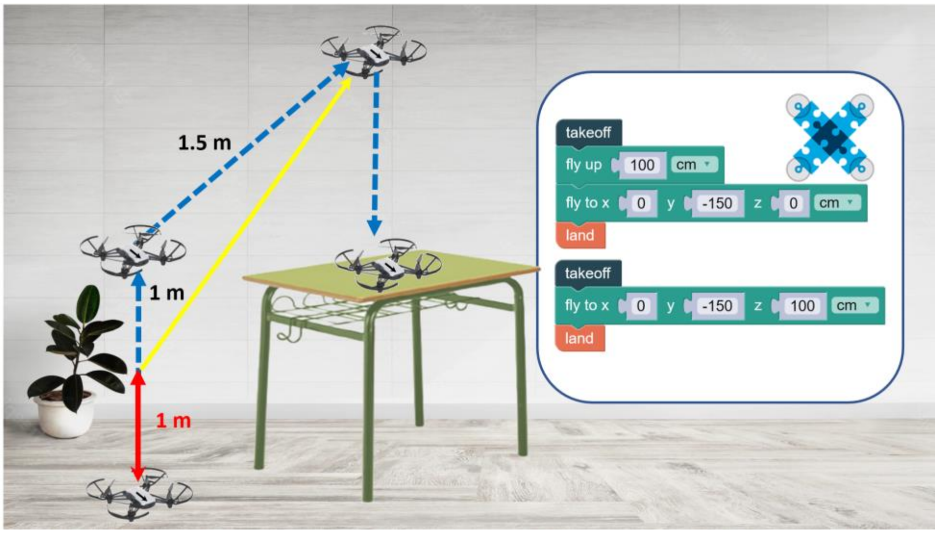


Figura 4. Código DoneBlocks para la misión 0.

En la Figura 4. se representa el código para esta primera misión. Por sencillez hemos colocado el pupitre en el eje y. Cuando el dron despega siempre sube una altura de 1 metro, y durante varios segundos se mantiene en esta posición para estabilizarse. A partir de esta altura se ejecutarán el resto de los bloques del código. El camino marcado en línea de trazos azul de la figura 4 representa esta misión con su código en la parte superior. El segundo código que aparece en la Figura 4 también resuelve la misión, pero describe la trayectoria marcada en amarillo.

Misión 1: Triángulo equilátero.

En esta misión el dron debe despegar del suelo, subir 1 metro y en un plano horizontal trazar un triángulo equilátero de medio metro de lado.

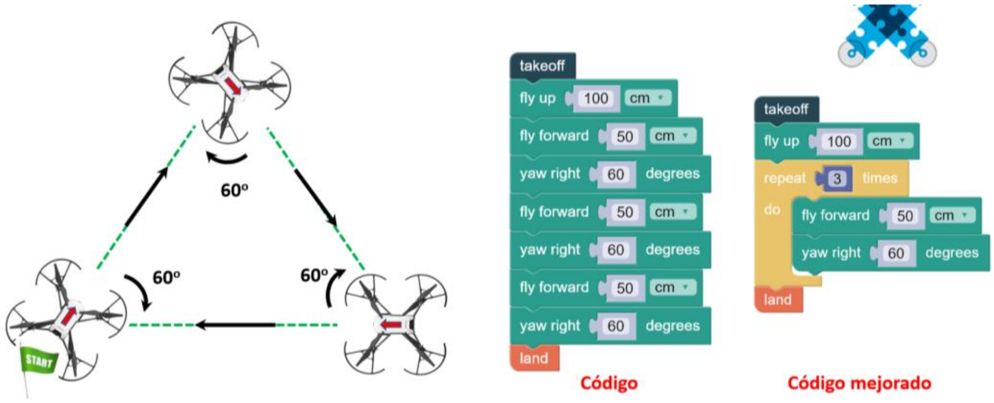


Figura 5. Código DoneBlocks para la misión 1.

Después de despegar el dron y subir 1 metro, en esta misión tendremos que repetir tres veces, una por cada lado del triángulo, los movimientos: avanzar hacia adelante 50 cm y girar 60º. DroneBlocks permite optimizar el código añadiendo un bucle repetición, “código mejorado” en la Figura 5.

Misión 2: Pentágono.

En esta misión el dron debe despegar del suelo, subir 1 metro y en un plano horizontal trazar un pentágono de medio metro de lado.

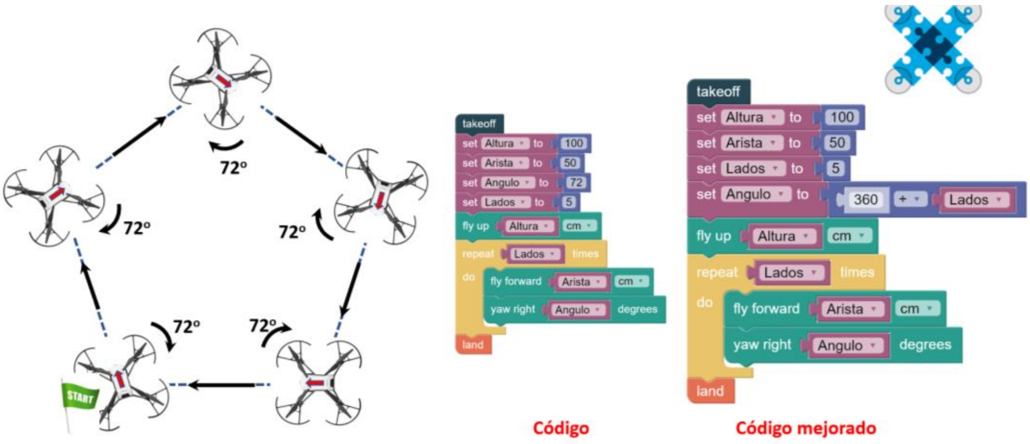


Figura 6. Código DoneBlocks para la misión 2.

Esta misión es similar a la misión 1, y puede servir el mismo código cambiando el 3 por un 5 y 60º del ángulo por 72º. Podemos generalizar este tipo de misiones con trayectorias de polígonos regulares definiendo en el código variables con los parámetros de cada polígono regular, ver "código mejorado" en la figura 6. Llegados a este punto es interesante preguntar a los alumnos ¿qué pasaría si aumentamos el número de lados? Llegaríamos a la siguiente conclusión, la trayectoria se parecerá más y más a una circunferencia. Pero existe varios problemas:

- Si dejamos fijo el lado del polígono, por ejemplo, un dodecágono de 50 cm, el radio de la circunferencia en la que se inscribe el polígono puede ser tan grande que seguramente el dron chocaría con las paredes del aula. En el ejemplo anterior, un dodecágono de 50 cm, el diámetro es aproximadamente 6 metros.
- Tello puede desplazarse en cualquier dirección, pero siempre un mínimo de 20 cm, por ejemplo, si le decimos a Tello que avance hacia adelante 5 cm, el dron no responde.

Ambas situaciones permiten plantear varias cuestiones a nuestros alumnos: a) conocido el lado del polígono regular ¿cuántos lados tiene el mayor polígono regular que se puede volar en un aula de determinadas dimensiones? ¿Dónde debo colocar inicialmente el dron para que no impacte con las paredes del aula? b) Sabiendo que Tello tiene que avanzar cómo mínimo 2 cm ¿cuál es el número de lados del mayor polígono regular que se puede volar en una determinada aula? ¿Cuál es el radio de la circunferencia en la que se inscribe dicho polígono?

Misión 3: Carrera de obstáculos.

En esta misión consiste en completar un determinado recorrido sorteando obstáculos en el menor tiempo posible. Los alumnos tienen tres intentos para conseguir terminar el recorrido en el menor tiempo posible, algo parecido a la Q1, Q2 y Q3 de la Fórmula 1. El alumno debe optimizar, la velocidad del dron, su trayectoria, el giro…etc. Como podéis imaginarios esta misión es la preferida de los alumnos.

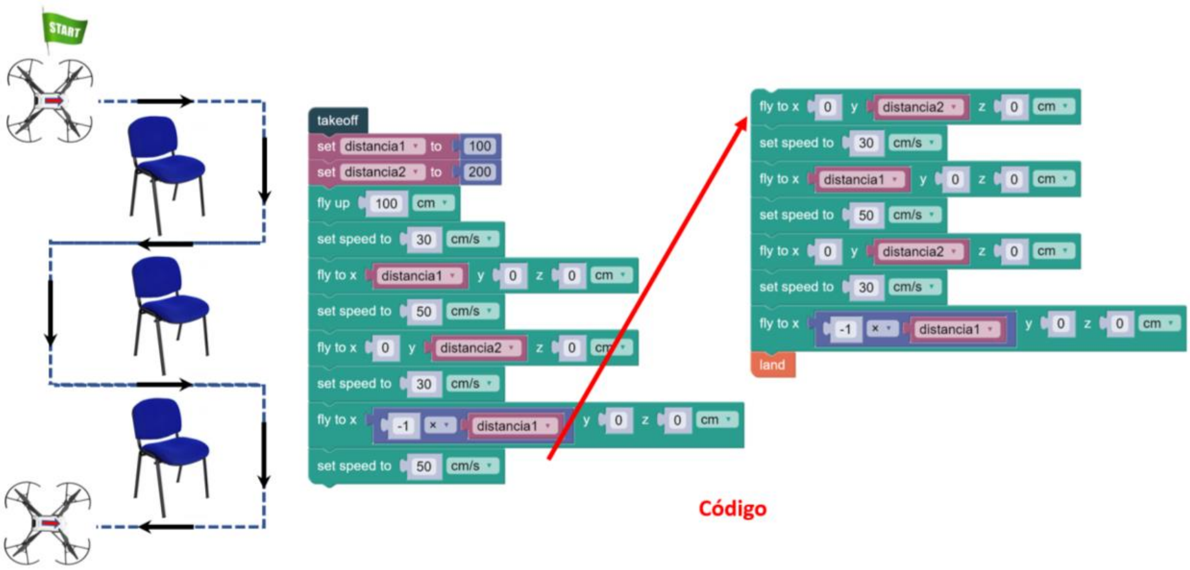


Figura 7. Ejemplo de código DoneBlocks para la misión 3.

En la misión de la Figura 7 el dron se programa con una velocidad de 50 cm/s cuando recorre la distancia más larga de 200 cm y de 30 cm/s para la distancia de 100 cm con el objetivo de reducir el tiempo de carrera. En este caso, una pregunta interesante que podemos plantear a los alumnos sería: ¿qué pasaría si programamos el dron con una única velocidad media de (30+50)/2=40 cm/s? ¿ganamos o perdemos tiempo? ¿y si va a 39.4 cm/s aproximadamente? También podemos fijar la velocidad del dron y pedir a los alumnos que calculen la trayectoria de menor tiempo.

Misión 4: El dron describe curva definida por la ecuación y=f(x).

En esta misión el dron debe despegar del suelo, subir 1 metro y describir una trayectoria definida por la ecuación y=f(x) en un plano horizontal. Esta misión es muy interesante porque se trabajan muchos conceptos matemáticos, por ejemplo, sistemas de coordenadas, ecuaciones, vectores, distancia entre puntos, ángulos…etc.

Los alumnos suelen resolver este problema partiendo de la misión anterior. Calculan puntos de la curva, por ejemplo, en una hoja de cálculo y después programan el dron para que se traslade de un punto a otro con el bloque *fly to x y z*. Pero esta solución plantea dos principales problemas: el movimiento del dron no está orientado con la curva y no es una solución general, para cada nueva curva es necesario rehacer el programa.

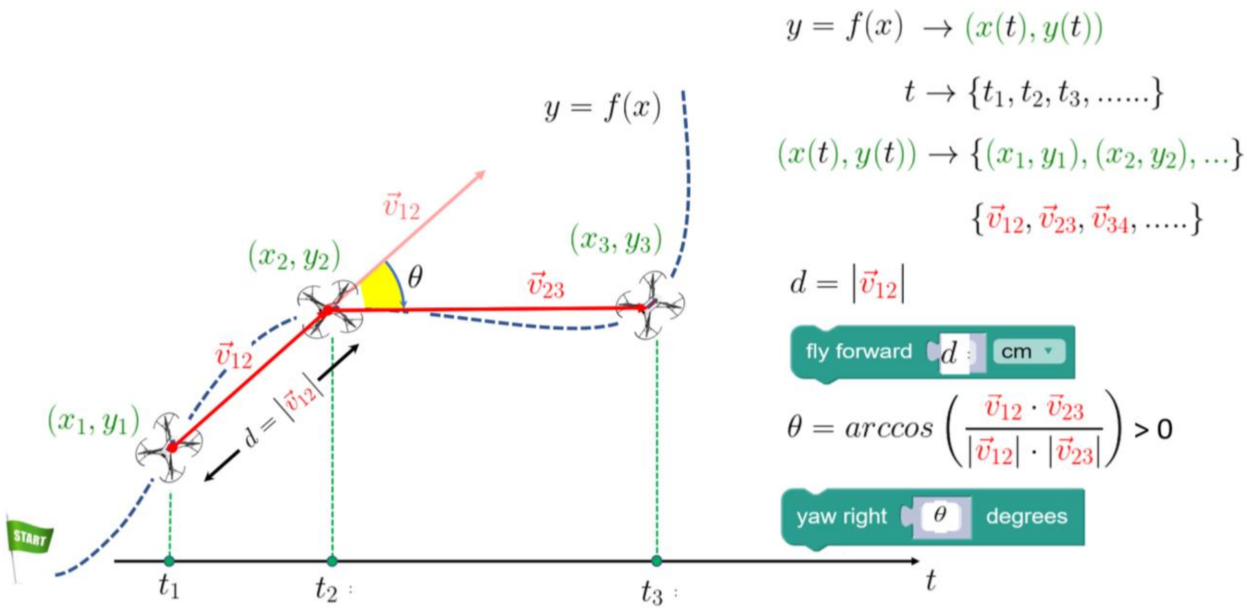


Figura 8. Planteamiento de la misión 4.

Con el objetivo de generalizar esta misión proponemos a nuestros alumnos los siguientes pasos para resolver esta misión, ver Figura 8:

- Parametrizamos y discretizamos la curva $\{(x(t_1),y(t_1))$, $(x(t_2),y(t_2))$, $(x(t_3),y(t_3))$, ……..}.
- Calculamos los vectores que unen puntos sucesivos $\{v_{12}$, v_{23} , v_{34} , ……..}.
- El módulo de cada vector no dice la distancia que debe avanzar el dron y el ángulo entre dos vectores sucesivos el ángulo que debe girar en cada punto, Figura 8.

Esta solución todavía plantea dos problemas que deben resolverse. El primero tiene que ver con el ángulo. Si calculamos el ángulo de giro a partir del producto escalar de los vectores consecutivos, el dron siempre va a realizar giros positivos, por ejemplo, cuando el dron se encuentre en la posición $(x(t_3),y(t_3))$ en la Figura 8, realizará un giro horario cuando debe ser antihorario. El segundo problema se debe a que el desplazamiento del dron siempre debe ser mayor de 20 cm. Esto implica que la discretización de la curva no puede ser cualquiera. En este caso el problema matemático podría plantearse de la siguiente forma:

Dados dos puntos consecutivos: $t_i \rightarrow (x(t_i),y(t_i))$ *y* $t_{i+1} = t_i + d_i \rightarrow (x(t_{i+1}),y(t_{i+1}))$ *de una cierta curva parametrizada ¿Cuál debe ser el incremento mínimo* d_i *que garantiza que la distancia entre estos dos puntos es igual o mayor de 20 cm?*

La solución a estos dos problemas no se incluye en este comunicado por falta de espacio, pero no es única ni difícil, así que la dejo a interés del lector.

Esta misión y algunas de las que proponemos más adelante requiere manejar ciertos conceptos matemáticos como: funciones, vectores, algebra con vectores, matrices, rotaciones…. por lo que son más apropiados a cursos de primero y segundo de bachillerato.

Otras misiones:

En este apartado proponemos otras posibles misiones que podéis trabajar con vuestros alumnos:

- El dron despega del suelo y sube 1 metro. En un plano horizontal describe una órbita circular, pero siempre orientado a un mismo punto, y realiza fotos del objeto que se encuentre en dicho punto, Figura 9 a.
- La misión anterior, pero dron no sigue órbita circular sino una trayectoria definida por una curva y=f(x).
- El dron describe una trayectoria helicoidal siempre orientado al eje de la hélice Figura 9 b.
- Las misiones 1 y 2 eliminando el vuelo en un plano horizontal para convertirlo en un vuelo sobre un plano cualquiera definido por un vector normal Figura 9 c.
- Utilizando la cámara de Tello se pueden tomar fotos de un objeto con el dron en distintas posiciones y trabajar la proporción, la escala, ángulos, perspectiva…etc.

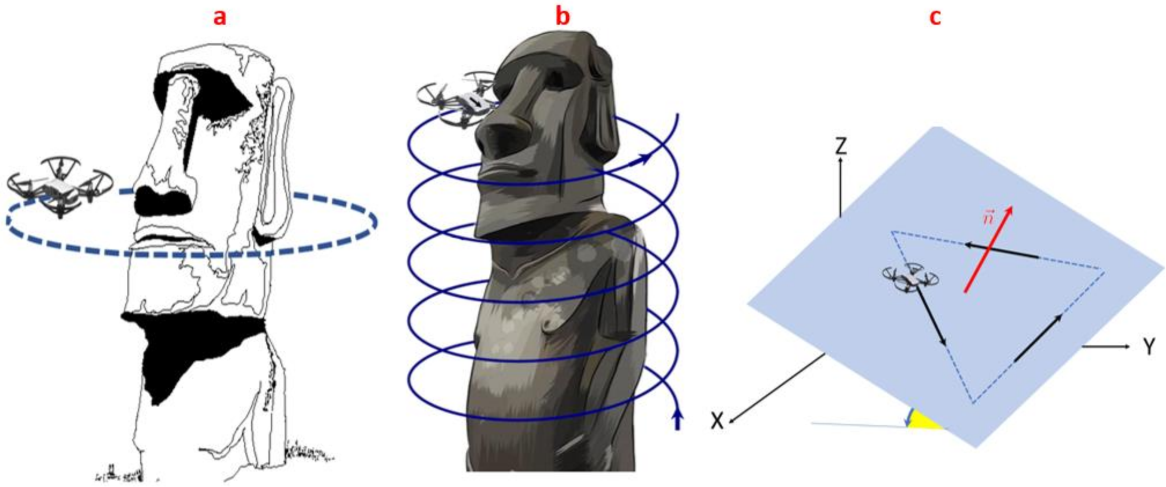
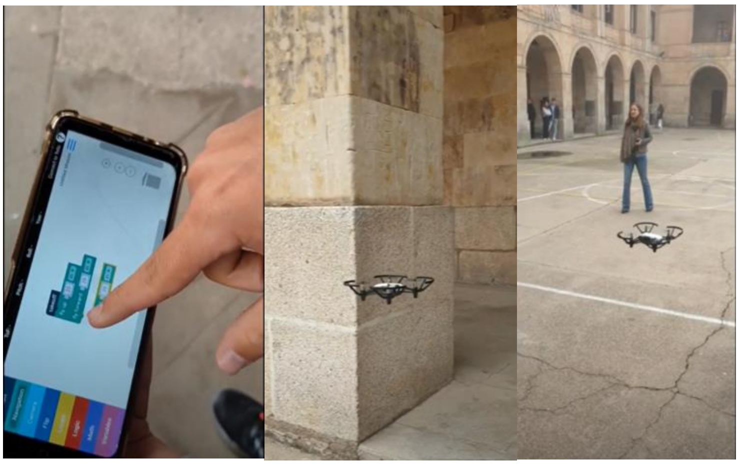


Figura 9. Otras posibles misiones.

Aunque la programación con bloques de DroneBlocks es cómoda, sencilla e intuitiva también es verdad que programar alguna de estas misiones con esta app se hace muy pesado: requiere definir muchas variables (DroneBlocks no utiliza arrays), la definición de funciones matemáticas que incluye esta aplicación es muy limitada, la programación puede alargarse si el cálculo es complicado y sobre todo, DroneBlocks no te permite depurar el código y visualizar las variables. Esto significa que al final tienes que probar el código en vuelo real sin saber que falla en tu programa. Por estos motivos, para estas misiones yo recomiendo utilizar otro lenguaje de programación compatible con Tello como Python.

EXPERIENCIA EN EL AULA

Esta actividad con drones educativos se ha desarrollado con un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato y de la 4º ESO. Se formaron grupos de tres a cuatro alumnos, y cómo vía de canalización de la información en ambos sentidos se utiliza el espacio de classroom. Cada dos semanas se lanzaba una misión que cada alumno debía trabajar individualmente en casa. Terminado el plazo, los alumnos divididos en grupos, compartían, comparaban y mejoraban sus soluciones. Por último, en clase, cada grupo prueba su mejor código con el dron. En classroom colgamos documentos, enlaces a webs y vídeos con misiones resueltas para facilitar la programación y la resolución de las misiones.



Los alumnos instalaron en sus teléfonos móviles o tablets la app DroneBlocks y comenzaron a programar las misiones. Las primeras misiones propuestas describen trayectorias sencillas, figuras geométricas simples, triángulos, cuadrados… con poca dificultad a la hora de programar. Según van respondiendo los grupos se modifica la complejidad de las misiones propuestas.

Después de programar y de poner en práctica sus programas, y como producto final a entregar, se grabada la misión explicando la solución matemática, así como su programación. Por último, el vídeo se sube a Classroom para su evaluación. La evaluación tiene dos partes, la realizada por el profesor, y otra que realizan los alumnos evaluándose unos a otros.

CONCLUSIONES.

Para concluir diremos que está actividad ha resultado muy gratificante, porque motiva a los alumnos y nos ha permitido ver cómo razonan y resuelven problemas utilizando el pensamiento lógico y matemático al programar el dron. La gran mayoría de los alumnos ha valorado positivamente la actividad, pero también es verdad que algunos alumnos apenas mostraron interés, deseando salir al patio en lugar de estar en clase.

Referencias.

Ryze Tech Tello Manual del usuario v1.0 (2018)

https://dl-cdn.ryzerobotics.com/downloads/Tello/201806mul/Tello%20Use r%20Manual%20V1.0_ES.pdf

Para hacer referencia al artículo:

Máximo Gómez Flórez, Aurora Martín García y María Teresa Cuella Martín (2022). Drones y matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 143 - 151). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

UN PROYECTO APS: APRENDER DE PERSONAS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL PARA FORMAR DOCENTES EN EL AULA DE MATEMÁTICAS[i]

Sánchez-Barbero, B.[a], Cáceres, M.J.[a], Martín, V.[a] y Monterrubio, M.C.[a]

[a]Dpto. de Didáctica de las Matemáticas y de las CCEE, Universidad de Salamanca

Resumen

Los Proyectos de Aprendizaje-Servicio ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades, en concreto, durante la formación de docentes en el área de matemáticas, los estudiantes vinculan necesidades personales y comunitarias, trasladando sus conocimientos matemáticos a través de la práctica. Los alumnos con discapacidad intelectual no suelen tener acceso a programas matemáticos de calidad, lo que provoca exclusión de oportunidades, por ello, pensando en la inclusión educativa, se desarrolló un Proyecto en el área de matemáticas cuyo objetivo fue diseñar e implementar un plan de intervención relacionado con el manejo del dinero para mejorar la calidad de vida de personas adultas con discapacidad intelectual. Los resultados confirman la importancia del uso de material manipulativo para la comprensión matemática requerida y también para el aumento de la motivación y confianza de los usuarios.

Palabras clave: *Proyecto Aprendizaje-Servicio, formación de docentes en matemáticas, manejo del dinero, discapacidad intelectual, atención a la diversidad.*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas es de gran importancia, pues dota a las personas de herramientas necesarias para poder ser autónomos en la sociedad (González y Sánchez, 2019). Si se centra el aprendizaje de las matemáticas en el área de la Discapacidad Intelectual (en adelante DI), la educación matemática que se les brinda es de una calidad inferior, pues se considera que el estudio de las matemáticas no es apropiado para personas con DI al no tener aptitud para aprender conocimientos matemáticos, (Howard et al., 2018). Esto provoca, entre otras cuestiones, la presencia de un riesgo de exclusión en el aprendizaje de las matemáticas (González y Sánchez, 2019).

¿Qué es un Proyecto de Aprendizaje-Servicio?

Los Proyectos de Aprendizaje-Servicio (en delante ApS) proponen un tipo de aprendizaje experimental que se desarrollan dentro de un contexto de educación reglada y nacen de una propuesta pedagógica con un fin social. Además, dota a los implicados de una mejora de la comprensión de conceptos y conocimiento teóricos a través de la práctica educativa y de la reflexión de la propia experiencia lo que proporciona una responsabilidad cívica y social (Bringle y Hatcher, 1999) además de beneficios a todos los estudiantes (Salam et al., 2019). Esto último marca la diferencia entre los Proyectos de ApS y otros tipos de aprendizajes experimentales (Figura 1; Furco, 1996).

[i] Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado a través de un Convenio firmado entre el Servicio de Asuntos Sociales de la Universidad de Salamanca (SAS-USAL) y Fundación Personas de Zamora.

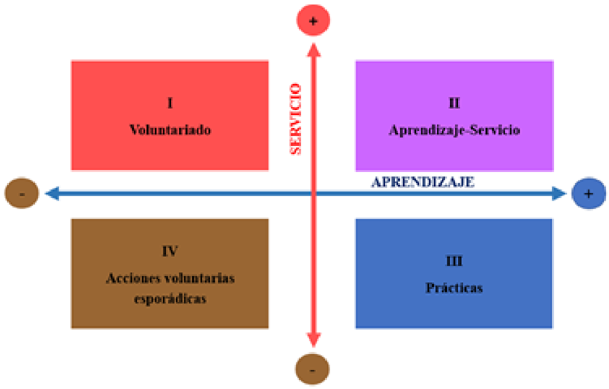


Figura 1. Diferencias entre Aprendizaje-Servicio y otros aprendizajes experimentales

Además, puesto que los Proyectos ApS son una herramienta que permite el compromiso y la sensibilización social, trabajar con ella puede ayudar a la consecución de los Objetivos de Desarrollo Sostenibles (en adelante ODS).

Aprendizaje de las matemáticas en personas con Discapacidad Intelectual

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2022) la DI es un trastorno del desarrollo intelectual. Su origen puede deberse a diferentes causas y puede surgir durante el período de desarrollo del individuo. Se caracteriza por un funcionamiento intelectual y una conducta adaptativa inferior a la media. A los alumnos con DI les resultan complicadas las matemáticas (Fernández y Sahuquillo, 2015), puesto que exigen procesos de razonamiento, planificación, realización de operaciones y resolución de problemas (Howard et al., 2018). Por ello se aconseja que la enseñanza de las matemáticas se realice de forma sistemática, explícita y minuciosa con tareas motivadoras que complementen tanto la parte intelectual como la emocional del alumno (Clemente y Servós, 2017) y, en la medida de lo posible, que estén orientadas a dar respuesta a diferentes necesidades y ritmos de aprendizaje para lograr el mayor desarrollo social y personal de las personas (Howard et al., 2018). En cuanto a los docentes que trabajan con estos alumnos, tienen conocimientos pedagógicos y psicológicos, pero, en ocasiones, no tienen conocimientos didácticos de las matemáticas, lo que hace que se limiten a la repetición y memorización de procesos, creyendo así que los alumnos interiorizan mejor las matemáticas (Fernández y Sahuquillo, 2015).

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

El proyecto que se presenta tiene dos pilares fundamentales que se recogen en los planes de formación docente: por un lado, la inclusión educativa y por otro el aprendizaje de las matemáticas. Referido al campo de la inclusión educativa, se observa cómo estudiantes con DI ven mermadas sus oportunidades de acceso a un programa de formación matemática de calidad, donde podrían desarrollar capacidades, habilidades y competencias para sus quehaceres cotidianos, lo que hace que tanto su funcionamiento intelectual como su conducta adaptativa se vean atacados. Respecto al aprendizaje de las matemáticas, se considera conveniente utilizar matemáticas cotidianas en la enseñanza de matemáticas a estudiantes con dificultades de aprendizaje (González et al., 2021).

Justificación

Si bien el objetivo principal de este Proyecto ApS es el de formar a futuros docentes en el área de matemáticas y aprender a hacerlo mediante prácticas de enseñanza con los usuarios con DI, la justificación de este va dirigida hacia tres colectivos:

- Formadores de docentes: existe una necesidad de formar docentes.

- Estudiantes: los futuros docentes ven las asignaturas de sus planes de estudios relacionadas con la atención a la diversidad como asignaturas aisladas.
- Entidades que trabajan con usuarios con DI: como se ha dicho anteriormente, los profesionales de las entidades son especialistas en DI, pero, en ocasiones, no de didáctica de las matemáticas.

Fases del proyecto

El proyecto se divide en cinco fases, cada una de ellas con un objetivo y con tareas marcadas para la consecución de dicho objetivo (Tabla 1):

Tabla 1. Fases del Proyecto con objetivos y tareas que realizar

	OBJETIVOS	TAREAS QUE REALIZAR
Fase Transversal	1. Integrar los ODS en la formación inicial de maestros y profesores	1.1. Concienciación del ODS 3 “Salud y Bienestar”: garantizar una vida sana y promover el bienestar para todos en todas las edades 1.2. Concienciación del ODS 4 “Educación de Calidad”: garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos 1.3. Concienciación del ODS 8 “Trabajo decente y crecimiento económico”: promover el crecimiento económico inclusivo y sostenible, el empleo y el trabajo decente para todos 1.4. Concienciación del ODS 10 “Reducción de las desigualdades”: reducir las desigualdades
Fase Introductor	Conocer las características y necesidades que tienen los alumnos y usuarios con DI	1.5. Asistencia a entidades para crear vínculos de trabajo 1.6. Conocimiento, a través de los trabajadores de los centros, de las características y necesidades de los usuarios
Fase de Diseño	2. Diseñar sesiones formativas, talleres y materiales a partir de las recomendaciones de las entidades	2.1. Introducción de diferentes tipos de tareas en las aulas de formación de docentes 2.2. Elaboración de materiales de las sesiones formativas entre los estudiantes para docentes y los alumnos con DI
Fase de Implementación	3. Implementar las sesiones, talleres y materiales para la enseñanza de las matemáticas a alumnos con DI	3.1. Desarrollo de las sesiones formativas 3.2. Desarrollo de las actividades, talleres y materiales

EXPERIMENTACIÓN PARCIAL

A continuación, se muestra una parte del Proyecto ApS anteriormente detallado.

Objetivo

La experimentación tiene por objetivo realizar un plan de intervención con usuarios con DI en el manejo del dinero para una mejora de la calidad de vida.

Contextualización

La experimentación la llevó a cabo una alumna del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Escuela Universitaria de Magisterio de Zamora, perteneciente a la Universidad de Salamanca. Esta alumna formó parte del proyecto en el que se enmarcó su Trabajo Fin de Grado. La Entidad donde se desarrolló esta experimentación fue la entidad sin ánimo de lucro Asprosub-Fundación Personas en Zamora. Los usuarios a los que se dirigió el programa fueron seis alumnos con DI leve, de entre 18 y 51 años. Concretamente, la implementación formó parte de un programa de inserción sociolaboral.

Cronograma

La implementación se desarrolló a lo largo de 10 sesiones. Las tres primeras fueron de observación; sirvieron para conocer a los usuarios con los que se trabajaría y para mostrarles una anticipación de qué y cómo iban a ser las siguientes sesiones (Tabla 2).

Tabla 2. Cronograma de la experimentación

	Marzo				Abril				Mayo				Junio	
	10	17	24	31	7	14	21	28	5	12	19	26	2	9
1. Reunión inicial	X													
2. Observación		X	X	X										
2.1. Presentación de los participantes			X											
2.2. Observación de la metodología y características de los participantes				X										
3. Implementación					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3.1. Sesión 1					X									
3.2. Sesión 2						X								
3.3. Sesión 3							X							
3.4. Sesión 4								X						
3.5. Sesión 5									X					
3.6. Sesión 6										X				
3.7. Sesión 7											X			
3.8. Sesión 8												X		
3.9. Sesión 9													X	
3.10. Sesión 10														X

ALGUNAS ACTIVIDADES DE LA EXPERIMENTACIÓN

A continuación, se muestran algunos de los resultados obtenidos en algunas de las sesiones realizadas a lo largo de la implementación.

Actividad de la sesión nº2 (Tabla 3; Figura 2): "Empezamos a sumar números enteros"

Tabla 3. Sesión 2. Selección de Dinero

Objetivos:	Para el docente: • observar posibles errores en la suma del dinero con números enteros Para los alumnos: • realizar sumas de dinero con números enteros
Contenidos:	Suma de números enteros
Adaptaciones:	Una vez finalizaron sin errores, se les pidió representar de diferentes formas el resultado con el objetivo de afianzar equivalencias monetarias.

Figura 2. Sesión 2. Selección de Dinero

Actividad de la sesión nº4 (Tabla 4; Figura 3): "Nos vamos de compras"

Tabla 4. Sesión 4. Nos vamos de compras

Objetivos:	Para el docente: • introducir precios de productos • trabajar con las vueltas de dinero • iniciar en el uso del dinero con céntimos • resolver problemas Para los alumnos: • sumar y restar dinero con números racionales • resolver problemas
Contenidos:	Suma de números racionales Reconocimiento del valor de las monedas Sumas y restas de números racionales con llevadas Resolución de problemas con dinero
Adaptaciones:	Una vez finalizaron sin errores, se les pidió representar de diferentes formas el resultado con el objetivo de afianzar equivalencias monetarias.

Figura 3. Sesión 4. Nos vamos de compras

Actividad de la sesión nº7 (Tabla 5; Figura 4): "Nos vamos de compras"

Tabla 5. Sesión 7. Nos vamos de compras

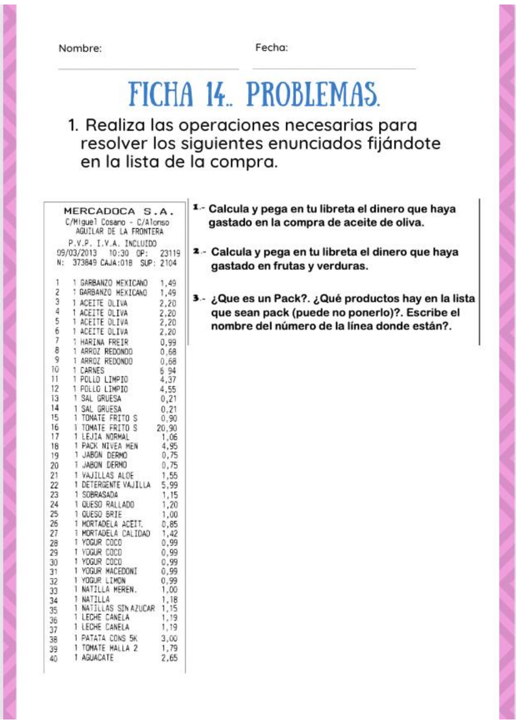
Objetivos:	Para el docente: • introducir precios de productos • trabajar con las vueltas de dinero • iniciar en el uso del dinero con céntimos • resolver problemas Para los alumnos: • sumar y restar dinero con números enteros • resolver problemas
Contenidos:	Suma de números enteros Reconocimiento del valor de las monedas Sumas y restas de números enteros con llevadas Resolución de problemas con dinero
Adaptaciones:	Una vez finalizaron sin errores, se les pidió representar de diferentes formas el resultado con el objetivo de afianzar equivalencias monetarias.

Figura 4. Sesión 7. Nos vamos de compras

Actividad de la sesión nº8 (Tabla 6; Figura 5): "Resolvemos problemas"

Tabla 6 Sesión 8. Resolvemos problemas

Objetivos:	Para el docente: • introducir precios de productos • trabajar con las vueltas de dinero • iniciar en el uso del dinero con céntimos • resolver problemas Para los alumnos: • sumar y restar dinero con números racionales • resolver problemas
Contenidos:	Suma, resta y multiplicación de números racionales Reconocimiento del valor de las monedas Resolución de problemas con dinero
Adaptaciones:	Fue necesario que los participantes utilizaran fluorescentes de diferentes colores para evitar que confundieran los precios y los separaran correctamente, por ejemplo, de las frutas y verduras. Además, para llevar a cabo operaciones de más de dos elementos, se les pidió que llevasen a cabo las operaciones de dos en dos y, una vez completadas, realizaran la operación total


Nombre: Fecha:

FICHA 14.. PROBLEMAS.

1. Realiza las operaciones necesarias para resolver los siguientes enunciados fijándote en la lista de la compra.

MERCADOCA S.A.
C/Miguel Cosano - C/Alonso
AGUILAR DE LA FRONTERA
P.V.P. I.V.A. INCLUIDO
09/03/2013 10:30 OP: 23119
N: 373849 CAJA:018 SUP: 2104

1	1 GARBANZO MEXICANO	1,49
2	1 GARBANZO MEXICANO	1,49
3	1 ACEITE OLIVA	2,20
4	1 ACEITE OLIVA	2,20
5	1 ACEITE OLIVA	2,20
6	1 ACEITE OLIVA	2,20
7	1 HARINA FREIR	0,99
8	1 ARROZ REDONDO	0,68
9	1 ARROZ REDONDO	0,68
10	1 CARNES	6 94
11	1 POLLO LIMPIO	4,37
12	1 POLLO LIMPIO	4,55
13	1 SAL GRUESA	0,21
14	1 SAL GRUESA	0,21
15	1 TOMATE FRITO S	0,90
16	1 TOMATE FRITO S	20,90
17	1 LEJIA NORMAL	1,06
18	1 PACK NIVEA MEN	4,95
19	1 JABON DERMO	0,75
20	1 JABON DERMO	0,75
21	1 VAJILLAS ALOE	1,55
22	1 DETERGENTE VAJILLA	5,99
23	1 SOBRASADA	1,15
24	1 QUESO RALLADO	1,20
25	1 QUESO BRIE	1,00
26	1 MORTADELA ACEIT.	0,85
27	1 MORTADELA CALIDAD	1,42
28	1 YOGUR COCO	0,99
29	1 YOGUR COCO	0,99
30	1 YOGUR COCO	0,99
31	1 YOGUR MACEDONI	0,99
32	1 YOGUR LIMON	0,99
33	1 NATILLA MEREN.	1,00
34	1 NATILLA	1,18
35	1 NATILLAS SIN AZUCAR	1,15
36	1 LECHE CANELA	1,19
37	1 LECHE CANELA	1,19
38	1 PATATA CONS 5K	3,00
39	1 TOMATE MALLA 2	1,79
40	1 AGUACATE	2,65

1.- Calcula y pega en tu libreta el dinero que haya gastado en la compra de aceite de oliva.

2.- Calcula y pega en tu libreta el dinero que haya gastado en frutas y verduras.

3.- ¿Que es un Pack?. ¿Qué productos hay en la lista que sean pack (puede no ponerlo)?. Escribe el nombre del número de la línea donde están?.

Figura 5. Sesión 8. Resolvemos problemas

CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de esta presentación era realizar un plan de intervención con usuarios con DI en el manejo del dinero para una mejora de la calidad de vida, enmarcado en un Proyecto de Aprendizaje Servicio. La forma de trabajo permitió al futuro maestro adquirir habilidades, prácticas y competencias que no hubieran sido logradas en un aula. Del mismo modo, permitió a los usuarios de Asprosub-Fundación Personas en Zamora disfrutar de las matemáticas, aumentando su motivación y su confianza.

A continuación (Tabla 7), se muestran evidencias extraídas de la experimentación

Evidencia 1	• Los errores del principio se fueron resolviendo con el uso del material manipulativo • Al comienzo de la experimentación los alumnos utilizaban las equivalencias monetarias más sencillas • A medida que avanzaba la experimentación, los alumnos con mayor DI seguían cometiendo errores, pero se daban cuenta ellos mismos
Evidencia 2	• La mayoría de los alumnos fueron conscientes del valor de los productos y del sueldo promedio • Las principales dificultades se dieron en los cálculos matemáticos
Evidencia 3	• En cuanto a la relación entre iguales, al finalizar la experimentación los usuarios habían mejorado sus habilidades sociales • En cuanto a la relación con el formador, al finalizar la experimentación eran capaces de mantener conversaciones fluidas
Evidencia 4	• Al comienzo de la experimentación los alumnos se negaban a usar materiales manipulativos; al finalizar la misma, hacían uso de ellos sin que el formador lo solicitara
Evidencia 5	• Al comienzo de la experimentación, los alumnos no eran capaces de exteriorizar sus dificultades • Al finalizar la experimentación, los alumnos eran conocedores de sus dificultades y no les daba vergüenza preguntar o apoyarse entre ellos o con recursos

Resultó llamativo cómo, al comienzo de la intervención, el futuro maestro no tenía conocimiento ni experiencia de cómo trabajar con alumnos con DI, pero poco a poco fue adquiriendo práctica que le facilitaba la creación de tareas y talleres para llevar a cabo en la Entidad. Asimismo, los usuarios de dicha Entidad al comienzo no tenían confianza con el docente, entre ellos o en ellos, y a medida que la intervención se iba desarrollando esta situación fue cambiando.

Además, queda reflejada la importancia de utilizar la conexión entre las matemáticas y la vida cotidiana (González et al., 2021), la del uso del material manipulativo (Rodríguez et al., 2022) y la de una buena coordinación entre profesionales y del trabajo en equipo (Arroyo et al., 2020) para enseñar matemáticas a personas con DI.

Como principal implicación educativa, cabe destacar cómo el desarrollo de este tipo de proyectos promueve la retroalimentación entre los miembros que lo desarrollan. En el futuro sería conveniente la revisión y modificación de algunas tareas o actividades, a partir de dificultades encontradas, antes de llevarlo de nuevo a la Entidad para su siguiente experimentación.

Referencias

Arroyo, M. J., Pinedo, R. e Iglesia, M. de la (2020). Coordinación docente e interdisciplinariedad para la adquisición de competencias en el Grado de Educación Primaria e Infantil: Percepciones de alumnado y profesorado. *Tendencias Pedagógicas,* 35, 2020, pp.102-117. https://doi: 10.15366/tp2020.35.009

Bringle, R. G. y Hatcher, J. A. (1999). Reflection in service-learning: Making meaning or experience. *Educational horizons, 23,* 179-185.

Clemente, E. G. y Servós, C. M. (2017). Dilemas en educación y discapacidad: ¿Enseñar matemáticas a “idiotas”? *Panorama social*, *26*, 109-120. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6371403

Fernández, R. y Sahuquillo, A. (2015). Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *4*(1), 11-23. https://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/136

Furco, A. (1996). Service-learning: A balanced approach to experiential education. En B. Taylor (Ed.), *Expanding boundaries: Service and learning* (pp.2-6). Corporation for National Service.

González, I., Benvenuto, G. y Lanciano , N. (2021). Dificultades de Aprendizaje en Matemática en los niveles iniciales: Investigación y formación en la escuela italiana. *Psychology, Society & Education*, *9*(1), 135-145. https://doi.org/10.21071/psye.v9i1.13857

González, C. L. y Sánchez, C. N. (2019). Enseñanza de las matemáticas a estudiantes con diagnóstico de discapacidad intelectual leve. *Poiésis*, *37*, 83-103. https://doi.org/10.21501/16920945.3331Howard, S., San, C., Salas, N., Blanco, P. M. y Diaz, C. J. (2018). Oportunidades de aprendizaje en matemáticas para estudiantes con discapacidad intelectual. *Revista Colombiana de Educación*, *74*, 197-219. https://doi.org/10.17227/rce.num74-6906

Organización Mundial de la Salud. (2022, febrero). *ICD-11 for mortality and morbidity statistics*. https://bit.ly/3z2e4Bb

Rodríguez, M.M., Sánchez-Barbero, B. y Monterrubio, M.C. (2022). Recursos didácticos para el aula de matemáticas. En A. Lorenzo J. Blanco Nieto, Nuria Climent Rodríguez, María Teresa González Astudillo, Antonio Moreno Verdejo, Gloria Sánchez-Matamoros García, Carlos de Castro Hernández y Clara Jiménes Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 425-452). Editorial Universidad de Granada.

Salam, M., Awang, D. N., Ibrahim, D. H. A. y Farooq, M. S. (2019). Service-learning in higher education: A systematic literature review. *Asia Pacific Education Review*, *20*(4), 573-593. http://dx.doi.org/10.1007/s12564-019-09580-6

Para hacer referencia al artículo:

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M.J., Martín, V. y Monterrubio, M.C. (2022). Un proyecto ApS: aprender de personas con discapacidad intelectual para formar docentes en el aula de matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 152 - 158). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

EL TOUR DE MATES: LA CARRERA DE CÁLCULO MENTAL

Diego Alonso Santamaría

IES Arca Real

Resumen

El Tour de Mates es una competición de cálculo mental gamificada en una carrera ciclista. En ella, los alumnos de cada centro participarán en seis semanas o etapas especialmente diseñadas para poner en práctica distintas estrategias de cálculo mental. En su primera edición, esta competición contó con la participación de más de tres mil alumnos de 23 centros educativos de todo Valladolid. Para este año, se estima la participación de más de 100 centros de distintas provincias de España.

Palabras clave: *matemáticas, cálculo mental, competición, castilla y león, españa*

INTRODUCCIÓN

El cálculo mental es una de las herramientas matemáticas fundamentales de todo ciudadano y, sin embargo, los libros de texto en su mayoría no le dan el espacio que merece. Este fue el motivo que llevó a la creación de una competición de cálculo mental.

Además, para incentivar la participación y motivar al alumnado, se buscó un contexto deportivo con el que gamificar el proyecto. Finalmente se eligió el ciclismo por ser un deporte que aúna competiciones individuales y colectivas, con la motivación hacia el aprendizaje y el compañerismo que fomentan ambas formas. Así nació el Tour de Mates.

La competición está dirigida a todo el alumnado desde 5º de Primaria a 2º de Bachillerato. En su primera edición participaron 23 centros educativos de todo Valladolid, más de tres mil alumnos participantes. Para la edición 2022/2023 se espera una participación de más de 100 centros educativos distribuidos en más de 15 provincias distintas.

LA COMPETICIÓN

La carrera se divide en dos fases:

1. Una competición interna desarrollada dentro de cada centro educativo.
2. Una segunda fase provincial en la que participan los mejores alumnos de cada centro.

Como en toda carrera ciclista, esta competición matemática está compuesta de cinco etapas, cada una especialmente dedicada al aprendizaje y puesta en práctica de una estrategia de cálculo mental.

Y al igual que en una competición ciclista, existen varias clasificaciones donde se premia tanto la excelencia como la constancia o regularidad, se motiva al alumnado joven y se realizan competiciones por clases favoreciendo el compañerismo:

- Maillot amarillo: la clasificación general muestra al mejor participante de todo el instituto.
- Maillot blanco: para el mejor corredor joven (1º y 2º ESO).
- Maillot verde o maillot de la regularidad: para el corredor más regular en todas las etapas.
- Clasificación por equipos: donde cada clase competirá por ser la mejor de su centro educativo, siguiendo un sistema de puntuación similar al utilizado en ciclismo.

MATERIAL Y RECURSOS EDUCATIVOS

Para su ejecución, los centros educativos cuentan con el siguiente material:

- Las etapas, que deberán ser imprimidas para cada alumno y repartidas en el momento en el que se desarrolle la competición.
- La plantilla de soluciones de las etapas, para que el profesor corrija cada etapa.
- Acceso a un Excel online, donde cada profesor rellenará el número de aciertos de cada alumno en las respectivas etapas.

Además, se ha creado la página web, https://eltourdemates.wordpress.com/, donde se puede encontrar toda la información necesaria para llevar a cabo la carrera:

- Reglamento con todas las directrices para los docentes.
- Actividades y juegos para practicar el cálculo mental.
- Vídeos o píldoras de conocimiento, para explicar las diferentes estrategias de cálculo mental de cada etapa.
- Ejemplos de cada etapa para quien quiera practicar.

Figura 14. Ejemplo de actividades disponibles en la página web

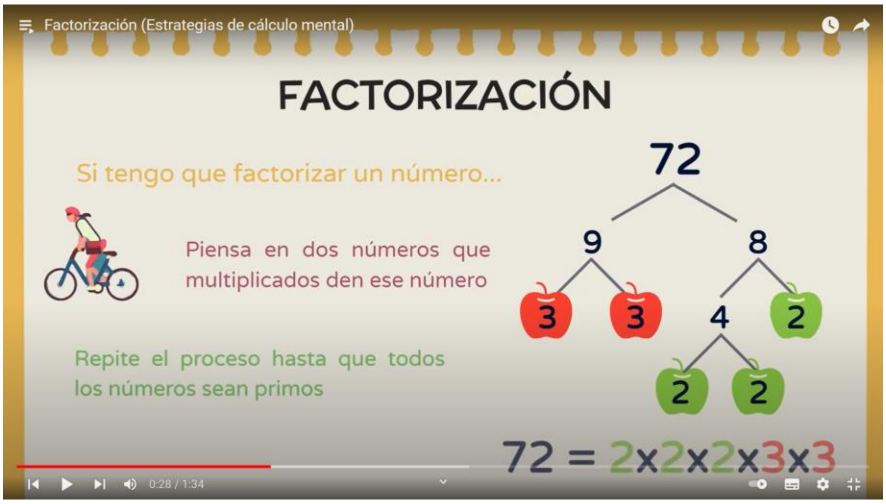


Figura 15. Vídeo explicativo de una estrategia de cálculo, disponible en la página web

Además, en la página web el alumnado puede acceder a las diferentes clasificaciones de su centro educativo, a través de una interfaz interactiva como si de una competición deportiva oficial se tratase:

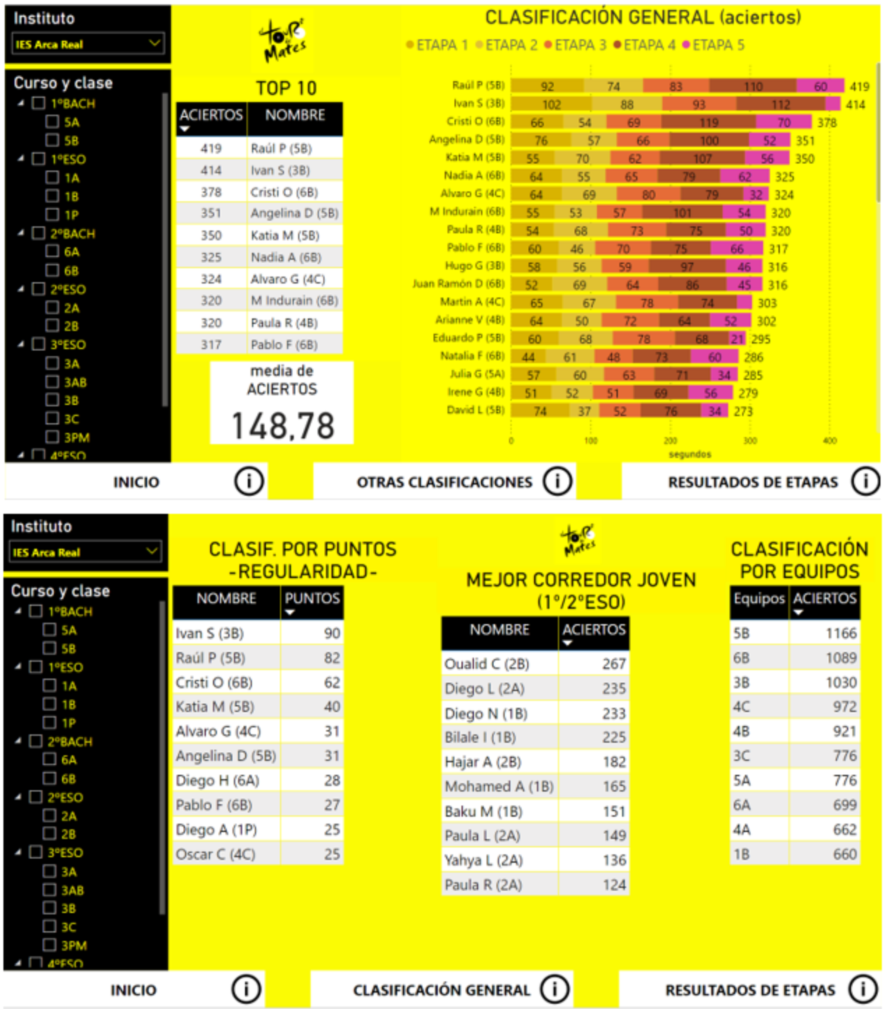


Figura 16. Visualización de las clasificaciones de la competición

FECHA DE LA COMPETICIÓN

La segunda edición del Tour de Mates se celebrará a partir del 16 de enero de 2023. A partir de esa fecha, se dedicará una semana a la realización de cada etapa de la carrera, teniendo los docentes total libertad para realizar la prueba el día que más se ajuste a su temporalización.

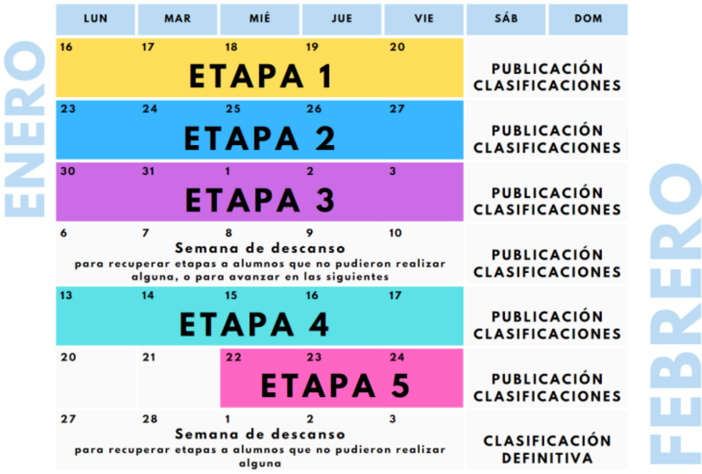


Figura 17. Calendario de la competición 2022/2023

CÓMO LLEVARLO A CABO EN TU CENTRO EDUCATIVO

Cada semana los docentes deben llevar a cabo la etapa correspondiente del siguiente modo:

El día que el profesor elija para realizar la etapa con su grupo, debe:

1. Repartir la prueba a sus alumnos.
2. Cronometrar 5 minutos, donde los estudiantes deberán resolver el mayor número posible de operaciones.
3. Recoger las hojas al terminar el tiempo.

Una vez terminada la clase, el profesor debe:

1. Corregir las pruebas de sus alumnos, ayudándose de la plantilla de soluciones.
2. Anotar el número de aciertos de cada alumno en el Excel online al que se le dio acceso.

LA COMPETICIÓN EN NÚMEROS

Las cifras alcanzadas por este proyecto muestran su gran éxito, más aún teniendo en cuenta que solo se ha llevado a cabo en una única provincia y no a nivel regional o estatal:

En 2021/2022, su primera edición contó 3371 alumnos participantes de 23 centros educativos. Entre todos ellos, se resolvieron cerca de medio millón de operaciones de cálculo mental.

Debido a su gran aceptación en la comunidad educativa, se decidió ampliar la participación a todo aquel centro educativo que desease participar, para lo cual se expuso una comunicación en las XX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) celebradas en Valencia en 2022.

A fecha de octubre de 2022, el Tour de Mates cuenta con más de 100 centros educativos de 16 provincias distintas de toda España.

REFERENCIAS

Alonso, D. (s. f.). El Tour de Mates. *El Tour de Mates*. Recuperado 30 de octubre de 2022, de https://eltourdemates.wordpress.com

Negro, L. (2022, 31 marzo). Juegos y deporte para aprender matemáticas. *El Norte de Castilla*. Recuperado 8 de abril de 2022, de https://www.elnortedecastilla.es/valladolid/juegos-deporte-aprender-20220330193556-nt.html

Para hacer referencia al artículo:

Diego Alonso Santamaría (2022). El Tour de Mates: la carrera de cálculo mental. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 159 - 163). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

RUTA MATEMÁTICA POR TUDELA DE DUERO

Eduardo Izquierdo Iglesias, Marta Carazo Lores

IES RÍO DUERO (TUDELA DE DUERO)

Resumen

Se trata de un trabajo en grupo llevado a cabo con alumnado de 3º y 4º de ESO. Los grupos serían de entre dos y cuatro personas que van provistas de un dossier preparado por los profesores previamente, bolígrafo y un metro extensible. La ruta tiene una duración aproximada de una hora y en ella se destacan motivos geométricos, elementos de medida, parámetros estadísticos y toma de decisiones basada en criterios matemáticos.

Palabras clave: *ruta, matemáticas, mirada, geometría, exterior*

JUSTIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD: LA MIRADA MATEMÁTICA.

La mirada matemática puede ser educada. Durante el curso pasado los autores de esta comunicación propusimos al alumnado de 4º ESO de nuestro centro algunas actividades individuales fuera del instituto. Pudimos observar el enorme potencial de una buena parte de este alumnado para crear contenidos, para aplicar saberes que habíamos trabajado en el aula previamente. La evaluación de esas actividades resultó ser excelente y a partir de ahí decidimos organizar una actividad más compleja en el exterior del centro.

La ubicación del IES Río Duero en un entorno natural privilegiado, en medio de un pinar a orillas del Duero y el sencillo acceso al pueblo a través de una pasarela peatonal que atraviesa el río, nos permitieron acceder a una ruta semiurbana.

La mirada matemática exige concentración y búsqueda cuando se hace un paseo. También inquietudes y creatividad. Por eso la segunda parte de la actividad consiste en que sean los alumnos y alumnas los que creen su propia ruta matemática.

RUTA MATEMÁTICA POR TUDELA

Búsqueda de Ítems.

El trabajo previo en esta actividad es fundamental: se trata de buscar ideas que sean medibles o conjeturables, o susceptibles de generar preguntas. En este sentido, la geometría es quizás lo más sencillo de visualizar. La simetría o los frisos o los mosaicos no son difíciles de encontrar en todas partes. Círculos, ángulos rectos, teselaciones del plano, no son fáciles de encontrar en la naturaleza, pero sí en una ruta urbana.

En algunas ocasiones hemos salido a medir la altura de los pinos del entorno provistos de un espejo y un metro flexible, utilizando la proporcionalidad de los triángulos y conceptos sencillos como los ángulos de incidencia y de reflexión.

En la preparación de la actividad es fundamental documentar fotográficamente el ítem sobre el que se va a trabajar. Después hay que elegir aquellos que mejor se adapten mejor a los contenidos que queremos trabajar, sin descuidar una cierta continuidad en la ruta. Es importante que haya una secuenciación en las actividades y que no se alejen mucho unas paradas de las otras.

Las estimaciones y la recopilación de datos es otra de las posibilidades que ofrecen estas rutas. Así podemos estimar la superficie de una puerta o una fachada; también la longitud de la pasarela por la que atravesamos el Duero para acceder al pueblo.

La Ruta Matemática.

La ruta comienza con la entrega a cada grupo de alumnos de un cuadernillo en el que se incluye un mapa de la ruta que van a realizar. Salvo el acceso al pueblo por la pasarela, el resto de la ruta es circular.

La primera parada tiene lugar a escasos metros de la entrada del instituto; se trata de un lugar mítico para el alumnado del centro desde hace varias generaciones. Ellos lo llaman *la piedra*, aunque en realidad es un bloque de hormigón situado en el camino de acceso a una antigua gravera para evitar que aquella se convierta en un vertedero. Las preguntas iniciales son: ¿Cuánto pesará el bloque de hormigón? ¿Podríamos levantarlo siendo un grupo de 8 personas?

En esta primera parada explicamos algunos detalles para que sirva de ejemplo para las paradas posteriores: es posible modelizar el bloque como un prisma de base rectangular. Se puede hacer un croquis en el cuaderno, apuntar las medidas y realizar los cálculos. Introducimos en la explicación el concepto de densidad y buscamos con un móvil la densidad del hormigón.

Realizados los cálculos se obtiene un peso que oscilará entre los 1.500 kg y los 1.875 kg dependiendo de la densidad del hormigón. En todo caso el peso repartido entre 8 personas estará en un entorno de 200 kg/persona, algo que parece inviable levantar, aunque estuviera uniformemente repartido.

Puesto que *la piedra* está rodeada de gruesos pinos, lanzamos la hipótesis de si sería posible levantar una mole similar hecha con madera. Realizados los cálculos con la densidad de la madera de pino (en torno a unos *500 kg/* m^3), vemos que el resultado es que tocaría cada persona del grupo (8 personas) a unos 48 kilos. Con un cierto esfuerzo y repartiendo los pesos podría moverse.

Tabla 1. Densidad de diferentes tipos de madera, peso total del bloque y peso por persona.

TIPO DE MADERA	DENSIDAD kg/ m^3	PESO DEL BLOQUE	PESO POR PERSONA(8)
SECUOYA	400 kg/ m^3	300 kg	37,5 kg
PINO	500 kg/ m^3	375kg	46,875 kg
CASTAÑO	600 kg/ m^3	450kg	56,25 kg
ENCINA	800 kg/ m^3	600kg	75 kg

La ruta continúa por el camino de cemento que desemboca en la pasarela sobre el Duero. La prueba aquí consiste en evaluar la anchura de dicho camino haciendo varias mediciones y elaborando un pequeño estudio estadístico. También se les pide que observen la existencia de juntas de dilatación a intervalos regulares realizadas con bastante exactitud, lo que permite medir la longitud del camino.

Evaluaremos en un tercer ítem la longitud de la pasarela atendiendo a las vallas cuadriculadas.

Enseguida nos detenemos, ya en el pueblo, en el mosaico que forman los adoquines en el suelo, de forma que tres colocados en posición vertical ocupan lo mismo que dos en posición horizontal.

Introducimos el concepto de teselación del plano e invitamos a que busquen otras posibilidades para completar el plano con otro diseño diferente y el mismo tipo de adoquinado.

La quinta parada es en la fachada principal del colegio Pinoduero; se trata de un edificio construido en 1912 con materiales sencillos, pero llenos de simetrías y traslaciones.

Caminando unos cien metros llegamos a la plaza del pueblo, y allí nos detenemos en un clásico buzón amarillo de correos. La idea fundamental es estimar el número de cartas que caben allí dentro y lo que pesarían si estuviera lleno de ellas.

De allí nos dirigimos a la calle Solana Alta y nos paramos bajo un balcón que tiene un enrejado compuesto por un friso geométrico. Pedimos que busquen el motivo base y les damos en una cuadrícula un motivo base para que elaboren con él un friso mediante traslaciones y simetrías.

La penúltima parada es en medio de una calle peatonal con hermosas vistas al río. Hay una rejilla en el suelo para drenar el agua de lluvia. Es una rejilla de hierro fundido en el que se dejan agujeros con la forma de un rectángulo redondeado en sus extremos más estrechos. La idea aquí es estimar el caudal de agua que puede caer en relación con el tamaño total del rectángulo que tapa la rejilla.

La última parada la realizamos frente a un muro escalonado realizado con unos bloques especiales. Hemos hecho una foto y hemos coloreado algunos formando el paso uno en la construcción de un Triángulo de Sierpinski. Los animamos a completar el fractal en el resto del dibujo y después hacemos preguntas sobre cómo sería un tal fractal en pasos sucesivos.

EVALUACIÓN Y CONCLUSIONES

Evaluación de la actividad.

La evaluación de la actividad se realiza en tres niveles: en primer lugar, mediante una rúbrica confeccionada a tal efecto para valorar el cuestionario realizado por el grupo de alumnos. En segundo lugar, un representante de cada grupo hace una exposición oral sobre uno de los ítems elegidos por los profesores. En el tercer nivel, se hace una autoevaluación individual de lo alcanzado mediante un formulario a través de *Forms*.

Conclusiones.

Esta forma de trabajo puede ser extendida utilizando apps como MathCityMap. En esta ocasión hemos preferido entregar un cuestionario en papel por la libertad que otorga al grupo de poder hacer cálculos, esquemas, croquis, de buscar estrategias para resolver los nueve ítems que hemos incorporado.

Para hacer referencia al artículo:

Eduardo Izquierdo Iglesias, Marta Carazo Lores (2022). Ruta matemática por Tudela de Duero. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 164 - 166). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

EL LABERINTO DE FIBONACCI. LAS MATEMÁTICAS DE LA VIDA

Beatriz Suárez Quijada

Junta de Castilla y León. Ceip Ignacio Martín Baró. Valladolid

"El universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras"

Galileo Galilei

Resumen

Las matemáticas están presentes en nuestra vida de una manera evidente. A lo largo de la historia los testimonios de esta ciencia vinculados con la realidad son tan explícitos, que debemos tenerlos en cuenta para visibilizarla como herramienta fundamental que conecta directamente con los intereses pedagógicos y cotidianos de nuestro alumnado.

Esta comunicación que forma parte de una experiencia que ha tenido lugar en la etapa de Educación Infantil, concretamente en el tercer curso (5-6 años), pretende mostrar de manera efectiva la influencia de poner en contacto la experiencia matemática con el entorno próximo como estrategia educativa y motivacional. A través de este proceso de asociación, desarrollamos las destrezas matemáticas y las vinculamos con diferentes elementos que forman parte de nuestra vida cotidiana para hacerlas significativas facilitando su comprensión en otros ámbitos, sin perder de vista la relación simbiótica entre matemáticas y realidad.

Palabras clave: *matemáticas, juego, entorno, cotidianeidad, espiral, naturaleza*.

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación pretende desarrollar y visibilizar la importancia de la adquisición temprana de las destrezas matemáticas partiendo de la interacción directa del niño y la niña con el medio que le rodea, siendo éste un referente necesario en las actuaciones educativas.

El contexto en que sitúa la propuesta es un aula de Educación Infantil con niños y niñas de 5 años. Teniendo en cuenta que uno de los objetivos fundamentales de la etapa es: Observar y explorar su entorno familiar y natural englobado en las áreas fundamentales: Crecimiento en armonía, descubrimiento y exploración del entorno y comunicación y representación de la realidad, trataremos de definir las líneas de actuación que llevaremos a cabo para su adquisición.

Para ello hemos planteado un proyecto en el que a través del entorno próximo desarrollamos las destrezas matemáticas y las vinculamos con diferentes elementos que forman parte de su vida cotidiana aprovechando su alto grado de significatividad.

Las salidas al medio natural y el propio cuerpo nos ofrecen estrategias educativas que nos permiten entender las matemáticas desde sus intereses más próximos.

Nuestro trabajo en el aula y entorno se desarrolla desde una metodología abierta en la que cada proyecto es vivenciado por el alumno de manera experiencial.

Concretamente nos centraremos en la figura de la espiral como elemento motivador. A través de ella, de su observación y conocimiento, abordaremos aspectos matemáticos fundamentales como es el proceso de sumar, así como algunos conceptos relacionados con el tema en cuestión: patrones, series, secuencias…así como curiosidades matemáticas relacionadas con nuestro cuerpo que, desde la forma matemática propuesta, aporta motivación y conocimiento.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Descripción de la propuesta

La infancia es una etapa vital en la que el entorno próximo se vincula directamente con los intereses de los niños y niñas. La necesidad de investigar, conocer y aprehender la realidad permite que exista una conexión entre las experiencias vividas en su contexto habitual y el desarrollo infantil. El interés por involucrarse en el entorno cercano incluyéndolo en la experiencia del niño y la niña, favorece el tan necesario aprendizaje significativo.

En la propuesta que describimos vinculamos la aproximación al lenguaje matemático, así como la iniciación en algunas operaciones sencillas, con la experiencia relacionada con elementos que están presentes en el día a día: la calle, la escuela, el patio de juegos, los parques y la misma naturaleza que los rodea. En cada salida al entorno es frecuente localizar elementos naturales que ofrecen posibilidades de aprendizaje a la vez que motivan y generan estructuras cognitivas facilitadoras de los prerrequisitos necesarios: Atención, memoria, coordinación, orientación, percepción, esquema corporal, comunicación, lenguaje y autonomía. En el caso que describimos nos centramos en la figura de la espiral para conectar con la experiencia matemática, después de realizar un proceso de observación, que nos permitió ubicar y reconocer la forma espiral en diferentes contextos: naturaleza, escuela, vida cotidiana, así como en nuestra aula transformada en laberinto donde la espiral ofrece diferentes posibilidades en las que desarrollar sus competencias.

Él juego en el laberinto ofrece posibilidades motrices, así como facilita la adquisición de destrezas fomentando la curiosidad y la capacidad de abstracción para la aproximación y realización de operaciones matemáticas sencillas. Las salidas al entorno desarrollan la interacción con el medio y relacionan la experiencia con aspectos pedagógicos. Las formas que encontramos en la naturaleza son estudiadas minuciosamente para encontrar similitudes con la forma estudiada: la espiral.

Por tanto y en líneas generales, esta propuesta trata de desarrollar la capacidad de atención y observación para generar estructuras cognitivas que permitan a los niños y niñas aproximarse al pensamiento matemático desde experiencias cercanas, extrayendo conclusiones y facilitando la acción, de manera que sean capaces de realizar pequeñas investigaciones a partir de un eje motivador: la espiral, como forma de la naturaleza que está presente en muchos de los elementos que conocemos y que han formado parte de nuestro día a día.

Desarrollo de la Propuesta

El proyecto que hemos realizado se desarrolla a lo largo del curso escolar teniendo en cuenta la secuencia natural que vivimos a lo largo del año e integrar así los diferentes ejes temáticos:

1. Las estaciones como secuencia narrativa,
2. La identidad de los niños y niñas,
3. El juego como principio.

1.Las estaciones del año. Cada estación es un nuevo hito y nos sirve de contexto y excusa para significar los aprendizajes.

La espiral es el eje conductor y es a partir de ella como enfocamos la propuesta.

Aprovechando esta circunstancia la secuencia narrativa comienza trabajando la espiral a lo largo de las mismas: en el otoño, invierno, primavera y verano.

Las salidas al entorno a lo largo del año se vinculan con las diferentes estaciones, por lo que buscaremos elementos que tengan que ver con la forma espiral y trabajar el concepto matemático desde la observación y la interacción con el medio.

- En la estación del otoño recogemos piñas para establecer comparaciones con otros elementos naturales y reconociendo la forma espiral en cada uno de ellos

Figura 1. La espiral en las piñas.

- En el invierno buscaremos la forma en los cristales de nieve. Salimos al entorno para recoger y jugar con ella, de manera que establezcamos un contexto relacional y posteriormente trabajar desde la motivación el tema de interés. A través de presentaciones visuales podemos observar de manera más certera su forma. En la pizarra digital lo mostramos para que lo representen.

Figura 2. La espiral en los cristales de nieve (Alexey Kljatov, CC license)

- En la primavera buscamos la espiral en las flores y en las plantas observando sus curiosas características.

Figura 3. La espiral en las plantas (Fuente: Pintura y artistas)

- En el comienzo del verano buscaremos las similitudes en las conchas y en las ondas marinas.

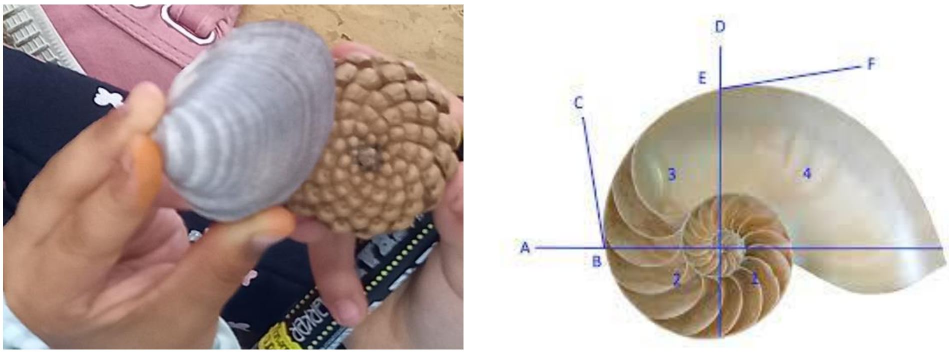


Figura 4. La espiral en las conchas marinas

La construcción de la identidad.

Otro eje temático fundamental es la construcción de la identidad. A través de elementos motivadores trataremos este aspecto. Los niños y niñas de esta etapa avanzan progresivamente en la adquisición de su autoconcepto, por lo cual otro de los objetivos es el tratar de descubrirse progresivamente. Para ello las actividades deben ser sobre todo manipulativas y activas, por lo que vincularemos la espiral con las señas de identidad de cada uno de nosotros. Comenzamos con la impresión de huellas en un papel para descubrir que su disposición es un patrón que nos lleva directamente a la figura trabajada. La espiral aparece en nuestra huella por lo que este concepto nos permite trabajar el concepto de número a través del estudio del DNI. Buscamos los números que nos identifican y para ello mostramos diferentes documentos que nos proporcionan algunos niños y niñas y la propia docente. Es así como entendemos que la identidad también puede mostrarse en números y que éste va asociado a una huella que nos identifica y que vinculamos con la forma espiral. La figura protagonista cobra entonces una importancia muy significativa ya que su secuencia y patrones son la clave que nos identifica como personas únicas y especiales desde nuestra propia diferencia, haciendo de esta un valor que enriquece, que suma y que aporta a la diversidad una connotación positiva haciendo posible la atención a la misma. Desde el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) valoramos e integramos todos los aspectos que atiendan a las diferentes formas de acceder al aprendizaje.

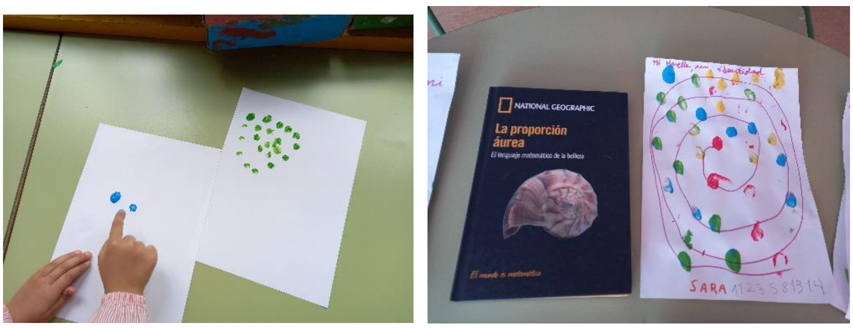


Figura 5. La huella digital y las espirales

Figura 6. La espiral en nuestra identidad

Además, buscamos en nuestro propio cuerpo y en la de aquellos referentes artísticos o afectivos, la presencia de la curva geométrica plana (espiral). Además, conocemos algunas curiosidades relacionadas con la espiral: la reconocemos en la forma en nuestras orejas, relacionamos la proporción en los dedos de nuestras manos y observamos que cuando cerramos la mano formamos una espiral.

Todas estas curiosidades facilitan el que integremos desde una mirada matemática, el tema que presentamos con nuestra propia identidad facilitando el acercamiento a las matemáticas desde lo cercano a lo general.

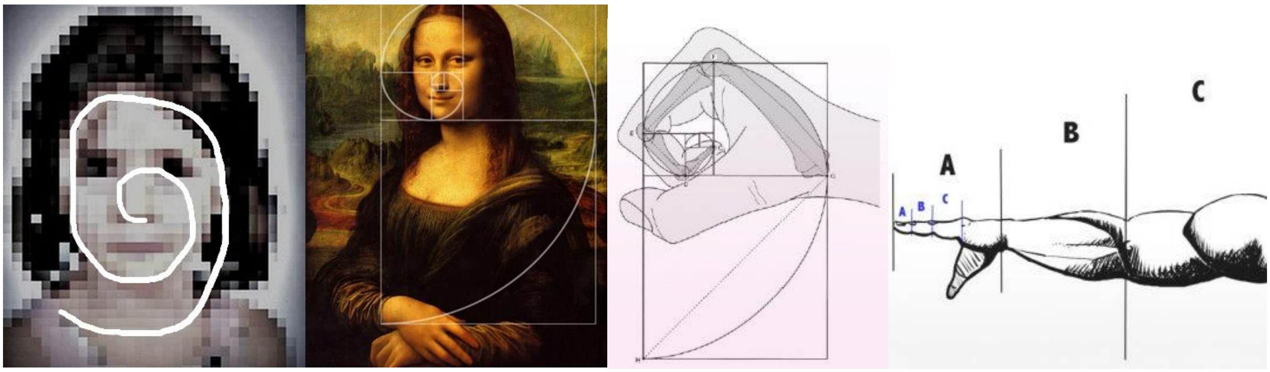


Figura 7. La espiral en nuestro cuerpo

El laberinto de Fibonacci, escape room matemático.

La innovación educativa permite recuperar o poner de manifiesto la potencialidad del juego como recurso educativo fundamental, poniendo el punto de inflexión en lo lúdico como una tarea muy seria que permite utilizar el pensamiento matemático para construir conocimiento, como afirma Stuart Brown, “Nada enciende más la mente de un niño como jugar”.

Proponemos realizar un e*scape room* en un espacio del aula transformándolo en laberinto. Éste ofrece posibilidades motrices, documenta procesos que generan aprendizaje, así como fomenta la curiosidad y la capacidad de abstracción.

Los niños y niñas interpretan códigos y patrones matemáticos para “resolver el enigma que les permita salir del laberinto” apoyándose en la reflexión y la lógica, generando además vínculos de unión cual “hilo de Ariadna”.

Figura 8. El laberinto

El laberinto debe ser recorrido hasta conseguir salir de él, esto no es posible si no resuelven los retos propuestos. Para ello deben realizar operaciones o buscan soluciones con las estrategias propuestas.

Entonces:

A1: ¿Cómo vamos a encontrar los números que nos darán la pista del laberinto?

P: Cómo veis tenemos que empezar sumando las posiciones 0 y 1 que son fijas.

A2: ¿Y cómo hacemos después?

P: Tenemos que buscar como encontrar la segunda posición que resulta de la suma de las posiciones 0 y 1, es decir, de la suma de los números 0 y 1 que resulta 1.

A3: Ya lo entiendo ¡Es muy fácil! ¡Mira!

A4: Genial, así es

P: La tercera posición resulta de la suma de las posiciones 2 y 1, es decir, de la suma de los números 1 y 1 que resulta 2.

P: La cuarta posición resulta de la suma de las posiciones 3 y 2, es decir, de la suma de los números 2 y 1 que resulta 3.

P: Y así sucesivamente.

A5: Y para salir del laberinto ¿Qué hacemos después?

P: Tenemos que resolver el puzle de la espiral y mirar detrás si tiene el siguiente número de la secuencia

A1. ¡Sería el número 5! ¡Vamos a resolver otra pista!

P: Tendremos que encontrar el siguiente número con este código QR, usaremos el móvil de la clase

A2: Entonces, cuando aparezca el número ¿podremos abrir el candado de la caja?

A3: ¡Aparecen todos los números que hemos sumado antes!

A4: ¡Conseguido! es el 0, 1, 1, 2, 3… cuando abramos la caja el mensaje nos dirá como salir

Figura 9. Resolviendo el enigma para conseguir la pista fina

La gincana matemática.

Nuestro entorno cercano ofrece grandes posibilidades por lo que en las salidas al mismo realizamos actividades matemáticas desde el juego como principio. Proponemos una gincana para reconocer elementos matemáticos presentes en nuestra escuela. Para ello les pedimos que busquen y seleccionen todos los elementos que tengan que ver con la geometría hasta reconocer la forma trabajada y anotarlo en un cuaderno de campo *matemático*.

Figura 10. Investigando nuestro entorno matemático

´Land-Art.

Para finalizar buscamos referentes en el arte que trabajan la forma espiral promoviendo el sentido estético a través de diseños artísticos, enlazando con nuestro pasado más lejano, observando la espiral y su trazo a lo largo de la historia y como los artistas la han reproducido para posteriormente diseñarla en el espacio del aula de manera creativa con materiales diversos.

Figura 11. Espirales. Robert Smithson, Chema Madoz y Mario Merz

Figura 12. Trazando nuestras espirales

La espiral en los cuentos.

A través de la lectura podemos encontrar también una motivación que nos vincule con el tema. Para ello iniciamos un proceso de búsqueda en el que podamos conocer la temática propuesta.

Su consulta, lectura y posterior representación, hacen que el tema a tratar aparezca muy relacionado con sus intereses. Elegimos los siguientes títulos: ”Los secretos del mundo espiral” de Lourdes Benito, “Animales en espiral “ de Julio del Bosque, así como diferentes álbumes de Herbé Tullet, por su gran aproximación al mundo infantil y la relación de éste con el Arte. Otro de los libros que especialmente han contribuido a la experiencia propuesta, es un texto relacionado expresamente: “Las Matemáticas del Universo” de Soledad Romero y Rennee Hao. A través de él y de forma poética, hemos desarrollado un imaginario matemático desde la belleza y la poesía.

Figura 13. Material ilustrado

Conclusión.

Las matemáticas forman parte de nuestra vida, rodean cada acción cotidiana de manera que es imposible separarlas de cada realidad. Ofrecer esa mirada desde edades tempranas, es dotar de herramientas que faciliten su comprensión y generen aprendizajes que puedan ser trasladados a todos los ámbitos y dimensiones que deberán asumir a lo largo de su escolaridad y vida.

Todo comienza cuando miramos a nuestro alrededor y asistimos al espectáculo de la vida.

> “Empieza por el principio y sigue hasta el final, allí te paras” *Alicia en el País de las Maravillas.*
>
> Lewis Carroll

Referencias bibliográficas.

Alsina, A. (2022*). Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas* (3-6 años). Grao

Casals, M.A. (2009*) Vivir las matemáticas*. Octaedro.

Fernández Bravo, J.A. (2019). *Didáctica de la matemática en la Educación Infantil*. Midac Varios

Rodríguez Serrano, E. (2015). *Fibonacci y los números mágicos*. El rompecabezas

San Miguel, N., Pascual, E. (2020). *Matemáticas en la naturaleza, un enfoque pedagógico*. Sciencia Scripts

Para hacer referencia al artículo:

Beatriz Suárez Quijada (2022). El laberinto de Fibonacci. Las matemáticas de la vida. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 167 - 175). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

DISEÑO Y APLICACIÓN DE ACTIVIDADES CON GEOGEBRA PARA TRABAJAR LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO Y PRUEBA CON ESTUDIANTES PARA MAESTRO[i]

Matías Arce[a], Laura Conejo[b], Astrid Cuida[a] y Héctor Sanz[a]

Universidad de Valladolid ([a]Facultad de Educación de Palencia, [b]Facultad de Educación de Soria)

Resumen

Una de las competencias específicas en matemáticas que establece el nuevo decreto LOMLOE es la de razonamiento y prueba. Diseñar y gestionar situaciones de aprendizaje donde los procesos de razonamiento y prueba tengan una presencia relevante precisa de que los docentes tengan un conocimiento sólido de los mismos. Estos procesos, que suelen resultar complejos, involucran dos grandes fases, conjeturar y demostrar. Se presentan aquí una serie de tareas diseñadas e implementadas con estudiantes para maestro de Educación Primaria, pero que son también aplicables en aulas de últimos cursos de Primaria y de Secundaria, para fortalecer y reconstruir su conocimiento sobre estos procesos. Estas tareas están centradas en contenidos geométricos, como las relaciones angulares o las propiedades de los polígonos, y hacen uso de las potencialidades de GeoGebra tanto para conjeturar como para transitar hacia la elaboración de demostraciones.

Palabras clave: *Razonamiento y prueba, conjeturar, demostrar, GeoGebra, relaciones geométricas.*

INTRODUCCIÓN

Una de las novedades del nuevo decreto curricular de la LOMLOE es el establecimiento explícito de una serie de competencias específicas en matemáticas, cuyos ejes están centrados mayoritariamente en procesos clave involucrados en la propia actividad matemática, como son la resolución de problemas, las conexiones, la representación y comunicación de ideas matemáticas y el razonamiento y prueba, además de las destrezas socioafectivas. Estos procesos ya son reconocidos por documentos muy influyentes como los estándares del NCTM (2003). Un docente de matemáticas de cualquier nivel ha de ser capaz de diseñar y gestionar situaciones de aprendizaje en las que estos procesos tengan una presencia relevante, para favorecer en sus estudiantes el desarrollo de las competencias específicas en matemáticas.

Para que un docente pueda diseñar y gestionar estas situaciones es una condición necesaria (que no suficiente) que tenga un adecuado conocimiento especializado sobre estos procesos. Esto es reconocido explícitamente por modelos de conocimiento del profesor de matemáticas como el *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) de Carrillo et al. (2018), que tomaremos como referencia. Este modelo distingue dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático, considerando además el papel central de las creencias del profesor como aspecto clave que permea qué conocimientos moviliza y usa el docente de matemáticas al llevar a cabo tareas vinculadas con su profesión.

Esta comunicación se centra en el dominio del conocimiento matemático. Dentro de él, el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) distingue el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT),

[i] Este trabajo se ha realizado con el apoyo del programa "Ayudas para la realización de proyectos de investigación UVa 2021" (ref.: PROYEMER-2021-59). El trabajo está vinculado a la red MTSK, red de investigación de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

que abarca el conocimiento disciplinar de los contenidos matemáticos (definiciones, propiedades, procedimientos, contextos de aplicación, representaciones…); el conocimiento de la estructura de las matemáticas (*Knowledge of the Structure of Mathematics*, KSM), donde se sitúa el conocimiento de conexiones entre diferentes contenidos matemáticos; y el conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM), que se centra en el conocimiento de las actividades y procesos que suponen un pilar para hacer matemáticas y construir conocimiento matemático.

En este último subdominio, KPM, es donde se sitúa el conocimiento de la práctica de demostrar, que incluye las formas de generar y validar conocimiento en matemáticas, como el establecimiento de patrones, la construcción de conjeturas, el rol de los ejemplos y contraejemplos, los métodos y tipos de demostraciones o las funciones de la demostración (Delgado-Rebolledo et al., 2022). En general, el aprendizaje de estos procesos es complejo, para alumnos y, también, para profesores en formación (Harel y Sowder, 2007; Stylianides y Stylianides, 2009).

Así, en esta comunicación mostramos el diseño y aplicación de una serie de actividades para trabajar los procesos de razonamiento y prueba con estudiantes para maestro de Educación Primaria (en adelante, EPM). Estas actividades están centradas en contenidos geométricos, al ser una rama de las matemáticas que ofrece numerosas oportunidades para desarrollar procesos de razonamiento y demostración, en particular, tareas de conjeturar y probar (NCTM, 2003). En ellas, se hace uso del programa GeoGebra y se explotan sus potencialidades como programa de geometría dinámica.

LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO Y PRUEBA

En los procesos de razonamiento y prueba pueden distinguirse dos grandes fases: una fase de indagación para llegar a establecer una conjetura y una fase de construcción de una cadena de razonamiento lógico-deductivo que permita, si es el caso, justificar y validar la conjetura establecida. Como destacan Jeannotte y Kieran (2017), estas dos fases llevan aparejadas muchas acciones. La fase de indagación involucra acciones como comparar, identificar un patrón, generalizar o enunciar una conjetura. La fase de validación involucra acciones como explicar, razonar o justificar.

En el nuevo decreto curricular de la LOMLOE encontramos, tanto en Educación Primaria, como en Secundaria y en Bachillerato, al menos una competencia específica muy centrada en estos procesos de razonamiento y prueba, con enunciados que recogen la existencia de esas dos fases:

> Competencia específica 3: Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento (Educación Primaria) (Consejería de Educación de CyL, 2022a, p. 48741).
>
> Competencia específica 3: Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento (Educación Secundaria) (Consejería de Educación de CyL, 2022b, p. 49344).
>
> Competencia específica 2: Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad. Competencia específica 3: Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático. (Bachillerato) (Consejería de Educación de CyL, 2022c, pp. 50087 y 50105).

Esta presencia remarca la necesidad de diseñar y desarrollar situaciones en las aulas que propicien estos procesos en todos los niveles educativos. Un prerrequisito para ello es que el docente de matemáticas posea un conocimiento sólido sobre los mismos lo que, como hemos comentado, no es un hecho sencillo puesto que tanto la experiencia docente como la investigación atestiguan la complejidad que, en muchos casos, tienen estos procesos. Una de las dificultades más habituales es la presencia de un *esquema de prueba inductivo*, es decir, la consideración (errónea) del razonamiento inductivo (la comprobación en ejemplos concretos) como generador de pruebas válidas en matemáticas y como proceso que genera convencimiento y persuasión a una persona sobre la veracidad y validez de un enunciado (Harel y Sowder, 2007). Esta dificultad también aparece como muy arraigada entre los futuros profesores de matemáticas (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009), siendo necesario trabajar en la formación inicial para intentar su superación.

En esta comunicación mostramos algunas actividades diseñadas e implementadas con estudiantes para maestro con ese propósito. En estas actividades se hace uso del software GeoGebra (https://www.geogebra.org), multiplataforma y gratuito y con un número cada vez mayor de opciones y entornos, lo que le hace ser un software con un enorme potencial y posibilidades para ser usado en el aula de matemáticas. En Conejo y Arce (2018) mostramos también algunos ejemplos del potencial de este programa en la formación inicial de EPM. Aquí, explotaremos su potencial como *software de geometría dinámica*, que permite no solo realizar construcciones geométricas, sino también dinamizarlas manteniendo las propiedades que se definieron en su construcción, lo que facilita indagar, identificar relaciones y poder enunciar y comprobar conjeturas.

Aspectos relevantes en el diseño de actividades para conjeturar y demostrar

Las actividades que vamos a presentar han sido diseñadas siguiendo varios de los principios establecidos por Lin et al. (2012) para el diseño de tareas basadas en conjeturar y demostrar, tareas necesarias para desarrollar el pensamiento matemático y los modos en que se produce conocimiento en matemáticas.

Lin et al. (2012) proponen principios para el proceso de conjeturar, para una transición adecuada entre conjeturar y probar, y para el proceso de probar. Para la parte vinculada a la conjeturación, la tarea ha de proporcionar oportunidades a los estudiantes para conjeturar a partir de la observación y la construcción indagatoria, para lo cual un software de geometría dinámica como GeoGebra es muy útil para descubrir patrones o relaciones. Además, la tarea también ha de facilitar que los estudiantes movilicen y transformen sus conocimientos previos y que puedan reflexionar sobre el proceso de conjeturación y las conjeturas encontradas. Para esta reflexión, algunas preguntas interesantes son: "¿Está la conjetura enunciada de la forma lo más clara posible?", "Explica por qué crees que tu conjetura es cierta en estas condiciones. ¿Seguirá siendo cierta si las condiciones cambian?" "¿Es posible generalizar la conjetura? ¿Hay algún caso en que esta no sea cierta?"

Para el proceso de transición de la conjeturación a la demostración, proceso complejo para los estudiantes, Lin et al. (2012) defienden que la tarea ha de generar al estudiantado una necesidad de realizar dicha transición. Esto debe tenerse especialmente en cuenta cuando se hace uso de un software de geometría dinámica, puesto que su uso puede reforzar los esquemas de prueba inductivos, a través de la comprobación de patrones o relaciones dinamizando las configuraciones geométricas construidas. Esa necesidad puede ser intelectual, promoviendo conflictos cognitivos en el alumnado (por ejemplo, a través de relaciones o reglas que no sean siempre válidas) o la necesidad de explicar por qué se da cierta relación (con un foco en la estructura y general, y no particular). Pero también puede ser social, cuando el profesor establece una serie de normas para aceptar o rechazar conjeturas producidas por el alumnado, normas que estén basadas en el modo en que se valida conocimiento en matemáticas. De hecho, la dificultad de esta transición sugiere considerar necesidades de ambos tipos en el trabajo en el aula de la misma.

Para el proceso de demostración de las conjeturas, Lin et al. (2012) plantean varios principios útiles. Las tareas han de ofrecer oportunidades para clasificar enunciados matemáticos, y trabajar cuándo un enunciado matemático es verdadero o falso atendiendo al lenguaje lógico utilizado (por ejemplo, cuantificadores universales o existenciales). También han de facilitar la expresión de argumentos utilizando sistemas de representación variados (simbólicos, gráficos, verbales…), así como hacer que los estudiantes adopten roles tanto de generadores de pruebas de demostraciones como de evaluadores de demostraciones realizadas por sus pares.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES PARA TRABAJAR LOS PROCESOS DE CONJETURAR Y DEMOSTRAR

Como se deriva del apartado anterior, no cualquier actividad matemática resulta igualmente relevante para estimular la competencia específica del razonamiento y prueba en el alumnado. A continuación, se presentan algunos ejemplos de actividades diseñadas, con el apoyo de GeoGebra, para trabajar los procesos de conjeturar y demostrar en el marco de la asignatura sobre geometría y su didáctica presente en el Grado en Educación Primaria en la Universidad de Valladolid. Estas actividades fueron implementadas con estudiantes del grado, sin embargo, por los contenidos trabajados y el enfoque, consideramos que podrían ser utilizadas en los últimos cursos de Educación Primaria o primeros cursos de Educación Secundaria en función de la actividad. Conviene tener en cuenta que para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático necesario para razonar y demostrar y la necesidad de las demostraciones como forma de validar el conocimiento, los estudiantes deben ser expuestos repetidamente a este tipo de tareas, y no de manera puntual y esporádica, teniendo también presente la importancia de comunicar y compartir las conjeturas halladas y los razonamientos propuestos.

Los ejemplos que aquí se presentan, y algunos otros que no se exponen, son planteados a lo largo de la asignatura para favorecer las destrezas de justificación y la evolución de los esquemas de prueba inductivos a otros axiomáticos, en el que el convencimiento y persuasión se genera a través de razonamientos deductivos, lo que favorece el desarrollo del conocimiento de la práctica matemática (KPM) de los EPM. Además, con estas actividades también pretendemos desarrollar el (re)descubrimiento y la mayor comprensión del conocimiento geométrico puesto en juego, vinculado al conocimiento de los temas (KoT).

Actividades para conjeturar y demostrar relaciones angulares en la circunferencia

Un primer grupo de tareas está vinculada a la conjeturación y demostración de dos relaciones angulares en la circunferencia: el teorema del ángulo inscrito y el teorema del ángulo exterior. El planteamiento trata de seguir los principios indicados por Lin et al. (2012) para diseñar este tipo de tareas. Estas relaciones angulares suelen ser muy desconocidas para gran parte de los EPM, lo que favorece afrontar el proceso de descubrimiento y conjeturación de las mismas.

En el caso del teorema del ángulo inscrito, el guion de tareas diseñado comienza con una fase de conjeturación, dividida en dos etapas. En la primera, los EPM trabajan individualmente en papel, donde han de dibujar ángulos inscritos y sus ángulos centrales correspondientes, usando útiles de dibujo, y han de establecer una conjetura sobre la relación de sus amplitudes. En la segunda, trabajan por parejas sobre un applet GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/ukrfyber) en el que están construidos un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente, que pueden dinamizar para indagar la relación existente entre las amplitudes y ratificarse o cambiar la conjetura antes enunciada. Además, en ambas fases, tras establecer la conjetura se hacen tres preguntas a los EPM, destinadas a poder obtener información sobre sus esquemas de prueba, que están inspiradas en una investigación de Stylianides y Stylianides (2009) con estudiantes para profesor:

- ¿En qué grado estás convencido (estás seguro de que es así) de que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?
- ¿Crees que está suficientemente probado que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?

- Si crees que podrías estar más convencido y/o que se podría probar mejor que la conjetura que has hecho es cierta, ¿qué habría que hacer para lograrlo?

El rol de GeoGebra como software de geometría dinámica ayuda a detectar y/o refinar la relación de amplitud conjeturada, aunque el razonamiento usado es de tipo inductivo. Estas preguntas tienen por objeto conocer si para los EPM este tipo de razonamiento sería suficiente para estar convencido del resultado o darlo por probado, o no. Un alto número de EPM suelen contestar que sí, mostrando un esquema de prueba inductivo que, también, a través de este tipo de tareas buscamos revisar.

Posteriormente, se pasa a un nuevo applet GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/zc8xdx3z), en el que se comienza planteando una pregunta abierta que pretende favorecer la transición entre conjetura y prueba, para reflexionar sobre por qué puede darse y mantenerse esta relación, tratando de avanzar hacia una justificación general. Tras ella, comienza la fase de demostración, donde a través de preguntas se busca que los EPM movilicen el conocimiento necesario para construir una justificación del caso más sencillo (aquel en el que uno de los lados del ángulo contiene al centro de la circunferencia, parte izquierda de la Figura 1), y posteriormente usar ese caso para intentar construir una justificación cuando el centro de la circunferencia está dentro del ángulo inscrito (parte central de la Figura 1) o fuera de él (parte derecha de la Figura 1). Tanto en el applet anterior como en este, los EPM trabajan por parejas, lo que también les obliga a comunicar sus hallazgos o ideas, y confrontarlas con la pareja, que puede actuar también como evaluador de las mismas. En la parte final de este applet se vuelven a formular las preguntas sobre convencimiento y validez antes indicadas, y se solicita una aplicación del teorema ya demostrado para justificar por qué es rectángulo el triángulo inscrito en la circunferencia donde uno de sus lados es un diámetro.

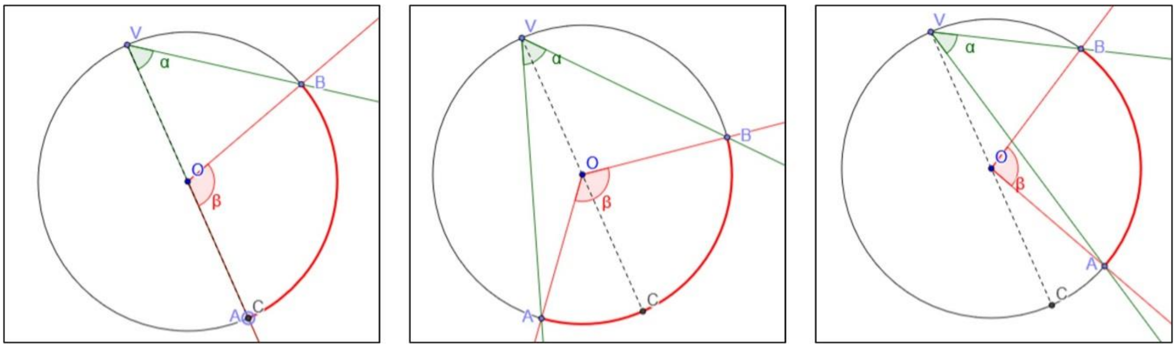


Figura 1. Los tres casos de la demostración del teorema del ángulo inscrito

Para el teorema del ángulo exterior, también hemos diseñado e implementado tareas basadas en un par de applets GeoGebra, con una estructura muy similar a los anteriores. El primero de ellos, https://www.geogebra.org/m/q7dg329t, está centrado en la fase de conjeturación, en la que pueden apoyarse de un applet en que se ha construido un ángulo exterior a una circunferencia y sus dos centrales correspondientes, y los estudiantes pueden dinamizar la figura para tratar de encontrar alguna relación entre las amplitudes. Además de la verbalización de la conjetura, se acompañan de nuevo las tres preguntas sobre convencimiento y validez antes indicadas. En este caso, al ser una relación de amplitudes más compleja, los EPM suelen necesitar más tiempo para encontrarla, o algún tipo de apoyo en forma de pista. El segundo de los applets, https://www.geogebra.org/m/vah4tfn3, está centrado en la fase de demostración, donde se van planteando diferentes preguntas vinculadas a los pasos de la misma, con una serie de botones que ayudan a destacar las relaciones clave por paso.

Actividades para conjeturar y demostrar propiedades de los polígonos

Un segundo grupo de tareas se plantearon en torno a los polígonos, para conjeturar y demostrar algunas propiedades. La primera tarea busca responder a la pregunta sobre el número de diagonales diferentes tiene un polígono *n* lados; la segunda plantea la pregunta sobre la suma de ángulos interiores de un polígono de *n* lados y la tercera busca indagar la relación que deben cumplir *n* y *m* para que la relación *n*/*m* dé lugar a un polígono estrellado (donde *n* es el número de vértices del polígono regular convexo del que se parte para construirlo y *m* el salto entre vértices). Todas ellas siguen un esquema similar: se plantea la pregunta, para permitir a los alumnos la exploración libre de las mismas y la elaboración de conjeturas propias, para luego dar a los estudiantes un applet con GeoGebra y un guion que ayude a los mismos a construir el razonamiento que los lleva a la respuesta correcta. En los siguientes enlaces se pueden consultar los guiones de las tareas propuestas junto con sus applets GeoGebra:

- Diagonales en un polígono de *n* lados: https://www.geogebra.org/m/czp7k57b
- Suma de los ángulos interiores de un polígono: https://www.geogebra.org/m/krvvmq76
- Polígonos estrellados: https://www.geogebra.org/m/ptkz9wr2

En las dos primeras tareas suele observarse que algunos alumnos ya conocen que existe una relación entre el número de lados y el número de diagonales o la suma de los ángulos interiores de un polígono, incluso algunos recuerdan la expresión algebraica que describe dicha relación. Aunque en estos casos la fase de conjetura no se desarrolla plenamente pues están condicionados por su conocimiento previo, el resto de la actividad permite explicar el porqué de la expresión algebraica, lo que pone el foco en esa necesidad intelectual de la demostración no para adquirir convencimiento, sino para encontrar razones que expliquen y justifiquen las conjeturas realizadas. En ambos casos, el applet GeoGebra no solo está construido para poder comprobar lo que sucede en diferentes ejemplos, sino para encontrar relaciones que son la base de la demostración de las propiedades abordadas.

En la tercera tarea, sin embargo, al tratarse de una relación mucho menos conocida y trabajada en educación preuniversitaria, los estudiantes formulan múltiples conjeturas en torno a la tarea planteada (*n* y *m* deben ser los dos impares, o uno par y otro impar…) que pueden ser refutadas fácilmente con la ayuda del applet GeoGebra. En este caso el guion de preguntas no conduce tanto a la construcción de la relación, pero sí permite desechar todas aquellas conjeturas no válidas hasta encontrar una correcta y, en este caso, la demostración sí es necesaria para lograr convencimiento sobre la tarea propuesta (necesidad intelectual). Además, el guion de tareas permite establecer conexiones con otros conceptos matemáticos, como las fracciones irreducibles, lo que pone en juego el conocimiento de otros subdominios dentro del conocimiento matemático, como el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM). Además, en la última parte en la que se establece una definición para un objeto nuevo, el polígono silueta (Figura 2), se busca relacionar el conocimiento desarrollado en las tareas sobre relaciones angulares en esta nueva situación.

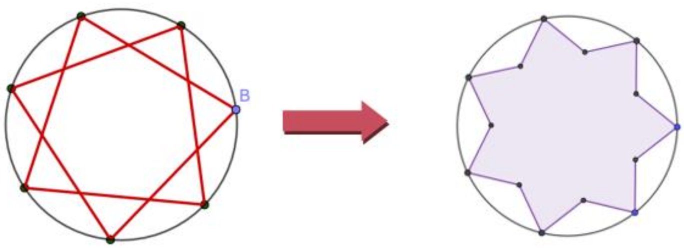


Figura 2. Polígono silueta obtenida a partir de la superficie delimitada por el polígono estrellado 7/2

Actividades para trabajar la variabilidad de magnitudes

Un tercer grupo de tareas están asociadas a conjeturar y demostrar propiedades sobre el mantenimiento o variación de magnitudes, como el perímetro o el área, en figuras geométricas. En estas tareas, el rol de GeoGebra es algo diferente, puesto que se usa para realizar construcciones y para comprobar conjeturas en relación con este mantenimiento o variación de magnitudes.

Una de las tareas comienza con el planteamiento de la imagen mostrada en la Figura 3 (figura de la izquierda), donde los estudiantes han de describir los elementos geométricos que en ella identifican y conjeturar qué relación existe entre el área de la región lila y el de la región amarilla. A continuación, se hace uso de GeoGebra solicitando a los estudiantes que realicen una construcción similar con GeoGebra. La visualización de la relación de paralelismo entre los segmentos AB y DC habilita una descomposición en triángulos rectángulos, para posteriormente establecer un isomorfismo entre ellos, que le permitirá demostrar que las áreas son idénticas.

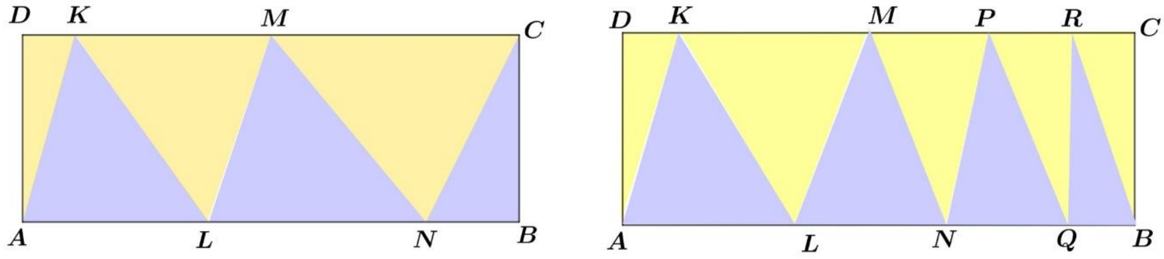


Figura 3. Imágenes presentadas a los estudiantes para conjeturar propiedades asociadas al área

Tras esto, se presenta a los estudiantes la imagen de la derecha de la Figura 3, tratando de avanzar en la generalización del resultado. La cuestión se dirige ahora a si la relación de áreas está afectada por la cantidad de triángulos involucrados en la figura. Nuevamente, se insta a conjeturar al respecto para, después, acudir a GeoGebra, modificar su construcción inicial y, visualizando la imagen resultante, se espera que el alumnado sea capaz de identificar que la relación entre las áreas se preserva con independencia del número de triángulos, y ser capaz de explicar por qué.

Posteriormente, para continuar con la generalización de la conjetura, se pone el acento sobre la disposición de los triángulos y no sobre su cantidad. De este modo, pedimos una nueva conjetura al alumno sobre si la relación entre las áreas varía si se desplazan los vértices sobre las bases del rectángulo. Una vez realizada la conjetura, los estudiantes pueden apoyarse en la dinamización de sus construcciones con GeoGebra, arrastrando los vértices de las figuras en las bases AB y DC, y ver qué sucede, buscando no solo la comprobación sino el ser capaz de encontrar una explicación de la relación entre los triángulos que permita construir una justificación rigurosa de la conjetura.

Como colofón a esta tarea, se solicita a cada estudiante que describa el proceso que ha seguido desde las conjeturas iniciales a las pruebas finales, pasando por los procesos intermedios de construcción sobre los que se edificarán las demostraciones matemáticas formales.

Una tarea más, correspondiente a este grupo, está vinculada a la configuración de la Figura 4, donde M y N son los puntos medios de los segmentos AP y BP, respectivamente. Si en esa configuración se mueve el punto P a lo largo de una paralela al lado AB, se solicita a los estudiantes conjeturar si las siguientes cuatro proposiciones son verdaderas o falsas, justificando razonadamente su valor de verdad: (a) El perímetro del triángulo PAB cambia, (b) El área del triángulo PAB no cambia, (c) El área del trapecio ABNM cambia, y (d) La longitud del segmento MN cambia.

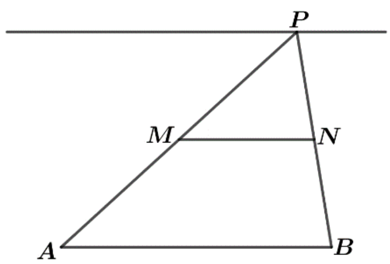


Figura 4. Configuración para esta tarea, donde P se mueve en una paralela al lado AB

Además de reflexionar sobre la veracidad o falsedad de las proposiciones planteadas, a partir de la visualización de la configuración, también es importante realizar un trabajo de reflexión sobre las posibles relaciones que existen entre ellas; esto es, sobre si la verdad o falsedad de una de ellas afecta al valor de verdad del resto, y de qué manera lo hace. Este hecho pretende también evitar posibles contradicciones en las respuestas que se den por separado a cada una de las cuatro proposiciones, abordando y revisando las mismas en caso de que se produzcan.

Después, se solicita al estudiante que realice la construcción de la configuración con GeoGebra y que manipule la figura moviendo el punto P, lo que le permitirá observar, a través de la comprobación de casos particulares, si se verificaban o no cada una de sus conjeturas. En el caso de que las proposiciones que se cumplan estén asociadas a que la longitud, el perímetro o el área sí que varía (como sucede con el perímetro del triángulo PAB), el uso de GeoGebra ayuda a encontrar contraejemplos que permiten confirmar la veracidad de la proposición (a). Sin embargo, en el caso de que se mantengan las medidas de las magnitudes, la comprobación en casos particulares (razonamiento inductivo) no permite demostrar este hecho, siendo necesario encontrar una justificación deductiva y general que los explique, y prestando especial cuidado a aquellos aspectos que pudiesen comprometer el mantenimiento de las medidas.

Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P. Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Conejo, L. y Arce, M. (2018). GeoGebra como herramienta didáctica en la formación profesional de maestros de Educación Primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán” (Eds.), *XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León* (pp. 71-80). Universidad de León.

Consejería de Educación de Castilla y León (2022a). DECRETO 38/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación primaria en la Comunidad de Castilla y León. En *Boletín Oficial de Castilla y León del viernes 30 de septiembre* (pp. 48316-48849). Autor.

Consejería de Educación de Castilla y León (2022b). DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. En *Boletín Oficial de Castilla y León del viernes 30 de septiembre* (pp. 48850-49542). Autor.

Consejería de Educación de Castilla y León (2022c). DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. En *Boletín Oficial de Castilla y León del viernes 30 de septiembre* (pp. 49543-50352). Autor.

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57-69). Dykinson.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Information Age Publishing.

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1-16.

Lin, F-L., Yang, K-L., Lee, K-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305-325). Springer.

NCTM (2003). *Principios y estándares para el aprendizaje de las matemáticas* (Traducción de la SAEM Thales). Autor.

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314-352.

Para hacer referencia al artículo:

Arce, M., Conejo, L., Cuida, A. y Sanz, H. (2022). Diseño y aplicación de actividades con GeoGebra para trabajar los procesos de razonamiento y prueba con futuros maestros. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada GeoGebra de Castilla y León (pp. 176 - 184). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

IMPLEMENTACIÓN DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON ALUMNOS DE TERCERO DE SECUNDARIA. EL PROYECTO DEL HUERTO ESCOLAR

Agustín Méndez Andrade[a], Martha Helena Ramírez Bahena[b], José María Chamoso Sánchez[b] y María Mercedes Rodríguez Sánchez[b]

[a]Colegio Las Hayas, [b]Universidad de Salamanca.

Resumen

Incluir contextos reales en la educación matemática ha cobrado importancia en los últimos años y la modelación se inscribe en dicha tendencia internacional. Una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representar mediante modelos matemáticos. De esta manera, y teniendo como finalidad que los alumnos de tercer año de secundaria del Colegio Las Hayas pudieran resolver un problema del huerto escolar, se elaboró e implementó una situación de aprendizaje basada en la modelización matemática, la cual consta de seis actividades que van llevando a los estudiantes por el proceso de la modelización, haciendo uso de temas y conceptos matemáticos como: figuras semejantes, proporcionalidad, análisis de la información y resolución de problemas. Los resultados han sido satisfactorios, permitiendo a los alumnos utilizar las matemáticas en una problemática real.

Palabras clave: *resolución de problemas, contextos reales, modelización.*

INTRODUCCIÓN

Incluir contextos reales en la educación matemática (Chamoso et al., 2005) ha cobrado importancia en los últimos años y la modelación se inscribe en dicha tendencia internacional. De acuerdo a Trigueros, M. (2009), una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representar mediante modelos matemáticos. Los modelos matemáticos aparecen cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es imperativo hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales y sociales, por lo que ayudan a generar un pensamiento crítico frente a demandas sociales y democráticas (Skovsmose, O. 1999); de igual forma, el uso de modelos matemáticos en el aula ayuda a relacionar las matemáticas con situaciones de la vida real (Daher, W., y Awawdeh, J. 2015), motiva el aprendizaje y genera mayor interés en la materia (Blomhoj, M. 2004).

Con la finalidad de proporcionar a los estudiantes las herramientas necesarias para comprender la relevancia de los procesos de modelización, sea en su vida académica o en su día a día, se hace necesario trabajar con ellos desde el aula de educación básica.
El proceso de modelación que se utiliza en este trabajo es el de Blum, W. y Leiss, D. (2007), Figura 1; este proceso de modelación se ha aplicado con estudiantes de nivel secundaria.

Un contexto real: el huerto escolar

El proyecto del huerto escolar ofrece a los estudiantes un contexto real en donde pueden aplicar los conocimientos adquiridos en diferentes áreas como las matemáticas, tecnología, geografía y biología, para resolver problemas concretos. Favorece el pensamiento crítico ya que los alumnos analizan y reflexionan situaciones problemáticas reales, reconociendo aspectos favorables y desfavorables que se presentan; realizan investigación en diferentes fuentes generando un criterio propio que les ayuda a la toma de decisiones con una visión más amplia al trabajar en equipos cooperativos y colaborativos y comunican sus resultados de manera ordenada.

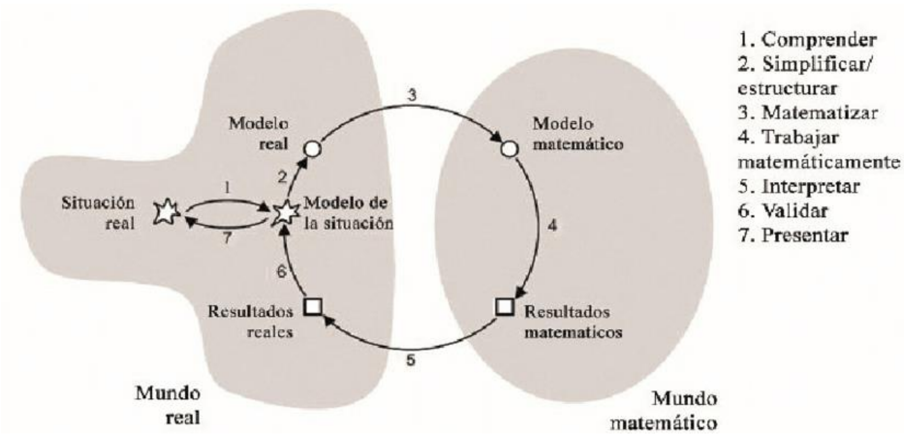


Figura 18. Proceso de modelado de Blum y Leiss (2007).

En la investigación realizada con estudiantes de tercero de secundaria, se utilizó la problemática presentada en el huerto escolar en la asignatura de tecnología, la cual consiste en encontrar las mejores condiciones para obtener la mejor cosecha. Por lo que se elaboró una situación de aprendizaje que permitiera utilizar el proceso de modelización matemática en la resolución del problema, para sistematizar el proceso de siembra de hortalizas y poder utilizarlo con las siguientes generaciones, utilizando la metodología de aprendizaje cooperativo y colaborativo.

PROPUESTA DE SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

A continuación, se describe una secuencia didáctica estructurada en 6 actividades de aprendizaje. Su implementación sucedió en el horario de clases en la asignatura de matemáticas llevándose a cabo 2 veces a la semana; dicho proceso se estima en un tiempo de 11 sesiones de 50 minutos cada una en el salón de clases y/o centro de cómputo (proceso teórico), además de considerarse un mes y medio de la puesta en práctica (siembra y cosecha) en el huerto escolar.

El trabajo se propuso en equipos colaborativos de 4 estudiantes cada uno, los cuales fueron siempre los mismos durante todas las sesiones; se utilizó *Google Classroom* para publicar las actividades y para que los estudiantes registraran todo el proceso realizado como evidencias de trabajo con la finalidad de evaluar el proyecto; se les mencionó que el proyecto se incluiría en el porcentaje de trabajo en clase, junto con las demás actividades realizadas durante el trimestre.

Actividad 1 Comprender. Presentación de la problemática y generación de hipótesis

En esta actividad se presenta la problemática que tienen que resolver, la cual consiste en obtener la mayor cantidad posible de rábanos teniendo en cuenta las condiciones específicas con las que se cuenta para el proceso de siembra. Se pretende que los estudiantes reflexionen respecto al proceso que se debe emplear para la realización de una siembra y cosecha de determinado producto.

Tiempo estimado: 50 minutos.

Objetivos:

- Identificar aspectos importantes que influyen directamente en la problemática (variables).
- Elaborar un plan de trabajo.

Material necesario: libreta, lápiz, dispositivo móvil, pizarrón y/o proyector, conexión a internet.

Inicio

Se les presenta a los estudiantes la problemática que se va a tratar y se les solicita que reflexionen, de manera individual, respecto al proceso que se debe seguir en la siembra de rábanos, las posibles dificultades, así como de aspectos indispensables con los que se debe contar para tener una buena cosecha. Un punto importante en el que se debe centrar la reflexión es en la identificación de variables (por ejemplo, tiempo de riego de la cosecha, tipo de tierra empleada, la forma de sembrado de la semilla, la cantidad de semillas por metro cuadrado, espacio entre planta y planta, etc.) que intervienen directamente en el proceso.

Desarrollo
En equipo, se comentan los puntos de vista y elaboran por escrito un proceso a seguir de la siembra de rábanos, identificando posibles causas de una mala cosecha, e intentando dar soluciones y generar algunas hipótesis.
Con la finalidad de apoyar en el proceso se proporciona a los estudiantes una lista de cotejo la cual contiene aspectos como:

- Consideraron al menos 5 aspectos importantes en el proceso de la siembra de rábanos; el plan de trabajo muestra de manera ordenada y clara el proceso a seguir en la siembra de rábanos.

Cierre

En equipo se co-evalúan apoyándose en la lista de cotejo.

Actividad 2 Simplificar/estructurar. Investigación y elección de las variables

Para que los estudiantes conozcan el proceso de la siembra de rábanos y la realicen de mejor manera, es necesario que busquen información en diferentes medios, la cual les facilitará el proceso y evitará que cometan algunos errores; también es importante que comuniquen de manera efectiva su propuesta por lo que en la segunda sesión expondrán brevemente a sus compañeros sus avances y durante la tercera sesión en plenaria se comentarán ideas que ayuden a mejorar el trabajo.

Tiempo estimado: 200 minutos (4 sesiones de 50 minutos).

Objetivos:

- Investigar el proceso de siembra de rábanos e identificar nuevas variables.
- Elaborar un informe de investigación.

Material necesario: bitácora física (libreta), centro de cómputo con internet, biblioteca escolar, dispositivo móvil o equipo de cómputo, conexión a internet.

Inicio

El grupo se traslada al centro de cómputo; por equipo se les asignan dos computadoras con acceso a internet y se les pide que realicen una investigación del proceso de la cosecha de rábanos, la cual debe incluir al menos la siguiente información: cuidados necesarios, condiciones de siembra, tipo de riego, tiempo que transcurre de la siembra a la cosecha, entre otros aspectos que sean de importancia y/o interés para ellos. Además, a manera de guía para la realización de la investigación, se les proporciona una rúbrica que contiene algunos de los siguientes rubros:

- Tiene una introducción bien redactada; cuenta con planteamiento del problema de forma clara y precisa; los objetivos son claros y posibles de cumplir y medir; cuenta con información del tema obtenida de fuentes fiables que fundamentan y guían la investigación.

Desarrollo

En la segunda sesión, los estudiantes exponen brevemente al grupo el rumbo de su investigación con la finalidad de recibir retroalimentación de los compañeros de grupo y servir de ayuda en la investigación de sus compañeros.

Cierre
Entrega del informe de investigación en formato digital.
Algunos aspectos a considerar
Los estudiantes pueden hacer uso de su dispositivo móvil para facilitar la investigación, o trasladarse a la biblioteca escolar.

Actividad 3 Matematizar. Delimitación del problema y elaboración del modelo

El informe de investigación ayuda para que los estudiantes tengan una visión más amplia de la problemática a la que se enfrentan y puedan considerar otros aspectos que son relevantes y que no se consideraron en un primer momento de la reflexión; además, ayuda al profesor a visualizar la dirección que podrían tomar los estudiantes en la elaboración de su modelo matemático.
Tiempo estimado: 100 minutos (2 sesiones de 50 minutos).
Objetivos:

- Delimitar el problema.
- Elaborar figuras semejantes; uso correcto de razones y proporciones.

Material necesario: bitácora física (libreta), juego de geometría, herramientas de medición (metro, flexómetro, cuerdas, etc.), dispositivo móvil.

Inicio

En equipo los estudiantes comentan el proceso a seguir de la siembra de rábanos y en caso de ser necesario, realizarán modificaciones.

Desarrollo

El grupo se traslada al huerto escolar; con ayuda de flexómetros y otros instrumentos de medición, por equipo, obtienen con la mayor exactitud posible las medidas del largo y ancho del huerto, así como de sus camas de sembrado y otros puntos de referencia que necesiten. De manera individual se realiza una figura semejante del huerto, considerando una escala razonable y a conveniencia que incluya medidas y a manera de evidencia fotografías del huerto escolar. Se les proporciona a los equipos una lista de cotejo que contiene entre otros puntos los siguientes:

- ¿Mediste con la mayor exactitud posible todas las partes del huerto?, ¿escribiste todas las medidas a las figuras semejantes?, ¿tomaste dos o más fotografías del huerto en diferentes ángulos?, ¿utilizaste juego de geometría o usaste algún software en la elaboración de las figuras semejantes?

Cierre
La entrega individual de las fotografías y figura semejante con medidas en formato digital.
Algunos aspectos a considerar
Cuidar que se realicen las mediciones del huerto con la mayor exactitud posible y que se registren los datos de manera correcta. Pedir con anticipación las herramientas de medición como son flexómetro y juego de geometría. Los estudiantes tienen la libertad de realizar el plano del huerto con el programa AutoCad, scratch, geogebra o en algún otro que conozcan.

Actividad 4 Matematizar y trabajar matemáticamente. Elaboración del modelo

La figura semejante junto con las fotografías del huerto facilita la organización y distribución de las dimensiones que cada equipo puede trabajar; así mismo, los estudiantes pueden realizar diferentes tipos de cálculos y/o estimaciones sin necesidad de estar físicamente ahí.

Tiempo estimado: 150 minutos (3 sesiones de 50 minutos).

Objetivos:

- Usar adecuadamente razones y proporciones.
- Calcular y estimar medidas utilizando procesos matemáticos (aritméticos y/o algebraicos).

Material necesario: bitácora física (libreta), juego de geometría, dispositivo móvil o equipo de cómputo.

Inicio

Considerando la porción del huerto que les corresponde a cada equipo sembrar, reflexionan y comentan la mejor forma en que se debe sembrar las semillas de manera que se obtenga la mayor cantidad posible de plantas.

Desarrollo

Justificar que la forma elegida para sembrar la semilla es la que, de acuerdo a su criterio, mejor resulta. Pueden apoyarse en la figura semejante para realizar la distribución elegida; realizar un estimado de plantas de rábano que se pueden obtener por metro cuadrado, mostrando el proceso y cálculos empleados (lo más detallado, ordenado y exacto posible). La estimación debe ser realista y considerando la información obtenida en las actividades anteriores. Generalizar el resultado de manera que se pueda obtener una estimación de plantas si se contara con mayor cantidad de terreno, por ejemplo, una hectárea.
Incluir en la figura semejante la forma en que se distribuirán las semillas incluyendo las medidas reales, de forma que cuando se realice la siembra, se cuente con la información necesaria.
Elaborar una infografía que muestre los aspectos más importantes del proceso realizado en el proyecto del huerto escolar. Se les proporciona a los estudiantes una rúbrica para la elaboración de la infografía que incluye algunos de los siguientes puntos:

- Contiene imágenes adecuadas en cuanto al contenido; la información está muy bien organizada, es muy clara y fácil de leer; se citan fuentes de información.

Cierre
La entrega de la estimación de plantas de rábanos a obtener y la infografía se realizará de manera digital.
Algunos aspectos a considerar
Se puede dar el caso que los estudiantes propongan el tipo de siembra de tresbolillo con el cual se pueden retomar conceptos como las características de los triángulos equiláteros o el uso del teorema de Pitágoras para obtener la altura del triángulo.

Actividad 5 Interpretar. Implementación

Durante el proceso de modelización se consideran varios aspectos que están incluidos en el plan de estudios en la materia de matemáticas como lo son las figuras semejantes, proporcionalidad directa, razonamiento lógico y matemático, resolución de problemas, características de triángulos, ecuaciones lineales, teorema de Pitágoras, modelización de situaciones, por lo que es momento de implementarlo en el huerto escolar.

Tiempo estimado: 50 minutos.

Objetivos:

- Implementar el trabajo realizado.
- Obtener la mejor cosecha de rábanos posible.
- Evidenciar la importancia del uso de las matemáticas en la vida diaria.

Material necesario: bitácora física (libreta), material para la cosecha: semillas, pala, araña de cosecha, regadera, agua, flexómetro, regla, dispositivo móvil.

Inicio

Cada equipo tiene a la mano todos los datos y medidas necesarias para iniciar con la siembra de las semillas de rábanos.

Desarrollo

Asignación de los lugares correspondientes a cada equipo para realizar la siembra, indicando que se debe documentar el momento de la siembra con fotografías.

Cierre

Entregar los archivos digitales.

Algunos aspectos a considerar

Cuidar que todos los equipos tengan las herramientas necesarias para realizar la siembra.

Actividad 6 Validar y presentar. Obtención e interpretación de datos

El proceso de la siembra de la semilla a la cosecha de rábanos tarda aproximadamente un mes y medio, por lo que es necesario motivar y acompañar a los estudiantes para tener el mejor cuidado posible de la siembra y poder obtener buenos resultados.

Tiempo estimado: Un mes y medio.

Objetivos:

- Implementar y seguir la ruta trazada para obtener la mejor cosecha de rábanos posible.
- Recolectar y analizar datos.

Material necesario: bitácora, regadera y tijeras de jardinería, agua, pala, dispositivo móvil.

Inicio

Durante el mes y medio, los estudiantes tomarán unos minutos de la clase de matemáticas y tecnología para realizar el riego y cuidado del huerto.

Desarrollo

Cuidar las plantas de plagas u otros factores que puedan dañarla. Registrar en la bitácora los días y hora de riego, así como de cualquier aspecto que se considere importantes en el proceso hasta llegar a la cosecha.

Cierre

En equipos los estudiantes realizan la cosecha de rábanos y registran los datos como medida y peso de los rábanos.

Para finalizar

En plenaria se comentan los resultados obteniendo conclusiones del trabajo realizado y si se considera necesario, se repite el proceso.

Algunos aspectos a considerar

En el proceso de modelización el profesor debe estar siempre muy atento al transcurso de todas sesiones monitoreando el trabajo realizado por los estudiantes ya que pueden surgir temas o ideas que no se tenían contempladas, por lo que se recomienda en caso de ser necesario tener una sesión en plenaria y comentar los avances e ideas de cada equipo siendo el profesor el moderador de la sesión.

RESULTADOS

La mayoría de los estudiantes mostraron interés por el proyecto, realizando las actividades propuestas y entregando sus evidencias de trabajo. En la elaboración de la figura semejante al huerto escolar los equipos escribieron las medidas del huerto; sin embargo, ningún equipo consideró mayores detalles como marcar la puerta o la separación de los postes de la malla del huerto, Figura 2.

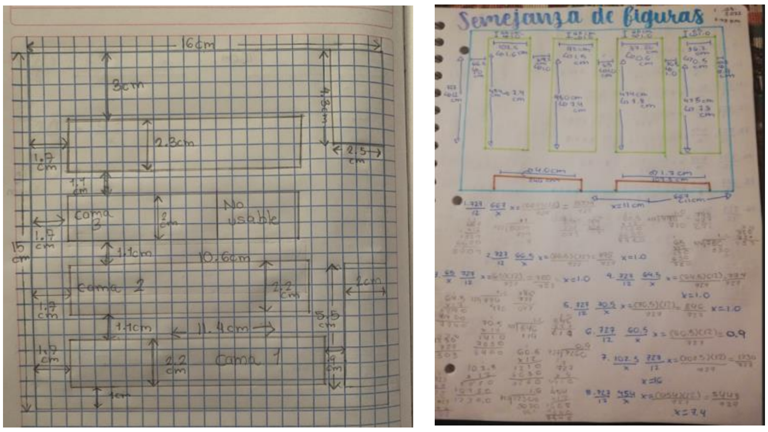


Figura 2. Figura semejante del huerto escolar.

Todos los equipos propusieron sembrar las semillas ordenándolas en filas y columnas, Figura 3. y calcularon el estimado de plantas que podían obtener; la realización de la infografía ayudó a los equipos a recapitular el proceso con la información obtenida en el transcurso de las diferentes actividades.

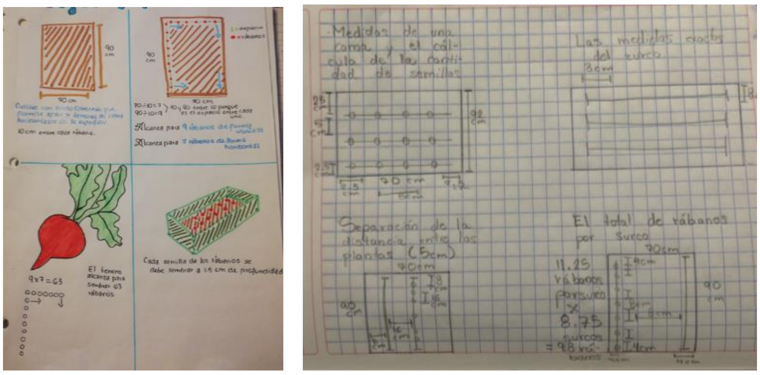


Figura 3. Distribución de semillas en el huerto.

Finalmente, de los 12 equipos que trabajaron en el huerto escolar, 11 pudieron cosechar rábanos obteniéndose en promedio un 60% de la producción que se estimaba obtener, de la cual aproximadamente el 50% de los rábanos contaba con buen tamaño; El cuidado del huerto durante los fines de semana (principalmente la administración de agua a las plantas) se resolvió gracias al apoyo del conserje del colegio. Figura 4.

Figura 4. Cosecha de rábanos y equipos colaborativos.

CONCLUSIONES

En el proyecto del huerto escolar, los estudiantes del colegio hicieron uso de las matemáticas, la biología, geografía y tecnología para resolver un problema real, utilizando el proceso de modelación matemática, favoreciéndose el trabajo colaborativo y la participación total del grupo. Ayudó a los estudiantes a encontrarle una utilidad a las matemáticas y les aportó herramientas que les serán útiles en la vida, en particular en la toma de decisiones.

Algunas limitantes que se tuvieron durante la realización del proyecto fueron que el espacio destinado para cada equipo en el huerto escolar durante la siembra resultó pequeño, ya que al mismo tiempo se realizaba otro proyecto con estudiantes de diferentes grados los cuales ocuparon la mitad del huerto. Así mismo, la inasistencia a clases de algunos estudiantes propició la entrega a destiempo de productos de aprendizaje en su equipo, así como el descuido del proceso de siembra, en particular, del regado de las plantas.

Para la realización de futuros proyectos del huerto escolar se podría considerar realizar la siembra en una mayor región para tener una cosecha más abundante; así mismo, se considera oportuno la realización de un sistema de riego para optimizar la cantidad de agua requerida por cada planta el cuál puede ser objeto de estudio de un nuevo modelo matemático; además, se puede involucrar en el proyecto de manera activa a profesores de otras materias como biología, geografía y español para que de manera transversal se favorezca la obtención del conocimientos en los estudiantes.

Referencias

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby, y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Blum, W., y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan, editors, *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics: Proceeding from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Aplications*, pages 222-231, 2007.

Chamoso, J.; Graña, B.; Rodríguez, M. y Zárate, J. (2005). *Matemáticas desde la prensa*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.

Daher, W, y Awawdeh, J. (2015). Pre-service teachers´modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 25-46.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Trigueros, M. (2009). *El uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas*. Innovación Educativa, 9(46), pp. 75-87.

Para hacer referencia al artículo:

Agustín Méndez Andrade, Martha Helena Ramírez Bahena, José María Chamoso Sánchez y María Mercedes Rodríguez Sánchez (2022). Implementación de la modelización matemática con alumnos de tercero de secundaria. El proyecto del huerto escolar. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 185 - 192). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

UN PASEO POR LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Autora[a]: Teodora Egido de la Iglesia

IES F. García Bernalt. Junta de Castilla y León

Resumen

En esta comunicación se va a presentar los trabajos colaborativos que se hicieron el curso 2021/2022 en el IES F. García Bernalt. Para realizar dicho trabajo los alumnos eligieron un matemático, investigaron su obra y elaboraron un Canva individual en el que se recopilaron los datos más relevantes de dicho matemático. Se crearon dos Padlets colaborativos de cada grupo.

Palabras clave: *historia, matemáticas, secundaria, trabajo colaborativo.*

¿QUÉ VAMOS A HACER?

Se hará un breve recorrido por la historia de las Matemáticas a través de la figura de diversos matemáticos, elegidos por los chicos, y sobre los que van a realizar su investigación. Para ello se les muestra a los alumnos la página Timeline of Mathematics | Mathigon, que es una línea del tiempo en la que se muestran los matemáticos y sucesos más famosos de la historia matemática ordenados cronológicamente. Dado que se realizó en dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria, dividimos el trabajo en dos partes: la primera de ellas hasta la figura de Leonardo da Vinci y la segunda que comprende los matemáticos posteriores a él.

HERRAMIENTAS UTILIZADAS.

Se han utilizado las siguientes herramientas: la app Canva, la app Padlet, generadores de códigos QR e internet (wikipedia, bibliografías…)

INDICACIONES PARA LOS ALUMNOS

Ya dividido el trabajo en dos partes a los alumnos se les guía en la forma de realizar el trabajo. Primero se elaboró un Padlet en cada uno de los grupos donde tenían que decir el nombre del matemático elegido, fecha de nacimiento y muerte y poner una fotografía del mismo.

Una vez elaborado este Padlet tienen que realizar una investigación sobre el matemático estudiado y plasmarla en un Canva. El enlace de dicho trabajo se pone en un segundo Padlet en el que se ordenaron cronológicamente. En cada tarjeta los alumnos reflejan lo que se le pidió en el Padlet anterior y el enlace al Canva. Para los alumnos del segundo ciclo de ESO se incluyó un código QR que enlazara con su trabajo. La parte del trabajo de este grupo se incluyó en el proyecto de innovación educativa FormApps que se llevó a cabo en el IES F. García Bernalt en el curso 2021/2022.

MATEMÁTICOS ESTUDIADOS

A continuación, se presenta una relación de los matemáticos que fueron objeto de estudio por parte de los alumnos. Es importante recordar que esta elección la hicieron los propios alumnos, por eso muchas veces los matemáticos elegidos difieren de los que escogería un estudioso de la materia Lo que se destaca aquí es lo que reflejan los alumnos.

Thales

Nace en el año 624 a.C. y muere en el año 546 a.C. Destaca por ser uno de los Siete Sabios de Grecia y por sus teoremas (teorema de Tales y la construcción de un ángulo recto en la circunferencia)

Pitágoras

Nace en el año 570 a.C. y muere en el año 495 a.C. Destaca por su famoso teorema de Pitágoras y para el alumno por sus frases: *"No seas ambicioso y tacaño; la justa medida es excelente en tales casos", "No tengas más de una mujer y un amigo" o "Economizad las lágrimas de vuestros hijos para que puedan regar con ellas vuestra tumba".*

Zenón de Elea

Nace en el año 495 a.C. y muere en el año 430 a.C. Destaca por sus complejas paradojas. Aristóteles le llama el inventor de la dialéctica. Se le atribuye un tipo de argumento llamado "ad/absurdum".

Demócrito

Nace en el año 460 a.C. y muere en el año 370 a.C. Es conocido como el "filósofo risueño". Maestro de Protágoras y de Aristóteles tiene gran interés en las cónicas y la geometría sólida. Habla por primera vez de la inercia y pone como realidades primordiales a los átomos y al vacío.

Platón

Nace en el año 425 a.C. y muere en el año 347 a.C. Fue discípulo de Sócrates y maestro de Aristóteles y creador de la Academia. En Matemáticas introduce la teoría que implica que tanto los objetos matemáticos como las leyes matemáticas no se inventan, sino que se descubren.

Aristóteles

Nace en el año 384 a.C. y muere en el año 322 a.C. Fue considerado como el fundador de la lógica ya que planteó un sistema de silogismos. Escribe libros de divulgación de su obra de los cuales sólo se conservan fragmentos.

Euclides de Alejandría

Nace en el año 325 a.C. y muere en el año 265 a.C. Es considerado como "el padre de la Geometría". Escribe los *"Elementos"* donde sus seis primeros libros versan sobre la geometría plana, los siguientes sobre la aritmética, otro sobre las cantidades irracionales y los últimos sobre la geometría en el espacio.

Arquímedes

Nace en el año 287 a.C. y muere en el año 212 a.C. Destaca en aritmética midiendo el área del círculo, en geometría aproximando el valor del número π y precursor del cálculo integral.

Eratóstenes

Nace en el año 276 a.C. y muere en el año 195 a.C. Este matemático, astrónomo y geógrafo griego destaca por crear el procedimiento para calcular los números primos (criba de Eratóstenes), la esfera armilar, el mesolabio o la primera medición de la longitud de la circunferencia de la Tierra.

Pingala

El alumno nos aporta muy poca información. Afirma que vive en el s. III a. C. y que era natural del estado de Kerala.

Ptolomeo

Nace en el año 100 y muere en el año 170 d.C. Se le considera heredero de la concepción del universo de Platón y Aristóteles y destaca como astrónomo, músico, geógrafo, óptico y astrólogo.

Diofanto

Vive en el siglo III. La mayoría de sus trabajos tratan sobre la resolución de ecuaciones polinómicas con varias incógnitas con coeficientes enteros y soluciones enteras. A este tipo de ecuaciones se les conocen como ecuaciones diofánticas hoy en día.

Liu Hui

Nace en el año 225 y muere en el año 295 d.C. Este matemático chino edita el libro llamado *"Los nueve capítulos del arte matemático"* donde introduce comentarios de gran importancia para la estimación de π y que la aproximación a 3.14 era buena.

Hipatia de Alejandría

Nace en el año 360 y muere en el año 415 d.C. Esta mujer hizo grandes aportaciones a la mecánica y mejora los astrolabios. Tiene estudios en geometría, álgebra y astronomía. Tiene también un asteroide y un cráter con su nombre.

Zu Chongzhi

Nace en el año 429 y muere en el año 500 d.C. Continúa con la estimación de π hasta 7 decimales. Para el alumno es importante que un cráter lunar, un asteroide y un procesador cuántico llevan su nombre.

Brahmagupta

Nace en el año 598 y muere en el año 668 d.C. Fue el director del observatorio de Ujjain. Destaca por encontrar formas abstractas de resolver ecuaciones y un lenguaje matemático para expresar la abstracción.

Al-Jwarizmi

Nace en el año 780 y muere en el año 850 d.C. Fue matemático, astrónomo y geógrafo. Es el padre del álgebra e introductor de nuestro sistema de numeración.

Thabit

Nace en el año 826 y muere en el año 901 d.C. Escribe ocho tratados de astronomía, estudia cuestiones de geometría elemental y trata de resolver la ecuación de segundo grado por métodos geométricos

Al-Haythan

Nace en el año 965 y muere en el año 1040 d.C. Fue matemático, astrónomo y físico. Experimentó con prismas, lentes y espejos. Describe la forma correcta de varios planetas adelantándose a Kepler y a Newton.

Bhaskara II

Nace en el año 1114 y muere en el año 1185 d.C. Escribe un tratado sobre aritmética, álgebra, cálculo, trigonometría y astronomía. Establece que la división por cero da infinito y resuelve ecuaciones cuadráticas, cúbicas, cuárticas y diofánticas.

Leonardo Pisano

Nace en el año 1175 y muere en el año 1250 d.C. Este matemático italiano apodado Fibonacci defiendo la utilidad del sistema numérico hindú-árabe sobre los números romanos. Describe la sucesión de Fibonacci y escribe los libros *"Liber Abaci", "Practica Geometriae"," Carta a Teodoro" ...*

Qin

Nace en el año 1202 y muere en el año 1261 d.C. Este matemático chino introduce los cuencos de Tianchi, técnicas para resolver ecuaciones e introduce el símbolo cero en las matemáticas chinas.

Yang Hui

Nace en el año 1238 y muere en el año 1298 d.C. Este matemático estudia el triángulo de Pascal, el binomio de Newton y crea el triángulo de Yang Hui para encontrar raíces cuadradas y cúbicas.

Nicolas de Oresme

Nace en el año 1323 y muere en el año 1382 d.C. Sus principales aportaciones son el descubrimiento de la curvatura de la luz, la teoría de las configuraciones, la inconmensurabilidad de las proporciones o el uso de series convergentes.

Madhava de Sangamagrama

Nace en el año 1350 y muere en el año 1425 d.C. Es el creador de la Escuela de Kerala y padre del análisis matemático de Oriente por haber dado el paso desde los procedimientos finitos hacia el concepto del infinito.

Johann Müller

Nace en el año 1436 y muere en el año 1476 d.C. Fue astrónomo (localiza el cometa Halley) y matemático (estudia las razones trigonométricas). Utiliza la imprenta para divulgar textos científicos.

Luca Pacioli

Nace en el año 1445 y muere en el año 1517 d.C. Este fraile franciscano es conocido como el padre de la contabilidad y precursor de la probabilidad. *"Summa"* es su obra más conocida que contiene dibujos de Leonardo da Vinci.

Leonardo da Vinci

Nace en el año 1452 y muere en el año 1519 d.C. Es el hombre del Renacimiento por excelencia. Busca en las matemáticas un lenguaje para plasmar la realidad, aplica su propia geometría a su pintura en la que se puede encontrar la razón aúrea.

Nicolás Copérnico

Nace en el año 1473 y muere en el año 1543 d.C. Destaca por el estudio de la teoría heliocéntrica del Sistema Solar.

Niccolò Fontana Tartaglia

Nace en el año 1499 y muere en el año 1557 d.C. Tartaglia recibe este apodo debido a su tartamudez. Trabaja en la resolución de ecuaciones de tercer grado.

Gerolamo Cardano

Nace en el año 1501 y muere en el año 1576 d.C. Destaca por la publicación de la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado. En mecánica destaca por la creación del engranaje cardan que lleva su nombre.

Pedro Nunes

Nace en el año 1502 y muere en el año 1578 d.C. Petrus Nonius fue matemático, astrónomo y geógrafo portugués. Fue profesor de la universidad de Salamanca, Lisboa y Coimbra.

François Viète

Nace en el año 1540 y muere en el año 1603 d.C. Trabajó descifrando códigos para Enrique IV, descubre que el valor de π tiene infinitas cifras decimales y usa el álgebra para resolver problemas geométricos.

John Napier

Nace en el año 1550 y muere en el año 1617 d.C**.** Es reconocido por ser el primero en definir los logaritmos simplificando mucho todos los cálculos. Tarda 20 años en madurar sus ideas y gracias a Henry Briggs modifica su escala inicial naciendo los logaritmos decimales.

Galileo Galilei

Nace en el año 1564 y muere en el año 1642 d.C**.** Fue astrónomo (el primero en ver la luna a través del telescopio), ingeniero, físico, filósofo y matemático. Formula las primeras leyes sobre el movimiento.

Johannes Kepler

Nace en el año 1571 y muere en el año 1630 d.C**. A** Kepler se le conoce por las leyes que publicó sobre el movimiento de los planetas y una primera aproximación a la ley de refracción

Marin Mersenne

Nace en el año 1588 y muere en el año 1648 d.C**.** Fue jesuita, filósofo y científico. Descubrió las leyes de los tubos sonoros y las cuerdas vibrantes.

René Descartes

Nace en el año 1596 y muere en el año 1650 d.C**.** Fue matemático y filósofo. Se le conoce como el padre de la geometría analítica. Su frase más célebre es *"Pienso, luego existo"*

Bonaventura Cavalieri

Nace en el año 1598 y muere en el año 1647 d.C**.** Es también jesuita y uno de los precursores del cálculo integral utilizando métodos infinitesimales para resolver problemas de áreas y volúmenes.

Pierre de Fermat

Nace en el año 1601 y muere en el año 1665 d.C. Fue jurista y matemático, hizo grandes aportaciones al cálculo diferencial, a la teoría de probabilidades y a la geometría analítica. Y también hizo a la teoría de números. Célebre es el "último teorema de Fermat": ***"****Si n es un número entero mayor o igual que 3, entonces no existen números enteros positivos x, y, z, tales que se cumpla la igualdad* $x^n+y^n=z^n$ "

John Wallis

Nace en el año 1616 y muere en el año 1703 d.C. Fue matemático y un precursor del cálculo infinitesimal (introdujo la utilización del símbolo ∞ para representar la noción de infinito). También define las secciones cónicas analíticamente y la notación estándar de las potencias.

Blaise Pascal

Nace en el año 1623 y muere en el año 1662 d.C. Fue matemático, físico, filósofo y teólogo. Destaca por descubrir el triángulo de Pascal, la pascalina (primera calculadora aritmética), el principio de Pascal y la unidad de presión "pascal".

Isaac Newton

Nace en el año 1642 y muere en el año 1726 d.C. Fue físico, teólogo, inventor, alquimista y matemático. Newton escribe la ley de la gravitación universal, fundamentos sobre la teoría de la luz y el color y las leyes del movimiento planetario. En Matemáticas destaca por estudiar el cálculo infinitesimal.

Gottfried Leibniz

Nace en el año 1646 y muere en el año 1716 d.C**.** Fue matemático, filósofo y político. Es conocido como "el último genio universal" ... En Matemáticas por su estudio del cálculo infinitesimal y por la invención de una máquina que multiplica, divide y extrae raíces cuadradas. En el cálculo diferencial aporta la resolución de problemas de máximos y mínimos

Abraham de Moivre

Nace en el año 1667 y muere en el año 1754 d.C**.** Este matemático fue pionero en el desarrollo de la teoría de las probabilidades y la geometría analítica.

Chirstian Goldbach

Nace en el año 1690 y muere en el año 1764 d.C**.** Fue matemático y destaca por la conjetura que lleva su nombre *"todos los números pares mayores que dos se pueden representar como la suma de dos números primos"* (Conjetura fuerte de Goldbach). También está la conjetura débil *"todo número impar mayor que cinco puede expresarse como suma de tres números primos"*

Daniel Bernoulli

Nace en el año 1700 y muere en el año 1782 d.C**.** Trabajó en los campos de hidrodinámica y termodinámica. Destaca por el principio de Bernoulli y también trabajó en teoría de probabilidades.

Émilie du Châtelet

Nace en el año 1706 y muere en el año 1749 d.C**.** Esta matemática, física y escritora es conocida por divulgar los conceptos de cálculo diferencial e integral.

Leonhard Euler

Nace en el año 1707 y muere en el año 1783 d.C. Es el gran matemático del s. XVIII, conocido por el número de Euler e, la unidad imaginaria i, la notación matemática con el concepto de función f(x), las funciones trigonométricas, el sumatorio Σ, teoría de grafos, cálculo de variaciones…

María Gaetana Agnesi

Nace en el año 1718 y muere en el año 1799 d.C. Esta matemática es la primera mujer en escribir un tratado de matemáticas. Es conocida por la curva que lleva su nombre.

Johann Lambert

Nace en el año 1728 y muere en el año 1777 d.C**.** Este matemático, físico, astrónomo y filósofo demuestra que π es irracional, que e y π son trascendentes, hace aportes al desarrollo de la geometría hiperbólica y de la astronomía.

Henri Poincaré

Nace en el año 1854 y muere en el año 1912 d.C**.** Poincaré hace contribuciones a la topología algebraica, teoría de funciones, geometría, teoría de números…

Para hacer referencia al artículo:

Teodora Egido de la Iglesia (2022). Un paseo por la historia de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 193 - 198). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

MATEMÁTICAS CON DOÑA URRACA

Mª Consuelo Monterrubio Pérez, Mª Carmen García González, Isabel Gallo Domingo

IES María de Molina de Zamora

Resumen

La motivación es un elemento que favorece el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y el juego constituye un recurso motivador importante. Por este motivo, en este trabajo se presenta un juego formado por una serie de puzles para cuya realización se necesitan diferentes contenidos matemáticos. Además, una vez realizados los puzles, se procede a hacer un juego de memoria que nos lleva a la construcción de otra imagen. Dado que este año se cumple el 950 Aniversario del acontecimiento denominado El Cerco de Zamora, hemos decidido que, en los puzles, y en la imagen construida al final del juego, aparezcan personajes y situaciones de este hecho histórico que dio origen a la frase "Zamora no se ganó en una hora" al poner fin, en octubre de 1072, a un asedio a la ciudad de más de siete meses.

Palabras clave: *matemáticas, secundaria, juego, cerco, Zamora.*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Este año se cumple el 950 aniversario del acontecimiento denominado *Cerco de Zamora.* Desde el área de Matemáticas hemos querido contribuir para que los alumnos conozcan el romancero y esta parte de la Historia que presentamos aquí, muy resumida.

Fernando I, Rey de Castilla, muere en el año 1065, y deja repartida su herencia de la forma siguiente: A Don García le corresponde Galicia; a Sancho II, Castilla; a Alfonso VI, León; a Doña Elvira, Toro y a Doña Urraca, Zamora. Sin embargo, Don Sancho considera que todas las tierras le pertenecen a él y consigue arrebatar a sus hermanos Galicia, León y Toro. Don Sancho puso cerco a Zamora. El asedio se alargaba en el tiempo y el hambre empezaba a causar estragos. Entonces Vellido Dolfos se unió a las huestes de D Sancho. Tras ganarse su confianza y con la excusa de mostrarle un postigo secreto para entrar en la ciudad, lo condujo a un paraje solitario y lo mató. Huyendo perseguido por el Cid consiguió a duras penas entrar en la ciudad por el llamado desde entonces Portillo de la Traición y que actualmente conoce como Portillo de la Lealtad. A causa de la muerte del Rey, Diego Ordóñez reta a los zamoranos tildándolos de traidores. Al reto responde Arias Gonzalo, pero Doña Urraca le pide que no luche. Enviará entonces a cuatro de sus cinco hijos, tres mueren en la justa, pero el cuarto consigue derrotar a Ordoñez. Así la ciudad recobró el honor y los castellanos levantaron el cerco. Este hecho histórico dio origen a la frase "Zamora no se ganó en una hora" al poner fin, en octubre de 1072, a un asedio a la ciudad de más de siete meses

El objetivo principal de este trabajo es presentar un juego diseñado para utilizar en las aulas de Matemáticas de primero a cuarto de Educación Secundaria Obligatoria, con carácter interdisciplinar, que permita trabajar, de forma cooperativa, distintas áreas como pueden ser Historia, Lengua Castellana y Literatura además de las Matemáticas. Respecto a las Matemáticas, se podrán trabajar los diferentes contenidos de la asignatura, prestando atención a los sentidos numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En la Educación Secundaria Obligatoria es habitual observar la presencia de un grupo de alumnos poco interesados por aprender y creemos que la motivación es un primer paso para conseguir un desarrollo correcto del proceso de enseñanza y aprendizaje. Además, consideramos que la utilización de juegos en el aula, al ser una metodología de trabajo un poco diferente de la habitual, constituye un recurso motivador importante. Como indica Guzmán (1989) "La matemática ha sido y es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo del desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable"

Tal como señalan Casas et al. (2018) es preciso "perder el miedo a combinar las palabras jugar aprender y matemáticas" (p. 107)

También el hecho de utilizar el cerco de Zamora como hilo conductor de este juego y trabajar varias áreas con él contribuirá a aumentar la motivación.

Ya en 1996 Delors presentaba "*los cuatro aprendizajes fundamentales, que en el transcurso de la vida serán para cada persona, en cierto sentido, los pilares del conocimiento: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser*" (Delors, 1996, 95-96)

En el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, se entiende por *Competencias clave* los "desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo, y afrontar los principales retos y desafíos globales y locales" (p. 41574).

En el mismo Real Decreto 217/2022 se definen como *Competencias específicas los "*desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada materia o ámbito" (p. 41574).

PRESENTACIÓN DEL MATERIAL. EL JUEGO MATEMÁTICAS CON DOÑA URRACA

El juego está formado por seis puzles realizados en soporte magnético. Las piezas del puzle tienen un lado con el que se forma una imagen y, por el otro lado, figuran las letras de la A a la F, que corresponden a unos enunciados cuyas respuestas se identifican con las letras de la P a la U y que se presentan en una serie de tarjetas plastificadas. En el Anexo I se muestran las fichas completas para primero de ESO y, en el Anexo II, un ejemplo de fichas para los cursos de segundo tercero y cuarto de ESO. Para cada enunciado se debe buscar la pieza de la respuesta correspondiente y se colocan enfrentadas con las imágenes hacia fuera, una vez completadas las piezas se resuelve el puzle, si en la otra parte del puzle se forma una imagen los emparejamientos son correctos. Al completar los puzles se obtienen: por un lado, diferentes figuras de los personajes del *Cerco*: El Cid, Diego Ordóñez, Vellido Dolfos, Arias Gonzalo y sus hijos y el Rey Don Sancho cada uno junto a un monumento de Zamora ligado al personaje y por el otro imágenes que forman la figura de Doña Urraca

Figura 1. Anverso y reverso de la parte correspondiente a los enunciados y a las respuestas de un personaje y hoja con enunciados y respuestas correspondientes al curso 1ºESO.

Instrucciones del juego

El juego consta de dos partes.

Primera parte: Se forman seis grupos de alumnos en el aula. Cada uno de ellos resuelve un puzle. Una vez resueltos todos los puzles, cada grupo muestra el suyo a los demás grupos para que todos los alumnos conozcan a todos los personajes que aparecen en los diferentes puzles. Es importante prestar atención y conocer bien todos los puzles para poder realizar la siguiente parte del juego.

Figura 2. Anverso y reverso de los puzles de los personajes

Segunda parte: Juego de memoria. Se lleva a cabo con todos los alumnos de la clase, que participarán por grupos. Se colocan todas las piezas, mezcladas y desordenadas, de manera que la parte correspondiente a los personajes que se han formado anteriormente queden hacia abajo. Por orden cada grupo da la vuelta a dos piezas. Si corresponden al mismo personaje, el grupo se queda las dos piezas. Gana el grupo que consiga mayor número de piezas. Una vez finalizado el juego y descubiertas todas las piezas, se construye con ellas un puzle en el que la imagen que aparece es la de Doña Urraca.

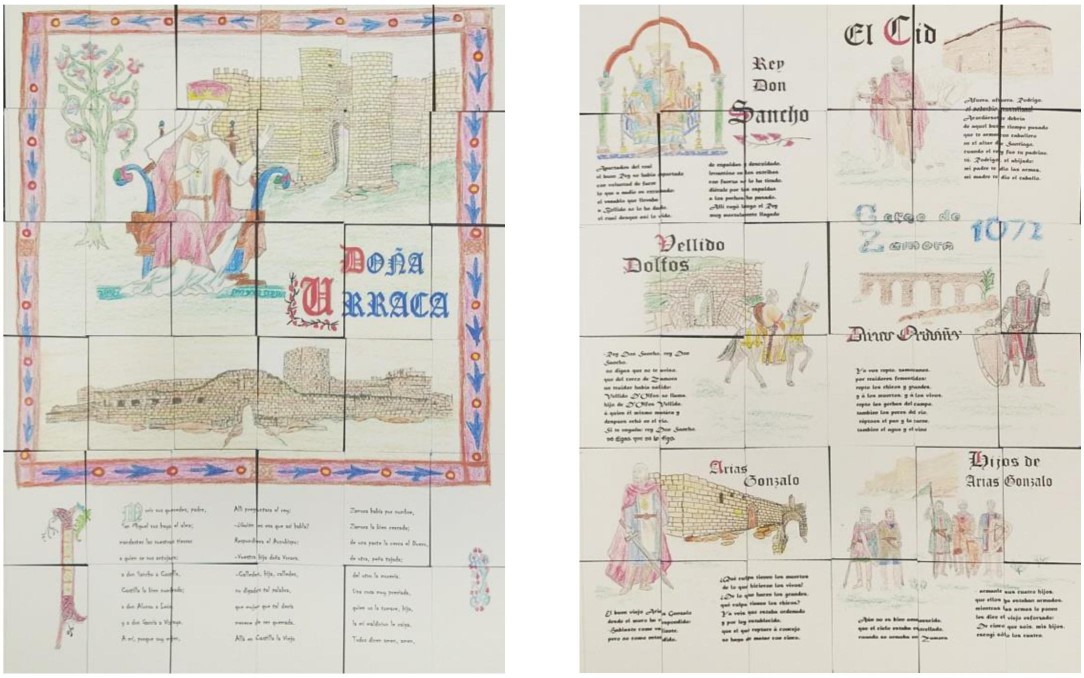


Figura 3. Anverso y reverso del puzle, imagen de doña Urraca y de los personajes del Cerco

Observaciones:

En el trabajo que aquí se presenta, en las tarjetas plastificadas aparecen operaciones, con sus resultados correspondientes, pero se pueden diseñar enunciados y respuestas para cualquiera de los

bloques de contenidos de la asignatura. También se pueden mezclar diferentes bloques de contenidos y utilizar el juego como repaso. De hecho, este tipo de juego se puede utilizar en otras áreas elaborando las tarjetas de enunciados y respuestas en función de los contenidos de la asignatura correspondiente.
Con este material se contribuye a la adquisición de las competencias clave de la forma siguiente:
Respecto a la competencia en comunicación lingüística dado que se trata de un trabajo en grupo los alumnos deben interactuar entre ellos compartiendo y poniendo en común las respuestas obtenidas.
La competencia personal social y de aprender a aprender se manifiesta por un lado con las interacciones entre alumnos donde se debe prestar atención al respeto a los turnos, a las respuestas de los demás, aceptando los errores personales y grupales como elementos integrantes del proceso de aprendizaje.
La utilización del Cerco de Zamora como hilo conductor del juego nos permite trabajar la competencia en conciencia y expresiones culturales.
Si se desarrollan otros contenidos, también se podrán trabajar el resto de competencias, ya que, en el momento en el que se plantee alguna actividad relacionada con la resolución de problemas o la búsqueda de información, inmediatamente surgen las competencias plurilingüe digital ciudadana y emprendedora.
Respecto a las competencias específicas de matemáticas, en el juego concreto que se presenta aquí se trabajan la competencia de razonamiento y prueba con la realización de los cálculos propuestos, además de la comunicación y representación al tener que comunicarse entre ellos, intercambiar ideas y presentar los resultados. También están presentes las destrezas socio afectivas al ser preciso el desarrollo de habilidades sociales para respetar las intervenciones de los compañeros, sean acertadas o erróneas, y contribuir entre todos perseverando para llegar a poder concluir la actividad.

RESULTADOS

Durante la puesta en práctica se analiza, mediante la observación, la contribución del juego a la consecución de las competencias específicas. En primer lugar, es necesario conseguir que el juego sea bien entendido por todos los alumnos.

Tabla 1: Evaluación

BLOQUE COMPETENCIAL	Indicador	No conseguido	Parcialmente conseguido	Suficientemente conseguido	Completamente conseguido
Razonamiento y prueba	1 2 3				
Comunicación y representación	4 5 6 7				
Destrezas socio afectivas	Participación 8 9 10				
	Interés 11 12				

Indicadores:
Razonamiento prueba:

1.- Conoce más de una forma de forma de resolver los enunciados.
2,- Reconoce patrones y relaciones abstractos.

3.-Piensa críticamente y reconoce posibles errores.

Comunicación y representación:

4.- Está familiarizado con los conceptos que aparecen en los enunciados

5.-Utiliza la calculadora correctamente para resolver los enunciados.

6.- Utiliza correctamente la simbología matemática para expresar las respuestas.

7.- Utiliza un vocabulario preciso para expresarse.

Destrezas socio afectivas:

Participación:

8.- Demuestra habilidad para expresar sus ideas.

9.- Escucha a los comentarios de sus compañeros.

10.- Responde a los comentarios de sus compañeros.

Interés:

11.- Disfruta con la resolución de los enunciados

12.- Se interesa por conocer la forma en que resuelven los enunciados sus compañeros

Después de realizar el juego en el aula realizamos una encuesta a los alumnos con el resultado que recoge la Tabla 2

Tabla 2: Resultado de la encuesta realizada a los alumnos de 4º ESO B del IES María de molina de Zamora.

Responder con una puntuación de 1 a 5, donde 1 es la más baja														Media
¿Es entretenido?	4	4	4	4	4	4	4	5	5	4	4	5	5	4,31
¿Es fácil de entender?	4	4	4	4	4	4	3	5	5	4	4	4	5	4,15
¿Sirve para que os relacionéis?	5	5	2	5	5	5	5	4	4	4	5	4	1	4,15
¿Sirve para repasar?	3	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	5	4,77
¿Sirve para aclarar ideas?	4	4	5	5	5	5	5	3	5	4	5	4	5	4,54
¿Te ha gustado?	5	5	5	4	4	5	5	5	5	4	4	4	5	4,62
¿Te gustaría jugar con otro tema?	4	3	5	5	5	5	2	5	5	5	4	4	4	4,31
Responde brevemente ¿Qué tiene de bueno?	PALABRAS O IDEAS QUE APARECEN EN LAS RESPUESTAS: Repasar (7) Trabajo en grupo (3) Relacionarse (2) Agilizar la mente (2) aprender otras cosas además de matemáticas (1) la interesante relación de las operaciones con el puzle (1) Desarrollo de competencias matemáticas y lingüísticas (1)													
¿Qué tiene de malo?	no contestan (6) o dicen que no tiene nada malo (7)													

CONCLUSIONES

La utilización del juego en el aula contribuye de manera satisfactoria al desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Aunque en este caso nos hemos centrado en un bloque concreto de contenidos y se ha podido contribuir al desarrollo de algunas de las competencias, tanto claves como específicas, la posibilidad de utilizar este mismo juego con distintos bloques de contenidos o saberes, nos lleva a decir que este juego contribuye a la consecución de todas las competencias.

BIBLIOGRAFÍA

Casas, N., Ballesteros, D., Etxeandia, E. (2018). Math mystery box: Gamificando el aprendizaje de las matemáticas. *Pensamiento Matemático, 8(2),* 7. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6636698.pdf

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Santillana. Ediciones UNESCO.

Guzmán, M. (1989): Juegos y matemáticas *Revista SUMA*, nº4, 61-64

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, *76*, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/30/pdfs/BOE-A-2022-4975.pdf

Anexo I

MATEMÁTICAS CON DOÑA URRACA 1ºESO

ENUNCIADOS

A) $1 - 40 \cdot [12 - (16 - 4)]$

B) $2 \cdot 16 : 4 + 6 : (-3) \cdot 4$

C) $-[5 + \cdot (\sqrt{100} : 2 - 1)] + 18$

D) $2 - 10 \cdot 2 + 3 \cdot 7 - 18 : 9 : 2$

E) $3 + [4 \cdot (7 - 5) - 3] + 2^3 : (12 - 4)$

F) $(8 - 10) : (-2) + 2 \cdot (-1 - 3) + 6 \cdot 2$

RESPUESTAS

P) 1

Q) 5

R) 0

S) 9

T) 2

U) 7

ENUNCIADOS

A) $(23 - 2^4 : \sqrt{64}) : (2 + 15 : 3) + 54 : 3^3$

B) $-18 : 6 \cdot (-3)$

C) $\sqrt{16} + \sqrt{9} - \sqrt{16 + 9}$

D) $2^3 - (8 - 7)^5$

E) $18 - 3 \cdot [(6 + 3 \cdot 4) : 3]$

F) $3^2 - \sqrt{9} - 2 - 9 : 3$

RESPUESTAS

P) 7

Q) 5

R) 9

S) 2

T) 0

U) 1

ENUNCIADOS

A) $(5 + 1 - 3 \cdot 2) : 10^3$

B) $45 : (\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}) + 2 \cdot (36 : 9 - 3)$

C) $3 \cdot 5 + 4 \cdot (5 - 2) - (14 - 3) \cdot 2$

D) $\sqrt{144} : 3 - 2^2 + 6^2 : 4$

E) $(14 - 4 \cdot 3) + (19 - 2) - 18 : (2 - 1)$

F) $2^2 \cdot 3^2 : (6^8 : 6^7) + 4 \cdot (17 - 8) - 8 \cdot 5$

RESPUESTAS

P) 9

Q) 7

R) 2

S) 0

T) 5

U) 1

ENUNCIADOS

A) $-19 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 - 2 - 5$

B) $3 + (-2) - (-4) - 1 - (-1)$

C) $(8 - 2^3)^2 \cdot (495 - 354)$

D) $8 \cdot (10 - 3^2) - 2 \cdot (\sqrt{25} - 3) : (2^5 : 2^3)$

E) $9 + (12 - 7)^2 - 125 : 5$

F) $27 : (17 - 2 \cdot 4) - 1$

RESPUESTAS

P) 0

Q) 5

R) 7

S) 1

T) 9

U) 2

ENUNCIADOS

A) $-3+2^4+(27-6):3-\sqrt{25}\cdot 3$

B) $\sqrt{10+15}\cdot(-5)+6\cdot 5-3^2:3$

C) $18:6-6:2$

D) $2\cdot(-11)-(-5)\cdot 6-1$

E) $3+(8-9)+(4+3)$

F) $\sqrt{7\cdot 4+2^3}-\sqrt{7\cdot 5-5\cdot 2}$

RESPUESTAS

P) 0

Q) 1

R) 2

S) 5

T) 7

U) 9

ENUNCIADOS

A) $2\cdot(12+3-3\cdot 5)$

B) $(1+2\cdot\sqrt{49}-3^2-5)\cdot(1+3\cdot\sqrt{36}-17)$

C) $-6+2\cdot 4+3$

D) $3\cdot(3-6)+10:(-2)+10+5$

D) $(\sqrt{64}-\sqrt{25})^3+2\cdot(4^2-13)-\sqrt{16}\cdot(6^2-30)$

E) $1+2+3+4:4$

RESPUESTAS

P) 9

Q) 7

R) 5

S) 1

T) 2

U) 0

Anexo II

MATEMÁTICAS CON DOÑA URRACA 2º E.S.O.

ENUNCIADOS

A) $\frac{4}{9}\cdot 3-\left(\frac{5}{8}-1\right):\frac{3}{4}$

B) $-6+(-12)-(-15)-3$

C) $-\left[3+2\cdot\left(\sqrt{100}:2-1\right)\right]+18$

D) $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}:\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$

E) $3+[4\cdot(7-5)-3]+2^3:(12-4)$

F) $(-3)^5:(-3^4)$

RESPUESTAS

P) 11/6

Q) -6

R) -15

S) 7/27

T) 9

U) 3

ENUNCIADOS

A) $(-2^{11}):(-8)^2$

B) $\sqrt{16}+\sqrt{9}-\sqrt{16+9}$

C) $\frac{1}{6}-\frac{8}{3}+\frac{1}{20}$

D) $3+2\cdot\left[\frac{5}{3}-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]$

E) $18-3\cdot[(6+3\cdot 4):3]$

F) $0{,}5-2\cdot(1-2{,}2)\cdot[10-(20:2)]$

RESPUESTAS

P) 1/2

Q) -32

R) 113/18

S) $-49/20$

T) 2

U) 0

MATEMÁTICAS CON DOÑA URRACA 3º E.S.O.

ENUNCIADOS

A) $\frac{4}{9}\cdot 3-\left(\frac{5}{8}-1\right):\frac{3}{4}$

B) $-6+(-12)-(-15)-3$

C) $-\left[3+2\cdot\left(\sqrt{100}:2-1\right)\right]+18$

D) $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}:\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$

E) $3+[4\cdot(7-5)-3]+2^3:(12-4)$

F) $(-3)^5:(-3^4)$

RESPUESTAS

P) 1/3

Q) $-1/55$

R) 9

S) 1

T) -2

U) 11/9

ENUNCIADOS

A) $10^2\cdot 25^{-1}:\left(\frac{4}{5}\right)^2$

B) $-2+\frac{3}{7}\cdot\left[\frac{5}{6}:\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2\right]$

C) $-7-[-5+(-2)-(-3)]\cdot(-2)$

D) $\frac{4}{17}:\left(-\frac{3}{5}\right):\left(\frac{-2}{6}\right)$

E) $(8-2^3)^2\cdot(1495-3504)$

F) $\left(\sqrt{25}\right)^3\cdot(5^2)^{-2}:5^{-2}$

RESPUESTAS

P) $-1/5$

Q) 25/4

R) 20/17

S) 5

T) 0

U) 76/7

MATEMÁTICAS CON DOÑA URRACA **4º E.S.O.**

ENUNCIADOS

A) $\left(3+\sqrt{2}\right)^2+\left(3-\sqrt{2}\right)^2+1$

B) $\left(1+\frac{-2}{7}\right)-\frac{3}{7}\cdot\left[\frac{5}{6}:\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2\right]$

C) $\left(\sqrt{49}\right)^{\mathbf{3}}\cdot(7^2)^{-2}:7^{-2}$

D) $(28^3\cdot 25^2):(100^2\cdot 35^3)$

E) $1-\log\sqrt{1000}$

F) $(-3)^2\cdot\sqrt{16}-(5^2-11):\sqrt{49}+(10-8)^2$

RESPUESTAS

P) 23

Q) $-85/7$

R) 7

S) $4/125$

T) - $1/2$

U) 38

ENUNCIADOS

A) $\log_2 32-\log_3(1/27)-\log_5 1$

B) $16^{1/4}\cdot\sqrt[6]{4}\cdot(1/8)$

C) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}:\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)$

D) $[(-2)^{-2}\cdot(-2^3)]:[2^{-6}\cdot(-2)^3]$

E) $1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}$

F) $2^{\mathbf{2}}\cdot 3^{\mathbf{2}}:(6^{\mathbf{8}}:6^{\mathbf{7}})+4\cdot(17-8)-8\cdot 5$

RESPUESTAS

P) 16

Q) $5/8$

R) $1/\sqrt[3]{32}$

S) 2

T) $7/10$

U) 8

Para hacer referencia al artículo:

Mª Consuelo Monterrubio Pérez, Mª Carmen García González, Isabel Gallo Domingo (2022). Matemáticas con Doña Urraca. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 199 - 206). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS DE INSTITUTO AL DEPORTE PROFESIONAL

Diego Alonso Santamaría

IES Arca Real

Resumen

El deporte puede resultar un contexto perfecto para mostrar la aplicación de las matemáticas a la vida real a la vez que se despierta el interés del alumnado. En este artículo se muestran dos ejemplos de ello: la aplicación de las matemáticas al baloncesto y cómo han cambiado la manera de entender y jugar a este deporte; y la aplicación de las matemáticas al fútbol y cómo ha cambiado la forma de arbitrar fueras de juego.

Palabras clave: *matemáticas, deporte, contexto, fútbol, baloncesto*

APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS AL BALONCESTO

En los últimos veinte años las matemáticas han cambiado la forma de entender el baloncesto. Si uno compara un partido actual con otro de cualquier otra época se dará cuenta de lo repetitivo que se han vuelto los ataques, donde la mayoría terminan en un lanzamiento bajo el aro o más allá de la línea de tres puntos.

Los más mayores quizás recuerden cuando la línea de triple estaba a una distancia de 6,25 metros. En la temporada 2010/2011 esa medida se retrasó a los actuales 6,75 metros. La razón era sencilla: los equipos habían comenzado a aumentar sus tiros de tres de manera exponencial, motivo por el que el baloncesto estaba perdiendo su atractivo.

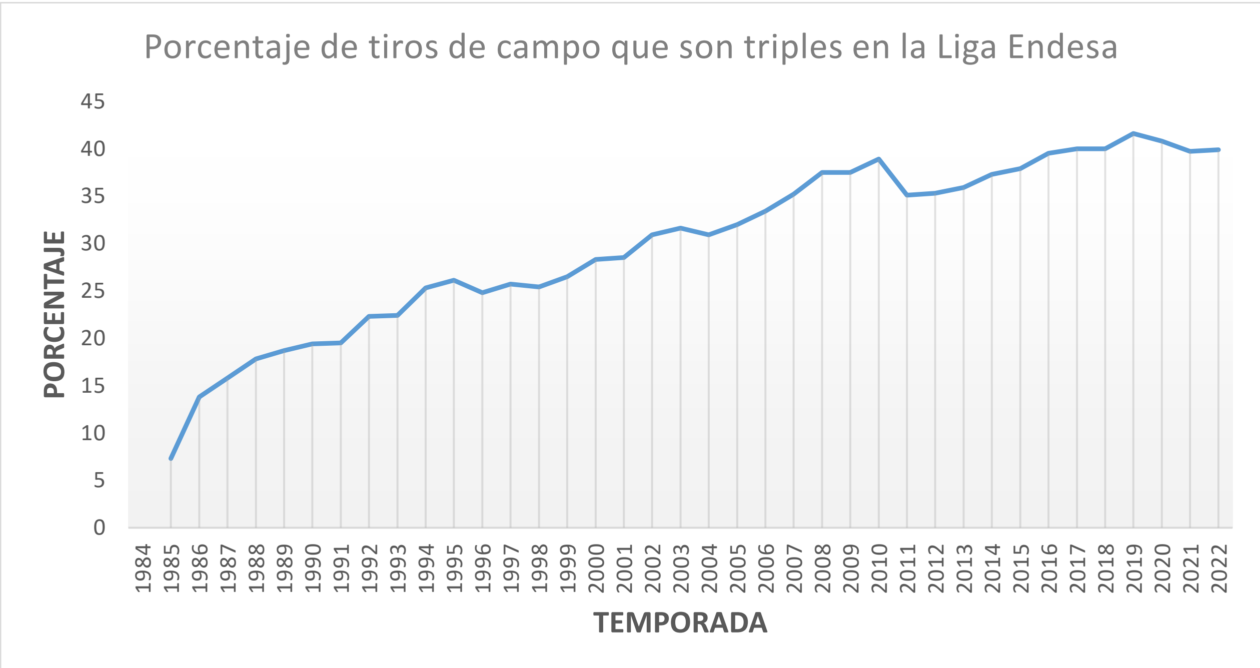


Figura 19. Gráfico de porcentaje de tiros de campo que son triples en la Liga Endesa

Lejos de cambiar esta tendencia, ya hay equipos que lanzan más de tres puntos que de dos. ¿Cuál es la razón? Si uno hace esta pregunta a cualquier comentarista deportivo, lo normal es que reciba la siguiente respuesta: *Los ordenadores dicen que hay que lanzar triples para ganar partidos.*
¿Pero qué explicación matemática subyace detrás de esta afirmación? Para entenderlo, debemos observar el porcentaje de acierto en el tiro desde cada zona del campo de baloncesto. En la NBA, con medidas algo diferentes al baloncesto FIBA, se distinguen cuatro zonas principales en el campo de ataque:

- Área restringida o *restricted area*: marcado con un semicírculo en la cancha, define el área a menos de cuatro pies de la canasta.
- La pintura (sin contar el área restringida): el rectángulo alrededor de la canasta, sin contar el área restringida.
- Rango medio o *mid range*: el área entre la pintura y la línea de tres puntos.
- Triple: área más allá de la línea de tres puntos.

Una vez definidos las zonas del campo, podemos observar los porcentajes de acierto en cada una de ellas. Tomemos de ejemplo la temporada 2021/2022 de la NBA:

Tabla 2. Porcentajes de acierto en el tiro según zona de lanzamiento, en la temporada NBA 2021/2022

Área restringida	Pintura	Rango medio	Triple
65,32%	42,83%	40,65%	35,53%

Viendo estos porcentajes, no parece tener sentido que el triple sea uno de los recursos más utilizados. Sin embargo, la respuesta radica en que el tiro desde esa zona vale un punto más que desde cualquier otro lado del campo, y por tanto resulta mucho más eficiente. Aprovechando las estadísticas anteriores, calculemos los puntos por lanzamiento que se consiguen de media desde cada zona:

Área restringida:	$65{,}32\% \cdot 2\ puntos =$	1,31 puntos por lanzamiento
Pintura:	$42{,}83\% \cdot 2\ puntos =$	0,86 puntos por lanzamiento
Rango medio:	$40{,}65\% \cdot 2\ puntos =$	0,81 puntos por lanzamiento
Triple:	$35{,}53\% \cdot 3\ puntos =$	1,07 puntos por lanzamiento

Como conclusión, podemos afirmar que, aplicando matemáticas de un nivel de primaria o ESO (cálculo de porcentajes), podemos entender por qué en el baloncesto la mayoría de ataques terminan en un tiro desde debajo de canasta o desde más allá del triple. Son los lanzamientos más eficientes, aquí y en la NBA. Y pese a este sencillo cálculo, no se comenzó a explotar hace apenas una década… Un ejemplo perfecto de la aplicación de las matemáticas al deporte y de su importancia para ganar partidos.

FÚTBOL Y GEOMETRÍA: EL PUNTO DE FUGA

En los últimos años la aplicación de la estadística avanzada en el fútbol ha supuesto una revolución a la hora de entender el deporte. Sin embargo, la relación de las matemáticas y el deporte no se reduce al campo de la estadística. La tecnología también ha traído consigo el estudio de imágenes en tiempo real, y con ello se ha creado el famoso VAR, una concepción nueva del arbitraje que ha dotado a las retransmisiones deportivas de un repentino interés. Entre sus múltiples funciones, tal vez destaque el cálculo milimétrico de los fueras de juego. Pese a la vistosidad de sus imágenes, con rectas que definen la posición de defensores y atacantes, todo ello se basa en un antiguo concepto geométrico: el punto de fuga.

Figura 20. Árbitros del VAR comprobando un fuera de juego

El punto de fuga

El punto de fuga, en un sistema de proyección cónica, es el lugar geométrico en el que las proyecciones de las rectas paralelas a una dirección dada en el espacio, no paralelas al plano de proyección, convergen. Es un punto situado en el infinito.

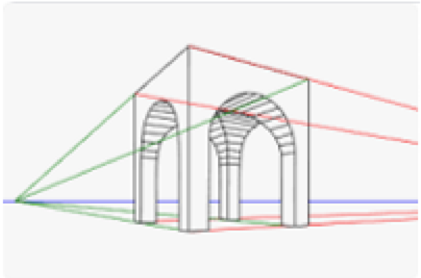


Figura 21. Ejemplo de punto de fuga

Este concepto matemático ha sido ampliamente utilizado en cine y arte:

Figura 22. El punto de fuga en películas de Stanley Kubrick

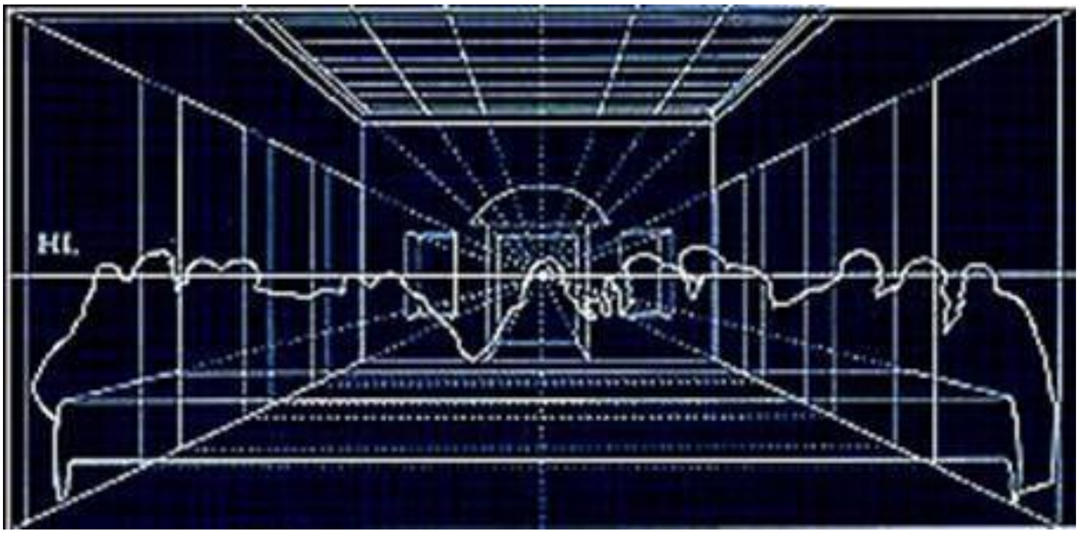


Figura 23. El punto de fuga en La última cena

Retomando el tema que nos ocupa, y sin la alta tecnología que utiliza el VAR, explicamos a continuación el método para calcular fueras utilizando Geogebra, una experiencia de aula muy enriquecedora para el alumnado con la motivación que conlleva hablar de la jugada dudosa que definió el último partido de su equipo favorito.

Introducción al punto de fuga con Geogebra

Tras llevar a nuestro alumnado a la sala de ordenadores, lo primero que pediremos será que busquen imágenes de edificios, ya sean famosos o de su entorno cercano, y peguen la imagen en Geogebra. Una vez hecho, deberán trazar las líneas rectas que sean paralelas en la realidad, aunque no se vean así en su foto elegida. Ellos mismos descubrirán que todas sus líneas confluirán en un mismo punto: el punto de fuga.

Este primer ejercicio puede ampliarse con el estudio de, por ejemplo, cuadros de arte o fotogramas de películas, de tal forma que se trabajen otro tipo de competencias en la clase de matemáticas.

Figura 24. Alumnos hallando el punto de fuga en fotografías de internet

El punto de fuga en los campos de fútbol

Tras este primer ejercicio, nos acercamos al ámbito que nos interesa, el fútbol, pidiendo a los estudiantes que realicen el mismo estudio con imágenes de un campo de fútbol y hallen el punto de fuga.

Por sí mismos, los alumnos descubren que, en el propio césped, existen multitud de rectas paralelas, tales como las propias líneas del campo, el corte de la hierba, la portería… precisamente estas líneas serán las que utilicemos para el cálculo de los fueras de juego.

Figura 25. Alumnos hallando el punto de fuga en campos de fútbol

Cálculo de los fueras de juego con Geogebra

Como último ejercicio, pediremos a los alumnos que busquen una imagen de un fuera de juego polémico que haya ocurrido en el último partido (encontrar estas imágenes es relativamente sencillo, pues suelen copar todos los periódicos deportivos online). Una vez encontrada la foto, los alumnos ejercerán de árbitros del VAR a través de los siguientes pasos:

1) Pegar la imagen en Geogebra y trazar todas las rectas paralelas que ofrece el campo para hallar el punto de fuga.
2) Localizar la proyección en el suelo de la parte más adelantada del cuerpo del atacante (los brazos no cuentan), y unir con una recta ese punto con el punto de fuga.
3) Repetir este paso con la parte más retrasada del defensor que determine el fuera de juego.

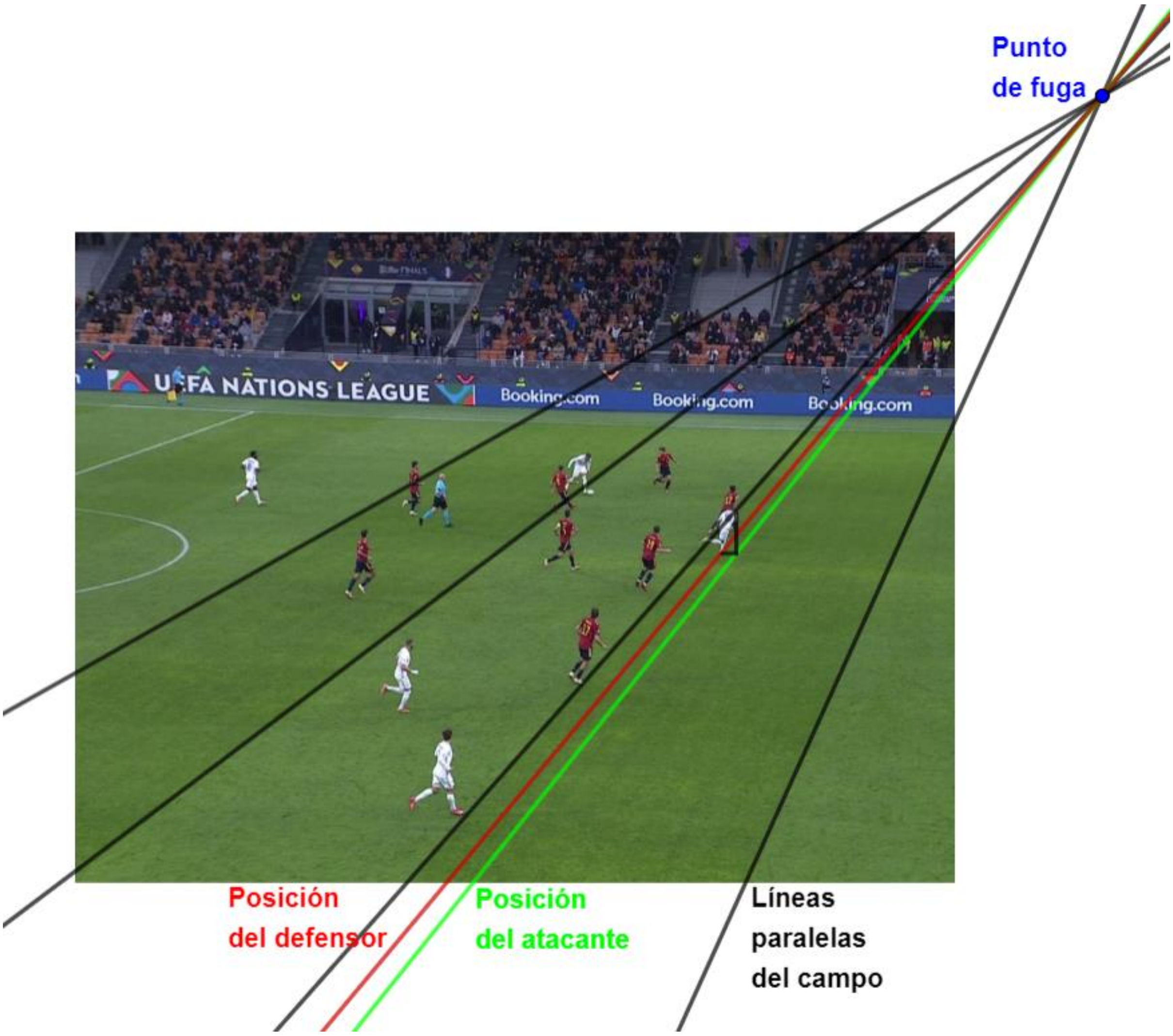


Figura 26. Cálculo del fuera de juego con Geogebra

De esta manera, nuestros alumnos se habrán convertido en árbitros profesionales del VAR, habrán descubierto la importancia de las matemáticas en el fútbol, y sus conexiones con el arte, el cine y el mundo que les rodea.

Figura 27. Alumnos hallando un fuera de juego

CONCLUSIONES

La nueva concepción de la enseñanza de las matemáticas da una gran importancia a la aplicación de estas a contextos reales. De todos ellos, el deporte es uno de los principales focos de interés de la sociedad actual y, tal y como se ha visto en los ejemplos de este artículo, puede ser utilizado para despertar la atención del alumnado a la vez que se fomenta el aprendizaje.

Referencias

Teams Shooting, Stats, NBA.com. (s. f.). NBA. Recuperado 30 de octubre de 2022, de https://www.nba.com/stats/teams/shooting?DistanceRange=By+Zone&Season=2021-22&PerMode=Totals

Para hacer referencia al artículo:

Diego Alonso Santamaría (2022). Aplicaciones de las matemáticas de instituto al deporte profesional. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 207 - 213). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

MALDITAS MATEMÁTICAS… ¿O NO? ACTIVIDADES EN LA SALA DE MATEMÁTICAS DEL MUSEO DE LA CIENCIA DE VALLADOLID

Sonsoles Blázquez Martín, Marta Carazo Lores, Ana García Lema y Elodia Bielsa Domingo

Resumen:

En Septiembre de 2018 se inauguró en el Museo de la Ciencia de Valladolid una sala dedicada exclusivamente a las matemáticas. En su diseño participó, en calidad de expertos, el grupo de Divulgación de Socylem Valladolid. La segunda parte del trabajo desarrollado por este grupo de profesores ha sido crear material para que cualquier centro educativo que quiera realizar una visita al museo tenga actividades para poder realizar con su alumnado.

Así que, a partir de las visitas realizadas desde sus propios centros, las actividades diseñadas para participar en la Noche de los Investigadores del Museo y el Trabajo Fin de Grado de una de sus componentes; el grupo presentará actividades de distintos niveles y propuestas de itinerarios (según el nivel de los alumnos que realicen la visita) para realizar una visita a la sala del museo "Malditas Matemáticas… ¿o no?" y que nuestros alumnos salgan de ella pensando que son divertidas e interesantes.

Palabras Clave: *matemáticas, museo, actividades, divulgación*

Una breve historia

Desde la sección de Valladolid de la Sociedad Castellano y Leonesa de Profesores de Matemáticas Miguel de Guzmán siempre se ha tenido interés en divulgar las matemáticas de una forma informal y lúdica. En el curso 2009-2010 varios profesores de Valladolid formaron un grupo de trabajo para divulgar las matemáticas, para ello empezaron a colaborar en distintas actividades con el museo de la ciencia de Valladolid. La primera contribución fue durante "La Noche de los Museos" de 2010. Con el fin de divulgar ciertos conceptos matemáticos se generó, para la misma, un material de juegos y manipulativo. En años posteriores se participó en "La noche de los investigadores" realizando gincanas, talleres o representaciones donde las matemáticas eran el hilo conductor.

A partir de estas contribuciones y de que en el museo se quedó una sala vacía, la relación con el museo tuvo giro, pues el museo se planteó realizar una sala dedicada por completo a las matemáticas. Así, el grupo de profesores pasó a ser asesor del museo en la tarea de recopilar y seleccionar actividades y recursos para la futura sala. Este trabajo que se realizó culminó el 27 de septiembre de 2018 con la inauguración de la sala "Malditas Matemáticas… ¿o no?" por el alcalde de Valladolid, Óscar Puente.

¿Qué tiene la sala "Malditas Matemáticas… ¿o no?"?

El título de la sala de matemáticas del museo juega con el título del libro *Malditas Matemáticas. Alicia en el País de los Números*, de Carlo Frabetti, la inclusión de ese '¿o no?' cuestiona al visitante si su concepción negativa de las matemáticas puede ser un error que se puede cambiar con una visita a la sala.

Para la selección de las distintas actividades de la sala se tuvieron presentes las distintas ramas de las matemáticas y el variado público que acude al museo. El número π (pi), nos guiará en el recorrido por las distintas secciones de la sala, además, repartidas entre sus cifras decimales nos curiosidades.

Las secciones son las siguientes:

- Universo Numérico: a través de juegos numéricos conoceremos los distintos tipos de números

- Perplejidad: donde las actividades nos muestran cómo nuestros sentidos perciben ciertos elementos y cómo las matemáticas nos ayudan a entender estas percepciones.

- Matematizarte: relaciona las matemáticas con la naturaleza, con el arte, la arquitectura, etc.

- Descubriendo Figuras: la sección más grande de la sala está dedicada a la geometría. Podemos jugar con poliedros, demostrar el teorema de Pitágoras, realizar mosaicos o entender por qué las tapas de alcantarilla son redondas. También hay una bicicleta con ruedas cuadradas que se mueve a través de una superficie formada por catenarias invertidas que le permiten su avance.

- Emboscadas de la Lógica nos enfrenta a retos y problemas lógicos y matemáticos.

- Azar y Estadística: En esta sección aprendemos a hacer un muestreo para realizar una encuesta. Aparecen gráficos mentirosos con los que nos engañan si no sabemos matemáticas. Además, nos muestra juegos donde tenemos más opciones de ganar si conocemos la teoría de la probabilidad.

- En busca de una solución: nos presenta algunos de los problemas del milenio como la conjetura de Goldbach. También encontramos cuestiones curiosas, como el ‘teorema de los cuatro colores’ o la ‘paradoja de los puentes de Konigsberg’ trasladada a nuestro entorno del Pisuerga.

Además de las distintas actividades por el suelo de la sala encontraremos baldosas con información sobre fórmulas importantes —la ecuación de Euler, el Teorema de Pitágoras, el Teorema fundamental del cálculo, la regla de Laplace y la ecuación de segundo grado— y matemáticos eminentes —Pitágoras, Hipatia, Fibonacci, Euler, Sophie Germain, Gauss, Ada Byron, Sofia Kovalievskaya, Miguel de Guzmán y Maryam Mirzajani—.

¿Por qué hacer una visita matemática al museo?

La sociedad de conocimiento actual tiende a reconocer los museos como un espacio de aprendizaje. Si hacemos un recorrido histórico vemos como estos han dejado de ser contenedores de elementos y han pasado a ser divulgadores y difusores de cultura. Desde el ámbito científico técnico los museos de la ciencia son los protagonistas de estas actividades, lugares donde la divulgación se realiza de una manera más informal y lúdica.

Como docentes tenemos que ver los museos de la ciencia como puntos de unión de los centros educativos y la sociedad. Debemos visitar estos lugares para acercar el conocimiento científico y, el aporte a la sociedad de la ciencia, a nuestro alumnado.

Las visitas a los museos de la Ciencia se enclavan dentro de las actividades complementarias que organizan los centros de primaria y los de secundaria. Estas actividades deben complementar el curriculum escolar y, a la vez, ofrecer distintas posibilidades y recursos que motiven a nuestros alumnos, aumenten su interés por la materia y les ayuden a aumentar la comprensión de algunos contenidos. Además, de estimular su curiosidad y su capacidad de observación.

¿Cómo hacer estas visitas?

En el momento de plantearnos hacer una visita fuera del centro educativo debemos tener presente que este se convierte en un espacio de aprendizaje. También debemos plantearnos cuáles serán los objetivos de esta salida; entre ellos deberían estar el desarrollo de las habilidades y competencias de nuestros alumnos haciendo que así sea un aprendizaje significativo y una experiencia distinta a las realizadas en el aula, trabajando el plano afectivo e imaginativo de nuestro alumnado...

Un punto importante de los museos de la ciencia es que el tipo de aprendizaje que realizarán nuestros alumnos será kinestésico. La interactividad, de este tipo de museos, ayudará a trabajar el aprendizaje basado en el ensayo-error. Así desarrollaremos las competencias más cercanas al aprender a aprender y a la experimentación.

El Grupo de Investigación sobre la Educación y los Museos (GREM) de la Universidad de Montreal proponen realizar actividades que partan de la interrogación, observación y apropiación de los contenidos. Esto se llevará a cabo en tres etapas: preparación, realización y prolongación.

Para realizar una visita satisfactoria lo primero que proponemos es conocer el espacio y las actividades que hay en el museo que vamos a visitar pues así podremos organizar una visita que se ajuste a los alumnos que la realizarán. Lo siguiente será elegir qué vamos a plantear a nuestros alumnos, si una yincana, una búsqueda del tesoro o un listado de actividades a realizar.

¿Qué hemos hecho nosotros?

El grupo de trabajo ha realizado distintos tipos de visitas para grupos de alumnos de diferentes edades. La mayoría de estas actividades se han desarrollado durante la Noche de los Investigadores del Museo a partir del año 2018 y se han reutilizado para realizar las visitas al museo de nuestros centros educativos.

La primera actividad consistió en generar una tarjeta por sección del museo con varias pruebas en cada una de ellas. Los alumnos participantes, repartidos en grupos, tenían que realizarlas y rellenar la hoja de respuestas. (Figuras 1 y 2)

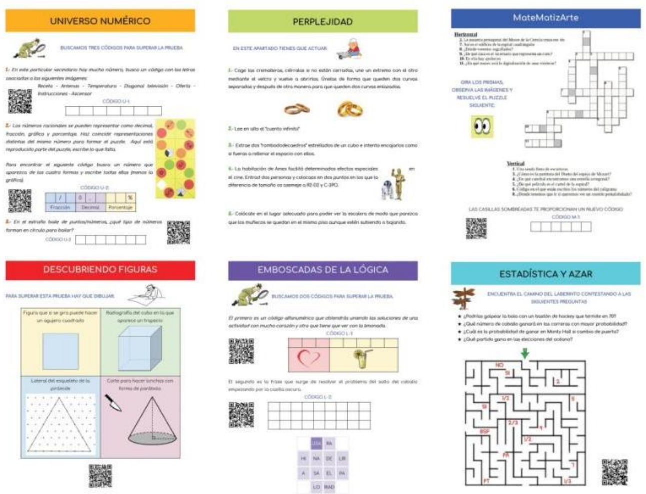


Figura 1

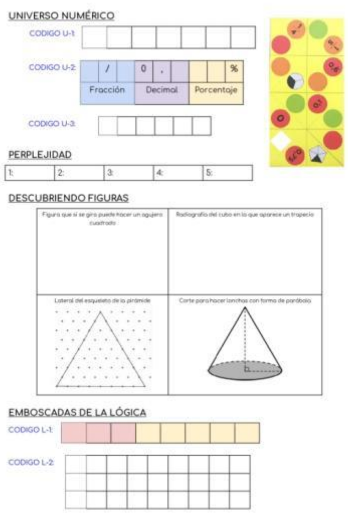


Figura 2

Lo positivo de esta actividad es que se recorre toda la sala y se realizan la mayoría de sus actividades. La parte negativa es el tiempo que se necesita para llevarla a cabo y el nivel de las actividades pues algunas de ellas no son para alumnos de primaria. Como segundo intento, elaboramos una actividad para mejorar lo expuesto anteriormente y así pudiesen participar niños a partir de 6 años. En este caso también se organizaban grupos de alumnos, pero cada uno tenía una misión con actividades distintas. Se confeccionaron cinco misiones diferentes con el nombre de 5 matemáticos: Pitágoras, Hipatia, Sofia Kovaleskaya, Gauss y Maryam Mirzahani. (Misión de Hipatia en figura 3).

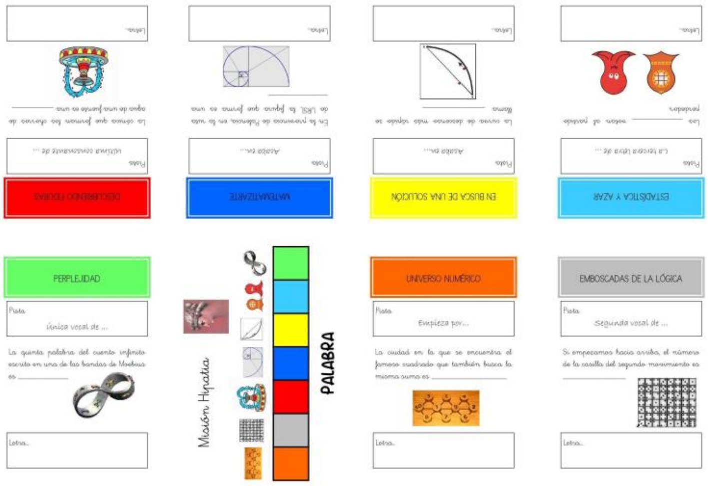


Figura 3

En cada misión hay una prueba por sección de la sala. En ellas deben obtener una o varias letras de cada una de las pruebas para completar una palabra. Al finalizar el tiempo todos los grupos se reúnen para completar la siguiente frase con las palabras que han encontrado:

*«Las matemáticas tienen **belleza** y enamoran. El **mundo de** las matemáticas no es un lugar **aburrido** en el que estar. Es un lugar **extraordinario**; merece la pena pasar **el tiempo** allí.»*

Marcus du Sautoy

¿Qué proponemos?

Estas dos experiencias nos llevaron a pensar en generar un material para que cualquier docente pudiese hacer una visita con su centro y “jugase” en la sala de matemáticas y no solo “pasease” por ella. Así que nos propusimos generar un listado de pruebas donde se detallarán la mayoría de las actividades de cada una de las secciones y se realizarán, en cada una de ellas, pruebas de distintos niveles. De esta manera cualquier profesor podría generar su cuaderno de actividades adaptándolas al nivel y las características de sus alumnos. Para los cursos de primaria este listado se generó en el Trabajo Fin de Grado de Educación Primaria de una de sus componentes, el título del mismo es “Itinerarios en la sala de matemáticas del Museo de la Ciencia. Actividades para primaria”. Una muestra de este tipo de pruebas es la siguiente:

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Sección Universo Numérico			
Solitario Danés	Con las fichas colocadas comprobar que la suma sea la misma.	Con todas las fichas colocadas menos las tres de arriba, colocarlas para que la suma sea la misma.	Realizar el solitario para que en todas las sumas se obtenga 20.
Puzzle Fracciones	Unir fracción y gráfica, aunque no se forme el puzle	Unir fracciones, gráficas y/o decimales, aunque no se forme el puzle	Resolver el puzle
Sección Perplejidad			

Anamorfosis	Reconocer la imagen escondida	Reconocer la imagen y dar el nombre de la figura que te ayuda a reconocerla	
Banda De Moebius	Leer la frase de la Cinta	¿Qué parte de la cinta recorre el coche?	Crea una cinta con una tira de papel
Sección Descubriendo Figuras			
Secciones de Prismas	Encuentra dentro del cubo un cuadrado y un triángulo	Encuentra dentro del cubo un cuadrado, un triángulo y un hexágono	Dibujar esos cortes en un cubo
Pitágoras	Demostrar el teorema con el agua	Comprobar el teorema utilizando hexágonos	
Sección Matematizarte:			
Fotografía Matemática	¿Qué figura se forma con los números y las fórmulas matemáticas?	¿En qué ciudad puedo encontrar un pentágono muy grande?	¿Por qué la partitura de Mozart se puede leer igual de arriba a abajo y al revés?
Sección Emboscadas de la lógica			
Corazón Partío	Cuántos triángulos amarillos tiene mi corazón	Mi corazón tiene varios colores, ¿tiene la misma porción de rojo y de amarillo?	¿A qué número corresponde cada corazón para que la fracción sea correcta?
Sección Estadística y azar			
Gráficos Mentirosos	En el gráfico de café que nos engaña, ¿cuántas veces es más grande la taza de Café Xagerao que la de Café Tontolino?	Dibuja tu propio gráfico mentiroso	
Sección En busca de una solución			
Mapa de 4 colores	Resuelve un mandala de dificultad fácil	Resuelve un mandala de dificultad difícil	

La mayoría de los contenidos se pueden trabajar tanto en primaria como en secundaria Para bachillerato hay conceptos matemáticos como las cónicas, las superficies de revolución o las superficies regladas y teoremas que nos permiten trabajar con estos alumnos a un nivel superior.

¿Y el futuro?

Este ha sido nuestro trabajo hasta ahora, pero seguimos trabajando y elaborando e ideando materiales basados tanto en las actividades de la sala como en otras opciones fuera del museo. La pandemia del Covid-19 y el problema de hacer demasiadas salidas complementarias en los centros nos anima a proyectar nuevos métodos para llevar unas matemáticas distintas a las del aula, fuera del ámbito académico, por ejemplo, la actividad de matemáticas en la calle. Pero eso ya será un nuevo capítulo.

Bibliografía

Arbués, E., & Naval, C. (2014). Los museos como espacios sociales de educación. *Estudios sobre educación*, *27*, 133-151. Recuperado de https://doi.org/10.15581/004.27.133-151.

Arteaga, B. (2016). *Una visita a los museos de las matemáticas*. Unir Revista. Recuperado de: https://www.unir.net/educacion/revista/noticias/una-visita-a-los-museos-de-las-matematicas/549201568697/.

Calvo, C. V., & Stengler, E. (2004). Los museos interactivos como recurso didáctico: El Museo de las Ciencias y el Cosmos. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, *3*(1), 32-47. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Erik_Stengler2/publication/28092830_Los_Museos_interactivos_como_recurso_didactico_El_Museo_de_las_Ciencias_y_el_Cosmos/links/0fcfd50bc5d66ed977000000/Los-Museos-interactivos-como-recurso-didactico-El-Museo-de-las-Ciencias-y-el-Cosmos.pdf.

Merillas, O. F. (2007). ¿Se están generando nuevas identidades?: del museo contenedor al museo patrimonial. In *Museos de arte y educación: Construir patrimonios desde la diversidad* (pp. 27-52). Ediciones Trea.

Morentin Pascual, M., & Guisasola Aranzabal, J. (2014). La visita a un museo de ciencias en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. Recuperado de: http://hdl.handle.net/10498/16589.

Rodríguez Hidalgo, I. (2018). Ciencia por fuera, ciencia por dentro, ciencia viva. El Museo de la Ciencia de Valladolid. In *La Ciencia en el Museo. Museos y Centros de Ciencia En España nº 13* (pp. 124-135). Revista del Comité Español de ICOM. Recuperado de: https://issuu.com/icom-ce_librovirtual/docs/icom-ce_digital_13

Para hacer referencia al artículo:

Sonsoles Blázquez Martín, Marta Carazo Lores, Ana García Lema y Elodia Bielsa Domingo (2022). Malditas matemáticas… ¿o no? actividades en la sala de matemáticas del Museo de la Ciencia de Valladolid. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 214 - 219). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

CHATBOT PARA MATEMÁTICAS

Mª del Carmen Giraldo Pérez

IES Los Valles

Resumen

En el ámbito escolar, una de las repercusiones del confinamiento por la pandemia de Covid 19, fue el impulso de las plataformas y herramientas digitales para la enseñanza y el aprendizaje. El móvil fue un instrumento de trabajo para el alumnado de Enseñanza Secundaria, más asequible que otros dispositivos electrónicos como portátiles o tabletas. Al retornar a la actividad lectiva presencial, uno de los propósitos de la intervención docente en el IES Los Valles de Camarzana de Tera fue aprovechar su potencial educativo. Se configuró un asistente virtual o chatbot para Matemáticas con el propósito de ayudar al alumnado de 2º de bachillerato en la resolución de problemas de Programación lineal fuera del horario lectivo. La herramienta online que se utilizó para la creación del chatbot fue Dialogflow y se integró en la aplicación de mensajería instantánea Telegram. La experiencia resultó satisfactoria, aunque se percibieron algunas limitaciones y se plantearon propuestas que ayudarán a mejorarlo para futuras prácticas.

Palabras clave: *m-learning, matemáticas, secundaria, chatbot.*

INTRODUCCIÓN

Los avances tecnológicos hicieron que en el ámbito educativo surgiese un movimiento partidario de usar la tecnología como herramienta de trabajo en las aulas. En un primer momento se introdujeron ordenadores que ampliaron las formas de enseñar y aprender en las diferentes áreas de conocimiento de la educación formal. Posteriormente, otros dispositivos como móviles y tabletas, empezaron a verse desde una perspectiva más ventajosa y se trataron de minimizar los riesgos para la seguridad y protección de datos con un uso responsable y controlado en todos los niveles de enseñanza. Estos aparatos electrónicos, con los que están familiarizados los estudiantes para otros usos de carácter lúdico y comunicativo, se están dejando de prohibir en algunos centros educativos, pasando a convertirse en aliados de los docentes en los procesos formativos. Sin embargo, algunos estudios recientes con datos obtenidos a partir de la aplicación Teacher Tapp que recoge la opinión de profesores de primaria y secundaria, revelan que entre los docentes encuestados hay un rechazo al uso del móvil en el aula, principalmente por considerar que son elementos de distracción entre los estudiantes (Pijper, 2022). Aunque el debate sigue abierto y se continúan sopesando las ventajas e inconvenientes de su uso en niveles de enseñanza secundaria, en este estudio se trata de aprovechar su potencial educativo para desarrollar propuestas de aprendizaje más autónomo y ubicuo.

El aprendizaje móvil se ha definido de múltiples formas. Inicialmente algunos lo integraron en el e-learning. Quinn (2001) lo consideró como intersección del aprendizaje electrónico y la informática móvil, independiente de la ubicación espaciotemporal y Georgiev et al. (2004) también lo vieron como parte del e-learning que aporta mayor flexibilidad al proceso de enseñanza-aprendizaje. Caudill (2007) lo consideró como un complemento del e-learning que proporciona a los estudiantes mayores oportunidades de aprendizaje. Los móviles les permiten el acceso a recursos y ambientes virtuales de aprendizaje cuando no pueden disponer de otros dispositivos estáticos como ordenadores. Para conseguir una definición relevante de aprendizaje móvil Laouris y Eteokleous (2005) consideran parámetros como el tiempo, el espacio, el ambiente de aprendizaje, el contenido educativo y socialmente relevante, la tecnología, lo mental como los conocimientos previos, las preferencias, la atención o las habilidades mentales y el método que engloba el modelo pedagógico y el paradigma filosófico. Sharples (2005) destaca el uso de la tecnología móvil para ampliar el aprendizaje fuera del aula. Permite a los estudiantes aprender explorando y conectando mundos reales y virtuales. La mensajería instantánea y conversaciones e interacciones de la vida cotidiana proporcionan una oportunidad para aprender y compartir conocimiento. En el modelo para enmarcar el aprendizaje móvil presentado por Koole (2009) convergen las tecnologías móviles, las capacidades de aprendizaje y la interacción social.

La versatilidad de los móviles los convierte en herramientas de aprendizaje, de las que beneficiarse en las aulas además de hacerlo a nivel profesional o personal. Se caracterizan por su portabilidad, interactividad y conectividad que permite el acceso instantáneo a recursos multimedia y el desarrollo de habilidades y conocimientos para comunicarse y colaborar, para buscar, seleccionar y tratar de forma segura la información o para crear y compartir contenido. Según Organista- Sandoval y Serrano-Santoyo (2014) la gran aceptación social de los teléfonos móviles proviene de su conectividad, ejecución de aplicaciones, facilidad de acceso a bancos de información y redes sociales.

Existen diferentes clasificaciones del uso educativo del móvil. Shepherd (2001) citado en Hernández y Morales (2010), considera tres usos básicos: como diagnóstico del conocimiento inicial del alumno, como apoyo a su aprendizaje con el repaso de contenidos y almacenamiento de información y como práctica del aprendizaje para la resolución de problemas del mundo real. Naismith et al. (2004), ofrecen una categorización de las actividades conectada con las teorías de aprendizaje. Consideran el uso de la tecnología móvil en seis tipos de actividades: conductista, constructivista, situacional, colaborativa, informal y permanente y de apoyo al aprendizaje y la enseñanza. Relacionadas con éstas Patten et al. (2006) proponen siete categorías basadas en aspectos funcionales y pedagógicos: administrativo, referencial, interactivo, micromundo, recolección de datos, reconocimiento de la ubicación y colaborativo.

Algunas ventajas del uso del móvil en Educación descritas por Mosquera (2018) son el acercamiento a la realidad tecnológica en la que están inmersos los estudiantes, el desarrollo de la competencia digital, la promoción de la autonomía, el impulso de la creatividad e imaginación, el aprendizaje asíncrono, la posibilidad de mejorar en organización, de comunicarse y de trabajar de forma colaborativa, el aumento de la participación y la motivación, el aprendizaje a través del juego o el seguimiento de los procesos educativos con la monitorización y realización de test de evaluación. También puede usarse como agenda, cronómetro, calculadora o reloj y los alumnos pueden realizar múltiples acciones como acceder a contenidos, buscar información, compartir notas, leer periódicos digitales, traducir, escuchar y grabar audio, ver, editar y compartir imágenes, vídeo, enlaces o documentos. Los profesores ejercen de mediadores tecnológicos y pueden incorporar nuevas metodologías, aplicaciones y recursos digitales. Son muy adecuados para la microenseñanza y microaprendizaje, potenciando el aprendizaje informal y a través de redes sociales. Facilitan la conexión con las familias con aplicaciones como Remind, suponen un ahorro con respecto a otros dispositivos como PCs o aulas de informática y amplían las posibilidades de acceso a la educación en países subdesarrollados.

Como inconvenientes esta autora señala los usos no responsables como el empleo indebido de imágenes y vídeo o las discusiones en redes sociales, el fomento del consumismo y visibilidad de las desigualdades económicas. En el aula, promueve la falta de disciplina, menor concentración del alumnado y más oportunidades de engaño en pruebas de evaluación. El uso abreviado e incorrecto de la lengua, la limitación de la imaginación en niños pequeños y la reducción de la capacidad cognitiva, además de las consecuencias físicas y psicológicas como daños cervicales, estrés visual, sedentarismo, dependencia o adicción. También afecta al desarrollo de las competencias sociales, al ignorar a las personas por prestar atención al móvil (phubbing). En relación con su uso, cada centro educativo establece unas normas y falta preparación docente y objetivos pedagógicos que permitan emplearlo como un medio y no como un fin.

La introducción de los móviles en el ámbito educativo contribuye a desarrollar la competencia digital del alumnado, fomentando sus habilidades para un uso creativo, crítico y seguro. Es necesario concienciar previamente sobre el uso responsable de estas tecnologías para minimizar los riesgos derivados de un uso indebido que pueda vulnerar los derechos de cualquier miembro de la comunidad o repercutir en la salud de los usuarios como apuntan algunos autores (González-Menéndez et al., 2019).

Una práctica con dispositivos móviles tiene lugar en el Instituto de Enseñanza Secundaria Los Valles de Camarzana de Tera (Zamora) donde se aplica un sistema de diálogo en línea entre alumno y robot (chatbot) como ayuda para resolver un problema de Matemáticas. El sistema basado en palabras clave posibilita que el usuario pueda chatear utilizando un lenguaje natural. El término chatbot proviene de las palabras chat, hablar o conversar y bot que es la contracción de robot o software que puede ejecutar determinadas acciones. También conocido como agente conversacional, entidad de conversación artificial o chatterbox es una aplicación informática que imita conversaciones humanas (Allison, 2012). Dado que la Inteligencia Artificial (IA) hace referencia a la maquinaria interna que permite a un robot (o cualquier otro aparato) procesar información (Futuro Eléctrico, s.f.), los chatbots son una forma de interacción con la IA más básica (Morillo, s.f.), llamada IA débil o Narrow por especializarse en un área concreta y realizar sólo la función para la que fueron programados (Futuro Eléctrico, s.f.). En este caso, se basan en el Procesamiento de Lenguaje Natural conocido como PLN o NLP por sus siglas en inglés (Natural Language Processing).

Desde la creación del primer chatbot Eliza, basado en IA, en 1966 por Joseph Weizenbaum, los chatbot han evolucionado, distinguiéndose tres fases (Cerdas, 2017): inicialmente se basaron en interfaces de lenguaje natural para simular conversaciones entre dos humanos (Hsieh, 2011) y al popularizarse internet se pasó a poder chatear con miles de usuarios y se fueron haciendo más sofisticados al combinar diferentes campos como el lenguaje natural, la síntesis del discurso y los vídeos en tiempo real.

Cerdas (2017) también clasifica los chatbots en tres tipos según la interfaz o zona de comunicación entre los sistemas: los basados en cajas de texto (chatterboxes) con interacción producida por entradas y salidas de texto o de voz, los asistentes virtuales personificados, con interfaz representada por un avatar con audio, texto y otros recursos audiovisuales y multimedia (Allison, 2011) y los chatbots presentados con un robot físico. Otras clasificaciones, atienden a criterios como la calidad de la experiencia del usuario y complejidad de la tecnología (Business Insider Intelligence, 2018), presentando los chatbot basados en menús, en palabras clave y contextuales, graduados de menos avanzados a más. Los últimos utilizan IA y aprendizaje automático o ML (Machine Learning) para recordar conversaciones anteriores y aprender de ellas, mejorando con el tiempo.

Los chatbots representan una herramienta de ayuda en la vida cotidiana de las personas como los navegadores de internet que permiten buscar información o los sistemas de respuesta telefónica, el comercio electrónico y como apoyo en el aprendizaje (Hsieh, 2011).

Su popularidad se debe principalmente al uso extendido de programas de mensajería instantánea y el modelo basado en aplicaciones (Carayannopoulos, 2018). Algunos asistentes virtuales en funcionamiento son Siri de Apple, Cortana de Microsoft, Alexa de Amazon o Google Now de Google. Plataformas como IBM ofrecen servicios para desarrollar chatbots como Watson, el servicio en la nube Azure de Microsoft o Dialogflow de Google que ha sido utilizado para desarrollar el chatbot de Matemáticas en el que se centra el estudio. Los chatbot pueden integrarse en aplicaciones de mensajería instantánea como Facebook, WhatsApp o como en este caso Telegram. También pueden ser integrados en la aplicación de comunicación y colaboración Teams de Microsoft, en páginas web o en sistemas de gestión de aprendizaje (LMS) como Moodle.

Con los chatbots, la respuesta a las personas a cualquier hora y cualquier día es una ventaja que es aprovechada también en educación y en ese sentido supone mayor eficiencia en la atención proporcionada. SnatchBot es una herramienta que permite crear diferentes tipos de chatbots para la enseñanza, con la posibilidad de responder a preguntas frecuentes de los estudiantes o ejercer como tutor virtual para enseñar conceptos y procedimientos. Un ejemplo de chatbot en educación es Duolingo, para el aprendizaje de los idiomas.

El informe sobre los chatbot en educación del eLearn Center de la UOC (García Brustenga et al., 2018) distingue entre los chatbot sin intencionalidad educativa y con ella. Los primeros se encargan de los procesos de gestión y asistencia al alumnado, respondiendo a preguntas sobre matriculación, programas de estudios, exámenes, horarios, etc. Los segundos se caracterizan por favorecer los procesos de aprendizaje, adaptarse a las necesidades y ritmos de cada alumno y potenciar la adquisición de destrezas a través de la formulación de problemas para que el estudiante resuelva y que el chatbot evalúa, ofreciendo retroalimentación en tiempo real. Entre los chatbot con intencionalidad educativa, unos se centran en ejercitar y practicar y se basan en aproximaciones conductistas y cognitivistas del aprendizaje y otros ejercen como tutores que facilitan los procesos de tipo socioconstructivista (John-Steiner y Mahn, 1996). La aplicación de los chatbots en educación no sustituye al docente humano (Clark, 2018), sino que proporciona ayuda al alumnado para tareas cognitivas básicas, dejando más tiempo al profesorado para otras de orden superior. Los chatbot también pueden clasificarse por el tipo de tareas que pueden realizarse en educación (García Brustenga et al., 2018), distinguiéndose las siguientes: administrativas y de gestión, resolución de preguntas frecuentes, acompañamiento al estudiante, motivación, práctica de habilidades y destrezas específicas, simulaciones, estrategias de reflexión y metacognitivas y evaluación del aprendizaje de los estudiantes. En este caso el chatbot utilizado en Matemáticas aporta motivación y práctica para resolver problemas de programación lineal, refuerzo de la comprensión y de los procedimientos de resolución.

OBJETIVOS

Objetivo general

El objetivo general del estudio es desarrollar experiencias de aprendizaje innovadoras con dispositivos móviles que refuercen conceptos y procedimientos de resolución de problemas en el área de Matemáticas para el alumnado de 2º de Bachillerato del IES Los Valles de Camarzana de Tera.

Objetivos específicos

Como objetivos específicos se plantean los siguientes:

- Proponer actividades accesibles a través de dispositivos móviles que supongan un aporte adicional a la metodología presencial para un aprendizaje más autónomo.
- Utilizar aparatos tecnológicos que forman parte de la vida de los estudiantes para el aprendizaje ubicuo.
- Programar un asistente virtual (chatbot) que ayude a los estudiantes de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 2º de Bachillerato a resolver problemas de programación lineal.

MÉTODOS

La aplicación de chatbot en la materia de Matemáticas es un ejemplo de uso de los dispositivos móviles con fines educativos. Como prueba piloto para repasar los procedimientos analítico y gráfico de resolución de problemas de programación lineal, se propuso a dos alumnas una actividad a través del chatbot. El alumnado destinatario cursaba la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de 2º de Bachillerato en el Instituto de Enseñanza Secundaria Los Valles de Camarzana de Tera, provincia de Zamora.

Estos chatbots funcionan definiendo posibles entradas a modo de preguntas, que generan salidas (respuestas) hacia el estudiante. Se utiliza la plataforma de comprensión del lenguaje natural

Dialogflow (https://dialogflow.cloud.google.com/) para diseñar e integrar una interfaz de usuario conversacional (bot) en la aplicación móvil de mensajería Telegram.

El grupo de chat de Telegram en el que se integró el bot LosValles se denominó GrupoCane y estaba constituido por la profesora y las dos alumnas de 2º de bachillerato. Se propuso un problema de programación lineal para repasar los contenidos tratados previamente en la clase de forma presencial y para ser resuelto fuera del horario lectivo.

El problema que se planteó a las alumnas es el siguiente (calculo.cc, 2012, p.11):

> Una persona tiene 15000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9%, y el tipo B, del 5%. Decide invertir, como máximo, 9000 € en A, y como mínimo, 3000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B. ¿Cómo debe invertir los 15000 € para que el beneficio sea máximo? y ¿Cuál es ese beneficio máximo anual?

Con el chatbot se atendieron algunas dudas que le surgieron al alumnado al resolver el problema. No se trataba de proporcionar la solución sino de ayudarles a que la obtuvieran a través de pequeñas dosis de información que recibían sólo cuando las necesitaban y tantas como solicitasen, de manera que se suministran adaptándolas a las demandas del interesado. Esto convierte a los chatbots en un elemento más de atención a la diversidad, al adaptarse a los requerimientos de cada alumno, incluido el horario en el que se realiza la actividad.

La profesora, en el grupo clase, dio instrucciones básicas sobre el funcionamiento del chatbot para aumentar su efectividad y las alumnas practicaron con las preguntas y palabras clave necesarias para estructurar el problema y resolverlo.

El chatbot facilitó respuestas síncronas y proporcionó ayuda en cuestiones conceptuales y procedimentales. La profesora contestó dudas que el chatbot no aclaró suficientemente, referidas a los errores cometidos en la obtención de los vértices de la región factible. Tras la realización de la prueba piloto, el alumnado hizo una valoración general de la experiencia, exponiendo las dificultades encontradas, las propuestas de mejora y su grado de satisfacción.

RESULTADOS

En la tabla 1 se muestra el esquema de las entradas y salidas programadas en el chatbot.

Tabla 3. Preguntas y respuestas del chatbot

	Dialogue	
Intent	*Training phrases*	*Responses*
Problema	Un ejemplo de Programación lineal Quiero practicar problemas de Programación lineal Pon un ejemplo de problema de Programación lineal	Te propongo el siguiente problema matemático: "Una persona tiene 15000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9%, y el tipo B, del 5%. Decide invertir, como máximo, 9000 € en A, y como mínimo, 3000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B. ¿Cómo debe invertir los 15000 € para que el beneficio sea máximo? y ¿Cuál es ese beneficio máximo anual?
Variables	Identifica las variables Define las variables ¿Cuáles son las variables?	Hay dos variables, x e y, una referida a los euros invertidos en acciones tipo A y la otra a los euros invertidos en acciones tipo B. x="euros invertidos en acciones tipo A", y="euros invertidos en acciones tipo B".

Función objetivo	¿Cuál es la función objetivo? Dime la función objetivo	La función objetivo que hay que maximizar es el beneficio: f(x,y)= 0,09 x + 0,05 y Beneficio máximo implica que la función a maximizar es: f(x,y)= 0,09 x + 0,05 y
Restricciones	¿Qué inecuaciones determinan la región factible? ¿Cuáles son las restricciones del problema?	Las restricciones son: $0 \leq x \leq 9000$, $y \geq 3000$, $x \geq y$, $x + y \leq 15000$ Las inecuaciones son: $0 \leq x \leq 9000$, $y \geq 3000$, $x \geq y$, $x + y \leq 15000$
Región factible	Determina la región factible Representa la región factible ¿Cuáles son los vértices de la RF?	https://drive.google.com/file/d/1yTbBFZcSWh79Txl6VShNnHwkicsCZvVQ/view?usp=sharing Los vértices de la región factible son: A(3000, 3000), B(9000, 3000), C(9000, 6000), D(7500, 7500)
F. objetivo máxima	¿Cuál es el beneficio máximo anual? ¿Cuál es el valor máximo de la función objetivo?	El beneficio anual máximo es de 1110 €. El valor de la función objetivo en los vértices de la región factible es: f(3000, 3000)= 420, f(9000, 3000)=960, f(9000, 6000)= 1110, f(7500, 7500)= 1050 El beneficio anual máximo es de 1110 € (es el valor máximo de la función objetivo en la región factible y se alcanza en el vértice C (9000, 6000))
Soluciones variables	¿Cuál es el valor de las variables para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es la inversión para que el beneficio sea máximo?	Para que el beneficio sea máximo se deben invertir 9000 euros en acciones de tipo A y 6000 € en acciones tipo B. x= 9000 € (inversión en acciones tipo A), y =6000 € (inversión en acciones tipo B)

Las alumnas plantearon en el chatbot preguntas relacionadas con las diferentes fases de resolución del problema matemático propuesto sobre la formulación y comprensión del enunciado, el proceso de resolución y la interpretación de la solución y el Bot Los Valles respondió con las posibles respuestas programadas (Tabla 1).

En concreto el Chatbot respondió preguntas sobre la determinación de las variables del problema, la función objetivo, las restricciones o inecuaciones, la región factible, el beneficio máximo y el valor de las variables.

La resolución del problema de programación lineal de forma guiada a través de la simulación de conversaciones entre docente virtual (bot) y estudiante resultó útil para consolidar el aprendizaje pues haciendo las preguntas adecuadas, simplificadas con palabras clave, se facilitó la comprensión y asimilación del procedimiento de resolución. No obstante, tras la experiencia, la reflexión sobre el funcionamiento y alcance del chatbot llevó a detectar algunas limitaciones y se hicieron propuestas para mejorar su efectividad. La necesidad de que el alumnado participante en la actividad dispusiese de móvil propio fue un requisito previo que podría haber condicionado el desarrollo de esta. Aunque esta situación, prevista con antelación, no se produjo en este caso, como alternativa y para ampliar la experiencia en entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje se plantea incorporar el chatbot en Moodle o en la plataforma Teams que se destaca por las posibilidades de comunicación y colaboración que ofrece (chat, videollamadas, almacenamiento y compartición de archivos, etc). Hay que considerar que el alcance del chatbot implementado es limitado y no es posible detectar de esta forma errores específicos del alumnado como por ejemplo los cometidos en la determinación de la región factible. Estos errores aportan al docente información sobre el tipo de dificultades que se presentan en los procedimientos analíticos o gráficos.

La persona docente sigue siendo fundamental e insustituible, cubriendo también aspectos emocionales y sociales muy importantes para el aprendizaje y la labor del bot se centra en apoyar y extender algunas de sus funciones pedagógicas fuera del horario lectivo para proporcionar ayuda al alumnado en cuestiones concretas, facilitarle recursos adicionales cuando los requiere y para fomentar su autonomía en el aprendizaje. Aunque hay diferentes tipos de chatbot, unos más avanzados que otros, el utilizado para la experiencia desarrollada sólo permite una comunicación estructurada textual y no tiene la capacidad de aprender de las preguntas que se formulan.

Por otra parte, se plantean mejoras para ampliaciones futuras de la funcionalidad del chatbot como presentar y explicar la función del ayudante virtual, introducir un menú para clarificar los pasos a seguir en la resolución del problema, ampliar las posibilidades de ayuda al alumnado con recursos y más actividades de diferentes grados de dificultad, abordar otros contenidos del currículo oficial de enseñanzas de bachillerato o utilizar reconocimiento del lenguaje natural oral además del escrito.

CONCLUSIONES

Las nuevas generaciones de teléfonos con mejor conectividad inalámbrica y más servicios a disposición de los usuarios potencian su interés por estar conectados en cualquier momento y lugar. El teléfono móvil es una herramienta tecnológica integrada en la vida contemporánea, forma parte de nuestra práctica social y ofrece posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje, que continúan explorándose. El chatbot utilizado en Matemáticas es un ejemplo de uso educativo para extender el aprendizaje fuera del aula a través de estos dispositivos. Con esta experiencia se aportó una alternativa innovadora para ayudar al alumnado a resolver dudas relacionadas con la resolución de problemas matemáticos de programación lineal salvando las barreras espaciotemporales. Tras la aplicación del chatbot y recogidas las impresiones del alumnado participante se concluye que el robot conversacional, usado para repasar los contenidos trabajados previamente en la clase presencial, ayudó a los estudiantes en aspectos concretos del problema relacionados con su formulación, el empleo de estrategias y la interpretación de resultados.

Su efectividad se ha comprobado a través de la percepción del alumnado sobre su utilidad y grado de ayuda y por la sistematización de procedimientos al resolver problemas similares en pruebas de evaluación.

El chatbot supone una ayuda puntual para el alumnado, que les permite recurrir a ella en momentos de estudio fuera del horario escolar, obteniendo respuestas cuando las necesitan. Les permite hacer preguntas sencillas sin sentirse cohibidos por el grupo y aseguran un trato equitativo y sin prejuicios. Sin embargo, esa frialdad conversacional derivada de una comunicación estructurada e inmediata, sin componentes afectivos ni emocionales, es una limitación importante que considerar.

Esta experiencia con ayudante virtual muestra como el teléfono móvil puede facilitar el aprendizaje, contribuyendo en este caso a la asimilación de conceptos y procedimientos, pero es preciso destacar que se ha utilizado partiendo de una situación en la que los contenidos habían sido tratados presencialmente en el aula y considerando el chatbot como un complemento a la práctica docente y no como un sustituto. La interacción entre profesor y alumno ofrece posibilidades de debate en el aula sobre algunos aspectos como la conveniencia de usar métodos de resolución gráficos, analíticos o mixtos o destacar palabras y frases relevantes del enunciado del problema que permiten identificar variables, funciones o restricciones. Podría ampliarse este estudio introduciendo cambios referidos a la integración del chatbot en los canales de comunicación habituales usados en el centro educativo como Teams o Moodle, la ampliación de los contenidos matemáticos abordados, la comunicación con voz o la presentación de un menú de opciones.

REFERENCIAS

Allison, D. (2012). Chatbots in the Library: ¿is it time? *Library Hi Tech*, *30*(1), 95-107. https://doi.org/10.1108/07378831211213238

Business Insider Intelligence. (2018). The types of chatbots [imagen]. https://bit.ly/3BuRz7C

Calculo.cc (2012). *Problemas resueltos de Programación Lineal:11*. https://bit.ly/3qWnEAt

Carayannopoulos, S. (2018). Using chatbots to aid transition. *International Journal of Informacion and Learning Technology*, *35* (2), 118-129. https://doi.org/10.1108/IJILT-10-2017-0097

Caudill, J.G. (2007). The Growth of m-Learning and the Growth of Mobile Computing: Parallel developments. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning, 8*(2), 1–13. https://doi.org/10.19173/irrodl.v8i2.348

Cerdas, D. (1 de septiembre de 2017). Historia de la Inteligencia artificial relacionada con los Chatbots. *Planeta chatbot*. https://planetachatbot.com/historia-inteligencia-artificial-relacionada-con-chatbots/

Clark, D. (7 de septiembre de 2018). ¿Are 'chatbots' a gamechanger in learning? 10 reasons and some warnings! *Donald Clark Plan B*. https://bit.ly/3duUAwE

García Brustenga, G., Fuertes-Alpiste, M. y Molas-Castells, N. (2018). *Briefing paper: Los chatbots en educación*. eLearn Center de la UOC. https://doi.org/10.7238/elc.chatbots.2018

Futuro eléctrico. (s.f.). *Tipos de Inteligencia Artificial: Débil, general y súper-inteligencia*. https://futuroelectrico.com/tipos-de-inteligencia-artificial/

Georgiev, T., Georgieva, E. y Smrikarov, A. (junio de 2004). M-learning-a New Stage of E-Learning. En *International conference on computer systems and technologies-CompSysTech* (Vol. 4, No. 28, pp. 1-4).

González-Menéndez, E., López-González, M., González Menéndez, S., García González, G. y Álvarez Bayona, T. (2019). Principales consecuencias para la salud derivadas del uso continuado de nuevos dispositivos electrónicos con PVD. *Revista Española de Salud Pública,93*, e201908062.

Hernández, R. y Morales, M. (2010). Dispositivos móviles en la educación. *America Learning Media*. https://bit.ly/3dAhYsF

Hsieh, S.W. (abril 2011). Effects of Cognitive Styles on an MSM Virtual Learning Companion System as an Adjunct to Classroom Instructions. *Educational Technology & Society*, *14* (2), 161-174.

John-Steiner, V. y Mahn, H. (1996). Sociocultural Approaches to Learning and Development: A Vygotskian Framework. *Educational Psychologist*, *31*(3-4), 191-206. https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653266

Koole, M. L. (2009). A model for framing mobile learning. En M. Ally (Ed.), *Mobile learning: Transforming the delivery of education and training* (pp. 25-47). AU Press, Athabasca University.

Laouris, Y. y Eteokleous, N. (25-28 de octubre de 2005). *We need an educationally relevant definition of mobile learning* [Presentación de paper]. 4 th World Conference on Mobile Learning, Cape Town, South Africa. https://iamlearn.org/wp-content/uploads/2018/01/mLearn2005_Proceedings.pdf

Morillo, Y. (s.f.). *Inteligencia artificial: Qué es, futuro, riesgos, beneficios*. Futuro Eléctrico. https://futuroelectrico.com/que-es-la-inteligencia-artificial/

Mosquera, I. (14 de marzo de 2018). *M-learning: Ventajas e inconvenientes del uso educativo del móvil*. UNIR. https://bit.ly/3RXQiwQ

Naismith, L., Londsdale, P., Vavoula, G. y Sharples, M. (2004). Report 11: Literature review in mobile technologies and learning. *NESTA Futurelab*. https://www.nfer.ac.uk/publications/futl15/futl15.pdf

Organista-Sandoval, J. y Serrano-Santoyo, A. (2014). Aspectos de posesión, permisos y usos educativos de dispositivos portátiles durante el trayecto de primaria a universidad. *Apertura, 6* (2), 1-11.

Patten, B., Arnedillo, I. y Tangney, B. (2006). Designing collaborative, constructionnist and contextual applications for handheld devices. *Computers & Education, 46*(3), 294–308. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.11.011

Pijper, R. (7 de julio de 2022). *La mayoría de los maestros piden la prohibición de los teléfonos inteligentes en el aula*. Kennisnet. https://bit.ly/3xDhsRD

Quinn, C. (2001). mLearning: Mobile, wireless, in-your-pocket learning. *LineZine, 2006*, 1-3. https://bit.ly/3f7N9MB

Sharples, M. (2005). *Learning as conversation: Transforming education in the mobile age*.na. https://bit.ly/3BT30re

Para hacer referencia al artículo:

Giraldo, M.C. (2022). Chatbot para Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 220 - 228). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

MATEHUERTO:

EL HUERTO ESCOLAR ECOSOSTENIBLE COMO RECURSO EDUCATIVO PARA TRABAJAR LAS MATEMÁTICAS

Mercedes Carpintero Gómez

CEIP LA LAGUNA

Resumen

Se presenta la experiencia educativa de un centro público rural en la que los alumnos primer ciclo de primaria (primero y segundo de primaria) trabajan el currículo de matemáticas en el entorno del huerto escolar y la renaturalización de espacios del patio mediante actividades manipulativas y vivenciales que facilitan la adquisición de las competencias clave y los saberes básicos del área relacionados mediante un aprendizaje significativo de los contenidos curriculares.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, primaria, huerto escolar, aprendizaje significativo.*

INTRODUCCIÓN

Este proyecto surge como respuesta a las necesidades observadas en los alumnos tras la pandemia (2020-22) y las situaciones de aislamiento social y de encierro vividas no solo en el ámbito familiar sino también en los centros educativos. Nuestros alumnos afrontaban el curso con carencias emocionales, sociales y cognitivas provocadas por la educación telemática generada a raíz de la situación de pandemia que vivimos desde marzo de 2020. Esta situación ha descontextualizado muchos aprendizajes que tienen un marcado carácter manipulativo y vivencial y ha dificultado a nuestros alumnos adquirir competencias clave relacionadas con cuestiones de toda índole.

Se observó un aumento de la ansiedad y miedo al contacto y al exterior, aumento de dificultades en el desarrollo de habilidades sociales, disminución de la capacidad de resolución de conflictos, mayor dependencia del adulto y en muchos casos ausencia de iniciativa personal.

Paralelamente y como consecuencia de la remodelación del centro, se realizó una encuesta a toda la comunidad educativa (alumnos, docentes y familias) sobre propuestas de mejora para renaturalizar los espacios exteriores del centro y en ella se comprobó la importancia del entorno y las posibilidades de aprendizaje que teníamos en el exterior.

Se pensó en la posibilidad de buscar espacios exteriores para potenciar un aprendizaje significativo vivencial basado en experiencias activas de aprendizaje que permitieran desarrollar habilidades individuales y en equipo más allá del contexto del aula entendida como espacio cerrado por cuatro paredes.

Se diseñó una propuesta integral donde trabajar las competencias clave mediante proyectos y situaciones de aprendizaje interdisciplinares y se planificó el trabajo conjunto de todos los niveles y ciclos (Educación Infantil y Primaria de 3 a 12 años) uniendo a los alumnos, los docentes y las familias.

JUSTIFICACIÓN

Contexto: Nuestro Colegio

Es un centro público de ámbito rural (Laguna de Duero está a 8km de Valladolid) de Educación de Infantil y Primaria con 376 alumnos, línea 2 con 18 aulas. En Educación Infantil (en adelante E.I.) se utiliza una metodología activa y participativa que fomenta el aprendizaje vivencial, multidisciplinar y globalizado de los contenidos. En Educación Primaria (en adelante E.P.) se trabajan múltiples actividades integradoras para la consecución de las competencias clave desde un aprendizaje significativo, apostando por el uso de los espacios exteriores como lugares de aprendizaje donde lograr de los objetivos del currículo.

El colegio lleva varios años desarrollando una línea de trabajo que potencia la dimensión emocional y afectiva de los alumnos, constituyendo una de nuestras señas de identidad.

También se ha iniciado un cambio metodológico muy significativo desde el nivel de Educación Infantil que está procediendo a una remodelación de la metodología de enseñanza/aprendizaje siendo más manipulativo y vivencial desde el planteamiento de las Metodologías Activas.

El centro apuesta por las metodologías activas (Montessori y otros) como generadoras de aprendizaje significativo que parte de cuestiones más cercanas al alumno (Ausubel) para cimentar su aprendizaje desde el constructivismo generando un andamiaje de los conocimientos.

Este cambio implica un trabajo por proyectos en diferentes espacios de aprendizaje flexible de modo que el alumno se implica plenamente en la tarea y los conocimientos. Desde primaria también se trabaja con el concepto de aula como taller de experimentación o laboratorio de aprendizajes.

Desde 2016 nuestro centro es un centro de escolarización preferente de alumnado con discapacidad motora. Por ello las medidas de atención a la diversidad no se conciben como una línea de actuación diferenciada, si no que impregnan todas las actividades de nuestro proyecto y se aplican en cada una de las fases de este.

El planteamiento de este proyecto sigue los principios del Diseño Universal para Aprendizaje (DUA) desarrollando facilitar la participación de todos.

En el proyecto participan los docentes de E.I y E.P: tutores y especialistas, así como sus alumnos, organizados gracias a un grupo motor formado por 4 docentes de cada uno de los niveles y ciclos.

El centro tiene diversos relacionados con *acciones medioambientales*: Huerto escolar como centro de trabajo científico activo y laboratorio de experiencias desde 2016 (Premio Nacional XII Vicente Ferrer), Premio Subvención a proyectos Educación para el desarrollo Sostenibles 2021-22 y el Proyecto Innovación Educativa «Próxima Estación: ODS 2030» (2021-22), entre otros.

En esta presentación se van a exponer más detalladamente las propuestas realizadas para el área de matemáticas por los alumnos del primer ciclo formado por los alumnos de primero y segundo de primaria de 6 a 8 años (con aportaciones a las actividades realizadas por otros ciclos). Los alumnos de primer ciclo están organizados en 4 aulas, al ser un centro de nivel 2, siendo dos de primero y dos de segundo.

Las clases son heterogéneas con un nivel y un ritmo de aprendizaje diversos. Presentan alumnos con Necesidades Educativas Especiales de los cuales varios son ACNEAE (alumnos con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo según la terminología LOMLOE).

Las horas de matemáticas en el nivel son 5,5h. semanales repartidas en 5 o 6 sesiones habitualmente de aproximadamente una hora (en ocasiones una sesión de media hora, localizadas en el aula y el huerto).

El centro cuenta con un huerto escolar con 4 bancales altos diseñado y realizados teniendo en cuenta las necesidades motóricas de los alumnos (respetando la separación entre bancales para poder acceder con sillas de ruedas y/o andadores). También tenemos un invernadero, una compostera, maceteros grandes de flores y una estación meteorológica.

Contamos también con un espacio donde cuidamos un Eduvivero de Árboles de diferentes especies donados por el Vivero Forestal de Castilla y León. Cada clase tiene un tipo de árbol: fresno, almendro, roble, encina, pino y cada alumno tiene su propio árbol que cuida y del que es responsable hasta que abandone el centro escolar y se utilice para reforestar una zona del núcleo urbano de Laguna de Duero o de los campos, la acequia o los pinares locales en un proyecto en coordinación con la Consejería de Medio Ambiente del Ayuntamiento local.

Proyectos

Desde el centro escolar se plantea este programa de actuación para ofrecer a los niños y niñas herramientas que les ayuden a actuar como ciudadanos comprometidos.

a) Huerto como laboratorio de experiencias

Esta idea de Huerto nace del Proyecto de huerto "Nuestro Huerto: Donde la Ciencia Crece" donde planteamos el huerto escolar como un gran laboratorio en el que nuestros alumnos van a experimentar mientras ven crecer no sólo las plantas sino también sus conocimientos. De esta forma el huerto es un centro de aprendizaje que nos permite articular todas las áreas favoreciendo un aprendizaje integral en el que partiendo de actividades vivenciales se genere un aprendizaje significativo en los alumnos.

En el huerto se trabaja con una metodología activa y participativa que fomenta el aprendizaje vivencial, multidisciplinar y globalizado de los contenidos integrando las diferentes áreas para favorecer la adquisición de competencias básicas.

Nuestro huerto escolar es un instrumento pedagógico-didáctico para estimular, motivar y mentalizar a las nuevas generaciones hacia el respeto y cuidado del medio ambiente. Se trata de poner en contacto a nuestros alumnos con actividades prácticas que aglutinen de forma globalizada o interdisciplinar todos los contenidos (de las diferentes áreas: ciencias naturales, ciencias sociales, artísticas, religión, lengua y literatura, inglés, etc.) referentes a nuestro entorno ambiental. Desde el área de matemáticas se realizan planificaciones de semillas, mapas, mediciones de plantas, reportos, se establecen las proporciones de tierra necesaria para plantar, etc. Se pone en valor el área y se utiliza como una herramienta para la vida diaria aplicándola al huerto.

b) Árbol de la vida

El proyecto surge como una respuesta a las necesidades medioambientales detectadas como consecuencia del cambio climático y la situación de amenaza medioambiental que vivimos. Queremos que nuestros alumnos sean conscientes de su importante papel y la labor crucial que tienen como agentes de cambio en la situación del planeta colaborando desde nuestras posibilidades en pequeñas acciones locales que puedan tener un impacto global. Para ello hemos utilizado las matemáticas en el huerto.

Este proyecto se propone para mejorar las amenazas medioambientales que tiene Laguna de contaminación por ozono ya que Laguna está en riesgo llegando a ser considerada "zona cero" en múltiples ocasiones en estos últimos años (ver https://www.iagua.es/noticias/espana/ecologistas-accion/17/06/06/laguna-duero-zona-cero-contaminacion-atmosferica). Por ello, este proyecto supone un aprendizaje servicio para la comunidad en el que los alumnos se implican en los problemas del entorno de manera activa y toman acción sobre las soluciones reales a los problemas que los rodean.

Propuesta curricular

El huerto y el Eduvivero de Árboles es el eje para el trabajo de todas las áreas encaminadas a la adquisición de las competencias clave desde el desarrollo de sus tres dimensiones competenciales: Saber (establecimiento de la parte cognitiva y conocimientos), Saber hacer (parte instrumental o las destrezas necesarias para la aplicación del saber) y Saber ser (establecimiento de actitudes que se vinculan con el aprendizaje).

El cambio de legislación nos ha llevado a reformular la terminología.

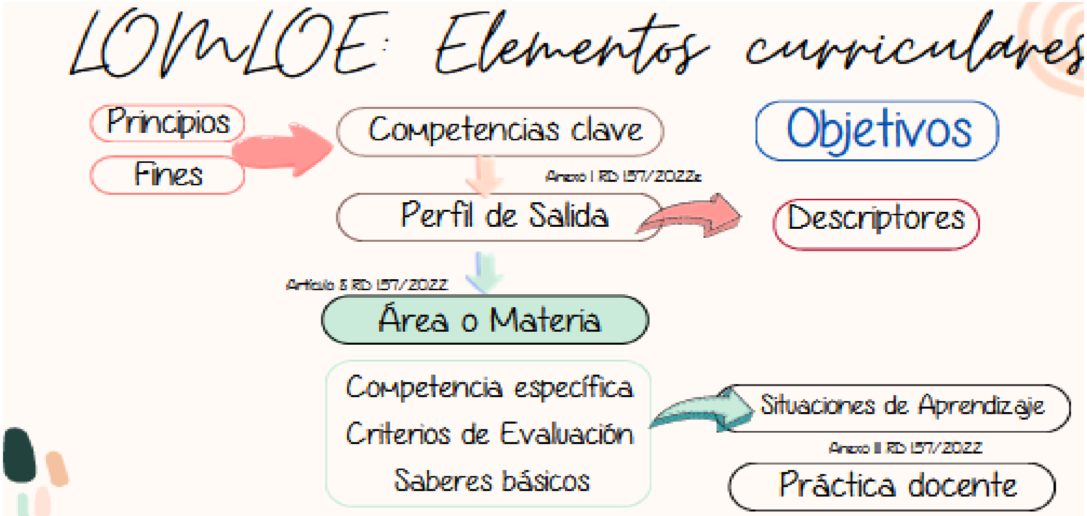


Figura 1. Planteamiento curricular del proyecto

Las COMPETENCIAS CLAVE (Art.2 RD 152/2022) se definen según la LOMLOE (actual legislación vigente) como: “desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo, y afrontar los principales retos y desafíos globales y locales”, son un conjunto de habilidades imprescindibles.

La competencia asociada al área de matemáticas es: “Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)”. Esta competencia se concreta en las específicas mediante las cuales el desempeño que el alumnado se debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada área o ámbito.

Según se indica en el RD de enseñanzas mínimas para E.P. estas son:

Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM) (ANEXO I RD 157/2022) [se concreta para el primer ciclo de E.P. en]:

- La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible.

- La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos.

- La competencia en ciencia conlleva la comprensión y explicación del entorno natural y social, utilizando un conjunto de conocimientos y metodologías, incluidas la observación y la experimentación, con el fin de plantear preguntas y extraer conclusiones basadas en pruebas para poder interpretar y transformar el mundo natural y el contexto social.

- La competencia en tecnología e ingeniería comprende la aplicación de los conocimientos y metodologías propios de las ciencias para transformar nuestra sociedad de acuerdo con las necesidades o deseos de las personas en un marco de seguridad, responsabilidad y sostenibilidad.

Experiencias educativas

En este proyecto se favorece y se potencia una metodología activa y vivencial partiendo de la LOMLOE 2/2020, el RD 157/2022 de Enseñanzas Mínimas de E.P. y el D.39 /2022 que establece el currículo de E.P. para Castilla y León. Se ha concretado la metodología de este proyecto teniendo en cuenta los siguientes principios:

1. Desarrollo de tareas de complejidad creciente con andamiaje de los aprendizajes, que supongan un reto para los alumnos y cuya solución se concierta a la vez en nuevos aprendizajes. Se establecen metas concretas (p.e. cultivar fresas, favorecer el conteo mediante diferentes propuestas) y se integran os saberes básicos: desarrollo exponencial de las fresas mediante los plantones).

2. Se proponen miniproyectos que incluyen ejercicios, actividades y tareas que desarrollan procesos cognitivos superiores estableciendo relaciones y conexiones entre aprendizajes previos y nuevos aprendizajes (no solo en el área sino también con otras áreas). Por ejemplo, se realizan observaciones de las flores, el número de flores que da cada planta, el número de hojas y la relación entre ambos datos realizando un análisis reflexivo de las causas y consecuencias tras analizar los datos registrados y las tabas creadas por los alumnos.

3.- Se incluyen y tienen en cuenta las competencias específicas como concreción de las competencias clave y la integración del aprendizaje, de manera que se especifican los elementos curriculares en las actividades y tareas concretas del huerto. Por ejemplo, en segundo se trabaja la iniciación al concepto de multiplicación activamente realizando operaciones con el cálculo de tomates.

4.- Se parte de la realidad y los intereses concretos de los alumnos realizando actividades y propuestas contextualizadas que tienen como base los principios de intervención educativa (de actividad, aprendizaje significativo el principio lúdico, etc.). Se realizan juegos con los tomates: “Mates con tomates” donde el premio son los tomates de la cosecha. Calculando el peso y la proporción de agua, paja y micelio para la elaboración de mazos para el autocultivo de setas.

5.- Se trabaja el método científico con la formulación de hipótesis que posteriormente se comprueban/reprueba, se analizan datos y se establecen conclusiones que nos llevan a la formulación de nuevas hipótesis. Todo ello nos ayuda a potenciar un pensamiento científico, crítico, fundamentado y al tiempo que se fomenta la capacidad de reflexión y el establecimiento de relaciones causa-efecto en la búsqueda de respuestas y soluciones. Por ejemplo, para buscar soluciones al problema del agua organizando el riego, midiendo la goma, calculando los surtidores de agua, contando semillas, calculando el gasto y dinero necesario, etc.

6.- Es fundamental el principio de actividad del alumnado que pretende hacer que sean progresivamente más autónomos de manera individual pero también en grupo favoreciendo agrupamientos flexibles y el trabajo cooperativo. Se distribuyen las tareas y de esa forma parte del equipo realiza el semillero, parte se encarga del riego y otros del cuidado posterior y trasplante llegado el momento en los bancales.

Para articular las actividades y propuestas concretas han sido agrupadas siguiendo el currículo de matemáticas en saberes básicos, siendo estos los siguientes: Sentido Numérico, Sentido de la medida, Sentido Espacial, Sentido Algebraico, Sentido Estocástico y Sentido Afectivo.

El huerto escolar ecosostenible

Algunas de las actividades realizadas para cada uno de los saberes básicos en el área de matemáticas relacionadas con el huerto escolar han sido:

1. Sentido Numérico: conteo de plantones, enumeración, asociación grafía cantidad; listado de semillas, plantas que necesitamos; cálculo del gasto que supone comprar: las semillas, la tierra, las macetas; relaciones mayores que, menor que con semillas analizando de cuál hay más o menos.

2. Sentido de la medida: estimación de proporción de tierra necesaria para las macetas; registro del número de flores de las fresas, comprobación del número de fresas que se producen, establecimiento de relaciones, cálculo del gasto de agua con trabajo de medidas de capacidad: cuánto agua hay en un cubo y en la regadera o en un vaso, establecer relaciones mayor-menor que con la capacidad de los recipientes. Peso y tamaño de las semillas buscando relaciones entre el tamaño y el peso, organizando de mayor a menor por peso, o por tamaño (la de girasol *vs* la de amapola).

3. Sentido Espacial: figuras geométricas, sistemas de representación, visualización, razonamiento y modelización. Realización de mapas de los bancales para distribuir la cosecha; organización por asociación de cultivos estableciendo relaciones de 1 a 2 por el número de semillas/plantones plantados.

4. Sentido Algebraico: estudio de la biodiversidad del huerto tomando nota de especies plantadas, malas hierbas y búsqueda de soluciones para plagas (las más que suponen un menor gasto, las que consumen menos agua); estrategias para distribuir los plantones teniendo en cuenta la asociación de cultivos.

5. Sentido Estocástico: gráfico de crecimiento de lechugas, flores de tomates y tomates de los bancales y análisis de tomateras de sol y sombra para determinar cuál ha producido más y las causas que pueden haberlo propiciado; representación de datos de la cosecha de lechugas y acelgas y su distribución por clases y alumno; estimación de cuántos guisantes tocan por alumno en el reparto de la cosecha.

6. Sentido Afectivo: identificación de las emociones ante las matemáticas en el entorno del huerto; curiosidad e iniciativa por aplicar las matemáticas para la mejora de nuestras acciones en el huerto; participación activa en la distribución de tareas y la consecución de las mismas en el trabajo en equipo de la clase y con el resto de las clases en el cuidado del huerto.

El eduvivero de árboles

Algunas de las actividades realizadas para cada uno de los saberes básicos relacionadas con el eduvivero de árboles han sido:

1. Sentido Numérico: conteo de plantones; enumeración, asociación y grafía cantidad con el número total de plantones, el número para cada clase y la proporción de las clases por el número de alumnos que tienen; listado de semillas de las que provienen los árboles; reparto de árboles por cada clase realizando operaciones para conocer cuántos necesitamos y cuántos sobran: cálculo del gasto que supone comprar las macetas; estimación de coste de la tierra; redondeo de cifras de tierra necesaria, macetas, plantones de árbol, compra de las macetas.

2. Sentido de la medida: estimación de proporción de tierra necesaria para las macetas, cálculo del peso de la tierra por maceta y cálculo aproximado de dos macetas-cuatro macetas (un equipo); registro del número de flores y hojas de los árboles; comprobación del número ramas; medida con metro de la longitud de la rama y del tronco en periodos diferentes, comprobación del crecimiento (o no) con toma de datos; valoración de los árboles que más/menos han crecido.

3. Sentido Espacial: figuras geométricas presentes en el eduvivero; creación de espantapájaros con figuras geométricas; sistemas de representación; visualización, razonamiento y modelización;

realización de mapa para distribuir los árboles en el espacio del colegio anotando zonas soleadas y sombrías y distribuyendo las especies por sus necesidades; representación gráfica de los árboles en el plano; distribución proporcionada, inclusión de figuras geométricas diferentes para su representación dependiendo del tipo de árbol.

4. Sentido Algebraico: estudio de la biodiversidad del eduvivero de árboles tomando nota de las especies plantadas, malas hierbas y búsqueda de soluciones para plagas; estrategias para distribuir los árboles en el perímetro del patio, razonar ante las dificultades que se van encontrando como, por ejemplo, que se ha cortado mucho la manguera de riego y cómo solucionarlo o los problemas para medir bancales sólo con su regla (la necesidad de sistemas de medida adecuados y la búsqueda activa de soluciones).

5. Sentido Estocástico: gráfico de crecimiento de árboles; análisis de condiciones de sol y sombra para determinar cuál ha crecido más y las causas que pueden haberlo propiciado; representación de datos crecimiento por cada tipo de árbol y su distribución por clases; representación en climograma de datos recogidos de la estación meteorológica: análisis de la incidencia en el crecimiento de los árboles.

6. Sentido Afectivo: identificación de las emociones ante las matemáticas en el entorno del huerto. Curiosidad e iniciativa por aplicar las matemáticas para la mejora de nuestras acciones en el huerto y vivero de árboles; participación activa en la distribución de tareas y la consecución de las mismas en el trabajo en equipo de la clase y con el resto de las clases en el cuidado de los árboles.

CONLUSIONES FINALES

El huerto escolar ha sido un elemento fundamental en el desarrollo del área y nos ha permitido incluir las matemáticas y su importancia en la vida real de los alumnos, valorando su importancia y su utilidad. No solo nos ha ayudado a poner en valor el área, sino que además han sido conscientes de lo mucho que las necesitan y cuánto ayudan en tareas sencillas ayudando a organizar información, planificar y dar respuesta a las dificultades que se iban presentando. En ocasiones las matemáticas, y el resto de áreas, se descontextualizan al sacarlas de su realidad y situarlas entre las cuatro paredes de las clases. Con este proyecto queremos devolverlas a la vida real.

El huerto ha permitido aplicar los conocimientos de forma clara y la vivenciación de los aprendizajes ha aumentado su significatividad. Han comprendido procesos complejos más rápidamente y se han desmitificado problemas integrando el error como parte del aprendizaje.

Las dificultades se han resuelto por los compañeros en muchas ocasiones gracias a la flexibilidad del entorno. La flexibilización del espacio y los tiempos, así como liberar a los alumnos de las ataduras de las sillas les han permitido relacionarse mejor ayudándose unos a otros de manera natural sin la intervención del docente.

Paralelamente han comprendido y valorado la importancia del área en acciones cotidianas. También han aprendido a desarrollar la curiosidad por aplicar las matemáticas para mejorar las condiciones de nuestros huerto y árboles, poniendo en valor el área y comprobando no sólo que es muy útil, sino que además es necesaria y ayuda a mejorar los procesos de cultivo y cuidado.

Una de las cuestiones más interesantes que hemos podido comprobar con este proyecto es cómo han mejorado la capacidad de análisis, razonamiento y reflexión potenciando el pensamiento crítico, lo cual es fundamental como pequeños agentes de cambio y ciudadanos de un planeta que entre todos tenemos que proteger y en lo que las matemáticas tienen mucho que aportar.

Referencias

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 340, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado 52, de 2 de marzo de 2022, 24386 - 24504.

DECRETO 38/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación primaria en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y león 190/2022, de 30 de septiembre de 2022. 48191- 48315.

Para hacer referencia al artículo:

Carpintero Gómez, Mercedes (2022). Matehuerto: el huerto escolar ecosostenible como recurso educativo para trabajar las matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 229 - 236). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

BUSCANDO UN MUNDO MEJOR DESDE EDUCACIÓN INFANTIL: MATEMÁTICAS Y SOSTENIBILIDAD

Novo, M. L.[a], Cuida, A.[a], Sánchez, S. [b]

[a] Universidad de Valladolid, [b] CEIP Federico García Lorca (Valladolid)

Resumen

Uno de los desafíos colectivos más importantes del siglo XXI es la sostenibilidad. Es preciso acercar a los niños, desde edades tempranas, hacia escenarios de integridad compartida. Se pretende activar, desde diversas facetas, sus destrezas para proponer soluciones a diversos problemas relacionados con el panorama mundial actual. Para ello, se planifican diversas tareas docentes con niños y niñas de 4 años en las que se trabajan en contextos matemáticos algunos Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Gracias a los registros recopilados de las experiencias realizadas, se concluye que los niños y niñas, haciendo uso de las matemáticas, perciben cómo se pueden mejorar algunos aspectos del mundo que nos rodea.

Palabras clave: *sostenibilidad, contextos de vida cotidiana, Educación Matemática Infantil*

INTRODUCCIÓN

Diversos investigadores defienden la necesidad de aprender matemáticas en las primeras edades de forma globalizada a partir de contextos significativos para los niños. Aproximándose al entorno cercano a través de materiales, juegos, cuentos, canciones, …para ir descubriendo gradualmente el espacio, los números, las medidas… (Saá, 2002; Alsina, 2011; Marín, 2013; entre otros). De esta forma, los niños valorarán las matemáticas porque forman parte de su día a día y en la escuela se convierten sus conocimientos previos en prácticas formales y con pleno sentido.

La Educación Matemática Realista (EMR) nace en Holanda a partir de las ideas de Freudenthal (1991) quien propone para el aprendizaje de las matemáticas, un nuevo enfoque para pasar de lo concreto a lo abstracto transitando por distintos niveles de comprensión como reacción a la matemática de los años 70 cuya orientación estaba relacionada con tareas puramente mecánicas.

El mundo actual está plagado de conflictos de todo tipo (crisis energética, hambre, guerras, desigualdad social, …). La educación para el desarrollo sostenible (EDS) pretende ayudar a las personas a comprender los desafíos globales y contribuir para lograr un mundo mejor. Los 17 objetivos de desarrollo sostenible (ODS) descritos en el informe de la Unesco de 2017 se han constituido como un buen instrumento para ayudar a transformar la sociedad y a afrontar los problemas latentes que amenazan nuestro futuro y el de nuestro planeta. La educación matemática desempeña una función primordial para enfrentar estos desafíos.[i]

Es indiscutible que vivimos con otras personas luego es preciso, orientar a las niñas y a los niños hacia escenarios de equidad, que a su vez estén relacionados con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ONU, 2015), encaminado al progreso de las capacidades y garantía de los derechos y que permitan abrir el camino para participar en la configuración de una sociedad sostenible.

> Las grandes transformaciones no se lograrán con una sola persona, sino con un liderazgo comprometido y unas comunidades que se apoyen mutuamente. Este documento nos recuerda que solo una auténtica colaboración nos permitirá avanzar realmente en la consecución de los nuevos objetivos mundiales de desarrollo sostenible. Matronas, docentes, políticos, economistas y activistas deben

[i] https://bit.ly/2Uph4oY

> encontrar un terreno común en su búsqueda de un cambio sustancial y sostenible (Mohammed, 2014, p.2).

Partiendo de estas premisas es ineludible llevar a cabo una pedagogía transformadora y orientada a la acción (Unesco,2017). El enfoque de la Educación Matemática Realista es el más adecuado en este caso.

Además, en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil aparece por primera vez la sostenibilidad como capacidad a trabajar en edades tempranas:

> Se debe favorecer el desarrollo progresivo de un enfoque crítico y reflexivo, así como el abordaje de aspectos relacionados con el interés común, la sostenibilidad, el respeto a la diferencia o la convivencia, iniciándose en la gestión de las posibles situaciones de conflicto mediante el diálogo y el consenso (p. 14595).

En este artículo se presentan prácticas de aprendizaje realista a partir de conocimientos matemáticos relacionados con algunos ODS en un aula escolar de 4 años. Para fundamentar dicha experiencia se expondrá de forma somera la relación entre la Sostenibilidad y la EMR.

SOSTENIBILIDAD Y ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA EN EDADES TEMPRANAS

Según Heuvel–Panhuizen (2002) en un principio, la EMR surge como un conjunto de ideas focalizadas en buscar respuestas a dos preguntas: ¿qué matemáticas enseñar? y ¿cómo enseñarlas?

Las creencias centrales asociadas a la EMR se concentran en el libro Revisiting Mathematics Education (Freudenthal, 1991), en el que el fundador de dicha teoría se refiere a “las matemáticas como sentido común” (Freudenthal, 1991, p. 4).

Actualmente la EMR se basa, según Alsina (2009) en seis principios fundamentales:

- De actividad. Las tareas matemáticas son para todas las personas. Se pretende matematizar el mundo que nos rodea.

-De realidad. Las matemáticas se aprenden partiendo de contextos reales.

-De niveles. Existen diversos niveles (situacional, referencial, general, formal) de comprensión de las matemáticas.

-De reinvención guiada versus matemática pre-construida. Se trata de reinventar las matemáticas con la ayuda de la maestra.

-De interacción. En el aula para poder aprender ha de existir un diálogo entre los niños y niñas y también con la maestra.

-De interconexión. Enfatiza que es esencial contemplar las relaciones que aparecen entre los distintos bloques de contenido matemático (números, geometría, medida…), en lugar de interpretarlos de forma aislada.

En definitiva, se trata de lograr que el alumnado través de las conversaciones, junto con la participación de la maestra, construyan su propio conocimiento. A través de contextos reales se establecen relaciones entre los propios contenidos matemáticos y entre estos y otras materias.

Según Alsina (2011), desde el ámbito de la Educación Matemática, un contexto es “una situación más o menos problemática que puede ser objeto de estudio y que genera preguntas o problemas que requieren las matemáticas para contestarlas o resolverlas” (p.13). La utilización de los contextos en el aula sirve para motivar al alumnado, facilitar el paso de situaciones concretas a la formalización de conceptos encaminando a los niños y niñas hacia la adquisición de la competencia matemática.

Las ideas que adopta el instituto Freudenthal y, por tanto, la EMR motivan a los niños a reinventar las matemáticas a través de situaciones cotidianas. Esta reinvención junto con la matematización de problemas cotidianos (Alsina, 2011) les ayuda a poner en marcha la imaginación activando así su pensamiento matemático. Se considera que uno de los principios relevantes de la EMR es el principio de realidad, el cual defiende la importancia de los contextos realistas como base para el desarrollo de una Educación Matemática de calidad (ODS 4).

Reeuvijk (1997) proporciona cinco reflexiones que defienden el uso de los contextos. En concreto, se destacan dos, que, por un lado, los contextos permiten comprender la relación de las matemáticas con la sociedad y, por otro, que los propios estudiantes están orientados al descubrimiento de la relevancia que tienen las matemáticas en su educación.

Se trata de lograr un mundo mejor. Desde la ONU se sugieren los 17 objetivos de desarrollo sostenible (ODS) (UNESCO, 2017) que abordan una amplia variedad de temáticas (Figura 1):

Figura 1. Objetivos de desarrollo sostenible, UNESCO (2017).[ii]

Varios autores han evidenciado el alcance de relacionar la Educación Matemática con la Sostenibilidad, … (Alsina y Calabuig, 2019; Alsina y Mulà, 2019; Joutsenlahti y Perkkilä, 2019; Vásquez et al., 2020; entre otros).

Conexiones y Educación Matemática Infantil

Según el Real Decreto 95/2022, las tres áreas (crecimiento en armonía, descubrimiento y exploración del entorno y, comunicación y representación de la realidad) en las que se organiza el currículo de segundo ciclo de Educación Infantil (EI) se deben interpretar como ámbitos propios de experiencia y desarrollo infantil. Requieren un planteamiento metodológico globalizado, significativo y motivador para favorecer conexiones entre todos los elementos que las conforman.

Teniendo en cuenta este planteamiento educativo se deduce que el pensamiento matemático no se puede trabajar aislado. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003) propone trabajar los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación, que deben formar parte de la educación integral de los niños. En relación a las conexiones, se subraya que:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a los estudiantes para: reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas; comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente; reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos (NCTM, p.68).

[ii] https://bit.ly/2Shjnd7

Para poder entender los conceptos matemáticos es fundamental saber relacionar unos con otros y con otras disciplinas. Nos interesan las conexiones prácticas que relacionan las matemáticas con el entorno (Novo et al. 2017). Se van a trabajar algunos ODS a partir de las conexiones con el entorno.

Diseño metodológico de la tarea

La experimentación se ha llevado a cabo en el CEIP "Federico García Lorca" de Valladolid, en aula de 2º de EI. Todas las actividades se han planificado y gestionado a partir de los principios de la EMR Para motivar el aprendizaje de los niños se ha tenido en cuenta la relevancia de las buenas preguntas (Baroody, 1998) para realizar tareas en contextos cotidianos conectadas con algunos ODS, a partir de los conocimientos matemáticos. Utilizando herramientas diversas, algún cuento interactivo para motivar, objetos de la vida cotidiana, en ocasiones actividades interactivas y finalmente prácticas sobre papel en blanco.

ALGUNOS REGISTROS DE LAS TAREAS REALIZADAS

A partir de varias visitas al Colegio se pudo comprobar que se realizaban tareas relacionadas con la sostenibilidad: alimentación saludable, plantación en macetas y visita al huero del Colegio, reciclaje, día del agua, día de la paz, día de la mujer e igualdad de género, … La maestra comentó que a través de las conexiones se pueden trabajar los ODS, en este caso, desde las matemáticas.

Los ODS implícitos con las prácticas realizadas han sido: salud y bienestar (ODS 3), desarrollo de una educación matemática de calidad (ODS 4) y acción por el clima (ODS 13). Los contenidos matemáticos subyacentes han sido: identificación y discriminación de cualidades, números, recuentos, secuencias temporales. Se trataron los conceptos inter y transdisciplinarmente. Se recopilan de forma breve las conversaciones que tuvieron lugar entre los niños y la maestra con el objetivo de conseguir un mundo mejor.

Importancia de las plantas

Se realizó una motivación inicial con un vídeo muy corto sobre la historia de una semilla[iii]. En la asamblea se planteó una buena pregunta: ¿por qué son importantes las plantas? para los jardines de las ciudades, algunas plantas se comen, sin las plantas no se podría vivir, … ¿Sabéis dónde podemos encontrar plantas que se comen? en las tiendas y, ¿en algún otro sitio? en los huertos. Vamos a plantar esquejes de lechuga ¿dónde vamos a llevarlas? ¿tenemos un huerto muy cerca? claro llevaremos las lechugas al huerto de nuestro cole.

Figura 2. Plantando lechugas

Gracias a esta actividad se realizaron las secuencias temporales necesarias para plantar (figura 2), se discriminaron y clasificaron los colores y tamaños de las macetas, correspondencias uno a uno (una planta por maceta). Se hicieron recuentos. Y, "se han reciclado tarros de yogur" (ODS 13).

[iii] https://bit.ly/3h5xnyO

Después de plantar las lechugas en el huerto tuvieron lugar numerosas preguntas y conversaciones. La maestra con sus buenas preguntas iba acompañando a los niños en sus descubrimientos. Se llegó a la conclusión de la importancia de consumir alimentos cercanos, por un lado, la gasolina se ha encarecido mucho y, además, no se contamina el planeta. Se observó el recipiente para el compost, servía para abonar las plantas y, a la vez, se reciclaba (ODS 13). También había flores, se compararon sus alturas, se discriminaron sus colores, el naranja de las caléndulas servía para ahuyentar plagas.

De vuelta al aula, había que almorzar se aprovechó la actividad para recordar que en el colegio todos los días el almuerzo era “saludable”. Unos días se traían frutas, otros un bocadillo, otros un yogurt, y se les pregunta acerca de por qué el colegio ha decidido restringir el consumo de dulces (pregunta encaminada a vincular esta actividad con el (ODS 3). Todos los niños saben la respuesta ya que un padre realizó una actividad explicando la pirámide de los alimentos.

Después del recreo se siguió trabajando con las plantas, en este caso, con plantas aromáticas y curativas. Reconocieron romero, laurel, perejil, tomillo, orégano, manzanilla, menta poleo, …Se trabajó el olfato, y se les preguntó si sabían para qué servían estas plantas, algunos respondieron que el perejil se usaba para cocinar y el tomillo. Y, una niña respondió que su mamá tomaba una infusión de menta poleo para hacer bien la digestión. Finalmente, todos los niños dibujaron el huerto del colegio en una hoja en blanco.

Figura 3. Oliendo romero.

Figura 4. Dibujando el huerto del colegio en una hoja en blanco.

Después de tantas conversaciones y actividades los niños descubrieron la importancia de las plantas, de la alimentación saludable. Además, también se llegó a la conclusión de la necesidad de los jardines en las ciudades ya que se aporta el oxígeno fundamental para el planeta. Por otra parte, se han trabajado, a la vez, numerosos contenidos matemáticos,

Escribiendo números con tapones

Se realizó una motivación inicial con una canción[iv] en la que se asocia número y cantidad, y en un principio aparece la serie numérica hasta el 6. Posteriormente, la maestra pregunta ¿giran las seis canicas? sí claro como las esferas grandes con las que hemos jugado algunas veces. Estuvieron trabajando el seis con materiales diversos, haciendo descomposiciones, formaron el seis con el cuerpo.

Posteriormente, se utilizó la pizarra interactiva utilizando un genially con la parte correspondiente al número 6[v], se trabajan la asociación de número y cantidad, el dígito, el nombre del número, la ordenación del seis en la recta numérica (figura 4). Para interiorizar el 6 se ha usado tapones reciclados de botellas (figura 5)

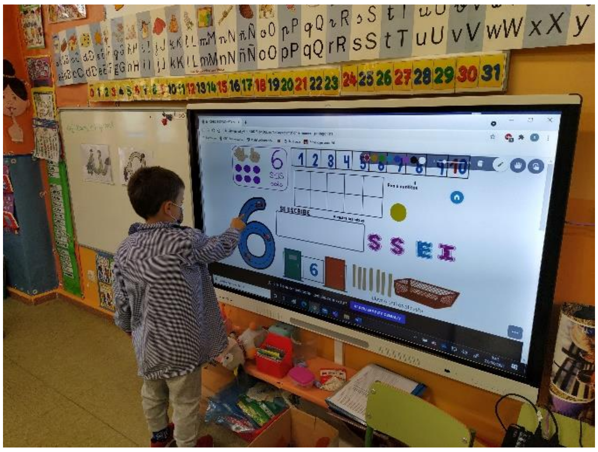


Figura 5. Trabajamos el 6

Figura 6. Se construye el seis con tapones

Además de utilizar los tapones para reciclar y "escribir" los números. Se recicla el papel, cada niño utiliza una botella personal para beber agua, las cáscaras de los plátanos del almuerzo sirven para hacer el compost, …

[iv] http://bitly.ws/v2h4
[v] http://bitly.ws/v2sW

Consideraciones finales

Los registros de las tareas se han planteado a partir de una situación de aprendizaje en contextos reales, siguiendo metodológicamente para el diseño de las prácticas, las recomendaciones de la EMR, de tal forma que los niños y niñas van estructurando su conocimiento matemático a través de buenas preguntas de la maestra como sugiere Malaguzzi (2007), … y no se limitan a sujetos pasivos de una matemática pre-construida. Se ha superado una transmisión de conocimientos predeterminados. La práctica docente se ha basado sobre todo en el planteamiento de retos y de preguntas por parte de la maestra que han ayudado a los niños a desarrollar algunos ODS (3, 4 y 13) trabajando, a la vez, conceptos matemáticos.

Además de considerar los contenidos matemáticos: identificación y discriminación de cualidades, números, recuentos, secuencias temporales, también ha aparecido la serie numérica, los rectángulos en los dibujos que los niños hicieron del huerto en la hoja en blanco. La identificación de las canicas como esferas y el reconocimiento de la propiedad que pueden rodar.

Desde la Educación Infantil se puede buscar una primera aproximación hacia una conciencia social con temas globales tan complicados como la sostenibilidad a través de la creación de lugares y de forma transversal con contenidos propios de las matemáticas. Se ha presentado un ejemplo de cómo desde la Educación Matemática Infantil se puede contribuir a la teoría y la práctica de la educación para la sostenibilidad desde un enfoque pedagógico que la maestra ha utilizado para permitir que los niños se conviertan en ciudadanos activos que descubran acciones para lograr y conservar una comunidad más sostenible y conseguir vivir mejor.

En síntesis, y de acuerdo con Reeuvijk (1997), se ha comprobado que el trabajo a partir de contextos de la vida cotidiana, y sin olvidar las conexiones, es un modo excelente de relacionar la matemática a los ODS. Los niños y niñas han conocido la sostenibilidad a través de sus diálogos sobre las actividades. Así han comprendido por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Podemos, incluso, decir, que se ha desarrollado su competencia matemática.

Referencias

Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á. (2011). *Aprendre a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil.* Eumo Editorial.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. ICE-Horsori.

Alsina, Á. y Calabuig, M. T. (2019). Vinculando educación matemática y sostenibilidad: implicaciones para la formación inicial de maestros como herramienta de transformación social. *Revista de Educación Ambiental y Sostenibilidad*, *1*(1), 1203.

Alsina, Á. y Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability*, *11*(15), 4039.

Baroody, A. J. (1998). *Fostering children's mathematical power*. Erlbaum.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-Lai Lin (Eds.). *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1-43).* National Taiwan Normal University.

Joutsenlahti, J. y Perkkilä, P. (2019). Sustainability Development in Mathematics Education—A Case Study of What Kind of Meanings Do Prospective Class Teachers Find for the Mathematical Symbol “2/3”? *Sustainability*, *11*(2), 457.

Malaguzzi, L. (2007). *El zapato y el metro.* Octaedro.

Marín, M. (2013). *Cuentos para aprender y enseñar Matemáticas*. Narcea.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 2 de febrero de 2022, 28, 14561-14595.

Mohammed, A. (2014). *El desarrollo sostenible comienza por la educación.* Informe de Seguimiento de la Educación Para Todos en el Mundo. UNESCO.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.

Novo, M. L, Alsina, Á., Marbán, J.-M y Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar*, *25*(52), 29-39. https://doi.org/10.3916/C52-2017-03

Reeuvijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 12,* 9-16.

Saá, M. D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones.* EOS.

UNESCO. (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. Francia: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

UNESCO. (2017). *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible: objetivos de aprendizaje.* Francia: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000252423

Vásquez, C., Seckel, M. J. y Alsina, Á. (2020). Sistema de creencias de los futuros maestros sobre Educación para el Desarrollo Sostenible en la clase de matemática. *UNICIENCIA, 34,* 1-16.

Para hacer referencia al artículo:

Novo, M. L., Cuida, A., Sánchez, S. (2022). Buscando un mundo mejor desde educación infantil: matemáticas y sostenibilidad. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 237 - 244). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

LA RADIO COMO RECURSO PARA EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS Y EL CONOCIMIENTO Y PRÁCTICA DE AULA DEL PROFESOR. UNA PROPUESTA PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS

María Soledad Salomón[a], José María Chamoso Sánchez[a], María Mercedes Rodríguez Sánchez[a]
[a]Facultad de Educación, Universidad de Salamanca

Resumen

El uso de herramientas tecnológicas representa un aspecto clave para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Los objetivos de este trabajo son, por un lado, mostrar las posibilidades de la radio como recurso para aprender Matemáticas y el papel del profesor en términos del conocimiento profesional y la práctica de aula cuando hace uso de dicho recurso; por otro lado, se pretende ejemplificar su uso mediante una experiencia de aprendizaje llevada a cabo con un grupo de alumnos de Educación Secundaria. Los resultados obtenidos dan muestra del enorme potencial de la radio. La experiencia detallada permite integrar la radio en el aula y puede resultar interesante desde el punto de vista de la formación de docentes en metodologías innovadoras. Además, dicha propuesta puede extrapolarse para su aplicación en sesiones que persigan otros objetivos en diferentes sentidos o que se desarrollen en distintas etapas educativas desde Educación Infantil hasta la etapa Universitaria.

Palabras clave: *radio escolar, innovación educativa, profesor de matemáticas, conocimiento profesional, práctica de aula.*

INTRODUCCIÓN

El uso de materiales y recursos didácticos constituye un aspecto clave en el proceso educativo. Existen diversos tipos, entre los que pueden destacarse aquellos que hacen un uso destacado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Los medios tecnológicos y digitales tienen una presencia cada vez mayor en nuestras vidas, lo que obliga a utilizar ese potencial en todos los contextos y, en particular, en los contextos de aprendizaje (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Su utilización, en concreto, permite transformar el aula y asemejar determinados procesos de aprendizaje a situaciones de la vida cotidiana, lo que puede influir en un aprendizaje significativo y favorecer la motivación, la comprensión y el razonamiento por parte de los alumnos (Vázquez-Cupeiro y López-Pendedo, 2016).

Este trabajo pretende mostrar las potencialidades de la radio escolar como recurso para el aprendizaje de las Matemáticas y el papel del profesor al implementar dicho recurso, así como ejemplificar su uso a partir de una experiencia real.

LA RADIO COMO RECURSO EDUCATIVO PARA APRENDER MATEMÁTICAS

La radio escolar

La radio ha sufrido un proceso de transformación importante en los últimos años, lo que ha permitido que, por ejemplo, sus usuarios no tengan que limitarse al acceso a los programas por ondas a través de las tradicionales frecuencias AM y FM y en tiempo real (Fernández et al., 2009). La digitalización de la radio permite las emisiones en *streaming* (emisión de programas de radio vía internet) que pueden grabarse y emitirse de nuevo posteriormente, pero también la creación de podcast producidos que, en su mayoría, son descargables y se alojan en internet en entornos multiplataforma a los que se puede acceder en cualquier momento (Bergquist, 2013; Schreiber, 2020). Esta versatilidad y la facilidad para crear y difundir contenidos empleando internet han hecho que numerosos centros educativos del panorama nacional y de todos los niveles educativos hayan apostado por el uso de la radio como herramienta educativa y hayan creado una emisora de radio escolar. Una de las ventajas de la radio escolar es que permiten a cada centro regular la cantidad de recursos, ya sean económicos o de otro tipo, que dedican a ella. La grabación de los programas puede hacerse con un ordenador, una grabadora o un móvil o tablet; su producción requiere de un ordenador con software específico (Audacity, Adobe Audition, o Garage Band, entre otros), y su difusión puede hacerse con cualquier dispositivo con conexión a internet a través de plataformas similares a Ivoox o SoundCloud, o mediante su publicación en un blog. Si se dispone de un estudio de radio que cuente con acondicionamiento acústico y una mesa de mezclas, se hace posible la emisión en *streaming* y se mejora la calidad de los podcasts, si bien no son elementos indispensables a la hora de emplear este recurso.

Las diferentes experiencias de radio realizadas en Extremadura se enmarcan en el proyecto de innovación RadioEdu (https://radioedu.educarex.es), cuyo objetivo es promover el uso de la radio en centros escolares con fines educativos. Los programas de radio se publican en un portal de Wordpress específico de cada centro que constituye la "emisora" de dicho centro. Cada programa se publica en una nueva entrada del blog en la que se incluye el título, el audio, algunas imágenes representativas y una tabla que recoge todos los datos técnicos, los nombres de los locutores, y el título de las canciones escogidas.

La radio en el aprendizaje de las Matemáticas

Actualmente, la integración de las TICs en el aula de Matemáticas se realiza mediante el uso de software matemático específico, vídeos, actividades interactivas y otros recursos de internet, webquests, paquetes informáticos o plataformas educativas, entre otras muchas posibilidades. En este contexto de expansión de la radio en entornos escolares, cada vez son más los docentes de Matemáticas que integran la radio en su aula y producen podcast sobre diferentes contenidos matemáticos (Schreiber, 2020). Aunque pudiera parecer que el empleo de la radio está más vinculado a disciplinas lingüísticas, nada más lejos de la realidad, ya que las características propias de cada materia únicamente dirigen la temática o el propósito de los programas. Algunos ejemplos de programas matemáticos pueden ser: descripción de aspectos cotidianos que tengan fundamento matemático, descripción de aplicaciones reales de determinados conceptos, difusión de la vida de matemáticos ilustres, conmemoración de efemérides matemáticas, o difusión de resultados de encuestas o de experiencias de enseñanza por parte de los alumnos, entre otros muchos. Las posibilidades son tantas y tan variadas que tienden a infinito cuando un locutor se aproxima mucho a un micrófono.

Con el uso de la radio y la creación de podcast en el aula de Matemáticas se trabajan los contenidos y, además, se consigue trabajar la Competencia Digital de manera destacada, dada la necesidad de emplear medios digitales para investigar, seleccionar, filtrar información, producir y publicar los podcasts (Schreiber, 2020). Además, presenta una importante potencialidad para implementar metodologías activas, hacer uso de distintos tipos de agrupamientos que fomenten el trabajo colaborativo o llevar a cabo proyectos intra e interdisciplinares (Fernández et al., 2009; Fernández, 2017). En la creación de podcast se propician espacios de participación destacada del alumno en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, se incrementa la interacción entre ellos y se produce un aprendizaje entre iguales (Bergquist, 2013). Los alumnos se convierten en agentes destacados en la creación de los contenidos radiofónicos, lo que puede incidir en un aprendizaje matemático significativo que, además, ayuda en el desarrollo de su sentido crítico, su capacidad de análisis y síntesis, y que favorece su creatividad (Armstrong et al., 2009; Blanco et al., 2007). Con la creación y difusión de podcast los contenidos matemáticos trascienden el aula de clase a través de un micrófono y las Matemáticas adoptan una dimensión social, lo que repercute positivamente en un aumento de la motivación del alumnado (Schreiber, 2020). Pero, por si todo lo anterior no fuese suficiente, no debemos olvidar la importante contribución que hace la radio escolar al desarrollo de la Competencia en comunicación lingüística y a la mejora en la expresión oral y escrita de los alumnos, dada la necesidad de producir textos escritos que guionicen los programas de radio. En definitiva, las experiencias con radios escolares producen numerosos beneficios por lo que suponen importantes actividades de enseñanza.

El profesor de Matemáticas como agente destacado en el uso de la radio

Descritas las virtudes de la radio para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿qué debe conocer el docente antes de hacer uso de la radio en su aula y cómo debe organizar el desarrollo de las sesiones y el trabajo con los estudiantes? Nos cuestionamos, por tanto, acerca de dos aspectos que rigen y guían la labor docente: el conocimiento profesional y la práctica de aula.

Se define conocimiento profesional como el conjunto de competencias, técnicas y herramientas que el profesor debe saber y dominar (Salomón et al., 2018). Uno de los modelos más aceptados en relación al conocimiento del profesor de Matemáticas es el de Ball et al. (2008). En la Tabla 1 se ejemplifica cada una de las categorías del modelo de Ball et al. (2008) referidas al uso de la radio para trabajar el contenido Números Naturales:

Tabla 4: Ejemplificación de las categorías de conocimiento profesional en relación al uso de la radio en el proceso de aprendizaje de Números Naturales

Categorías	Subcategorías	Ejemplo aplicado al uso de la radio
Conocimiento matemático para la enseñanza: Conocimiento del contenido matemático necesario para enseñar	**Conocimiento común del contenido**	Conocer cómo se operan números naturales.
	Conocimiento especializado del contenido	Conocer que las propiedades de adición y multiplicación de números naturales confieren al conjunto estructura de semianillo conmutativo con elemento unidad.
	Conocimiento del horizonte matemático	Conocer que los números naturales se emplean en áreas de conocimiento como Física, Química, Tecnología, Historia o Literatura, entre otras.
Conocimiento pedagógico del contenido: Conocimiento de la relación entre el contenido matemático y la pedagogía para enseñarlo, atendiendo al propio entendimiento profesional	**Conocimiento del contenido y del curriculum**	Conocer que el currículo de Matemáticas otorga gran importancia al uso de recursos tecnológicos para favorecer el aprendizaje, entre los que se encuentra la radio escolar.
	Conocimiento del contenido y la enseñanza	Conocer que puede motivarse el contenido números naturales mediante la creación de podcast que traten la contextualización de los mismos.
	Conocimiento del contenido y los estudiantes	Conocer que el estudio de los números naturales mediante la creación de podcast que traten su contextualización propicia un aprendizaje funcional, más profundo, y una mayor comprensión por parte del alumno.

Por otro lado, se define la práctica de aula como el resultado de la aplicación en el aula de ese conocimiento profesional por cada docente con su propio criterio, fruto de su reflexión, para conseguir una determinada meta (Salomón et al., 2018). En la Tabla 2 se ejemplifican las categorías de práctica de aula en relación al uso de la radio para trabajar el contenido Números Naturales a partir de una adaptación de las categorías del estudio de Lamote y Engels (2010):

Tabla 2: Ejemplificación de las categorías de práctica de aula referidas a decisiones instruccionales en relación al uso de la radio en el proceso de aprendizaje de Números Naturales

Categorías	Ejemplos aplicados al uso de la radio
Contenido Matemático: Decisiones relacionadas con el contenido matemático	El contenido números naturales se aborda mediante la investigación de sus aplicaciones reales. Se utilizan recursos tecnológicos para tal fin, para la grabación del podcast y para su difusión.
Promoción de la participación: Decisiones relacionadas con la participación de los estudiantes y el trabajo colaborativo	Se hace uso de diferentes agrupamientos: individual (grabación del podcast), grupos de trabajo (selección de información y producción del podcast) y gran grupo (en los periodos de puesta en común).
Consideración del aprendizaje del estudiante: Decisiones relacionadas con cada alumno y su reflexión crítica sobre el proceso de aprendizaje	Se realiza una evaluación formativa del alumno para determinar si está comprendiendo la información recopilada sobre aplicaciones o curiosidades de los números naturales.

EXPERIENCIA DESARROLLADA EN EL AULA

Contexto y participantes

La experiencia que se detalla a continuación se ha desarrollado en un centro público de Educación Secundaria, con un grupo de 18 alumnos de 1º ESO durante el curso académico 2020/2021.

Objetivos

Entre los objetivos que persigue esta experiencia podemos destacar los siguientes:

- Introducir y motivar el trabajo con determinados contenidos matemáticos.
- Conocer la contextualización real de ciertos contenidos matemáticos.
- Desarrollar la Competencia Digital del alumnado.
- Promover el acceso a fuentes fiables y fomentar la selección crítica de información.
- Desarrollar la Competencia en comunicación lingüística del alumnado.
- Utilizar diferentes agrupamientos y potenciar un aprovechamiento óptimo de los mismos.

Aspectos organizativos

Previo al desarrollo de la experiencia es necesario impartir una sesión inicial en la que se da formación al alumnado sobre grabación y edición de podcast. La experimentación que se detalla a continuación abarca un total de tres sesiones y puede realizarse las veces que se estime oportuno a lo largo del curso. En esta experiencia, la experimentación se ha repetido cinco veces con diferentes contenidos.

Los contenidos que se abordan en cada experimentación, por orden, son los siguientes: Números Naturales, Potencias, Raíces, Múltiplos y divisores, y Unidades de medida.

Las dos primeras sesiones coinciden, en todos los casos, con las dos primeras sesiones en las que se aborda un determinado contenido, algo muy recomendable puesto que la primera sirve para introducir a los alumnos ese contenido que se va a tratar, y la segunda, además, realiza un importante fomento de la lectura. Tras esta introducción-motivación, los alumnos tienen una visión funcional de los contenidos que se irán abordando en días sucesivos. La tercera sesión puede desarrollarse cualquier otro día, sin necesidad de que sea consecutivo a los anteriores.

Los alumnos trabajan mayoritariamente en grupos de 4-5 estudiantes, establecidos al inicio del curso y que se mantienen durante toda la actividad. Los roles asignados a los miembros del grupo deben variar en cada experimentación. También se emplean el trabajo individual y el trabajo en gran grupo, ya que la diversidad de opiniones resulta enriquecedora en actividades como las puestas en común.

Se utiliza la plataforma Google Drive y para cada grupo de trabajo se crea una carpeta compartida que incluye diferentes carpetas, una para cada una de las experimentaciones. Los alumnos incluyen en estas carpetas tanto el material que deben preparar individualmente para cada una de las sesiones como la producción grupal de las diferentes sesiones.

Procedimiento. Fases de la experimentación

FASE 0 – Sesión 0: Formación del alumnado

En esta sesión previa se dota al alumnado de las nociones técnicas que le permitirán realizar las diferentes actividades del desarrollo de la experiencia. Se les explica cómo utilizar una grabadora de audio y cómo transferir el archivo a un ordenador. Además, se les forma en edición de audio usando el programa Audacity, para lo que se les indica cómo importar el audio, aplicar determinados efectos y hacer uso de las herramientas de selección, cortar, copiar y pegar, necesarias para la edición.

FASE 1: Experimentación en el aula sobre Números Naturales. La experimentación en el aula se lleva a cabo atendiendo a la siguiente planificación:

Sesión 1. Motivación del contenido Números Naturales. Duración: 50 minutos.

a) Explicación de cómo se va a desarrollar la sesión. (Gran grupo, 5 minutos).
b) Los alumnos buscan información relativa a curiosidades y contextualización de los números naturales y la recogen en un documento compartido. (Grupos de trabajo, 20 minutos).
c) Preselección de los aspectos recopilados que les parezcan más interesantes. (Grupos de trabajo, 20 minutos).
d) Puesta en común. Valoración grupal del trabajo realizado. (Gran grupo, 5 minutos).

Entrega 1: cada grupo entrega todos los aspectos generales recogidos y la preselección realizada.

Sesión 2. Fomento de la lectura: selección de aspectos y redacción del guion. Duración: 50 minutos.

a) Explicación de cómo se va a desarrollar la sesión. (Gran grupo, 5 minutos).
b) Puesta en común. El portavoz de cada grupo expone los aspectos seleccionados por su grupo para evitar repeticiones con los seccionados por otro grupo y/o para incluir todos aquellos que se consideren llamativos de forma que cada grupo tenga un texto de una extensión similar. (Gran grupo, 15 minutos).

c) Redacción del guion que se empleará en la grabación del podcast. Se indica qué grupos abren y cierran cada programa para que lo tengan en cuenta (Grupos de trabajo, 25 minutos).

d) Puesta en común. Valoración grupal del trabajo realizado. (Gran grupo, 5 minutos).

Entrega 2: cada grupo entrega el guion elaborado.

Sesión 3. Grabación y edición del podcast. Duración: 25 minutos.

a) Explicación de cómo se va a desarrollar la sesión. (Gran grupo, 5 minutos).

b) Grabación del podcast por parte del miembro del grupo escogido. (Individual, 5 minutos).

c) Edición del audio usando el programa Audacity. (Grupos de trabajo, 15 minutos).

Entrega 3: cada grupo entrega el podcast editado.

FASE 2: Creación y publicación del programa

Haciendo uso del programa Audacity, los diferentes podcasts producidos por los alumnos se revisan para corregir aquellas imperfecciones que hayan podido quedar tras la primera edición. Posteriormente, se unen en uno solo y se realiza la mezcla con la pista de música que se haya acordado, con lo que se obtiene un podcast de cinco minutos de duración aproximadamente, lo que da lugar al programa de radio. Esta labor suele recaer en el docente.

Evaluación

Esta actividad se ha evaluado como parte de las actividades formativas relativas a proyectos o innovaciones en el aula que se recogen en la programación de nuestro departamento de coordinación didáctica. En particular, para evaluar el trabajo realizado por los alumnos se ha hecho uso de una rúbrica de evaluación que se dio a conocer a los alumnos antes de realizar la experiencia y que efectúa las siguientes ponderaciones: Corrección de la información recopilada (40%), Redacción del guion para la grabación del podcast (20%), Grabación y producción del podcast (20%), Trabajo en grupo (10%), y Participación en los periodos de puesta en común (10%).

Equipamiento

El equipamiento técnico que se ha empleado en esta experiencia ha sido una grabadora digital y un ordenador en el que se había instalado el programa Audacity.

Resultados

Los resultados de la experimentación han sido cinco programas de radio, de unos cinco minutos de duración cada uno, sobre contextualización y curiosidades referentes a Números Naturales, Potencias, Raíces, Múltiplos y divisores, y Unidades de medida. La producción de los alumnos puede encontrarse en el siguiente enlace: https://on.soundcloud.com/5v7zh

ALGUNAS REFLEXIONES FINALES

El currículum de Educación Secundaria otorga gran importancia a la utilización de recursos y, especialmente, al empleo de aquellos que hacen un uso destacado de las TICs en el proceso de enseñanza. El uso de la radio como recurso para aprender Matemáticas mejora la competencia digital y la comprensión del alumno al lograr un aprendizaje más profundo.

En este estudio se han descrito algunas posibilidades para llevar la radio al aula y se han descrito sus enormes potencialidades y su gran versatilidad a la hora de implantar metodologías activas, plantear proyectos multidisciplinares o mostrar una dimensión social de las Matemáticas, entre otros, por lo que representa una herramienta muy útil para divulgar las Matemáticas a todos los niveles y para poner de manifiesto su presencia en numerosos entornos cotidianos. También se ha detallado la infraestructura técnica necesaria para poner en marcha una radio escolar. Además, se ha analizado el papel del profesor en términos del conocimiento profesional y la práctica de aula cuando se implementa este recurso en el aula. Profundizar en estos aspectos y en la distinción de las categorías que comportan puede ser relevante desde el punto de vista de la formación de docentes de cara a plantear metodologías innovadoras de aprendizaje de las Matemáticas.

La experiencia de aprendizaje que se muestra en este estudio ha sido llevada a cabo con alumnos del primer curso de Educación Secundaria. Las cinco experimentaciones que conforman esta experiencia han permitido depurarla con su aplicación sucesiva, de modo que se han perfilado los tiempos de dedicación a cada tarea. La producción de los alumnos ha mejorado en los diferentes programas de radio. La información recopilada ha sido más concisa y más rica a medida que ha ido avanzando la experiencia. Esto ha repercutido no solo en la calidad relativa al contenido matemático de los podcasts, sino también en una mayor calidad lingüística de los programas. La grabación de podcast era algo novedoso para este grupo de alumnos, lo que deja ver cierta timidez en las primeras grabaciones. El trabajo de los contenidos matemáticos a partir de las aplicaciones reales de los mismos ha incrementado la motivación de los alumnos. La difusión de los resultados de esta experiencia deja patente una participación destacada del alumno en el proceso de enseñanza. Redactar los guiones, grabar los podcasts, producirlos, y difundirlos entre compañeros, familiares y amigos les enorgullece e incrementa su implicación en el proceso de enseñanza, a la vez que conecta su aula de clase con su vida cotidiana. Y, por supuesto, en medio de directrices educativas que abogan por un aprendizaje competencial del alumno, no puede olvidarse la contribución destacada a la Competencias Matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería; a la Competencia digital; y a la Competencia en comunicación lingüística. Por todo ello, se considera que se han alcanzado ampliamente los objetivos de la experiencia.

Con esta experiencia se proporciona una propuesta de intervención para integrar la radio en el aula de Matemáticas. Dicha propuesta puede ser aplicada en sesiones que tengan objetivos similares o adaptarse si se persiguen otros objetivos de enseñanza o para su aplicación en otros niveles educativos, desde la etapa de Educación Infantil hasta la Universitaria.

Entre las limitaciones de este estudio podemos encontrar el hecho de que la experiencia se haya llevado a cabo únicamente con un grupo de alumnos de primer curso de Educación Secundaria y solo durante un curso escolar. Como perspectivas de futuro, podría repetirse esta experiencia en el mismo nivel y en cursos sucesivos para extraer conclusiones sobre una muestra más amplia, o realizar una experiencia similar en cursos superiores para analizar así la respuesta de los alumnos a medida que aumenta su madurez. Además, esta experiencia se ha propuesto a modo de introducción-motivación de todos los contenidos que ha tratado. Otras posibilidades podrían ser, por ejemplo, plantearla como parte de investigaciones en las que se requiera una aplicación de los contenidos tratados previamente, como parte de las actividades relativas a la conmemoración de efemérides matemáticas, o en la realización de proyectos intra o interdisciplinares. Por otro lado, cabe destacar que en este caso la grabación del podcast se ha realizado en el aula de clase, poniendo el foco en el tratamiento de los contenidos matemáticos y no tanto en la producción final. Si se busca una producción de mayor calidad o una simulación más realista de la experiencia radiofónica, pueden efectuarse las grabaciones en el estudio de radio o realizar programas en *streaming*. En definitiva, existen innumerables posibilidades para emplear la radio en el aula de Matemáticas en función de los objetivos del docente.

En todo caso, "una imagen vale más que mil palabras, pero la palabra de un niño vale más que mil imágenes".

Referencias

Armstrong, G., Tucker, J.M. y Massad, V. (2009). Interviewing the experts: student produced podcast. *Journal of Information Technology Education: Innovations in Practice, 8*, 79-90. https://doi.org/10.28945/174

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blanco, E., Gómez, B. y Paniagua, F. (2007). La utilización de la radio como herramienta didáctica. Una propuesta de aplicación. *Revista académica del Foro Iberoamericano sobre Estrategias de Comunicación FISEC, 6*, 35-50.

Bergquist, T. (2013). Podcasting Mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *20*(4), 147-155.

Fernández, F. R. (2017). *La emisora escolar: una didáctica de enseñanza del pensamiento numérico: caso estudiantes del grado séptimo de Institución Educativa Federico Ángel-Caldas Antioquia* [Tesis doctoral]. Universidad de Medellín.

Fernandez, V., Simo, P., y Sallan, J. M. (2009). Podcasting: A new technological tool to facilitate good practice in higher education. *Computers and education*, *53*(2), 385-392. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.02.014

Lamote, C., y Engels, N. (2010). The development of student teachers' professional identity. *European Journal of Teacher Education, 33*(1), 3-18. https://doi.org/10.1080/02619760903457735

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Salomón, Mª. S., Chamoso, J. Mª., Diego, J. M., Rodríguez, Mª. M., Sánchez, B., Cáceres, Mª. J., y González, Mª. T. (2018). Conocimiento Profesional y Práctica de aula del profesor de Matemáticas: la recta de Euler. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" (Eds.), *XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León* (pp. 230-238).

Schreiber, C. (2020). Audio-podcasts de matemáticas: comunicación y representación con las TIC Mathematics audio-podcasts: communication and representation with ICT. *Saber y Educar, 28*, 1-11. http://dx.doi.org/10.17346/se.vol0.381

Vázquez-Cupeiro, S. y López-Pendedo, S. (2016). Escuela, TIC e innovación educativa. *Digital Education Review*, *30*, 248-261.

Para hacer referencia al artículo:

María Soledad Salomón, José María Chamoso Sánchez, María Mercedes Rodríguez Sánchez (2022). La radio como recurso para el aprendizaje de Matemáticas y el conocimiento y práctica de aula del profesor. Una propuesta para el aula de Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 245 - 252). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

UN CASO DE ÉXITO DE SIMULACIÓN PROBABILÍSTICA APLICADA A 4º DE ESO DE LA SECCIÓN BILINGÜE

PhD García-Martín, J.[a],

[a] Profesor del Departamento de Matemáticas y de la Sección Bilingüe del IES Virgen de la Calle de PALENCIA

Resumen

La presente comunicación recoge un caso de éxito de la aplicación de la simulación de probabilidad con Excel aplicada a alumnos de 4º de la ESO de la Sección bilingüe de inglés. Los alumnos en agrupamientos de dos han simulado diversos juegos de la vida real con 10000 ejecuciones. Los resultados han sido muy favorables y en todos los casos han comprobado que la probabilidad experimental se ha aproximado a la teórica. Los alumnos han presentado su trabajo a la clase y han coevaluado la actividad exitosamente.

Palabras clave: *simulación, probabilidad, ley de los grandes números, Sección bilingüe, Laplace*

INTRODUCCIÓN

Los alumnos han sido informados del reto que tenían delante. Tenían que simular una serie de ejecuciones de un juego real con un ordenador, de modo que pudieran comprobar que se verificaba la Ley de los grandes números y que ésta convergiera hacia la Probabilidad de Laplace. La propuesta de trabajo tenía además una parte social, dada la cercanía de casas de apuestas físicas repartidas por toda la ciudad de Palencia, así como la facilidad de acceso a casas de apuestas online. Los alumnos podrían analizar el saldo medio en todas sus ejecuciones, verificar si el juego les sería rentable económicamente y una valoración de los terribles efectos de la adicción al juego.

El trabajo además ha sido presentado al grupo, de modo que han trabajado las capacidades de expresión oral y de comunicación efectiva. Tras cada presentación, se ha realizado una coevaluación: tanto los alumnos como el profesor han puesto una nota que ha sido promediada para generar la calificación de la actividad.

METODOLOGÍA

La metodología seguida ha sido la siguiente. Cursados los contenidos de los temas de probabilidad combinatoria del currículo de 4º ESO, y evaluados por medio de una prueba escrita, cuyo valor ascendía a 8 puntos, faltaban 2 puntos que completar, los cuales provenían de la actividad propuesta en esta comunicación.

Primero, el trabajo por agrupamientos de dos alumnos. En total cinco grupos se han formado a su voluntad. Los alumnos son pertenecientes a la Sección Bilingüe del IES Virgen de la Calle. Cabe destacar su compromiso con la asignatura y su especial motivación. Además, destaca su buena competencia TIC en el paquete Office cursada en la Sección Bilingüe, y en concreto con sus competencias en hojas de cálculo Excel y en presentaciones en PowerPoint.

Segundo, se ha propuesto un reto matemático que nunca antes habían realizado. Tenían que simular una serie de ejecuciones de un juego real con un ordenador e inabarcables de manera manual en un tiempo práctico, de modo que pudieran comprobar la Ley de los grandes números, convergiendo ésta hacia la Probabilidad de Laplace. Se formaron los siguientes grupos:

French roulette

El grupo 1 decidió jugar 10000 veces al rojo en la Ruleta francesa (French roulette), que es la más habitual en los casinos europeos, con números desde el 1 hasta el 36, y el 0 de la banca. A continuación, se muestra una diapositiva de la presentación elaborada por los alumnos:

Figura 1. Introducción del Grupo 1. Simulación de la ruleta francesa.

Rock-paper-scissors-lizard-spock

El grupo 2 decidió jugar 10000 veces a ROCK-PAPER-SCISSORS-LIZARD-SPOCK, que es una adaptación del tradicional juego infantil piedra-papel o tijera, ampliado a cinco elementos. Apareció en la serie "Big Bang theory". A continuación, se muestra un esquema del juego introducida en la presentación de los alumnos:

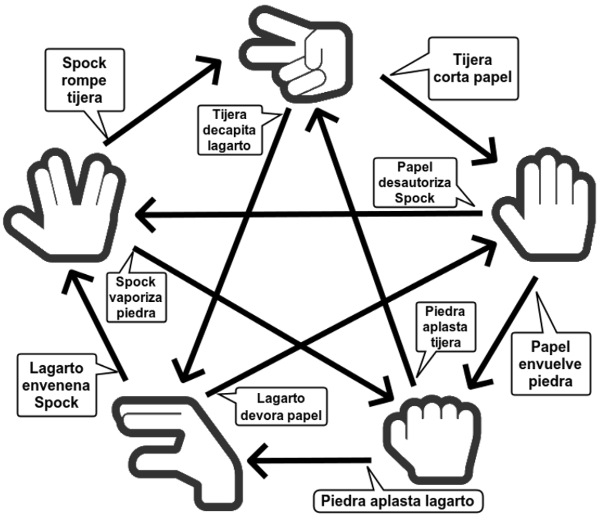


Figura 2. Introducción del Grupo 2. ROCK-PAPER-SCISSORS-LIZARD-SPOCK.

American roulette

El grupo 3 decidió jugar 10000 veces a los números pares en la Ruleta americana (American roulette), con números desde el 1 hasta el 36, y el 0 y el 00 de la banca. A continuación, se muestra una diapositiva de la presentación elaborada por los alumnos:

Figura 3. Introducción del Grupo 3. Simulación de ruleta americana

Slot machine

El grupo 4 decidió jugar 10000 veces a una máquina tragaperras (Slot machine) con 9 posibles símbolos y tres carretes. A continuación, se muestra el principio de la tabla elaborada por los alumnos:

slot 1	slot 2	slot 3	recount	
6	9	3		lose
2	4	7		lose
7	4	9		lose
5	4	8		lose
8	4	6		lose
7	4	1		lose
8	4	5		lose
4	3	5		lose
6	4	8		lose
5	9	3		lose
3	7	6		lose

Figura 4. Introducción del Grupo 4. Simulación de máquina tragaperras.

Rock-paper-scissors

El grupo 5 decidió jugar 10000 veces a ROCK-PAPER-SCISSORS, que es el tradicional juego infantil piedra-papel o tijera. A continuación, se muestra un esquema del juego, elegido por los alumnos:

Figura 5. Introducción del Grupo 5. ROCK-PAPER-SCISSORS

Tercero, decidido el juego de azar, los alumnos pensaron cómo modelar con un ordenador una ejecución del juego y el recuento más adecuado del caso de éxito o fracaso. Éste tenía que ser escalable pues deberían realizar al menos 10000 ejecuciones y contar de una forma sencilla.

Cuarto, realizado el diseño, se pusieron a implementar la simulación del juego con el programa Excel. Recogieron los resultados de manera clara y sencilla y analizaron y discutieron los mismos. Finalmente extrajeron unas conclusiones.

Quinto y último, elaboraron una presentación y explicaron su trabajo al grupo. Coevaluaron y cocalificaron la actividad con éxito.

RESULTADOS

French roulette

El grupo 1 que jugó a la Ruleta francesa (French roulette) obtuvo los siguientes resultados. Se muestra a continuación una captura de su presentación:

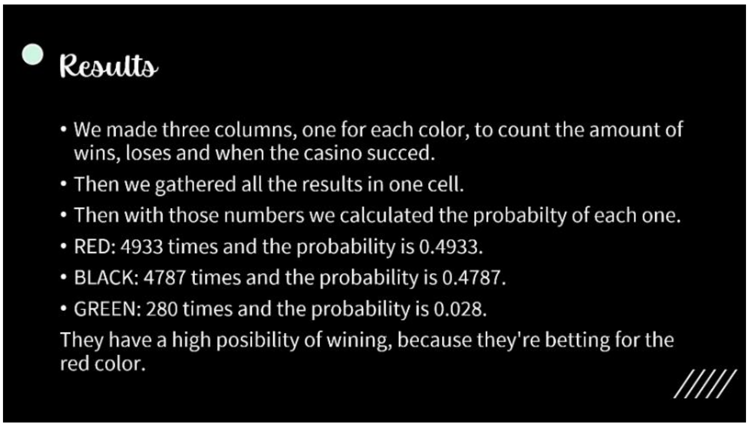


Figura 6. Resultados del Grupo 1. Ruleta francesa.

Los casos de RED eran favorables para el jugador, mientras que los casos de BLACK y GREEN eran desfavorables para el jugador.

Rock-paper-scissors-lizard-spock

El grupo 2 que jugó a (rock-paper-scissors-lizard-spock) obtuvo los siguientes resultados de ganar el jugador 1, el jugador 2 o de empate entre ambos, en tantos por uno y en % respectivamente. A continuación, se muestran diapositivas de la presentación de los alumnos:

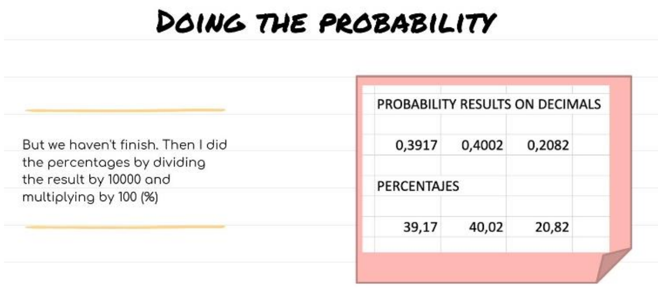


Figura 7. Resultados del Grupo 2. ROCK-PAPER-SCISSORS-LIZARD-SPOCK (1)

A continuación, se muestran los resultados de ganar tanto del jugador 1 como del 2 o de empatar con cada una de las cinco posibilidades. Se comprueba que con 10000 ejecuciones del juego todas están en torno al 20% teórico.

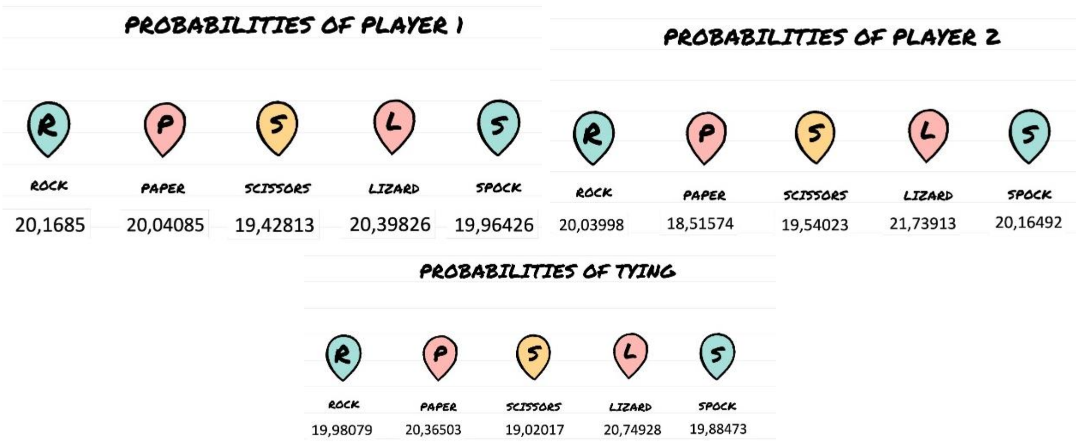


Figura 8. Resultados del Grupo 2. ROCK-PAPER-SCISSORS-LIZARD-SPOCK (2)

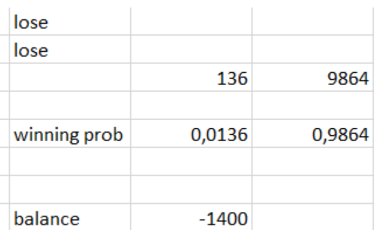
American roulette

El grupo 3 que jugó a la Ruleta americana (American roulette) obtuvo los siguientes resultados que resumieron en la siguiente diapositiva de los alumnos:

Figura 9. Resultados del Grupo 3. Ruleta americana

Slot machine

El grupo 4 que jugó a la máquina tragaperras (Slot machine) obtuvo los siguientes resultados, los cuales fueron resumidos en la siguiente diapositiva por los alumnos:



lose		
lose		
	136	9864
winning prob	0,0136	0,9864
balance	-1400	

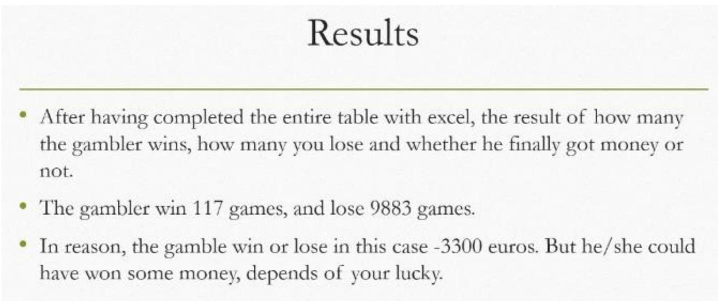


Figura 10. Resultados del Grupo 4. Máquina tragaperras

Rock-paper-scissors

El grupo 5 que jugó a piedra-papel-tijera (rock-paper-scissors) obtuvo los siguientes resultados y los mostraron en la presentación con el siguiente código semafórico. En verde son victorias, en amarillo empates y en rojo derrotas:

total wins		total ties		total loses
3366		3325		3309

PROBABILITY WIN	PROBABILITY TIE	PROBABILITY LOSE
0,3366	0,3325	0,3309

Figura 11. Resultados del Grupo 3. Rock-paper-scissors

Tras la obtención de resultados en dos sesiones de clase delante del ordenador, los alumnos elaboraron en otras dos sesiones las presentaciones. Los alumnos subieron los archivos de la actividad, la hoja de cálculo y la presentación, a una tarea abierta de Microsoft Teams. Las presentaciones se hicieron en dos sesiones. Tras cada presentación, los alumnos puntuaron a los ponentes. El profesor también puntuó a los ponentes. La calificación final fue el promedio de las mismas, con una tasa de aprobados del 100% y un promedio global de 9.22 puntos sobre 10.

DISCUSIÓN

A continuación, se muestra una tabla resumen con la discusión elaborada por los alumnos.

Tabla 1. Discusión de resultados por grupos y comentarios añadidos

Discusión de los alumnos	
Grupo 1 French roulette	-Conscientes de que jugar siempre al rojo no tiene una probabilidad elevada de ganar. -Conscientes de que el casino siempre gana con un número de ejecuciones elevadas. -Convergencia hacia la probabilidad teórica P[E]= k/n" Favour cases compared (divided) with all the cases" se aproximan a 18/37. -Consciencia social de los peligros del juego.
Grupo 2 Rock-paper-scissors-lizard-spock	-Los alumnos detectaron que la probabilidad experimental de ganar cada uno de los cinco jugadores se acerca al 0.2 teórico independientemente de la figura elegida. -Los alumnos detectaron que la probabilidad experimental de empate tiende a ser equitativa independientemente de la figura elegida.
Grupo 3 American roulette	-Al principio la actividad era un reto difícil de superar, pero que con la ayuda del profesor superaron con éxito. -Además, destacan que el juego de casino está hecho para que a la larga con muchas jugadas se acaba perdiendo dinero. -También destacan los alumnos de los problemas de adicción que puede crear.
Grupo 4 Slot machine	-Calcularon la probabilidad de ganar en la máquina tragaperras con variaciones con repetición de 9 elementos posibles y concluyeron que era baja.

Grupo 5 Rock-paper-scissors	-Vieron que la probabilidad experimental de ganar se aproxima a 1/3, de acuerdo a la ley de los grandes números. -Los alumnos destacaron además que, con un número mayor de ejecuciones, la convergencia sería mejor.

Se comprueba la asimilación de los contenidos de los temas de probabilidad y combinatoria de 4º de ESO. La actividad ha trabajado ampliamente las competencias curriculares de la LOMCE. Además, los alumnos han sabido obtener unos resultados coherentes y además discutirlos adecuadamente.

CONCLUSIONES

La actividad ha resultado plenamente satisfactoria, ya que se han cumplido plenamente los objetivos didácticos. Con esta actividad los alumnos de la Sección han podido combinar la enseñanza tradicional de las matemáticas teóricas en inglés con la aplicación de las TIC (hoja de cálculo y presentaciones en PowerPoint). Los alumnos no han tenido ningún problema con la comprensión de la actividad propuesta, ni con la realización de la misma en lengua extranjera.

Además, los alumnos han podido acercarse a un entorno se modelización de un problema de la vida real y lo han simulado con un ordenador. Han trabajado también la competencia TIC, siendo Technology asignatura de 3º de ESO y Computer science de 4º de ESO asignaturas del programa bilingüe. En el PROGRAMA EXPERIMENTAL PARA LA MEJORA DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO 21-22 se presentaron casos de modelización, algunos de ellos difíciles de llevar a las aulas, pero otros sí son más realizables. Este es un ejemplo de los que sí se han podido llevar exitosamente a las aulas.

Las matemáticas son una asignatura enseñada dentro de la Sección bilingüe con metodología CLIL (Content and Language Integrated Learning). No sólo han sido importantes los resultados obtenidos y discutidos dentro de los equipos de trabajo formados, sino que lo han tenido que exponer al resto de compañeros. Los alumnos han trabajado las destrezas de exposición oral en lengua extranjera, lo cual no ha sido excesivamente complicado, pues llevan desde 1º de ESO haciéndolo en la Sección Bilingüe.

Por último, han evaluado sus resultados y ellos mismos han comprobado que en un número de ejecuciones grande, el saldo global es negativo, por lo que han puesto de manifiesto los riesgos y perjuicios de los juegos de azar. Por lo tanto, es un acto de concienciación y convencimiento propio de la realidad del juego, para que los alumnos valoren su facilidad de acceso bien online o por las calles de la ciudad, y las grandes posibilidades de perder a la larga, y las consecuencias negativas que puede tener la adicción al juego en su proyecto vital.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los alumnos de 4ºB y 4ºC de la Sección bilingüe que han realizado el trabajo propuesto: Naia, Claudia, Nafir, María, Álvaro, Paula, Abel, Óscar, Hugo y Samuel. Sin su especial motivación y colaboración este trabajo no hubiera sido posible.

Agradezco a los integrantes del Departamento de Matemáticas, a los integrantes de la Sección Bilingüe y al equipo directivo del IES Virgen de la Calle por su apoyo y colaboración.

Agradezco también a los formadores de las dos charlas de modelización y simulación de la Junta de Castilla y León del PROGRAMA EXPERIMENTAL PARA LA MEJORA DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO 21-22, en el que hemos estado participando. En gran parte han servido de inspiración para la realización de esta actividad.

REFERENCIAS

Video. Último acceso 08/97/2022. URL: [(33) Rock Paper Scissors Lizard Spock (Extended Cut) ~ The Big Bang Theory ~ - YouTube.]

ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Último acceso 08/97/2022. URL: https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-362-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan

Formación Junta de Castilla y León. PROGRAMA EXPERIMENTAL PARA LA MEJORA DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO 21-22. 30h.

Blog de elaboración propia. Último acceso 08/07/2022. URL: https://requetemate.blogspot.com/

Binek, S., Kimla, D., Jarosz, J., & Styc, K. (2018). Using computer simulation to aid the interactive learning of physics in secondary education. Physics Education, 53(5), 055006.

Platz, L. (2022). Learning with serious games in economics education a systematic review of the effectiveness of game-based learning in upper secondary and higher education. International Journal of Educational Research, 115, 102031.

Stančić, H., Seljan, S., Cetinić, A., & Sanković, D. (2007). Simulation models in education.

Para hacer referencia al artículo:

García-Martín, J. (2022). Un caso de éxito de simulación probabilística aplicada a 4º de ESO de la Sección Bilingüe. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 253 - 260). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

LAS CICLOIDES DEL SKATE

María Zapatero Martín, Diego Palacios García

[a] IES Ribera del Jalón, [b] IES Castilla

Resumen

Esta actividad consiste en un proyecto en el que transforman una pista de skate en una piscina. A lo largo de este se ha ido guiando a los alumnos por el concepto y construcción de una cicloide, que es la forma aproximada que tienen las pistas de skate en forma de U y realizando cálculos y mediciones en diferentes fases para poder construir y llenar la piscina.

Durante la actividad se realizan construcciones de diferentes tipos de cicloides poligonales relacionando su área con la de los polígonos utilizados para construirlas, llegando así a calcular el área bajo la cicloide generada por el círculo. Una vez encontrada la relación entre las áreas, podremos ir "construyendo" la piscina de la que tendrán que hallar todas las medidas para luego calcular todo el gasto de material que tendrá está obra de ingeniería.

Palabras clave: *metodología, matemáticas, secundaria, curvas, proyecto*.

INTRODUCCIÓN

Al igual que las distintas compañías buscan atraer a los clientes analizando y utilizando las cosas que más les gustan, en la educación tenemos que plantearnos seguir el mismo modelo. Necesitamos usar los hobbies y entretenimientos del alumnado como un incentivo a la hora de enseñar o explicar los distintos contenidos del currículo.

Los patinetes y los monopatines se están convirtiendo cada vez más en una parte intrínseca a nuestro alumnado y esto lo convierte en una herramienta muy atractiva a la hora de enseñar cualquier materia. En nuestro caso hemos buscado las matemáticas que se pueden relacionar con estos deportes y sus ubicaciones para desarrollar una actividad que se puede catalogar dentro de las llamadas situaciones de aprendizaje.

Relacionando los contenidos que se realizan en esta actividad con el currículo actual, esta práctica está pensada para realizarla con el alumnado de 2º ESO, aunque también se puede realizar con alumnos de 3º o 4º para poder repasar contenidos de cursos anteriores.

La actividad ha sido ya realizada en dos ocasiones y en todas ellas con buen resultado, tanto en las Olimpiadas de Matemáticas Provinciales de Soria 2019 con alumnos de 2º y 4º de la ESO como en ESTALMAT de Soria en el año 2021-2022 con alumnos de primer año.

Esta situación de aprendizaje se puede realizar tanto como proyecto del departamento de Matemáticas como un proyecto interdisciplinar con la colaboración de otros departamentos como Tecnología (creación de las cicloides en otros materiales) o Economía (elaboración de presupuestos).

CONTENIDOS

Los contenidos trabajados en esta situación de aprendizaje se encuentran en el currículo de 2º de la E.S.O.

A. Sentido numérico

Se trabajan los números decimales, el uso de números irracionales (el número pi) en el cálculo de áreas y el razonamiento proporcional en la resolución de problemas de la vida cotidiana relacionados con situaciones de proporcionalidad.

B. Sentido de la medida

Se trabajan estrategias de elección de unidades en problemas en el espacio, medidas de longitudes y cálculo de áreas en figuras planas.

C. Sentido espacial

Se trabaja el cálculo de volúmenes de una figura compleja a partir de su descomposición en dos figuras más sencillas, así como el cálculo de la superficie lateral de algunos prismas.

F. Sentido socioafectivo

Al ser una actividad realizada en equipos, los contenidos relacionados con este sentido que se trabajan son todos aquellos relacionados con el trabajo cooperativo.

MATERIALES

Para realizar la actividad de manera satisfactoria se le proporcionarán a alumnado los siguientes materiales:

- Bolígrafos / Lápices.
- Tizas (para pintar en el suelo las diferentes cicloides poligonales).
- Cuerda (que utilizarán a modo de compás para dibujar las distintas figuras).
- Cinta métrica.
- Regla.
- Cajas de cartón (para dibujar y recortar los distintos polígonos regulares).
- Tijeras / Cúter.
- Calculadora.

METODOLOGÍA

La cicloide es la curva que traza un punto de una circunferencia cuando esta se mueve sobre una recta sin deslizarse. También existen otras cicloides más sencillas que son las poligonales en las cuales se gira un polígono regular y se unen las posiciones de uno de sus vértices cada vez que gira sobre la recta.

Para poder entender mejor estos conceptos construirán diferentes cicloides poligonales generadas por un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono regular para observar la relación entre el área encerrada entre la cicloide y la recta con el área del polígono utilizado para construirla.

Para ello deberán construir sus propios polígonos y con ellos las correspondientes cicloides poligonales. Medirán las áreas de cada polígono y de cada cicloide poligonal y tendrán que ver la proporción que existe entre ambas áreas, que como observarán serán muy próximas a 3.

A partir de entonces podremos ir construyendo la piscina de la que tendrán que sacar todas las medidas para luego calcular todo el gasto de material que tendrá está obra de ingeniería (hormigón, agua, ...).

Desarrollo de la actividad

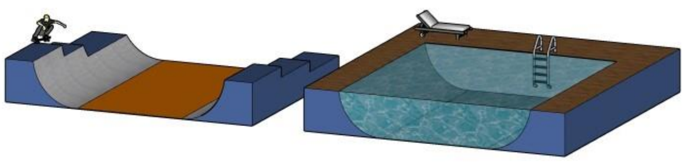
La actividad está pensada para realizarla en la pista de skate siempre que sea posible y su duración está estimada en 2 horas. En primer lugar, dividiremos al alumnado en grupos de 3 o 4 participantes. En cada grupo habrá un miembro que será el encargado de recoger las distintas tarjetas y avisar cuando hayan terminado cada una de las partes.

Se les entregará la tarjeta inicial con todo el material necesario para toda la actividad y la primera tarjeta. Una vez vayan terminando las actividades de cada tarjeta de forma satisfactoria se les irá entregando la siguiente (sin saltarse ningún paso ni ninguna tarjeta). Si algún grupo tiene dificultades para realizar alguna de las tareas de una tarjeta, se les puede dar indicaciones para que puedan realizarla y seguir avanzando con la actividad.

Las tarjetas que se les irán entregando son las siguientes:

ESTALMAT SORIA

Nos han pedido hacer un proyecto para convertir la pista de skate en una piscina según podéis ver en la imagen. Y debéis ayudarnos a conseguirlo.



Haremos el proyecto en varias fases, que se os irán proponiendo en diversas tarjetas.
Cuando tengáis la respuesta o las respuestas de cada tarjeta, deberéis entregarla en el punto de control junto con los cálculos que habéis realizado.

CONSERVAD ESTA TARJETA PARA TENER SIEMPRE A MANO EL DISEÑO Y NO OLVIDÉIS GUARDAR COPIA DE LOS CÁLCULOS Y RESULTADOS OBTENIDOS POR SI TENÉIS QUE UTILIZARLOS DE NUEVO

¡EMPEZAMOS!

Figura 39. Tarjeta inicial

Tarjeta 1 Equipo:

Comencemos con unas sencillas construcciones en cartón, que deberéis mostrar en el punto de control antes de continuar.

1. Un triángulo de lado 30 cm.
2. Un cuadrado de lado 25 cm.
3. Un hexágono de lado 15 cm.
4. Un círculo de radio 15 cm.

Figura 41. Primera tarjeta

Tarjeta 2 Equipo:

Ahora, vamos a poner vuestros talentos artísticos a prueba.

A partir del siguiente esquema tenéis que hacer en el suelo cuatro dibujos con tiza, uno con cada figura:

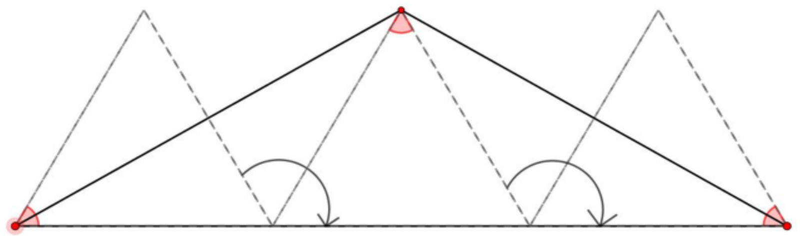


Figura 42. Tarjeta 2

Tarjeta 3 Equipo:

Esos dibujos de la tarjeta anterior se llaman cicloides. La cicloide ha sido llamada «La Helena de los geómetras» ya que causó frecuentes disputas entre matemáticos del siglo XVII.

1. Calculad las áreas de las figuras de cartón:

Triángulo	Cuadrado	Hexágono	Círculo

2. Calculad las áreas de las cicloides poligonales generadas por el triángulo, el cuadrado y el hexágono.

Cicloide triangular	Cicloide cuadrangular	Cicloide hexagonal

3. ¿Qué relación encontráis entre estas áreas y las calculadas al principio?

4. Calculad ahora el área delimitada por la cicloide generada por el circulo.

Área de la cicloide:

Figura 40. Tarjeta 3

Tarjeta 4 Equipo:

¡Comenzamos a construir la piscina!

Para ello, en primer lugar tenéis que calcular, en litros, el volumen de agua necesaria para llenar la piscina.

Podéis tomar todas las medidas que necesitéis.

Volumen: ……………………. litros

Figura 43. Tarjeta 4

Tarjeta 5 Equipo:

Ahora vamos a calcular el presupuesto de la obra. Necesitamos colocar un metacrilato rectangular en la parte delantera, una pared de hormigón de un metro de ancho en la parte trasera y rellenar las partes bajas de los bordes laterales hasta igualar la mayor altura.

Precio del hormigón: 65 €/m^3

Precio del metacrilato: 160 €/m^2

Coste total de la obra: …………………….. €

Figura 44. Tarjeta 5

Tarjeta 6 Equipo:

¡LLENEMOS LA PISCINA!

Para llenar la piscina vamos a emplear dos camiones cisterna. Emplead los siguientes datos para calcular cuánto nos costará llenarla con el menor coste posible.

Distancia de la piscina al manantial: 25 km

Tiempo de llenado/vaciado de un camión: 15 minutos *(no pueden llenarse los dos camiones al mismo tiempo)*

Velocidad media del camión: 60 km/h

Precio del alquiler del camión*: 20 €/h (aplicable también por minutos)
+ 0,10 €/km

**El alquiler se paga, para cada camión, desde el momento en que sale de la pista hacia el manantial.*

PRESUPUESTO DE LLENADO:……………………. euros

Figura 45. Tarjeta 6

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN E INDICADORES DE LOGRO

Tabla 6. Competencias, criterios e indicadores

Competencias específicas	Criterios de evaluación	Indicadores de logro
C.E. 1	1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.	- Interpreta correctamente las instrucciones de las tarjetas
	1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los métodos y conocimientos necesarios.	- Las soluciones obtenidas en cada uno de los problemas planteados son correctas
C.E. 3	3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.	-Encuentra la relación entre el área encerrada por cada una de las cicloides poligonales y el polígono utilizado para dibujarlas
C.E. 4	4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación.	-Calcula el área de la cicloide generada por el círculo a partir de la relación encontrada entre las poligonales y los polígonos. -Descompone el cálculo del volumen de la “piscina” en el cálculo del volumen de un prisma y el poliedro cuya base es la cicloide.
	4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando y modificando algoritmos.	-Encuentra la relación entre el área encerrada por cada una de las cicloides poligonales y el polígono utilizado para dibujarlas y a partir de ella calcula el área de la cicloide generada por el círculo.
C.E. 5	5.2 Conocer y usar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.	- Calcula el área de los polígonos. - Calcula el área de las cicloides poligonales a partir de la descomposición de estas en figuras más sencillas. - Calcula el volumen del prisma y del poliedro cuya base es la cicloide.
C.E. 6	6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real	- Toman las medidas necesarias para calcular el volumen a partir de lo observado al dibujar las figuras planas de forma precisa, utilizando las unidades de medida apropiadas.

	y las matemáticas usando los procesos inherentes a la investigación: medir, comunicar, clasificar y predecir.	
C.E. 9	9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	-No abandona la actividad al detectar algún error cometido.
	9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	-No abandona la actividad al detectar algún error cometido.
C.E. 10	10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones.	-Aporta ideas para la resolución de los problemas planteados. -Analiza las ideas propuestas por sus compañeros.
	10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, y asumiendo el rol asignado.	- Colabora en la resolución de los problemas. - Respeta las ideas propuestas por sus compañeros.

BIBLIOGRAFÍA

DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

Para hacer referencia al artículo:

María Zapatero Martín, Diego Palacios García (2022). Las cicloides del skate. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 261 - 267). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

UD TRIGONOMETRÍA: EXELEARNING + GEOGEBRA + LATEX + AULA VIRTUAL. UN PÓKER DE ASES.

Rubén Jiménez Jiménez

IES José Luis L. Aranguren

Resumen

Mediante esta comunicación pretendo enseñar cómo presentar una unidad didáctica a nuestros alumnos con el programa exelearning donde tendremos todos los recursos (GeoGebra, vídeos, autoevaluación, presentaciones, etc) que vayamos a utilizar en nuestra aula en un solo sitio, facilitando el proceso enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: *eXeLeaning, trigonometría, GeoGebra.*

INTRODUCCIÓN

A menudo cuando presentamos una nueva unidad didáctica a nuestros alumnos utilizamos recursos variados para su ejecución, desde simple texto con la teoría o ejercicios, a presentaciones, escenas de GeoGebra, vídeos, páginas web o actividades creadas en ciertas páginas que pueden ser exportables.

Con exelearning, software libre, gestionado y desarrollado por el INTEF, dependiente del Ministerio de Educación y Formación Profesional y el CEDEC (Centro Nacional de desarrollo curricular en sistemas no propietarios) podemos tener todos esos recursos en mismo contenedor facilitando nuestra labor como docentes y sobre todo facilitando a los alumnos el tener todo lo necesario en un mismo sitio.

En el título de la comunicación se mencionan cuatro herramientas o programas que, para mí, son básicos para elaborar cualquier unidad didáctica. Exelearning, el contenedor de todos los recursos, GeoGebra, escenas dinámicas con las que se puede trabajar todo el currículo de Matemáticas desde Infantil hasta Bachillerato, Látex, con el que escribimos las Matemáticas que necesitamos y el aula virtual donde alojaremos la unidad elaborada para su difusión entre el alumnado.

El tema elaborado lo tenemos que exportar, y lo más natural es importarlo en nuestra aula virtual Moodle bien sea como página web o como actividad SCORM si lo que queremos es obtener evaluación en las actividades que lo permitan.

Aprovechamos la presentación de la unidad didáctica de Trigonometría para Matemáticas B de 4º de la ESO para visualizarla dentro de exelearning.

OBJETIVOS

Los objetivos de esta comunicación son:

- Disponer de una unidad didáctica de trigonometría ya elaborada con todos sus recursos para utilizar en el aula.
- Conocer el programa libre exelearning con el que está elaborada.
- Aprender distintos tipos de recursos de los que podemos disponer para elaborar una unidad didáctica para cualquier nivel.

DIRECCIÓN WEB

En este escrito daré unas pinceladas de los recursos que he utilizado, pero lo mejor sería que se visualizara la unidad didáctica a través del siguiente enlace:

[UNIDAD DIDÁCTICA]

En el último apartado, "*Descarga de fuentes*" se puede descargar el archivo fuente generado con exelearning, que tiene extensión elp y que permitirá al lector poder modificar el archivo y adaptarlo a sus necesidades cambiando lo que necesite o incluir nuevas actividades o recursos.

Tiene licencia Creative Commons Reconocimiento Compartir igual 4.0.

UNIDAD DIDÁCTICA

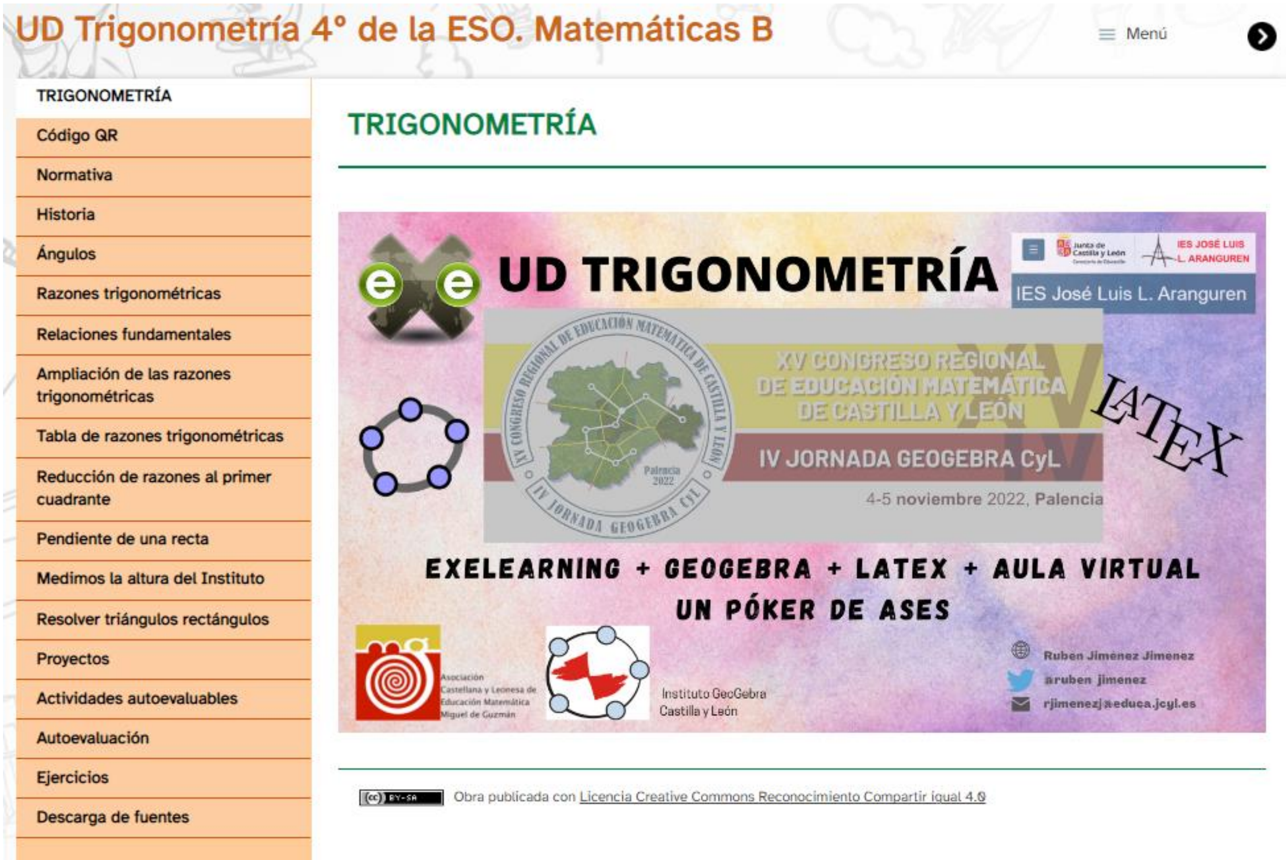


Figura 46: Portada UD

NORMATIVA

En este primer apartado incluyo la normativa en vigor, el DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

En concreto, los criterios de evaluación y contenidos de Matemáticas B se encuentran entre las páginas 49 367 y 49 373.

Están detallados todos los contenidos que figuran en la normativa, detallados en los distintos sentidos matemáticos y los criterios de evaluación.

Este apartado está incluido solo para el conocimiento del profesorado, no es necesario para el alumnado.

HISTORIA

En este apartado damos unas pinceladas de cómo ha ido evolucionando el conocimiento de la Trigonometría a través de la Historia. Desde el famoso problema 56 del papiro de Rhind hasta el siglo XVII en el que Newton encuentra la series para las tres razones trigonométricas fundamentales. Se incluyen dos vídeos que nos muestran como Eratóstenes midió el radio de la Tierra.

Me parece muy importante, siempre que sea posible, hablar en clase de la historia de las Matemáticas, que los teoremas no aparecen de la noche a la mañana.

ÁNGULOS

Breve recordatorio de las definiciones de los principales ángulos y nomenclatura que utilizaremos a lo largo de la unidad didáctica.

Definimos las tres formas en las que se expresan los ángulos: sexagesimales, radianes y centesimales. Para la definición de radián introducimos una escena de GeoGebra donde se puede visualizar gráficamente.

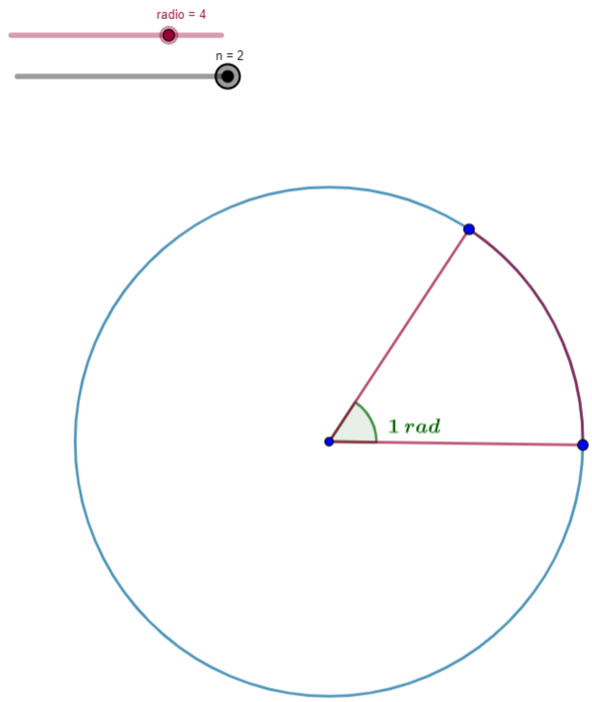


Figura 47: Definición de radián

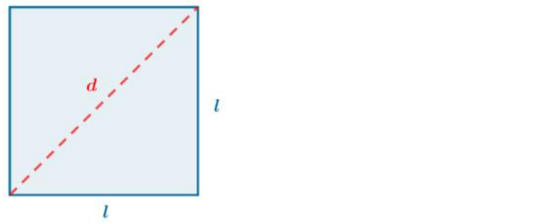
Por último, utilizamos los factores de conversión para transformar ángulos de unas unidades a otras. Incluimos varios ejercicios y el uso de la calculadora.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Definimos las razones trigonométricas para ángulos agudos e incluimos una escena de GeoGebra que de forma visual y manipulativa hace observar al alumno como las razones trigonométricas no dependen del triángulo rectángulo elegido, solo del ángulo.

Utilizamos la calculadora para calcular las razones trigonométricas y resolver los primeros triángulos.

Introducimos las demostraciones a las razones trigonométricas de 45º, 30º y 60º utilizando un cuadrado y un triángulo equilátero.



Si trazamos una diagonal del cuadrado, los ángulos agudos que forman el triángulo rectángulo formado por la diagonal y dos lados del cuadrado miden 45°

Aplicamos el teorema de Pitágoras para poner la diagonal en función del lado del triángulo:

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2 + l^2 \\ d^2 &= 2l^2 \\ d &= \sqrt{2l^2} \\ d &= l\sqrt{2} \end{aligned}$$

Hallamos las razones trigonométricas de 45°:

- $\sin 45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 45^\circ = \frac{l}{l} = 1$

Figura 48: razones trigonométricas de 45º

RELACIONE FUNDAMENTALES

Este apartado incluye las demostraciones de las tres relaciones fundamentales de la Trigonometría. Destaco la presentación tan elegante utilizando los efectos *Fx* que incorpora exelearning, en concreto el efecto línea de tiempo con el que está realizado este apartado.

AMPLIACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para mostrar las razones trigonométricas a ángulos que son agudos se presentan varias escenas realizadas con GeoGebra, una de ellas para visualizar los ángulos en grados sexagesimales o radianes, otra para visualizar la definición de las tres razones trigonométricas fundamentales en una circunferencia goniométrica y en la última el alumnado podrá mover un deslizador y visualizar los signos de seno y coseno para cualquier ángulo menor de 360º

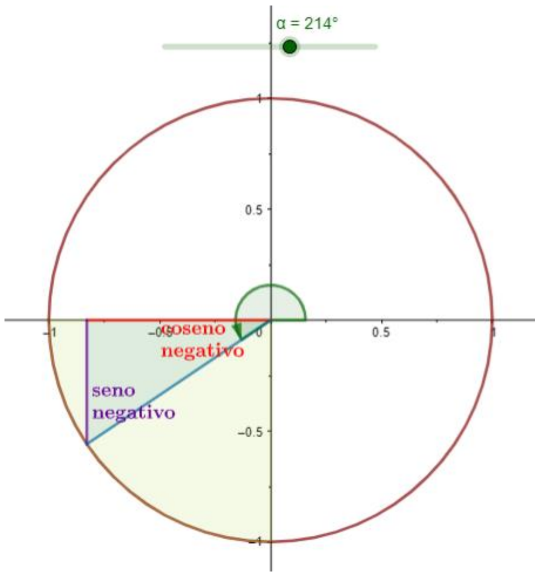


Figura 49: ángulos menores de 360º

Por último, se razonan las razones trigonométricas para ángulos mayores de 360º.

Me gustaría destacar como se pueden incluir botones en exelearning para incluir, por ejemplo, las soluciones bajo el botón.

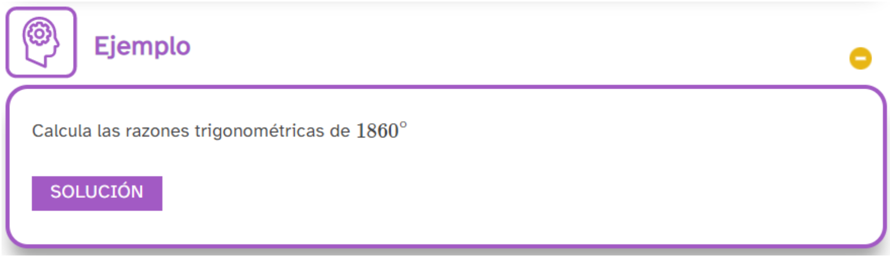


Figura 50: botones en exelearning

Exelearning nos permite hacer cuestionarios con respuestas de opción múltiple que podemos exportar a un LMS para guardar la calificación. En esta ocasión nosotros hemos incluido 12 preguntas para autoevaluación sobre los signos de distintas razones trigonométricas.

REDUCCIÓN DE RAZONES AL PRIMER CUADRANE

Para este apartado hemos necesitado GeoGebra para hacer todas las animaciones y que se visualicen perfectamente todas las relaciones que se producen entre los distintos ángulos de la circunferencia goniométrica para hallar cualquier razón trigonométrica apoyándonos en una del primer cuadrante.

En la última animación el usuario puede escribir cualquier ángulo para hallar sus razones trigonométricas relacionadas con un ángulo del primer cuadrante:

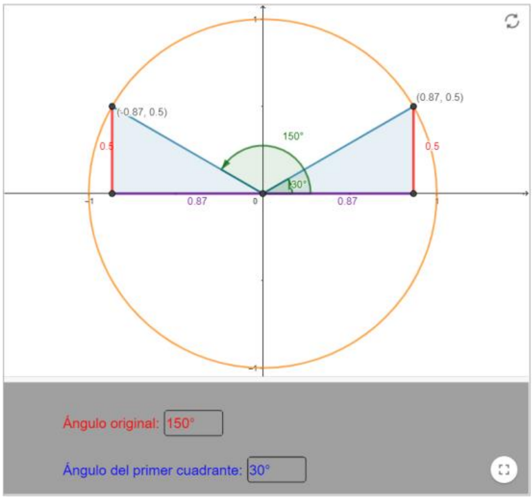


Figura 51: reducción a un ángulo del primer cuadrante

PENDIENTE DE UNA RECTA

Recordamos en este punto el concepto de pendiente de una recta y qué relación tiene la pendiente de la recta con el ángulo que forma con el eje de abscisas.

MEDIMOS LA ALTURA DEL INSTITUTO

En este primer proyecto nos planteamos cómo medir la altura del Instituto, qué instrumentos necesitamos y elaboramos un plan de actuación.

Cuando tenemos claro lo que necesitamos y el plan de trabajo salimos al patio a medir la altura del Instituto.

Aprovechamos este proyecto para hablar del método científico, hacer conexiones con los redondeos, aproximaciones y errores que ya han estudiado anteriormente.

Es habitual, que no se den cuenta que la altura la están midiendo desde sus ojos (goniómetro) y, por tanto, a la altura obtenida le tienen que sumar la altura de los alumnos hasta los ojos.

RESOLVEMOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Les ofrecemos distintas técnicas para resolver triángulos rectángulos, como la doble observación o la técnica de la altura y les mostramos varios ejemplos.

En este punto ya se tienen adquiridos todos los conocimientos necesarios para afrontar los ejercicios de trigonometría al nivel de cuarto de la ESO.

PROYECTOS

Les ofrecemos tres proyectos competenciales para trabajar. Cada alumno elegirá uno de ellos:

PROYECTO 1: MEDIMOS UNA ALTURA INNACCESIBLE

"*Elige un edificio, un árbol al que no puedas acceder a la base y utilizando la técnica de la doble medición halla su altura.*

Tendrás que documentar todo el proceso:

Explica el procedimiento qué estás utilizando.

Añade en un apartado en el que expliques cómo te has sentido durante todo el proyecto, qué inquietudes has tenido, si en algún momento has sentido que no te salía, si has estado confiado en todo momento, etc.

Acompaña al proyecto todas las mediciones que has realizado y fotos o vídeos del proceso".

PROYECTO 2: PENDIENTE DE UNA CARRETERA

Idea sacada del Proyecto Gauss que diseñaron José Luis Álvarez y Rafael Losada

"En este proyecto tenéis que acceder a la siguiente dirección Web: pendiente de una carretera y utilizando la escena de GeoGebra completar todas las preguntas que se realizan.

Añade en un apartado en el que expliques cómo te has sentido durante todo el proyecto, qué inquietudes has tenido, si en algún momento has sentido que no te salía, si has estado confiado en todo momento, etc.

PROYECTO 3: LAS RAMPAS

"*En este proyecto tendrás que buscar información sobre la norma que habla de la pendiente máxima que puede tener una rampa para personas con movilidad reducida. Después elegirás dos rampas y tendrás que decidir si se ajustan a la norma que has buscado. Por último, tendrás que diseñar una rampa, que cumpla la normativa, si es posible para acceder a un portal en el que hay que salvar un desnivel de 60 cm y disponemos de 5 metros de largo en la acera por 3 de ancho.*

En el trabajo final deberás mostrar evidencias de las mediciones mediante fotos o vídeos y estructurar bien todo el trabajo. Documéntalo todo. Añade en un apartado en el que expliques cómo te has sentido durante todo el proyecto, qué inquietudes has tenido, si en algún momento has sentido que no te salía, si has estado confiado en todo momento, etc."

ACTIVIDADES AUTOEVALUABLES

Exelearning, como hemos dicho anteriormente, permite la incorporación de animaciones de GeoGebra, y si estas están configuradas para que se puedan exportar como SCORM, que son las que habitualmente llamamos autoevaluables, mediante exe las podemos exportar en este formato y guardar las calificaciones en el aula virtual.

Se incluyen en la unidad didáctica dos actividades autoevaluables de Javier Cayetano para la resolución de problemas de Trigonometría. Si se exporta el archivo como página web servirá como autoevaluación del alumno y si se exporta como SCORM se guardará la nota en el aula virtual. En este caso habría que separar las dos actividades en dos nodos distintos para que Moodle guarde la nota de las dos animaciones por separado. Cada actividad autoevaluable tiene que estar en un nodo o página distinto de exelearning.

AUTOEVALUACIÓN

Uno de los atractivos de exelearning es la incorporación de juegos interactivos que también son autoevaluables y que se pueden exportar a nuestra aula virtual. En la versión 2.7 se incluyen los siguientes juegos:

- *Adivina*: Completar un término dada su definición.
- *Candado*: Permite crear actividades en la que la retroalimentación está protegida por contraseña.
- *Desafío*: Permite crear juegos tipo escape room. En ellos, los jugadores deberán resolver diferentes retos antes de resolver el desafío final.
- *Mapa*: Permite generar mapas de imágenes con zonas interactivas.
- *QuExt*: Juego de preguntas rápidas con varias respuestas.
- *Rosco*: Juego de palabras (de la A a la Z).
- *Selecciona*: permite crear juegos basados en cuestiones tipo test de respuesta múltiple con ninguna, una o varias opciones correctas y en cuestiones de tipo ordena, en las que el jugador deberá organizar las diferentes opciones según el orden indicado en la pregunta.
- *Trivial*: versión del clásico juego "Trivial".
- *VídeoQuExt*: Juego de preguntas rápidas con varias respuestas sobre un vídeo.

En nuestra unidad didáctica hemos incorporado el juego *Selecciona* con 19 preguntas tipo test.

DESCARGA DE FUENTES

Mediante este apartado os podéis descargar el archivo fuente con esta unidad didáctica completa para su adaptación a vuestros alumnos y a vuestras clases. Luego tendréis que exportar el archivo e incorporarlo a vuestra aula virtual o a un servidor externo.

Figura 52: Descarga del archivo original

REFERENCIAS

Para la realización de esta comunicación he utilizado las siguientes fuentes:

- Manual de Exelearning.
- Unidad didáctica: trigonometría, de Francisco Javier Fernández Medina. Máster en formación al profesorado de enseñanza secundaria.
- Perfil de GeoGebra de Javier Cayetano.
- Libro de actividades autoevaluables de Javier Cayetano.
- Proyecto Gauss que diseñaron José Luis Álvarez y Rafael Losada. En concreto la actividad pendiente de una carretera.
- http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm
- https://es.wikipedia.org/wiki/Erat%C3%B3stenes
- https://es.wikipedia.org/wiki/Claudio_Ptolomeo

Para hacer referencia al artículo:

Rubén Jiménez Jiménez (2022). Unidad didáctica de Trigonometría: exelearning + GeoGebra + Latex + aula virtual. Un póker de ases. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada GeoGebra de Castilla y León (pp. 268 - 275). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

ANÁLISIS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ASÍNTOTAS A TRAVÉS DE SUS GRÁFICAS EN BACHILLERATO MEDIANTE FLIPPED CLASSROOM

Rosa Mª Fernández Barcenilla[a],

[a]IES María Moliner (Laguna de Duero)

Resumen

La tesis defendida bajo el mismo título pretendió valorar si la implantación de la metodología Flipped Classroom es apropiada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de las gráficas en Bachillerato, estimar el grado de aceptación por el alumnado y analizar los aprendizajes producidos. En dicho estudio, se planificó, diseñó, desarrolló e implementó una propuesta didáctica relativa al proceso de enseñanza-aprendizaje de las tendencias asintóticas a partir de sus gráficas, mediante una metodología de aula invertida mixta y diversas metodologías activas en las sesiones de docencia A partir de todo ello, se recabaron las conclusiones más importantes en relación a los objetivos generales que, sin duda, ayudarán a futuros docentes a conocer y mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje relativo al bloque de contenido de funciones, en relación con el proceso de límite y tendencias, y en especial, de las tendencias asintótica funcionales.

Palabras clave: *metodologías activas, flipped classroom, análisis funcional, asíntotas*.

INTRODUCCIÓN

En esta comunicación, se presentan los resultados obtenidos en la tesis doctoral defendida del 29 de noviembre de 2019 que lleva por título: *"Análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje de las asíntotas a través de sus gráficas en bachillerato mediante Flipped Classroom".* También se hace un recorrido por la apasionante aventura de embaucarse en el desarrollo de una tesis doctoral en el campo de la Didáctica de la Matemática.

A lo largo de una dilatada experiencia docente, siempre se ha tenido una inquietud, que a día de hoy todavía se mantiene, que es responder a la cuestión de cómo atender a la diversidad del alumnado en la educación secundaria. Es una pregunta muy compleja ya que afecta a multitud de variables y que requeriría del análisis de muchos factores, no teniendo por tanto una respuesta única y válida para todos los casos posibles.

Se considera que las sesiones de docencia en la materia de Matemáticas no deben centrarse tanto en la transmisión acumulativa de datos sobre los contenidos que se traten en el alumnado, sino en la comprensión paulatina de los conceptos y conseguir alumnos competentes en Matemáticas.

La metodología "Flipped Classroom", traducida como "El Aula Invertida", es un modelo en el que los estudiantes llevan a cabo el primer contacto inicial con la nueva información fuera de las sesiones de clase, y los alumnos dedican el tiempo de aula en actividades de creación de un nivel superior según la taxonomía de Bloom (1956). El perfil bajo se centra principalmente en los dos niveles de comprensión que considera más básicos (recordar y entender), mientras que el trabajo de las categorías de taxonomía superiores es: aplicar, analizar, evaluar y crear. Este modelo se llama así porque invierte o "voltea" el diseño habitual de aula donde el tiempo de clase se utiliza generalmente en la transferencia de información (habitualmente a través de una metodología expositiva, como si se tratase de asistir a una conferencia), mientras que la mayor parte las tareas de mayor dificultad se llevan a cabo fuera del aula a través de "tareas para casa". Los estudiantes utilizan el tiempo de los periodos de docencia principalmente para la transferencia de información, generalmente escuchando al profesor y tomando notas, y de vez en cuando, trabajando en grupo; mientras que fuera de la clase, los estudiantes, por lo general, trabajan por su cuenta y, tras recibir la información básica de las tareas, deben realizar "deberes" de más nivel. Mientras tanto, el papel del profesor es principalmente para mediar en la transferencia de información en el aula y proponer cuestiones o preguntas a los estudiantes que deberán realizar fuera de clase (para evaluar posteriormente el trabajo de cada estudiante).

Emparejar tareas cognitivas a los contextos físicos (explicaciones en el aula y realizar tareas fuera de clase) puede presentar algunos problemas algunos estudiantes que no tienen ningún apoyo externo. La metodología *"Flipped Classroom"* propone que el alumnado tenga contacto con el contenido teórico fuera de clase y así, los estudiantes en el aula puedan trabajar en tareas de una complejidad cognitiva superior siguiendo la orientación activa del profesor.

Inicialmente se pretende valorar si la implantación de la metodología Flipped Classroom es apropiada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de las gráficas en Educación Secundaria, estimar el grado de aceptación por el alumnado y analizar los aprendizajes producidos.

Se cree, por tanto, que este planteamiento puede facilitar el aprendizaje global y competencial, no centrándose tanto en la transmisión acumulativa en el alumnado de datos sobre los contenidos que se traten, sino en la comprensión paulatina de los conceptos y la capacidad de trabajar en equipo sobre los mismos. De este modo, se potencian las competencias socio-relacionales, la participación en proyectos comunes y se aumenta el grado de implicación en las propuestas grupales en el aula de Matemáticas.

Tras la reflexión de una primera experimentación exploratoria con alumnado de 4º ESO, se reformuló dicho objetivo general de investigación y se redactó con más precisión en los siguientes objetivos específicos:

- O1.- Valorar la implantación de una metodología Flipped Classroom mixta siguiendo el modelo de Talbert.
- O2.- Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de asíntotas a través de sus gráficas mediante dicha metodología.
- O3.- Detectar las dificultades de los alumnos y la influencia del concepto de tendencia en el proceso de comprensión del concepto de asíntota.
- O4.- Descubrir posibles errores asociados o subyacentes al concepto de asíntota.

Por un lado, se han sintetizado los resultados de las investigaciones precedentes (antecedentes) que han fundamentado el trabajo de tesis y que se agrupan en los siguientes apartados:

- La metodología "*Flipped Classroom"* y *"Entornos virtuales de aprendizaje",* así como experiencias llevadas a cabo por diversos investigadores de referencia en el ámbito educativo.
- Sistemas de representación de conceptos matemáticos.
- Resultados de investigaciones centradas en el aprendizaje del concepto de límite.
- Recopilación de investigaciones sobre asíntotas.

Por otro lado, se han analizado y utilizado los marcos teórico y metodológico referenciales durante toda la experimentación que se describen a continuación:

- Teoría relativa a los estadios de aprendizaje (semiótico, estructural y autónomo) según Socas (2007) desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) que integra los diversos campos de actividad de la práctica educativa, centrándose en el Microsistema Educativo.
- Metodología de Investigación-Acción (Planificación, Acción, Observación, Análisis, Reflexión y Reformulación de Objetivos) como marcos de referencia para la puesta en acción de los diferentes Ciclos de Investigación.

Tras dicho estudio, se ha planificado, diseñado, desarrollado e implementado una propuesta didáctica relativa al proceso de enseñanza-aprendizaje de las tendencias asintóticas a partir de sus gráficas en Bachillerato, mediante una metodología de aula invertida mixta y diversas metodologías activas en las sesiones de docencia. El itinerario formativo innovador está basado en estadios de aprendizaje. guiados por vídeos inéditos creados con GeoGebra para tal fin apoyados en la concepción del límite a partir de la visualización gráfica. También se han utilizado diversas plataformas virtuales: e-ducativa, Moodle y EdPuzzle; además el material multimedia creado está alojado en Vimeo, con acceso público para su posterior utilización por parte del profesorado que así lo desee

Cabe destacar que la investigación se realizó durante los siguientes cursos académicos y en diferentes centros educativos, que se concretan a continuación: 2014/15 (IES Condesa Eylo, Valladolid), 2015/16 (IES Recesvinto de Venta de Baños, Palencia) y 2016/17 y 2017/18 (IES María Moliner de Laguna de Duero, Valladolid).

Se ha recogido de toda la documentación de la experimentación que aporta información desde diversas fuentes: (alumnado, profesorado, observadores externos), producciones orales y escritas, grabaciones, test de conocimientos previos y test de valoración final, principalmente. Posteriormente, se ha llevado a cabo un análisis profundo y globalizado del proceso de enseñanza y aprendizaje de las tendencias asintóticas en el alumnado de Bachillerato. A partir de todo ello, se han recabado las conclusiones más importantes en relación a los objetivos generales anteriormente expuestos que, sin duda, ayudará a futuros docentes a conocer y mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje relativo al bloque de contenido de funciones, en relación con el proceso de límite y tendencias, y en especial, de las tendencias asintótica funcionales.

A continuación, se presentan brevemente las conclusiones obtenidas a partir de los objetivos generales, que se enuncian nuevamente:

O1.- Valorar la implantación de una metodología Flipped Classroom mixta siguiendo el modelo de Talbert.

En todos los ciclos se evaluó la metodología implementada, llevándose a cabo en el ciclo exploratorio del curso académico 2014/15 una metodología Flipped Classroom pura, modificándose en los sucesivos ciclos a una metodología Flipped Classroom mixta según el modelo de Talbert, ya que cierto sector del alumnado no visualizaba los vídeos en sus casas.

Tras la finalización de los diferentes ciclos de investigación, se propuso al alumnado un cuestionario final, según escala Likert, para que valoraran globalmente la experimentación. Se trataba de un extenso recopilatorio sobre los siguientes apartados: el punto de partida, el grado de implicación personal en el proyecto, el grado de implicación de los docentes, el desarrollo de la actividad, la valoración de los vídeos, según su temática, los resultados obtenidos y sobre la experiencia. Globalmente la valoración fue muy positiva, aunque merece especial atención un pequeño sector del alumnado que se muestra reticente a los cambios, aunque valora positivamente la experiencia de innovación educativa.

O2.- Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de asíntotas a través de sus gráficas mediante dicha metodología.

Para estructurar el análisis de dicho proceso de enseñanza-aprendizaje, se ha categorizado el análisis en diferentes apartados según los siguientes tópicos: conceptos básicos subyacentes, infinito, verbalización, matemáticas emocionales, creatividad y falsas imágenes conceptuales.

Ciertos alumnos no son capaces de abstraer propiedades globales de familias de funciones, ni incluso la propiedad de que toda función lineal pasa por el origen de coordenadas; incluso, varios alumnos no llegan a interiorizar el significado correcto de los elementos y conceptos matemáticos propios de las funciones, imprescindible para potenciar la comprensión de las propiedades y relaciones entre los mismos. También se debe señalar que cierto sector del alumnado no diferencia el concepto abstracto de función con una representación concreta de la misma, no dominando los referentes (signo, objeto y significado) y las relaciones entre dichos referentes (signo-significado, signo-objeto y objeto-significado) según el marco de Peirce (1987). Otra gran dificultad de comprensión, presente en todos los ciclos, ha sido el valorar la relación entre las tendencias conjuntas de las dos variables. Se observa que el aprendizaje significativo se fundamenta en la aprehensión de la covariación (Leinhardt Zaslavsky, & Stein, 1990) o coordinación de lo que ocurre con las dos variables a la vez. En cualquiera de las representaciones de las tendencias asintóticas, se observa que una determinada relación de dependencia entre las dos variables caracteriza al objeto matemático, donde el cambio de una variable está relacionado con el cambio de la otra. Es decir, todos los conceptos tienen asociada la idea de dependencia funcional, que no es sencilla, y, como señalan Dolores (2004) y Dolores y Cuevas (2007), es una de las causas que provocan más errores en los alumnos, lo que sin duda indica el grado de dificultad de aprendizaje del concepto de función, sus propiedades y, en especial, las tendencias asintóticas. Por tanto, el aprendizaje de estos conceptos, contribuye al desarrollo del razonamiento covariacional (Dolores y Cuevas 2007), en concreto, se cree que el diseño del proceso de enseñanza por estadios facilita la interpretación covariacional de los conceptos, porque manifiesta la relación de dependencia entre las variables a través de diferentes representaciones (Pecharromán, 2009).

O3.- Detectar las dificultades de los alumnos y la influencia del concepto de tendencia en el proceso de comprensión del concepto de asíntota.

Kilpatrick (1998) indica que el aprendizaje de un concepto es la culminación de los aprendizajes de los procesos subyacentes, y no son pocos los que conducen al concepto de asíntota, pero son fundamentales el de función y el de límite. Por ello, el concepto de tendencia juega un papel decisivo en el proceso de comprensión de las tendencias asintóticas. A lo largo de la experimentación se ha percibido un gran avance en la comprensión de la identificación y discriminación entre aproximación y tendencia numérica, inicialmente la mayoría del alumnado optaba por la focalización en el acercamiento, pero posteriormente, se van centrando más en que las aproximaciones son mejores que cualquier aproximación, por criterios métricos o por la opción centrada en la tendencia como mejor aproximación y aportaciones subjetivas que las diferencian. Sin embargo, cierto sector, muy reducido, considera aproximación y tendencia como sinónimos, otros, segregan erróneamente entre tendencia limitada a puntos y aproximación restringida a rectas, posiblemente porque asocian el estudio de tendencias con el cálculo de límites cuya búsqueda es un valor y en la representación de funciones se ha trabajado la aproximación de las curvas a rectas cuando había comportamientos asintóticos. Otro pequeño colectivo continúa incidiendo prioritariamente en las sucesiones crecientes, pero paralelamente, convive en todos ellos un acercamiento hacia la unicidad de la tendencia, y por extensión, también al límite. En general, identifican la aproximación y tendencia sobre la curva y, se reduce el número de los que verdaderamente los discriminan y, salvo excepciones, visualizan dicha situación cuando se centra en la tendencia asociada a las abscisas de los puntos que tienden a otro punto; por lo que se pone en evidencia que es más sencillo para ellos interpretar las tendencias a través del propio punto que a través de sus abscisas. A pesar de la mejora significativa, no se puede despreciar cierto sector del alumnado que, por confusión u omisión, no interioriza que la tendencia mejora cualquier aproximación prefijada; se puede decir que es el aspecto más complicado de comprender para el alumnado. Categorizan la tendencia finita por: Finitud (F), Dinamismo (D), Rebasamiento (R), Inalcanzabilidad (I) y/o Aproximación óptima (A). Visualizando mayoritariamente la finitud y el dinamismo, la diferencia está en que algunos de ellos consideran la alcanzabilidad o no de dicha tendencia. La combinación que más se repite es la del dinamismo inalcanzable finito (D-I-F) seguida de dinamismo finito con llegada o rebasamiento (D-F-R). Sin embargo, el hecho de afirmarlo categóricamente, indica que los alumnos no ven la posibilidad de que no ocurra. La comprensión de la tendencia hacia infinito de un punto de la gráfica se puede agrupar en tres categorías según lo relacionan con: verbos que indican movimiento, acción de alejamiento y acción de superación. Se manifiesta dualidad entre tendencia finita a “un punto concreto conocido y determinado” frente la tendencia infinita como “algo desconocido, indeterminado, sin fin y que no acaba”. Se va incorporando en el lenguaje del alumnado expresiones del tipo “tiende a infinito y supera a cualquier punto”, por tanto, la docencia que se ha llevado a cabo sí que produce una evolución positiva en el tiempo respecto a la comprensión de la identificación y la discriminación, inicialmente sobre el eje de abscisas y mejorada sobre la curva. La comprensión del infinito negativo suscita más dificultades, pudiendo haber una situación de economía lingüística que pretende unificar y simplificar el discurso ante el infinito como un concepto global, no discriminando signo alguno.

Para conocer el nivel de comprensión y el grado de avance del alumnado respecto a dicho proceso de enseñanza-aprendizaje, se ha pedido sistemáticamente al alumnado la verbalización en el aula, hecho que no es tan habitual en la docencia diaria, debido a múltiples causas espacio-temporales y a la utilización de ciertas metodologías que no lo potencia, en especial la expositiva, entre otras. De este modo, se da la oportunidad a los estudiantes de hablar con sentido y escuchar, escribir, leer y reflexionar sobre el contenido, ideas, problemas y preocupaciones de una materia académica (Zayapragassarazan y Kumar, 2012, p.3), ya que fomenta el aprendizaje activo. Se ha percibido que los razonamientos explicativos de la mayoría de los alumnos han sido superficiales Las causas son múltiples, y particulares en cada alumno; pero, se consideran las siguientes como más reseñables. Por un lado, la economía o pobreza lingüística provoca que a veces se omitan palabras importantes o partes de la oración, lo que dificulta tener todos los elementos de juicio para valorar su grado de comprensión y adquisición de conexiones entre conceptos y, por otro lado, es constatable la falta de práctica de hablar en público, unido a la timidez o inseguridad característicos de la adolescencia, y más remarcado en ciertos alumnos, acentúa lo anteriormente expuesto. A partir del análisis y valoración de las interesantes aportaciones de los alumnos, se considera que las dificultades lingüísticas afectan a la comprensión y formalización matemática Socas (1997)

O4.- Descubrir posibles errores asociados o subyacentes al concepto de asíntota.

Por último, las dificultades y errores en el aprendizaje, pueden ser considerados como obstáculos cognitivos de origen didáctico, motivados por determinadas estrategias de enseñanza; como obstáculos que tienen su origen en el análisis epistemológico del conocimiento matemático, aunque en este caso, existen obstáculos desligados de la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar (Socas 2007, 33) y como ausencia de significado, debida a la complejidad de los objetos y procesos matemáticos, o debida a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Socas (2007) considera importantes y necesarios tanto el diagnóstico como tratamiento de los errores de los alumnos por su influencia en el aprendizaje matemático subsiguiente. A partir de las diferentes fases de la experimentación se han clasificado los errores asociados o subyacentes al proceso de enseñanza-aprendizaje de las tendencias en nueve categorías relacionados con aspectos: léxicos, notacionales, conceptuales, funcionales, tendencias, tendencias asintóticas, asíntotas horizontales, asíntotas verticales y asíntotas oblicuas. Algunos de los errores detectados aparecen en Fernández, Ortega y Pecharromán (2018).

En este apartado, se describen las principales aportaciones de este trabajo de investigación al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos objeto de nuestro estudio y se señalan algunos aspectos de las mismas que pudieran ser tenidos en cuenta en el desarrollo de otras investigaciones:

- Una metodología Flipped Classroom mixta siguiendo el modelo de Talbert y su valoración desde diferentes ámbitos que aporta información relativa de sus nuevas posibilidades. Los resultados globalizados muestran claramente que la utilización de esta herramienta metodológica constituye un elemento motivador para el aprendizaje y que tiene multitud de potencialidades, tanto en el ámbito educativo, como en el formativo u organizativo.
- Una relación categorizada de errores asociados o subyacentes relacionados con el proceso de comprensión de la tendencia asintótica. Estos errores detectan las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de los conceptos tratados. Dicha relación categorizada es una ayuda para focalizar la planificación de futuras intervenciones en el aula a fin de subsanar que dichos elementos puedan provocar barreras en los avances de algunos alumnos. Dicha clasificación tiene un carácter orientativo y propedéutico susceptible de ser ampliado.
- Tener conocimiento de las posibles limitaciones desde la mente del aprendiz da información al instructor para facilitar el progreso con éxito, en la medida de las posibilidades de cada sujeto individual. Toda información accesible al docente le aportará herramientas de diagnóstico valorativo y aspectos a incidir en su práctica docente con la finalidad de fomentar la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del alumnado
- El diseño, ejecución, descripción, análisis y valoración de una propuesta metodológica innovadora para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las asíntotas, habiéndose utilizado diferentes entornos virtuales interactivos: plataformas educativas, Moodle, eDPuzzle, Vimeo… lo que traslada el aprendizaje más allá del aula.
- Vídeos originales e inéditos que están a disposición de la comunidad educativa. Se puede acceder a ellos de dos formas. Por un lado, se encuentran alojados dichos vídeos generados en la presente tesis en la plataforma Vimeo teniéndose acceso público en la siguiente URL: https://vimeo.com/manage/videos. Por otro lado, también se ha creado un "aula de acceso libre" en la plataforma EdPuzzle para poder visualizar todos los vídeos y realizar tareas para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para poder acceder es necesario identificarse, dándose de alta en dicha plataforma gratuita a partir de un correo electrónico e introducir una clave.
- La aportación de dicho material multimedia y su fácil acceso ha facilitado el acercamiento a la comprensión de conceptos y procesos matemáticos abstractos desde diferentes visiones y posibilidades. Además, la utilización de medios tecnológicos apropiados ha facilitado la representación gráfica dinámica de las funciones, la percepción de sus características, la posibilidad de combinar diferentes ópticas; en especial, se señala al programa GeoGebra, la Pizarra Digital Interactiva y diversas animaciones accesibles en la red.
- Una propuesta didáctica basada en la investigación con aportaciones de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) aplicadas a un entorno educativo convirtiéndose en TAC (Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento). Dichos avances tecnológicos, científicos y de la información, aplicados al campo de la educación se consideran que fomentan el desarrollo intelectual y las funciones cognitivas favoreciendo la consecución de los objetivos generales de cada etapa educativa; y en especial, en el área de Matemáticas.

Si se desea profundizar en este campo, se puede acceder al texto completo de la tesis en el siguiente enlace del repositorio documental de la Uva https://uvadoc.uva.es/handle/10324/40240

REFERENCIAS

Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals: *Hand book 1*, Cognitive Domain. New York: David McKay.

Dolores, C. (2004): Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 7, Nº 3, pp.195-218.

Dolores, C.y Cuevas, I. (2007): Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10, Nº 1, pp.69-96.

Fernández Barcenilla, R. M., Ortega del Rincón, T., & Pecharromán Gómez, C. (2018). Aprendizaje del concepto de tendencia a partir de representaciones gráficas con la metodología del Aula Invertida. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*.

Fernández Barcenilla, R. M. (2019). *Análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje de las asíntotas a través de sus gráficas en bachillerato mediante flipped classroom* (Doctoral dissertation, Universidad de Valladolid).

Leinhardt,G., Zaslavsky, O., & Stein, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*. 60 (1), 1-64.

Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la compresión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación Matemática*, 26,2

Pecharromán, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de las gráficas*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica.* Madrid: Taurus.

Socas, M. (2001). Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el lenguaje algebraico. Documento de investigación. Universidad de La Laguna.

Socas, M. (2002). Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 5, pp. 199-216. México DF.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI*, pp.19-52.

Zayapragassarazan, Z. & Kumar, S. (2012). Active learning methods. NTTC Bulletin. 19 (1), 3-5.

Kilpatrick, J. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* (Eds) J. Kilpatrick, P. Gómez, L. Rico. Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá

Para hacer referencia al artículo:

Fernández Barcenilla, R.M. (2022). Análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje de las asíntotas a través de sus gráficas en bachillerato mediante Flipped Classroom. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 276 - 282). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

SITUACIONES DE APRENDIZAJE, SITUACIONES PARA APRENDER MATEMÁTICAS

María de los Ángeles Gil Blanco IES Hermanos D'Elhuyar

Resumen

El RD 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria define situaciones de aprendizaje como situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas. Además, indica que las situaciones de aprendizaje permiten trabajar de manera que los saberes básicos contribuyan a la adquisición de las competencias. Para ello, deben plantearse, a partir de un objetivo claro, estar conectadas con la realidad e invitar al alumnado a la reflexión y a la colaboración. En esta comunicación se pretende analizar los distintos elementos que puede contener una situación de aprendizaje y mostrar ideas para 1º de ESO.

Palabras clave: *situaciones de aprendizaje, matemáticas, secundaria.*

¿Qué son las situaciones de aprendizaje?

El concepto de situación de aprendizaje no es nuevo en la legislación educativa ya que en el preámbulo tanto del Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria como en el del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, se indicaba:

> El rol del docente es fundamental, pues debe ser capaz de diseñar tareas o situaciones de aprendizaje que posibiliten la resolución de problemas, la aplicación de los conocimientos aprendidos y la promoción de la actividad de los estudiantes.

Aunque posteriormente no se desarrollaba en el articulado de sendos reales decretos.

En el artículo correspondiente a las definiciones de los actuales reales decretos[i] por los que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de las distintas etapas educativas (Infantil, Primaria, ESO y Bachillerato) se indica:

> Situaciones de aprendizaje: situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas, y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas.

Además, se muestran diversas referencias en los articulados correspondientes y en todos se incluye un anexo desarrollando el concepto.

---

[i] Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

Este término está siendo controvertido por no quedar demasiada clara su definición y algunas administraciones educativas lo están regulando en sus respectivas normativas autonómicas.

Por tanto, de la actual normativa se extrae que las características principales de las situaciones de aprendizaje son:

- Contextualizadas. Buscan conectar y aplicar lo aprendido en contextos cercanos a la vida real.
- Parten de los conocimientos previos y experiencias reales del alumnado.
- Compuestas por tareas complejas, con objetivos claros y precisos que integren diversos saberes básicos.
- Se ajustan a las necesidades, características y diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado.
- Deben proponer tareas que favorezcan diferentes agrupamientos y que promuevan el trabajo autónomo, cooperativo y responsable.

Por tanto, las situaciones de aprendizajes son el último nivel de concreción del currículo donde se concretan en la práctica las intenciones educativas planificadas.

Figura 1. Situaciones de aprendizaje. Fuente: MEFP

En la normativa estatal no se establece ningún modelo prescriptivo para su elaboración por lo que podrá escogerse aquel que se estime más conveniente siempre que, con la correspondiente reflexión o valoración de la situación de aprendizaje y de la práctica docente, recoja los elementos marcados anteriormente:

- Datos identificativos.

  Título, curso, áreas o materias implicadas, justificación de la propuesta, aprendizajes que se quieren conseguir, planteamiento del producto final y su temporalización.

- Conexión con los elementos curriculares.

  Relación con distintos elementos del currículo: objetivos, competencias clave y competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos.

- Metodología que favorezca la inclusión educativa a través del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

  Selección de distintos métodos, técnicas o estrategias didácticas enfocadas en el alumnado como agente y reflejando la atención a la diversidad

- Secuencia competencial.

Descripción de las distintas tareas o productos intermedios que permitan desarrollar el producto final detallando los recursos necesarios y alineados con los principios DUA.

- Evaluación de los aprendizajes.

  Descripción de las técnicas e instrumentos para evaluar los aprendizajes.

Dentro de los criterios que es conveniente tener en cuenta para el diseño de las situaciones de aprendizaje hay que destacar la vinculación con los principales desafíos para siglo XXI y que esté alineada con las competencias clave y las competencias específicas de cada área o materia.

Figura 2. Principales desafíos educativos para el siglo XXI. Fuente: MEFP

Además, en la secuenciación de las tareas se identificarán e incluirán los principios DUA, contemplando múltiples formas de representación, de acción o expresión del aprendizaje e implicación del alumnado.

	DISEÑO UNIVERSAL PARA EL APRENDIZAJE. Principios y pautas. CAST.2018. Traducción EDUCADUA (educadua.es)		
	Proporcionar múltiples formas de implicación	**Proporcionar múltiples formas de representación**	**Proporcionar múltiples formas de acción y expresión**
Pautas	**Proporcionar opciones para captar el interés (7)**	**Proporcionar opciones para la percepción (1)**	**Proporcionar opciones para la interacción física (4)**
Puntos de verificación	Optimizar la elección individual y la autonomía (7,1)	Ofrecer opciones para la modificación y personalización en la presentación de la información (1.1)	Variar los métodos para la respuesta y la navegación (4.1)
	Optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad (7.2)	Ofrecer alternativas para la información auditiva (1.2)	Optimizar el acceso a las herramientas y los productos y tecnologías de apoyo (4.2)
	Minimizar la sensación de inseguridad y las distracciones (7.3)	Ofrecer alternativas para la información visual (1.3)	
Pautas	**Proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia (8)**	**Proporcionar opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y los símbolos (2)**	**Proporcionar opciones para la expresión y comunicación (5)**
Puntos de verificación	Resaltar la relevancia de las metas y los objetivos (8.1)	Clarificar el vocabulario y los símbolos (2.1)	Utilizar múltiples medios de comunicación (5.1)
	Variar los niveles de exigencia y los recursos para optimizar los desafíos (8.2)	Clarificar la sintaxis y la estructura (2.2)	Usar múltiples herramientas para la construcción y la composición (5.2)
	Fomentar la colaboración y la comunidad (8.3)	Facilitar la decodificación de textos, notaciones matemáticas y símbolos (2.3)	Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y ejecución (5.3)
	Utilizar el feedback orientado hacia la maestría en una tarea (8.4)	Promover la comprensión entre diferentes idiomas (2.4)	
		Ilustrar las ideas principales a través de múltiples medios (2.5)	
Pautas	**Proporcionar opciones para la autorregulación (9)**	**Proporcionar opciones para la comprensión (3)**	**Proporcionar opciones para las funciones ejecutivas (6)**
Puntos de verificación	Promover expectativas y creencias que optimizan la motivación (9.1)	Activar los conocimientos previos (3.1)	Guiar el establecimiento de metas (6.1)
	Facilitar estrategias y habilidades personales para afrontar los problemas de la vida cotidiana (9.2)	Destacar patrones, características fundamentales, ideas principales y relaciones entre ellos (3.2)	Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias (6.2)
	Desarrollar la autoevaluación y la reflexión (9.3)	Guiar el procesamiento de la información, la visualización y la manipulación (3.3)	Facilitar la gestión de información y de recursos (6.3)
		Maximizar la memoria, la transferencia y la generalización (3.4)	Aumentar la capacidad para hacer un seguimiento de los avances (6.4)
Objetivos	**Estudiante motivado y decidido**	**Aprendiz capaz de identificar los recursos adecuados**	**Estudiante orientado a cumplir metas**

Figura 3. Principios y pautas para el DUA. Fuente: educadua.es

Situaciones para aprender Matemáticas

¿Cómo aterrizar y concretar todo lo anterior en Matemáticas? La respuesta no es sencilla pero bajo mi punto de vista se centraría en pasar de situaciones de aprendizaje a situaciones para el aprendizaje proponiendo un enfoque competencial más que únicamente un enfoque en los contenidos, y empleando metodologías activas.

La primera actividad de una situación de aprendizaje cuando se presenta al alumnado incluirá una exposición general explicando en qué consiste, qué va a aprender, cómo se va a desarrollar y cómo se va a evaluar. A continuación es importante que formulemos un pequeño reto o una pregunta clave de carácter real y relacionado con su entorno cercano. Servirá para que el estudiante se sienta identificado e involucrado de una forma más directa y, por tanto, más motivado.

Se muestran a continuación algunas ideas de situaciones reales que generan una pregunta inicial y que podrían introducir situaciones de aprendizaje en 1º de ESO:

- Un tuit viral obtenido en la red social Twitter con la afirmación de un famoso youtuber: "¿Estás de acuerdo con la afirmación de El Rubius?"

Figura 4. Corte de un sandwich

- Un tuit de la profesora Lola Morales sobre una rampa en un parque genera varias preguntas iniciales: "Si vas en silla de ruedas, ¿es fácil subir esa rampa?", "¿Y con la bici o los patines?" o "¿Te has fijado si hay barreras arquitectónicas para llegar al instituto?" y "¿Las hay dentro del centro?"

Figura 5. Rampa en la ciudad. Fuente: Twitter.com

- Un folleto publicitario con ofertas de diferentes comercios: “¿Es lo mismo 2x1 que descuento del 50%?” o “¿Cuál es para ti la mejor oferta?”

Figura 6. Folleto publicitario. Fuente: Infobae.com

- Un gazapo en televisión: “¿Qué observas en el gráfico de barras?”

Figura 7. Evolución del IPC

Las situaciones de aprendizaje que abordemos deberían guardar una estrecha relación con los saberes básicos indicados en el currículo para aprenderlos en escenarios lo más reales posibles y transferirlos a la resolución de otros problemas de su entorno ya sea cotidiano o académico.

Por tanto, a la vez que pensamos la pregunta inicial vamos también considerando cuál será el producto final teniendo en mente qué quiero que aprendan más que qué quiero enseñar. Es fundamental hacer (buenas) preguntas y hacer que se hagan (buenas) preguntas, ofrecer distintas opciones para captar su interés, que piensen y busquen soluciones, trabajando en equipo y que sean capaces de comunicar tanto la solución como el procedimiento que les ha llevado a ella.

¿Cómo conseguirlo? Generando tareas ricas, de perfil bajo y suelo alto; tareas auténticas, relevantes y cargadas de significado para el alumnado.

Además, es importante que tengan que exponerlo para que, con las matemáticas como hilo conductor, aprendan a hablar y a expresarse en público.

Y todo ello con un seguimiento y evaluación (y no necesariamente calificación) del trabajo que van realizando hasta llegar al producto final, con una retroalimentación que facilite los aprendizajes y así poder obtener una información valiosa para adoptar las decisiones educativas más adecuadas para que el alumnado pueda presentar un producto final acorde con las características correspondientes.

Una vez analizadas las características de las situaciones de aprendizaje y como reflexión final tenemos dos visiones, la primera, similar a la paradoja del Gatopardo, "cambiar todo para que nada cambie" y la segunda, la indicada en la letra de la canción de Mercedes Sosa, "Cambia lo superficial, cambia también lo profundo, cambia el modo de pensar, cambia todo en este mundo". Los docentes podemos decidir cuál es nuestra opción teniendo siempre en mente a nuestro alumnado y cuál es la mejor forma de que adquiera, desde las Matemáticas, los aprendizajes competenciales que contribuyan a su formación como ciudadanos y ciudadanas, miembros activos de una sociedad democrática.

Referencias.

Martín, E. y Coll, C. (2021). Situaciones de aprendizaje. SM Thrivu (www.thrivu.grupo-sm.com).

Curso Situaciones de aprendizaje para el desarrollo de competencias. Instituto Nacional Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Para hacer referencia al artículo:

María de los Ángeles Gil Blanco. (2022). Situaciones de aprendizaje, situaciones para aprender Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 283 - 288). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

CONFERENCIA PLENARIA

MATEMÁTICAS CON MAYÚSCULAS. NUEVO CURRÍCULO, NUEVAS OPORTUNIDADES.

Sonsoles Blázquez Martín [a]

[a]IES Pío del Río Hortega (Portillo, Valladolid)

Resumen

La LOMLOE puede parecer otra ley educativa más, una ley que pretende corregir las deficiencias de la LOMCE. En ésta se reformulaban las competencias introducidas por primera vez en la ley anterior, la LOE. Las competencias vinieron para quedarse, pero en todo este tiempo no hemos sido capaces de integrarlas adecuadamente en la enseñanza de nuestra materia, el diseño curricular no lo ha favorecido. Un análisis profundo del nuevo currículo de matemáticas nos abre una nueva e interesante perspectiva que nos permitirá diseñar actividades competenciales para que el alumnado aprenda y utilice las MATEMÁTICAS, con mayúsculas: que resuelva problemas, razone, haga conexiones, represente y comunique, además de cambiar su visión sobre la materia. El objetivo de esta conferencia es mostrar esa perspectiva y poner algunos ejemplos de tareas adaptadas a este nuevo marco legislativo en los diferentes niveles.

Palabras clave: *currículo, LOMLOE, matemáticas.*

INTRODUCCIÓN

El problema

Nos enfrentamos a una ley educativa más, la cuarta en los últimos 20 años. Las leyes se suceden una tras otra según se suceden los gobiernos, siempre provocadas por una falta de consenso educativo, consenso que llevamos años reclamando los docentes. El cambio curricular que trae consigo esta nueva ley, además, se ha introducido “a calzador” cuando el curso ya se había iniciado. Se ha comenzado a organizar los centros sin tener el currículo de la Comunidad Autónoma aprobado, inmersos en controversias políticas que padecen finalmente alumnado, profesorado y familias, información sesgada en los medios de comunicación, destacando aspectos que pueden generar polémica fuera de contexto. Todo ello lleva al malestar del profesorado e incluso al rechazo a las exigencias de la nueva ley. Pero lo cierto es que esta ley supone, pese a todas las dificultades con las que ya se enfrenta día a día el profesorado, una oportunidad para cambiar, para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

¿Necesitamos un nuevo currículo?

En el XIV Congreso Regional de la Asociación “Miguel de Guzmán” celebrado en León en 2018, se presentó una comunicación titulada “El necesario cambio curricular y metodológico” (Blázquez, S., Del Río, P., 2018), que resumía el trabajo de un equipo formado por profesorado de la sede de Valladolid de la Asociación, preocupados por hacer más racional el currículo y mejorar la metodología de cara a favorecer la investigación y la resolución de problemas. Entonces se pedía un cambio curricular y ese cambio ha llegado. Para ver la necesidad de un nuevo currículo es imprescindible hacer un análisis de los puntos débiles del anterior, del currículo LOMCE. Seguramente gran parte del profesorado comparta esta valoración:

- Excesiva cantidad de contenidos: se reconoce que el currículo se basa en la adquisición de contenidos, que son inabarcables y repetitivos.

- No ha sido posible integrar adecuadamente las competencias clave en la enseñanza de las materias. Un currículo organizado por materias como el nuestro dificulta esa transversalidad.
- Falta coordinación y coherencia entre las materias en los distintos niveles educativos.
- La definición tan concreta de contenidos en la LOMCE no permite actualizar los mismos según evoluciona la sociedad. Se siguen manteniendo los contenidos del siglo pasado, sin plantear su utilidad en la sociedad actual.

Todos estos puntos débiles se describen en un documento base publicado por el ministerio de educación en noviembre de 2020, “La reforma del currículo en el marco de la LOMLOE”[19] . Vistos los puntos débiles, se analizan las soluciones que aporta el nuevo currículo.

¿A QUIÉN SE LE HA OCURRIDO TODO ESTO?

Para entender de dónde surgen muchas de las ideas del currículo se remite al lector al documento del CEMat “Bases para la elaboración de un currículo en enseñanza no universitaria” (Calvo et al., 2021). En el CEMat (Comité Español de Matemáticas) están representadas todas las entidades relacionadas con las matemáticas, su investigación y su enseñanza. El documento fue elaborado con el fin de guiar la elaboración del nuevo currículo y, afortunadamente, el Ministerio lo tomó como referencia. Es de destacar una parte del documento, que no se plasmó en el currículo, referida a los aspectos curriculares que requieren menos y más atención. Por ejemplo, en los contenidos sobre medida, se habla de enfatizar la manipulación, seleccionar unidades y estimar en Infantil y Primaria, mientras que en Secundaria se enfatiza la elaboración de modelos, la resolución de problemas que implican trabajar con el espacio, la forma o el cambio, la visualización a través de objetos físicos y también a través de la tecnología, así como las conexiones entre geometría sintética y analítica. En Bachillerato, además, se da importancia al razonamiento y la demostración desde la experimentación. Por el contrario, lo que merece menos atención en este apartado es aquello a lo que se dedica más tiempo habitualmente: reducir todos los problemas a cálculos de perímetros, áreas y volúmenes mediante fórmulas, cambios de unidades repetitivos, cálculo de límites, derivadas o primitivas poco habituales o estudiar propiedades para representar funciones cuando hay multitud de herramientas que representan funciones en segundos (incluso el buscador Google). Las ideas principales del documento, ideas que impregnan el currículo de matemáticas de la LOMLOE, se resumen a continuación:

- Importancia de los procesos de matematización.
- El marco teórico de Pisa ofrece una descripción del significado de competencia matemática basada en las siguientes subcompetencias: plantear y resolver problemas, construir modelos, razonar matemáticamente, representar entidades matemáticas, manejo de símbolos matemáticos y formalismos, comunicar en, con y acerca de las matemáticas y uso de recursos y herramientas.
- Grandes ideas matemáticas, como patrones, modelo, relaciones, transformaciones, incertidumbre o magnitud, entre otras, para organizar los contenidos.
- Contenidos (saberes) agrupados en sentidos: algebraico, espacial, estocástico, medida, numérico.
- Importancia del aporte de las matemáticas al desarrollo de la humanidad.

[19] https://curriculo.educacion.es/wp-content/uploads/2020/11/DOCUMENTO-BASE-CURRICULO-MEFP-NOV-2020.pdf

- Resolución de problemas como eje metodológico.
- Pensamiento computacional (no solo uso de herramientas tecnológicas).

Todas estas ideas son comunes a todos los niveles desde Infantil a Bachillerato, y todas ellas se han materializado en la elaboración de los currículos, exceptuando el currículo de Infantil.

LAS COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS

Como ya se ha señalado, uno de los problemas del currículo anterior era el desarrollo y evaluación de las competencias clave en un currículo organizado en áreas o materias. En este apartado se expone la solución aportada por la LOMLOE. Hay que señalar que las competencias clave se redefinen (por ejemplo, la competencia matemática y científica se fusiona con la tecnológica para formar la STEM) y se concretan en una serie de descriptores, que en la ESO se denominan *perfil de salida*.

La solución al problema de las competencias pasa por definir nuevas competencias asociadas a cada materia, las competencias específicas, que a su vez están relacionadas con los descriptores de las competencias clave, a través del mapa de relaciones competenciales. Las competencias específicas se evalúan tomando como referentes los criterios de evaluación. Es un cambio sustancial el hecho de que los criterios de evaluación se refieran a las competencias y no a los contenidos. En nuestra Comunidad, además, se han relacionado estos criterios de evaluación de las competencias específicas con los descriptores, en lo que se llama mapa de relaciones criteriales. De esta manera, evaluar o calificar las competencias específicas lleva consigo evaluar o calificar las competencias clave a través de esas relaciones. De ahí la importancia de profundizar en el conocimiento de las competencias específicas, ya que son estas competencias las se van a trabajar y evaluar a lo largo del proceso de enseñanza aprendizaje. Es el primer paso para hacer un cambio real en el currículo.

Las competencias específicas de matemáticas se organizan en cinco grupos de competencias, el número de competencias de cada grupo (una o dos) depende del nivel educativo, pero los grupos son comunes a todos los niveles. La resolución de problemas tiene que ver directamente con ese proceso de matematización que describía el documento base. Contempla dos competencias, una relacionada con la interpretación de situaciones y resolución de problemas reales o propios de la matemática, y otra relacionada con el análisis de la solución de dichos problemas (figura 1).

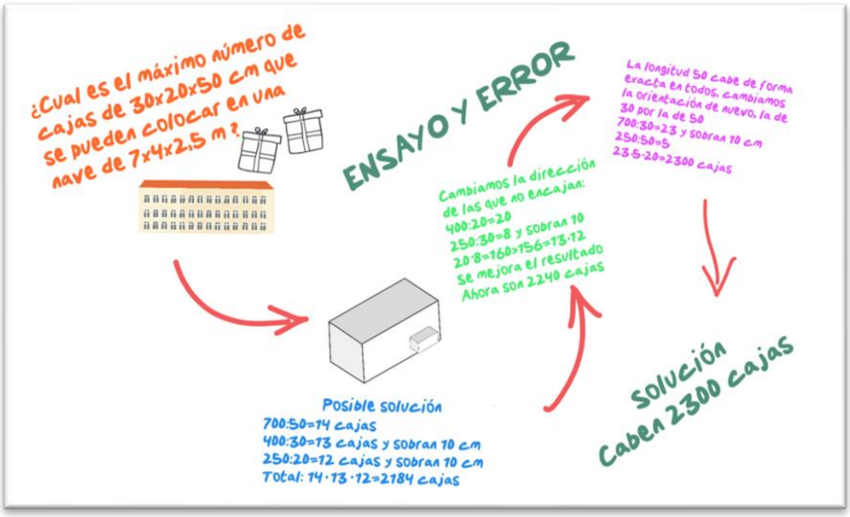


Figura 53. Competencias de Resolución de problemas.

El bloque de razonamiento y prueba contempla también dos competencias, una que tiene que ver directamente con la formulación, comprobación o investigación de conjeturas utilizando el razonamiento o el planteamiento de problemas, y otra que se refiere al pensamiento computacional como estrategia de razonamiento (Figura 2).

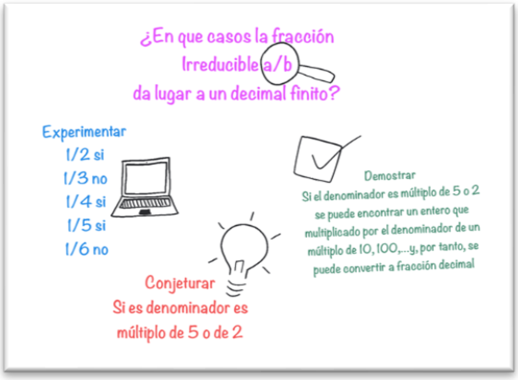


Figura 2. Competencias de Razonamiento y lógica

El bloque de conexiones hace referencia a las relaciones dentro de la matemática, por un lado, y de las matemáticas con otras materias y con la vida cotidiana, por otro. Esas conexiones son importantes en el proceso de resolución de problemas y en la búsqueda de modelos matemáticos (Figura 3).

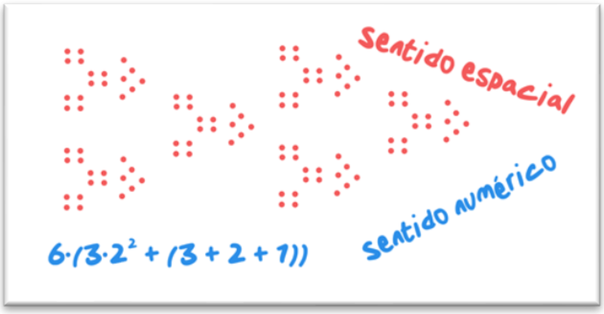


Figura 3. Competencias de Conexiones.

El bloque de comunicación y representación distingue, por un lado, la representación de ideas matemáticas desde distintos puntos de vista y, por otro, la comunicación de dichas ideas usando un lenguaje apropiado y una terminología matemática adecuada a la madurez del alumnado (Figura 4).

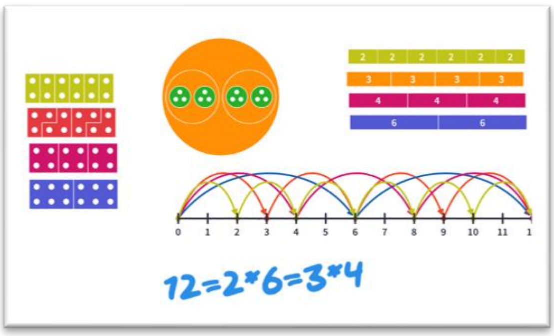


Figura 4. Competencias de Comunicación y Representación.

Por último, el bloque socioafectivo, contempla una competencia individual, relacionada con gestión de emociones, aceptación del error como motor de aprendizaje y mejora de la perseverancia y la actitud ante las matemáticas, y otra competencia grupal, relacionada con las destrezas sociales y el trabajo en equipo (Figura 5).

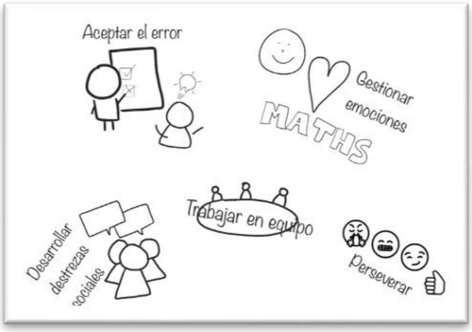


Figura 5. Competencias Socioafectivas.

CONTENIDOS VS SABERES

Una vez que se ha expuesto en qué consisten las competencias específicas, el siguiente paso es analizar otro de los componentes del currículo, que ha cambiado su papel en el mismo. Los contenidos en el currículo LOMLOE se enuncian en forma de saberes básicos y, aunque pueda parecer que pasan a un segundo plano porque no se evalúan directamente, ya que son las competencias las que se evalúan a través de los criterios, realmente constituyen las herramientas para desarrollar dichas competencias, por lo que son imprescindibles para el desarrollo de estas.

Aunque en el currículo de esta Comunidad se han concretado muchos de los contenidos que aparecían en los Reales Decretos, se ha pretendido mantener cierta generalidad para facilitar así su adaptación. Por ejemplo, se ha concretado el uso de las variables para clarificar "Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos (como incógnita en ecuaciones, inecuaciones y sistemas, indeterminada en patrones e identidades, para expresar cantidades que varían en fórmulas y funciones elementales y como constantes o parámetros en modelos funcionales)" pero se ha dejado más abierto el apartado de operaciones con números reales "Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas", donde cabría todo tipo de operaciones, incluidas las operaciones con radicales. Ahora bien, incluir o no un contenido, como puede ser el de las operaciones con radicales, supone plantear si dicho contenido tiene cabida para resolver problemas contextualizados, ya sean contextos reales o matemáticos. Si algún contenido no es útil para desarrollar alguna de las competencias, no tiene cabida en las tareas de aprendizaje que se diseñen.

En Matemáticas, los contenidos se organizan en sentidos, que sustituyen a los bloques que tradicionalmente aparecían en los currículos. No es sólo un cambio de denominación, la agrupación de los contenidos es diferente. Esta idea de aprender matemáticas con sentido, de desarrollar los sentidos matemáticos, enfatiza el aspecto competencial de los saberes. Se trata de enseñar una matemática funcional en la que los distintos contenidos se usan para resolver problemas. Es muy importante el hecho de que los sentidos sean los mismos para todas las etapas educativas, lo que le da coherencia a todo el currículo.

Cada sentido, además, contempla grandes ideas matemáticas que los organizan (Figura 6). No todas las grandes ideas están en todos los cursos y niveles. Se ha pretendido distribuir los contenidos de manera que no se repitan los mismos contenidos en cursos diferentes. Por ejemplo, la idea de incertidumbre no aparece en primero de ESO, donde, de hecho, se ha preferido no trabajar contenidos relacionados con el sentido estocástico, para centrarse en los sentidos numérico, de la medida y espacial.

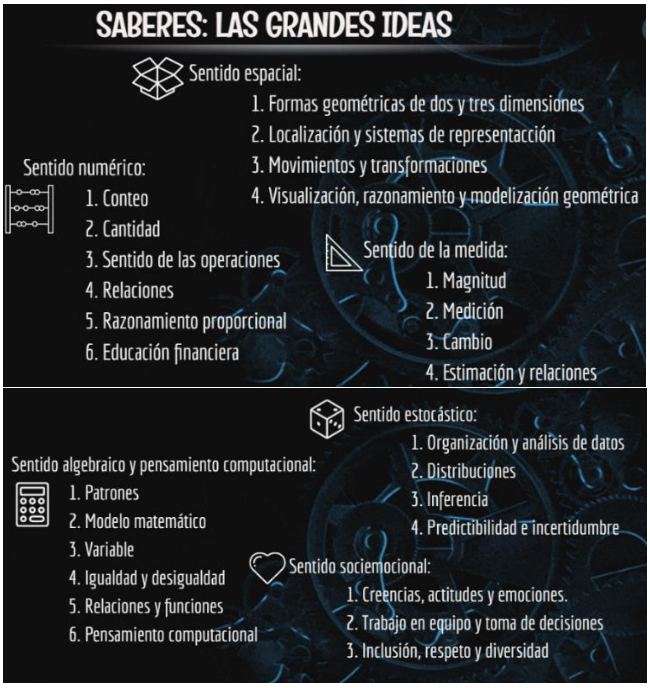
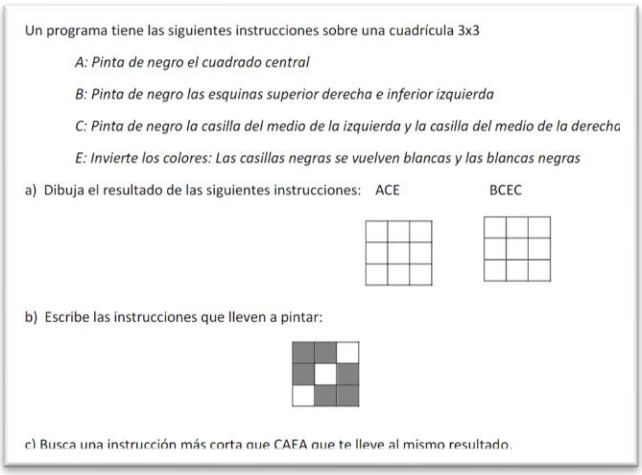


Figura 6. Los sentidos y las grandes ideas matemáticas.

El pensamiento computacional es una novedad en el currículo, aunque aparece en el documento de bases. Es un error vincular el pensamiento computacional a la programación sin más o al uso de ordenadores. Hay multitud de actividades de las llamadas “desenchufadas”, en las que se trabaja ese tipo de pensamiento. Por ejemplo, la que se muestra en la Figura 7, extraída de modelos de pruebas francesas para la titulación de secundaria.


Un programa tiene las siguientes instrucciones sobre una cuadrícula 3x3

A: Pinta de negro el cuadrado central

B: Pinta de negro las esquinas superior derecha e inferior izquierda

C: Pinta de negro la casilla del medio de la izquierda y la casilla del medio de la derecha

E: Invierte los colores: Las casillas negras se vuelven blancas y las blancas negras

a) Dibuja el resultado de las siguientes instrucciones: ACE BCEC

b) Escribe las instrucciones que lleven a pintar:

c) Busca una instrucción más corta que CAEA que te lleve al mismo resultado.

Figura 7. Actividad de pensamiento computacional.

El sentido socioemocional no se guía obviamente de ideas propias de las matemáticas, sino que contextualiza ideas relacionadas con las emociones en el aprendizaje matemático.

Algunas de estas grandes ideas merecen una reflexión para valorar en qué medida pueden impregnar el aprendizaje de las matemáticas a lo largo de todas las etapas. Por ejemplo, la idea de las relaciones entre las operaciones: entender que la multiplicación y la división son operaciones inversas significa comprender la relación entre múltiplos y divisores, pero también comprender que, en problemas de porcentajes, si se multiplica por el índice de variación para calcular una cantidad final, se dividirá para hallar la inicial. Otra idea interesante es la del estudio de variaciones funcionales, que tiene que ver más con la idea de medida que con el aspecto algebraico del estudio funcional. Así, no hay un bloque de funciones, sino grandes ideas relacionadas con el concepto de función. De la misma manera, la idea de probabilidad va a aparecer en varios sentidos, puesto que tiene que ver con la idea de incertidumbre, pero también con la de medida de esa incertidumbre. Esta interrelación entre los conceptos matemáticos y las grandes ideas se puede observar en otros muchos ejemplos. El conteo aparece como una gran idea relacionada con otras como la combinatoria, asociada al número de elementos de sucesos aleatorios, pero igualmente aparece en la multiplicación como estrategia para contar objetos dispuestos en forma de rectángulo. El sentido espacial se centra en el estudio de las figuras geométricas y sus relaciones y, aunque se relacione con el sentido de la medida, en cuanto que éste se focalizará en la medida de magnitudes asociadas a las figuras, es un sentido diferente que se debe desarrollar y que habitualmente ha sido poco atendido. Por último, hay que señalar que, aunque los elementos socioafectivos no son sólo propios de la labor matemática, son muy importantes en aspectos como la resolución de problemas o el rechazo que el alumnado tiene hacia la materia.

ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR EL CURRÍCULO

Y ya sólo queda un aspecto a contemplar, las actividades que hemos de llevar a cabo en el aula para desarrollar y evaluar esas competencias, utilizando como herramientas los saberes.

Las situaciones de aprendizaje

Una de las grandes incógnitas de este nuevo currículo es qué son las situaciones de aprendizaje. Según la normativa son "Situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas" [20]. En el desarrollo normativo posterior no se contempla ningún ejemplo más allá de cuestiones genéricas en los diversos contextos considerados para todas las áreas y materias (personal, familiar, social y educativo) y de la estructura que podría tener su diseño. En el Anexo III de los Reales Decretos de Currículo de todos los niveles se señalan algunas de sus características:

- Están contextualizadas y conectadas con las experiencias del alumnado.
- Están compuestas por tareas complejas cuya resolución conlleve la construcción de nuevos aprendizajes.
- Ofrecen al alumnado la oportunidad de conectar y aplicar lo aprendido en contextos cercanos a la vida real.
- Siguen los Principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)
- Integran diversos saberes básicos.
- Consideran diferentes tipos de agrupamientos.
- Implican la producción y la interacción verbal, el uso de recursos en distintos soportes y formatos (analógicos y digitales).
- Fomentan aspectos relacionados con el interés común, la sostenibilidad o la convivencia democrática.

La cuestión que se plantea ahora es qué tipo de materiales y actividades se necesitan para desarrollar situaciones de aprendizaje que posean las características anteriores. Veremos cuatro ideas que pueden ayudarnos en dicha tarea: tareas ricas (o de suelo bajo y techo alto), prácticas productivas, frente a prácticas reproductivas, tareas contextualizadas y utilización de diversidad de materiales.

[20] Artículo 2f) de los Reales Decretos por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de las distintas etapas educativas.

Tareas ricas

Se proponen ahora algunos ejemplos de tareas ricas, que son aquellas a las que cualquier alumno tiene oportunidad de acceder (suelo bajo) pero también de progresar hasta donde sea capaz (techo alto). La página https://nrich.maths.org/ tiene multitud de ejemplos de dichas tareas. Las dos tareas siguientes están relacionadas con las figuras planas y las coordenadas. En la primera tarea, se buscan triángulos isósceles de 8 centímetros cuadrados de área, con vértices de coordenadas naturales, uno de ellos en (0,0). Al alumnado se le pide que describa cómo lo hace, siempre fomentando la comunicación de ideas matemáticas. El ejercicio se puede hacer en un geoplano virtual de trama cuadrada como el que se encuentra en https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/, donde se pueden marcar los lados de los cuadrados y colocar los ejes de coordenadas. De las distintas soluciones (Figura 8), las que tienen el punto (0,0) como vértice de uno de los ángulos iguales son bastante accesibles, teniendo en cuenta la forma tradicional de calcular el área. Sin embargo no son tan sencillas aquellas que tienen el vértice del ángulo desigual en el (0,0), ya que calcular el área de dichos triángulos pasa por calcular el del cuadrado que lo contiene y restar el de los triángulos rectángulos que no forman parte del triángulo original.

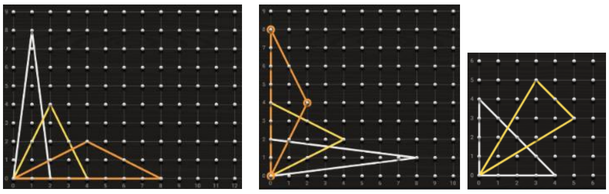


Figura 8. Solución de la tarea sobre triángulos isósceles.

En la segunda actividad se buscan triángulos con base en el segmento de extremos (0,1) y (0,7) y con área 24 centímetros cuadrados, y se pregunta dónde queda el tercer vértice. En este caso, las limitaciones del geoplano han de ser superadas para poder generalizar el resultado. La conjetura de que los vértices forman una línea recta paralela a la inicial debe ser probada teniendo en cuenta la relación entre la base, fija para todos, y la altura.

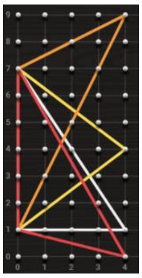


Figura 9. Solución de la tarea sobre triángulos con base fija.

La última tarea que se propone en este apartado se basa en una tabla de multiplicar de doble entrada a escala (cada número ocupa un número de cuadraditos igual al propio número) como la mostrada en la Figura 10. Esta disposición da lugar a gran cantidad de propuestas que tienen que ver con búsqueda de distintas formas de factorizar números, propiedades de la multiplicación, cuadrados, patrones, etc[21] y vincula el sentido numérico con el espacial.

[21] La idea es original de Anton Aubanell, y se presentó en el curso "HelloMath! Atrévete con la creatividad matemática", organizado por la fundación Educaixa.

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 10. Tabla de multiplicar a escala

Prácticas productivas

Frente a las prácticas reproductivas, centradas en la automatización de destrezas, surgen las prácticas productivas, que ponen en juego las mismas destrezas, pero en situaciones de resolución de problemas. Para Alsina (2020) las prácticas productivas deben:

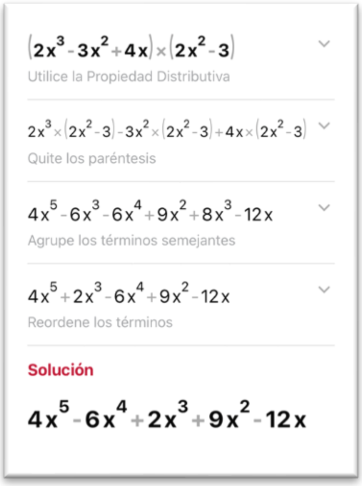
- Promover la resolución de problemas que implican pensar frente a ejercitar contenidos previamente explicados.
- Plantear preguntas que impliquen argumentar frente a explicar técnicas y procedimientos para resolver ejercicios.
- Fomentar la comunicación en el aula frente a la comunicación unidireccional.
- Diseñar e implementar actividades matemáticas que requieran hacer conexiones frente a la estructura en bloques de contenidos.
- Incentivar la expresión oral, gráfica y/o simbólica desde lo concreto, pasando por lo pictórico hasta llegar a lo abstracto, promoviendo distintos tipos de representaciones

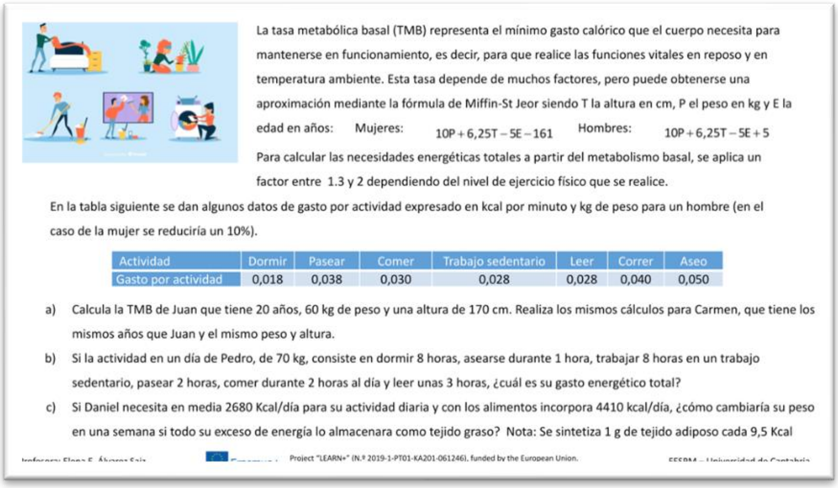
Podemos ver varios ejemplos de prácticas productivas en el interesante Blog de PuntMat y en alguna de sus publicaciones[22].

Tareas contextualizadas

En este apartado se comparan dos tareas relacionadas con las manipulaciones algebraicas. La primera, una multiplicación de polinomios, es una tarea mecánica que realizan multitud de aplicaciones rápidamente, mientras que la otra tarea forma parte del proyecto Erasmus de la FESPM Milage Aprender+ (Figura 11). En esta última tarea también se usan los dispositivos móviles, pero para autoevaluar la resolución de problemas en contexto. En ocasiones, el alumnado es capaz de resolver tareas complejas como la multiplicación de polinomios y, sin embargo, no es capaz de calcular la tasa metabólica basal a partir de una fórmula, tarea aparentemente más sencilla. Eso tiene que llevar al profesorado a reflexionar y, aunque las tareas en contexto conllevan mayor esfuerzo de comprensión para el alumnado, son básicas para desarrollar la competencia matemática.

[22] http://puntmat.blogspot.com/





La tasa metabólica basal (TMB) representa el mínimo gasto calórico que el cuerpo necesita para mantenerse en funcionamiento, es decir, para que realice las funciones vitales en reposo y en temperatura ambiente. Esta tasa depende de muchos factores, pero puede obtenerse una aproximación mediante la fórmula de Miffin-St Jeor siendo T la altura en cm, P el peso en kg y E la edad en años: Mujeres: $10P+6{,}25T-5E-161$ Hombres: $10P+6{,}25T-5E+5$

Para calcular las necesidades energéticas totales a partir del metabolismo basal, se aplica un factor entre 1.3 y 2 dependiendo del nivel de ejercicio físico que se realice.

En la tabla siguiente se dan algunos datos de gasto por actividad expresado en kcal por minuto y kg de peso para un hombre (en el caso de la mujer se reduciría un 10%).

Actividad	Dormir	Pasear	Comer	Trabajo sedentario	Leer	Correr	Aseo
Gasto por actividad	0,018	0,038	0,030	0,028	0,028	0,040	0,050

a) Calcula la TMB de Juan que tiene 20 años, 60 kg de peso y una altura de 170 cm. Realiza los mismos cálculos para Carmen, que tiene los mismos años que Juan y el mismo peso y altura.

b) Si la actividad en un día de Pedro, de 70 kg, consiste en dormir 8 horas, asearse durante 1 hora, trabajar 8 horas en un trabajo sedentario, pasear 2 horas, comer durante 2 horas al día y leer unas 3 horas, ¿cuál es su gasto energético total?

c) Si Daniel necesita en media 2680 Kcal/día para su actividad diaria y con los alimentos incorpora 4410 kcal/día, ¿cómo cambiaría su peso en una semana si todo su exceso de energía lo almacenara como tejido graso? Nota: Se sintetiza 1 g de tejido adiposo cada 9,5 Kcal

Project "LEARN+" (N.º 2019-1-PT01-KA201-061246), funded by the European Union.

Figura 11. Multiplicación de polinomios VS Tarea del proyecto MILAGE Aprender+

Materiales diversos

Dentro de la diversidad de materiales que fomentan distintas representaciones, y de acuerdo con los principios DUA, se mencionan cuatro grandes recursos: los materiales manipulativos, los libros de divulgación y videos educativos, y los recursos tecnológicos. Se pueden ver multitud de ejemplos de vídeos y libros de divulgación en el excelente repositorio de la web de divulgamat[23]

Respecto a los materiales manipulativos destacan las regletas de Cuisenaire[24], los bloques multibase, los policubos[25], las figuras geométricas rellenables, entre otros muchos. Todos ellos favorecen el uso de diversas representaciones concretas (Figura 12), representaciones que suponen un paso previo importante antes de abstraer las ideas matemáticas.

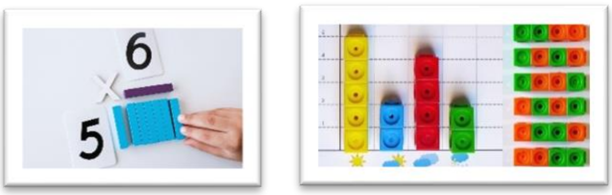


Figura 12. Uso de materiales manipulativos

Los recursos tecnológicos crecen a velocidad vertiginosa, muchas veces complementando los materiales manipulativos, como los de la pizarra Polypad[26]. Es de destacar los recursos de Geogebra, y el último proyecto de la FESPM, Mates GG[27], en el que se relacionan recursos elaborados con Geogebra junto con orientaciones para su uso. También la aplicación Desmos[28] ha pasado de ser una

---

[23] https://www.divulgamat.net/

[24] https://www.mumuchu.com/blog/regletas-montessori-cuisenaire-como-usar-actividades/

[25] https://reseteomatematico.com/policubos-que-son-y-para-que-sirven/

[26] Se puede acceder a través de https://es.mathigon.org/polypad y algunas lecciones interesantes se pueden ver en https://mathigon.org/tasks

[27] https://intef.es/recursos-educativos/recursos-para-el-aprendizaje-en-linea/matesgg/

[28] https://www.desmos.com/

de las mejores aplicaciones para representar funciones on-line, a desarrollar actividades que usan la visualización para ayudar a resolver problemas (Figura 13).

Figura 13: Actividad con Desmos.

CONCLUSIÓN

En esta ponencia se han revisado los diferentes componentes del currículo de matemáticas y su papel: los bloques de competencias específicas propias de la materia, comunes a todos los niveles educativos; los criterios para evaluar dichas competencias y, por ende, las competencias clave a partir de los mapas de relaciones competenciales; los contenidos o herramientas para desarrollar dichas competencias y a la vez desarrollar los sentidos matemáticos y la necesidad de desarrollar actividades ricas, contextualizadas, prácticas reproductivas y uso de materiales diversos. Ahora sólo falta que el profesorado sea capaz de analizar su práctica docente con otra visión, que cambie las "gafas" de los contenidos por las de las competencias[29].

REFERENCIAS.

Alsina, A. (2020): Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. Saber & Educar, 2020, vol. 28, p. 1-13. Recuperado de Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos Five productive practices for teaching mathematics through processes | Alsina | Saber & Educar (esepf.pt)

Blázquez, S. y Del Río, P. (2018). El necesario cambio curricular y metodológico. En Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 156-161). Lugar: Universidad de León. Recuperado de: https://www.educa.jcyl.es/es/congresos/xiv-congreso-regional-matematicas-castilla-leon

Calvo Pesce, C.; Carrillo de Albornoz Torres, A.; De la Fuente Pérez, A.; De León Rodríguez, M.; González López, M. J.; Gordaliza Ramos, A.; Guevara Casanova, I.; Lázaro del Pozo, C.; Monzó del Olmo, O. (2021): *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. CEMat. Madrid. Recuperado de **http://fespm.es/wp-content/uploads/2021/06/Bases-Matematicas-CEMat-mayo-2021.pdf**

[29] Se puede acceder a la presentación de esta ponencia en https://view.genial.ly/634bb99ae63ac00019dddcb1 . Eso sí, está en clave de escape-room, por lo que hay que intentar no navegar con las flechas sino moverse por los escenarios, de manera que, si el camino se pierde, se puede pulsar en "mostrar elementos interactivos" (símbolo que aparece en la parte superior derecha) para ver en qué elementos hay información. Buena suerte a los navegantes.

Para hacer referencia al artículo:

Blázquez, S. (2022). Matemáticas con mayúsculas. Nuevo currículo, nuevas oportunidades. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), XV Congreso Regional de Educación Matemática y IV Jornada Geogebra de Castilla y León (pp. 290 - 301). Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.


XV CONGRESO REGIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE CASTILLA Y LEÓN
Palencia 2022
IV JORNADA GEOGEBRA CyL
XV CONGRESO REGIONAL
DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
DE CASTILLA Y LEÓN
IV JORNADA GEOGEBRA CyL
4-5 noviembre 2022, Palencia
Organiza:
Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán
Colabora:
Junta de Castilla y León
UVa PALENCIA
Universidad de Valladolid
Área de Didáctica de la Matemática
EDUCACIÓN MATEMÁTICA GIR
Diputación DE PALENCIA
PALENCIA AYUNTAMIENTO Alcaldía
sm
CASIO División Educativa