LLARDENT

NOCIONES DE ARITMÉTICA

Y GEOMETRÍA

NOCIONES Y EJERCICIOS DE ARITMETICA Y GEOMETRÍA

NOCIONES Y EJERCICIOS

DE

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

POR

D. ANTONIO LLARDENT ESMET

Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas
y Catedrático de Matemáticas en el Instituto de San Isidro.

CUARTA EDICIÓN

MADRID
IMPRENTA DE JULIO COSANO
Torija, 5, tel. M-316.

1925

Precio de la obra encuadernada: 8 pesetas.

PRELIMINARES

1. Llámase *magnitud* aquella propiedad de las cosas por la cual éstas son iguales o desiguales, mayores o menores. Según esta definición, la magnitud de una cosa no es la cosa misma, sino una propiedad suya que le acompaña siempre. Sin embargo, es muy frecuente tomar o confundir la magnitud con la cosa, y nosotros lo haremos más de una vez y dentro de poco, para mayor brevedad del lenguaje.

Igualdad es la expresión de que dos cosas son iguales: se la indica con el signo $=$, que se lee *igual*, colocado entre las cantidades iguales, como cinco $=$ cinco.

Desigualdad es la expresión de que dos cosas son desiguales: puede ser de mayor a menor y de menor a mayor.

La desigualdad de mayor a menor se indica con el signo $>$, que se lee *mayor que*, colocado entre las magnitudes desiguales, como doce $>$ cinco, que se lee, doce *mayor* que cinco.

La desigualdad de menor a mayor se indica con el signo $<$, que se lee *menor que*, colocado entre las magnitudes desiguales, como siete $<$ ocho, que se lee, siete *menor* que ocho.

Lo que está a la izquierda del signo $=$ se llama *primer miembro* de la igualdad, y lo que está a la derecha, *segundo miembro* de la misma igualdad. Del mismo modo, lo que está a la izquierda del signo $>$ o del signo $<$ se llama *primer miembro*, y lo que está a la derecha, *segundo miembro* de la desigualdad.

2. Las magnitudes se clasifican primero en *determinables* e *indeterminables*. Son determinables las que se pueden medir o contar, e indeterminables las que no se pueden medir ni contar. Una tela se puede medir; las manzanas de un cesto se pueden contar. La magnitud de un *placer o dolor*, de una *alegría*

o una pena, ni se puede medir ni se puede contar. De esta clase de magnitudes que no pueden contarse ni medirse no tratan la Aritmética ni la Geometría. La Aritmética y la Geometría tratan de las magnitudes que pueden contarse o medirse, o sea de las magnitudes determinables, que por esto podrían y deberían llamarse *magnitudes matemáticas.*

3. La magnitud determinada puede ser *continua* y *discontinua,* y la continua puede serlo en el *espacio* y en el *tiempo.*

La magnitud se llama *continua* cuando sus partes son tales, que el término de cada una es el principio de la inmediata siguiente. Así, en la cantidad continua que va desde A hasta B (figura 1.ª), y en la que consideramos las partes 1.ª, 2.ª, 3.ª,

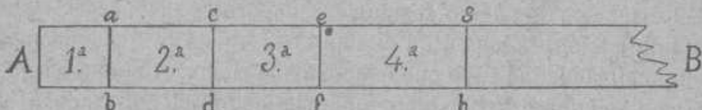

Figura 1.ª

4.ª, etc., la línea *ab* es el término de la primera parte y el principio de la segunda; la línea *cd* es el término de la segunda y el principio de la tercera; la línea *ef* es el término de la tercera y el principio de la cuarta, y así sucesivamente. La cantidad continua en el *espacio* se llama *extensión.*

Cuando el término de cada parte no es el principio de la inmediata siguiente, la magnitud se llama *discontinua,* aunque las partes estén en contacto. Así, un montón de trigo, un montón de arena, son magnitudes discontinuas, aunque estén en contacto los granos de trigo en el primero y los granos de arena en el segundo. Como ejemplo de magnitudes discontinuas podemos citar, además de las dichas, los habitantes de una población, las reses de un rebaño, los árboles de un bosque, etc.

4. Hemos dicho que magnitud determinable es la que se puede medir o contar. Medir o contar es averiguar el *cuánto* de ella, y este cuanto no se puede hallar si no se tiene un objeto de magnitud conocida que sirva de medio para obtener aquella medida o aquel cuanto, y este medio es lo que se llama *unidad.*

5. Diremos, pues, que *unidad es un objeto que se toma para medir una magnitud continua, o para contar una magnitud discontinua.*

Ya se comprende que el objeto que sirve de unidad ha de ser de la misma especie que la magnitud que con ella se trata de medir o de contar.

Medir es aplicar la unidad a la magnitud continua, para ver cuántas veces ésta contiene a aquélla o a alguna de sus partes iguales.

Contar es hallar cuántas veces la magnitud discontinua contiene a la unidad, o cuántas veces la magnitud continua contiene a la unidad o a una de sus partes iguales.

La unidad para medir la magnitud continua es *arbitraria:* así una tela puede medirse tomando por unidad el metro, la vara, el pie, el palmo, etc. Conviene, sin embargo, que se fije una unidad, convenida y aceptada por todos.

La unidad para contar la magnitud discontinua no es arbitraria en general, sino que es unidad *natural,* como un grano en el montón de trigo, un árbol en un jardín, una res en un rebaño, un soldado en un ejército.

OBSERVACIÓN.—Cuando las unidades son muy pequeñas, como el grano de arena o el grano de trigo, en lugar de contar los granos, se mide la cantidad como si fuera continua; así se mide el trigo, la arena y otras cosas análogas por medio de unidades de que hablaremos a su tiempo.

La unidad *natural* con que se cuentan las magnitudes discontinuas es siempre entera; el objeto que se toma para medir la magnitud continua es también una unidad entera; pero si, por tener que medir una magnitud menor que la unidad, se divide ésta en partes iguales, una de estas partes se llama *unidad fraccionaria.*

Las magnitudes continuas que se pueden medir exactamente con la unidad o con una de sus partes iguales se llama *conmensurables.* Las magnitudes continuas que no pueden medirse exactamente, por no contener exactamente a la unidad ni a ninguna de sus partes iguales, se llaman *inconmensurables.*

6. Cuando el objeto que sirve de unidad no es determinado, es decir, no es un metro, ni una vara, ni un árbol, ni una res, ni cosa alguna que se pueda ver, tocar o imaginar, sino un objeto en general, la unidad se llama *abstracta.* Si la unidad es un objeto determinado, como un pie, un árbol, un soldado, etc., la unidad es *concreta.*

La expresión de cuántas veces la magnitud contiene a la unidad o a alguna de sus partes iguales se llama *número.*

Una vez medida o contada la magnitud, ya puede responderse al *cuánto hay* de ella, y la magnitud toma propiamente el nombre de *cantidad*. Cantidad es, pues, toda magnitud determinada. Pero teniendo en cuenta que una magnitud determinable, si no está determinada, puede determinarse, y, por lo tanto, puede pasar a ser cantidad, este nombre se aplica también a toda magnitud que puede ser medida o contada; de aquí la definición usual que dice:

Cantidad es toda magnitud determinable.

Considerado el número como resultado de medir y contar la magnitud, es esencialmente abstracto. Dejando este concepto del número, que no permitiría dividirle en abstracto y concreto, le consideraremos como la misma magnitud numerada, y le definiremos del modo más usual, diciendo que

7. *Número es un conjunto de unidades.* Se divide en entero y fraccionario.

Número entero es un conjunto de unidades enteras.

Número fraccionario, un conjunto de unidades fraccionarias. Estos números que miden exactamente a la cantidad se llaman, análogamente a la cantidad, conmensurables. A la expresión numérica de que una cantidad es inconmensurable se llama *número inconmensurable*.

Propiamente hablando, sólo las cantidades son conmensurables o inconmensurables, pues ellas son las que se miden, y no los números, que son el resultado de esta medida.

Los números pueden ser también *abstractos* y *concretos*.

Número abstracto es un conjunto de unidades abstractas o indeterminadas, como veinte, treinta, etc.

Número concreto es un conjunto de unidades concretas o determinadas, como veinte metros, treinta naranjas, cincuenta árboles, etc.

8. La ciencia que trata de los números se llama ARITMÉTICA.

La ciencia que trata de la cantidad continua en el espacio, o sea de la extensión, se llama GEOMETRÍA.

Como los números pueden ser abstractos y concretos, a la ciencia que trata de los números abstractos la llamaremos *Aritmética abstracta, teórica* o *general*, y a la que trata de los números concretos, *Aritmética concreta* o *aplicada*.

NOCIONES DE ARITMÉTICA

ARITMÉTICA ABSTRACTA

9. *Aritmética es la ciencia de los números.*

Se divide en cuatro partes: Una que enseña a formar y expresar los números, y se llama *numeración;* otra que enseña a formar unos números por medio de otros, y se llama *cálculo;* una tercera que estudia las *propiedades de los números,* y una cuarta que *compara* unos números con otros. De la tercera sólo diremos en estas NOCIONES lo indispensable para entender algunas operaciones, y de la cuarta, menos aún, dejándola para el curso siguiente de Aritmética.

Numeración.

10. *Numeración es la parte de la Aritmética que enseña a formar y expresar los números.*

Los números pueden expresarse por medio de palabras o por medio de signos. En el primer caso, la numeración se llama *verbal* o *hablada;* en el segundo, *escrita*.

Numeración de enteros: El primer número entero es la unidad con el nombre de *uno*.

Hablando con todo rigor, el *uno* no es un número, porque no es un conjunto de unidades, pero se ha convenido en llamarle así, y así le llamaremos nosotros.

Sin embargo, si consideramos el número como resultado de medir o contar la cantidad, el *uno* será verdaderamente número, como resultado de aquella comparación, cuando la cantidad y la unidad sean iguales.

La formación natural de los números enteros consiste en agregar al primer número entero una unidad para formar el segundo, en agregar al segundo una unidad para formar el tercero, y, en general, en agregar al último número formado una unidad para formar el siguiente. Esto, como se ve, no tiene fin, y el número de números enteros es ilimitado. Luego no sería posible dar un nombre a cada número en la numeración verbal, ni imaginar un signo para cada número en la numeración escrita. Es, pues, necesario buscar un procedimiento que, fundado en ciertos principios, nos permita expresar fácilmente y con brevedad todos los números, con pocas palabras, en la numeración hablada, y con pocos signos, en la numeración escrita.

Estos principios, y las reglas que de ellos se derivan, constituyen lo que se llama *sistema de numeración*. Y como, según hemos dicho, ésta puede ser verbal y escrita, podemos establecer estas definiciones:

Sistema de numeración verbal es el conjunto de principios y reglas, de ellos derivadas, para expresar todos los números con pocas palabras.

Sistema de numeración escrita es el conjunto de principios y reglas, de ellos derivadas, para expresar por escrito todos los números con pocos signos.

11. PRINCIPIOS.—1.º *Un número cualquiera se considera formado por unidades de diversos órdenes, esto es: por unidades de primer orden, de segundo orden, de tercer orden*, etc., *pudiendo faltar unidades de uno o más órdenes.*

2.º *Cierto número fijo de unidades de primer orden forma una de segundo; igual número de segundo forma una unidad de tercero; el mismo número fijo de unidades de tercero forma uno de cuarto, y de un modo general, cierto número fijo de unidades de un orden cualquiera forma una unidad del orden inmediato superior.* A este número fijo de unidades de un orden, que forman una unidad del orden inmediato superior, se llama *base* del sistema de numeración.

3.º *El número de unidades de cada orden es inferior a la* BASE, *pudiendo llegar a la base disminuída en una unidad.*

4.º *Se dan nombres a los números formados por unidades de primer orden que no lleguen a componer una de segundo, y a las unidades de los diversos órdenes; y con los nombres de aquellos números y los nombres de estas unidades se forman los nombres de todos los demás números.*

Sistema de numeración décuplo o decimal.

NUMERACIÓN VERBAL

12. Se llama *decimal* este sistema porque su base es *diez*. Repitamos los principios anteriores, aplicados al sistema decimal.

1.° Un número cualquiera se considera formado por unidadades de diversos órdenes, esto es: por unidades de primer orden, por unidades de segundo orden, por unidades de tercer orden, etc., pudiendo faltar las unidades de uno o más órdenes.

2.° *Diez* unidades de primer orden forman una unidad de segundo, *diez* unidades de segundo forman una de tercero, *diez* unidades de tercer orden forman una de cuarto, y, en general, *diez* unidades de un orden cualquiera forman una unidad de orden inmediato superior. Este número constante *diez* es, como hemos dicho, la *base* de este sistema.

3.° El número de unidades de cada orden es inferior a *diez*, pudiendo llegar hasta *nueve*.

4.° Se dan nombres a todos los números formados por unidades de primer orden y que no lleguen a *diez*, y a las *unidades de diversos órdenes*; y con los nombres de aquellos números que no llegan a *diez* y con los nombres de estas *unidades de diversos órdenes* se forman los nombres de todos los demás números.

13. Los nombres de los números menores que diez y los nombres de las unidades de diversos órdenes se verán a continuación:

La unidad de primer orden se llama unidad simple o sólo unidad, y como número, lleva el nombre *uno*.

Cuadro primero.

A uno y uno se le da el nombre........................ dos.
A dos y uno.................................... tres.
A tres y uno...... .... cuatro.
A cuatro y uno................................. cinco.
A cinco y uno.................................. seis.
A seis y uno................................... siete.
A siete y uno.................................. ocho.
A ocho y uno................................... nueve.
A nueve y uno se le llama *diez*, que forma una unidad de segundo orden, llamada *decena*.

Las decenas se cuentan como las unidades simples o de primer orden.

Cuadro segundo.

		Unidades de segundo orden.
A una decena se la llama..............................		diez.
A una decena y una decena........	dos decenas.....	veinte.
A dos decenas y una decena.......	tres decenas	treinta.
A tres decenas y una decena......	cuatro decenas..	cuarenta.
A cuatro decenas y una decena....	cinco decenas...	cincuenta.
A cinco decenas y una decena.....	seis decenas	sesenta.
A seis decenas y una decena......	siete decenas....	setenta.
A siete decenas y una decena......	ocho decenas....	ochenta.
A ocho decenas y una decena......	nueve decenas ..	noventa.

Cuadro tercero.

		Unidades de tercer orden.
A nueve decenas y una decena .	una centena.....	ciento.
A una centena y una centena...	dos centenas....	doscientos.
A dos centenas y una centena ..	tres centenas ...	trescientos..
A tres centenas y una centena..	cuatro centenas..	cuatrocientos.
A cuatro centenas y una centena.	cinco centenas ..	quinientos.
A cinco centenas y una centena.	seis centenas....	seiscientos.
A seis centenas y una centena..	siete centenas. ..	setecientos.
A siete centenas y una centena.	ocho centenas...	ochocientos.
A ocho centenas y una centena..	nueve centenas..	novecientos.

Cuadro cuarto.

		Unidades de cuarto orden.
A nueve centenas y una centena...	un millar........	mil.
A un millar y un millar...........	dos millares	dos mil.
A dos millares y un millar.........	tres millares....	tres mil.
A tres millares y un millar........	cuatro millares..	cuatro mil.
A cuatro millares y un millar......	cinco millares. ..	cinco mil.
A cinco millares y un millar.......	seis millares	seis mil.
A seis millares y un millar.........	siete millares ...	siete mil.
A siete millares y un millar........	ocho millares....	ocho mil.
A ocho millares y un millar.......	nueve millares...	nueve mil.

Cuadro quinto.

		Unidades de quinto orden
A nueve millares y un millar se llama........................	una decena de millar.........	diez mil.
A una decena de millar y una decena de millar................	dos decenas de millar........	veinte mil.
A dos decenas de millar y una decena de millar...............	tres decenas de millar	treinta mil.
A tres decenas de millar y una decena de millar..............	cuatro decenas de millar.....	cuarenta mil.
A cuatro decenas de millar y una decena de millar............	cinco decenas de millar	cincuenta mil.
A cinco decenas de millar y una decena de millar	seis decenas de millar	sesenta mil.
A seis decenas de millar y una decena de millar...............	siete decenas de millar.......	setenta mil.
A siete decenas de millar y una decena de millar	ocho decenas de millar.......	ochenta mil.
A ocho decenas de millar y una decena de millar..............	nueve decenas de millar......	noventa mil.

Cuadro sexto.

		Unidades de sexto orden.
A nueve decenas de millar y una decena de millar.............	una centena de millar........	cien mil.
A una centena de millar y una centena de millar..............	dos centenas de millar.......	doscientos mil.
A dos centenas de millar y una centena de millar.............	tres centenas de millar.......	trescientos mil.
A tres centenas de millar y una centena de millar.............	cuatro centenas de millar.....	cuatrocientos mil.
A cuatro centenas de millar y una centena de millar...........	cinco centenas de millar......	quinientos mil.
A cinco centenas de millar y una centena de millar............	seis centenas de millar.......	seiscientos mil.
A seis centenas de millar y una centena de millar.............	siete centenas de millar......	setecientos mil.
A siete centenas de millar y una centena de millar............	ocho centenas de millar......	ochocientos mil.
A ocho centenas de millar y una centena de millar............	nueve centenas de millar.....	novecientos mil.

A nueve centenas de millar y una centena de millar se le llama *millón*, unidad de séptimo orden.

Y así se puede seguir contando por millones, diciendo:

Cuadro séptimo.

Un millón.
Dos millones.
Tres millones.
Cuatro millones.
Cinco millones.
Seis millones.
Siete millones.
Ocho millones.
Nueve millones.

Continuando de este modo podemos ir formando cuadros, y llegaremos primero a la unidad de décimotercer orden, llamada *billón;* después a la de décimonoveno orden, que se llama *trillón;* luego a la de vigésimoquinto orden, que lleva el nombre de *cuatrillón,* y así sucesivamente, hasta el *quintillón, sextillón*, etc.

14. *Modo de formar o hallar la expresión de un número por medio de estos cuadros.*

Distinguiremos dos casos: que el número esté formado de un solo orden de unidades y que esté formado por unidades de varios órdenes.

Primer caso: Sea hallar la expresión del número que sólo contenga ocho unidades de séptimo orden. Miraremos al cuadro séptimo, y hallaremos para el número dicho: *ocho millones.*

Sea hallar la expresión del número que sólo tiene siete unidades de cuarto orden. Buscaremos el cuadro cuarto, y hallaremos para el número: *siete mil.*

Segundo caso: Para formar la expresión de un número que consta de diversos órdenes de unidades, se busca en los cuadros correspondientes el nombre de las unidades de cada orden, y con estos nombres, de mayor a menor, se forma la expresión del número.

Observación.—Antes de aplicar esta regla, digamos que entre diez y veinte existen algunos números, formados, al parecer, con cierta irregularidad; tales son los números

Diez y uno,	que se llama	once
diez y dos,	—	doce
diez y tres,	—	trece
diez y cuatro,	—	catorce
diez y cinco,	—	quince.

No hay irregularidad, sino aparente, en la formación de estos números; son abreviaturas tomadas del latín.

Así, once es abreviatura de uno y diez; doce, de dos y diez; trece, de tres y diez; catorce, de cuatro y diez, y quince, de cinco y diez. Los demás números, desde diez y seis a veinte, se forman según la regla.

Sea ahora un número compuesto de ocho unidades de séptimo orden, siete de cuarto, cinco de tercero y cuatro de primero.

En el cuadro séptimo hallaremos, para las ocho unidades de séptimo orden, *ocho millones;* en el cuadro cuarto, para las siete unidades de cuarto orden, hallaremos *siete mil;* en el cuadro tercero veremos, para las cinco unidades de tercer orden, *quinientos*, y en el cuadro primero veremos *cuatro*, para las unidades de primer orden. Y la expresión del número buscado será:

Ocho millones siete mil quinientos cuatro.

15. OBSERVACIÓN.—Si se nos pidiera la expresión de un número que contuviese unidades de órdenes superiores al de los cuadros escritos aquí, imaginaríamos el cuadro correspondiente a cada uno de dichos órdenes, y tomaríamos en él la expresión correspondiente.

Para hallar o imaginar el cuadro correspondiente a cada uno de los órdenes superiores al séptimo, añadiremos unas palabras, que vendrán a ser el complemento de la exposición del sistema. A partir de la unidad de séptimo orden, o sea del millón, los cuadros de los órdenes siguientes hasta el duodécimo se forman exactamente lo mismo que los seis primeros, sin más diferencia que la de llamar *millón* a lo que en los seis primeros se llama *unidad*. Así, el cuadro séptimo estará formado por *un* (millón), *dos* (millones), *tres* (millones)..., *nueve* (millones).

El cuadro octavo, por *diez* (millones), *veinte* (millones), *treinta* (millones)..., *noventa* (millones).

El cuadro noveno, por *cien* (millones), *doscientos* (millones), *trescientos* (millones)..., *novecientos* (millones).

El cuadro décimo, por *mil* (millones), *dos mil* (millones), *tres mil* (millones)..., *nueve mil* (millones)..

El cuadro undécimo, por *diez mil* (millones), *veinte mil* (millones), *treinta mil* (millones)..., *noventa mil* (millones).

El cuadro duodécimo, por *cien mil* (millones), *doscientos* *mil* (millones), *trescientos mil* (millones)..., *novecientos mil* (millones).

El cuadro siguiente es el de los *billones*, y los sucesivos, hasta el cuadro décimonono, que es el de los *trillones*, se forman del mismo modo que los seis anteriores y los seis primeros, sin más variación que la de llamar *billón* lo que antes se llamó *millón* o *unidad*.

De igual manera se formarán los cuadros siguientes al de los trillones, hasta llegar al *cuatrillón*, sin más que llamar *trillón* a lo que antes se llamó *billón*, *millón* y *unidad*, etc. De aquí se deduce que la totalidad de un número podemos descomponerla en grupos de seis órdenes, que se forman todos de la misma manera, sin más que variar el nombre de la *unidad*.

El primer grupo es el de las *unidades;* el segundo, el de los *millones;* el tercero el de los *billones;* el cuarto, el de los *trillones;* el quinto, el de los *cuatrillones*, etc.

El grupo de las unidades empieza en las unidades de *primer orden;* el de los millones, en el *séptimo;* el de los billones, en el *décimotercero;* el de los trillones, en el *décimonono;* el de los cuatrillones, en el *vigésimoquinto*, y así sucesivamente, subiendo seis órdenes cada vez que se pasa de una a otra de esas grandes unidades.

Y para acabar de completar la explicación del sistema, agregaremos que cada grupo de seis órdenes se divide en dos secciones de tres órdenes cada una, y que los nombres de los órdenes de la segunda sección se forman con los nombres de los órdenes de la primera, sin más que poner la palabra *mil* en vez de la palabra *unidad*, explícita o implícita. Así, tres unidades de primer orden se llaman *tres* (unidades); tres unidades de cuarto orden se llaman *tres* mil; siete unidades de segundo orden se denominan *setenta* (unidades), y siete unidades de quinto orden se denominan *setenta* mil; cuatro unidades de tercer orden reciben el nombre de *cuatrocientos*, y cuatro unidades de sexto orden reciben el nombre de *cuatrocientos* mil.

16. Sea ahora, por ejemplo, formar la expresión de un número compuesto de siete unidades de décimoquinto orden, de ocho unidades de décimotercer orden, de seis unidades de décimo orden, de cuatro unidades de séptimo orden y de nueve de primer orden.

Las unidades de décimoquinto orden pertenecen al tercer grupo, o sea al grupo de los billones, y como éste empieza en el décimotercer orden, el orden décimoquinto expresará centenas de billón; luego las siete unidades de décimoquinto orden son *setecientos billones;* el décimotercer orden es el de los billones; luego ocho unidades del orden décimotercero son *ocho billones;* el décimo orden pertenece al grupo de los millones, que es el segundo, y como éste empieza en el séptimo orden, el décimo será millares de millón; luego seis unidades de décimo orden serán *seis mil millones;* el séptimo orden expresa millones; luego cuatro unidades de séptimo orden son *cuatro millones;* las nueve unidades de primer orden son *nueve unidades.*

17. Antes de escribir la expresión de este número, todavía repetiremos que la segunda sección de cada grupo se expresa como la primera; pero añadiendo la palabra *mil;* y los seis órdenes de cada grupo se expresan como si el grupo estuviera solo, pero dándole la denominación de la unidad propia del grupo. Así, si los tres órdenes de la sección primera de un grupo son cinco centenas, cuatro decenas y siete unidades, y los tres órdenes de la segunda sección son también cinco centenas (de millar), cuatro decenas (de millar) y siete unidades (de millar), así como la primera decena se expresa diciendo quinientos cuarenta y siete (unidades), la segunda se expresará diciendo quinientos cuarenta y siete *mil*, y las dos secciones juntas, *quinientos cuarenta y siete mil quinientos cuarenta y siete*, y este número expresará unidades, si sus seis órdenes formaban el primer grupo; millones, si formaban el segundo; billones, si formaban el tercero, etc.

Expresemos el número antes propuesto: Los setecientos billones y los ocho billones forman *setecientos ocho billones;* los seis mil millones y los cuatro millones formarán *seis mil cuatro millones;* las nueve unidades no sufren alteración.

El número será, por consiguiente, *setecientos ocho billones, seis mil cuatro millones, nueve.*

18. Regla para expresar un número cualquiera: Si el número no tiene más que unidades de los tres primeros órdenes o no llega a mil, se expresarán de mayor a menor los valores de los órdenes de unidades de que se compone.

EJEMPLO.—Expresar el número formado por cuatro unidades de tercer orden, cinco de segundo y siete de primero: *cuatrocientos cincuenta y siete.*

Si el número consta de más de los tres primeros órdenes de unidades y no llega al séptimo, se descompondrá en dos secciones: la primera, formada por los tres primeros órdenes, y la segunda, por los restantes; se expresará la segunda sección como si fuera primera, añadiéndole la palabra *mil*, y a continuación se expresará la sección primera.

Ejemplo.—Expresar el número formado por siete unidades de sexto orden, ocho de quinto, tres de cuarto, nueve de tercero, cinco de segundo y cuatro de primero.

La segunda sección, formada por los tres órdenes más elevados, nos da *setecientos ochenta y tres mil;* la primera sección nos da *novecientos cincuenta y cuatro*, y las dos secciones reunidas, *setecientos ochenta y tres mil novecientos cincuenta y cuatro.*

19. Si el número se compone de más de los seis primeros órdenes de unidades, se le descompone ordenadamente en grupos de seis órdenes, no importando que el grupo de orden más elevado tenga menos de seis órdenes, y se expresan de mayor a menor los valores sucesivos de los grupos, dando a cada uno de los grupos la denominación de la *unidad, millón, billón*, etcétera, que le corresponde.

Ejemplo. — El que se ha puesto antes y que nos ha dado: *Setecientos ocho billones seis mil cuatro millones nueve.*

Observación.—Si faltaran unidades de órdenes intermedios, deberán suplirse mentalmente para que cada grupo sólo contenga los órdenes debidos, esto es, el primer grupo, órdenes del primero al sexto; el segundo, del séptimo al duodécimo; el tercero, del duodécimo al décimooctavo, y así sucesivamente.

En el ejemplo anterior se ve que del tercer grupo, o sea del grupo de los billones, sólo hay unidades de décimoquinto y de décimotercer orden; del segundo grupo, o sea del grupo de los millones, sólo hay unidades de décimo y de séptimo orden, y del primer grupo sólo hay unidades del primer orden.

Numeración decimal escrita.

20. *Tiene por fin*, como se ha dicho, *escribir todos los números con pocos signos.*

Principios.—Primero. *Todo número se compone de unidades de diversos órdenes; esto es, de unidades de primer orden, de unidades de segundo orden, de tercer orden*, etcétera, *pudiendo faltar en él las unidades de uno o más órdenes.*

Segundo. *Diez unidades de primer orden forman una unidad de segundo, diez unidades de segundo orden forman una unidad de tercero, y, en general, diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad de orden inmediato superior.* Este número diez se llama *base* del sistema, que por esto recibe el nombre del sistema decimal.

Tercero. *Se expresa con un signo distinto, llamado* cifra o guarismo, *cada uno de los nueve primeros números formados por unidades de primer orden, y con estos guarismos o cifras se expresan las unidades de todos los órdenes.*

Cuarto. *Para que una misma cifra pueda expresar unidades de todos los órdenes, se ha convenido en que una cifra que ocupe el primer lugar, contando de derecha a izquierda, exprese unidades de primer orden; una cifra que ocupe el segundo lugar exprese unidades de segundo orden; una cifra que ocupe el tercer lugar exprese unidades de tercer orden, y así sucesivamente, de manera que el orden de unidades que la cifra expresa y el lugar que ocupa la cifra están indicados por el mismo número ordinal.*

De este principio convencional se deduce que *una cifra colocada inmediatamente a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior al de esta otra, o una cifra colocada inmediatamente a la derecha de otra representa unidades del orden inmediato inferior.*

Quinto. *Como en el número pueden faltar unidades de uno o más órdenes, se ha ideado un nuevo signo llamado* cero, *que, sin tener unidad alguna, ocupe el lugar o lugares de las unidades del orden u órdenes de que el número carece.*

21. Signos o cifras con que se expresan los nueve primeros números y el cero:

El número uno se expresa o escribe con el signo o cifra					1
El número dos	—	—	—	—	2
El número tres	—	—	—	—	3
El número cuatro	—	—	—	—	4
El número cinco	—	—	—	—	5
El número seis	—	—	—	—	6
El número siete	—	—	—	—	7
El número ocho	—	—	—	—	8
El número nueve	—	—	—	—	9
El cero	—	—	—	—	0

Los signos o cifras desde el 1 al 9 se llaman *cifras significativas.*

22. *Valores absoluto y relativo de las cifras.—Valor absoluto de una cifra es el número de unidades que representa, independientemente del orden de las mismas. Valor relativo de una cifra es el número de unidades que representa, teniendo en cuenta el orden de las mismas.* Así, el valor absoluto de la cifra 8 es ocho unidades, sin referirse a orden alguno; el valor relativo de la cifra 8, si ocupa el primer lugar, es ocho unidades de primer orden; si ocupa el segundo lugar, ocho unidades de segundo orden, o sea ochenta de primero; si ocupa el cuarto lugar, ocho unidades de cuarto orden, o sea ocho mil de primero; si ocupa el séptimo lugar, ocho unidades de séptimo orden, o sea ocho millones de primero, etc.

Escritura de los números enteros.

La escritura de los números enteros se deduce inmediatamente de los principios de la numeración escrita.

CASOS EN QUE EL NÚMERO SÓLO TIENE UNIDADES DE UN ORDEN

Si el número tiene sólo unidades de primer orden, se escribirá la cifra que las expresa.

Así, para escribir *siete* unidades de primer orden se pondrá: 7.

Si el número sólo tiene unidades de segundo orden, se escribirá la cifra que las expresa, y como debe ocupar el segundo lugar y no hay unidades de primero, se pondrá un cero a su derecha.

Así, para escribir *nueve* decenas o unidades de segundo orden se pondrá: 90.

Si el número sólo tiene unidades de tercer orden, se escribirá la cifra que las expresa, y como debe ocupar el tercer lugar y no hay unidades de primero ni segundo orden, se pondrán dos ceros a su derecha.

Así, para escribir *cinco* centenas o unidades de tercer orden se pondrá: 500.

Del mismo modo, para escribir *ocho* unidades de séptimo orden u ocho millones se pondrá: 8000000.

En general, para escribir un número que sólo tenga uni-

dades de un orden dado, se escribirá la cifra que expresa ese número de unidades, y a su derecha se pondrán tantos ceros como unidades menos una tenga el número que indique aquel orden dado.

CASOS EN QUE EL NÚMERO TIENE UNIDADES DE DIVERSOS ÓRDENES

23. *Si el número sólo tiene unidades de primer orden y unidades de segundo o decenas, se escribirá la cifra que expresa las unidades de primer orden, y a su izquierda, la cifra que expresa el número de unidades de segundo orden.*

Así, para escribir *ochenta y cinco*, se pondrá un 5, que expresa las unidades de primer orden, y a su izquierda, la cifra 8, que expresa el número de unidades de segundo orden, y el número escrito será: 85.

Si el número tuviera unidades de primero, segundo, tercero y cuarto orden, se escribirá la cifra que expresa las unidades, y a su izquierda, en el segundo, tercero y cuarto lugar, respectivamente, las cifras que expresan los números de decenas, centenas y millares que el número contiene.

Así, si el número se compone de *cuatro millares, tres centenas, dos decenas y seis unidades*, se pondrá: 4326.

En general, para escribir un número cualquiera, se escribirán, en su lugar correspondiente, las cifras que expresan los números de unidades de cada orden que aquel número contiene. Debiendo ocupar cada cifra el lugar correspondiente a su orden, claro es que *cuándo faltan unidades de algún orden o de algunos órdenes, se pondrán ceros en los lugares correspondientes.* Así, para escribir *cuatrocientos cinco mil setenta y ocho*, se observará que *ocho* expresa unidad de primer orden, *setenta* expresa siete unidades de segundo orden; *cinco mil*, unidades de cuarto orden, y *cuatrocientos mil* expresa cuatro unidades de sexto orden; luego en el número faltan unidades de tercero y quinto orden; luego en el tercero y quinto lugar se pondrán ceros, y el número será:

405078

24. Cuando el número que se haya de escribir consta de muchos órdenes de unidades, convendrá considerar aquellos grupos de seis órdenes de unidades cada uno de que hablamos en la numeración verbal: grupo de las unidades simples, grupo de los millones, grupo de los billones, grupo de los trillones, etcétera; escribir cada uno de ellos como si estuviera solo, y colocándolos en su lugar correspondiente: el de las unidades simples, el primero a la derecha; el de los millones, a la izquierda del grupo de las unidades simples; el de los billones, a la izquierda del grupo de los millones; el de los trillones, a la izquierda del grupo de los billones, y así sucesivamente, teniendo en cuenta que si escrito un grupo resultaran menos de seis cifras, se pondrán a su izquierda los ceros necesarios para completar el grupo.

EJERCICIOS.—Escribir con cifras los números siguientes:

25. 1.º *Treinta y siete millones ochocientos noventa y tres mil quinientos doce.*

2.º *Quinientos siete billones cuarenta y cinco mil ocho millones nueve mil setenta y tres.*

3.º *Dos mil setecientos veinte y nueve trillones, trescientos cuarenta y tres mil billones, setenta y cinco millones ocho mil seis.*

El primer número se compone de dos grupos: en el primer grupo sólo hay treinta y siete unidades de séptimo orden o millones, y se escribirá poniendo 37 de modo que el 7 ocupe el séptimo lugar; el segundo grupo contiene unidades de todos los órdenes: ocho de sexto, nueve de quinto, tres de cuarto, cinco de tercero, una de segundo y dos de primero.

El número escrito será:

37893512

El segundo número se compone de tres grupos: grupo de los billones, grupo de los millones y grupo de las unidades simples.

El grupo de los billones sólo tiene cinco unidades de tercer orden y siete de primero con relación al billón; luego será 507 billones.

El grupo de los millones tiene cuatro unidades de quinto orden, cinco de cuarto y ocho de primero con relación al millón; luego será 45008 millones

El grupo de las unidades simples tiene nueve unidades de cuarto orden, siete de segundo y tres de primero; luego será 9073 unidades.

Juntando, como se ha dicho, estos grupos después de completar los órdenes de unidades, poniendo dos ceros a la izquierda del grupo de las unidades y un cero a la izquierda del grupo de los millones, se tendrá escrito el número y será:

507045008009073

El tercer número se compone de cuatro grupos: grupo de los trillones, grupo de los billones, grupo de los millones y grupo de las unidades simples.

El grupo de los trillones se escribirá 2721 trillones.

El grupo de los billones, 343000 billones.

El grupo de los millones, 65 millones.

El grupo de las unidades simples, 8006 unidades simples.

Después de completar con dos ceros a la izquierda el grupo de las unidades simples y cuatro ceros a la izquierda el grupo de los millones, resultan, juntando los grupos,

2721343000000065008006

OBSERVACIÓN.—Si el grupo de mayor orden tiene menos de seis cifras, no es necesario completarlo, porque es evidente que nada significarían los ceros a su izquierda.

Lectura de números enteros.

26. *Si un número consta de una sola cifra, se leerá el valor absoluto de dicha cifra, que en este caso se toma como si fuera el relativo.*

EJEMPLO.—Leer el número 8. Se leerá *ocho*, sobrentendiéndose ocho unidades simples o de primer orden. Es un error decir que en la cifra que expresa unidades de primer orden, el valor relativo es lo mismo que el valor absoluto. El valor anterior, ocho, considerado como absoluto, es un valor abstracto, que al convertirse en unidades de orden determinado, lo mismo puede ser ocho millones que ocho millares, que ocho unidades de otro orden cualquiera, mientras que al decir ocho unidades de primer orden, está concretado ya y no puede expresar unidades de otro orden.

Si un número consta de dos o tres cifras, se leerán de izquierda a derecha los valores relativos de las mismas.

EJEMPLO.—Leer el número 728. El valor relativo de la primera cifra de la izquierda es setecientos, el valor relativo de la segunda cifra es veinte y el de la primera cifra de la derecha es ocho unidades; luego se leerá setecientos veinte y ocho (unidades de primer orden).

Si el número tiene más de tres cifras y menos de siete, se descompondrá en dos secciones, una de tres cifras a la derecha, y las cifras restantes, a la izquierda; se leerá primero la sección de la izquierda, como en el caso anterior, agregando a la lectura la palabra mil, *y a continuación se leerá del mismo modo la sección de la derecha.*

EJEMPLO.—Leer el número 573894. Dividido en dos secciones de tres cifras cada una, la primera sección de la izquierda dice *quinientos setenta y tres*, que con la palabra *mil*, dirá *quinientos setenta y tres mil;* la sección de la derecha dice *ochocientos noventa y cuatro;* luego el número todo se leerá: quinientos setenta y tres mil, ochocientos noventa y cuatro.

Si el número consta de más de seis cifras, se descompondrá de derecha a izquierda, en grupos de seis cifras; se leerá de izquierda a derecha cada uno de los grupos, según la regla del caso anterior, dando a cada grupo la denominación correspondiente. (Recuérdese que el primer grupo de la derecha es el de las unidades; el segundo, el de los millones; el tercero, el de los billones; el cuarto, el de los trillones, etc.)

EJEMPLO.—Leer el número.

$$574_3829.631_2823.507_1609.243$$

Descomponiéndole en grupos de seis cifras de derecha a izquierda, y poniendo a la derecha de cada grupo, excepto del primero, un pequeño número que indique su denominación (el 1, millones; el 2, billones; el 3, trillones, etc.), el número se leerá con mucha facilidad, diciendo: quinientos setenta y cuatro *trillones*, ochocientos veintinueve mil seiscientos treinta y un *billones*, ochocientos veintitrés mil quinientos siete *millones*, seiscientos nueve mil doscientos cuarenta y tres. Es útil descomponer cada grupo de seis cifras en dos grupos de tres cifras por medio de una coma u otro signo, para ver al momento el lugar de los millares de cada grupo y facilitar su lectura.

Numeración romana.

27. Al hablar de numeración romana, nos referimos a la escrita, porque la numeración verbal es la misma decimal nuestra, y de ella hemos tomado los nombres de los números de nuestro sistema, por lo menos hasta cierto límite.

Los signos o cifras que se emplean en el sistema romano para expresar los números son las siguientes letras mayúsculas de nuestro alfabeto:

I, V, X, L, C, D, M.

28. Principios.—Primero. *En el sistema romano de numeración escrita sólo existen siete órdenes de unidades con signo propio,* que son:

	Se expresa por la letra	A la que se da el valor
Unidad de primer orden	I	1
— de segundo —	V	5
— de tercer —	X	10
— de cuarto —	L	50
— de quinto —	C	100
— de sexto —	D	500
— de séptimo —	M	1.000

Segundo. *Cinco unidades de primer orden forman una de segundo; dos de segundo forman una de tercero; cinco de tercero forman una de cuarto; dos de cuarto forman una de quinto; cinco de quinto forman una de sexto y dos de sexto forman una de séptimo.* Es, pues, un sistema de base doble, alternando la base *cinco* con la base *dos.*

Tercero. *La unidad de primer orden, o sea la* I, *puede anteponerse a las de segundo y tercer orden, o sea á la* V *y a la* X, *rebajándoles lo que ella vale, o sea una unidad.*

Así,

IV vale 5 — 1 = 4
IX vale 10 — 1 = 9

pero no se antepone ni a la L, ni a la C, ni a la D, ni a la M.

La unidad de tercer orden, o sea la X, *puede anteponerse a las de cuarto y quinto orden, o sea a la* L *y a la* C, *rebajándoles lo que ella vale;* así,

XL vale 50 — 10 = 40
XC vale 100 — 10 = 90

pero no se antepone a la D ni a la M.

La unidad de quinto orden, o sea la C, *puede anteponerse a las de sexto y séptimo orden, rebajándoles lo que ella vale;* así,

CD vale 500 — 100 = 400
CM vale 1.000 — 100 = 900

Las unidades de segundo, cuarto y sexto orden no se anteponen a las de órdenes superiores para disminuirles su valor.

Cuarto. *Las unidades de primero, tercero, quinto y séptimo orden pueden tomarse hasta tres veces seguidas, y no más* (*); *las unidades de segundo, cuarto y sexto orden no pueden repetirse, o no pueden tomarse dos veces seguidas.*

Así podemos tomar hasta tres veces seguidas la I, la X, la C y la M, poniendo

III = 3
XXX = 30
CCC = 300
MMM = 3.000

pero no se toma dos veces la V, ni la L, ni la D, porque para expresar 2 V tenemos la X; para expresar 2 L tenemos la C y para expresar 2 D tenemos la M.

A los números

IV = 4
IX = 9
XL = 40
XC = 90
CD = 400
CM = 900

los llamaremos *grupos*. A estos grupos es debido que no tenga que tomarse más de tres veces seguidas una misma letra.

Así, en vez de

IIII se escribe IV
XXXX — XL
CCCC — CD

29. En este sistema romano nada significan los lugares con respecto al valor de sus cifras o grupos, esto es, en este sistema no existen los valores relativos. Cada cifra o grupo sólo

(*) En los relojes, las cifras están puestas para ser miradas desde el centro; así es que, no miradas desde el centro, las cifras superiores se ven derechas. y las inferiores, invertidas; de aquí que el IV, visto al revés, es ΛI; y para que no se confunda con el VI, se pone IIII.

tiene el valor absoluto que se le ha asignado en él sistema; de aquí que todo número de este sistema es igual a la suma de los valores absolutos de las cifras y grupos que le componen. Sin embargo, se escriben las cifras y grupos de izquierda a derecha, por el orden de sus valores decrecientes, para armonizar la escritura con la costumbre de leer los números de izquierda a derecha y de mayor a menor.

Como con lo dicho hasta aquí no podría escribirse un número cuyos millares pasasen de tres, se ha convenido en que una raya horizontal, puesta sobre una cifra, grupo o conjunto de cifras, transforme en millares las unidades de la cifra, grupo o conjunto; dos rayas horizontales puestas sobre una cifra, grupo o conjunto de cifras transforman sus unidades en millones; tres rayas, en millares de millón; cuatro rayas, en billones, etc.

EJEMPLOS:

$$\overline{\text{V}} = 5 \text{ mil.}$$

$$\overline{\overline{\text{VII}}} = 7 \text{ millones.}$$

$$\overline{\overline{\overline{\text{XC}}}} = 90 \text{ mil millones.}$$

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\text{CM}}}}} = 900 \text{ billones.}$$

Escritura de un número cualquiera en el sistema romano.

30. *Para escribir un número en el sistema romano, se descompondrá el número en partes que tengan representación exacta en las cifras o grupos del sistema, y luego se escribirán de izquierda a derecha, y por el orden decreciente de sus valores, las cifras y grupos que en la descomposición hayan resultado.*

EJEMPLO.—1.° Escribir en cifras romanas el número 489. Se descompone en

400	que se expresa	por el grupo	CD
50	—	por la letra	L
10	—	—	X
10	—	—	X
10	—	—	X
9	—	por el grupo	IX

luego 489 tiene por expresión CDLXXXIX.

2.° Escribir el número 1917. Se descompone en

1000	que se expresa	por la letra	M
900	—	por el grupo	CM
10	—	por la letra	X
5	—	—	V
1	—	—	I
1	—	—	I

y resulta MCMXVII.

3.° Escribir el número 7598. Se descompone en

7000	que se expresa	por	$\overline{\text{VII}}$
500	—	por	D
90	—	por	XC
5	—	por	V
1	—	por	I
1	—	por	I
1	—	por	I

y resulta $\overline{\text{VII}}$DXCVIII.

4.° Escribir el número 15407639. Se descompone en

15000000	que se expresa	por	$\overline{\overline{\text{XV}}}$
407000	—	por	$\overline{\text{CDVII}}$
500	—	por	D
100	—	por	C
10	—	por	X
10	—	por	X
10	—	por	X
9	—	por	IX

y resulta $\overline{\overline{\text{XV}}}\ \overline{\text{CDVII}}$DCXXXIX.

Lectura de un número escrito en el sistema romano.

31. *Para leer un número escrito en el sistema romano, se leen de izquierda a derecha los valores de las cifras y grupos que lo forman, juntando en una sola lectura las cifras que expresan unidades del mismo orden,* como se ve en los grupos que se ponen a continuación:

EJEMPLOS:

1.° Leer el número $\underbrace{\text{MM}}_{\text{dos mil}}\ \underbrace{\text{DCC}}_{\text{setecientos}}\ \underbrace{\text{LXXX}}_{\text{ochenta}}\ \text{y}\ \underbrace{\text{IX}}_{\text{nueve}}$

Resulta....... dos mil setecientos ochenta y nueve

2.° Leer el número $\underbrace{\overline{\overline{\text{V}}}}_{\text{cinco millones}}\ \underbrace{\overline{\text{DCCC}}}_{\text{ochocientos mil}}\ \underbrace{\text{DCC}}_{\text{setecientos}}\ \underbrace{\text{XXX}}_{\text{treinta}}\ \text{y}\ \underbrace{\text{IV}}_{\text{cuatro}}$

Resulta....... cinco millones ochocientos mil setecien-tos treinta y cuatro o sea, cinco millones ochocientos mil setecientos treinta y cuatro:

3.º Leer el número
Resulta ......

$$\underbrace{\overline{\overline{\overline{\text{IX}}}}\ \overline{\overline{\text{V}}}}_{\text{nueve mil cinco millones}}\quad \underbrace{\overline{\text{CD}}}_{\text{cuatrocientos mil}}\quad \underbrace{\text{VIII}}_{\text{ocho}}$$

o sea, nueve mil cinco millones cuatrocientos mil ocho:

Obsérvese cómo, para la lectura de este número, el grupo $\overline{\overline{\overline{\text{IX}}}}$ con las tres rayas (nueve mil millones) y la cifra $\overline{\overline{\text{V}}}$ con las dos rayas (cinco millones) se han juntado para decir nueve mil cinco millones.

SEGUNDA PARTE

Cálculo.

32. *Cálculo es la parte de la Aritmética que trata de las operaciones.*

Llámase *operación* todo procedimiento que se emplea para formar un número por medio de otros dos o más.

Los dos o más números que sirven para formar otro se llaman *datos,* y el número que se busca, una vez hallado, se llama *resultado.*

Una operación se llama *inversa* de otra de dos datos, cuando los datos de aquélla son el resultado y un dato de ésta, y el resultado, el otro dato de esta misma.

Las operaciones aritméticas son siete: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación o formación de potencias, radicación o extracción de raíces y determinación de exponentes.

La adición, multiplicación y potenciación se llaman operaciones de composición; la sustracción, división, extracción de raíces se llaman operaciones de descomposición.

Aquí, en estas nociones, sólo trataremos de las cuatro primeras operaciones, dando una ligerísima idea de las otras tres. De todas ellas, la adición es la operación verdaderamente fundamental.

Prueba de una operación es otra operación que, después de efectuada aquélla, se hace para ver si está o no aquélla equivocada.

En las operaciones del cálculo llamamos *procedimiento natural* aquel por el cual podemos hallar el resultado de una operación con sólo los conocimientos adquiridos cuando se empieza a tratar de aquella operación. Así, será procedimiento natural para hallar el resultado de la adición el que sólo se funda en la numeración. Procedimiento natural para la sustracción será el que se funda en la numeración o en la adición. Para la multiplicación será procedimiento natural el que se funda en la adición, y para la división, el que se funda en cualquiera de las operaciones precedentes.

Adición.

33. *La adición u operación de sumar tiene por objeto reunir en un número las unidades de otros dos o más.*—Los datos o números que se dan para sumar se llaman *sumandos*, y el resultado, *suma*. Es operación de composición, porque en el resultado están todas las unidades contenidas en los sumandos o todas las unidades que tienen los datos. El signo de la operación es una cruz +, que se lee más y se interpone entre los sumandos. Así, por ejemplo, $5 + 7 + 12$, que se lee 5 más 7 más 12.

El *procedimiento natural* para hallar la suma de dos números consiste en agregar a uno de ellos, una a una, las unidades del otro, lo cual equivale a contar; pues si para sumar 5 con 4 agregamos al 5 una a una las unidades del 4, será lo mismo que decir 5 y 1, 6 y 1, 7 y 1, 8 y 1, 9. Como se ve, este procedimiento tan sencillo sería impracticable si se tratase de números muy grandes. Para convencerse de ello baste considerar que si tuviéramos que agregar una a una a un número las unidades de un billón, la operación no terminaría, aun no haciendo otra cosa, sino después de varios miles de años. Para evitar este inconveniente seguiremos otro procedimiento, que consiste en distinguir en la operación varios casos: uno que pueda hacerse por el procedimiento natural y otros que se reduzcan fácilmente al primero.

Consideraremos, primero, que los sumandos sean dos, y segundo, que sean más de dos.

Si los sumandos son dos, distinguiremos tres casos:

1.° *Sumar dos números de una cifra.*

2.° *Sumar un número de varias cifras con otro de una.*

3.° *Sumar un número de varias cifras con otro de varias.*

Primer caso: *Para sumar dos números de una cifra se pueden agregar a uno de ellos, una a una, las unidades del otro.*

Como después de ejercitarse mucho el alumno en este primer caso, se le quedará en la memoria el resultado de sumar números de una cifra, en lo sucesivo, para sumar números de una cifra, se hará la operación mentalmente, sin necesidad de apelar al procedimiento natural.

34. Puede también servir, para el primer caso, la tabla de sumar, que se forma escribiendo en una línea horizontal los números consecutivos desde 0 hasta 9; debajo de estos números, y correspondiéndose con ellos, los números desde 1 hasta 10; debajo de éstos, del mismo modo, los números desde 2 hasta 11, y así sucesivamente, hasta una horizontal que empezando por 9 termine en 18, como se ve en el siguiente cuadro llamado

TABLA DE SUMAR

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para hallar la suma de dos números de una cifra, por medio de la tabla, se busca un sumando en la primera horizontal o fila, y otro sumando en la primera columna; se recorre la columna correspondiente al primer sumando hasta encontrar la fila correspondiente al segundo, y en el punto de encuentro está la suma pedida.

Ejemplo.—Hallar la suma $7 + 5$.

Búsquese el 7 en la primera fila y bájese por la columna del mismo hasta encontrar la fila del 5, y en el punto de encuentro está 12, que es la suma. Pudiéramos también haber buscado el 5 en la primera fila y el 7 en la primera columna, y se hubiera obtenido el mismo resultado. Esto nos dice prácticamente que la suma de dos números de una cifra es independiente del orden de los sumandos, como acabamos de verlo en $7+5$, que ha dado lo mismo que $5+7$.

35. Segundo caso: *Sumar un número de varias cifras con otro de una.*

Para sumar un número de varias cifras con otro de una, se suma el número de una cifra con las unidades del de varias, y a la izquierda de la suma se ponen las cifras restantes del sumando de varias cifras, si la suma aquella no pasó de 9; si pasó de 9, se escribe la cifra de las unidades de dicha suma y se agrega una decena a la cifra de las decenas.

EJEMPLOS.—1.° Sumar 543 con 4. 2.° Sumar 754 con 8,

$$\begin{array}{r} 543 \\ 4 \\ \hline 547 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 754 \\ 8 \\ \hline 762 \end{array}$$

En el primer ejemplo, como la suma del 4 con la cifra de las unidades del otro sumando no pasa de 9, ha bastado escribir a la izquierda del 7 las otras cifras del primer sumando. En el segundo ejemplo, la suma de la cifra 8 con las unidades del otro sumando es 12, por esto se ha puesto un 2 y se ha agregado una decena a la cifra de las decenas.

36. Tercer caso: *Sumar dos números de varias cifras. Como si dividimos un todo en partes y dividimos otro todo también en partes y reunimos las partes de ambos todos, quedarán reunidos los todos, es claro que*

Para sumar dos números de varias cifras, se sumarán separadamente las unidades de cada orden, empezando por las de orden inferior, para poder agregar a la suma parcial siguiente las unidades de orden superior que resulten de la suma anterior. Si cada suma parcial no pasase de nueve, lo mismo sería empezar por un orden que por otro.

EJEMPLOS.—1.° Sumar los números 5364 y 2321. Como ambos números se componen de millares, centenas, decenas y unidades, la suma total se compondrá de cuatro sumas parciales; esto es, de la suma de los millares con los millares, de las centenas con las centenas, las decenas con las decenas y las unidades con las unidades, y como en este ejemplo ninguna suma parcial pasa de 9, empezaremos a sumar por los millares, diciendo:

5 millares y 2 millares, 7 millares; 3 centenas y 3 centenas, 6 centenas; 6 decenas y 2 decenas, 8 decenas; 4 unidades y 1 unidad, 5 unidades. Total, 7685.

2.° Sumar los números 5839 y 748. Aquí vemos que el segundo sumando no tiene millares; por lo tanto, sólo se sumarán las unidades del uno con las del otro, las decenas con las decenas y las centenas con las centenas, reuniendo esta suma con los millares del primer sumando. Por otra parte, en este ejemplo, algunas sumas parciales pasan de 9; por consiguiente, habrá que empezar a sumar por las unidades de primer orden, diciendo: 9 y 8, 17; pero como 17 tiene una decena, escribiremos sólo el 7 y agregaremos la decena a la suma de las decenas, diciendo: 1 y 3, 4 y 4, 8; 8 y 7, 15; pero como 15 centenas contienen un millar, escribiremos sólo el 5 y añadiremos el millar a los millares del otro sumando, diciendo: 1 y 5, 6. Luego la suma total será 6587.

En la práctica, se escribe un sumando debajo de otro, de modo que se correspondan las cifras del mismo orden; debajo de los sumandos se traza una raya, y debajo de la raya se escribe la suma, efectuándola como se ha dicho.

Hagamos en esta forma las sumas de los ejemplos anteriores:

$$1.^{\circ}\quad \begin{array}{r} 5364 \\ 2321 \\ \hline 7685 \end{array} \qquad\qquad 2.^{\circ}\quad \begin{array}{r} 5839 \\ 748 \\ \hline 6587 \end{array}$$

En la primera diríamos: 4 y 1, 5; 6 y 2, 8; 3 y 3, 6, y 5 y 2, 7.

En la segunda diríamos: 9 y 8, 17; escribo 7 y llevo 1; 1 y 3, 4, y 4, 8; 8 y 7, 15; escribo el 5 y llevo 1 y 5, 6.

37. *Caso en que los sumandos sean tres o más.*

Si los sumandos tienen una sola cifra, se sumarán primero dos de ellos, al resultado se añadirá otro, a este resultado otro, hasta que se hayan sumado todos.

Si los sumandos son de varias cifras, se sumarán separadamente las unidades de cada orden, empezando por el orden inferior, poniendo cuidado, si una suma parcial tiene unidades del orden inmediato superior, en guardarlas para este orden.

Ejemplos.—1.° Sumar los números 5, 7, 8, 3 y 9.

Se dirá 5 y 7, 12 y 8, 20 y 3, 23 y 9, 32.

2.° Sumar los números 57296, 8347, 55912, 728.

Para mayor comodidad y evitar que por equivocación pudiesen sumarse unidades de distintos órdenes, se escribirán unos sumandos debajo de otros, de modo que se correspondan las cifras del mismo orden, y luego se sumarán como se ha dicho:

$$\begin{array}{r} 57296 \\ 8347 \\ 55912 \\ 728 \\ \hline 122283 \end{array}$$

Para hacer esta suma, se dirá: 6 y 7, 13 y 2, 15 y 8, 23; escribo 3 y llevo 2 y 9, 11 y 4, 15 y 1, 16 y 2, 18; escribo 8 y llevo 1 y 2, 3 y 3, 6 y 9, 15 y 7, 22; escribo 2 y llevo 2 y 7, 9 y 8, 17 y 5, 22; escribo 2 y llevo 2 y 5, 7 y 5, 12.

Según lo dicho en la definición, la suma ha de contener todas las unidades de cada uno de los sumandos, y es evidente que este número total de unidades será el mismo, sea cualquiera el sumando por el cual se empiece la suma y los sumandos por los que se continúe, lo cual suele enunciarse diciendo que el valor de la suma es independiente del orden de los sumandos. De esto se deduce una

Prueba de la operación.—Para ver si la suma está bien hecha, se suman en orden inverso los sumandos, o como suele decirse, si se han sumado de arriba a abajo, se suman de abajo a arriba. Si la operación está bien hecha, las sumas han de ser iguales.

Si es de gran importancia la exactitud de la operación, no es prudente fiarse del todo de la prueba; pues bien podría ocurrir que estuvieran mal las dos operaciones y dieran el mismo resultado. En este caso conviene repetir atentamente la operación o apelar a otra prueba, que podría ser formar varios grupos de sumandos, sumar los grupos y reunir las sumas.

Sustracción.

38. *La sustracción tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos y uno de éstos, hallar el otro sumando.* La suma dada se llama *minuendo;* el sumando dado, *sustraendo,* y el

sumando que se busca, *diferencia*. Como se ve por la definición, la sustracción es operación inversa de la adición.

También suele definirse la sustracción diciendo que tiene por objeto hallar la diferencia entre dos números, llamados minuendo y sustraendo.

De la primera definición se deduce también que la suma del sustraendo y la diferencia es igual al minuendo, y que la diferencia entre el minuendo y la diferencia es el sustraendo.

El signo de la operación es una pequeña raya horizontal—, que se lee menos, y se coloca entre el minuendo y el sustraendo. Así, si se quiere indicar la diferencia entre 12 y 5, se escribirá: 12 — 5, que se lee: 12 menos 5.

39. *Procedimiento natural de la sustracción.*—Es doble; consiste en contar o descontar.

1.° Como el minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia, para tener ésta, basta agregar al sustraendo las unidades necesarias para componer el minuendo.

EJEMPLO.—Hallar la diferencia entre 12 y 5. Para ello diremos: 5 y 1, 6, y 1, 7, y 1, 8, y 1, 9, y 1, 10, y 1, 11, y 1, 12, donde vemos que el número de unidades añadidas es 7. Luego 7 es la diferencia entre 12 y 5.

2.° Puede hacerse rebajando al minuendo, una a una, las unidades del sustraendo. Sea el mismo ejemplo de antes; 12 — 5.

Diremos: 12 — 1, 11; — 1, 10, — 1, 9; — 1, 8; — 1, 7; luego 7 es la diferencia.

40. Este procedimiento sería muy largo, y hasta impracticable, si fuesen muy grandes minuendo, sustraendo y diferencia, por lo que convendrá buscar procedimientos más breves.

Para ello distinguiremos en la sustracción tres casos:

1.° *Que el minuendo y el sustraendo tengan una o más cifras y la diferencia una.*

2.° *Que el minuendo tenga varias cifras, el sustraendo una y la diferencia varias.*

3.° *Que el minuendo, sustraendo y diferencia tengan varias cifras.*

41. Primer caso: *Para este caso basta hallar la cifra que, agregada al sustraendo, dé el minuendo.*

EJEMPLOS:

$$9 - 5 = 4$$
$$15 - 8 = 7$$
$$320 - 312 = 8$$

Fácilmente se ve que 4 es lo que le falta al 5 para valer 9; 7 lo que le falta al 8 para valer 15, y 8 lo que le falta a 312 para valer 320.

42. Segundo caso: *Cuando el minuendo tiene varias cifras y el sustraendo una, se restará la cifra del sustraendo de la primera del minuendo, o de la primera aumentada en una decena; y a la izquierda de la diferencia se escribirán las restantes cifras del minuendo, si la cifra del sustraendo no era mayor que la cifra de las unidades del minuendo, rebajando a las decenas una unidad, en caso contrario.*

EJEMPLOS:

$$879 - 5 = 874$$
$$543 - 8 = 535$$

En el primer ejemplo, como la cifra del sustraendo es menor que la primera del minuendo, a la izquierda de la diferencia 4 se han puesto las decenas y centenas del minuendo; en el segundo ejemplo, como el sustraendo es mayor que la primera cifra del minuendo, se rebaja una decena a la cifra de las decenas del minuendo.

43. Tercer caso: *Que minuendo, sustraendo y diferencia tengan varias cifras.*

Como las unidades de cada orden de la diferencia, sumadas con las del mismo orden del sustraendo, han de dar las del minuendo también del mismo orden, se desprende de ahí que cada orden de unidades de la diferencia es la diferencia entre las cifras del mismo orden del minuendo y sustraendo, en el supuesto que la suma de las cifras del mismo orden de minuendo y sustraendo no pase de 9; si pasasen de 9, la cifra de la diferencia sería la diferencia entre las cifras del mismo orden del minuendo y sustraendo, pero aumentada la del minuendo en una unidad del orden inmediato superior. De aquí la

Regla para el tercer caso: *Para restar números de varias cifras, cuando la diferencia tiene también varias, se restarán separadamente las unidades de cada orden, empezando por las de orden inferior, y se escribirán de derecha a izquierda las cifras que vayan resultando. Si alguna cifra del minuendo fuese menor que la del mismo orden del sustraendo, se le agregaría a la cifra del minuendo diez unidades de su orden, cuidando de agregar una unidad del orden inmediato superior a la cifra inmediata del sustraendo* *o de rebajarla de la cifra siguiente del minuendo. En la práctica se escribe primero el minuendo, debajo el sustraendo, de manera que se correspondan sus cifras del mismo orden; debajo del sustraendo una raya horizontal, y debajo de la raya, la diferencia, hallada como se ha dicho.*

Ejemplos. — 1.° Hallar la diferencia entre los números 57308 y 34987.

Se dispondrá la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 57308 \\ \underline{34987} \\ 22321 \end{array}$$

Para hallar esta diferencia hemos dicho: de 7 a 8, 1, que se escribe debajo de las unidades; de 8 a 10, 2, que se escribe debajo de las decenas; pero como para poder restar hemos tenido que añadir diez decenas al minuendo, agregaremos una centena a la cifra siguiente del sustraendo, y decimos: 1 y 9, 10, a 13, 3, que se escribirá debajo de las centenas; por la misma razón añadimos una unidad a la cifra siguiente del sustraendo, y decimos: 1 y 4, 5, de 5 a 7, 2, que se escribe debajo de los millares, y, por último, de 3 a 5, 2, que se escribirá debajo de las decenas de millar.

2.° Hallar la diferencia entre los números 75811 y 596. Puestos uno debajo de otro, como antes, tendremos:

$$\begin{array}{r} 75811 \\ \underline{596} \\ 75215 \end{array}$$

En este segundo ejemplo, en que el minuendo tiene cifras de órdenes superiores que no están en el sustraendo, se ve que dichas cifras aparecen en la diferencia. La manera más sencilla de explicarlo consiste en suponer a la izquierda del sustraendo tantos ceros como cifras tenga de más el minuendo, y seguir la operación hasta el último cero.

Aquí hubiéramos dicho de 0 a 5, 5, y de 0 a 7, 7.

Prueba de la operación. La sustracción puede probarse de dos maneras, que se desprenden de la definición.

1.ª *Se suma la diferencia con el sustraendo, y la suma ha de ser igual al minuendo.*

2.ª *Se resta la diferencia del minuendo, y el resultado ha de ser igual al sustraendo.*

Multiplicación de números enteros.

44. *Multiplicación, en general, es una operación que tiene por objeto, dados dos números llamados* factores, *hallar otro número llamado* producto, *que sea, con respecto a uno de dichos factores, lo que el otro es con respecto a la unidad.* El factor que se relaciona con el producto se llama *multiplicando*, y el que se relaciona con la unidad, *multiplicador*.

La multiplicación de números enteros puede definirse diciendo que tiene por objeto, dados dos números enteros, tomar (no repetir) *uno de ellos tantas veces por sumando como unidades tiene el otro.*

El número que se toma por sumando es el multiplicando, el que expresa cuántas veces hay que tomar el multiplicando es el multiplicador; los dos juntos son los factores, y el resultado es el producto.

El signo de la multiplicación es un aspa $\times$ o un punto, que se lee multiplicado por.

Así 5×4, ó $5 . 4$, se lee 5 multiplicado por 4.

45. *Procedimiento natural.* — Es el que se deduce de la misma definición. Consistirá, pues, en formar una suma de tantos sumandos iguales a uno de los factores como unidades tiene el otro factor:

Así, por ejemplo, multiplicar 8×3 es lo mismo que $8 + 8 + 8 = 24$; multiplicando 25×6, es lo mismo que $25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 150$.

Ya se comprenderá que este procedimiento sólo puede aplicarse al caso en que los factores son pequeños o en que, por lo menos, lo sea el multiplicador.

46. Para hallar un procedimiento más breve, distinguiremos tres casos:

1.° *Que multiplicando y multiplicador tengan una sola cifra.*

2.° *Que el multiplicando tenga varias cifras y el multiplicador una.*

3.° *Que multiplicando y multiplicador tengan varias cifras.*

Observación. — Si el multiplicando tuviese una cifra y el multiplicador varias, tomaremos el multiplicador por multiplicando y el multiplicando por multiplicador, con lo que la operación quedaría reducida al segundo caso, sin alteración en el resultado, como comprobaremos luego.

47. *Primer caso:* Para multiplicar los números de una cifra, no hay inconveniente en tomar uno de ellos por sumando tantas veces como unidades tiene el otro. Por ejemplo: para multiplicar 8×5 podemos decir 8 y 8, 16 y 8, 24 y 8, 32 y 8, 40; pero es preferible hacerlo por medio de la *tabla* de multiplicar, teniéndola a la vista, si no se sabe de memoria.

La tabla de multiplicar o de Pitágoras se forma del modo siguiente: Se escriben en una línea horizontal o fila la serie de los números consecutivos desde 1 a 9; debajo de estos números, en otra fila, la suma de estos números consigo mismos; debajo de éstos, en una tercera fila, las sumas de cada número de la primera con el correspondiente de la segunda; debajo de la tercera fila, una cuarta que se formará sumando los números de la primera fila con los correspondientes de la tercera, y así se continuará, hasta llegar a la novena fila, que se formará sumando los números de la primera con los correspondientes de la octava. De este modo queda formado el cuadro siguiente, llamado *Tabla de Pitágoras* o

TABLA DE MULTIPLICAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para hallar por esta tabla el producto de dos números de una cifra, se buscará uno de ellos en la primera fila y otro en la primera columna; se recorrerá la columna correspondiente al primero hasta encontrar la fila correspondiente al segundo; en el punto de encuentro estará el producto.

EJEMPLO.—Supongamos que queremos multiplicar 8 por 5: buscaremos el 8 en la fila primera, recorreremos la columna del 8 hasta encontrar la fila quinta, que es la del 5, y en el punto de encuentro estará el producto, que es 40. También podíamos haber hallado el mismo producto buscando el 5 en la primera fila y el ocho en la primera columna, recorrer la columna del 5 hasta encontrar la fila del 8, y en el punto de encuentro se halla también el producto 40. Esta tabla nos dice prácticamente que el producto de dos números de una cifra es independiente del orden en que se toman, como acabamos de verlo en 8×5, que nos ha dado lo mismo que 5×8.

48. *Segundo caso:* Que el multiplicando tenga varias cifras, y el multiplicador una. *Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una, se multiplica cada cifra del multiplicando por la cifra del multiplicador, empezando por las unidades del orden inferior, reservando en cada producto parcial las unidades de orden superior que contenga, para agregarlas al producto parcial siguiente.*

Es tan sencillo el razonamiento para probar esta regla, que nos decidimos a explicarlo.

Razonaremos, para mayor claridad, sobre un ejemplo. Sea multiplicar 5768 por 4.

Según la definición, podemos tomar el multiplicando cuatro veces por sumando. Veamos cómo esto es lo mismo que multiplicar cada cifra del multiplicando por la del multiplicador.

Efectuemos una al lado de la otra las dos operaciones, la de hallar el producto sumando y la de hallarlo multiplicando.

Sumando: $\begin{array}{r} 5768 \\ 5768 \\ 5768 \\ \underline{5768} \\ 23072 \end{array}$ Multiplicando: $\begin{array}{r} 5768 \\ \underline{4} \\ 23072 \end{array}$

En la primera hemos tomado el 8 cuatro veces por sumando; en la segunda hemos multiplicado el 8 por 4, lo cual es lo mismo. En la primera hemos tomado el 6 cuatro veces por sumando; en la segunda hemos multiplicado el 6 por 4, que es lo mismo. En la primera hemos tomado el 7 cuatro veces por sumando; en la segunda hemos multiplicado el 7 por 4, que es igual. Por último, en la primera hemos tomado el 5 cuatro veces por sumando, y en la segunda hemos multiplicado el 5 por 4, que da el mismo resultado.

Por otra parte, de cada suma parcial, en la primera, hemos reservado las unidades de orden superior para agregarlas a la suma siguiente, y en la segunda, de cada producto parcial hemos guardado las unidades de orden superior para agregarlas al producto siguiente; luego en el fondo todo es lo mismo en ambas operaciones, sólo que la segunda es más breve. Luego la regla dada es verdadera.

49. *Tercer caso:* Multiplicar un número de varias cifras por otro de varias.

Distinguiremos en este caso otros tres: 1.º *Que el multiplicador sea la unidad seguida de ceros.* 2.º *Que el multiplicador sea una cifra distinta de la unidad, y que vaya seguida de ceros.* 3.º *Que el multiplicador sea un número cualquiera de varias cifras, distinto de los anteriores.*

1.º *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se escribirán a la derecha del número tantos ceros como sigan a la unidad.*

Esto se funda en uno de los principios de la numeración escrita, o sea en que toda cifra colocada a la izquierda de otra expresa unidades del orden inmediato superior.

EJEMPLOS.—1.º Sea multiplicar 85 por 10.

Bastará poner a la derecha de 85 un cero, y el producto será 850.

Por el principio enunciado, el 85, que era unidades, ha pasado a ser decenas, que son diez veces mayores; luego el número ha quedado multiplicado por 10.

2.º Sea multiplicar 512 por 1000.

Bastará poner a la derecha de 512 tres ceros, y el producto será 512000; pues según el repetido principio, el 512, que era unidades de primer orden, ha pasado a ser millares, que son mil veces mayores; luego el número ha quedado multiplicado por 1000, etc.

2.º *Cuando el multiplicador es una cifra distinta de la unidad y seguida de ceros, se multiplica el número por la cifra, y a la derecha del producto se escriben tantos ceros como acompañaban a la misma.*

EJEMPLO.—Multiplicar 729 $\times$ 300.

Se multiplica el 729 por 3, y a la derecha del producto se ponen dos ceros, en esta forma:

$$\begin{array}{r} 729 \\ \underline{300} \\ 218700 \end{array}$$

3.º *Cuando el multiplicador es un número cualquiera formado de dos o más cifras significativas, se multiplica todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, y se suman los productos parciales.*

Expliquémoslo con un ejemplo.

Sea multiplicar 3528 por 479.

El producto ha de contener 479 veces el multiplicando, lo cual es lo mismo que contenerle 9 veces, 70 veces y 400 veces; por lo tanto, el producto se obtendrá multiplicando el 479 por 9, luego por 70 y después por 400, y sumando en seguida los productos parciales.

Obsérvese que el producto por 70 lleva un cero, que se puede omitir poniendo la primera cifra que quede debajo de las decenas del producto anterior; asimismo el producto por 400 llevará dos ceros, que se pueden omitir escribiendo la primera cifra que quede debajo de las centenas del primer producto.

En la práctica, se dispone la operación del modo siguiente:

Se escribe el multiplicando, debajo el multiplicador, y debajo de éste, una raya; luego se multiplica cada cifra del multiplicador por todo el multiplicando, y se escribe la primera cifra de cada producto de modo que se corresponda con la cifra del multiplicador que ha servido para formarle. Se suman en seguida estos productos parciales, y se tendrá el producto total.

Ejemplo.—Sea multiplicar los números antedichos, 3528 por 479.

Disposición:

$$\begin{array}{r} 3528 \\ \underline{479} \\ 31752 \\ 24696 \\ \underline{14112} \\ 1689912 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3528 \\ \underline{479} \\ 14112 \\ 24696 \\ \underline{31752} \\ 1689912 \end{array}$$

50. Observación.—**Nada se dice aquí del orden en que deben tomarse las cifras del multiplicador, porque realmente es**

indiferente el orden, con tal que se coloquen los productos parciales como se ha dicho, o sea de modo que la primera cifra de cada uno se corresponda en columna con la cifra del multiplicador que ha servido para formarle. Véase esto confirmado en la segunda de las multiplicaciones anteriores, donde se ha empezado la multiplicación por la cifra de orden superior del multiplicador.

Con esta regla no hay que tener en cuenta los ceros que pueda haber entre las cifras del multiplicador; se prescinde de ellos, procurando colocar la primera cifra de cada producto parcial en su lugar correspondiente, como se ha dicho.

EJEMPLO.—Sea multiplicar 85729 por 7000809.

$$
\text{Disposición:}\quad
\begin{array}{r}
85729 \\
\underline{7000809} \\
771561 \\
685832 \\
\underline{600103} \\
600172354761
\end{array}
$$

51. OBSERVACIÓN.—Cuando los dos factores no tengan igual número de cifras significativas, es preferible tomar por multiplicando el de mayor número de ellas, pues por este medio suele haber un ahorro de cifras más o menos considerable en la operación.

En el ejemplo anterior, en que los productos parciales tienen entre todos 18 cifras, si se invierte el orden de los factores, los productos parciales tendrán 40 cifras entre todos.

Cuando uno de los factores o ambos terminen en ceros, se prescindirá de ellos, y luego se pondrán a la derecha del producto que procede de las cifras significativas.

Si sólo el multiplicando termina en ceros, conviene escribir la primera cifra del multiplicador debajo de la primera cifra significativa del multiplicando, para que se vea mejor que se prescinde de los ceros, que después se pondrán a la derecha del producto obtenido con las cifras significativas.

EJEMPLO.—Multiplicar 783000 por 57.

$$
\text{Disposición:}\quad
\begin{array}{r}
783000 \\
\underline{57} \\
5481 \\
\underline{3915} \\
44631000
\end{array}
$$

Si sólo es el multiplicador el que termina en ceros, se pondrá su primera cifra significativa debajo de las unidades del multiplicando.

EJEMPLO.—Multiplicar 8755 por 45000.

Disposición:	8755
	45000
	43775
	35020
	393975000

Si multiplicando y multiplicador terminan en ceros, se escribirá el multiplicador debajo del multiplicando, de manera que la primera cifra significativa de aquél caiga debajo de la primera significativa de éste.

Hecha la multiplicación de las cifras significativas, se pondrán a la derecha del producto tantos ceros como tienen ambos factores.

EJEMPLO.—Multiplicar 879000 por 500.

Disposición:	879000
	500
	439500000

52. Prueba de la multiplicación: *Como el producto no altera cambiando el orden de los factores, se tomará por multiplicando el multiplicador, y por multiplicador, el multiplicando, y el producto será el mismo, si están bien hechas la operación y la prueba.*

Veámoslo como un ejemplo:

Operaciones:	7538	Prueba:	659
	659		7538
	67842		5272
	37690		1977
	45228		3295
			4613
	4967542		4967542

División de los números enteros.

53. *División es una operación que tiene por objeto, dado un producto de dos factores, y uno de éstos, hallar el otro.* El producto dado se llama *dividendo;* el factor dado, *divisor,* y el factor que se busca, *cociente.*

El signo de la división lo forman dos puntos, así : que se lee dividido por; por ejemplo, 12 : 4, que se lee, 12 dividido por 4.

De la definición se deduce que la división es una operación inversa de la multiplicación. Cuando el dividendo es mayor que el divisor, puede definirse la división diciendo que tiene por objeto hallar el número de veces que el dividendo contiene al divisor. Este número de veces es el cociente.

Si el divisor es entero, puede definirse también la división diciendo que tiene por objeto hacer del dividendo tantas partes iguales como unidades tiene el divisor: una de estas partes iguales es el cociente. Esta definición es útil para hallar el cociente cuando el dividendo es menor que el divisor. De todas estas definiciones se deduce:

1.° Que si el dividendo es igual al divisor, el cociente es igual a la unidad. Así, si dividimos 8 naranjas entre 8 chicos, a cada chico le toca una naranja.

2.° Que si el dividendo es mayor que el divisor, el cociente es mayor que la unidad. Así, si dividimos 15 naranjas entre 8 chicos, toca a cada chico más de una naranja.

3.° Si el dividendo es menor que el divisor, el cociente es menor que la unidad. Así, si dividimos 6 naranjas entre 9 chicos, toca a cada chico menos de una naranja.

4.° Si el divisor es igual a la unidad, el cociente será igual al dividendo. Así, si el dividendo son 5 naranjas y el divisor un solo chico, al chico le tocarán las 5 naranjas.

54. *Procedimiento natural* para hallar el cociente cuando el dividendo es mayor que el divisor.

Se restarán del dividendo y de las diferencias que vayan resultando, cuantas veces se pueda, el divisor; el número de sustracciones será el cociente.

EJEMPLO.—Hallar el cociente de dividir 84 entre 12.

La operación se dispondrá como se ve a la izquierda (página siguiente).

$$\begin{array}{r} 84 \\ 12 \\ \hline 72 \\ 12 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 48 \\ 12 \\ \hline 36 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Se ha restado del 84 el 12; de la diferencia, 72, se ha restado otra vez el 12; de la diferencia, 60, lo mismo, y así sucesivamente, hasta que se ha llegado a la diferencia 0. El número de sustracciones que se puede contar por el número de rayas que se han puesto debajo de los sustraendos, es el cociente. En este caso, la división ha sido exacta, y el cociente se llama también exacto.

Se tiene, por consiguiente, $84 : 12 = 7$.

Si la última diferencia no fuese cero, el cociente no sería exacto; el número de sustracciones efectuadas se llamaría cociente entero, y la última diferencia, *resto* de la división. Es evidente que el resto ha de ser menor que el divisor.

Sea dividir 78 entre 15.

$$\begin{array}{r} 78 \\ 15 \\ \hline 63 \\ 15 \\ \hline 48 \\ 15 \\ \hline 33 \\ 15 \\ \hline 18 \\ 15 \\ \hline 3 \end{array}$$

El número de sustracciones ha sido 5, y la última diferencia, 3. La división es, pues, inexacta; el cociente entero, 5, y el resto de la división, 3. De aquí que:

$$\begin{array}{r} 78 : 15 = 5 \\ \text{resto } 3 \qquad \end{array}$$

Modo de hallar el cociente cuando el dividendo es menor que el divisor.

Se aplicará la regla que se deduce de la última definición dada.

Ejemplo.—Dividir una manzana entre cuatro chicos. Es evidente que si dividimos la manzana en cuatro partes iguales, a cada chico le tocará una de estas partes. Luego el cociente de dividir 1 por 4 es una de las cuatro partes iguales en que se ha dividido la unidad.

Esta cuestión pertenece a la teoría de los números fraccionarios; pero hemos querido decir aquí estas pocas palabras, para no dejar incompletos los casos en que se compara el dividendo con el divisor.

Cuando la división es exacta, el producto del divisor por el cociente es igual al dividendo. Cuando la división es inexacta, el producto del divisor por el cociente es menor que el dividendo; le falta lo que queda después de la última sustracción, que se llama resto de la división. Por lo tanto, si agregamos este resto a dicho producto, resultará el dividendo. De aquí que:

En toda división inexacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto.

55. El procedimiento natural por medio de la sustracción sería muy largo, y hasta podría hacerse impracticable cuando el dividendo contuviese un número muy grande de veces al divisor; por esto se han buscado métodos más expeditos y breves.

Para ello *distinguiremos en la división cuatro casos:* 1.º, *que el divisor y el cociente tengan una sola cifra: el dividendo tendrá una o dos;* 2.º, *que el divisor tenga una cifra y el cociente varias;* 3.º, *que el divisor tenga varias y el cociente una;* 4.º, *que el divisor y el cociente tengan varias.*

Estos casos están ligados de tal manera, que el segundo es una repetición del primero, el tercero se reduce al primero y el cuarto es una repetición del tercero.

56. Primer caso: *Que el divisor y cociente tengan una sola cifra. Para resolver este caso se buscará una cifra que, multiplicada por el divisor, dé el dividendo o un valor, el más aproximado, menor;* basta, pues, saber la tabla de multiplicar.

EJEMPLOS:

$$48 : 6 = 8$$
$$\begin{array}{l} 55 : 9 = 6 \\ 1 \end{array}$$

En el primer ejemplo, el cociente 8 es exacto, porque $8 \times 6 = 48$; en el caso segundo, el cociente 6 es el cociente entero, porque 6×9 no da sino 54, quedando uno de resto.

Si no se recordara la tabla de multiplicar, se le pondrá a la vista, y buscaremos, para el primer ejemplo, el 6 en la primera fila; recorreremos la columna del 6 hasta encontrar el 48, y en la fila de éste, a la izquierda, en la primera columna, encontraremos el cociente 8.

Para el segundo ejemplo, buscaremos el 9 en la primera fila; recorreremos su columna hasta el 54, y a la izquierda, en la primera columna, encontraremos el cociente entero 6.

57. Segundo caso: *Cuando el divisor tiene una cifra y el cociente varias.*

Para dividir un número de varias cifras por otro de una, se divide la primera o dos primeras cifras del dividendo por la cifra del divisor, y se tendrá la primera cifra del cociente; las otras cifras del cociente se hallarán dividiendo sucesiva-

mente por la cifra del divisor cada una de las restantes cifras del dividendo, precedida del resto de la división anterior. Se dividirá la primera cifra del dividendo por la cifra del divisor, cuando aquélla no sea menor que ésta, y se dividirán las dos primeras cifras del dividendo por la del divisor, cuando la primera del dividendo sea menor que la del divisor.

EJEMPLOS.—1.° Dividir 8596 por 7. Separaremos el dividendo del divisor por una raya, y el divisor del cociente, por otra raya; de esta forma:

$$\begin{array}{r|l} 8596 & 7 \\ \cline{2-2} 1150 & 1228 \end{array}$$

Para hallar la primera cifra del cociente, hemos dividido la primera cifra, 8, del dividendo por el divisor, 7, y nos ha dado el cociente 1; para hallar la segunda cifra del cociente, hemos dividido por el 7 la segunda cifra, 5, del dividendo, precedida del resto anterior, 1, que forman 15, y hemos hallado la cifra 2; para hallar la tercera cifra del cociente hemos dividido por el 7 la tercera cifra, 9, del dividendo, precedida del resto anterior 1, que forman 19, y hemos obtenido la cifra 2; por último, para obtener las cuarta y última cifra del cociente, hemos dividido por el 7 la cuarta cifra, 6, del dividendo, precedida del resto 5 anterior, que forman 56. El resto de la división es la cifra colocada debajo de las unidades del dividendo, que en este ejemplo es cero. Conviene tachar los restos así que hayan servido para hallar la cifra correspondiente del cociente.

2.° Dividir 375893 por 8.

$$\begin{array}{r|l} 375893 & 8 \\ \cline{2-2} 57655 & 46986 \end{array}$$

En este segundo ejemplo hemos dividido las dos primeras cifras, 37, del dividendo por el divisor, 8, por ser la primera más pequeña que el divisor, y hemos obtenido la primera cifra del cociente; para hallar la segunda hemos dividido por el divisor 8 la tercera cifra, 5, del dividendo, precedida del resto anterior 5, y hemos hallado la cifra 6, y así hemos seguido hasta la última cifra 6, quedando un resto, 5.

Cuando se ha adquirido cierta práctica, ni siquiera se escriben las cifras de los restos, sino que se unen mentalmente con las cifras sucesivas del dividendo para obtener las correspondientes del cociente. Sólo se escribe el último resto, por ser el resto de la división. Como se ve, resolver este caso equivale a resolver tantas veces el primero como cifras tiene el cociente.

En este caso también, en lugar de decir tal número entre tal otro, como, por ejemplo, 15 entre 4, entre 5, entre 6, etcétera, suele decirse la cuarta parte de 15, la quinta parte de 15, la sexta parte de 15, etc.

EJEMPLO.— Dividir 75956 por 3.

$$\begin{array}{r|l} 75956 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 25318 \end{array}$$

Hemos dicho en este ejemplo: la tercera parte de 7, 2; 2×3, 6, a 7, 1, que con el 5, forman 15; la tercera parte de 15, 5; 5×3, 15, a 15, 0; la tercera parte de 9, 3; 3×3, 9, a 9, 0; la tercera parte de 5, 1; 1×3 es 3, a 5, 2, que con la última cifra 6 forman 26; la tercera parte de 26, 8; 8×3, 24, a 26, 2, que se escribe debajo del 6, como resto de la división.

EJERCICIO.— Sepárense e indíquense las divisiones parciales que se han hecho en el ejemplo anterior para hallar el cociente.

$$\begin{array}{r} 7 : 3 = 2 \\ 15 \cdot 3 = 5 \\ 9 : 3 = 3 \\ 5 : 3 = 1 \\ 26 : 3 = 8 \\ 2 \phantom{{}: 3 = 8} \end{array}$$

Tercer caso: *Cuando el divisor tiene varias cifras y el cociente una.* Claro es que el dividendo tendrá también varias cifras.

Para dividir un número de varias cifras por otro de varias cuando el cociente tiene una, se divide la primera o dos primeras cifras de la izquierda del dividendo por la primera del divisor, y se obtendrá la cifra del cociente o una cifra mayor. Se comprobará la cifra multiplicándola por el divisor, y si el producto no es mayor que el dividendo, la cifra será la verdadera que se buscaba.

Se dividirá sólo la primera cifra del dividendo por la primera del divisor, si aquélla es mayor que ésta; pero si la primera cifra del dividendo fuese menor que la primera del divisor, entonces se dividirá por ésta el número formado por las dos primeras cifras del dividendo.

Si la primera cifra del dividendo fuese igual a la primera del divisor y ambos tienen igual número de cifras, se dividirá la primera cifra del dividendo por la primera del divisor; pero si el dividendo tuviere una cifra más que el divisor, se dividirán las dos primeras cifras del dividendo por la primera cifra del divisor.

EJEMPLOS.—1.º Sea dividir 8597 por 3853.

8597	3853
0891	2

2.º Sea dividir 73569 por 8647.
3.º Sea dividir 7358 por 749.

73569	8647
4393	8

7358	749
617	9

En el primer ejemplo, por ser la primera cifra, 8, del dividendo mayor que la primera, 3, del divisor, se ha dividido sólo el 8 por el 3.

En el segundo ejemplo, por ser la primera cifra, 7, del dividendo menor que la primera, 8, del divisor, se ha dividido el número formado por las dos primeras cifras del dividendo, o sea 73 por la primera cifra del divisor.

En el tercer ejemplo, siendo la primera cifra del dividendo igual a la primera cifra del divisor, por tener el dividendo una cifra más que el divisor, se dividen las dos primeras de aquél por la primera de éste.

58. Obsérvese que la regla convierte este tercer caso en el primero, pues para hallar el cociente en el primer ejemplo hemos dicho 8 : 3; en el segundo, 73 : 8, y en el tercero, 73 : 7, pero con la diferencia que, consideradas estas divisiones como del primer caso, los cocientes que resulten son los verdaderos, y considerados como del tercero pueden no serlo, como realmente ocurre en el segundo ejemplo, que nos da 9 por cociente, siendo 8 el cociente verdadero.

59. Cuarto caso: *Dividir un número de varias cifras por otro de varias, cuando el cociente tiene también varias.*

Para dividir un número de varias cifras por otro de varias, se toman a la izquierda del dividendo las cifras nece-

sarias y suficientes para formar un número que contenga al divisor: estas cifras separadas forman el primer dividendo parcial; se divide el primer dividendo parcial por el divisor, y se tendrá la primera cifra del cociente; se multiplicará esta cifra por el divisor, y el producto se restará del primer dividendo parcial; a la derecha del resto se escribirá la cifra siguiente del dividendo, y resultará el segundo dividendo parcial; se dividirá el segundo dividendo parcial por el divisor, y se tendrá la segunda cifra del cociente; se multiplicará ésta por el divisor, y el producto se restará del segundo dividendo parcial; a la derecha de este segundo resto, se escribirá la cifra siguiente del dividendo, quedando así formado el tercer dividendo parcial; se dividirá éste por el divisor, y dará la tercera cifra del cociente, y así se continuará hasta que el último dividendo parcial (que será el que resulte de poner a la derecha del resto la última cifra del dividendo), dividido por el divisor, nos dé la última cifra del cociente; se multiplicará esta última cifra por el divisor, y el producto se restará del último dividendo parcial. El resto así obtenido es el resto de la división.

Vamos a aplicar esta regla a un ejemplo: Sea dividir 5703891 por 879.

5703891	879
4298	6489
7829	
7971	
60	

Las cuatro primeras cifras de la izquierda del dividendo, o sea 5703, forman el primer dividendo parcial; se dividirá este dividendo parcial por el divisor, y se obtendrá la primdra cifra del cociente, que es 6; se multiplicará esta cifra por el divisor, y el producto se restará del primer dividendo parcial; a la derecha del resto se escribirá la cifra siguiente del dividendo, que es 8, y resultará el segundo dividendo parcial, 4298; se dividirá éste por el divisor, y se obtendrá la segunda cifra del cociente, que es 4; esta cifra se multiplicará por el divisor, y el producto se restará del segundo dividendo parcial; a la derecha del resto se escribirá la cifra siguiente, 9, del dividendo, y el número 7829 será el tercer dividendo parcial; se dividirá éste por el divisor, y se obtendrá la tercera cifra, 8, del cociente; ésta se multiplicará por el divisor, y el producto se restará del tercer dividendo parcial; a la derecha del resto, se escribirá la cifra 1, última del dividendo y resultará el último dividendo parcial; éste se dividirá por el divisor, y dará la última cifra, 9, del cociente; multiplicando esta última cifra por el divisor, y restando el producto del último dividendo parcial, se tendrá el resto de la división, que es 60.

60. Observando que el cociente de dividir cada dividendo parcial por el divisor es de una sola cifra, se verá que este cuarto caso es el tercero repetido, o sea el tercero efectuado tantas veces como cifras tiene el cociente.

61. OBSERVACIÓN PRIMERA.—Si algún dividendo parcial, después del primero, fuese menor que el divisor, indicaría que es cero la cifra del cociente; se pondría, pues, en el cociente un cero, se escribiría a la derecha del dividendo parcial, menor que el divisor, la cifra siguiente del dividendo para formar el dividendo parcial siguiente, y se continuaría la operación como se ha dicho.

EJEMPLO.—Dividir 533192 por 659.

533192	659
5992	809
61	

En esta división, el primer dividendo parcial es 5331, y el segundo, 599, que es menor que el divisor; por esto se ha puesto cero en el cociente, y a la derecha del dividendo parcial, la cifra siguiente, 2, del dividendo, que con el dividendo parcial anterior ha formado el dividendo parcial tercero y último; éste, dividido por el divisor, ha dado la última cifra, 9, del cociente.

62. OBSERVACIÓN SEGUNDA.—Si el resto de alguna división parcial fuese igual o mayor que el divisor, indicaría que se puso en el cociente una cifra menor que la verdadera o que se cometió algún error en el cálculo. Se repasaría, por lo tanto, el cálculo y se corregirá, si fuere necesario, la cifra.

63. CASOS PARTICULARES.—1.º *Si dividendo y divisor terminasen en igual número de ceros, se prescindiría de ellos en la división, y el cociente obtenido sería el verdadero; pero si la división no era exacta, se pondrían a la derecha del resto tantos ceros como se hubiesen suprimido en uno de los términos.*

2.º *Si el dividendo terminase en mayor número de ceros que el divisor, se suprimirían tantos ceros como tiene el di-*

visor, se efectuaría la división, y el cociente sería el verdadero; pero a la derecha del resto habría que escribir tantos ceros como se hubiesen suprimido en uno de los términos.

3.° *Si sólo el divisor terminara en ceros o en mayor número de ceros que el dividendo, se suprimirían todos los ceros del divisor, y a la derecha del dividendo, tantas cifras o tantos ceros y cifras como ceros tiene el divisor; se efectuará la división, y el cociente será el veraadero; pero a la derecha del resto, se escribirán todas las cifras, o cifras y ceros separados en el dividendo.*

Ejemplos.—1.° Dividir 845000 por 8000.

Se dividirá sólo 845 por 8, y se pondrán a la derecha del resto tres ceros.

845	8
045	105
5000	

El cociente es 105, y el resto, 5000.

2.° Dividir 73000 por 900.

Se dividirá 730 por 9, y se pondrán a la derecha del resto dos ceros.

730	9
10	81
100	

El cociente es 81, y el resto, 100.

3.° Dividir 504760 por 700.

Se dividirá 5047 por 7, y a la derecha del resto se escribirán las dos cifras suprimidas, o sea 60.

5047	17
14	721
07	
060	

El cociente es 721, y el resto, 60.

En la práctica se tachan los ceros y se separan con un punto las cifras suprimidas. Así, en este último ejemplo hubiéramos puesto:

5047.60	700
14	721
07	
0.60	

De este último caso se deduce que para dividir un número por la unidad seguida de ceros, se separan con un punto a la derecha del dividendo tantas cifras como ceros acompañen a la unidad; el número que quede a la izquierda del punto será el cociente, y el que quede a la derecha, el resto.

EJEMPLO.—Dividir 45729 por 100.

Separando en el número 457.29 con un punto las dos cifras de la derecha, el número 457 será el cociente, y 29, el resto.

64. PRUEBAS DE LA DIVISIÓN.—1.ª *Se multiplicará el cociente por el divisor, y el producto ha de ser igual al dividendo, si la división es exacta. Si la división fuese inexacta, al producto del divisor por el cociente entero se le añadirá el resto, y la suma ha de ser igual al dividendo.*

2.ª Si la división es exacta, se dividirá el dividendo por el cociente y el resultado ha de ser el divisor. Si la división es inexacta y el resto menor que el cociente, se dividirá el dividendo por el cociente y habrá de dar por cociente el divisor, y por resto, el mismo de la división que se comprueba. Si el resto no fuese menor que el cociente, no puede aplicarse esta prueba sin alguna modificación.

Formación de potencias o potenciación.

65. *Potencia de un número es el resultado de tomarle dos o más veces por factor.* El número que se toma por factor se llama *base*, y el número que expresa cuántas veces la *base* se toma por factor, *exponente*. Se expresa de este modo:

$$5^4 = 625 \qquad 8^2 = 64 \qquad 3^5 = 243, \text{ etc.}$$

El 5, el 8 y el 3 son las bases; el 4, el 2 y el 5, los exponentes; 625, 64, 243, las potencias. Si se toma un número dos veces por factor, se llama segunda potencia o *cuadrado;* si se toma tres veces por factor, tercera potencia o *cubo;* si cuatro veces, cuarta potencia, etc.

A todo número se le llama, aunque impropiamente, primera potencia del mismo, y se supone que tiene por exponente 1. Así $7^1 = 7$.

66. *Las potencias de un número se forman multiplicando el número por sí mismo; el resultado, por el mismo número, y así sucesivamente.*

EJEMPLOS.—Formar la cuarta potencia de 5. Será:

$$5^4 = 5\times5\times5\times5 = 25\times5\times5 = 125\times5 = 625.$$

Formar el cuadrado de 8.

$$8^2 = 8\times8 = 64.$$

Formar la quinta potencia de 3.

$$3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 9\times3\times3\times3$$
$$= 27\times3\times3 = 81\times3 = 243.$$

De la definición de potencias se deduce que todas las potencias de la unidad dan la unidad, porque

$$1^2 = 1\times1 = 1, \qquad 1^3 = 1\times1\times1 = 1, \text{ etc.}$$

La potencia de un número mayor que la unidad será tanto mayor cuanto mayor sea el exponente.

Así:

$$5^3 > 5^2, \quad 5^4 > 5^3, \quad 5^5 > 5^4.$$

67. *Multiplicación de potencias de la misma base.—Para multiplicar dos o más potencias de la misma base, se suman los exponentes; y la misma base con la suma de exponentes por exponente, será el producto.*

Así:

$$7^3\times7^2 = 7^5, \text{ porque } 7^3\times7^2 = 7\times7\times7\times7\times7 = 7^5.$$

División de dos potencias de la misma base.—Para dividir dos potencias de la misma base, se resta del exponente del dividendo el exponente del divisor; y la misma base, con la diferencia de exponentes por exponente, será el cociente.

Así:

$$12^7 : 12^3 = 12^4,$$

porque 12^4, multiplicado por el divisor 12^3, produce el dividendo 12^7.

Formación de una potencia de otra potencia.—Para formar una potencia de otra potencia, se multiplican los exponentes; y la misma base, con el producto de exponentes por exponente, será la potencia buscada.

Así:

$$(7^5)^3 = 7^{5\times3} = 7^{15}, \text{ porque } (7^5)^3 = 7^5\times7^5\times7^5 = 7^{15}$$

Radicación o extracción de raíces.

68. *La extracción de raíces o radicación tiene por objeto hallar un número llamado* raíz, *cuya potencia de cierto grado sea igual a otro número dado.* Este número dado se llama *radicando*, y el signo de la operación es de esta forma $\sqrt{\ }$, y se llama *radical.* La operación se indica de este modo:

$$\sqrt{49} = 7, \qquad \text{porque } 7^2 = 49$$
$$\sqrt[3]{512} = 8, \qquad \text{porque } 8^3 = 512$$
$$\sqrt[4]{625} = 5, \qquad \text{porque } 5^4 = 625.$$

El número que está debajo del radical es el radicando, el número que está dentro del ángulo del radical se llama *índice*, y el resultado de la operación es la raíz. El índice expresa el grado de la raíz, que es el grado a que hay que elevar ésta para obtener el radicando; cuando la raíz es de segundo grado, no se pone índice en el radical, pero se sobrentiende el 2. Cuando el índice es 2, la raíz se llama *cuadrada;* cuando es 3, *cúbica;* cuando 4, *cuarta*, etc.

En las igualdades anteriores, el 49, el 512 y el 625 son los radicandos; el 2 (implícito), el 3 y el 4, los índices; el 7, el 8 y el 5, las raíces; el 7, la raíz cuadrada; el 8, la raíz cúbica, y el 5, la raíz cuarta.

Raíz cuadrada de los números enteros.

69. *Raíz cuadrada de un número entero es otro número que, elevado a 2, produce el primero.*

Así:

$$\sqrt{1} = 1, \qquad \text{porque } 1^1 = 1$$
$$\sqrt{4} = 2, \qquad \text{porque } 2^2 = 4$$
$$\sqrt{9} = 3, \qquad \text{porque } 3^2 = 9$$
$$\sqrt{16} = 4, \qquad \text{porque } 4^2 = 16$$
$$\sqrt{25} = 5, \qquad \text{porque } 5^2 = 25$$
$$\sqrt{36} = 6, \qquad \text{porque } 6^2 = 36$$
$$\sqrt{49} = 7, \qquad \text{porque } 7^2 = 49$$
$$\sqrt{64} = 8, \qquad \text{porque } 8^2 = 64$$
$$\sqrt{81} = 9, \qquad \text{porque } 9^2 = 81$$
$$\sqrt{100} = 10, \qquad \text{porque } 10^2 = 100$$

Los números colocados en la última columna son los cuadrados de los diez primeros números enteros, y sólo ellos tienen raíz cuadrada exacta entre todos los números enteros consecutivos desde 1 hasta 100. Los demás números enteros comprendidos entre 1 y 100 tendrán su raíz comprendida entre dos enteros consecutivos de una cifra.

Así, el número 20, que está comprendido entre 16 y 25, tendrá su raíz cuadrada comprendida entre 4, que es la raíz de 16, y 5, que es la raíz de 25. De los dos números enteros consecutivos entre los cuales está comprendida la raíz cuadrada de un número, el menor se llama raíz cuadrada entera de dicho número. Así que podemos definir la *raíz cuadrada entera de un número* diciendo que *es la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en dicho número*. La diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz entera se llama *resto* de la raíz.

70. *El procedimiento natural para obtener la raíz cuadrada de un número consiste en formar los cuadrados de los números enteros consecutivos hasta llegar a un cuadrado igual al número propuesto, o hasta llegar al primer cuadrado que exceda dicho número. Si se encuentra un número entero cuyo cuadrado sea igual al número propuesto, dicho número entero será la raíz cuadrada exacta de éste. Si no existe un número entero cuyo cuadrado sea igual al número propuesto, y en la serie de cuadrados que se van formando se llega al primero mayor que el número propuesto, la raíz cuadrada del penúltimo cuadrado sera la raíz cuadrada entera del número propuesto.*

EJEMPLOS.—1.º Sea extraer la raíz cuadrada del número 169. Como este número es mayor que 100, no hay que formar para hallar su raíz los cuadrados de los diez primeros números; bastará formar los cuadrados a partir del de 11:

$$11^2 = 11 \times 11 = 121,\quad 12^2 = 12 \times 12 = 144,\quad 13^2 = 13 \times 13 = 169;$$

luego 13 es la raíz cuadrada de 169.

2.º Sea extraer la raíz cuadrada de 200:

$$11^2 = 11 \times 11 = 121,\quad 12^2 = 12 \times 12 = 144,\quad 13^2 = 13 \times 13 = 169,$$
$$14^2 = 14 \times 14 = 196,\quad 15^2 = 15 \times 15 = 225.$$

Como el cuadrado de 15, o sea 225, es el primer cuadrado entero mayor que 200, la raíz del cuadrado inmediato anterior, o sea 14, será la raíz cuadrada entera de 200.

El procedimiento natural sólo puede aplicarse a números pequeños; para números grandes o de muchas cifras hay que buscar otro procedimiento, que cae fuera del límite que hemos señalado a estas NOCIONES.

Determinación de exponentes.

71. En la expresión $8^3 = 512$, si sólo se conoce la base 8 y el exponente 3, buscamos la potencia; si sólo se conoce el exponente 3 y la potencia 512, se busca la base, que se llama raíz; si sólo se conoce la base 8 y la potencia 512, se busca el exponente, y la operación la llamaremos *determinación de exponentes*.

Si representamos por b la base, por e el exponente y por p la potencia, la expresión $8^3 = p$ indicará que vamos a buscar la potencia; la expresión $b^3 = 512$ indicará que vamos a buscar la base, o sea la raíz cúbica de 512; la expresión $8^e = 512$ indica que vamos a buscar el exponente.

Como se ve, la determinación de exponentes es operación inversa de la potenciación.

Procedimiento natural.—Consiste en formar las sucesivas potencias enteras de la base a partir de la primera hasta llegar a la potencia dada, o hasta llegar a la primera potencia superior a la dada, si no se encuentra una igual a ella. El exponente de la potencia igual a la dada, si existe, será exactamente el exponente buscado. Si no se encuentra potencia igual a la dada, el exponente de la penúltima potencia será la parte entera del exponente que se busca.

EJEMPLOS:

1.° Hallar el exponente de la expresión $8^e = 512$.

Escribiremos:

$$8^1 = 8, \quad 8^2 = 64, \quad 8^3 = 512;$$

luego 3 es el exponente que se buscaba.

2.° Hallar el exponente de la expresión $7^e = 10000$.

Escribiremos:

$$7^1 = 7, \quad 7^2 = 49, \quad 7^3 = 343, \quad 7^4 = 2401, \quad 7^5 = 16807.$$

Como este último número es la primera potencia entera de 7 mayor que 10000, el exponente de la potencia inmediata anterior, o sea el 4, sería la parte entera del exponente buscado.

Como siempre, este procedimiento natural sería muy molesto, y hasta impracticable, si la potencia fuese un número muy grande con relación a la base. Buscar otro procedimiento no sería propio de estas NOCIONES.

TERCERA PARTE

Algunas propiedades de los números.

72. Cuando al dividir un número por otro, el cociente que resulta es exacto, se dice que el dividendo es *divisible* por el divisor. Así, pues, diremos que *un número es divisible por otro cuando es exacto el cociente de la división del primero por el segundo.*

Cuando un número es divisible por otro, el primero se llama múltiplo del segundo, y el segundo, divisor, factor o submúltiplo del primero.

El cociente de dividir un número por un divisor suyo se llama *parte alícuota* del primero, y el nombre de esta parte alícuota se toma del divisor. Así, si el divisor es 2, el cociente o parte alícuota se llama *mitad;* si el divisor es 3, el cociente o parte alícuota se llama *tercera parte;* si 4, *cuarta parte;* si 5, *quinta parte*, etc.

Los números divisibles por 2 se llaman números pares, y los no divisibles por 2, números impares. Las cifras 2, 4, 6 y 8 se llaman cifras pares; las cifras 1, 3, 5, 7 y 9, impares.

Si dos o más números son divisibles por otro, la suma de aquéllos también lo será. Así, si los números 8, 14 y 20 son divisibles por 2, la suma de dichos números, que es 42, también es divisible por 2.

Si un número es divisible por otro, todo número múltiplo del primero, o divisible por él, será múltiplo del segundo o divisible por él. Así, si 12 es divisible por 4, 36, que es divisible por 12, será divisible por 4.

Si dos números son divisibles por otro, su diferencia también lo será. Así, si 30 y 18 son divisibles por 3, la diferencia de aquellos números, que es 12, también es divisible por 3.

Caracteres de divisibilidad de los números.

(Por 10, 100, 1.000... por 2, 5, 3, 9, 11)

73. *Un número es divisible por 10 cuando termina en 0* pues suprimiendo el 0 queda un número diez veces menor, según se desprende de un principio de la numeración escrita.

Un número es divisible por 100 cuando termina en dos ceros, porque suprimiendo los dos ceros, queda un número cien veces menor, según el mismo principio.

Del mismo modo y por la misma razón, *un número es divisible por 1000 cuando termina en tres ceros; por 10000, cuando termina en cuatro, etc.*

Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 ó cifra par; si termina en 0, porque es divisible por 10 y el 10 lo es por 2, y si termina en cifra par, porque puede descomponerse en dos sumandos, ambos divisibles por 2. Así, 528 se puede descomponer en 520 y 8, y siendo cada sumando divisible por 2, lo será también la suma.

Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 ó en 5; si termina en 0, porque el número es divisible por 10 y el 10 lo es por 5; y si termina en 5, se puede descomponer en dos sumandos, ambos divisibles por 5.

Así, 735 se puede descomponer en 730 y 5, y como los dos sumandos son divisibles por 5, también lo será su suma.

Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores absolutos de todas sus cifras es divisible por 3.

EJEMPLO.—El número 57891 es divisible por 3, porque la suma de los valores absolutos de todas sus cifras ($5 + 7 + 8 + 9 + 1 = 30$) es divisible por 3.

Del mismo modo, *un número será divisible por 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9.*

EJEMPLO.—El número 47682 es divisible por 9, porque la suma de los valores absolutos de sus cifras ($4 + 7 + 6 + 8 + 2 = 27$) es divisible por 9.

Un número será divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las cifras de lugar par (tomando por minuendo la suma mayor) es divisible por 11, o también cuando dicha diferencia es 0.

EJEMPLOS.—1.° El número 636856 es divisible por 11, porque la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las cifras de lugar par [(6 + 8 + 3) — (5 + 6 + 6), o sea 17 — 17 = 0] es 0.

2.° El número 70738195 es divisible por 11, porque la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las cifras de lugar par [(7 + 7 + 8 + 9) — (0 + 3 + 1 + 5) = 22)] es divisible por 11.

Es indiferente considerar las cifras de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en lo que se refiere a contar los lugares.

Máximo común divisor de dos números enteros.

74. *Llámase* divisor común *de varios números enteros un número entero que sea divisor de todos ellos. Como la unidad es divisor de todo número entero, varios números enteros siempre tendrán, por lo menos, un divisor común, que es la unidad; si no tienen más divisor común que la unidad, los números se llaman* primos entre sí. *Si tienen varios divisores comunes, habrá uno que será mayor que todos los demás, y este divisor es el que se llama* máximo común divisor *de aquellos números; luego máximo divisor de dos o más números enteros es otro número entero que sea el mayor divisor común de todos ellos.*

Los números 4, 5 y 9 no tienen más divisor común que la unidad; por esto se llaman primos entre sí. Los números 4, 6 y 10 tienen dos factores comunes, el 1 y el 2; no son, por lo tanto, primos entre sí, y su máximo común divisor es 2. Los números 24 y 36 tienen seis divisores comunes, que son 1, 2, 3, 4, 6 y 12; su máximo común divisor es 12. *El máximo común divisor suele indicarse con las iniciales m. c. d.*

Cuando un número es divisible por otro, este segundo es el máximo común divisor de los dos. Así, siendo 24 divisible por 8, 8 es el máximo común divisor de 24 y 8. Siendo 72 divisible por 24, 24 es el *m. c. d.* de 72 y 24.

Para hallar el m. c. d. *de dos números, se dividirá el mayor por el menor, y si el cociente resulta exacto, el menor será el* m. c. d.; *si el cociente no fuere exacto, se divide el menor por el resto, y si fuere exacta esta división, el nuevo divisor será el* m. c. d.; *si tampoco fuere exacta esta división, se dividirá el segundo divisor por el segundo resto, y* *así se continuará hasta que se llegue a un cociente exacto; el divisor de la última división será el* m. c. d.

EJEMPLOS.—1.° Hallar el *m. c. d.* de 84 y 12.

Dividiremos 84 por 12.

84	12
0	7

Como el cociente ha resultado exacto, el menor de los dos números, ó sea 12, es el *m. c. d.* de 84 y 12.

2.° Hallar el *m. c. d.* de 168 y 96.

Dividiremos el primero por el segundo.

	1	1	3
168	96	72	24
72	24	0	

Como la primera división no ha sido exacta, se ha dividido el menor, 96, por el resto, 72; no siendo tampoco exacta la segunda división, se ha dividido el segundo divisor, 72, por el segundo resto, 24, y habiendo sido exacta esta última división, el divisor 24 es el *m. c. d.* de los números 168 y 96.

3.° Hallar el *m. c. d.* de los números 252 y 55.

	4	1	1	2	1	1	4
252	55	32	23	9	5	4	1
32	23	9	5	4	1	0	

Dividiendo el mayor por el menor, éste por el resto, este resto primero por el segundo, este segundo por el tercero, y así sucesivamente, sólo hemos llegado a un cociente exacto, cuando el divisor ha sido la unidad. Luego el *m. c. d.* de los números 252 y 55 es la unidad; por lo tanto, dichos números son primos entre sí.

Múltiplo común de varios números. Mínimo común múltiplo.

75. Hemos dicho que un número divisible por otro se llama *múltiplo* de este otro, y como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, podemos decir también que *múltiplo* de un número es su producto por un entero cualquiera. *Un número se llama múltiplo común de varios números cuando es divisible por cada uno de ellos.* Dos o más números tienen una infinidad de múltiplos comunes.

Así, son múltiplos de 12 y 8:

$$
\begin{aligned}
&24\\
&24\times 2 = 48\\
&24\times 3 = 72\\
&24\times 4 = 96\\
&24\times 5 = 120\\
&24\times 6 = 144
\end{aligned}
$$

El menor de todos los múltiplos comunes de 12 y 8 es 24, y se llama su *mínimo común múltiplo*, que suele designarse abreviadamente así: *m. c. m.* En general, *mínimo común múltiplo de varios números es el menor número divisible por cada uno de ellos, o el menor número múltiplo de cada uno de ellos.* Hemos dicho antes que cuando un número es divisible por otro, este segundo es el máximo divisor de los dos, y ahora añadiremos que cuando un número es múltiplo de otro, el primero es el mínimo común múltiplo de los dos.

El múltiplo común más natural de dos números, podríamos decir que es su producto, pues es múltiplo del primero, por ser su producto por el segundo, y es múltiplo del segundo, por ser su producto por el primero. Lo mismo podríamos decir que el múltiplo común más natural de varios números es el producto de todos ellos. Este producto será el mínimo común múltiplo de todos los números, cuando cada uno de éstos sea primo con cada uno de los demás.

Números fraccionarios.

76. Al medir la cantidad continua con la unidad, vimos que cuando ésta no estaba contenida exactamente en aquélla, pero sí estaba contenida exactamente una de sus partes iguales, el resultado de la medición se llamaba *número fraccionario.*

En la división dijimos que una de sus definiciones, en el caso de ser entero el divisor, era: *hacer del dividendo tantas partes iguales como unidades tiene el divisor*. De aquí vamos a deducir también la idea de los números fraccionarios.

Cuando el dividendo no contiene un número exacto de veces al divisor, uno de los modos de hallar el verdadero cociente consistirá en dividir cada unidad del dividendo en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor, y tomar tantas de esas partes iguales como unidades tiene el dividendo. El conjunto de esas partes tomadas es el cociente.

Una de las partes iguales de la unidad se llama unidad fraccionaria, y un conjunto de unidades fraccionarias, número fraccionario. El cociente de la división de dos números, cuando el dividendo no es divisible por el divisor, es, por consiguiente, un número fraccionario.

Dos orígenes, pues, podemos considerar en los números fraccionarios: uno, en la medición de la cantidad continua, cuando no conteniendo exactamente a la unidad, contiene exactamente a una de sus partes iguales, y otro, en la división inexacta de los números enteros.

77. *Las unidades fraccionarias toman su nombre del número de partes iguales en que se divide la unidad.* Así, si la unidad se divide en dos partes iguales, éstas se llaman *medios;* si en tres, *tercios;* si en cuatro, *cuartos;* si en cinco, *quintos;* si en seis, *sextos;* si en siete, *séptimos;* si en ocho, *octavos;* si en nueve, *novenos*, y si en diez, *décimos*. En pasando de diez, el nombre de la unidad fraccionaria se forma del número de partes iguales en que se ha dividido la unidad entera, seguido de la terminación *avo*. Así, si dividimos la unidad en quince partes iguales, o en veinte, o en treinta, etc., la unidad fraccionaria correspondiente se llamará: *un quinceavo, un veinteavo, un treintaavo*, etc.

78. *Todo número fraccionario se expresará por medio de dos números que se llaman términos del número fraccionario. Uno de ellos, que expresa en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad, se llama* denominador, *y otro, que expresa cuántas partes iguales contiene el número fraccionario, se llama* numerador.

Se escribe el número fraccionario poniendo el numerador; debajo de él, una raya, y debajo de la raya, el denominador. Así, si hemos dividido la unidad en nueve partes iguales y de ellas tomamos cinco, el número que expresará estas cinco partes iguales de la unidad será $\frac{5}{9}$.

79. Veamos ahora cómo el cociente de toda división es igual a un número fraccionario, cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor.

Sea, por ejemplo, dividir 11 por 7. Para mayor claridad, supongamos primero que hemos de dividir 1 por 7. Haciendo de la unidad 7 partes iguales, es evidente que el cociente será $\frac{1}{7}$; si el dividendo contuviese dos unidades, haciendo de cada una 7 partes iguales, es evidente que el cociente será $\frac{2}{7}$; del mismo modo, si siendo 11 el dividendo, hacemos de cada unidad 7 partes iguales, es asimismo evidente que el cociente será $\frac{11}{7}$.

Luego una división indicada y un número fraccionario expresan la misma cosa, cuando el dividendo es igual al numerador y el divisor es igual al denominador.

Aclaremos esto un poco más con otro ejemplo. Supongamos que hemos de repartir tres manzanas entre cinco chicos. Una manzana a cada uno no se la podemos dar. ¿Qué haremos? Dividir las manzanas en partes. ¿Y cómo? Fácilmente se ve que la mejor manera de hacer el reparto será dividir cada manzana en cinco partes iguales, y dar de cada manzana una parte a cada chico. Le tocará, pues, a cada uno tres quintos de manzana. Luego

$$3 \text{ manzanas} : 5 \text{ chicos} = \frac{3}{5} \text{ de manzana.}$$

Cuando el número fraccionario tiene el numerador menor que el denominador, vale menos que la unidad, y toma el nombre de quebrado o *fracción.*

Si el numerador es igual o mayor que el denominador, el número fraccionario es igual o mayor que la unidad, y se llama quebrado impropio.

80. Llámase *número mixto* el compuesto de un entero y un quebrado, como 2 y $\frac{3}{7}$, que se escribe poniendo el quebrado a continuación del entero, sin interposición de signo alguno, de este modo $2\,\frac{3}{7}$.

El cociente completo de una división inexacta es un número mixto, porque al cociente entero le falta el cociente de dividir el resto por el divisor; pero este cociente es un quebrado que tiene por numerador el resto, y por denominador, el divisor; luego

El cociente completo de una división inexacta es un número mixto, compuesto del cociente entero y de un quebrado, cuyo numerador es el resto y cuyo denominador es el divisor.

Como todo quebrado, según hemos visto, es lo mismo que el cociente indicado del numerador por el denominador, *para hallar las unidades que tiene un quebrado impropio, se dividirá el numerador por el denominador, y se completará el cociente con el quebrado que resulte de dividir el resto por el denominador.*

De aquí proviene que *todo quebrado impropio equivale a un número mixto, cuyo entero es el cociente entero de dividir el numerador por el denominador, y cuyo quebrado tiene por numerador el resto de la división, y por denominador, el del quebrado impropio.*

EJEMPLOS.—1.° Hallar el cociente completo de dividir 47 por 8.

Efectuando la división, se tendrá:

$$\begin{array}{l} 47 : 8 = 5. \\ \;7 \end{array}$$

Siendo 5 el cociente entero, y 7 el resto de la división, el cociente completo será $5\,\frac{7}{8}$.

2.° Hallar las unidades que contiene el quebrado impropio $\frac{89}{12}$, y el número mixto equivalente.

Efectuando la división de numerador por denominador, tendremos:

$$\begin{array}{l} 89 : 12 = 7 \\ \;5 \end{array}$$

Las unidades que el quebrado impropio contiene son 7, y siendo el resto 5, el número mixto equivalente será $7\,\frac{5}{12}$, y así podrá escribirse:

$$\frac{89}{12} = 7\,\frac{5}{12}.$$

81. *Todo número entero puede ponerse en forma de quebrado, poniéndole por denominador la unidad.* Así, $8 = \frac{8}{1}$, porque 8 dividido o partido por 1, da de cociente 8.

Todo número entero puede ponerse en forma de quebrado con un denominador cualquiera, si al mismo tiempo se multiplica el entero por dicho denominador.

Convirtiendo estos enunciados en reglas, diremos que

Para poner un entero en forma de quebrado, si no se pide que tenga un denominador dado, se le pondrá por denominador la unidad.

Para convertir un entero en quebrado impropio cuyo denominador sea un número dado, se multiplicará el entero por dicho número dado, y al producto se le pondrá por denominador el mismo número dado.

EJEMPLO.—Convertir el número 12 en una serie de quebrados impropios cuyos denominadores sean los números consecutivos desde 1 hasta 5.

$$12=\frac{12}{1}$$
$$12=\frac{12\times 2}{2}=\frac{24}{2}$$
$$12=\frac{12\times 3}{3}=\frac{36}{3}$$
$$12=\frac{12\times 4}{4}=\frac{48}{4}$$
$$12=\frac{12\times 5}{5}=\frac{60}{5}.$$

Transformaciones de los quebrados.

82. Expresando el numerador de un quebrado el número de unidades fraccionarias que contiene, es claro que, aumentando el numerador, el quebrado aumenta, y disminuyéndole, disminuye.

Expresando el denominador de un quebrado el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad, cuanto mayor sea este número, menores serán las partes; y, por lo tanto, si aumenta el denominador de un quebrado, el quebrado disminuye, y si disminuye, aumenta.

A primera vista pudiera parecer, teniendo en cuenta lo que se acaba de decir, que aumentando o disminuyendo los dos términos de un quebrado en un mismo número, el quebrado no varía. Sin embargo, no es así, sino que

Si a los dos términos de un quebrado se suma un mismo *número, el quebrado aumenta, si es propio, y disminuye, si es impropio, excepto en el caso en que el numerador y denominador sean iguales.*

Si a los dos términos de un quebrado se les resta un mismo número, el quebrado disminuye, si es propio, y aumenta, si es impropio, con la misma excepción anterior.

83. *Multiplicando el numerador de un quebrado por un número entero, el quebrado queda multiplicado por dicho entero*, porque con ello se ha multiplicado el número de unidades fraccionarias que el quebrado contenía.

Multiplicando el denominador de un quebrado por un número entero, el quebrado queda dividido por el mismo entero, porque si, por ejemplo, se multiplica el denominador por 4, las partes son cuatro veces más pequeñas; si por 5, cinco veces más pequeñas, etc. En esto se funda el que

Si los dos términos de un quebrado se multiplican por un mismo número, el valor del quebrado no sufre alteración.

Así:

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times2}{8\times2}=\frac{10}{16}.$$

Si el numerador de un quebrado se divide por un divisor suyo, el quebrado quedará dividido por el mismo divisor, porque con ello se ha dividido por dicho divisor el número de unidades fraccionarias que el quebrado contenía. *Si el denominador de un quebrado se divide por un divisor suyo, el quebrado quedará multiplicado por el mismo divisor*, porque si, por ejemplo, el denominador se dividió por 4, las partes serán cuatro veces mayores; si por 5, cinco veces mayores, etc. De aquí se deduce que

Si los dos términos de un quebrado se dividen por un mismo divisor de ambos, el quebrado no sufre alteración.

Así:

$$\frac{8}{12}=\frac{8:2}{12:2}=\frac{4}{6}=\frac{4:2}{6:2}=\frac{2}{3}.$$

Si los dos términos de un quebrado se elevan a un mismo exponente, el quebrado disminuye, si es propio, y aumenta, si es impropio, excepto cuando el numerador es igual al denominador.

Si de los dos términos de un quebrado se extrae la raíz *del mismo grado, el quebrado aumenta, si es propio, y disminuye, si es impropio, con la excepción anterior.*

84. *Llámanse quebrados equivalentes los que tienen el mismo valor, aunque tengan términos distintos.*

Así, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ son quebrados equivalentes, porque cada uno de ellos vale la mitad de la unidad.

La propiedad de no alterar el valor de un quebrado multiplicando sus dos términos por un mismo número sirve para reducir quebrados a un común denominador.

85. *Reducir quebrados a un común denominador es transformarlos en otros equivalentes que tengan los denominadores iguales.*

Para reducir quebrados a un común denominador, si son dos los quebrados, se multiplican los dos términos de cada uno por el denominador del otro; y si son más de dos, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.

EJEMPLOS. - 1.° Reducir a un común denominador los quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$.

Multiplicando los dos términos del primero por 4, se tendrá $\frac{8}{20}$; multiplicando los dos términos del segundo por 5, se tendrá $\frac{15}{20}$. Los quebrados no han variado de valor y tienen el mismo denominador.

Más claro:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{8}{20}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20}.$$

2.° Reducir a un común denominador los quebrados

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \text{ y } \frac{4}{7}.$$

Multiplicaremos los dos términos del primer quebrado por el producto de los denominadores del segundo y tercero, que es 5 por 7; multiplicaremos los dos términos del segundo quebrado por el producto de los denominadores del primero y tercero, que es 2 por 7, y multiplicaremos los dos términos del tercer quebrado por el producto de los denominadores del primero y segundo, que es 2 por 5.

El valor de los quebrados no habrá alterado y tendrán el mismo denominador, como se ve a continuación.

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times5\times7}{2\times5\times7}=\frac{35}{70}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{2\times2\times7}{5\times2\times7}=\frac{28}{70}$$
$$\frac{4}{7}=\frac{4\times2\times5}{7\times2\times5}=\frac{40}{70}.$$

En la práctica, cuando se quieren reducir quebrados a un común denominador, se ponen tantas rayas, una a continuación de la otra, como quebrados haya que reducir al denominador común; se pone debajo de cada raya el producto de todos los denominadores, y encima, el producto del numerador respectivo por los denominadores de los demás.

86. *Comparación de quebrados.—Si dos quebrados tienen igual denominador, será mayor el quebrado que tenga mayor numerador*, porque tiene mayor número de partes iguales.

Si dos quebrados tienen igual numerador, será mayor el que tenga menor denominador, porque tiene las partes mayores, ya que es evidente que cuanto mayor sea el número de partes que se hacen de la unidad, menores serán estas partes, y cuanto menor sea el número de partes, éstas serán mayores.

Y si dos quebrados no tienen iguales los denominadores ni los numeradores, ¿cuál de ellos será el mayor? Para averiguarlo, *los reduciremos a un común denominador, o a un común numerador, y los resultados se encontrarán en uno de los casos anteriores.*

Ejemplo.—Averiguar cuál de los quebrados $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{11}$ es el mayor.

Reduciéndoles a un común denominador, se tendrá.

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times11}{8\times11}=\frac{55}{88}$$
$$\frac{7}{11}=\frac{7\times8}{11\times8}=\frac{56}{88}.$$

Como $\frac{56}{88}$ es mayor que $\frac{55}{88}$, también $\frac{7}{11}$ será mayor que $\frac{5}{8}$.

Simplificación de quebrados.

87. *Simplificar un quebrado es transformarle en otro equivalente que tenga sus términos menores.*

Un quebrado se llama irreducible cuando no existe otro equivalente a él que tenga los términos menores.

Para simplificar un quebrado, se dividen sus dos términos por un divisor común de los mismos. Si los términos no tienen divisor común, el quebrado es irreducible.

Para convertir un quebrado cuyos términos tienen divisores comunes en irreducible, se dividen los dos términos del quebrado por su m. c. d.

EJERCICIOS.—Simplificar los quebrados siguientes:

$$\frac{8}{12}, \frac{9}{15}, \frac{18}{24}.$$

1.° $\frac{8}{12}$. Dividiendo los dos términos por 2, se tendrá:

$$\frac{8}{12}=\frac{4}{6}.$$

2.° $\frac{9}{15}$. Dividiendo los dos términos por 3, se tendrá:

$$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

3.° $\frac{18}{24}$. Dividiendo los dos términos por 2, se tendrá:

$$\frac{18}{24}=\frac{9}{12}.$$

Transformar el primero y tercero de estos quebrados en irreducibles:

1.° $\frac{8}{12}$. Dividiendo sus dos términos por su m. c. d., que es 4, se tendrá: $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

2.° $\frac{18}{24}$. Dividiendo sus dos términos por su m. c. d., que es 6, se tendrá: $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$.

Clasificación de los quebrados.

88. *Los quebrados se clasifican en* ordinarios *y* decimales. *Llámanse quebrados ordinarios aquellos cuyo denominador es un número cualquiera distinto de la unidad seguida de ceros; y quebrados decimales son los que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.* Ejemplos de quebrados ordinarios los tenemos en casi todos los que hemos estudiado hasta aquí. Ejemplos de quebrados decimales son $\frac{7}{10}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{147}{1000}$, que, aunque pudieran leerse diciendo 7 *décimos,* 35 *cienavos,* 147 *milavos,* etc., se dice con preferencia, como diremos después, 7 *décimas,* 35 *centésimas,* 147 *milésimas,* etcétera.

Cálculo de quebrados ordinarios.

89. *Con los quebrados se hacen las mismas operaciones que con los enteros, esto es: se suman, se restan, se multiplican, se dividen, se forman potencias y se extraen de ellos raíces.*

Adición de quebrados ordinarios.

En esta operación distinguiremos tres casos:

1.° *Que todos los sumandos sean quebrados.*

2.° *Sumar un entero con un quebrado.*

3.° *Sumar números mixtos, o enteros y quebrados en general.*

90. Primer caso. *Volveremos a distinguir aquí otros dos casos:* Primero, *que los quebrados tengan igual denominador,* y segundo, *que tengan los denominadores diferentes.*

Si tienen el mismo denominador, como, dado el denominador, el numerador es el que expresa la verdadera cantidad del quebrado, *se suman los numeradores, y a la suma se le pondrá por denominador el denominador común.*

Si los quebrados no tienen los denominadores iguales, se reducirán a un común denominador, y quedará el caso reducido al anterior.

EJEMPLOS.—1.º Sumar los quebrados.

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{5}{8} \quad y \quad \frac{7}{8}.$$

Como tienen igual denominador, bastará sumar los numeradores y poner a la suma por denominador el denominador común; en esta forma:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{3+5+7}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}.$$

Es muy fácil comprender en este caso, lo mismo que en los demás, por qué se suman los numeradores. Así como 3 unidades + 5 unidades + 7 unidades suman 15 unidades, 3 decenas + 5 decenas + 7 decenas suman 15 decenas, 3 centenas + 5 centenas + 7 centenas suman 15 centenas, etc., del mismo modo 3 octavos + 5 octavos + 7 octavos suman 15 octavos, o lo que es lo mismo:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}.$$

2.º Sumar los quebrados:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{7} \quad y \quad \frac{2}{9}.$$

Como tienen distinto denominador, se les reducirá a un común denominador, y luego se sumarán los numeradores y se pondrá a la suma por denominador el denominador común; en esta forma:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{9}=\frac{189}{252}+\frac{180}{252}+\frac{56}{252}$$

$$=\frac{189+180+56}{252}=\frac{425}{252}=1\frac{173}{252}.$$

Si el resultado de sumar los quebrados es un quebrado impropio, puede transformarse en número mixto, como se ha hecho en estos últimos ejemplos.

91. Segundo caso. *Para sumar un entero con un quebrado, si no se tiene otro fin que obtener la suma, se formará con el entero y el quebrado un número mixto; pero si para* *otro fin que la suma se quiere formar un solo quebrado con el entero y el quebrado dado, se multiplicará el entero por el denominador del quebrado, al producto se sumará el numerador y a la suma se le pondrá por denominador el mismo del quebrado.*

Ejemplo.—Sumar 5 con $\frac{4}{9}$. Si sólo se busca la suma, se escribirá $5\frac{4}{9}$.

Si para otros fines se quiere formar un solo quebrado con los dos sumandos, se pondrá:

$$5\frac{4}{9}=\frac{5\times 9+4}{9}=\frac{49}{9}.$$

A esto se llama reducir un mixto a quebrado.

Esto se comprende fácilmente: una unidad tiene $\frac{9}{9}$; luego 5 unidades tienen $\frac{45}{9}$; por lo tanto, 5 unidades y $\frac{4}{9}$ es lo mismo que $\frac{45}{9}$ y $\frac{4}{9}$, o sea $\frac{49}{9}$.

92. Tercer caso. *Para sumar números mixtos, o enteros y quebrados en general, se suman separadamente los enteros y los quebrados y se reunen ambas sumas. Si de la suma de los quebrados resulta un quebrado impropio, se hallarán las unidades que contiene, y se agregarán a la suma de los enteros.*

Ejemplos.—1.° Sumar los números mixtos

$$5\frac{3}{4},\qquad 1\frac{2}{3},\qquad 4\frac{1}{5}.$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador, y sumando, desde luego, los enteros, la operación se dispondrá de este modo:

$$5\frac{3}{4}+1\frac{2}{3}+4\frac{1}{5}=10+\frac{45}{60}+\frac{40}{60}+\frac{12}{60}=10+\frac{97}{60}=11\frac{37}{60}.$$

El quebrado impropio $\frac{97}{60}=1\frac{37}{60}$ contiene una unidad entera, que hemos agregado a la suma de los enteros.

2.º Sumar los números

$$3\frac{1}{5}, \quad 8, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad 9\frac{1}{2}, \quad \frac{4}{7}.$$

Sumando primero los enteros y reduciendo los quebrados a un común denominador, escribiremos:

$$3\frac{1}{5}+8+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+9\frac{1}{2}+\frac{4}{7}$$
$$=20+\frac{336}{1680}+\frac{1260}{1680}+\frac{1400}{1680}+\frac{840}{1680}+\frac{960}{1680}$$
$$=20+\frac{4796}{1680}=22\frac{1436}{1680}.$$

El quebrado impropio $\frac{4796}{1680}$ contiene dos unidades enteras, que se han añadido a la suma de los enteros.

Sustracción de quebrados.

93. *En esta operación distinguiremos tres casos principales:* 1.º *Restar un quebrado de otro.* 2.º *Restar un quebrado de un entero.* 3.º *Restar números mixtos.*

Primer caso: *Si los quebrados tienen igual denominador, se restará del numerador del minuendo el numerador del sustraendo, y a la diferencia se le pondrá por denominador el denominador común.*

Si los quebrados no tienen igual denominador, se reducirán a un denominador común, y luego se restarán, como antes, los numeradores, y a la diferencia se le pondrá por denominador el denominador común.

EJEMPLOS.—1.º Restar de $\frac{7}{9}$ $\frac{5}{9}$.

La operación se dispondrá de este modo:

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{2}{9}. \qquad \text{Prueba: } \frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}.$$

2.º Restar de $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{7}$.

La operación se dispondrá de este modo:

$$\frac{5}{8}-\frac{3}{7}=\frac{35}{56}-\frac{24}{56}=\frac{11}{56}$$

94. Segundo caso: *Restar un quebrado de un entero.*—Supondremos primero que el minuendo sea la unidad.

Recordando que

$$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}, \text{ etc.},$$

escribiremos el minuendo 1 en forma de quebrado, cuyos términos sean el denominador del sustraendo, y luego se restarán los numeradores, y a la diferencia se le pondrá por denominador el denominador común. Así:

$$1-\frac{3}{8}=\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$
$$1-\frac{5}{7}=\frac{7}{7}-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}.$$

Si nos fijamos un poco, veremos que esto equivale a restar el numerador del denominador, y poner a la diferencia por denominador el del quebrado; de donde se deduce la siguiente regla:

Para restar un quebrado de la unidad, se resta el numeraaor del denominador, y la diferencia se le pone por denominador el del quebrado.

95. *A la diferencia entre la unidad y un quebrado se la llama complemento del quebrado.* Podemos, pues, decir:

Para hallar el complemento de un quebrado, se resta el numerador del denominador, y a la diferencia se le pone por denominador el del quebrado. Así, el complemento de $\frac{5}{7}$ es $\frac{2}{7}$; el de $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$; el de $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$, etc.

Cuando el minuendo no es la unidad, diremos que *para restar un quebrado de un entero, se rebaja el entero una unidad, y de ésta se resta el quebrado, y la diferencia se agrega al entero, disminuído en la unidad que se le quitó.* De otra manera:

Para restar un quebrado de un entero, se rebaja el entero una unidad y se le añade el complemento del quebrado.

EJEMPLO:

$$7 - \frac{5}{9} = 6\frac{9}{9} - \frac{5}{9} = 6\frac{4}{9}.$$

96. Tercer caso. *Para restar números mixtos, se restan separadamente del entero del minuendo el entero del sustraendo, y del quebrado, el quebrado, previamente reducidos los quebrados a un común denominador, si no le tenían.*

EJEMPLO.—Restar del número mixto $7\frac{3}{4}$ el número mixto $4\frac{2}{5}$.

La operación se dispondrá de este modo:

$$7\frac{3}{4} - 4\frac{2}{5} = 7\frac{15}{20} - 4\frac{8}{20} = 3\frac{7}{20}.$$

Si el quebrado del sustraendo fuese mayor que el del minuendo, se agregará a éste una unidad tomada del entero, convertida en quebrado de igual denominador que el de los quebrados, y luego se efectuará la sustracción como antes.

EJEMPLO:

$$5\frac{2}{3} - 1\frac{6}{7} = 5\frac{14}{21} - 1\frac{18}{21} = 4\frac{35}{21} - 1\frac{18}{21} = 3\frac{17}{21}.$$

Al entero 5 del minuendo se le ha quitado una unidad, que se la ha convertido en $\frac{21}{21}$, que agregado al quebrado $\frac{14}{21}$ ha dado $\frac{35}{21}$.

OBSERVACIÓN.—El procedimiento de reducir los mixtos a quebrados, así para sumarlos como para restarlos, debe desecharse, no por erróneo, sino por estar poco en armonía con el modo ordinario y natural de realizar estas operaciones en la práctica. Lo haremos palpable con un ejemplo. Supongamos que de un cajón de naranjas que contiene 50 naranjas y $\frac{2}{5}$ de naranja hemos de quitar 20 naranjas y $\frac{4}{5}$ de naranja. El procedimiento de reducir los mixtos a quebrados equivaldría a dividir cada una de las naranjas en 5 partes iguales y calcular cuántas quintas partes tiene el minuendo y cuántas el sustraendo, y luego restar de las partes del minuendo las partes del sustraendo. ¿No es lo natural en este caso, lo mismo que en otros parecidos, quitar del cajón 20 naranjas enteras, y luego dividir una naranja de las restantes en 5 partes iguales y tomar de ellas los $\frac{4}{5}$? Análogas consideraciones se harían si, en vez de restarse, se sumaran las naranjas.

97. CASOS PARTICULARES.—*Restar de un mixto un entero.* Para restar de un mixto un entero, se resta del entero del minuendo el entero del sustraendo, y a la derecha de la diferencia se escribe el quebrado.

EJEMPLO:

$$8\frac{3}{4} - 5 = 3\frac{3}{4}.$$

Restar de un mixto un quebrado.—Se resta el quebrado sustraendo del quebrado del minuendo, y la diferencia se agregará al entero. Si el quebrado del sustraendo fuese mayor que el quebrado del minuendo, habría que añadir a éste una unidad tomada del entero, convertida en quebrado, como se ha dicho al restar números mixtos.

EJEMPLOS:

1.º $$5\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = 5\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 5\frac{1}{12}.$$

2.º $$2\frac{3}{5} - \frac{3}{4} = 2\frac{12}{20} - \frac{15}{20} = 1\frac{32}{20} - \frac{15}{20} = 1\frac{17}{20}.$$

Restar de un entero un número mixto.—Se toma del minuendo una unidad, que se pone en forma de quebrado del mismo denominador que el del sustraendo, y queda reducido a restar dos números mixtos.

EJEMPLO:

$$7 - 5\frac{2}{3} = 6\frac{3}{3} - 5\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Restar de un quebrado impropio un entero.— Se reduce el quebrado impropio a número mixto, y queda reducido este caso a uno de los anteriores.

EJEMPLO:

$$\frac{11}{3} - 2 = 3\frac{2}{3} - 2 = 1\frac{2}{3}.$$

Restar de un quebrado impropio un quebrado propio.—Se reduce también el quebrado impropio a número mixto, y queda este caso reducido a uno de los anteriores.

EJEMPLO:

$$\frac{15}{4} - \frac{5}{7} = 3\,\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = 3\,\frac{21}{28} - \frac{20}{28} = 3\,\frac{1}{28}.$$

Podrían haberse restado directamente los dos quebrados y convertir el resultado en número mixto. Véase:

$$\frac{15}{4} - \frac{5}{7} = \frac{105}{28} - \frac{20}{28} = \frac{85}{28} = 3\,\frac{1}{28}.$$

Restar de un quebrado impropio otro quebrado impropio.—Pueden reducirse los quebrados impropios a números mixtos o efectuar la operación directamente, convirtiendo en número mixto el resultado, si es un quebrado impropio.

EJEMPLO:

$$\frac{23}{5} - \frac{11}{4}.$$

Reduciendo a números mixtos los quebrados impropios, será:

$$4\,\frac{3}{5} - 2\,\frac{3}{4} = 4\,\frac{12}{20} - 2\,\frac{15}{20} = 3\,\frac{32}{20} - 2\,\frac{15}{20} = 1\,\frac{17}{20}.$$

Directamente:

$$\frac{23}{5} - \frac{11}{4} = \frac{92}{20} - \frac{55}{20} = \frac{37}{20} = 1\,\frac{17}{20}.$$

Multiplicación de quebrados.

98. En esta operación distinguiremos tres casos principales, que son: 1.º *Multiplicar un quebrado por otro quebrado.* 2.º *Multiplicar un quebrado por un entero;* y 3.º *Multiplicar un número mixto por otro número mixto.*

Primer caso: *Para multiplicar un quebrado por otro quebrado, se multiplican el numerador del uno por el numerador del otro, y el denominador por el denominador; y el primer producto será el numerador, y el segundo, el denominador del producto buscado.*

EJEMPLO.—Sea multiplicar $\frac{5}{9}$ por $\frac{4}{7}$.

La operación se dispondrá de este modo:

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 4}{9 \times 7} = \frac{20}{63}.$$

Este procedimiento proviene de la definición general de la multiplicación, que nos dice, en este caso, que el producto ha de ser, respecto al $\frac{5}{9}$, lo que el $\frac{4}{7}$ respecto a la unidad. Pero el $\frac{4}{7}$ es la séptima parte de la unidad tomada cuatro veces; luego el producto será la séptima parte de $\frac{5}{9}$, tomada también cuatro veces. La séptima parte del multiplicando se obtiene multiplicando el denominador por 7, y cuatro veces esta séptima parte se halla multiplicando el numerador por 4. Luego es verdadero el resultado antes obtenido.

99. Segundo caso: *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador del quebrado por el entero, y al producto se le pone por denominador el del quebrado.*

Esta regla sale del caso anterior poniendo al entero, por denominador, la unidad, o también tomando el quebrado tantas veces por sumando como unidades tiene el entero.

Veámoslo: Sea multiplicar $\frac{7}{8}$ por 5.

Se dispondrá la operación de este modo:

$$\frac{7}{8} \times 5 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{1} = \frac{7 \times 5}{8 \times 1} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8},$$

o de este otro:

$$\frac{7}{8} \times 5 = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} = \frac{7+7+7+7+7}{8}$$
$$= \frac{7 \times 5}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}.$$

OBSERVACIÓN.—*Si el denominador del quebrado fuese divisible por el entero,* en lugar de multiplicar el numerador por el entero, *podrá dividirse el denominador por dicho en-*

tero, pues ya dijimos que dividiendo el denominador por un número, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.

Ejemplo.—Sea multiplicar $\frac{7}{12}$ por 4.

Como el denominador 12 es divisible por 4, podremos dividirle por él, con lo que el quebrado quedará multiplicado por 4. Así:

$$\frac{7}{12} \times 4 = \frac{7}{12:4} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Multiplicando el numerador, se tendría:

$$\frac{7}{12} \times 4 = \frac{7 \times 4}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3},$$

resultado de simplificar el quebrado $\frac{28}{12}$, dividiendo sus dos términos por 4, que es su m. c. d.

Multiplicar un entero por un quebrado es lo mismo que multiplicar un quebrado por un entero, pues poniéndole al entero por denominador la unidad, se verá que habrá que multiplicar el entero por el numerador del quebrado y poner a este producto, por denominador, el del quebrado.

Así,

$$8 \times \frac{7}{9} = \frac{8}{1} \times \frac{7}{9} = \frac{8 \times 7}{1 \times 9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9},$$

que es lo mismo que si hubiéramos multiplicado $\frac{7}{9} \times 8$; luego

$$8 \times \frac{7}{9} = \frac{7}{9} \times 8.$$

Luego el producto de un entero por un quebrado es independiente del orden de los factores. Lo mismo ocurre en el producto de dos quebrados.

100. Tercer caso: *Para multiplicar un número mixto por otro número mixto, se reducen ambos mixtos a quebrados impropios, y se multiplican como dos quebrados.*

Ejemplo.—Multiplicar $5\frac{3}{4}$ por $7\frac{1}{3}$.

Reduciéndolos a quebrados, se tendrá:

$$5\frac{3}{4}\times 7\frac{1}{3}=\frac{23}{4}\times\frac{22}{3}=\frac{23\times 22}{12}=\frac{506}{12}=42\frac{2}{12}=42\frac{1}{6}.$$

Podrían haberse multiplicado los mixtos, sin reducirlos a quebrados, multiplicando el entero y quebrado del multiplicando por el entero del multiplicador, y luego, el entero y quebrado del multiplicando por el quebrado del multiplicador, y sumar después los cuatro productos.

Hagámoslo con el ejemplo anterior:

$$5\frac{3}{4}\times 7\frac{1}{3}=5\times 7+\frac{3}{4}\times 7+5\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$$
$$=35+\frac{21}{4}+\frac{5}{3}+\frac{3}{12}=35+\frac{756}{144}+\frac{240}{144}+\frac{36}{144}=35\frac{1032}{144}$$
$$=42\frac{24}{144}=42\frac{1}{6}.$$

Del quebrado impropio $\frac{1032}{144}$ se han sacado las 7 unidades que contiene, y el quebrado $\frac{24}{144}$ se ha convertido en irreducible, dividiendo ambos términos por 24, que es su máximo común divisor.

Como se ve, es mucho más cómodo, y, por lo tanto, preferible, el procedimiento de reducir los mixtos a quebrados.

101. Casos particulares: *Multiplicar un número mixto por un entero.*—Se reducirá el mixto a quebrado, y quedará reducido el caso a multiplicar un quebrado por un entero; o también puede multiplicarse separadamente el entero y el quebrado del multiplicando por el entero del multiplicador, y sumar los dos productos.

Ejemplo:

$$5\frac{3}{7}\times 4=\frac{38}{7}\times 4=\frac{152}{7}=21\frac{5}{7}.$$
$$5\frac{3}{7}\times 4=5\times 4+\frac{3}{7}\times 4=20+\frac{12}{7}=21\frac{5}{7}.$$

Multiplicar un mixto por un quebrado.—Se reducirá el mixto a quebrado, y quedará reducido el caso a multiplicar un quebrado por otro quebrado; o también podrán multiplicarse separadamente el entero y el quebrado del multiplicando por el quebrado del multiplicador, y sumar los dos productos.

EJEMPLO:

$$5\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{38}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{152}{63}=2\,\frac{26}{63}.$$

$$5\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}=5\times\frac{4}{9}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}\times\frac{20}{9}+\frac{12}{63}=\frac{1260}{567}+\frac{108}{567}$$

$$=\frac{1368}{567}=2\,\frac{234}{567}=2\,\frac{26}{63}.$$

Si los factores, en vez de ser dos, fuesen tres o más, si son todos fraccionarios, se multiplicarán separadamente los numeradores y los denominadores, y el producto de los numeradores será el numerador, y el de los denominadores, el denominador del producto buscado, y si entre los factores los hubiera enteros, se multiplicarán los numeradores y los enteros, y luego los denominadores; el primer producto será el numerador, y el segundo, el denominador del producto buscado.

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3\times5\times1}{4\times7\times2}=\frac{15}{56}$$

$$\frac{5}{7}\times3\times\frac{2}{3}\times4\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{5\times3\times2\times4\times2}{7\times3\times5}=\frac{240}{105}=2\,\frac{30}{105}=2\,\frac{2}{7}.$$

102. *Un quebrado se llama inverso o recíproco de otro cuando el numerador y denominador del uno son, respectivamente, el denominador y el numerador del otro.* Así, por ejemplo, son inversos o recíprocos los quebrados $\frac{5}{7}$ y $\frac{7}{5}$.

El producto de dos quebrados inversos es la unidad.

EJEMPLOS:

$$\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{5\times7}{7\times5}=\frac{35}{35}=1.$$

$$\frac{8}{11}\times\frac{11}{8}=\frac{8\times11}{11\times8}=\frac{88}{88}=1.$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{1}=\frac{1\times3}{3\times1}=\frac{3}{3}=1.$$

103. *Quebrados de enteros y quebrados de quebrados.*— Los quebrados considerados hasta aquí son quebrados de unidad, pues proceden de dividir la unidad en dos o más partes iguales y tomar de ellas una o más.

Pueden dividirse también un entero o un quebrado en partes iguales, y el número formado por una o más de estas partes iguales se llama quebrado de entero o quebrado de quebrado. Por lo tanto,

Quebrado de entero es el número que expresa una o más partes iguales de un entero.

Quebrado de quebrado es el número que expresa una o más partes iguales de un quebrado.

EJEMPLOS PARA ACLARAR ESTAS IDEAS.—Un naranjero ha vendido las tres cuartas partes de las naranjas que sacó a la venta. Las naranjas que vendió forman un quebrado de entero.

Suponiendo que sacó a la venta 80 naranjas, vendió

$$\frac{3}{4} \text{ de } 80 = \frac{1}{4} \text{ de } 80 \times 3 = 20 \times 3 = 60.$$

Por aquí se ve que un quebrado de entero puede ser un número entero.

Para hallar el valor de un quebrado de entero, se multiplica el quebrado por el entero.

EJEMPLOS.—Hallar las cinco séptimas partes de una pieza de tela de 50 m. de longitud.

Será:

$$\frac{5}{7} \text{ de } 50 = \frac{5 \times 50}{7} = \frac{250}{7} = 35\,\frac{5}{7}.$$

Una persona que ha comprado las cuatro quintas partes de una pieza de tela vende a otra las dos terceras partes de la tela que compró. Esta última cantidad de tela vendida es un *quebrado de quebrado*, que se escribirá: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de la pieza. *Su valor se obtendrá multiplicando los dos quebrados*. Así: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de la pieza $= \frac{8}{15}$ de la pieza. Si el último comprador vende a otra persona la mitad de la tela que ha comprado, esta mitad será un quebrado de quebrado de quebrado, y será $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{1}{2}$ de $\frac{8}{15} = \frac{8}{30}$; de manera que se obtiene el resultado multiplicando los tres quebrados. Del mismo modo puede extenderse a cualquier número de quebrados.

Así,

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{2}{9} \text{ de } \frac{7}{11} \text{ de } \frac{8}{13}, \text{ etc...}$$

$$= \frac{1\times4\times2\times7\times8}{3\times5\times9\times11\times13} \text{ de...}$$

División de quebrados.

104. En esta operación distinguiremos cuatro casos principales: 1.° *Dividir un quebrado por otro.* 2.° *Dividir un quebrado por un entero.* 3.° *Dividir un entero por un quebrado.* 4.° *Dividir un número mixto por otro número mixto.*

Primer caso: *Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el dividendo por el divisor invertido:* es lo que se llama vulgarmente *multiplicar en cruz.*

Así,

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{7} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{4} = \frac{5\times7}{8\times4} = \frac{35}{32};$$

porque

$$\frac{5\times7}{8\times4} \times \frac{4}{7} = \frac{5\times7\times4}{8\times4\times7} = \frac{5}{8};$$

es decir, el quebrado $\frac{5\times7}{8\times4}$, multiplicado por el divisor $\frac{4}{7}$, ha dado el dividendo; luego el quebrado $\frac{5\times7}{8\times4}$, o su igual, $\frac{35}{32}$, es el cociente.

Suprimir un factor en un producto es dividir el producto por dicho factor.

En el quebrado $\frac{5\times7\times4}{8\times4\times7}$ hemos suprimido los factores 7 y 4 del numerador y denominador; luego el valor del quebrado, al transformarse en $\frac{5}{8}$, no ha variado.

OBSERVACIÓN PRIMERA.—*Si el numerador y denominador del quebrado dividendo fuesen divisibles, respectivamente, por el numerador y denominador del quebrado divisor, podría efectuarse la división de los quebrados dividiendo, respectivamente, los términos del dividendo por los del divisor.*

Así,

$$\frac{12}{20}:\frac{3}{4}=\frac{12:3}{20:4}=\frac{4}{5};$$

porque

$$\frac{12:3}{20:4}\times\frac{3}{4}=\frac{(12:3)\times 3}{(20:4)\times 4}=\frac{12}{20},$$

o bien:

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{12}{20}.$$

OBSERVACIÓN SEGUNDA.—*Si los denominadores de dividendo y divisor fuesen iguales*, para hallar el cociente, *bastará dividir el numerador del dividendo por el numerador del divisor.*

Así,

$$\frac{5}{11}:\frac{9}{11}=5:9=\frac{5}{9};$$

porque

$$\frac{5}{11}:\frac{9}{11}=\frac{5\times 11}{11\times 9}=\frac{5}{9}.$$

OBSERVACIÓN TERCERA.—*Si los numeradores de dividendo y divisor fuesen iguales*, para hallar el cociente, *bastará dividir el denominador del divisor por el denominador del dividendo.*

Así,

$$\frac{5}{9}:\frac{5}{7}=7:9=\frac{7}{9};$$

porque

$$\frac{5}{9}:\frac{5}{7}=\frac{5\times 7}{9\times 5}=\frac{7}{9}.$$

105. Segundo caso: *Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por el entero, y se deja el mismo numerador.*

Así,

$$\frac{5}{8}:3=\frac{5}{8\times 3}=\frac{5}{24},$$

pues ya se dijo que si el denominador de un quebrado se multiplica por un número, el quebrado queda dividido por el mismo número.

Observación.—*Si el numerador fuera divisible por el entero, se podría efectuar la división de un quebrado por un entero dividiendo el numerador por el entero, y poniendo al cociente por el denominador el del quebrado.*

Así,

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9};$$

el otro procedimiento dará:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \times 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

106. Tercer caso: *Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el quebrado invertido;* o, lo que es lo mismo, *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el numerador.*

Así,

$$8 : \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{8 \times 7}{5} = \frac{56}{5} = 11\,\frac{1}{5}.$$

Observación.—*Si el entero fuese divisible por el numerador, podría hallarse el cociente dividiendo el entero por el numerador, y multiplicando el resultado por el denominador.*

Así,

$$8 : \frac{2}{5} = (8 : 2) \times 5 = 4 \times 5 = 20$$

sería lo mismo que

$$8 : \frac{2}{5} = \frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$

Consecuencia.—El cociente de dividir la unidad por un quebrado es el quebrado invertido, pues

$$1 : \frac{5}{7} = \frac{1 \times 7}{5} = \frac{7}{5}.$$

107. Cuarto caso: *Para dividir un número mixto por otro número mixto, se reducen ambos mixtos a quebrados, y luego se dividen éstos.*

EJEMPLO:

$$5\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3} = \frac{23}{4} : \frac{7}{3} = \frac{23\times3}{4\times7} = \frac{69}{28} = 2\frac{13}{28}.$$

108. CASOS PARTICULARES: *Dividir un número mixto por un entero.*—Para dividir un número mixto por un entero, se reduce el número mixto a quebrado, y queda reducido el caso a dividir un quebrado por un entero.

EJEMPLO:

$$7\frac{2}{9} : 3 = \frac{65}{9} : 3 = \frac{65}{27} = 2\frac{11}{27}.$$

Dividir un mixto por un quebrado.—Para dividir un mixto por un quebrado, se reduce el mixto a quebrado, y queda el caso reducido a dividir un quebrado por otro.

EJEMPLO:

$$3\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{17}{5} : \frac{4}{7} = \frac{17\times7}{5\times4} = \frac{119}{20} = 5\frac{19}{20}.$$

Dividir un entero por un número mixto.—Para dividir un entero por un número mixto, se reduce el mixto a quebrado, y queda el caso reducido a dividir un entero por un quebrado.

EJEMPLO:

$$7 : 3\frac{2}{9} = 7 : \frac{29}{9} = \frac{63}{29} = 2\frac{5}{29}.$$

Dividir un quebrado por un mixto.—Para dividir un quebrado por un mixto, se reduce el mixto a quebrado, y queda el caso reducido a dividir dos quebrados.

EJEMPLO:

$$\frac{8}{9} : 1\frac{3}{4} = \frac{8}{9} : \frac{7}{4} = \frac{8\times4}{9\times7} = \frac{32}{63}.$$

Formación de potencias de los quebrados.

109. Distinguiremos en esta operación dos casos: 1.º *Formación de la potencia de un quebrado.* 2.º *Formación de la potencia de un número mixto.*

Primer caso: *Para formar la potencia de un cierto grado* *de un quebrado, se forma la potencia de aquel grado del numerador y la del mismo grado del denominador;* la potencia del numerador será el numerador, y *la potencia del denominador será el denominador de la potencia buscada.*

Así,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{7^2}{9^2}=\frac{49}{81}, \text{ porque } \left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{7^2}{9^2}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3^4}{5^4}=\frac{81}{625},$$

porque

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}=\frac{3^4}{5^4}.$$

Segundo caso: *Para formar la potencia de un número mixto, se reducirá el mixto a quebrado y se formará la potencia del quebrado.*

Así:

$$\left(3\,\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{17}{5}\right)^2=\frac{17^2}{5^2}=\frac{289}{25}=11\,\frac{14}{25}$$

$$\left(1\,\frac{3}{4}\right)^3=\left(\frac{7}{4}\right)^3=\frac{7^3}{4^3}=\frac{343}{64}=5\,\frac{23}{64}.$$

Extracción de raíces de los quebrados.

110. En esta operación distinguimos dos casos: 1.º *Extraer la raíz de un quebrado.* 2.º *Extraer la raíz de un número mixto.*

Primer caso: *Para extraer la raíz de un grado cualquiera de un quebrado, se extrae la raíz de aquel grado del numerador y la raíz del mismo grado del denominador;* la primera será el numerador, y la segunda, el denominador de la raíz buscada.

Así:

$$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4}.$$

No hablamos del caso en que el quebrado no tiene raíz exacta, porque esto se sale de los límites que hemos señalado a estas NOCIONES.

Segundo caso: *Para extraer la raíz de un número mixto, se reduce el mixto a quebrado, y se extrae la raíz de éste.*

Así,

$$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

111. OBSERVACIÓN ACERCA DE LAS OPERACIONES CON NÚMEROS MIXTOS.—En la adición y sustracción hemos visto que, aunque no era ningun error convertir los mixtos en quebrados, era más conveniente y natural operar sin hacer aquella conversión; en la multiplicación vimos que era más conveniente reducir los mixtos a quebrados; en la división, esta conversión es necesaria, por lo menos en el divisor; en la elevación a potencias, muy conveniente, y en la extracción de raíces, necesaria también.

Quebrados decimales.

112. Hemos clasificado antes los quebrados en ordinarios y decimales, diciendo que *los ordinarios son los que tienen un denominador cualquiera distinto de la unidad seguida de ceros, y que los decimales son los que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.*

Si los quebrados decimales se escribiesen siempre en la forma de quebrados ordinarios, es decir, con los dos términos numerador y denominador, las operaciones del cálculo se efectuarían, en esta clase de quebrados, exactamente lo mismo que con los quebrados ordinarios, y nada tendríamos que añadir a lo que acabamos de decir acerca de las operaciones con estos últimos; pero los quebrados decimales son susceptibles de ponerse en otra forma, en forma entera, en virtud de las leyes a que obedece su formación, y en esta forma, las operaciones resultan mucho más sencillas, como que se reducen, en todos los casos, a operar con los quebrados decimales exactamente lo mismo que con los números enteros, sin más cuidado que el de preparar convenientemente los datos y fijarse en el orden de las unidades de los resultados. Veamos cómo la numeración de los quebrados decimales obedece a las mismas leyes que la numeración de los números enteros, pudiéndose decir que el conjunto de números enteros y decimales constituye la totalidad de los números del sistema decimal de numeración.

Las unidades fraccionarias que forman los quebrados decimales son las que resultan de dividir la unidad entera en 10, en 100, en 1000, en 10000, en 100000, en 1000000, etc., de partes iguales, llamándose *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, etc., respectivamente, y todas ellas, en general, *unidades decimales*.

113. Dividida la unidad en 10 partes iguales llamadas *décimas*, si dividimos cada una de estas décimas en 10 partes iguales, las 10 décimas que valen la unidad quedan divididas en 100 partes iguales o *centésimas*; luego cada *décima* tiene *10 centésimas*. Si dividimos cada centésima en 10 partes iguales, las 100 centésimas que valen la unidad quedan divididas en 1000 partes iguales o *milésimas*; luego cada *centésima* tiene *10 milésimas*, y así sucesivamente; luego llamando unidades de primer orden decimal a las décimas, de segundo orden a las centésimas, de tercer orden a las milésimas, etc., vemos que se cumple en los quebrados decimales la ley fundamental de los números enteros en el sistema de numeración decimal, que dice que diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior, o que una unidad de un orden cualquiera vale diez unidades del orden inmediato inferior. Extendiendo ahora a los quebrados decimales el principio convencional de la numeración escrita, que dice que toda cifra colocada inmediatamente a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior, y colocada inmediatamente a la derecha, unidades del orden inmediato inferior, resulta que la cifra que expresa cuántas décimas tiene el quebrado decimal, puesta inmediatamente a la derecha de las unidades, expresará las *décimas* sin necesidad del denominador 10; la cifra que expresa cuántas centésimas tiene el quebrado decimal, puesta inmediatamente a la derecha de las décimas, expresará las *centésimas* sin necesidad del denominador 100; del mismo modo, la cifra colocada inmediatamente a la derecha de las centésimas expresará las *milésimas* sin necesidad del denominador 1000, y así sucesivamente. De manera que las cifras desempeñan el papel de numeradores, y los lugares que ocupan, el papel de denominadores, o en otros términos: las cifras expresan cuántas unidades hay de cada orden, y los lugares expresan los órdenes respectivos, exactamente como en los números enteros.

En los números enteros, la primera cifra de la derecha expresa las unidades de primer orden sin necesidad de señal alguna que lo indique; en los quebrados decimales, como se escriben a la derecha de los enteros, es preciso que haya una señal que indique dónde terminan éstos y dónde empiezan aquéllos. Esta señal es una *coma* colocada entre las uidades y las décimas; a partir de la *coma*, se cuentan hacia la izquierda las cifras enteras, y hacia la derecha, las cifras decimales.

114. Analogía entre los valores de las cifras colocadas a un lado y otro y a igual distancia de las unidades de primer orden:

La primera cifra a la izquierda de las unidades expresa..	decenas.	La primera cifra a la derecha de las unidades expresa	décimas.
La segunda cifra	centenas.	La segunda cifra	centésimas.
La tercera cifra	millares.	La tercera cifra	milésimas.
La cuarta cifra......	decenas de millar.	La cuarta cifra.	diezmilésimas.
La quinta cifra......	centenas de millar.	La quinta cifra......	cienmilésimas.
La sexta cifra.......	millones.	La sexta cifra......	millonésimas.
Etcétera			

Así, en el número 64571,8923,

el 7 expresa decenas;	el 8 expresa décimas;
el 5 — centenas;	el 9 — centésimas;
el 4 — millares;	el 2 — milésimas;
el 6 — decenas de millar;	el 3 — diezmilésimas;

115. *Enunciación de un número decimal.*—Para enunciar un número decimal, *se enuncia primero la parte entera, si la tiene, e inmediatamente la parte decimal, expresándola como si fuese entera y dándole la denominación de las unidades del último orden.* Así, si en un número decimal las unidades del último orden son las milésimas, se enunciará el decimal como si fuese entero, haciendo que exprese *milésimas.* Ejemplo: si un decimal se compone de dos décimas, siete centésimas y ocho milésimas, se enunciará diciendo: doscientas setenta y ocho *milésimas.*

116. *Escritura de un número decimal.*—Para escribir un número decimal, *se escribirá primero la parte entera, si la tiene, y si no, un cero; inmediatamente una coma, y a continuación la parte decimal, haciendo que cada cifra ocupe el lugar correspondiente a su orden.* Para conocer el lugar que

corresponde a una cifra decimal dada o a la última cifra de un decimal dado, proponemos la siguiente regla:

Cuéntese el número de ceros que acompañan a la unidad del denominador correspondiente a la cifra dada o al decimal dado, y el número de ceros expresa el orden, y, por lo tanto, el lugar pedido. Ejemplo: orden y lugar que corresponden a 7 milésimas, a 85 millonésimas, a 379 billonésimas.

1.° A 7 milésimas le corresponde el denominador 1000, unidad seguida de *tres* ceros; luego 7 milésimas son unidades decimales de tercer orden, y ocupará el tercer lugar, y será: 0,007.

2.° A 85 millonésimas corresponde el denominador 1000000, unidad seguida de *seis* ceros; luego la última cifra de 85 millonésimas es de sexto orden y ocupará el sexto lugar. Será, pues, 0,000085.

3.° A 379 billonésimas corresponde el denominador 1000000000000, unidad seguida de *doce* ceros; luego la última cifra, o sea el 9, será de duodécimo orden, y ocupará el duodécimo lugar. Será, por tanto, 0,000000000379.

EJERCICIOS.—Escribir en forma entera los quebrados siguientes:

$$\frac{79}{1000},\ \frac{835}{100000},\ \frac{1947}{100000000},\ \frac{357968}{10000000000000}.$$

$$\frac{79}{1000} = 0{,}079$$

$$\frac{835}{100000} = 0{,}00835$$

$$\frac{1947}{100000000} = 0{,}00001947$$

$$\frac{357968}{10000000000000} = 0{,}0000000357968$$

Véase cómo en todos estos decimales la última cifra ocupa el lugar expresado por el número de ceros que acompañan a la unidad del denominador respectivo.

117. *Lectura de un número decimal escrito.—Se lee la parte entera, si la tiene, e inmediatamente la parte decimal como entera, dándole la denominación de la última cifra o de la cifra de orden inferior.*

Así, sea leer los números 45,0735; 0,070083.

El primero se lee: cuarenta y cinco enteros, setecientas treinta y cinco diezmilésimas, porque la cifra última decimal 5 es del orden de las diezmilésimas.

El segundo se lee: cero enteros, setenta mil ochenta y tres millonésimas, por ser la última cifra 3 de sexto orden o millonésimas.

Propiedades de los números decimales.

118. *Si a la derecha de un número decimal se escribe uno o más ceros, el número decimal no sufre alteración*, porque el valor del decimal es la suma de los valores relativos de todas sus cifras, y como estos valores no han cambiado con los ceros, tampoco ha cambiado el valor del número decimal.

Así, se transforma el decimal 57,83 en el decimal 57,8300; el primero equivale a 5 decenas + 7 unidades + 8 décimas + 3 centésimas, y el segundo, a 5 centenas + 7 unidadss + 8 décimas + 3 centésimas + 0 milésimas + 0 diezmilésimas; luego el valor es el mismo.

Por la misma razón *no altera un número decimal suprimiendo uno o más ceros que tenga a su derecha*. Le pasa a un decimal con los ceros a la derecha lo que a un entero con los ceros a su izquierda.

Si en un decimal se corre la coma un lugar a la derecha, el decimal queda multiplicado por 10; si se corre dos lugares a la derecha, queda multiplicado por 100; si tres lugares, por 1000, y así sucesivamente, porque por cada lugar que la coma corre a la derecha, el valor relativo de sus cifras se hace diez veces mayor.

Si en un número decimal se corre la coma un lugar a la izquierda, el decimal se hace 10 veces menor; si dos lugares, 100 veces menor; si tres, 1000 veces menor, etc., porque por cada lugar que la coma corre a la izquierda, el valor relativo de sus cifras se hace diez veces menor. Todo esto se funda en uno de los principios de la numeración escrita, el que dice que una cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediato superior, y colocada a la derecha, unidades del orden inmediato inferior.

CONSECUENCIAS.—*Si se suprime la coma en un número decimal, éste queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal*, pues equivale a llevar la coma hasta la derecha de la primera cifra, donde ya no hace falta.

EJEMPLOS.—1.° Si en el número decimal 58,365 corremos la coma dos lugares hacia la derecha, resultará 5836,5 cien veces mayor que el primero, pues el primero, expresado en milésimas, es 58365 milésimas, y el segundo, expresado en décimas, 58365 décimas; pero una décima tiene 100 milésimas; luego el segundo número es cien veces mayor que el primero.

2.° Si en el número decimal 735,83 se corre la coma tres lugares a la izquierda, resultará el decimal 0,73583, que es mil veces menor que el otro, porque expresado el primero en centésimas, es 73583 centésimas, y expresado el segundo en cienmilésimas, será 73583 cienmilésimas; pero cada centésima tiene 1000 cienmilésimas; luego el primer número es mil veces mayor que el segundo o el segundo mil veces menor que el primero.

Cálculo de números decimales.

119. El cálculo de números decimales comprende las mismas operaciones que el de los enteros y el de los quebrados ordinarios, es decir, la adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Adición de números decimales.

120. Del mismo modo que, al hablar de la adición de números enteros, dijimos que se suman separadamente las unidades de cada orden empezando por el orden inferior, así decimos ahora que para sumar números decimales se suman separadamente las unidades de cada orden, empezando por el orden inferior, poniendo, en el resultado, la coma a la derecha de la cifra de las unidades.

Ya se dijo que un número decimal no altera escribiendo uno o más ceros a su derecha: fundándonos en esto, podemos hacer que todos los sumandos tengan igual número de cifras decimales agregando uno o más ceros a los sumandos que tengan menos de aquellas cifras, hasta que su número sea igual al del sumando que tenga más. De este modo podemos decir que

Para sumar números decimales, *se hace que tengan todos los sumandos igual número de cifras decimales, se suman como enteros, y en el resultado se separan a la derecha, con la coma, tantas cifras como decimales tiene uno de los sumandos.*

El igualar el número de cifras decimales de todos los sumandos equivale a reducirlos a un común denominador, si se ponen en la forma de quebrados ordinarios.

En la práctica se escribe un número debajo de otro de modo que se correspondan las cifras del mismo orden, y, por lo tanto, las comas; se suman separadamente las cifras que están en columna, empezando por el orden inferior, y en el resultado se pone la coma en columna con las demás.

EJEMPLO.—Sumar los decimales 45,96, 731,9, 5,087.

Igualando el número de cifras decimales en todos ellos, se tendrá:

$$45{,}960 + 731{,}900 + 5{,}087 = 782{,}947.$$

Puestos unos debajo de otros,

$$\begin{array}{r} 45{,}960 \\ 731{,}900 \\ 5{,}087 \\ \hline 782{,}947 \end{array}$$

Observemos que, escritos en esta forma los sumandos, los ceros a la derecha hacen menos falta, aunque tampoco estorban; y siempre se corre menos peligro, con ellos, de sumar unidades de un orden con unidades de otro orden, lo cual haría equivocada la operación.

Puestos los sumandos en forma de quebrados ordinarios, será:

$$\frac{4596}{100} + \frac{7319}{10} + \frac{5087}{1000}.$$

Si a los dos términos del primer quebrado agregamos un cero y a los del segundo dos ceros, el valor de los quebrados no alterará, porque con ello los dos términos del primer quebrado se han multiplicado por 10, y los del segundo, por 100, y se tendrá:

$$\frac{45960}{1000} + \frac{731900}{1000} + \frac{5087}{1000}.$$

Estos quebrados tienen el mismo denominador; luego, como se ha dicho antes, igualar con ceros el número de cifras decimales de los sumandos equivale a reducirlos a un común denominador.

Si entre los sumandos hubiera uno o más enteros, se los consideraría como decimales cuya parte decimal la forman ceros.

Sumar, por ejemplo, los números 58,09; 9,096; 495; 0,83; 17. Puestos unos debajo de otros, se tendrá:

$$\begin{array}{r} 58,09 \\ 9,096 \\ 495 \\ 0,83 \\ 17 \\ \hline 580,016 \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{r} 58,090 \\ 9,096 \\ 495,000 \\ 0,830 \\ 17,000 \\ \hline 580,016 \end{array}$$

Ejercicio.—Efectuar la operación anterior poniendo los números decimales en forma de quebrados ordinarios o números mixtos.

1.°

$$58,09 + 9,096 + 495 + 0,83 + 17$$

$$= \frac{5809}{100} + \frac{9096}{1000} + 495 + \frac{83}{100} + 17$$

$$= \frac{58090}{1000} + \frac{9096}{1000} + \frac{495000}{1000} + \frac{830}{1000} + \frac{17000}{1000} = \frac{580016}{1000} = 580,016.$$

2.°

$$58,09 + 9,096 + 495 + 0,83 + 17$$

$$= 58\frac{9}{100} + 9\frac{96}{1000} + 495 + \frac{83}{100} + 17$$

$$= 58 + 9 + 495 + 17 + \frac{90}{1000} + \frac{96}{1000} + \frac{830}{1000}$$

$$= 579\frac{1016}{1000} = 579 + 1\frac{16}{1000} = 580\frac{16}{1000} = \frac{580016}{1000} = 580,016.$$

Observación.—En la adición de números decimales se oye con frecuencia decir que se suman como enteros, sin indicar que deben tener igual número de cifras decimales. Conviene corregir este lengñaje, porque podría dar lugar a que se sumasen cifras de un orden con cifras de otro orden.

Sustracción de números decimales.

121. Para restar números decimales *se restan separadamente las unidades de cada orden*, *empezando por el orden inferior;* o de otro modo,

Para restar números decimales, *si tienen igual número de cifras decimales*, *se resta como enteros*, *y a la derecha del resultado se separa con una coma tantas cifras como decimales tiene uno de los términos de la operación. Si no tienen* minuendo y sustraendo *igual número de cifras decimales*, *se agregan ceros al que tenga menos, hasta igualarlos, y se resta como se ha dicho.*

Si el minuendo o el sustraendo fuesen enteros, se les considerará como números decimales cuya parte decimal está formada por ceros.

Cuando el sustraendo es el entero, no suelen escribirse a la derecha los ceros decimales, sino que se resta del entero del minuendo, y a continuación se escriben las cifras decimales del mismo.

En la práctica *se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las cifras del mismo orden; se hace la resta, y en el resultado se pone la coma en columna con las demás.*

EJEMPLOS

1.°	Minuendo	758,396
	Sustraendo	97,839
	Diferencia:	660,557

2.°	Minuendo	83,576
	Sustraendo	19,18567

Igualando el número de cifras decimales, se tendrá:

		83,57600
		19,18567
	Diferencia:	64,39033

3.°	Minuendo	8916
	Sustraendo	47,538

Igualando el número de cifras decimales, se tendrá:

		8916.000
		47,538
	Diferencia:	8868,462

4.°	Minuendo	715,094
	Sustraendo	65
	Diferencia:	650,094

122. OBSERVACIÓN.— En la sustracción de números decimales es frecuente oír, como en la adición, que se restan como enteros, sin decir si tienen o no igual número de cifras decimales. Conviene evitar este modo de hablar, por la misma razón que hemos dicho en la adición.

Multiplicación de números decimales.

123. Distinguiremos en esta operación tres casos: 1.° *Multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros*, 2.° *Multiplicar un número decimal por un entero*, y 3.° *Multiplicar dos números decimales.*

Primer caso: Como dijimos hace poco, si se corre la coma un lugar a la derecha, el número decimal se hace diez veces mayor, o queda multiplicado por 10; si se corre dos lugares a la derecha, se hace cien veces mayor, o queda multiplicado por 100, etc.; de aquí se deduce que:

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se correrá la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros sigan a la unidad, y si no hubiera cifras bastantes, se añadirán los ceros necesarios, toda vez que, según hemos visto también, no altera el valor de un número decimal escribiendo ceros a su derecha.

EJEMPLOS:

1.° Sea multiplicar 33,536 por 100.
Se escribirá: $33,536 \times 100 = 3353,6$.

2.° Sea multiplicar 5,12356 por 100000.
Se escribirá: $5,12356 \times 100000 = 512356$.

3.° Sea multiplicar 3,47 por 10000.
Se escribirá. $3,47 \times 10000 = 3,4700 \times 10000 = 34700$.

Como el decimal de este último ejemplo sólo tiene dos cifras decimales, y se multiplica por la unidad seguida de cuatro ceros, ha habido que añadir dos ceros para que la coma pudiera correr los cuatro lugares. Los ceros no es necesario añadirlos al decimal; basta ponerlos en el producto.

124. Segundo caso: *Para multiplicar un número decimal por un entero, se multiplica como si el decimal fuese entero, y de la derecha del producto se separarán tantas cifras decimales como tiene el factor decimal.*

Sea multiplicar 89,563 por 56.

$$\begin{array}{r} 89,563 \\ 56 \\ \hline 537378 \\ 447815 \\ \hline 5015,528 \end{array}$$

Efectuemos la misma multiplicación poniendo el decimal en forma de quebrado ordinario, y veremos por qué se separan en el producto las cifras decimales:

$$89,563 \times 56 = \frac{89563}{1000} \times 56 = \frac{89563 \times 56}{1000} = \frac{5015528}{1000} = 5015,528.$$

Siendo 1000 el denominador del producto, éste expresa milésimas; luego, puesto en forma entera, tendrá tres cifras decimales.

125. Tercer caso: *Para multiplicar un número decimal por otro número decimal, se multiplica como si fueran enteros, y a la derecha del producto se separan tantas cifras decimales como tienen los dos factores.*

Sea multiplicar 578,325 por 37,96.

Como los factores tienen, el uno, tres cifras decimales, y el otro, dos, en el producto se toman cinco.

$$\begin{array}{r} 578,325 \\ 37,96 \\ \hline 3469950 \\ 5204925 \\ 4048275 \\ 1734975 \\ \hline 21953,21700 \end{array}$$

Efectuemos la misma multiplicación poniendo en forma de quebrados los dos factores, y se verá la razón de separar en el producto cinco cifras decimales.

$$578,325 \times 37,96 = \frac{578325}{1000} \times \frac{3796}{100} = \frac{2195321700}{100000} = 21953,21700.$$

Como el denominador del producto es 100000, expresa cienmilésimas; luego puesto en forma entera, tendrá cinco cifras decimales.

Podría ocurrir que el producto no tuviese tantas cifras como cifras decimales tienen los dos factores. En este caso, se pondrán a la izquierda los ceros que sean necesarios.

Ejemplo.—Multiplicar 0,0896 por 0,079.

$$\begin{array}{r} 0,0896 \\ 0,079 \\ \hline 8064 \\ 6272 \\ \hline 0,0070784 \end{array}$$

El producto sólo tiene cinco cifras, y los factores tienen cuatro cifras decimales el uno y tres el otro; para poder separar siete, ha habido que poner tres ceros a la izquierda.

Efectuemos la operación poniendo los números decimales en forma de quebrados ordinarios, y veremos el porqué de haber tenido que poner ceros a la izquierda del producto.

$$0{,}0896 \times 0{,}079 = \frac{896}{10000} \times \frac{79}{1000} = \frac{70784}{10000000} = 0{,}0070784.$$

El denominador del producto es 10000000; el producto expresa diezmillonésimas; luego, puesto en forma entera, hay que separar en el producto siete cifras decimales.

Caso particular: Multiplicar un entero o un decimal por una unidad decimal.

Si el multiplicando es un entero, se separan de derecha a izquierda tantas cifras decimales como ceros preceden a la unidad decimal; y si el multiplicando es decimal, se corre hacia la izquierda la coma tantos lugares como ceros preceden a dicha unidad decimal.

EJEMPLOS:

Multiplicar 897 por 0,01
Será: $897 \times 0{,}01 = 8{,}97$.
Multiplicar 79 por 0,0001
Será: $79 \times 0{,}0001 = 0{,}0079$.
Multiplicar 573,32 por 0,000001
Será: $573{,}32 \times 0{,}000001 = 0{,}00057332$

Efectuemos estas operaciones poniendo la unidad decimal en forma de quebrado ordinario:

$$897 \times 0{,}01 = 897 \times \frac{1}{100} = \frac{897}{100} = 8{,}97.$$

$$79 \times 0{,}0001 = 79 \times \frac{1}{10000} = \frac{79}{10000} = 0{,}0079.$$

$$573{,}32 \times 0{,}000001 = \frac{57332}{100} \times \frac{1}{1000000} = \frac{57332}{100000000} = 0{,}00057332.$$

División de números decimales.

126. En esta operación distinguiremos cuatro casos: 1.º *Dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros.* 2.º *Dividir un número decimal por un entero.* 3.º *Dividir un* *número decimal por otro decimal.* 4.° *Dividir un número entero por otro decimal.*

Primer caso: *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros sigan a la unidad.* El fundamento de este caso es el principio convencional de la numeración escrita, en virtud del cual, corriendo un lugar la coma hacia la izquierda, el valor relativo de las cifras se hace diez veces menor; corriendo dos lugares, cien veces, etc.

Sea dividir 312,58 por 100. Se escribirá:

$$312{,}58 : 100 = 3{,}1258.$$

Si no hubiese cifras enteras bastantes, se pondrán a la izquierda los ceros que fueren necesarios, toda vez que en nada alteran el valor de un entero los ceros puestos a su izquierda.

Así:

$$87{,}596 : 10000 = 00087{,}596 : 10000 = 0{,}0087596.$$

En la práctica no se escriben los ceros a la izquierda del entero; basta ponerlos en el cociente.

Efectuemos la operación poniendo el dividendo en forma de quebrado ordinario:

$$89{,}596 : 10000 = \frac{89596}{1000} : 10000 = \frac{89596}{10000000} = 0{,}0089596.$$

Siendo el denominador del cociente 10000000, el quebrado expresará diezmillonésimas, y, por lo tanto, puesto en forma entera, tendrá siete cifras decimales.

127. Segundo caso: *Para dividir un número decimal por un entero, se divide como si el dividendo fuese entero, y en el cociente se separarán tantas cifras decimales como decimales tenga el dividendo.* Se funda esto en que siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, entre divisor y cociente han de tener tantas cifras decimales como tiene el dividendo, y como ninguna tiene el divisor, las tendrá todas el cociente.

EJEMPLO.—Dividir 7589,37 por 96.

$$\begin{array}{r|l} 7\,5\,8\,9{,}3\,7 & 96 \\ \cline{2-2} 8\,6\,9\phantom{{,}3\,7} & 79{,}05 \\ 5\,3\,7 & \\ 5\,7 & \end{array}$$

Efectuemos la operación poniendo el dividendo en forma de quebrado.

$$\frac{758937}{100} : 96 = \frac{758937 : 96}{100} = \frac{7905 \text{ (cociente entero)}}{100} = 79{,}05.$$

Recuérdese que para dividir un quebrado por un entero, puede dividirse el numerador por el entero, dejando el mismo denominador, aunque no suele hacerse sino cuando el numerador es divisible por el entero.

128. Tercer caso: En este tercer caso, distinguiremos otros tres subcasos: 1.º *Que dividendo y divisor tengan igual número de cifras decimales.* 2.º *Que tenga más cifras decimales el dividendo que el divisor.* 3.º *Que tenga más cifras decimales el divisor que el dividendo.*

1.º Cuando dividendo y divisor tienen igual número de cifras decimales, *se dividen como si ambos fuesen enteros, y el cociente que resulte será el cociente buscado, sin necesidad de separar cifra alguna decimal.* La razón está en que debiendo tener el dividendo igual número de cifras decimales que entre divisor y cociente, como el divisor tiene tantas como el dividendo, el cociente no tiene ninguna.

Ejemplo.—Dividir 796,532 por 8,127.

$$\begin{array}{r|l} 796532 & 8127 \\ \cline{2-2} 65102 & 98 \\ 0086 & \end{array}$$

2.º Si el dividendo tiene más cifras decimales que el divisor, *se dividirán como si fuesen enteros, y en el cociente se separarán tantas cifras decimales como expresa la diferencia entre los números de cifras decimales del dividendo y divisor.* La razón es análoga a la anterior.

Ejemplo.—Dividir 843,6652 por 79,8.

$$\begin{array}{r|l} 843{,}6652 & 79{,}8 \\ \cline{2-2} 4566 & 10{,}572 \\ 5765 & \\ 1792 & \\ 196 & \end{array}$$

Como se ve, en el cociente se han separado tres cifras decimales, diferencia entre las cuatro que tiene el dividendo y una que tiene el divisor.

3.º Si el divisor tiene mayor número de cifras decimales que el dividendo, *se igualarán dichos números de cifras decimales escribiendo a la derecha del dividendo los ceros necesarios, y luego se dividen como enteros, sin que en el cociente haya que separar cifra alguna decimal.*

La razón es porque este subcaso queda reducido al primero.

EJEMPLO.—Dividir 512,37 por 9,0362.

5 1 2,3 7 0 0	9,0362
6 0 5 6 0 0	56
6,3 4 2 8	

129. OBSERVACIÓN.—Igualar el número de cifras decimales cuando el divisor tiene menos decimales que el dividendo no nos parece bien; porque después de haber agregado ceros al divisor, al pasar a dividir el dividendo por el divisor como si fuesen enteros, siguiendo la regla que se dió al dividir un entero por otro que termina en ceros, suprimiríamos estos ceros y separaríamos otras tantas cifras a la derecha del dividendo, con lo que la operación quedaría como estaba antes de aquella igualación.

130. Cuarto caso: *Para dividir un entero por un decimal, se pone a la derecha del entero una coma, y a continuación tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, y luego se dividen como enteros.* Resulta también este cuarto caso reducido al primero de los subcasos anteriores.

EJEMPLO.—Dividir 125 por 0,8372.

1250000	8372
41280	149
77920	
2572	

131. *Aproximación de un cociente por decimales.*—Sabido es que, si a la derecha de un número entero ponemos una coma, y a continuación uno o más ceros decimales, el entero no varía; sabido es asimismo que, si a la derecha de un número decimal se escriben cuantos ceros decimales se quieran, el valor del número decimal no sufre alteración. De aquí se deduce que, si después de dividir, según las reglas anteriores, dos enteros, o un decimal por un entero, o un decimal por otro decimal, o un entero por un decimal, el cociente no fuere exacto, se podrá aproximar hasta llegar a un cociente exacto, o hasta obtener la cifra decimal del orden que se quiera, escribiendo un cero a la derecha de cada resto y continuando la operación. De aquí la siguiente regla:

Para aproximar por decimales el cociente entero o el cociente decimal de una división inexacta, ya sea de números enteros, ya sea de números decimales, *se escribe un cero a la derecha del resto y se sigue la división, se agrega un cero al nuevo resto y se continúa la operación*, y así sucesivamente, *hasta que la división resulte exacta o hasta que se llegue a la cifra del orden que se quería obtener.*

Si la aproximación parte de un cociente entero, se pondrá inmediatamente la coma, y se aproximará luego como se ha dicho.

Ejemplos.—1.º Sea aproximar el cociente entero que resulte de dividir 12798 por 32.

12798	32
319	399,9375
318	
300	
120	
240	
160	
00	

Después de obtener el cociente entero 399, se ha continuado la división, agregando un cero a cada resto, hasta llegar a la cuarta cifra decimal, que ha resultado exacta.

2.º Sea aproximar hasta cienmilésimas el cociente decimal que resulte de dividir 329,875 por 7,3.

3 2 9,8 7 5	7,3
3 7 8	45,18835
1 3 7	
6 4 5	
6 1 0	
2 6 0	
4 1 0	
4 5	

Obtenido el cociente decimal 45,18, se ha continuado la división, agregando un cero a cada resto, hasta llegar a la cifra de las cienmilésimas pedida.

Formación de potencias de números decimales.

132. Siendo la formación de potencias con exponente entero un caso particular de la multiplicación, aquel en que son iguales los factores, podremos decir que

Para formar la potencia de un número decimal, *se forma dicha potencia como si el número fuese entero, y en el resultado se separan tantas cifras decimales como unidades tenga el producto del exponente por el número de decimales que tiene el número;* es decir, que si es la segunda potencia, se separan el duplo de cifras decimales que tiene el número; si la tercera potencia, el triplo, etc.

EJEMPLOS.—1.° Sea formar el cuadrado o segunda potencia del número 1,09. Será:

$$1{,}09^2 = 1{,}09 \times 1{,}09 = 1{,}1881.$$

2.° Sea formar el cubo o tercera potencia del número 0,07. Será:

$$0{,}07^3 = 0{,}07 \times 0{,}07 \times 0{,}07 = 0{,}000343.$$

Extracción de la raíz cuadrada de números decimales.

Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal, *se hace que sea par el número de cifras decimales, y luego se extrae la raíz como si el decimal fuese entero, y en el resultado se separan la mitad de las cifras decimales que tiene el número.*

EJEMPLOS.—1.° Extraer la raíz cuadrada del número 1,69. Será:

$$\sqrt{1{,}69} = 1{,}3.$$

2.° Sea hallar la raíz cuadrada de 0,7. Se pone un cero a su derecha, para que sea par el número de cifras decimales.

$$\sqrt{0{,}70} = 0{,}8.$$

Sea extraer la raíz cuadrada de 0,000081. Será:

$$\sqrt{0{,}000081} = 0{,}009.$$

Transformación de quebrados ordinarios en quebrados decimales.

133. Siendo el quebrado ordinario una división indicada del numerador por el denominador, y pudiendo ponerse a la derecha del numerador, después de una coma, cuantos ceros se quiera, sin alterar su valor, resulta que

Para convertir un quebrado ordinario en quebrado decimal, *se dividirá el numerador por el denominador, y se aproximará al cociente entero por decimales, hasta que resulte un cociente exacto o hasta que se tenga la cifra del orden que se desee.* Si el quebrado es propio, el cociente entero será cero.

Ejemplos.—1.° Transformar en quebrado decimal el quebrado ordinario $\frac{5}{8}$:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Se ha llegado a un cociente exacto, y se tiene:

$$\frac{5}{8} = 0{,}625.$$

2.° Transformar en decimal aproximado, hasta diezmilésimas, el quebrado impropio $\frac{22}{7}$:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 7 \\ \cline{2-2} 10 & 3{,}1428 \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

Observación.—Cuando el cociente no resulta exacto, si el resto último es mayor que la mitad del divisor, se añade una unidad a la última cifra del cociente aproximado, con lo que se tendrá una aproximación mayor, llamándose entonces el cociente aproximado *por exceso*, así como antes lo era por defecto.

Así, en el ejemplo anterior, $\frac{22}{7} = 3{,}1428$ está aproximado por defecto; $\frac{22}{7} = 3{,}1429$ es un valor aproximado por exceso.

Transformación de quebrados decimales en ordinarios.

134. En la transformación de quebrados decimales en ordinarios sólo consideramos el caso en que es limitado el número de cifras decimales.

Transformar un quebrado decimal en quebrado ordinario es lo que hemos llamado varias veces poner el decimal en forma de quebrado ordinario, es decir, ponerle por denominador el número de partes iguales en que se supone dividida la unidad; y como de esto se ha hablado ya al comprobar las operaciones hechas con los números decimales, efectuando las mismas operaciones con aquellos números puestos en forma de quebrados ordinarios, nos limitaremos aquí a dar la regla para aquella transformación, regla que dice:

Para transformar un número decimal de limitado número de cifras decimales en quebrado ordinario, *se pondrá por numerador el decimal, convertido en entero, y por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenía el decimal.*

Apliquemos la regla a los siguientes ejemplos:

Transformar en quebrados ordinarios, o mejor, poner en forma de quebrados ordinarios los números decimales siguientes: 47,095; 8,1002; 0,00953.

$$1.^{\circ}\quad 47{,}095 = \frac{47095}{1000}.$$

$$2.^{\circ}\quad 8{,}1002 = \frac{81002}{10000}.$$

$$0{,}00953 = \frac{000953}{100000} = \frac{953}{100000}.$$

CUARTA PARTE

Comparación de los números.

135. Comparar dos cantidades en Aritmética es examinarlas para ver cuál es su diferencia o cuál es su cociente. En ambos casos, el resultado de la comparación se llama *razón: razón de dos números*, en el primer caso, y *razón geométrica*, en el segundo.

Razón aritmética es, pues, *el resultado de su comparación.*

Razón aritmética de dos números es su diferencia, que se deja indicada. Así, 7 — 5 es una razón aritmética.

Razón geométrica de dos números es su cociente, que se deja indicado.

Así, $\frac{7}{5}$ es una razón geométrica.

En ambas razones, el primer término, o sea el 7, se llama *antecedente*, y el segundo término, o sea el 5, se llama *consecuente.*

Como se ve fácilmente, en la razón aritmética, el antecedente significa lo mismo que minuendo, y el consecuente, lo mismo que sustraendo; así como en la razón geométrica el antecedente significa lo mismo que dividendo o numerador, y el consecuente, lo mismo que divisor o denominador.

Una razón es *inversa* de otra cuando el antecedente y consecuente de la primera son, respectivamente, el consecuente y antecedente de la segunda. Así, 7 – 5 y 5 – 7 son razones aritméticas inversas; $\frac{7}{5}$ y $\frac{5}{7}$ son razones geométricas inversas también.

Proporciones.

136. *Llámase proporción la igualdad de dos razones.* Si las razones son aritméticas, la proporción se llama proporción aritmética o *equidiferencia;* si las razones son geométricas, la proporción se llama proporción geométrica. Cuando se dice *proporción* sin apellidarla aritmética ni geométrica, se entiende generalmente que es la proporción geométrica. La proporción aritmética o equidiferencia se escribe de este modo:

$$7 - 5 = 12 - 10.$$
$$20 - 12 = 10 - 2.$$
$$5 - 1 = 7 - 3.$$

La proporción geométrica se escribe así:

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10}; \quad \frac{20}{12} = \frac{10}{6}; \quad \frac{5}{1} = \frac{20}{4}.$$

También se escribe la proporción geométrica en esta otra forma, cada día más en desuso:

$$7 : 5 :: 14 : 10.$$
$$20 : 12 :: 10 : 6.$$
$$5 : 1 :: 20 : 4.$$

Tanto en una como en otra forma, se leen las proporciones diciendo:

7 es a 5, como 14 es a 10, 20 es a 12, como 10 es a 6; 5 es a 1, como 20 es a 4, y de un modo general: el primer término es al segundo como el tercero es al cuarto. Lo mismo en la equidiferencia que en la proporción, el primero y cuarto términos se llaman *extremos*, y el segundo y tercero, *medios*. Así, en la equidiferencia $11 - 7 = 9 - 5$, 11 y 5 son los extremos, y 7 y 9, los medios. En la proporción $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, 3 y 12 son los extremos, y 4 y 9, los medios.

137. Cuando en una equidiferencia o en una proporción son iguales los medios o los extremos, la equidiferencia y la proporción se llaman *continuas*. Así, las equidiferencias

$$8 - 5 = 5 - 2$$

y

$$7 - 3 = 11 - 7$$

son continuas, y son continuas también las proporciones

$$\frac{12}{6}=\frac{6}{3};\ \frac{4}{2}=\frac{8}{4}.$$

El término repetido en la equidiferencia se llama *medio diferencial* o *media aritmética*, y en la proporción geométrica, *medio proporcional* o *media geométrica*. Así, en la equidiferencia $8-5=5-2$, 5 es el medio diferencial o media aritmética entre 8 y 2, y en la proporción $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$, 4 es el medio proporcional o la media geométrica entre 2 y 8. Los términos no repetidos se llaman *terceros diferenciales*, en la equidiferencia, y *terceros proporcionales*, en la proporción. En la equidiferencia y en la proporción no continuas, o discontinuas, cada término se llama *cuarto diferencial* a los otros tres en la equidiferencia, y *cuarto proporcional*, en la proporción.

Propiedades de las equidiferencias.

138. En toda equidiferencia, *la suma de los extremos es igual a la suma de los medios*. Véase:

Sean

$$\begin{aligned} 8-3&=12-7\\ 5-2&=\ 9-6\\ 12-7&=\ 6-1. \end{aligned}$$

En ellas, sumando los extremos y los medios, se encuentra:

$$\begin{aligned} 8+7&=3+12\\ 5+6&=2+\ 9\\ 12+1&=7+\ 6; \end{aligned}$$

y como en una suma de dos sumandos, un sumando es igual a la suma menos el otro sumando, de aquí que

En toda equidiferencia, *un extremo es igual a la suma de los medios, menos el otro extremo;* y *un medio es igual a la suma de los extremos, menos el otro medio.*

Así, en la equidiferencia $20-9=13-2$, se tiene:

$$\begin{aligned} 2&=\ 9+13-20=22-20\\ 9&=20+\ 2-13=22-13. \end{aligned}$$

En la equidiferencia continua, *la suma de los extremos o* *la suma de los medios no iguales es igual al duplo del medio diferencial.* Véase:

Sean las diferencias continuas

$$8 - 5 = 5 - 2$$
$$12 - 9 = 9 - 6$$
$$7 - 3 = 11 - 7.$$

En la primera se tiene:

$$8 + 2 = 5 + 5 = 2 \times 5 = 10;\ \text{de donde}\ 2 = 10 - 8.$$

En la segunda se tiene:

$$12 + 6 = 9 + 9 = 9 \times 2 = 18;\ \text{de donde}\ 12 = 18 - 6.$$

En la tercera se tiene:

$$7 + 7 = 7 \times 2 = 3 + 11 = 14;\ \text{de donde}\ 3 = 14 - 11;$$

luego *en la equidiferencia continua, si los medios son iguales, un extremo es igual al duplo del medio diferencial, menos el otro extremo; y si los iguales son los extremos, un medio es igual al duplo del medio diferencial, menos el otro medio.*

Si el duplo del medio diferencial es igual a la suma de los otros dos términos de la equidiferencia, *el medio diferencial será igual a la mitad de la suma de dichos términos.*

En la equidiferencia $15 - 11 = 11 - 7$, se tiene:

$$15 = 11 + 11 - 7 = 22 - 7$$
$$11 = \frac{15 + 7}{2} = \frac{22}{2}.$$

Aplicaciones.—Hallar el término desconocido, que designaremos por x, en las equidiferencias siguientes:

$$x - 7 = 20 - 8$$
$$12 - x = 15 - 4$$
$$13 - 7 = x - 6$$
$$5 - 2 = 11 - x$$
$$7 - x = x - 5$$
$$x - 8 = 12 - x.$$

En la primera, como la x es un extremo, será igual a la suma de los medios, menos el otro extremo, o sea:

$$x = 7 + 20 - 8 = 27 - 8 = 19.$$

En la segunda, como la x es un medio, será igual a la suma de los extremos, menos el otro medio, o sea:

$$x = 12 + 4 - 15 = 16 - 15 = 1.$$

Análogamente, en la tercera:

$$x = 13 + 6 - 7 = 19 - 7 = 12.$$

Y en la cuarta,

$$x = 2 + 11 - 5 = 13 - 5 = 8.$$

En la quinta y sexta, como x es un medio diferencial, será igual a la mitad de la suma de los otros términos extremos o medios, o sea en la quinta:

$$x = \frac{7 + 5}{2} = \frac{12}{2} = 6,$$

y en la sexta,

$$x = \frac{8 + 12}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

139. *Si la suma de dos números es igual a la suma de otros dos, con los cuatro sumandos puede formarse una equidiferencia, poniendo por extremos los sumandos de una suma, y por medios, los sumandos de la otra.*

Así, si se tiene

$$8 + 12 = 15 + 5,$$

podrá formarse la equidiferencia siguiente:

$$8 - 5 = 15 - 12,$$

que resulta de poner por extremos el 8 y el 12, que son los sumandos de la primera suma, y por medios, el 15 y el 5, que son los sumandos de la suma segunda.

Cambiando el orden de los sumandos, podía haberse escrito:

$$12 - 5 = 15 - 8.$$

o empezando por los sumandos de la segunda suma,

$$15 - 8 = 12 - 5,$$

o

$$15 - 12 = 8 - 5.$$

Si se invierten las razones de estas cuatro equidiferencias, es decir, si en lugar de cada razón se pone su inversa, resultarán las cuatro equidiferencias siguientes:

$$\begin{aligned} 5 - 8 &= 12 - 15 \\ 5 - 12 &= 8 - 15 \\ 8 - 15 &= 5 - 12 \\ 12 - 15 &= 5 - 8. \end{aligned}$$

Son, pues, *ocho las formas que puede tomar la equidiferencia, sin que por esto altere la relación entre un término y los demás*. Pueden obtenerse de este modo:

Sea la equidiferencia	$12 - 8 = 7 - x$
Cambiemos los medios:	$12 - 7 = 8 - x$
Invirtamos las razones:	$7 - 12 = x - 8$
Cambiemos los medios:	$7 - x = 12 - 8$
Invirtamos las razones:	$x - 7 = 8 - 12$
Cambiemos los medios:	$x - 8 = 7 - 12$
Invirtamos las razones:	$8 - x = 12 - 7$
Cambiemos los medios:	$8 - 12 = x - 7.$

Si en esta última invirtiéramos las razones, se reproduciría la primera.

En todas estas formas de la equidiferencia, la x vale lo mismo. En todas ellas se tiene:

$$x = 8 + 7 - 12 = 15 - 12 = 3.$$

Propiedades de las proporciones.

140. En toda proporción, *el producto de los extremos es igual al producto de los medios*. Véase:

Sean las proporciones

$$\frac{3}{12} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{20}{16}.$$

En la primera se tiene:

$$3 \times 16 = 12 \times 4 = 48.$$

En la segunda se tiene:

$$5 \times 16 = 4 \times 20 = 80,$$

y como en un producto de dos factores, un factor es igual al producto dividido por el otro factor, de aquí que

En toda proporción, *un extremo es igual al producto de los medios, dividido por el otro extremo, y un medio es igual al producto de los extremos, dividido por el otro medio.*

Así, en la proporción

$$\frac{3}{12} = \frac{4}{16},$$

se tiene

$$3 = \frac{12 \times 4}{16} = \frac{48}{16}$$

$$12 = \frac{3 \times 16}{4} = \frac{48}{4}.$$

En la proporción continua, *el producto de los extremos o el producto de los medios es igual al cuadrado o segunda potencia del medio proporcional.* Véase:

Sean las proporciones continuas

$$\frac{3}{12} = \frac{12}{48}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6}.$$

En la primera se tiene:

$$3 \times 48 = 12 \times 12 = 12^2 = 144,$$

de donde

$$3 = \frac{12^2}{48}.$$

En la segunda se tiene:

$$3 \times 12 = 6 \times 6 = 6^2 = 36,$$

de donde

$$12 = \frac{6^2}{3}.$$

Luego en toda proporción continua, *si los medios son iguales, un extremo es igual al cuadrado del medio proporcional dividido por el otro extremo; y si los iguales son los extremos, un medio es igual al cuadrado del medio proporcional dividido por el otro medio.*

Si el cuadrado del medio proporcional es igual al producto de los otros dos términos de la proporción, *el medio proporcional será igual a la raíz cuadrada del producto de dichos términos*. Así, en las proporciones anteriores

$$\frac{3}{12} = \frac{12}{48}, \qquad \frac{6}{3} = \frac{12}{6},$$

se tendrá:

$$12 = \sqrt{3 \times 48} = \sqrt{144}$$
$$6 = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36}.$$

APLICACIONES.—Hallar el término desconocido x en las siguientes proporciones:

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{x}, \qquad \frac{7}{21} = \frac{x}{12}, \qquad \frac{13}{x} = \frac{6}{30},$$
$$\frac{x}{5} = \frac{12}{3}, \qquad \frac{3}{x} = \frac{x}{27}, \qquad \frac{x}{20} = \frac{5}{x}.$$

En la primera, como la x es un extremo, será igual al producto de los medios dividido por el otro extremo, o sea:

$$x = \frac{3 \times 20}{12} = \frac{60}{12} = 5.$$

En la segunda, x es un medio, y será igual al producto de los extremos dividido por el otro medio, o sea:

$$x = \frac{7 \times 12}{21} = \frac{84}{21} = 4.$$

Análogamente, en la tercera,

$$x = \frac{13 \times 30}{6} = \frac{390}{6} = 65,$$

y en la cuarta,

$$x = \frac{5 \times 12}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

En la quinta y sexta, la x es un medio proporcional, y será, en la quinta, la raíz cuadrada del producto de los extremos, y en la sexta, la raíz cuadrada del producto de los medios.

Así, en la quinta,

$$x = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9,$$

y en la sexta,

$$x = \sqrt{20 \times 5} = \sqrt{100} = 10.$$

141. *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro factores puede formarse una proporción, poniendo por extremos los factores de un producto, y por medios, los factores del otro producto.*

Así, si tenemos

$$3 \times 16 = 4 \times 12,$$

podremos formar las proporciones:

$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16},$$

$$\frac{3}{12} = \frac{4}{16},$$

que resultan de tomar como extremos los factores 3 y 16 del primer producto, y como medios los factores 4 y 12 del producto segundo. Tomando como extremos los factores del segundo producto y por medios los del primero, se tendrá:

$$\frac{4}{16} = \frac{3}{12},$$

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Si en las cuatro proporciones se invierten las razones, resultarán las cuatro proporciones siguientes:

$$\frac{4}{3} = \frac{16}{12}; \quad \frac{12}{3} = \frac{16}{4}; \quad \frac{16}{4} = \frac{12}{3}; \quad \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Las anteriores ocho proporciones no son más que formas distintas de una sola proporción, que es la expresada por una cualquiera de las ocho.

En estas formas distintas de la proporción que se derivan una de otra, ya cambiando los medios, ya invirtiendo las razones, la relación entre un término cualquiera y los otros permanece siempre la misma. Veámoslo:

Sea la proporción $\frac{x}{5}=\frac{12}{4}$ y las otras siete que de ella se derivan:

$$\frac{x}{12}=\frac{5}{4};\quad \frac{12}{x}=\frac{4}{5};\quad \frac{12}{4}=\frac{x}{5};\quad \frac{4}{12}=\frac{5}{x};$$

$$\frac{4}{5}=\frac{12}{x};\quad \frac{5}{4}=\frac{x}{12};\quad \frac{5}{x}=\frac{4}{12}.$$

Hállese el valor de x en todas ellas, y resultará siempre

$$x=\frac{12\times 5}{4}=15.$$

FIN DE LA ARITMÉTICA TEÓRICA O ABSTRACTA

NOCIONES DE GEOMETRIA

142. GEOMETRÍA *es la ciencia que tiene por objeto la extensión, y por fin, el conocimiento de sus propiedades y medida.*

Extensión es la propiedad que tienen los objetos materiales de ocupar un lugar en el espacio.

Espacio es esa capacidad que nos rodea por todas partes donde están situados todos los cuerpos o seres materiales.

Dimensiones del espacio son las tres direcciones independientes en que puede ser recorrido. Así, una persona colocada en una sala ve claramente que puede recorrerla de atrás hacia delante o de delante hacia atrás, de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, de abajo hacia arriba o de arriba hacia abajo.

Estas dimensiones las tienen todos los cuerpos, y reciben los nombres de *longitud, latitud* y *grueso;* el grueso se llama también, según los casos, *profundidad* o *altura.*

Generalmente se llama longitud a la dimensión mayor; latitud, a la intermedia, y grueso, a la menor. En un libro, por ejemplo, la dimensión mayor de sus hojas se llama longitud del libro, la dimensión menor de sus hojas se llama latitud del libro, y la dimensión que forman todas las hojas juntas, puestas unas encima de otras, se llama grueso del libro.

En una sala, la dimensión mayor del suelo se llama *longitud* de la sala; la dimensión menor del suelo se llama *latitud* de la sala, y la dimensión que va desde el suelo al techo se llama *altura* de la sala.

En un estanque, la dimensión mayor de su superficie se llama *longitud del estanque;* la dimensión menor de la misma superficie se llama *latitud del estanque*, y la dimensión que va desde la superficie hasta el fondo se llama *profundidad del estanque.*

143. *Cuerpo geométrico* es la extensión que tiene tres dimensiones.

Superficie es la extensión que sólo tiene dos dimensiones.

Línea es la extensión que sólo tiene una dimensión.

Punto es el límite de la línea.

La superficie se dice también que es el *límite de un cuerpo,* porque como más allá de la superficie ya no existe el cuerpo, sino el espacio u otros cuerpos, la superficie es aquello que verdaderamente limita al cuerpo.

Línea se dice también que es el *límite de la superficie,* porque más allá de la línea que la limita ya no existe la superficie, sino el espacio u otras extensiones. Así, por ejemplo, en un libro cerrado, por encima o por debajo de las tapas, ni más allá de la superficie que forman los bordes de las hojas, ya no existe el libro; por esto, la parte externa de las tapas y de los bordes de las hojas forman el límite del libro, que se llama *superficie del mismo libro;* por esto también el borde de la tapa, más allá de la cual no existe tapa, es el límite de la misma, y se llama *línea.*

144. Si un punto se mueve en el espacio como la punta de un lápiz se mueve en un papel, produce una línea. Por esto podemos decir también que *línea es el conjunto de todas las posiciones que toma un punto que se mueve en el espacio.*

Si se moviese una línea en el espacio en dirección distinta de la marcada por la misma línea, dejando señalado el lugar por donde pasa, como la punta del lápiz deja señal en el papel, produciría una superficie. Por esto puede decirse que la *superficie es el conjunto de todas las posiciones que toma una línea que se mueve en el espacio.*

Si se moviese una superficie en el espacio en dirección distinta de las que puedan marcarse en la misma superficie y dejase señal de sus diversas posiciones, produciría un cuerpo. Por esto puede decirse que *cuerpo es el conjunto de todas las posiciones que toma una superficie que se mueve en el espacio.*

El punto se representa por dos pequeñas líneas que se cortan en esta forma, $\times$, o también, a veces, por un punto de la escritura ordinaria. El punto se designa poniendo al lado de las dos líneas que se cortan, o del punto de escritura común, una letra. Así, decimos el punto A (× A), el punto B (× B), el punto C (× C), etc.

145. *Figura* es toda extensión limitada, ya sea lineal, superficial o corpórea.

Como el punto no tiene extensión, realmente no puede llamarse figura; pero como lo representamos por un punto visible de la escritura o por dos pequeñas líneas que se cortan, le damos también aquel nombre.

En toda figura, menos en el punto, distinguiremos tres cosas: *su magnitud*, *su forma* y *su posición*.

La *magnitud* en una figura no es más que su mayor o menor grandor.

La magnitud medida ya se dijo que se llama cantidad, que puede ser de tres modos: *longitud*, *área* y *volumen*.

Longitud es la cantidad de una línea.

Área, la cantidad de una superficie.

Volumen, la cantidad de un cuerpo.

Nótese que la palabra longitud tiene dos sentidos: el uno expresa una de las dimensiones de la extensión, y el otro, la cantidad de esa dimensión.

Forma es el modo de estar limitada la figura.

Posición es el lugar que ocupa la figura y el modo de estar en él colocada.

146. *Figuras iguales* son las que tienen igual magnitud e igual forma.

Figuras semejantes son las que tienen igual forma, pero distinta magnitud.

Figuras equivalentes son las que tienen igual magnitud, pero distinta forma.

Dos puntos, como no tienen forma ni magnitud, no pueden distinguirse uno de otro sino por la posición.

EJEMPLO DE FIGURAS IGUALES.—Dos salas cuadradas donde quepa el mismo número de personas.

EJEMPLO DE FIGURAS SEMEJANTES.—Dos salas cuadradas, una grande y otra pequeña.

EJEMPLO DE FIGURAS EQUIVALENTES.—Una sala cuadrada y otra redonda, donde quepa el mismo número de personas.

De las líneas.

147. Las líneas pueden ser *rectas*, *curvas*, *quebradas* y *mixtas*. Una parte cualquiera de una línea se llama *segmento lineal*. El segmento será *rectilíneo*, si es una parte de una recta, y *curvilíneo*, si es una parte de una curva.

Línea recta es la más corta entre dos cualesquiera de sus puntos. Nos da idea de una recta, aunque no lo sea, un hilo fino extendido y tirante, el borde de una regla bien construída, etc.

148. Propiedades de la línea recta.—1.ª *Toda porción de recta o segmento rectilíneo es la menor distancia entre sus extremos.*

2.ª *Por dos puntos puede siempre pasar una recta, y sólo una*. Esto se expresa también diciendo que dos puntos *determinan* la posición de una recta.

3.ª *Si dos rectas tienen dos puntos comunes, se confunden, formando una sola recta*, lo cual se expresa diciendo que *coinciden*.

4.ª *Si dos rectas se cortan, se cortan en un solo punto*, que se llama punto *de intersección*.

Las líneas rectas se consideran ilimitadas.

149. *Línea curva es la que no tiene ningún segmento rectilíneo*.

Línea quebrada es la que se compone de dos o más seg-

Figura 1.

mentos rectilíneos que tienen de dos en dos un punto común y que pertenecen a rectas distintas.

Línea mixta es la que se compone de uno o más segmentos rectilíneos y de uno o más segmentos curvilíneos que tienen de dos en dos un solo punto común.

La línea recta se designa por dos letras. Las líneas curvas, quebrádas y mixtas se designarán por dos o más letras, según sea necesario, para que no se confundan unas con otras.

OBSERVACIÓN.—Aunque hemos dicho antes que la recta se considera ilimitada, la mayor parte de las veces por la palabra recta entenderemos sólo un segmento rectilíneo.

En la figura primera se verá cada una de estas líneas.

De las superficies.

150. Las superficies pueden ser *planas, curvas, quebradas* y *mixtas.*

Superficie plana es aquella a la cual puede adaptarse una recta en toda su longitud y en todas las direcciones de la misma superficie. La superficie plana se llama también *plano.* El plano se considera ilimitado en todas sus direcciones.

Superficie curva es la que en toda su extensión no tiene parte alguna plana.

Superficie quebrada es la formada por varias partes de planos distintos que de dos en dos consecutivos tienen una recta común.

Superficie mixta es la que se compone de parte o partes planas y de parte o partes curvas.

EJEMPLO.—En una sala que tenga por techo una bóveda, encontramos las cuatro clases de superficies: la superficie de una de las paredes o del suelo es plana, la superficie de la bóveda es curva, la superficie formada por dos o más paredes consecutivas es quebrada, la superficie formada por una o más paredes y la bóveda es mixta.

División de la Geometría.

151. La Geometría se divide en *Geometría plana* y *Geometría del espacio.*

La *Geometría plana* trata de las figuras cuyos puntos están todos situados en el mismo plano: estas figuras se llaman *planas.*

La *Geometría del espacio* es la que trata de las figuras cuyos puntos no están todos situados en el mismo plano, o, aunque lo estén, no están todos en el plano en que las figuras se representan.

Geometría plana.

152. En la Geometría plana estudiaremos rectas y curvas planas, y figuras que con ellas puedan formarse en un plano.

Una recta ilimitada situada en un plano también ilimitado divide a éste en dos partes, que llamaremos *semiplanos*. A la recta la llamaremos *base* de los semiplanos.

Los semiplanos son iguales, porque si doblásemos el plano por la recta como se puede doblar un papel por una raya trazada en él, un semiplano vendría a colocarse sobre el otro, coincidiendo con él en toda su extensión, porque ambos son ilimitados.

153. *Líneas quebradas.*—Las líneas quebradas se clasifican en *convexas* y *cóncavas*. Llámase *convexa* cuando, prolongada por sus dos extremos una cualquiera de las rectas que la forman, la quebrada se encuentra toda en uno de los *semiplanos* en que la recta prolongada divide al plano de la figura, y se llama *cóncava* cuando, prolongada por sus dos extremos alguna o algunas de las rectas que la forman, una parte de la quebrada queda en un *semiplano* y la otra parte en el otro *semiplano* de los dos en que la recta prolongada divide al plano de la figura.

En la figura 2, que es una quebrada convexa, la recta AB prolongada deja la quebrada en el semiplano inferior. En la

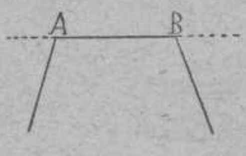

Fig. 2.

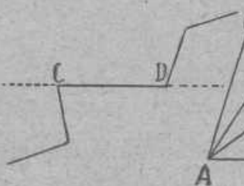

Fig. 3.

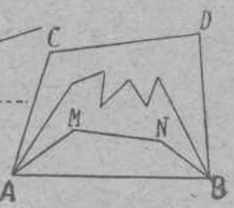

Fig. 4.

figura 3, que es cóncava, la recta CD prolongada deja una parte de la quebrada en el semiplano superior, y la otra parte de la quebrada, en el semiplano inferior.

154. Cuando se unen dos puntos de un plano por dos quebradas situadas a un mismo lado de la recta que une los puntos, o sea en el mismo semiplano, y las quebradas no se cortan, necesariamente estará la una dentro de la porción de plano que limita la otra. La quebrada exterior se llama *envolvente*, y la interior, *envuelta*. Si la envuelta es *convexa*, a simple vista se distingue fácilmente que *la envolvente es mayor que la envuelta*. Así (fig. 4), la quebrada envolvente ACDB es mayor que la envuelta AMNB; pero no se ve que sea mayor que la envuelta cóncava, comprendida entre las dos.

Angulos.

155. Angulo *es la extensión determinada por dos rectas que se cortan y terminan en el punto de intersección;* este punto de intersección se llama *vértice* del ángulo. Como las rectas sólo están limitadas en el vértice, quedan todavía ilimitadas en el otro sentido; luego el ángulo es una extensión ilimitada.

Las rectas que determinan el ángulo se llaman *lados* del mismo.

Un ángulo se designa por tres letras, puestas, una, en el

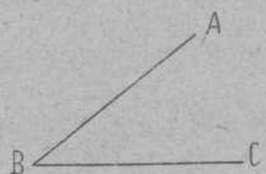

Fig. 5.

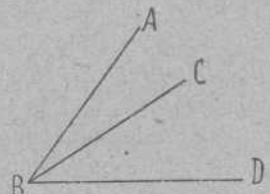

Fig. 6.

vértice, y otra, en un punto cualquiera de cada lado. Se lee enunciando las tres letras, con la del vértice en medio. Así, el ángulo de la figura 5 se lee diciendo ABC o CBA.

Dos ángulos son *consecutivos* cuando tienen un lado común situado entre los lados no comunes. Así, los ángulos ABC y CBD (fig. 6) son consecutivos, porque tienen el lado BC común situado entre los no comunes AB y BD.

Tres o más ángulos son *consecutivos* cuando cada uno de ellos es consecutivo con su inmediato o inmediatos.

Angulos adyacentes son dos ángulos consecutivos que tienen los lados no comunes en línea recta (fig. 7). Dos ángulos adyacentes forman evidentemente un semiplano, que se llama también *ángulo llano*.

Los ángulos se clasifican en *llanos*, *cóncavos* y *convexos*, y los cóncavos, en *rectos* y *oblicuos*.

Angulo llano es aquel cuyos lados son prolongación uno de otro.

Angulo cóncavo es el ángulo menor que un semiplano, o que un ángulo llano.

Angulo convexo es el ángulo mayor que un semiplano, o que un ángulo llano.

Cuando se va abriendo un compás, mientras las ramas o piernas no lleguen a colocarse en prolongación una de otra, o en línea recta, el ángulo es cóncavo; cuando están en prolongación, el ángulo es llano; si después de ponerse en prolongación, sigue el compás abriéndose, el ángulo que forman sus piernas es convexo.

Angulo recto es uno cualquiera de dos adyacentes iguales. Luego un ángulo recto es la mitad de un semiplano, o ángulo llano.

Angulo oblicuo es cada uno de dos adyacentes desiguales.

Los ángulos oblicuos pueden ser *agudos* y *obtusos*.

Angulo agudo es el ángulo menor que un recto.

Angulo obtuso es el ángulo mayor que un recto.

Angulos complementarios son dos ángulos cuya suma es igual a un ángulo recto.

Complemento de un ángulo es otro ángulo cuya suma con el primero es igual a un ángulo recto.

Dos ángulos son *suplementarios* cuando su suma es igual a dos ángulos rectos.

Suplemento de un ángulo es otro ángulo cuya suma con el primero es igual a dos ángulos rectos.

Es evidente que si dos ángulos tienen el mismo complemento o el mismo suplemento, son iguales.

Dos ángulos adyacentes son suplementarios, porque valen un semiplano, o ángulo llano, y un semiplano vale dos rectos.

Angulos *opuestos por el vértice* son dos ángulos que, teniendo el mismo vértice, tienen los lados del uno prolongaciones de los lados del otro; son iguales, por tener el mismo suplemento.

CONSECUENCIA.—Cuando dos rectas se cortan, si uno de los cuatro ángulos que forman es recto, serán también rectos los otros tres.

La suma de todos los ángulos consecutivos que pueden formarse en un punto de una recta y a un lado de la misma es igual a dos ángulos rectos, porque equivalen al semiplano que tiene por base dicha recta.

CONSECUENCIA.—La suma de todos los ángulos consecutivos que pueden formarse en un plano alrededor de un punto, como vértice común, es igual a cuatro ángulos rectos.

Bisectriz de un ángulo es la recta que, pasando por el vértice, divide el ángulo en dos ángulos iguales.

CONSECUENCIA.—Las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

156. *Nota.*—No nos proponíamos entrar en demostraciones; pero cuando son tan sencillas como las de las siguientes proposiciones, no podemos resistir al deseo de darlas, en la seguridad de que los niños, para quienes se escriben estas NOCIONES, las entenderán perfectamente, si tienen regular inteligencia y son medianamente aplicados. Muchas de las demostraciones versan sobre la igualdad o desigualdad de las figuras, y las que no versan sobre la igualdad, se fundan en otras que tienen por base la igualdad. El modo primero y fundamental de probar la igualdad de dos figuras es la *superposición*. Superponer una figura a otra es colocar la primera encima de la segunda, y si, una vez así colocadas, los límites de la una se confunden con los límites de la otra, de tal manera, que nos producen la *sensación* de una sola figura, las dos figuras se dice que coinciden y son iguales. La superposición puede hacerse de dos maneras, llamadas *directa* e *inversa*. Cuando la cara inferior de una figura plana se coloca sobre la cara superior de otra figura plana, la superposición se llama directa. Cuando la cara superior de una figura plana se coloca sobre la superior de otra figura plana, o la inferior sobre la inferior, la superposición es inversa. Esto se comprenderá mejor con los siguientes ejemplos: si sobre una mesa tenemos dos hojas de papel separadas, y hacemos resbalar una de ellas sobre la mesa, sin invertirla, hasta que se coloque encima de la otra hoja, la superposición de las hojas será directa. Si tenemos una sola hoja de papel, trazamos en ella una recta que la divida en dos partes iguales, y doblamos la hoja por esa recta, haciendo que una mitad se confunda con la otra mitad,

la cara superior de media hoja se habrá colocado sobre la cara superior de la otra media hoja, o la inferior sobre la inferior, según hayamos doblado la hoja, y entonces la superposición será inversa. Cuando las figuras han coincidido, tanto si ha sido por superposición directa como si ha sido por superposición inversa, las figuras son iguales. Cuando las figuras hayan coincidido por superposición inversa, girando alrededor de una recta, como antes han coincidido las dos medias hojas de papel, las figuras, además de iguales, se llaman *simétricas*, con respecto a aquella recta, que recibe el nombre de *eje de simetría* de las dos figuras.

Dos rectas pueden siempre superponerse, pero no coincidirán si no son iguales; ni aun siendo iguales coincidirán, si no se colocan de manera que un extremo de la una coincida con un extremo de la otra; entonces, los otros dos extremos coincidirán necesariamente.

Si dos ángulos son iguales y se superponen de manera que coincidan los vértices, y un lado del uno coincida con un lado del otro, el segundo lado del primero coincidirá necesariamente con el segundo lado del segundo. He aquí los principios que hemos de tener presentes para comprobar la coincidencia, y, por consiguiente, la igualdad de dos figuras: la igualdad de rectas hace que, convenientemente superpuestas, coincidan sus extremos, y la igualdad de ángulos hace que coincidan las direcciones de sus lados.

Rectas perpendiculares y oblicuas.

157. *Rectas perpendiculares* son las rectas que forman entre sí ángulos rectos (fig. 8), y rectas oblicuas, las que forman entre sí ángulos oblicuos (fig. 9).

Proposición 1.ª *Por un punto de una recta sólo puede trazársele una recta perpendicular.*

Que se puede trazar una perpendicular, lo admitimos sin probarlo, porque es bastante claro. Vamos a probar tan sólo que no puede trazarse más que una perpendicular. En efecto: si por el punto O (fig. 8) trazamos una recta cualquiera OE, se ve que forma con la recta OB un ángulo menor que el recto COB; luego es oblicua. Y como lo mismo podría decirse de todas las rectas que pasen por el punto O, menos de la OC, no hay más perpendicular a la recta AD por el punto O que la OC.

Proposición 2.ª *Por un punto fuera de una recta sólo puede trazarse a ésta una perpendicular.*

Admitiendo que por un punto situado fuera de una recta

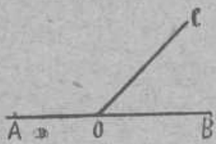

Fig. 7.

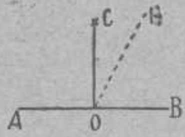

Fig. 8.

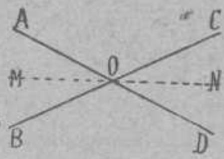

Fig. 9.

puede trazarse a ésta una perpendicular, lo cual es casi evidente, vamos a probar que no pueden pasar dos.

Sea la figura 10, en que CO es una perpendicular a la AB trazada por el punto C. Vamos a demostrar que otra recta cualquiera CD no es perpendicular a la AB. Si prolongamos la CD

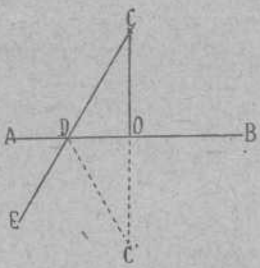

Fig. 10.

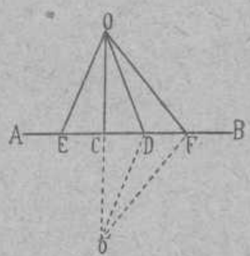

Fig. 11.

hasta E, la CO hasta C′, siendo OC′ = CO, unimos D con C′ y doblamos la figura por AB, la recta OC tomará la posición OC′, por ser iguales los ángulos COA y C′OA, ambos rectos, y la DC, la posición DC′; luego los ángulos CDO y C′DO que designamos para los números 1 y 2 son iguales (1); pero el ángulo 1, el ángulo 2 y el ángulo 3 valen juntos dos rectos; luego el ángulo 1 y el ángulo 2 valen menos de un recto cada uno; luego la recta CD forma con la AB un ángulo agudo, y, por lo tanto, no es perpendicular a la AB.

---

(1) Ponga el lector los números 1, 2 y 3 en los ángulos CDO, ODC′ y C′DE (figura 10).

158. Proposición 3.ª *Si desde un punto exterior a una recta, se trazan una perpendicular y una oblicua a dicha recta, que terminen en ella, la perpendicular será más corta que la oblicua.*

En efecto: sea la recta AB (fig. 11), la perpendicular OC y la oblicua OD. Si prolongamos OC en una longitud CO′ igual a OC y unimos D y F con OO′ y doblamos por OB la figura, el punto O caerá en O′, y, por consiguiente, coincidirán DO con DO′, y FO, con FO′.

La figura nos dice:

$$\text{la recta } OO' < \text{la quebrada } ODO';$$

luego

$$\text{la mitad de la recta } OCO' < \text{la mitad de la quebrada } ODO',$$

o sea,

$$OC < OD.$$

Proposición 4.ª *Las oblicuas cuyos pies se apartan igualmente del pie de la perpendicular serán iguales.*

Sean las oblicuas OD y OE, cuyos pies D y E están a igual distancia del pie de la perpendicular. Doblando la figura por la perpendicular OC, se ve al momento que la oblicua OD coincide con la OE; luego son iguales.

Proposición 5.ª *La oblicua cuyo pie se aparte más del pie de la perpendicular será la mayor.* En la figura vemos que la quebrada envolvente OFO′ es mayor que la quebrada envuelta ODO′; luego la mitad de la envolvente, que es OF, es mayor que la mitad de la envuelta, que es OD.

159. Proposición 6.ª *Si por el punto medio de una recta se levanta una perpendicular a dicha recta, todos los puntos de la perpendicular están a igual distancia de los extremos de la recta.*

En la figura 12, las distancias DA y DB son iguales, por ser oblicuas cuyos pies se apartan lo mismo del pie de la perpendicular.

160. Proposición 7.ª *Todo punto de la bisectriz de un ángulo está a igual distancia de los lados del ángulo.*

En la figura 13 se ve que doblándola por la bisectriz MO de arriba a abajo, la recta OQ coincidirá con OP, por ser iguales los ángulos MOP y MOQ, y la distancia MQ coincidirá con MP, porque si no, habría por el punto M dos perpendiculares a una recta.

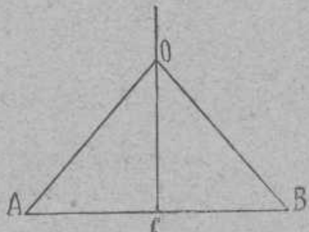

Fig. 12.

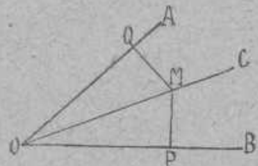

Fig. 13.

Rectas paralelas.

161. Se llaman *rectas paralelas* las rectas que, situadas en un mismo plano, no se encuentran, aunque se prolonguen indefinidamente.

Dos rectas CD y EF (fig. 14) perpendiculares a una tercera AB son paralelas entre sí, porque si no fuesen paralelas, se

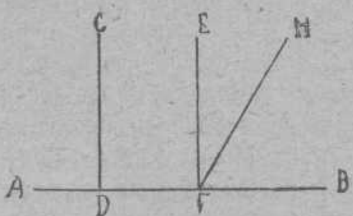

Fig. 14.

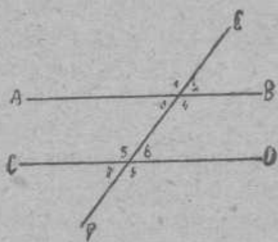

Fig. 15.

encontrarían, y por el punto de encuentro habría dos perpendiculares a una recta, lo cual no puede ser.

162. *Si a una recta* AB (fig. 14) *se traza una perpendicular* CD *y una oblicua* FH, *la perpendicular* CD *y la oblicua* FH *no son paralelas, sino que se encuentran necesariamente, si se las prolonga.* Esta proposición se llama *postulado de Euclides.*

Por un punto fuera de una recta se puede trazar a ésta una paralela y sólo una.

Si dos rectas son paralelas, una tercera recta que corte a una de ellas cortará a la otra.

Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

Si dos rectas son paralelas, sus perpendiculares también serán paralelas.

Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas también se cortarán.

163. Si dos rectas paralelas se cortan por una tercera, formarán con ésta ocho ángulos, que para abreviar designaremos con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, puestos cerca del vértice en cada ángulo. (Fig. 15.) Los ángulos 3, 4, 5 y 6, que están entre las paralelas, se llaman ángulos *internos;* los ángulos 1, 2, 7 y 8, que están fuera de las paralelas, se llaman ángulos *externos.* Los ángulos internos 3 y 6, que están a distinto lado de la secante y no son adyacentes, se llaman *alternos internos.* Del mismo modo son *alternos internos* el 4 y el 5. Los ángulos externos 1 y 8, que están a distinto lado de la secante y no son adyacentes, se llaman alternos externos; asimismo son alternos externos el 2 y el 7. Los ángulos 1 y 5, el primero externo y el segundo interno, situados a un mismo lado de la secante y no adyacentes, se llaman *correspondientes.* Del mismo modo son correspondientes los ángulos 3 y 7, los ángulos 2 y 6 y los ángulos 4 y 8; los ángulos 4 y 6, internos y situados a un mismo lado de la secante, se llaman *colaterales.* Del mismo modo son colaterales el 3 y el 5. Los ángulos alternos internos son iguales; los ángulos alternos externos son también iguales, y asimismo son iguales dos ángulos correspondientes; los ángulos colaterales son suplementarios. Dos cualesquiera de los ocho ángulos, si no son iguales, son suplementarios.

Si las rectas cortadas por una tercera no son paralelas, las igualdades dichas no se verifican.

164. *Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.*

Dos paralelas están siempre a igual distancia una de otra, como las vías o rieles de un tren o de un tranvía.

Si los lados de un ángulo son paralelos a los lados de otro ángulo, los dos ángulos serán iguales o suplementarios.

Si los dos son agudos o los dos son obtusos, serán iguales; si uno es agudo y el otro es obtuso, serán suplementarios. Claro es que si ambos son rectos, serán iguales.

Si los lados de un ángulo son perpendiculares a los lados de otro ángulo, los dos ángulos serán iguales o suplementarios; iguales, si ambos son agudos o ambos son obtusos; suplementarios, si el uno es agudo y el otro obtuso. Si ambos fuesen rectos, claro es que serían iguales.

Medida de una recta.

165. *Medir una recta* es averiguar cuántas veces contiene a otra recta conocida que se toma como unidad.

Para medir una recta se aplica sobre ella, a partir de uno de sus extremos, consecutivamente, cuantas veces se pueda, la recta que se toma como unidad.

Si no ha quedado resto alguno, la medida de la recta es un número entero. Si ha quedado resto, se divide la unidad en partes iguales y se aplica una de estas partes sobre el resto cuantas veces se pueda, y si cabe exactamente, la medida de la recta será un número fraccionario compuesto de un entero y una fracción. Si no hubiese cabido exactamente, podríamos dividir una de las partes anteriores en otras partes iguales y con una de éstas medir el último resto que quedó, y así sucesivamente, si no resultase resto nulo. Pero como esto no es prácticamente posible, despreciamos el resto cuando sea muy pequeño, y la medida de la recta sólo será aproximada.

Cuando la recta no contenga exactamente a la unidad, ni a ninguna de sus partes iguales, por pequeñas que sean, la recta es inconmensurable con aquella unidad; y si existe una expresión aritmética de la medida de dicha recta, aquella expresión se llama *número inconmensurable*.

Circunferencia.

166. Circunferencia (fig. 16) es *una curva plana y cerrada cuyos puntos equidistan de uno interior llamado* centro.

La distancia del centro a un punto de la circunferencia, o la recta que une el centro con un punto de la circunferencia, se llama *radio*.

La recta ilimitada que tiene dos puntos comunes con la circunferencia se llama *secante*.

La recta ilimitada que tiene un solo punto común con la circunferencia se llama *tangente*.

La recta limitada que tiene sus extremos en dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda.*

La cuerda que pasa por el centro se llama *diámetro.*

En la circunferencia (fig. 16), OA es el radio; MN, una secante; PQ, una tangente; CD, una cuerda; EF, un diámetro.

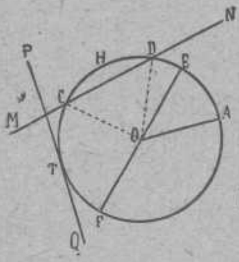

Fig. 16.

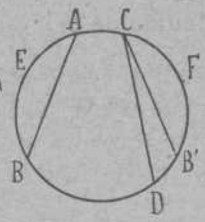

Fig. 17.

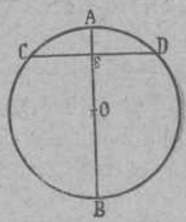

Fig. 18.

Una porción cualquiera de circunferencia se llama *arco;* tal es CHD; y la recta CD se llama cuerda del arco CHD.

167. Cuando una circunferencia no tiene el mismo centro que otra circunferencia, la designaremos por la letra de su centro. Así, para designar la circunferencia de la figura 16, decimos la circunferencia O.

Si dos o más circunferencias tuviesen el mismo centro, se designaría cada una de ellas por las letras de su radio puestas entre paréntesis. Así, si en la misma figura hubiese otra circunferencia, con el centro en O, que tuviese por radio OA', para designar las dos circunferencias diríamos: circunferencia (OA) y circunferencia (OA').

168. *Todo diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales, llamadas semicircunferencias.* Se prueba fácilmente doblando la figura por el diámetro.

Un diámetro es mayor que otra cuerda cualquiera que no pase por el centro, porque si en la figura anterior unimos O con C y con D, la quebrada COD, que está formada de dos radios, es mayor que la recta CD; luego el diámetro EF, que vale lo mismo que dos radios, es mayor que la cuerda CD.

169. *En una circunferencia o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y a mayor arco corresponde mayor cuerda, siempre que los arcos sean menores que media circunferencia.*

En la figura 17, el arco AEB es igual al CFB' y la cuerda

AB es igual a la cuerda CB'; el mismo arco AEB es menor que el CFD, y la cuerda AB es menor que la cuerda CD.

170. *En una circunferencia, un diámetro perpendicular a una cuerda divide la cuerda en dos partes iguales, y también divide en dos partes iguales los dos arcos en que la cuerda divide a la circunferencia.* Se probaría esto fácilmente doblando la circunferencia por el diámetro. (Véase la figura 18.)

171. *En circunferencias iguales o en una misma circunferencia, las cuerdas iguales están a igual distancia del centro; de dos cuerdas desiguales, la mayor dista menos del centro.* Así, en la figura 19, siendo iguales las cuerdas AB y CD, sus distancias al centro OE y OF son iguales, y siendo la cuerda AH mayor que la cuerda CD, la distancia OG será menor que OF.

172. *La tangente a la circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto,* porque el radio es

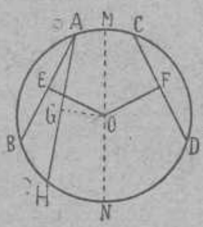

Fig. 19.

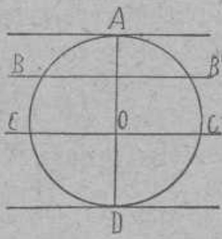

Fig. 20.

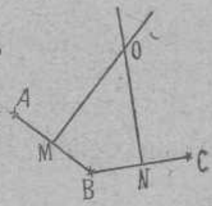

Fig. 21.

la recta más corta que puede trazarse desde el centro a la tangente.

173. *Los arcos comprendidos entre rectas paralelas, ya sean secantes, ya sean una secante y una tangente, ya sean tangentes, son iguales.* Se demuestra fácilmente doblando la circunferencia por el diámetro perpendicular a dichas rectas (figura 20).

Por un punto dado en un plano pueden pasar una infinidad de circunferencias que estén situadas en el mismo plano, pues pueden servir de centros todos los puntos del plano, excepto el punto dado.

Por dos puntos dados en un plano pueden pasar infinidad de circunferencias, pues pueden servir de centros todos los puntos de la perpendicular trazada por el punto medio de la recta que une los puntos dados.

Por tres puntos no situados en línea recta puede pasar una circunferencia, y sólo una.

En efecto: sean los tres puntos A, B y C (fig. 21). Si unimos A con B y B con C por medio de rectas y por el punto medio M de la recta AB trazamos la perpendicular MH a la AB, y por el punto medio N de la BC trazamos la perpendicular NK a la BC, estas dos perpendiculares se encontrarán en un punto O, por ser perpendiculares a dos rectas que se cortan. Ahora, el punto O, por pertenecer a la perpendicular MH, equidista de los puntos A y B, y por pertenecer a la perpendicular NK, equidista de los puntos B y C; luego el punto O es un punto equidistante de los puntos A, B y C; luego, si tomamos el punto O como centro y la distancia OA como radio, la circunferencia que se trace pasará por A, por B y por C. No puede pasar otra circunferencia por dichos tres puntos, porque no existe otro punto que el punto O equidistante de los tres. De aquí se deduce que dos circunferencias distintas pueden tener uno o dos puntos comunes, pero no tres, porque si tuviesen tres, se confundirían.

Posiciones relativas de dos circunferencias en un plano.

174. Las diferentes posiciones generales de dos circunferencias en un plano son cinco: *exteriores*, *tangentes exteriores*, *secantes*, *tangentes interiores* e *interiores*.

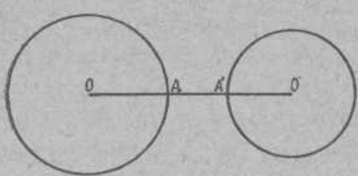

Fig. 22.

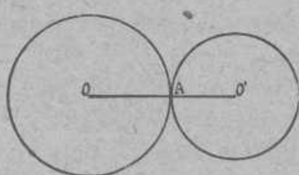

Fig. 23.

Llámanse *exteriores* cuando los puntos de la una están todos fuera de la porción de plano limitado por la otra (fig. 22).

Llámanse *tangentes exteriores* cuando tienen un punto común y todos los demás puntos de la una están fuera del plano limitado por la otra (fig. 23).

Llámanse *secantes* las que tienen dos puntos comunes (figura 24).

Llámanse *tangentes interiores* las que tienen un punto co-

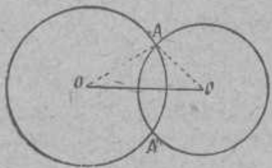

Fig. 24.

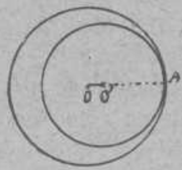

Fig. 25.

mún y los demás puntos de la una están dentro del plano limitado por la otra (fig. 25).

Llámanse *interiores* cuando todos los puntos de la una están dentro de la porción del plano limitado por la otra (fig. 26).

Un caso particular de las interiores es aquel en que las circunferencias tienen el mismo centro, y se llaman *concéntricas* (figura 27).

La figura 21 nos dice claramente que, *cuando las circun-*

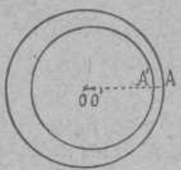

Fig. 26.

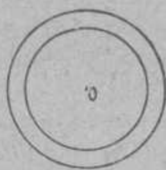

Fig. 27.

ferencias son exteriores, la distancia entre sus centros es mayor que la suma de los radios.

Cuando son tangentes exteriores, la figura 23 nos dice que *la distancia de los centros es igual a la suma de los radios.*

Cuando son secantes, la figura 24 nos dice que *la distancia entre sus centros es menor que la suma de los radios*, y fácilmente se probaría que es *mayor que la diferencia de los mismos.*

Cuando son tangentes interiores, en la figura 25 vemos que *la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios.*

Cuando son interiores, de la figura 26 se saca fácilmente que *la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

Si son concéntricas, la distancia de sus centros es nula.

Medida de un ángulo.

175. *Medida de un ángulo* es su relación con otro ángulo que se toma como unidad. La unidad de ángulo es el ángulo *recto.*

Llámase *arco correspondiente a un ángulo* el arco de circunferencia comprendido entre sus lados, y cuyo centro es el vértice del ángulo.

Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes, trazados con el mismo radio, son iguales.

Los ángulos se miden por medio de sus arcos correspondientes, y para ello se divide la circunferencia en cuatro partes iguales, llamadas *cuadrantes;* el cuadrante, en *90 grados;* el grado, en *60 minutos,* y el minuto, en *60 segundos.*

La circunferencia tiene, por consiguiente, *360 grados.*

El arco correspondiente a un ángulo recto es un cuadrante. El cuadrante es el arco que se toma como unidad.

Del mismo modo que el cuadrante se divide en 90 grados, el grado en 60 minutos y el minuto en sesenta segundos, así el ángulo recto se divide en 90 grados; el grado de ángulo, en 60 minutos, y el minuto de ángulo, en 60 segundos.

La medida de un ángulo es la misma que la de su arco correspondiente.

176. Los ángulos, con relación a una circunferencia situada en el plano del ángulo, pueden ser *centrales, inscritos, semiinscritos, exinscritos, interiores* y *exteriores.*

Llámase *central* un ángulo cuando su vértice está en el centro de la circunferencia.

Llámase *inscrito* un ángulo cuando su vértice está en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.

Llámase *semiinscrito* un ángulo cuando su vértice está en la circunferencia y sus lados son una cuerda y una tangente.

Llámase *exinscrito* un ángulo cuando tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son una cuerda y la prolongación de otra.

Angulo *interior* es el que tiene su vértice dentro de la circunferencia.

Angulo *exterior* es el que tiene su vértice fuera de la circunferencia, y sus lados son dos secantes, o una secante y una tangente, o dos tangentes.

Los ángulos inscrito, semiinscrito, exinscrito, interior no central y exterior se llaman *ángulos excéntricos,* porque tienen su vértice fuera del centro de la circunferencia. Los ángulos inscrito, semiinscrito y exinscrito se llaman *periféricos*, porque su vértice está en la circunferencia *(periferia)*.

En la figura 28, el águlo AOB es central, el ángulo A'O'B'

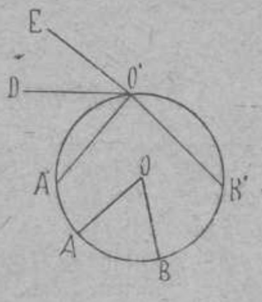

Fig. 28.

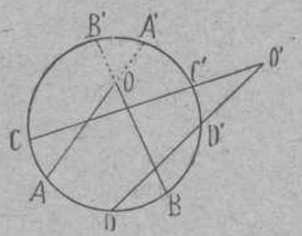

Fig. 29.

es inscrito, el ángulo A'O'D es semiinscrito y el ángulo A'O'E es exinscrito.

En la figura 29, el ángulo AOB es interior, y el ángulo CO'D es exterior.

177. *La medida del ángulo central* AOB (fig. 28) *es la misma que la del arco* AB, *comprendido entre sus lados, y, por lo tanto, la medida de un ángulo recto es la misma que la de un cuadrante.*

El ángulo inscrito A'O'B', *tiene la misma medida que la mitad del arco* A'B', *comprendido entre sus lados.*

El ángulo semiiscrito A'O'D *tiene la misma medida que la mitad del arco* O'A', *comprendido entre sus lados.*

El ángulo exinscrito A'D'E *tiene la misma medida que la mitad de la suma de los arcos* O'A' y O'B', *comprendidos entre sus lados y los del opuesto por el vértice.*

El ángulo interior AOB (fig. 29) *tiene la misma medida que la mitad de la suma de los arcos* AB y A'B', *comprendidos entre los lados del ángulo y los del opuesto por el vértice.*

El ángulo exterior CO'D *tiene la misma medida que la mitad de la diferencia de los arcos* CD y C'D', *comprendidos entre los lados del ángulo.*

178. De aquí se deduce que si los lados de un ángulo inscrito pasan por los extremos de un diámetro, el ángulo será recto; si los lados de un ángulo interior pasan por los extremos de un diámetro, el ángulo será obtuso, y si los lados de un ángulo exterior pasan por los extremos de un diámetro, el ángulo será agudo.

Polígonos.

179. *Llámase polígono la porción de plano limitada por rectas.* Estas rectas se llaman *lados del polígono.* El ángulo que forman cada dos lados consecutivos se llama *ángulo del polígono,* y los vértices de los ángulos, *vértices del polígono.* La línea quebrada que cierra el polígono se llama *contorno del polígono,* y la medida de este contorno se llama *perímetro.* Si el contorno es convexo, el polígono se llama convexo, y si es cóncavo, el polígono se llama cóncavo.

Diagonal es la recta que une dos vértices no consecutivos del polígono.

Llámase polígono *equilátero* el que tiene todos sus lados iguales, y *equiángulo,* el que tiene iguales todos sus ángulos.

Polígono *regular* es el que tiene iguales todos sus lados e iguales todos sus ángulos, o que es a un mismo tiempo equilátero y equiángulo.

Los polígonos se clasifican por el número de sus lados en:

Triángulo	si tiene	3	lados
Cuadrilátero	—	4	—
Pentágono	—	5	—
Exágono	—	6	—
Eptágono	—	7	—
Octógono	—	8	—
Eneágono	—	9	—
Decágono	—	10	—
Dodecágono	—	12	—
Etc.			

Triángulos.

180. Ya se ha dicho que *triángulo es el polígono de tres lados, o sea la porción de plano limitada por tres rectas.*

Un triángulo tiene tres lados y tres ángulos.

Se llama *base* de un triángulo uno cualquiera de sus lados. Cuando uno de los lados es horizontal, se llama con preferencia *base* dicho lado horizontal.

Llámase *altura* del triángulo la perpendicular a la base, trazada desde el vértice opuesto y terminada en dicha base.

Los triángulos, por sus lados, pueden ser *equiláteros, isósceles y escalenos* (fig. 30).

Triángulo *equilátero* es el que tiene sus tres lados iguales.

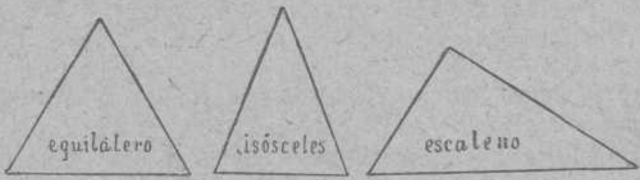

Fig. 30.

Triángulo *isósceles* es el que tiene dos lados iguales y uno desigual.

Triángulo *escaleno* es que tiene sus tres lados desiguales.

En el triángulo *isósceles*, el lado desigual es la *base.*

181. *Propiedades del triángulo.*—En todo triángulo, *un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos,* porque un lado es una recta y los otros dos forman una quebrada.

En todo triángulo, *un lado cualquiera es mayor que la diferencia de los otros dos.*

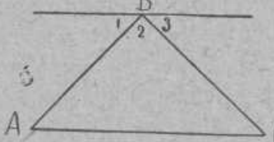

Fig. 31.

182. En un triángulo, *la suma de sus tres ángulos es igual a dos ángulos rectos* (fig. 31), porque, trazando por el vértice B una paralela a la base, los tres ángulos consecutivos, 1, 2 y 3, forman un semiplano o valen dos ángulos rectos; y como el ángulo 1 es igual al A, y el ángulo 3 es igual

al C, por alternos entre paralelos, y el ángulo 2 es el mismo B, la suma A + B + C valdrá dos rectos.

183. Los triángulos, por sus ángulos, pueden ser *rectángulos, obtusángulos y acutángulos* (fig. 32).

Triángulo *rectángulo* es el que tiene un ángulo recto.

Triángulo *obtusángulo* es el que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo *acutángulo* es el que tiene los tres ángulos agudos.

En el triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo

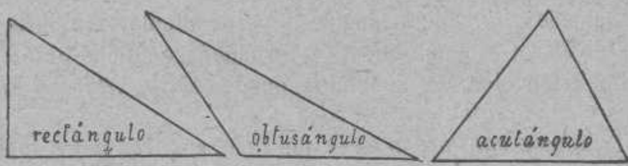

Fig. 32.

recto se llaman *catetos*, y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

En un triángulo rectángulo, la suma de los dos ángulos agudos es igual a un ángulo recto.

184. *Casos de igualdad de triángulos.*—1.° Dos triángulos son iguales *si tienen un lado del uno igual a un lado del otro, e iguales, respectivamente, los ángulos contiguos;* es decir, los ángulos que se forman en los extremos de aquellos lados iguales. Para probarlo, bastará colocar un triángulo encima de otro, de manera que coincidan los lados iguales, pues los otros lados coincidirán también por la igualdad de los ángulos.

2.° Dos triángulos son iguales *si tienen dos lados respectivamente iguales, e iguales los ángulos que forman estos lados.* Para probarlo, bastará colocar un triángulo encima del otro, de manera que coincidan los ángulos iguales; como los lados que forman esos ángulos son respectivamente iguales, los triángulos coincidirán.

3.° Dos triángulos son iguales *si los tres lados del uno son respectivamente iguales a los tres lados del otro.*

4.° Dos triángulos rectángulos son iguales *si tienen un cateto y el ángulo agudo contiguo del uno respectivamente iguales a un cateto y el ángulo agudo contiguo del otro.*

5.° Dos triángulos rectángulos son iguales *si tienen las hipotenusas iguales, y un ángulo agudo del uno igual a un ángulo agudo del otro.*

6.° Dos triángulos rectángulos son iguales *si tienen las hipotenusas iguales, y un cateto del uno es igual a un cateto del otro.*

7.° Dos triángulos rectángulos son iguales *si tienen los dos catetos del uno iguales respectivamente a los dos catetos del otro.*

Todos estos casos de igualdad de triángulos rectángulos se demuestran colocando un triángulo encima del otro, o lo que es lo mismo, por superposición.

185. En todo triángulo, *a los lados iguales se oponen ángulos iguales;* por esta razón, los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

En todo triángulo, *a mayor lado se opone mayor ángulo y a menor lado se opone menor ángulo, y,* recíprocamente, *a mayor ángulo se opone mayor lado, y a menor ángulo, menor lado;* por esta razón, en el triángulo rectángulo, la hipotenusa es mayor que uno cualquiera de los catetos, y en un triángulo obtusángulo, el lado que está enfrente del ángulo obtuso es mayor que cualquiera de los otros dos que están enfrente, cada uno, de un ángulo agudo.

Cuadriláteros.

186. Llámase *cuadrilátero* la porción de plano limitada por cuatro rectas o el polígono de cuatro lados.

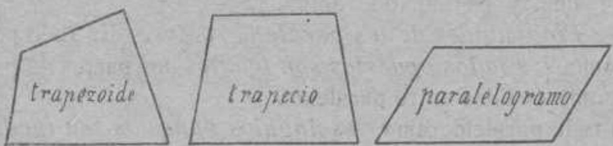

Fig. 33.

Los cuadriláteros se clasifican en *trapezoides, trapecios* y *paralelogramos* (fig. 33).

Se llama *trapezoide* el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a otro.

Trapecio es el cuadrilátero que tiene sólo dos lados opuestos paralelos. En el trapecio, los lados paralelos se llaman *bases*.

Paralelogramo es el cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos.

187. Los paralelogramos se clasifican en *romboides, rombos, rectángulos y cuadrados* (fig. 34).

Lámase *romboide* el paralelogramo que tiene dos lados

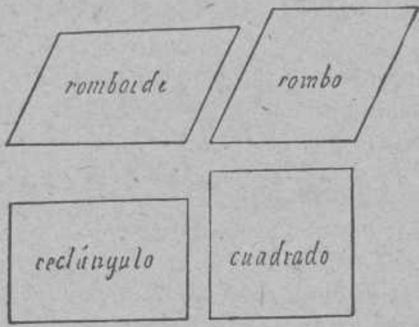

Fig. 34.

contiguos, o sea dos lados que concurren en un mismo vértice, desiguales, y los ángulos, oblicuos.

Rombo es el paralelogramo que tiene dos lados contiguos iguales, y los ángulos, oblicuos.

Rectángulo es el paralelogramo que tiene dos lados contiguos desiguales, y los ángulos, rectos.

Cuadrado es el paralelogramo que tiene dos lados contiguos iguales, y los ángulos, rectos.

188. *Propiedades de los paralelogramos.*—En todo paralelogramo, *los lados opuestos son iguales* por partes de paralelas comprendidas entre paralelas.

En todo paralelogramo, *los ángulos opuestos son iguales*, por tener sus lados paralelos y ser ambos ángulos agudos, o ambos ángulos rectos, o ambos ángulos obtusos.

En todo paralelogramo, *una diagonal le divide en dos triángulos iguales*.

En todo paralelogramo, *las diagonales se cortan en su punto medio*.

En todo cuadrilátero, *la suma de sus cuatro ángulos es igual a cuatro ángulos rectos*.

En el rectángulo y cuadrado, los cuatro ángulos son rectos. En los demás cuadriláteros se prueba descomponiendo el cuadrilátero en dos triángulos por medio de una diagonal. Como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, y los ángulos de los triángulos forman los del cuadrilátero, los ángulos del cuadrilátero valen también cuatro rectos.

189. *Casos de igualdad de paralelogramos.—Dos romboides son iguales si tienen dos lados contiguos respectivamente iguales e iguales los ángulos que forman.*

Dos *rombos* son iguales si tienen un lado y un ángulo del uno respectivamente iguales a un lado y un ángulo del otro.

Dos rectángulos son iguales si tienen dos lados contiguos del uno respectivamente iguales a dos lados contiguos del otro.

Dos cuadrados son iguales si un lado del uno es igual a un lado del otro.

Todos estos casos de igualdad se prueban fácilmente superponiendo los paralelogramos.

Problemas.

190. Problema *es una cuestión que tiene por objeto hallar una o más cantidades desconocidas, por medio de otra u otras cantidades conocidas.*

Si se conocen uno o más puntos, líneas, superficies o cuerpos, y queremos hallar o construir otro u otros puntos, líneas, superficies o cuerpos, el problema será *gráfico;* de *problemas gráficos* vamos a tratar ahora.

Como para resolver problemas gráficos hacen falta principalmente la regla, el compás y el transportador, y se utiliza frecuentemente la escuadra, vamos a decir dos palabras acerca de estos objetos.

191. *Regla* es un instrumento de madera, metal u otra substancia, más largo que ancho y de poco grueso, cuyos bordes son rectilíneos y que sirve para trazar líneas rectas en una superficie plana. Para trazar una recta sobre una superficie plana por medio de la regla, se aplica la regla al plano y se desliza la punta de un lápiz, pluma, tiralíneas, o yeso, si el plano es el encerado, siguiendo el borde de la regla. Para comprobar una regla, esto es, para averiguar si el borde de la misma es realmente rectilíneo, trazaremos en el plano del dibujo, por

medio de la regla, una línea de arriba abajo, quedando la regla a la izquierda; sin levantar la regla, fijaremos la punta de un alfiler u otro objeto análogo en un punto de la línea trazada, y haremos girar la regla alrededor del alfiler, y apoyada en él, hasta que se haya colocado enteramente a la derecha de la línea; si en esta última posición, el borde de la regla coincide con la línea, ésta será recta, y el borde de la regla, perfectamente rectilíneo. Claro es que sería lo mismo si la regla estuviese primero a la derecha de la línea y pasase luego a la izquierda.

192. *Compás* es un instrumento formado de dos piezas iguales, terminadas en punta, que se llaman piernas, unidas por un eje, alrededor del cual pueden girar, abriéndose o cerrándose, y que sirve para tomar medidas y para trazar arcos de circunferencia, o circunferencias.

193. El *transportador* es un semicírculo cuyo borde curvilíneo está dividido en 180 partes iguales, que representan grados. Si, por su tamaño, cada una de estas partes puede dividirse en otras partes iguales, cada una de estas partes más pequeñas representará una fracción de grado. Así, si se ha dividido cada parte o grado en dos partes iguales, cada una expresará medio grado o treinta minutos; si se ha dividido cada grado en tres partes iguales, cada una de estas partes expresará veinte minutos, etc.

Este instrumento sirve para construir ángulos cuya graduación se conoce y también ángulos iguales a otros dados. Si con él se construyen ángulos de 90°, servirá también para trazar rectas perpendiculares a otras.

194. *Escuadra* propiamente dicha es un instrumento forma-

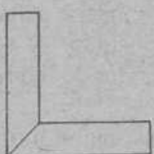

Fig. 55.

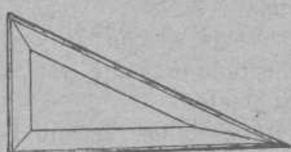

Fig. 56.

do por dos reglas, unidas de manera que un borde de la una con un borde de la otra formen ángulo recto. También se llama escuadra una pieza de madera, metal u otra substancia en forma de triángulo rectángulo (figs. 35 y 36).

La escuadra sirve para trazar rectas perpendiculares a otras, y también para trazar rectas paralelas.

Problemas.

195. 1.° *Trazar una recta por un punto dado.*—Hágase pasar el borde de una regla por el punto dado, y deslícese la punta de un lápiz o de un tiralíneas a lo largo de dicho borde, y se tendrá la recta pedida. Como la regla puede tomar infinidad de posiciones, sin que su borde deje de pasar por el punto dado, por un punto dado pueden trazarse infinidad de rectas, y el problema se llama indeterminado.

2.° *Trazar una recta por dos puntos dados.*—Hágase pasar el borde de una regla por uno de los puntos dados, y sin dejar de pasar por dicho punto, hágase girar la regla hasta que pase el borde por el otro punto dado, deslícese la punta del lápiz o tiralíneas por el borde de la regla y se tendrá la recta pedida.

3.° *Trazar una circunferencia conociendo el centro y el radio.*—Tómese una abertura de compás (1) igual al radio dado; póngase una punta del compás en el centro dado y hágase girar, siempre en el mismo plano, la otra punta del compás alrededor de la primera, y la punta móvil describirá la circunferencia pedida.

4.° *Trazar con un radio dado una circunferencia que pase por dos puntos dados.*—Con una abertura de compás igual al radio dado, y tomando como centros los puntos dados, se trazarán dos circunferencias o dos arcos. Si estas circunferencias o arcos se cortan, los dos puntos de intersección serán los centros de dos circunferencias que resuelven el problema. En la figura 37, los arcos se han cortado en O y O′ y las circunferencias que se buscaban son la (OA) y la (O′A). Si los arcos hubiesen resultado tangentes, no hubiera habido más que una circunferencia que pasase por los dos puntos dados. Si los arcos no se hubiesen encontrado, no se hubiera podido resolver el problema.

5.° *Construir un ángulo igual a otro dado.*—Sea el ángulo AOB (fig. 38). Se toma una recta indefinida XY y en ella un punto O′; con un radio cualquiera, OM, se traza el arco MN correspondiente al ángulo AOB, y con el mismo radio y desde

---

(1) Entendemos, aunque impropiamente, por abertura de compás la distancia entre sus puntas.

O' como centro, se traza el arco M'N' igual al MN; se une el punto N' con O' y resultará el ángulo M'O'N', igual el ángulo dado.

Resolver el mismo problema por el transportador.—Se colocará el transportador sobre el ángulo dado, de manera que el

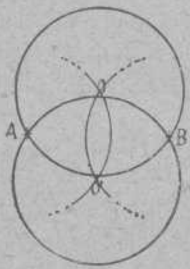

Fig. 37.

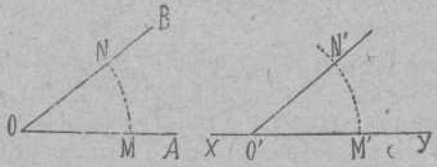

Fig. 38.

centro coincida con el vértice del ángulo y el diámetro con el lado OA. Luego se verá el punto de la semicircunferencia por donde pasa el otro lado del ángulo. Después se hará que el diámetro del transportador coincida con la recta XY, y el centro, con el punto O'; se unirá el punto O' con el punto de la semicircunferencia por donde pasaba el otro lado del ángulo dado, y se tendrá el ángulo pedido.

6.° *Construir por medio del transportador un ángulo de un número dado de grados, por ejemplo 30°.*—Se hará coincidir el diámetro del transportador con una recta indefinida y se señalará en ella el punto que coincide con el centro del instrumento; se buscará la división correspondiente a 30° y se señalará un punto en el papel o encerado donde ha de trazarse el ángulo; luego se unirá este último punto con el señalado en la recta indefinida, y se tendrá el ángulo pedido.

7.° *Trazar por medio del transportador una recta perpendicular a otra, por un punto dado en esta.*—Hágase coincidir el diámetro del transportador con la recta, y el centro, con el punto dado; búsquese en el transportador la división correspondiente a 90°; señálese en el papel o encerado el punto correspondiente a 90°, y trácese la recta que une ese punto con el punto dado.

Resolver el mismo problema por la escuadra.—Colóquese la escuadra de manera que uno de los lados del ángulo recto coincida con la recta dada, y el vértice, con el punto dado; deslícese por el otro lado del ángulo recto de la escuadra la punta del lápiz, tiralíneas o yeso, y resultará la perpendicular pedida.

Construir el mismo problema por medio de la regla y el compás.—Se tomarán con el compás en la recta dada, a uno y otro lado del punto dado, distancias iguales, señalando los extremos de éstas; tomando luego como centros estos extremos, trazaremos con un mismo radio, encima de la recta, dos arcos que se corten, y luego, con la regla, haremos pasar una recta por el punto dado y por el punto de intersección de los arcos.

OBSERVACIÓN.—Para que los arcos puedan cortarse, es necesario que el radio sea mayor que la mitad de la distancia entre aquellos extremos que han servido de centros para trazar los arcos.

8.° *Trazar una perpendicular a una recta por un punto situado fuera de ella, por medio de la escuadra.*—Sea la recta AB y el punto C (fig. 39). Hágase que uno de los lados del

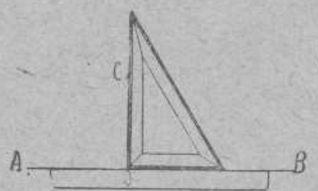

Fig. 39.

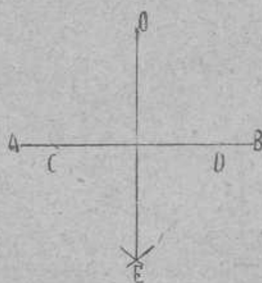

Fig. 40.

ángulo recto de la escuadra coincida con la recta dada y hágase resbalar la escuadra sobre la recta, hasta que el otro lado del ángulo recto de la misma pase por el punto dado. Deslícese por este segundo lado de la escuadra la punta del lápiz, tiralíneas, etc., y se tendrá la recta pedida.

OBSERVACIÓN.—Para que la escuadra pueda resbalar a lo largo de una recta, conviene ajustar el borde de una regla a dicha recta y hacer resbalar la escuadra sobre el borde de la regla. Si la distancia del punto dado a la recta fuese mayor que el mayor de los lados del ángulo recto de la escuadra, el problema no podría resolverse con este instrumento: habría que apelar a la regla y al compás, y resolverlo como se dirá en el problema siguiente.

9.° *Trazar por medio de la regla y el compás una perpendicular a una recta por un punto dado fuera de ella.*— Sea la recta AB y el punto O (fig. 40). Tomando una abertura de compás mayor que la distancia del punto a la recta, sirviendo de centro el punto dado, se cortará la recta en dos puntos, C y D; desde cada uno de estos puntos como centro y con el mismo radio, se trazarán dos arcos que se corten en E; luego, por medio de la regla, haremos pasar una recta por el punto dado O, y por el punto de intersección E de los arcos, y se tendrá la perpendicular pedida, que es la OE.

OBSERVACIÓN.— Para que en la práctica salga mejor la perpendicular, conviene que el punto de intersección de los arcos y el punto dado se encuentren a distinto lado de la recta dada.

10.° *Trazar por un punto dado una paralela a una recta dada, por medio de la escuadra.*—Sea la recta AB, y un punto O (fig. 41). Se traza por medio de la escuadra una perpendicular a la recta AB por el punto O; se ajusta el borde de una

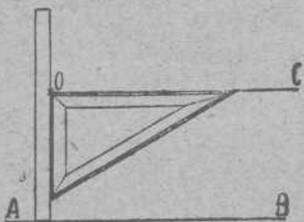

Fig. 41.

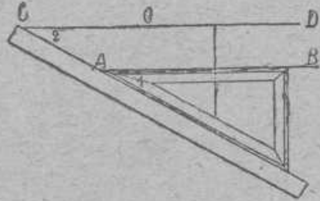

Fig. 42.

regla a esta perpendicular, y luego se hace resbalar por dicho borde uno de los catetos de la escuadra triangular hasta que el vértice del ángulo recto encuentre el punto dado O; se traza la recta a lo largo del otro cateto y se tendrá la paralela pedida.

De otro modo (fig. 42). Se ajusta un cateto de la escuadra triangular a la recta dada, y una regla a lo largo de la hipotenusa; se hace resbalar la escuadra a lo largo de la regla hasta que el cateto que coincidía con la recta pase por el punto dado; se traza luego la recta por el borde de este cateto, y se tendrá la paralela pedida.

Por el primer método, las rectas AB y OC son paralelas, por ser perpendiculares a la OA; y por el segundo método, las rectas AB y CD son paralelas, por ser iguales los ángulos correspondientes 1 y 2.

Resolver el mismo problema por medio de la regla y el compás.—Sea la recta AB y el punto O (fig. 43). Con una abertura suficiente de compás, tomando como centro el punto O, trácese el arco CD que corta a la recta AB en un punto D; con

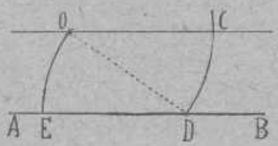

Fig. 43.

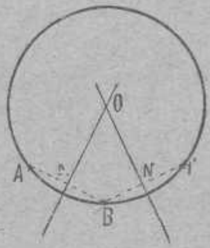

Fig. 44.

la misma abertura de compás, y tomando como centro el punto D, se trazará el arco OE, se tomará sobre DC una longitud, DC, igual al arco OE, y luego, por medio de la regla, trazaremos la recta OC, que será la paralela pedida.

11.° *Sumar dos o más rectas dadas.*—Para sumar dos o más rectas, se traza una recta indefinida, y sobre ella se colocan, a partir de un punto de ella, una a continuación de otra, las rectas dadas, de manera que el punto en que termine cada una sea el punto donde empiece la siguiente. La porción de recta indefinida, comprendida entre el punto de partida y el término de la última recta colocada sobre ella, será la suma pedida.

12.° *Restar de una recta mayor otra menor.*—Colóquese la menor sobre la mayor a partir del extremo de la mayor, y la parte de ésta comprendida entre los extremos no comunes de ambas será la diferencia pedida.

13.° *Multiplicar una recta por un número entero.*—Se hace lo mismo que en la suma, teniendo en cuenta que todos los sumandos son iguales a la recta dada. Así, multiplicar una recta dada por 5 será lo mismo que sumar cinco rectas iguales a la recta dada.

14.° *Dividir una recta en dos partes iguales.*—Tomando como centros los extremos de la recta y con una abertura de compás suficiente, trazaremos dos arcos a un lado de la recta y otros dos al otro lado de manera que se corten; haremos pasar una recta por los puntos de intersección, y esta recta dividirá a la recta dada en dos partes iguales.

15.° *Sumar y restar arcos del mismo radio.*—Se opera lo mismo que con las rectas, sin más diferencia que colocar los arcos sobre una circunferencia del mismo radio que ellos, a partir de un punto de ella.

16.° *Multiplicar un arco por un número entero.*—Se hace lo mismo que para sumar, teniendo en cuenta que todos los sumandos son iguales. Así, multiplicar un arco dado por 4 será lo mismo que sumar cuatro arcos iguales al arco dado.

17.° *Dividir un arco en dos partes iguales.*—Se traza la cuerda del arco y se divide ésta en dos partes iguales, como se ha dicho antes, y la recta que divide a la cuerda en dos partes iguales dividirá también el arco en dos partes iguales.

18.° *Sumar, restar, multiplicar y dividir ángulos.*—Se trazan los arcos correspondientes con el mismo radio, y se opera con estos arcos como se ha dicho antes. El punto de partida del arco sobre el que se hace la operación y el punto en que la operación termina, unidos con el centro del arco, dan el resultado pedido.

19.° *Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados, no situados en línea recta.*—Sean los puntos A, B y C (fig. 44). Uniendo por rectas A con B y B con C, y trazando perpendiculares a estas rectas por sus puntos medios, se encontrarán en un punto O, que será el centro de la circunferencia buscada. Tomando como centro el punto O, con una abertura de compás que llegue desde O hasta A, se trazará la circunferencia, que pasará por los puntos A, B y C, porque el punto O está a igual distancia de dichos tres puntos.

20.° *¿Cómo se hallará el centro de una circunferencia que no le tenga señalado?*—Se tomarán tres puntos en la circunferencia, y se trazarán las cuerdas que unen el punto primero con el segundo y el segundo con el tercero; se trazarán las perpendiculares a esas cuerdas en sus puntos medios, y el punto en que se encuentren será el centro buscado de la circunferencia. Del mismo modo podría hallarse el centro de un arco de circunferencia, pues siempre se podrán tomar en él tres puntos que podrán unirse por cuerdas.

21.° *Trazar una tangente a una circunferencia por un punto de ella.*—Trácese el radio desde ese punto, por ese mismo punto una perpendicular al radio, y se tendrá la tangente pedida.

22.° *Trazar una tangente a un arco de circunferencia en un punto dado en el arco.*—Búsquese el centro como se ha dicho antes; hallado el centro, únase con el punto dado, y trácese la perpendicular por el punto dado a esta última recta, que es el radio del arco.

23.° *Construir un triángulo, dado un lado y dos ángulos contiguos.*—Sobre una recta cualquiera, tómese una longitud igual al lado dado; por uno de los extremos se traza una recta que forme con dicho lado un ángulo igual a uno de los dados, y por el otro extremo se traza otra recta, que forme con el mismo lado un ángulo igual al otro de los ángulos dados. Si estas dos rectas se cortan, el punto de intersección será el vértice del triángulo opuesto al lado dado, y el triángulo quedará hecho.

Si dichas rectas no se encontrasen, no habría triángulo.

24.° *Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*—Constrúyase un ángulo igual al dado y tómense, a partir del vértice, sobre los lados del ángulo, longitudes respectivamente iguales a los lados dados; únanse los extremos de estas longitudes, y se tendrá el triángulo pedido.

25.° *Construir un triángulo, dados los tres lados.*—Trácese una recta igual a uno de los lados dados; tomando como centros los extremos, con radios respectivamente iguales a los otros lados dados, trácense dos arcos que se corten; uniendo el punto de intersección con los extremos del primer lado, se tendrá el triángulo pedido.

26.° *Construir un triángulo rectángulo, dados los dos catetos.*—Se traza un ángulo recto; sobre uno de los lados del ángulo recto se toma una longitud igual a uno de los catetos dados, y sobre el otro lado del ángulo, una longitud igual al otro de los catetos; se unen los extremos de estas longitudes, y se tendrá el triángulo rectángulo pedido.

27.° *Construir un triángulo rectángulo, dado un cateto y el ángulo que este cateto forma con la hipotenusa.*—Trácese un ángulo recto, y sobre uno de los lados del ángulo recto, y a partir del vértice, tómese una longitud igual al cateto dado, y por el otro extremo de este cateto trácese una recta que forme con dicho cateto un ángulo igual al dado, y esta recta, limitada en el punto donde encuentra el otro lado del ángulo recto, cerrará el triángulo rectángulo pedido.

28.° *Construir un triángulo isósceles, dada la base y un ángulo contiguo.*—Sobre una recta cualquiera, tómese la base dada, y por cada uno de los extremos trácese una recta que forme con la base un ángulo igual al dado, y que se prolongará hasta su encuentro con la otra; el triángulo que resulte será el pedido.

29.° *Construir un triángulo isósceles, dada la base y uno de los otros lados.*—Sobre una recta cualquiera, tómese la base dada, y sirviendo de centro cada uno de sus extremos, con un radio igual al lado dado, trácense dos arcos que se corten; únase el punto de intersección con los extremos de la base y se tendrá el triángulo pedido.

30.° *Construir un triángulo equilátero, dado un lado.*—Tómese sobre una recta cualquiera la longitud del lado dado, sirviendo de centro cada uno de sus extremos, y con un radio igual al mismo lado, trácense dos arcos que se corten; únase el punto de intersección con los extremos del lado dado y resultará el triángulo pedido.

31.° *Construir un romboide, dados dos lados contiguos y el ángulo comprendido.*—Constrúyase un ángulo igual al dado, y sobre uno de sus lados, a partir del vértice, tómese una longitud igual a uno de los lados dados, y sobre el otro lado del ángulo tómese una longitud igual al otro lado dado; por los extremos de estas longitudes, trácense paralelas a los lados del ángulo hasta su encuentro, y se tendrá el romboide pedido.

32.° *Construir un rombo, dado un lado y un ángulo.*—Fórmese un ángulo igual al dado, y sobre cada uno de sus lados, a partir del vértice, tómese una longitud igual al lado dado; trácese por cada uno de los extremos de estas longitudes una paralela al lado opuesto hasta su encuentro con la otra, y se tendrá el rombo pedido.

33.° *Construir un rectángulo, dados dos lados contiguos.*—Trácese un ángulo recto sobre uno de sus lados, y a partir del vértice, tómese una longitud igual a uno de los lados dados, y sobre el otro, una longitud igual al otro lado dado; trácese por cada uno de los extremos de estas longitudes una paralela al lado opuesto hasta su encuentro con la otra, y se tendrá el rectángulo pedido.

34.° *Construir un cuadrado, dado un lado.*—Trácese un ángulo recto; a partir del vértice, tómese sobre cada uno de los lados del ángulo una longitud igual al lado dado; trácese por cada uno de los extremos de estas longitudes una paralela al lado opuesto hasta su encuentro con la otra, y se tendrá el cuadrado pedido.

Círculo.

196. Llámase *círculo* la porción de plano limitado por la circunferencia. Es frecuente confundir la circunferencia con el círculo; pero, como se ve, son cosas muy distintas: la circunferencia es una línea, y el círculo, una superficie. Si una plaza es circular, los que andan o pasean por la plaza pasean o andan por el círculo, y los que entran o salen de la plaza entran o salen pasando por la circunferencia.

Radio del círculo es el radio de la circunferencia.

Cuerda del círculo es la cuerda de un arco de circunferencia.

Diámetro del círculo es el diámetro de la circunferencia. El diámetro divide al círculo en dos partes iguales, llamadas *semicírculos*.

Secante y tangente del círculo son la secante y tangente de la circunferencia, con la particularidad de que la tangente al círculo sólo tiene con el círculo el punto común que la tangente a la circunferencia tiene con ésta, mientras que la secante de un círculo tiene con el círculo infinidad de puntos comunes, que son todos los puntos de la cuerda que une los puntos de intersección de la secante con la circunferencia.

197. *Sector circular* es la porción de círculo limitada por dos radios y el arco que une sus extremos.

Segmento circular es la porción de círculo comprendida entre un arco y su cuerda. Una cuerda que no pase por el centro divide al círculo en dos segmentos, uno menor y otro mayor que un semicírculo. Cuando se dice segmento de círculo, si no se advierte otra cosa, se entiende siempre el segmento menor que un semicírculo.

Faja circular es la porción de círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas y los arcos que unen los extremos de éstas.

Corona o *anillo circular* es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas: es, pues, la diferencia entre el círculo mayor y el círculo menor limitados por dichas circunferencias.

Trapecio circular es la porción de corona comprendida entre dos radios del círculo mayor.

Bases del trapecio circular son los dos lados curvilíneos, y *altura,* la porción de radio de círculo mayor comprendida entre las bases.

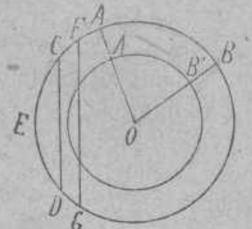

Fig. 45.

198. En el círculo mayor de la figura 45, la parte AOB del mismo es un sector circular, y la parte A'OB' del menor es también un sector circular.

En el mismo círculo mayor, la parte CDE es un segmento circular, y la parte CDGF, una faja circular.

La parte del plano comprendida entre la circunferencia (OA) y la (OA'), es el anillo o corona circular.

La parte de corona AB B'A' es un trapecio circular que tiene por bases los arcos AB y A'B', y por altura, AA' o BB'.

Polígonos inscritos y circunscritos al círculo, y círculos inscritos y circunscritos al polígono.

199. Se dice que un polígono está *inscrito* en un círculo, *cuando todos los vértices del polígono están en la circunferencia, y, por lo tanto, todos los lados del primero son cuerdas del segundo.*

Se dice que un polígono está *circunscrito* a un círculo, *cuando todos los lados del polígono son tangentes a la circunferencia.*

Se dice que un círculo está *inscrito* en un polígono, *cuando la circunferencia del círculo es tangente a todos los lados del polígono.*

Se dice que un círculo está *circunscrito* a un polígono, *cuando la circunferencia del círculo pasa por todos los vértices del mismo.*

Como se ve, decir que un polígono está inscrito en un círculo es lo mismo que decir que el círculo está circunscrito al polígono, y decir que un polígono está circunscrito a un círculo es lo mismo que decir que el círculo está inscrito en el polígono. En la figura 46, el polígono ABCDE está inscrito en el círculo, y el círculo, circunscrito al polígono; el polígono MNPQR está circunscrito al círculo, y el círculo, inscrito en el polígono.

200. Para *inscribir* un polígono en un círculo, *se toma en la circunferencia tantos puntos como lados haya de tener el polígono, y se unen por cuerdas los puntos consecutivos.*

Para *circunscribir* un polígono a un círculo, *se toman en*

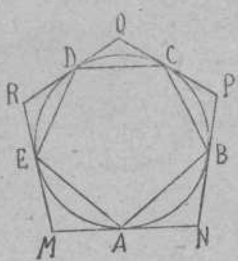

Fig. 47.

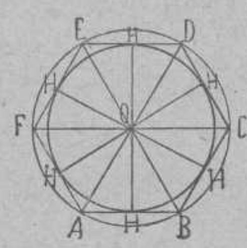

Fig. 48.

la circunferencia tantos puntos como lados haya de tener el polígono, y se trazan tangentes por dichos puntos.

201. Adviértase que, si en todo círculo puede inscribirse un polígono de cualquier número de lados, no siempre puede circunscribirse un círculo a un polígono de cualquier número de lados; y que si a todo círculo puede circuscribirse un polígono de cualquier número de lados, no es cierto que en un polígono de cualquier número de lados pueda inscribirse un círculo.

202. *El triángulo*, cualquiera que sea su forma, *es el único polígono que puede inscribirse en un círculo y circunscribirse a otro.*

Los demás polígonos, para que se puedan a la vez inscribir y circunscribir, es preciso, en general, que sean regulares.

Problemas de inscripción y circunscripción de polígonos.

1.° Dado un triángulo, circunscribirle un círculo e inscribirle otro.

Para circunscribir un círculo al triángulo, *se resolverá el problema trazando la circunferencia que pase por tres puntos, que en este caso son los tres vértices del triángulo. Se levantarán, por consiguiente, perpendiculares por los puntos medios de dos lados, y el punto de intersección será el centro del círculo circunscrito.*

Para inscribir un círculo en un triángulo, *se trazarán las* *bisectrices de dos de sus ángulos, y el punto de encuentro equidistará de los tres lados, y, por lo tanto, será el centro del círculo inscrito.*

2.° Inscribir un cuadrado en un círculo, y circunscribirle otro.

Para inscribir un cuadrado en un círculo, *se trazan en el círculo dos diámetros perpendiculares, y luego, las cuerdas que unan sus extremos consecutivos.*

Para circunscribir un cuadrado al círculo, *se trazan, como antes, dos diámetros perpendiculares, y por los extremos, se trazan tangentes a la circunferencia.*

3.° Inscribir en un círculo un exágono regular, y circunscribirle otro.

Para inscribir un exágono regular en un círculo, *se toma una abertura de compás igual al radio; se señala un punto en la circunferencia, y a partir de este punto, con aquella abertura de compás, se señala otro punto en la circunferencia; a partir de este segundo punto, se señala otro de la misma manera, y así se continuará, hasta que se haya recorrido toda la circunferencia; de este modo se verá que la abertura de compás ha podido colocarse exactamente seis veces. Uniendo por cuerdas los puntos consecutivos, se tendrá el exágono pedido.*

Para circunscribir un exágono regular a un círculo, *se trazarán tangentes por los puntos señalados al buscar los vértices del exágono regular inscrito.*

4.° Inscribir en un círculo un triángulo equilátero y circunscribirle otro.

Para inscribir en un círculo un triángulo equilátero, *se tomará una abertura de compás igual al radio, y con ella se dividirá la circunferencia en seis partes iguales, como para el exágono; luego, en lugar de unir los puntos consecutivos, se unirán el primero con el tercero, el tercero con el quinto y el quinto con el primero.*

Para circunscribir un triángulo equilátero a un círculo, después de haber señalado los vértices del inscrito, *se trazarán por ellos tangentes a la circunferencia.*

5.° Inscribir en un círculo un polígono regular de cualquier número de lados y circunscribirle otro del mismo número de lados.

Para inscribir en el círculo un polígono regular de cualquier número de lados, *se dividirá, si se puede, la circunferencia en tantas partes iguales como lados haya de tener el polígono, y se unirán, por cuerdas, los puntos consecutivos. Trazando, por los mismos puntos, tangentes a la circunferencia, resultará el polígono regular circunscrito.*

Cuando un polígono regular está inscrito en un círculo y circunscrito a otro (fig. 47), se observa que el centro del círculo circunscrito es el mismo que el del inscrito. Este centro común de los dos círculos, que está a igual distancia de todos los vértices del polígono y también a igual distancia de todos los lados del mismo, se llama *centro del polígono*. La distancia desde el centro del polígono a uno cualquiera de los vértices del mismo se llama *radio del polígono*, que, como se ve, es el radio del círculo circunscrito. La distancia OH desde el centro del polígono a uno cualquiera de sus lados se llama *apotema* del polígono. La apotema del polígono es el radio del círculo inscrito.

Observando la figura, veremos que trazando todos los radios del polígono regular, queda éste descompuesto en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Las bases de estos triángulos son los lados del polígono, y la altura de cada uno de los triángulos es la apotema del polígono.

Razón de la circunferencia al diámetro.

203. Así como medida de una recta es el número que expresa cuántas veces contiene a la unidad, o a la unidad y a una de sus partes iguales, del mismo modo, medida de una curva es el número que expresa cuántas veces la longitud de la curva contiene a la unidad, o a la unidad y a una de sus partes iguales. A la medida de una línea recta o curva se la llama valor numérico de la recta o de la curva.

204. *Razón de la circunferencia al diámetro es el cociente de dividir el valor numérico de la circunferencia por el valor numérico del diámetro.* A este cociente o razón se le designa con la letra griega π, llamada pi, y que vale 3,14159...

205. Si por curiosidad quisiéramos saber de dónde sale este valor, no pudiendo emplear en estas NOCIONES los procedimientos que enseña la Geometría, podríamos hacer lo siguiente.

Describir con un buen compás una circunferencia, por ejemplo, de 20 cm. de radio; trazar el diámetro, y desde uno de sus extremos, con una abertura de compás exactamente igual a medio centímetro, medir la circunferencia como si fuese una recta.

Si la medida se hace con todo cuidado, se obtiene para valor numérico de la circunferencia muy aproximadamente el número 251. El diámetro, que tiene 40 cm. u 80 medios centímetros, tendrá por valor numérico 80, ya que se ha tomado por unidad el medio centímetro. Luego, para hallar la razón de la circunferencia al diámetro, o sea el cociente de sus valores numéricos, no nos falta más que hacer la división, pues tenemos el dividendo, que es 251, y el divisor, que es 80. Si efectuamos, pues, esta división, tendremos:

$$\frac{251}{80} = 3{,}1375.$$

Si prescindimos de las dos últimas cifras del cociente, y aumentamos una unidad de su orden a la cifra de las centésimas, tendremos, aproximadamente:

$$\pi = 3{,}14.$$

Observación.—Si no conociéramos el valor de π por otros procedimientos seguros, el valor hallado de este modo sería dudoso, por la dificultad de hallar bien la longitud de la circunferencia.

De la expresión

$$\frac{C}{2r} = \pi$$

se deduce

$$C = 2\pi r,$$

y de ésta,

$$r = \frac{C}{2\pi};$$

luego la longitud de la circunferencia es igual al duplo del radio multiplicado por el valor de π; y el radio es igual a la longitud de la circunferencia dividida por el duplo del valor de π.

Areas.

206. Llámase *medida de una superficie* su relación con otra que se toma como unidad.

Area de una figura es la cantidad de su extensión superficial o *la medida de su superficie multiplicada por la unidad superficial.*

Unidad superficial es un cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud: la designaremos por u^2.

207. El área que sirve de fundamento a todas las demás es el área del rectángulo.

Medida de un rectángulo es igual al producto de los valores numéricos de su base y su altura.

El área de un rectángulo es igual al producto de su medida por la unidad superficial.

Ejemplo.—Un rectángulo tiene 7 unidades de base y 5 de altura, y se pregunta: ¿cuál será su medida?; ¿cuál será su área?

Su medida será

$$7 \times 5 = 35.$$

Su área será

$$35 \times u^2 \text{ (unidad superficial)} = 35 \text{ unidades superficiales.}$$

208. *Area de un cuadrado.*—Como el cuadrado es un rectángulo que tiene iguales la base y la altura, *su medida será el cuadrado o segunda potencia del valor numérico de su lado, y su área, el cuadrado del valor numérico de su lado multiplicado por la unidad superficial.*

Ejemplo.—Un cuadrado tiene 8 unidades de lado. Su medida sera $8^2 = 64$, y su área, 64 unidades superficiales.

209. El romboide tiene la misma área que un rectángulo que tenga igual base e igual altura que el romboide, y lo mismo le sucede con el rombo. Por lo tanto,

El *área de un romboide es igual al producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad superficial.*

El *área de un rombo es igual al producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad superficial.*

Como el romboide, el rombo, el rectángulo y el cuadrado son todos paralelogramos, podemos decir de un modo general:

El *área de un paralelogramo es igual al producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad superficial.*

210. *Area de un triángulo.*—Como un triángulo es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura, según se ve fácilmente trazando por dos vértices paralelas a los lados opuestos, su área *será la mitad del producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad superficial.*

211. *Area de un trapecio.*—Si en un trapecio se traza una diagonal, quedará descompuesto en dos triángulos que tienen la misma altura que el trapecio. Según esto, el área del trapecio *será igual al producto de la semisuma de los valores numéricos de sus bases por el valor numérico de su altura, multiplicado por la unidad superficial.*

212. *Area de un polígono regular.*—Hemos visto antes que uniendo el centro de un polígono regular con sus vértices, resultaba descompuesto en tantos triángulos iguales como lados tenía el polígono, triángulos que tenían por bases los lados del polígono y por altura la apotema. Luego el área de un polígono regular *será igual a la mitad del producto de su perímetro por el valor numérico de la apotema, multiplicado por la unidad superficial.*

213. *Area de un círculo.*—El círculo le consideramos como si fuese un polígono regular de muchísimos lados o de un número infinitamente grande de lados que tiene por perímetro la circunferencia y por apotema el radio. Luego

El área del círculo *es igual a la mitad del producto de los valores numéricos de la circunferencia y el radio, multiplicado por la unidad superficial.*

Si recordamos que la longitud de la circunferencia tenía por expresión $2\pi r$, el área del círculo se expresará por la fórmula πr^2, multiplicada por la unidad superficial.

EJEMPLO.—Si un círculo tiene 10 unidades de radio, su área será:

$$\pi \times 10^2 \times u^2 \text{ (unidad superficial)} = 3{,}14159\ldots \times 100 \times u^2$$
$$= 314{,}159 \text{ unidades superficiales.}$$

GEOMETRIA DEL ESPACIO

214. Ya hemos dicho que *la Geometría del espacio trata de las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano, o que, si están, no se hallan en el plano en que las figuras se representan.*

215. Representando sobre una extensión de dos dimensiones los objetos situados en el espacio, que tiene tres, las representaciones no podrán ser, en general, iguales a los objetos; pero sí que hay que procurar que se parezcan a ellos en cuanto sea posible. En el plano del dibujo, una recta situada en el espacio se representará, en general, por otra recta, más corta o más larga que la del espacio. Un plano ilimitado no tiene representación alguna, y para que podamos representarlo, le suponemos limitado de cualquier modo, pero con preferencia en forma de rectángulo.

En el plano del dibujo, un rectángulo situado en el espacio se representa por un paralelogramo romboide; luego cuando queramos dibujar en el papel o en el encerado un plano, que suponemos situado en el espacio, trazaremos un paralelogramo romboide. Al plano así representado le designaremos con una letra P puesta en el interior del romboide o por dos letras A y C colocadas en dos vértices opuestos. Así, el plano representado en la figura 48 se expresa diciendo: el plano P o el plano AC.

216. Un ángulo situado en el espacio se representará por otro ángulo, generalmente diferente del ángulo del espacio; por consiguiente, las rectas perpendiculares en el espacio no lo serán, en general, en el dibujo. Las paralelas en el espacio, esas sí se representan paralelas en el plano del dibujo. Un polígono se representará, en general, por otro polígono más o menos deformado. Una circunferencia se representará por otra curva, más o menos prolongada, que lleva el nombre de *elipse*. La representación de los cuerpos se hará de modo que resulte lo más parecida posible a los cuerpos mismos.

217. Observación.—Aunque las superficies y cuerpos geométricos son extensión pura que no impide ver a su través, como sucede en los cuerpos físicos no transparentes, sin embargo, trazamos de puntos las líneas que caen detrás de las superficies o cuerpos, como si éstos las hicieran invisibles, y sólo tratáramos de indicar el lugar en que se hallan.

Del plano.

218. Ya se dijo que *plano es una superficie a la cual puede adaptarse una recta en todas direcciones*, y como dos puntos determinan una recta, toda recta que tiene dos puntos en un plano tiene en el plano todos los demás, y, por lo tanto, está situada en él.

219. Si un plano contiene una recta, es evidente que no queda fijo por la recta, sino que puede girar alrededor de ella, dando una o más vueltas; y como el plano es ilimitado, después de dar una vuelta completa alrededor de la recta, habrá pasado por todos los puntos del espacio. Luego un plano que pasa por una recta puede pasar, además, por otro punto cualquiera del espacio situado fuera de la recta. Pero si un punto situado en el espacio, fuera de la recta, fuese fijo, y al pasar el plano por él, éste debiera estar constantemente en el plano, el

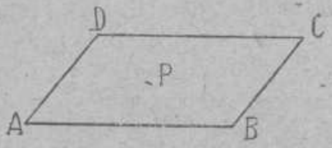

Fig. 48.

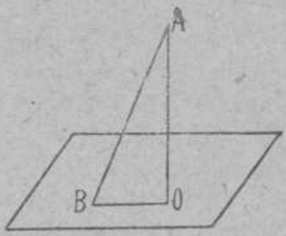

Fig. 49.

plano quedaría inmóvil, sujeto por la recta y el punto. Si se une ese punto fijo del espacio con dos puntos de la recta, el plano contendrá también a esas dos rectas y a todas las demás rectas que corten a esas dos y a la recta que estaba situada primitivamente en el plano. Si quisiésemos hacer pasar un segundo plano por la misma recta y el punto situado fuera de ella, contendría también a las tres rectas que contiene el plano primero y a todas las demás rectas que las corten, y, por lo tanto, los dos planos tienen todas las rectas comunes, y, por consiguiente, tienen comunes todos los puntos, porque no hay punto en uno de los planos por donde no pueda trazarse una recta que corte, por lo menos, a dos de dichas tres rectas. Luego si los dos planos tienen todos los puntos comunes, se confunden, y, por lo tanto, no son dos planos, sino uno solo. De aquí se deduce que por una recta y un punto situado fuera de ella puede pasar un plano y sólo uno. Esto es lo que se quiere significar cuando se dice que una recta y un punto situado fuera de ella determinan un plano.

Todo conjunto de condiciones que equivalgan a una recta y un punto situado fuera de ella determinan un plano. Así:

1.° *Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano*, porque trazando una recta por dos de los puntos, estamos en el caso de una recta y un punto situado fuera de ella.

2.° *Dos rectas que se cortan determinan un plano*, porque considerando el vértice y otro punto en cada una de las rectas, estamos en el caso de tres puntos que no están en línea recta, o de una recta y un punto situado fuera de ella.

3.° *Dos rectas paralelas determinan un plano*, porque por definición están en un mismo plano, y considerando una de las rectas y un punto en la otra, estamos en el caso de una recta y un punto fuera de ella.

4.° *Un arco de circunferencia determina un plano*, porque el arco es una curva plana y en ella pueden tomarse tres puntos no situados en línea recta.

Rectas y planos.

220. *Una recta y un plano pueden encontrarse o no encontrarse, aunque se prolonguen indefinidamente.* Cuando no se encuentran, aunque se prolonguen indefinidamente, se llaman *paralelos*. Si se encuentran, el punto de encuentro se llama *pie* o *traza de la recta en el plano*. Cuando se encuentran la recta y el plano, la recta puede ser *perpendicular al plano* y puede serle *oblicua*.

221. *Una recta es perpendicular al plano, cuando es perpendicular a todas las rectas situadas en el plano y que pasan por su pie.*

Una recta es oblicua a un plano, cuando no es perpendicular a todas las rectas situadas en el plano y que pasan por su pie.

Para que una recta sea perpendicular a todas las que pasan por su pie en un plano, basta que lo sea a dos de ellas. Por un punto situado en un plano o fuera de él, sólo puede trazarse al plano una perpendicular. Del mismo modo, *por un punto situado en una recta o fuera de ella, sólo puede trazarse a la recta un plano perpendicular.*

Si desde un punto exterior a un plano se traza una perpendicular y una oblicua al plano, que terminen en su traza o pie, la perpendicular será menor que la oblicua, porque si unimos los pies de ambas rectas, resultará un triángulo rectángulo, en el cual la perpendicular es un cateto, y la oblicua, la hipotenusa. Véase en la figura 49 cómo la perpendicular AO es menor que la oblicua AB.

Si desde un punto exterior a un plano se traza una perpendicular y dos o más oblicuas cuyos pies equidisten del pie de la perpendicular, estas oblicuas serán iguales, porque si unimos los pies de las oblicuas con el pie de la perpendicular, resultarán triángulos rectángulos iguales, que tendrán, por lo tanto, las hipotenusas iguales.

Si desde un punto exterior a un plano trazamos una perpendicular y dos o más oblicuas cuyos pies no equidisten del pie de la perpendicular, cada oblicua será tanto mayor cuanto más se aparte su pie del pie de la perpendicular.

222. *Si una recta va de arriba a bajo siguiendo lo dirección de un hilo que, suspendido por el extremo superior, lleva colgado un peso en el extremo inferior, la recta se llama* vertical. *Toda recta perpendicular a la* vertical *se llama* horizontal *y todo plano perpendicular a la vertical se llama* plano horizontal. Un plano que pasa por la vertical se llama *plano vertical.*

Rectas en el espacio.

223. *Dos rectas en el espacio pueden tener un punto común o no tenerle. Si tienen un punto común, se dice que se cortan y forman ángulos adyacentes y opuestos por el vértice,* como se dijo en la Geometría plana. *Si no tienen un punto común, pueden estar o no estar en un mismo plano. Si están en un mismo plano son paralelas, y si no están en un mismo plano se dice que se* cruzan. *Llámanse ángulos de dos rectas que se cruzan en el espacio los ángulos formados por dos rectas paralelas a ellas trazadas por un punto cualquiera del espacio.*

La existencia de rectas paralelas en el espacio es muy clara, pues si por un punto situado fuera de una recta y por la recta hacemos pasar un plano, y en este plano trazamos por el punto una paralela a dicha recta, tendremos dos paralelas en el espacio.

Planos en el espacio.

224. *Dos planos ilimitados en el espacio pueden cortarse o no cortarse. Si no se cortan, se llaman* paralelos, *y si se cortan, se llaman planos* secantes.

Que existen planos paralelos se comprende fácilmente observando que dos planos perpendiculares a una recta no pueden encontrarse, y son, por lo tanto, paralelos.

225. Los planos secantes dividen el espacio en cuatro partes, llamadas ángulos diedros. Por lo tanto, diremos que

Angulo diedro es la extensión indefinida determinada por dos planos que se cortan y terminan en su intersección.

Los planos que determinan el diedro se llaman *caras del diedro*, y la intersección, *arista*. Dos paredes contiguas de una habitación forman un diedro; las caras del diedro son las paredes, y la arista es la línea o esquina por la que están unidas.

Un diedro se designa por cuatro letras, dos en la arista y una en cada cara, fuera de la arista. Se lee nombrando primero la letra de una cara, luego las dos de la arista y después la de la otra cara.

Dos diedros se llaman *consecutivos* cuando tienen una cara común situada entre las dos caras no comunes.

Tres o más diedros son consecutivos cuando cada uno de ellos es consecutivo de su inmediato o inmediatos. En un libro, si tomamos tres hojas consecutivas y las separamos una de otra, tendremos dos ángulos consecutivos. Si en lugar de tomar tres hojas tomamos cuatro o más hojas consecutivas y las colocamos algo separadas, cada una de su inmediata, tendremos tres o más diedros consecutivos.

226. *Diedros adyacentes* son dos diedros consecutivos cuyas caras no comunes están en un mismo plano. Si en un libro enteramente abierto levantamos una de las hojas, tendremos un ejemplo de dos diedros adyacentes, siendo la hoja levantada la cara común, y las hojas inmediatas extendidas en un plano, las caras no comunes. Cuando los diedros adyacentes son iguales, se llaman *diedros rectos*, y los planos que los forman se llaman *perpendiculares*. Una pared que separa dos habi-

taciones forma con el suelo dos diedros adyacentes iguales, y, por lo tanto, rectos, y la pared es perpendicular al suelo.

227. Dos diedros se llaman *opuestos por la arista*, cuando, teniendo la misma arista, las caras del uno son prolongaciones de las caras del otro.

228. Dos diedros son *complementarios* cuando su suma es igual a un *diedro recto*.

Complemento de un diedro es otro diedro cuya suma con el primero es igual a *un diedro recto*.

229. *Diedros suplementarios* son dos diedros cuya suma es igual a *dos diedros rectos*.

Llámase *suplemento* de un diedro otro diedro cuya suma con el primero es igual a *dos diedros rectos*.

Si dos diedros tienen el mismo complemento o el mismo suplemento, son iguales.

230. Cuando un diedro tiene sus dos caras en un mismo plano, como las dos partes de un libro completamente abierto sobre la mesa, se llama *diedro llano*. Todos los diedros llanos son iguales, porque estando sus caras en un mismo plano, es evidente que pueden superponerse y coincidir. Los diedros menores que un llano se llaman *cóncavos*, y los mayores que un llano, *convexos*. Cuando se va abriendo un libro, los ángulos que se van formando antes de llegar a formar un ángulo llano se llaman *cóncavos*.

Si después de estar las dos partes del libro en un mismo plano sigue el libro abriéndose más, los ángulos que van formándose por las dos partes del libro se llaman *convexos*.

Un ángulo diedro recto es la mitad de un diedro llano, luego *todos los diedros rectos son iguales*.

Dos diedros adyacentes son suplementarios, porque entre los dos forman un diedro llano, que equivale a dos diedros rectos.

Dos diedros opuestos por la arista son iguales, porque tienen el mismo suplemento, que es su ángulo adyacente común.

231. *Ángulo rectilíneo* correspondiente a un diedro es el ángulo formado por dos perpendiculares a la arista, en un mismo punto de ésta, y una en cada cara.

El ángulo rectilíneo es muy importante, porque por medio de él se mide el ángulo diedro. Así se dice que *la medida de un ángulo diedro es la de su rectilíneo correspondiente.*

Planos perpendiculares y oblicuos.

232. *Planos perpendiculares*, según se ha dicho, son los que forman entre sí diedros rectos, y planos oblicuos, los que forman entre sí diedros oblicuos. Ejemplos de planos perpendiculares los tenemos en las paredes y suelos de las habitaciones. Las paredes son, además, planos verticales, y los suelos, planos horizontales.

233. Es preciso no confundir, como frecuentemente confunde el vulgo, el plano vertical con el plano perpendicular, como confunde también la recta vertical con la recta perpendicular. Es frecuente oír, por ejemplo, que los rayos del sol caen casi perpendicularmente en verano, en vez de decir que caen casi verticalmente. Lo mismo las rectas que los planos son perpendiculares cuando forman entre sí ángulos rectos, cualquiera que sea la dirección de las rectas o la dirección de los planos, mientras que la recta sólo será vertical cuando sigue la dirección de un hilo del cual pende un peso, y un plano sólo será vertical cuando pase por una recta vertical.

Angulos poliedros.

234. Se llama *ángulo poliedro* la extensión indefinida determinada por tres o más planos que se cortan dos a dos, concurren en un punto y terminan en ese punto. Los planos que le forman se llaman *caras o ángulos planos* del ángulo poliedro. El punto donde concurren las caras se llama *vértice*, y los diedros que forman las caras consecutivas del ángulo poliedro se llaman diedros del ángulo poliedro, y las aristas de estos diedros, aristas del ángulo poliedro. Los ángulos poliedros se llaman regulares cuando tienen iguales sus ángulos planos y también iguales sus diedros.

Los ángulos poliedros se clasifican por el número de caras.

Cuando tiene tres caras, el ángulo poliedro se llama *triedro*. Dos paredes contiguas de una habitación y el techo, o dos paredes contiguas y el suelo, forman un ángulo triedro. Así es que en una sala ordinaria se ven ocho triedros, cuatro que forman las paredes con el techo y cuatro que forman las paredes con el suelo.

Si en lugar de concurrir en un punto tres planos, concurriesen cuatro, el ángulo se llamaría *ángulo tetraedro;* si concurriesen cinco, se llamaría *ángulo pentaedro;* si seis, *ángulo exaedro*, etc.

Superficies curvas.

SUPERFICIE CÓNICA

235. Las superficies curvas de que vamos a hablar brevemente son tres: la superficie *cónica* de revolución, la superficie *cilíndrica* de revolución y la superficie *esférica*.

Si tenemos una recta fija que llamaremos *eje* y otra recta que corta el eje en un punto fijo, y hacemos girar esta segunda recta alrededor de la primera, de manera que, formando con ella siempre el mismo ángulo, vuelva a la posición primera, el conjunto de todas las posiciones de la recta que ha girado se llama superficie cónica de revolución: podemos, pues, definir la superficie cónica de revolución del modo siguiente:

Superficie cónica de revolución es el lugar de todas las

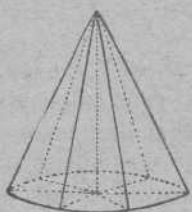

Fig. 50.

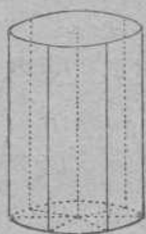

Fig. 51.

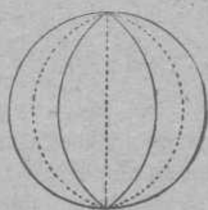

Fig. 52.

posiciones que toma una recta llamada generatriz, que gira alrededor de otra fija llamada eje, con la cual concurre en un punto fijo, formando generatriz y eje un ángulo constante (fig. 50).

Puede también definirse la superficie cónica diciendo que es el lugar de todas las posiciones de una recta llamada *generatriz*, que, pasando siempre por un punto fijo, se mueve apoyándose constantemente en una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular trazada desde el punto fijo al plano de dicha circunferencia. La circunferencia se llama *directriz*, porque realmente *dirige* el movimiento de la generatriz.

Nos formaremos una idea clara de la superficie cónica de revolución del modo siguiente:

Supuogamos un punto fijo en el espacio, y desde este punto una perpendicular al plano del suelo, y en el suelo una circunferencia cuyo centro esté en el pie de la perpendicular. Si ahora imaginamos el punto fijo del espacio unido por medio de hilos con todos los puntos de la circunferencia trazada en el suelo, la superficie formada por todos esos hilos es una superficie cónica de revolución. Un hilo cualquiera es una generatriz, y la perpendicular el suelo desde el punto fijo es el eje.

SUPERFICIE CILÍNDRICA

236. Si tenemos una recta fija que llamaremos eje y otra recta paralela a ella, y hacemos girar esta segunda recta alrededor de la primera permaneciendo siempre paralela a ella, y siempre a igual distancia de la misma, hasta volver a la posición primera, el conjunto de todas las posiciones de la recta que ha girado alrededor de la recta fija se llama *superficie cilíndrica de revolución*. Podemos, pues, definir dicha superficie diciendo:

Superficie cilíndrica de revolución es el lugar de todas las posiciones de una recta que, girando alrededor de otra fija hasta volver a la posición primera, permanece constantemente paralela a la recta fija, y siempre a igual distancia de la misma. La recta fija se llama eje, y la que gira, *generatriz* (fig. 51).

Puede también definirse la superficie cilíndrica de revolución diciendo que es lugar de todas las posiciones de una recta llamada *generatriz*, que, moviéndose paralelamente a una dirección dada, se apoya constantemente en una circunferencia cuyo plano es perpendicular a la generatriz. La circunferencia se llama *directriz* porque realmente *dirige* el movimiento de la generatriz.

Nos formaremos idea de una superficie cilíndrica de revolución del modo siguiente:

Si suponemos en el techo una circunferencia e imaginamos que suspendemos de todos sus puntos hilos que lleguen hasta el suelo, la superficie formada por el conjunto de esos hilos es una superficie cilíndrica de revolución. Uno cualquiera de los hilos es una *generatriz*, y la perpendicular al suelo, bajada desde el centro de la circunferencia, será el eje de la superficie cilíndrica de revolución. La circunferencia de cuyos puntos penden los hilos es la directriz.

Lo mismo en el caso de la superficie cilíndrica de revolución que en el caso de la superficie cónica anterior, podíamos haber prescindido del eje, que no nos ha hecho falta para la colocación de los hilos, pero nos ha hecho falta la circunferencia para apoyar los hilos en los puntos de la misma.

SUPERFICIE ESFÉRICA

237. Si hacemos girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro hasta volver a su posición primera, el conjunto de todas las posiciones de la semicircunferencia forma la superficie esférica. Podemos, pues, definir la superficie esférica diciendo: *Superficie esférica es el lugar de todas las posiciones de una semicircunferencia que da una vuelta completa alrededor de su diámetro.* El diámetro alrededor del cual ha girado la semicircunferencia se llama *eje* de la superficie esférica y los extremos del eje se llaman *polos* (fig. 52).

Poliedros.

238. *Llámase poliedro el cuerpo limitado por planos.*

Las intersecciones de los planos se llaman *aristas.*

Los planos limitados por las aristas se llaman *caras.*

Los puntos donde concurren tres o más caras se llaman *vértices.*

Los diedros que forman cada dos caras contiguas se llaman *diedros interiores* del poliedro.

Diagonal de un poliedro es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

Los poliedros pueden ser *convexos* y *cóncavos.* Será convexo un poliedro si, mirado por el exterior, todos sus diedros son convexos, y será cóncavo si, mirado por el exterior, tiene uno o más diedros cóncavos.

Los poliedros pueden ser también *regulares* e *irregulares.*

239. *Poliedro regular* es aquel cuyas caras son polígonos regulares e iguales (figs. 53, 54, 55, 56, 57) y sus ángulos poliedros, todos regulares e iguales; y poliedro irregular, el que no cumple con todas estas condiciones.

240. *Los poliedros se clasifican también por el número de sus caras.*

El menor número de planos que se necesitan para cerrar es-

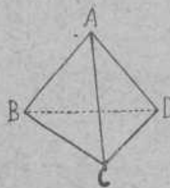

Fig. 53.

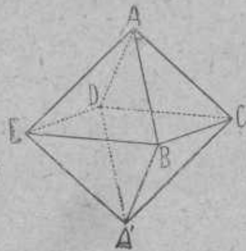

Fig. 54.

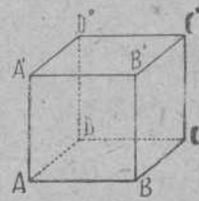

Fig. 55.

pacio es cuatro, luego el poliedro de menor número de caras es el que tiene cuatro, y se llama *tetraedro.*

El que tiene	cinco	se llama		....	*pentaedro.*
El	—	seis	—	....	*exaedro.*
El	—	siete	—	....	*eptaedro.*
El	—	ocho	—	....	*octaedro.*
....	....	....	....	....	....
El	—	doce	—	....	*dodecaedro.*
....	....	....	....	....	....
El	—	veinte	—	....	*icosaedro.*

El tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro pueden ser poliedros regulares; los demás, no, lo

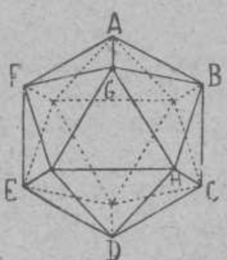

Fig. 56.

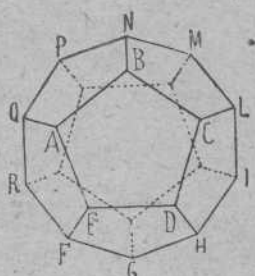

Fig. 57.

cual nos dice que no hay más que cinco formas de poliedros regulares.

Entre los poliedros hay dos grupos notables, que son el de las *pirámides* y el de los *prismas.*

Pirámides.

241. Llámase *pirámide* el poliedro limitado por un ángulo poliedro y un plano que corta a todas sus aristas. La porción de este plano, limitada por las caras del ángulo poliedro, se llama *base* de la pirámide.

También se define la pirámide diciendo:

Pirámide es un poliedro limitado por una cara poligonal cualquiera y tantos triángulos concurrentes en un punto como lados tiene la cara poligonal.

La cara poligonal se llama *base* de la pirámide; los triángulos se llaman *caras laterales;* el punto donde concurren todas las caras laterales, *vértice* de la pirámide, y la perpendicular a la base, trazada desde el vértice, se llama *altura* de la pirámide.

242. *Las pirámides pueden ser regulares e irregulares.*

Pirámide regular (fig. 58) *es aquella cuya base es un polígono regular, y cuya altura va a parar al centro de la base.* Los triángulos laterales son isósceles e iguales, y la altura de uno cualquiera de ellos se llama *apotema* de la pirámide.

Las pirámides se clasifican también por el polígono de su base.

Si la base es un triángulo, la pirámide se llama triangular: es el *tetraedro.*

Si la base es un cuadrilátero, la pirámide se llama cuadrangular.

Si la base es un pentágono, la pirámide se llama pentagonal.

....

Prismas.

243. *Prisma es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos, y tantos paralelogramos como lados tiene uno de estos polígonos.*

Los polígonos iguales y paralelos se llaman *bases* del prisma, y los paralelogramos, *caras laterales,* y las intersecciones de estas caras, *aristas laterales.*

Si las aristas laterales son perpendiculares a las bases, el prisma se llama *recto* (fig. 59), y si son oblicuas, el prisma se llama *oblicuo.*

Si el prisma es *recto* y las bases son polígonos regulares, el prisma es *regular;* y si no se cumplen aquellas condiciones, el prisma será *irregular*.

244. *Los prismas se clasifican por el número de lados de sus bases, llamándose,* análogamente a lo dicho en las pirámides, *prisma triangular, prisma cuadrangular, prisma pentagonal*, etc.

El más notable de los prismas es el cuadrangular, que tiene por base un paralelogramo. Se llama este prisma *paralelepípedo.*

Si el paralelepípedo es recto y las bases son rectángulos, el paralelepípedo se llama rectángulo (fig. 60). Ejemplos de paralelepípedos rectángulos los tenemos en la mayor parte de las salas y habitaciones de las casas.

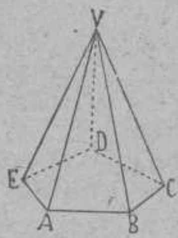

Fig. 58.

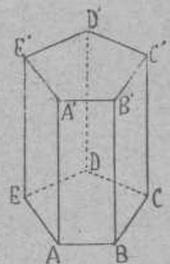

Fig. 59.

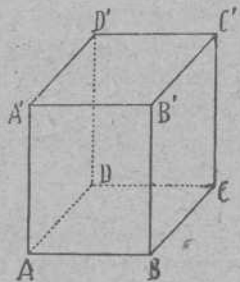

Fig. 60.

Si el paralelepípedo rectángulo tiene iguales todas sus aristas, sus caras serán cuadrados, y el paralelepípedo se llama *cubo*. Podemos, pues, definirlo, diciendo:

Cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas caras son todas cuadrados.

Cuerpos redondos.

245. *Llámanse cuerpos redondos los cuerpos limitados total o parcialmente por superficies curvas.* Vamos a hablar brevemente de tres de ellos, que son: el *cono de revolución*, el *cilindro de revolución* y la *esfera*.

CONO DE REVOLUCIÓN

246. Llámase *cono de revolución* el cuerpo limitado por una superficie cónica de revolución, y un plano que corta a ésta perpendicularmente al eje. También puede definirse diciendo: *Cono de revolución es el lugar de todas las posiciones de un triángulo rectángulo que gira dando una vuelta completa alrededor de uno de sus catetos*. El cateto fijo se llama *eje*. Las posiciones del otro cateto forman la *base*, que es un círculo. Las posiciones de la hipotenusa forman la superficie lateral o la superficie cónica.

Los planos que cortan al cono pasando por el eje se llaman *planos meridianos*.

Los planos que cortan al cono perpendicularmente al eje son *planos paralelos*.

Las secciones que los planos meridianos producen en la superficie del cono se llaman *meridianos*, que, en este caso, son dos generatrices.

Las secciones que los planos perpendiculares al eje producen en la superficie del cono se llaman *paralelos*, que son siempre circunferencias. Un plano que sólo tiene con el cono una generatriz común se llama plano tangente al cono.

CILINDRO DE REVOLUCIÓN

247. Llámase *cilindro de revolución* el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos perpendiculares a su eje. También puede definirse este cuerpo diciendo:

Cilindro de revolución es el lugar de todas las posiciones que toma un paralelogramo rectángulo dando una vuelta completa alrededor de uno de sus lados. El lado fijo se llama *eje*. Las posiciones que toma el lado opuesto al eje, al girar, forman la superficie cilíndrica, y las posiciones de los otros dos lados forman dos círculos, que son las *bases* del cilindro.

Los planos que cortan el cilindro pasando por el eje se llaman *planos meridianos*.

Los planos que cortan el cilindro perpendicularmente al eje son *planos paralelos*.

Las secciones producidas en la superficie del cilindro por los planos meridianos se llaman *meridianos*, que en este caso son dos generatrices.

Las secciones producidas en la superficie cilíndrica por planos perpendiculares al eje se llaman *paralelos*, que son siempre circunferencias.

Un plano que sólo tenga con el cilindro una generatriz común se llama *plano tangente* al cilindro.

ESFERA

248. Llámase *esfera* el cuerpo limitado por la superficie esférica, o también:

Esfera es el lugar de todas las posiciones que toma un semicírculo, dando una vuelta completa alrededor de su diámetro. Este diámetro se llama *eje* de la esfera, y sus extremos, *polos* de la esfera. *Radio* de la esfera es la recta que une el centro con un punto de su superficie; es el *radio* del semicírculo que se supone ha girado alrededor del diámetro.

Todo plano que corte a una esfera produce en la superficie una circunferencia, y en la esfera, un círculo.

Todo plano secante que pasa por el eje de la esfera se llama *plano meridiano*.

Los planos secantes perpendiculares al eje son todos *paralelos*.

Las secciones producidas en la superficie esférica por planos meridianos se llaman *meridianos*.

249. Las secciones producidas en la superficie esférica por planos perpendiculares al eje se llaman *paralelos*.

Los planos secantes que pasan por el centro producen en la superficie esférica circunferencias *máximas*, y en la esfera, círculos *máximos*.

Los planos secantes que no pasan por el centro producen en la superficie esférica circunferencias *menores*, y en la esfera, círculos *menores*.

Fig. 61.

El plano que sólo tiene con la superficie esférica un punto común se llama plano tangente. El plano tangente es per-

pendicular al radio correspondiente al punto de contacto, porque el radio es la recta más corta que puede trazarse desde el centro al plano tangente.

EJEMPLO. — Suponiendo que la figura 61 representa la tierra, que consideramos como una esfera que gira alrededor del eje, PP', los planos que pasan por el eje producen los meridianos PMAP'... PBP'... Los planos perpendiculares al eje producen los paralelos ABC..., MNQ..., HIL..., M'N'Q'..., H'I'L'... En esta esfera, el paralelo ABC... es el Ecuador. El paralelo MNQ... es, aproximadamente, el Trópico de Cáncer. El paralelo HIL..., el Círculo Polar Artico. El paralelo M'N'Q'... es el Trópico de Capricornio, y el paralelo H'I'L'... el Círculo Polar Antártico.

Areas.

250. No vamos a hallar sino las áreas de algunos cuerpos.

Area de la pirámide regular.—El área de la pirámide regular puede ser lateral y total. El área lateral es la suma de las áreas de todas las caras laterales, y el área total es la suma del área lateral y del área de la base.

Las caras laterales son triángulos que tienen por base un lado de la base de la pirámide, y por altura, la apotema de la pirámide; y como el área de una cara lateral es igual a la mitad del producto de los valores numéricos de su base y apotema multiplicado por la unidad superficial, *el área lateral de la pirámide regular será igual a la mitad del producto del perímetro de la base por el valor numérico de la apotema, multiplicado por la unidad superficial.*

El área total de la pirámide regular se obtendrá agregando al área lateral el área de la base, que es igual a la mitad del producto de los valores numéricos del perímetro y apotema de la base, multiplicado por la unidad superficial.

Si designamos por p el perímetro de la base, por a el valor numérico de la apotema de la pirámide y por a' el valor numérico de la apotema de la base, el área lateral y total podrá expresarse del modo siguiente:

$$\text{Area lateral} = \frac{1}{2}\, p \times a \times u^2.$$

$$\text{Area total} = \frac{1}{2}\, p \times a \times u^2 + \frac{1}{2}\, p \times a' \times u^2$$

$$= \frac{1}{2}\, p\,(a' + a') \times u^2.$$

251. *Area del prisma recto.—En el prisma recto consideraremos también el área lateral y el área total. El área lateral es igual a la suma de las áreas de sus caras laterales, y el área total es la suma del área lateral y de las áreas de las dos bases.*

Las caras laterales son rectángulos, y ya conocemos el área del rectángulo, que es el producto de los valores numéricos de su base y altura multiplicado por la unidad superficial. Luego *el área lateral del prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por el valor numérico de la arista lateral, multiplicado por la unidad superficial.*

El área total del prisma recto se hallará agregando al área lateral las áreas de sus dos bases.

Si además de recto el prisma es regular, sus bases serán polígonos regulares, cuya área acabamos de recordar en la pirámide.

Las áreas lateral y total en este caso, designando por a el valor numérico de la arista lateral, y por a' el valor numérico de la apotema de la base, pueden expresarse del modo siguiente:

$$\text{Area lateral} = p \times a \times u^2.$$
$$\text{Area total} = p \times a \times u^2 + p \times a' \times u^2 = p\,(a + a') \times u^2.$$

252. *Area del cono de revolución.*—Considerando el cono como si fuese una pirámide regular de muchísimas o de un número infinito de caras, y teniendo en cuenta que el perímetro de la base será ahora una circunferencia, y la apotema de la pirámide será la generatriz, que también se llama lado, *el área lateral del cono de revolución será igual a la mitad del producto de los valores numéricos de la circunferencia de la base y del lado, multiplicado por la unidad superficial. El área total del cono de revolución se hallará agregando al área lateral el área de la base, que es un círculo.*

El área lateral y el área total del cono de revolución, llamando r al valor numérico del radio de la base y l al valor numérico del lado del cono, pueden expresarse del modo siguiente:

$$\text{Area lateral} = \pi r l \times u^2.$$
$$\text{Area total} = \pi r l \times u^2 + \pi r^2 \times u^2 = \pi r\,(l + r) \times u^2.$$

253. *Area del cilindro de revolución.*—Considerando el cilindro de revolución como si fuese un prisma regular de infinito número de caras, el perímetro de la base será una circunferencia y la arista lateral será la generatriz o lado; por consiguiente,

El área lateral de un cilindro de revolución será igual al producto de los valores numéricos de la circunferencia de una base y del lado, multiplicado por la mitad superficial. El área total se hallará agregando al área lateral las áreas de los dos círculos que forman las bases.

Si llamamos r al valor numérico del radio de cualquiera de las bases y l al valor numérico del lado del cilindro, sus áreas lateral y total pueden expresarse del modo siguiente:

$$\text{Area lateral} = 2\,\pi r l \times u^2.$$
$$\text{Area total} \;= 2\,\pi r l \times u^2 + 2\pi r^2 \times u^2 = 2\pi r\,(l + r) \times u^2.$$

Area de la esfera.—En estas Nociones, para el área de la esfera no podemos dar fundamento alguno. Sólo diremos que es exactamente igual a la suma de cuatro círculos máximos. Luego el área de la esfera podrá expresarse del modo siguiente:

$$\text{Area de la esfera} = 4\pi r^2 \times u^2.$$

Ejemplo.—¿Cuál será el área de una esfera cuyo radio tenga 10 unidades de longitud?

La expresión anterior nos da:

$$\text{Area de la esfera} = 4 \times 3{,}141592 \times 10^2 \times u^2$$
$$= 4 \times 3{,}141592 \times 100 \times 1^2 = 1256{,}6368 \times u^2.$$

Luego el área de esta esfera tendrá 1256 unidades superficiales y 6368 diezmilésimas.

Volúmenes.

254. Diremos unas pocas palabras acerca del volumen de algunos cuerpos. El cuerpo que sirve de fundamento para hallar los volúmenes de los demás es el *paralelepípedo rectángulo.*

Medida de un cuerpo es la relación entre la extensión del cuerpo y la de otro que se toma como unidad. La unidad de extensión de un cuerpo es un cubo que tiene por arista la unidad de longitud; la representaremos por u^3, y la podemos llamar *unidad cúbica.*

255 *Volumen de un cuerpo es la cantidad de su extensión, o el producto de su medida por la unidad cúbica.*

Volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de los valores numéricos de su base y altura multiplicado por la unidad cúbica, o también al producto de los valores numéricos de sus tres dimensiones por la unidad cúbica.

Volumen de un cubo.—Como el cubo tiene sus tres dimensiones iguales, *el volumen de un cubo será igual al cubo del valor numérico de su arista, multiplicado por la unidad cúbica.*

El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de los valores numéricos de su base y altura por la unidad cúbica.

El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de los valores numéricos del área de la base y altura multiplicado por la unidad cúbica.

256. *Volumen de la pirámide.*—Para entender el volumen de una pirámide, téngase en cuenta que cuando un cuerpo geométrico (pirámide o cono) que tiene base, a partir de ella, va estrechándose poco a poco hasta terminar en un punto, el volumen del cuerpo queda reducido a la tercera parte de lo que sería si no se estrechara. Esto nos dice que una pirámide es la tercera parte de un prisma de igual base e igual altura que la pirámide. Luego

El volumen de la pirámide es igual al tercio del producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad cúbica.

257. *Volumen del cilindro.* — Considerando al cilindro como un prisma de infinito número de caras, sus bases serán círculos, y *su volumen será igual al producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad cúbica.*

Su expresión será:

$$\text{Volumen del cilindro} = \pi r^2 \times a \times u^3.$$

Ejemplo.—¿Cuál será el volumen de un cilindro cuya base tiene por radio cinco unidades y su altura diez?

La expresión anterior nos da:

$$\text{Volumen} = \pi \times 5^2 \times 10 \times u^3 = 3{,}141592 \times 25 \times 10 \times u^3$$
$$= 785{,}398 \times u^3.$$

Luego el volumen de este cilindro es igual a 785 unidades cúbicas y 398 milésimas.

258. *Volumen de un cono.*—El cono, según lo dicho antes, será la tercera parte de un cilindro de igual base y altura que el cono; luego

El volumen de un cono será igual al tercio del producto de los valores numéricos de su base y altura, multiplicado por la unidad cúbica. Expresión abreviada:

$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times a \times u^3.$$

259. *Volumen de la esfera.*—Del volumen de la esfera sólo diremos que *es igual al tercio del producto de los valores numéricos de su superficie y de su radio, multiplicado por la unidad cúbica.*

La expresión abreviada será:

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{1}{3}4\pi r^2 \times r \times u^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \times u^3.$$

EJEMPLO.—¿Cuál será el volumen de la esfera cuyo radio tiene 100 unidades de longitud?

La expresión anterior nos da:

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi \times 100^3 \times u^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3{,}141592 \times 1.000000 \times u^3$$

$= 4188789$ unidades cúbicas aproximadamente.

ARITMÉTICA CONCRETA O PRÁCTICA

Números concretos.

260. Cuando la unidad no se refiere a un objeto determinado, por ejemplo, un libro, un árbol, un hombre, es decir, no se refiere a objeto alguno particular que nosotros podamos ver o tocar, o imaginar o concebir, la unidad es *abstracta*, como ya se dijo en otra ocasión, y un conjunto de estas unidades se llama *número abstracto*. Estos son los números que hemos estudiado hasta aquí, aparte de algún ejemplo para aclarar alguna idea; y ellos han sido el objeto de la primera parte de estas NOCIONES, de aquella parte que hemos designado con el nombre de *Nociones de Aritmética teórica* o *abstracta*.

261. Cuando la unidad es un objeto determinado que podamos ver o tocar, o imaginar o concebir, la unidad es *concreta*, y un conjunto de estas unidades se llama *número concreto*. Existen tantas especies de números concretos como especies de objetos presenta la Naturaleza; pero nosotros no vamos a tratar sino de un número muy limitado; vamos a tratar tan sólo de los concretos que se refieren a medidas, pesas, monedas y tiempo.

262. Veamos cómo son necesarias diversas unidades para medir esta clase de magnitudes. Al hombre le conviene conocer la cantidad de tela que necesita para un vestido, la distancia de un pueblo a otro, etc...; pues bien, para conocer esta distancia, para conocer aquella cantidad de tela, es preciso medirlas, y para medirlas se necesita una unidad: de aquí la *unidad de longitud*. Al hombre le conviene conocer la extensión de una sala para alfombrarla, de un solar, de un campo, para saber cuánto pueden valer, si quiere comprarlos o venderlos; y para conocer estas extensiones necesita medirlas, y para medirlas hace falta una unidad: de aquí la *unidad de superficie*. El hom-

bre necesita saber cuánto aire contiene una habitación, cuánta agua cabe en un depósito, y para saberlo debe medir la habitación, debe medir el depósito, y para medirlos hace falta una unidad: de aquí la *unidad de volumen*. El hombre desea averiguar cuál es la cantidad de trigo, de vino, de aceite, etc., de su cosecha, y aunque para averiguarlo bastarían las medidas de volumen, ofrecerían éstas algunos inconvenientes. Por esto ha debido buscar otras medidas más cómodas para determinar esta clase de magnitudes: de aquí la *unidad de capacidad*. Hay otra clase de magnitudes que, aunque tienen su volumen y su capacidad, no podrían apreciarse bien por estas especies de medidas, y exigen otras con las que pueda conocerse mejor su verdadera cantidad: de aquí la *unidad de peso*. Para entender bien esto último, lo aclararemos con algunos ejemplos. Si queremos comprar o vender trigo, vino, aceite y otras cosas análogas, no veremos inconveniente alguno en que, para medir estas cosas, se empleen medidas de capacidad, como sacos para medir el trigo, vasijas para medir el vino, el aceite, etc...; pero si hemos de apreciar la verdadera cantidad de otras substancias, como frutas de algún tamaño, naranjas, peras, melones, etc..., las medidas de volumen y capacidad veremos que no convienen; pues si tuviéramos que comprarlas, tendríamos que pagar el volumen del aire interpuesto al precio de las frutas. Otro ejemplo. Llenamos de harina varios sacos de igual capacidad, y en unos está la harina más comprimida que en otros. ¿Servirá el volumen o la capacidad para conocer la cantidad de harina que tiene cada saco? Claro es que no. Bien podrá ocurrir que, a pesar de ser iguales los sacos y de tener en ellos la harina igual volumen, en un saco haya doble cantidad de harina que en otro. He aquí cómo en estos casos la capacidad es engañosa. No sucederá así con el peso, pues si dos sacos iguales llenos de harina pesan lo mismo, diremos, sin temor de equivocarnos, que en ellos hay igual cantidad de harina. En resumen: hemos encontrado hasta aquí cinco especies de unidades: *unidad de longitud, unidad de superficie, unidad de volumen, unidad de capacidad y unidad de peso*.

En otros tiempos, estas unidades tenían escasa o ninguna relación unas con otras; pero hoy, en el sistema actual de medidas y pesos, están de tal modo ligadas entre sí, que conocida una sola de estas unidades, se pueden hallar fácilmente todas las demás. Esta ventaja y otras ofrece sobre el sistema antiguo el

Sistema métrico decimal.

263. Este sistema se llama métrico, porque su unidad fundamental es el *metro*, y se llama decimal, porque en su formación, o sea en el establecimiento de sus múltiplos y divisores, se siguen, en general, las leyes del sistema decimal de numeración.

Hemos dicho que la unidad fundamental de este sistema es el metro, y ¿qué es el metro? Veamos, ante todo, cómo se determina esta unidad, para comprender mejor en qué consiste. Supongamos la cuarta parte de un meridiano terrestre, de que ya hemos hablado en las NOCIONES DE GEOMETRÍA, y sea esta cuarta parte, llamada cuadrante, del meridiano que, saliendo del Polo Norte, como todos los meridianos terrestres, pasa por París, por Barcelona y termina en el Ecuador. Pues bien: de este cuadrante de meridiano se midió, primero, el arco comprendido entre Barcelona y Dunkerque, población situada al norte de Francia, en el mismo meridiano que pasa por París, y Barcelona. Con esta medida se calculó luego la longitud de todo el cuadrante, y esta longitud fué dividida en diez millones de partes iguales: una de estas partes iguales es el *metro*.

264. Veamos ahora cómo del metro se derivan todas las otras unidades del sistema. Formando un cuadrado, cuyo lado tenga un metro de longitud, tendremos la unidad de superficie llamada *metro cuadrado*. Para medir tierras o terrenos de cultivo, se emplea una unidad mayor, la unidad agraria llamada *área*, que es un cuadrado que tiene *diez* metros de lado.

Formando un cubo que tenga por arista *un metro* de longitud, tendremos la unidad de volumen llamada *metro cúbico*.

Formando un cubo hueco que tenga por arista interior la *décima* parte del metro, obtendremos la unidad de capacidad que se llama *litro*.

Formando un cubo hueco que tenga por arista interior la *centésima* parte de un metro, llenándolo de agua pura y pesándola en el vacío y a la temperatura de cuatro grados centígrados, obtendremos la unidad de peso que se llama *gramo*.

He aquí cómo, de un modo tan sencillo, se derivan del metro la unidad de superficie con la unidad agraria, la unidad de volumen, la unidad de capacidad y la unidad de peso.

Resumiendo, diremos:

Metro es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano que pasa por Barcelona.

Metro cuadrado es un cuadrado que tiene un metro de lado.

Area es un cuadrado que tiene diez metros de lado.

Litro es la capacidad de un cubo hueco, cuya arista interior es la décima parte de un metro.

Gramo es el peso en el vacío, y a la temperatura de cuatro grados centígrados, de un centímetro cúbico de agua pura o destilada.

265. Veamos ahora cómo en la formación de sus múltiplos y divisores sigue el sistema las leyes del sistema decimal de numeración.

Los múltiplos de la unidad, o sean las unidades de órdenes superiores, son la *decena*, la *centena*, el *millar*, la *decena de millar*, y en las medidas de peso, además de los múltiplos anteriores, la *centena de millar* y el *millón*, y los divisores de la unidad, o sea las unidades de orden inferior, son la *décima*, la *centésima* y la *milésima*, todo exactamente como en el sistema decimal de numeración.

266. Los nombres de los múltiplos, o sea de las unidades de órdenes superiores, se forman sistemáticamente, anteponiendo al nombre de la unidad las palabras *Deca*, *Hecto*, *Kilo* y *Miria*, palabras griegas que significan, respectivamente, *diez*, *ciento*, *mil*, *diez mil*, y los nombres de los divisores, o unidades de órdenes inferiores, se forman anteponiendo al nombre de la unidad las palabras *deci*, *centi* y *mili*, que, aunque por sí nada signifiquen, antepuestas al nombre de la unidad, hacen que las palabras así formadas expresen, respectivamente, *décima*, *centésima* y *milésima* parte de la unidad.

Así tendremos los nombres de *Decámetro*, *Hectómetro*, *Kilómetro* y *Miriámetro*, *decímetro*, *centímetro* y *milímetro*, que expresan, respectivamente, diez metros, cien metros, mil metros, diez mil metros, la décima parte de un metro, la centésima parte de un metro, la milésima parte de un metro. Análogamente se escribirían los nombres de los múltiplos y divisores de las demás unidades del sistema.

267. OBSERVACIÓN.—Se dice y escribe por muchos que las palabras *deci*, *centi*, *mili* son palabras latinas, y no hay tal: estas voces, *deci*, *centi* y *mili*, que ni palabras pueden llamarse, porque no expresan idea alguna, no son más que las dos primeras sílabas, con alguna modificación, de las palabras latinas *decimus, centessimus, millesimus*, o de las españolas décimo, centésimo, milésimo, que se derivan de aquéllas.

268. Vamos a expresar en cuadros la unidad de cada especie, con sus múltiplos y divisores, o con sus unidades de diversos órdenes.

Designaremos, abreviadamente, la unidad por la primera letra de la palabra que la expresa, y los múltiplos y divisores, por dos letras: la primera de las palabras *Deca*, *Hecto*, *Kilo*, *Miria*, *deci*, *centi* y *mili*, mayúsculas para los múltiplos y minúsculas para los divisores, y la primera letra de la unidad a que se refieren.

Así, para expresar el *Decámetro*, escribiremos Dm.; para expresar el *Kilogramo*, escribiremos Kg.; para expresar el *centímetro*, escribiremos cm.; para expresar el *miligramo*, escribiremos mg., etc.

Unidades de longitud, con sus múltiplos y divisores.

Metro y sus múltiplos..	Metro, unidad fundamental.
	Dm. = 10 m.
	Hm. = 10 Dm. = 100 m.
	Km. = 10 Hm. = 100 Dm. = 1.000 m.
	Mm. = 10 Km. = 100 Hm. = 1.000 Dm. = 10.000 m.
Metro y sus divisores..	m. = 10 dm. = 100 cm. = 1.000 mm.
	dm. = 0,1 m. = 10 cm. = 100 mm.
	cm. = 0,01 m. = 10 mm.
	mm. = 0,001 m.

Unidades de capacidad, con sus múltiplos y divisores.

Litro y sus múltiplos..	Litro, unidad.
	Dl. = 10 l.
	Hl. = 10 Dl. = 100 l.
	Kl. = 10 Hl. = 100 Dl. = 1.000 l.
	Ml. = 10 Kl. = 100 Hl. = 1.000 Dl. = 10.000 l.
Litro y sus divisores..	l. = 10 dl. = 100 cl. = 1.000 ml.
	dl. = 0,1 l. = 10 cl. = 100 ml.
	cl. = 0,01 l. = 10 ml.
	ml. = 0,001 l.

Unidades de peso, con sus múltiplos y divisores.

Gramo y sus múltiplos..	Gramo, unidad.
	Dg. = 10 g.
	Hg. = 10 Dg. = 100 g.
	Kg. = 10 Hg. = 100 Dg. = 1.000 g.
	Mg. = 10 Kg. = 100 Hg. = 1.000 Dg. = 10.000 g.
	Qm. = 10 Mg. = 100 Kg. = 1.000 Hg. = 10 000 Dg. = 100.000 g.
	Tm. = 10 Qm. = 100 Mg. = 1.000 Kg. = 10.000 Hg. = 100.000 Dg. = 1.000.000 g.

Gramo y sus divisores..	gramo = 10 dg. = 100 cg. = 1.000 mg.
	dg. = 0,1 g. = 10 cg. = 100 mg.
	cg. = 0,01 g. = 10 mg.
	mg. = 0,001 g.

OBSERVACIÓN.—En este cuadro de las medidas de peso se habrán visto dos unidades de orden superior, que son el *quintal métrico* y la *tonelada métrica*. Esto nace de que el múltiplo superior del sistema, o sea el Miriagramo, resultaba pequeño para comparar con él grandes pesos.

Por esto se idearon dos nuevos múltiplos, que si por su nombre no siguen la ley del sistema, sí la siguen por su valor. Para no inventar nuevos nombres, se tomaron del sistema antiguo las palabras *quintal* y *tonelada*, dándoles a cada una un valor que obedeciera al sistema decimal y haciéndolas seguir de la palabra *métrico* o *métrica*, para que no se confundan con el quintal y tonelada antiguos.

Para que siguieran la ley decimal, se hizo que el quintal métrico valiera 10 M., y que la tonelada métrica valiera 10 quintales métricos, como se ha visto en el cuadro.

Medidas de superficie.

269. Las medidas de superficie no siguen la ley decimal. Podían haberla seguido sin inconveniente; pero entonces los múltiplos o unidades de órdenes superiores, así como los divisores o unidades de órdenes inferiores, no podrían ser cuadrados de lados conmensurables todos ellos. Así, el lado del cuadrado equivalente a 10 metros cuadrados sería m. $\sqrt{10}$, así como el lado del cuadrado equivalente a 1.000 metros cuadrados sería 10 m. $\sqrt{10}$, etc.

En vista de esto, y queriendo que las unidades de órdenes superiores e inferiores fuesen cuadrados, se prefirió que fuesen los lados de estos cuadrados los que siguiesen la ley decimal, lo cual ha dado lugar a que las medidas superficiales obedezcan a las leyes de un sistema *centesimal* o de base *ciento*. En efecto: si los múltiplos del metro cuadrado son cuadrados cuyos lados obedecen a la ley decimal, el primer múltiplo será el decámetro cuadrado, o sea $(10 \text{ m.})^2 = 10 \text{ m.} \times 10 \text{ m.} = 100 \text{ m}^2$.

El segundo múltiplo será el hectómetro cuadrado $(10 \text{ Dm.})^2 = 10 \text{ Dm.} \times 10 \text{ Dm.} = 100 \text{ Dm}^2$.

El tercer múltiplo será el kilómetro cuadrado $(10 \text{ Hm.})^2 = 10 \text{ Hm.} \times 10 \text{ Hm.} = 100 \text{ Hm}^2$, etc.

Luego una unidad de segundo orden contiene cien unidades de primero; una unidad de tercer orden contiene cien unidades de segundo, y así sucesivamente. Del mismo modo, el primer divisor será el decímetro cuadrado, o sea $(0{,}1 \text{ m.})^2 = 0{,}1 \text{ m.} \times 0{,}1 \text{ m.} = 0{,}01 \text{ m}^2$.

El segundo divisor será el centímetro cuadrado, o sea $(0{,}01 \text{ m.})^2 = 0{,}01 \text{ m.} \times 0{,}01 \text{ m.} = 0{,}0001 \text{ m}^2 = \frac{1}{100}\, 0{,}01 \text{ m}^2$.

El tercer divisor será el milímetro cuadrado, o sea $(0{,}001 \text{ m})^2 = 0{,}001 \text{ m.} \times 0{,}001 \text{ m.} = 0{,}000001 \text{ m}^2 = \frac{1}{100}\, 0{,}0001 \text{ m}^2$, etcétera; donde vemos que el decímetro cuadrado es la centésima parte del metro cuadrado, lo cual equivale a decir que el metro cuadrado contiene 100 dm^2; que el centímetro cuadrado es la centésima parte del decímetro cuadrado, lo cual equivale a decir que el decímetro cuadrado contiene 100 cm^2, etc. Se ve, por consiguiente, que el sistema de medidas superficiales obedece a la ley de un sistema de numeración centesimal o de base *ciento*.

Medidas de volumen.

270. Análogas consideraciones a las que hemos hecho en las medidas de superficie podemos hacer aquí. Las medidas de volumen podrían someterse a la ley decimal como las demás; pero si se quisiera que los múltiplos del metro cúbico fueran cúbicos, no podría lograrse sino tomando, en la mayor parte de los casos, cubos de aristas inconmensurables. Así, para tener el primer múltiplo decimal del metro cúbico, o sea la decena de metros cúbicos, el cubo debiera ser, designando por *a* la arista,

$a^3 = 10\ m^3$, de donde $a = m\sqrt[3]{10}$, valor inconmensurable. Lo mismo ocurriría con el cubo que debiera contener 100 m³, en el cual la arista sería $m\sqrt[3]{100}$. Para evitar este inconveniente se prefirió que fuesen las aristas las que siguieran la ley decimal; pero en este caso el sistema sería el que podríamos llamar, si existiese la palabra, *milesimal* o de base *mil*. En efecto: el primer múltiplo del metro cúbico deberá ser el decámetro cúbico, o sea $(10\ m.)^3 = 10\ m. \times 10\ m. \times 10\ m. = 1.000\ m^3$. Luego el primer múltiplo del metro cúbico o la unidad de segundo orden contendrá 1.000 unidades de primero. La unidad de tercer orden será el hectómetro cúbico, o sea $(10\ Dm.)^3 = 10\ Dm. \times 10\ Dm. \times 10\ Dm. = 1.000\ Dm^3$; luego una unidad de tercer orden contiene 1.000 unidades de segundo, y así sucesivamente.

Del mismo modo, el divisor de primer orden será el decímetro cúbico $(0,1\ m.)^3 = 0,1\ m. \times 0,1\ m. \times 0,1\ m. = 0,001\ m^3$; luego un decímetro cúbico es la milésima parte de un metro cúbico, o, lo que es lo mismo, un metro cúbico contiene 1.000 dm^3; el divisor de segundo orden, el centímetro cúbico, o sea $(0,01\ m.)^3 = 0,01\ m. \times 0,01\ m. \times 0,01\ m. = 0,000001\ m^3 = \frac{1}{1000}\ 0,001\ m^3$. Luego un centímetro cúbico es la milésima parte del decímetro cúbico, lo que equivale a decir que el decímetro cúbico contiene 1.000 veces al centímetro cúbico, etc.

Unidades de superficie, con sus múltiples y divisores.

Metro cuadrado y sus múltiplos..	Metro cuadrado, unidad.			
	$Dm^2 = 100\ m^2$			
	$Hm^2 = 100\ Dm^2$	$= 10\ 000\ m^2$		
	$Km^2 = 100\ Hm^2$	$= 10\ 000\ Dm^2$	$= 1,000.000\ m^2$	
	$Mm^2 = 100\ Km^2$	$= 10.000\ Hm^2$	$= 1,000.000\ Dm^2$	$= 100,000.000\ m^2$

Metro cuadrado y sus divisores .	$m^2 = 100\ dm^2$	$= 10.000\ cm^2$	$= 1,000000\ mm^2$	
	$dm^2 = 0,01\ m^2$	$= 100\ cm^2$	$= 10000\ mm^2$	
	$cm^2 = 0,0001\ m^2$	$= 100\ mm^2$		
	$mm^2 = 0,000001\ m^2$			

Medidas agrarias.

271. Las medidas agrarias son las tres primeras del cuadro anterior, o sea el metro cuadrado con el nombre de *centiárea*, el decámetro cuadrado con el nombre de *área* y el hectómetro cuadrado con el nombre de *hectárea*. Podemos, pues, escribir:

Area, múltiplo y divisores . . .	Area $=$ 100 ca. Ha. $=$ 100 a. $=$ 10.000 ca. Ca. $= m^2$

Unidades de volumen, con sus múltiplos y divisores.

Metro cúbico y sus múltiplos	Metro cúbico, unidad. $Dm^3 = 1000\ m^3$ $Hm^3 = 1000\ Dm^3 = 1_1000000\ m^3$ $Km^3 = 1000\ Hm^3 = 1_1000000\ Dm^3 = 1000_1000000\ m^3$ $Mm^3 = 1000\ Km^3 = 1_1000000\ Hm^3 = 1000_1000000\ Dm^3$ $= 1_2000.000.000.000\ m^3$
Metro cúbico y sus divisores	$m^3 = 1000\ dm^3 = 1_1000000\ cm^3 = 1000_1000000\ mm^3$ $dm^3 = 0{,}001\ m^3 = 1000\ cm^3 = 1_1000000\ mm^3$ $cm^3 = 0{,}000001\ m^3 = 1000\ mm^3$ $mm^3 = 0{,}000000001\ m^3$

Sistema monetario.

272. El sistema monetario español se compone de trece monedas distintas, dispuestas del modo siguiente: *la unidad; dos múltiplos, la decena y la centena, y dos submúltiplos, la décima y la centésima, e intercalados entre la unidad y la decena, entre la decena y la centena, entre la décima y la unidad y entre la centésima y la décima, dos monedas, el duplo y el quíntuplo de la menor de las dos entre las que se hallan intercaladas.* Véanse puestas en orden, de mayor a menor:

100 pesetas.		100 pesetas.
50 —		50 —
20 —		20 —
10 —		10 —
5 —		5 —
2 —		2 —
1 —	ó	1 —
0,5 —		50 céntimos.
0,2 — (1)		20 — (1)
0,1 —		10 —
0,05 —		5 —
0,02 —		2 —
0,01 —		1 —

(1) Según un documento o Memoria, que tenemos a la vista, de la Fábrica Nacional de la Moneda y Timbre, el año 1871 fueron acuñadas 5.091 monedas de 20 céntimos, una de las cuales ha llegado a nuestras manos.

Las cuatro primeras monedas, o sea la de 100 pesetas, la de 50 pesetas, la de 20 pesetas y la de 10 pesetas, son de oro; las cinco siguientes, o sea la de 5 pesetas, la de 2 pesetas, la peseta, la de 50 céntimos y la de 20 céntimos, son de plata; las cuatro últimas, o sea la de 10 céntimos, la de 5 céntimos, la de 2 céntimos y el céntimo, son de cobre.

273. Advertencia.—Aunque estas monedas se llaman de oro, de plata y de cobre, no son de oro puro, ni de plata pura, ni de cobre puro. Con objeto de darles más consistencia, dureza y sonoridad, las monedas están formadas de la unión íntima o *aleación* de dos metales, las de oro y plata, y de tres, las de cobre. La aleación para las monedas de oro se compone, por 1.000 unidades de peso, de 900 unidades de oro y 100 de cobre; por esto se dice que la ley de las monedas de oro es de 900 milésimas. La aleación para las monedas de plata se compone, por cada 1.000 unidades de peso, de 900 de plata y 100 de cobre, en las piezas de 5 pesetas, y de 835 de plata y 165 de cobre, en las otras monedas del mismo metal. La aleación para las monedas de cobre se compone, por cada 1.000 unidades de peso, de 950 de cobre, 40 de estaño y 10 de zinc.

Problema.—*Pagar con el menor número posible de monedas las cantidades siguientes:*

3 pesetas, 7 pesetas, 13 pesetas, 37 pesetas, 99 pesetas, 435 pesetas, 573 pesetas, 2,75 pesetas, 1,38 pesetas.

1.° 3 pesetas se pagan con dos monedas: una de 2 pesetas y una de 1 peseta.

2.° 7 pesetas se pagan con dos monedas: una de 5 pesetas y una de 2 pesetas.

3.° 13 pesetas se pagan con tres monedas: una de 10, una de 2 y una de 1.

4.° 37 pesetas se pagan con cuatro monedas: una de 20 pesetas, una de 10, una de 5 y una de 2.

5.° 99 pesetas se pagan con seis monedas: una de 50 pesetas, dos de 20, una de 5 y dos de 2.

6.° 435 pesetas se pagan con siete monedas: cuatro de 100 pesetas, una de 20, una de 10 y una de 5.

7.° 573 pesetas se pagan con nueve monedas: cinco de 100 pesetas, una de 50, una de 20, una de 2 y una de 1.

8.° 2,75 pesetas se pagan con cuatro monedas: una de 2 pesetas, una de 50 céntimos, una de 20 céntimos y una de 5.

9.° 1,38 pesetas se pagan con seis monedas: una de 1 peseta, una de 20 céntimos, una de 10 céntimos, una de 5 céntimos, una de 2 céntimos y una de 1.

Relaciones entre el sistema monetario y el sistema métrico decimal.

274. ¿Existe alguna relación entre el sistema monetario y el sistema métrico decimal? Sí. Por el diámetro y por el peso se han relacionado las monedas con el metro, y en cuanto a su valor, siguen le ley decimal. El diámetro de las piezas de dos céntimos tienen dos centímetros, y el de las piezas de cinco céntimos, 25 mm.; de manera que poniendo en contacto una al lado de otra 50 piezas de dos céntimos, haciendo que los centros estén en línea recta, tendremos exactamente la longitud de un metro, y poniendo del mismo modo en contacto 40 piezas de cinco céntimos, tendremos también el metro. Las piezas de cobre valen tantos céntimos como gramos pesan, o pesan tantos gramos como céntimos valen, de modo que 1 céntimo pesa un gramo; 2 céntimos, dos gramos; 5 céntimos, cinco gramos, y 10 céntimos, diez gramos. Las monedas de plata pesan a razón de cinco gramos por peseta.

PROBLEMAS.—1.° *Pesar medio kilogramo de una substancia por medio de monedas de plata.*—Medio kilogramo son 500 gramos; si una peseta pesa 5 g., 100 pesetas pesarán 500 g.; luego poniendo en un platillo de balanza 100 piezas de 1 peseta o 50 de 2 pesetas o 20 duros, y en el otro platillo la substancia, cuando los dos platillos estén equilibrados, se tendrá el peso pedido.

2.° *Pesar tres cuartos de kilogramo de una substancia por medio de monedas de cobre.*

Tres cuartos de kilogramo son 750 g., y como cada céntimo de cobre pesa un gramo, bastará poner en un platillo de balanza 750 céntimos, que podrán ser 75 piezas de diez céntimos, o 150 de cinco céntimos, o 375 piezas de dos céntimos, o 750 piezas de céntimo.

En cuanto a que sus valores siguen la ley decimal, ya se ha visto que diez piezas de 1 céntimo valen una pieza de 10; diez piezas de 10 céntimos valen una peseta; diez piezas de 1 peseta valen la pieza de 10 pesetas; diez piezas de 10 pesetas valen la pieza de 100 pesetas.

Medidas de tiempo.

275. El tiempo tiene dos magnitudes invariables, en que el hombre no ha tenido intervención alguna; tales son el año y el día. El año es la *duración de una vuelta completa de la Tierra alrededor del Sol*. El día es *la duración de una vuelta completa* aparente *del Sol alrededor de la Tierra*. Esta duración es igual al tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el mismo meridiano.

276. Los múltiplos y divisores del año y del día los ha ideado el hombre, excepto el período de siete días, o sea la *semana*, que es de institución divina.

El múltiplo más conocido y más antiguo del año es el período de 100 años, llamado *siglo*.

Además del siglo, los múltiplos del año son:

El *bienio*, dos años.

El *trienio*, tres años.

El *cuatrienio*, cuatro años.

El *quinquenio*, o lustro (1), cinco años.

El *sexenio*, seis años.

El *septenio*, siete años.

El *decenio*, o década de años, diez años.

La vuelta completa de la Tierra alrededor del Sol dura 365 y casi la cuarta parte de otro día. Esta cuarta parte forma cada cuatro años un día, próximamente, razón por la cual se añade este día cada cuarto año, formando el año bisiesto, que tiene 366 días. Son años bisiestos aquellos cuyos números son divisibles por cuatro, exceptuando los años seculares, cuyo número, siendo divisible por cuatro, no sea divisible por 400. Por esto no fueron bisiestos los años seculares 1700, 1800, 1900, que, siendo divisibles por cuatro, no lo son por 400; pero sí lo será el año secular 2000, que es divisible por 400.

277. *Divisores del año.*—El año, propiamente tal, no tiene divisores, por lo menos enteros, y aunque el año civil de 365 o 366 días tiene divisores, no se utilizan para nada.

El año se ha dividido en *doce* partes desiguales, llamadas

---

(1) Este nombre viene de *lustrum*, palabra con que los romanos designaban un período de cinco años, al fin del cual celebraban las fiestas llamadas lustrales.

meses, cuyos nombres y número de días se expresan en el siguiente cuadro:

Enero,	que tiene	31	días.	
Febrero,	—	28	—	o 29, cuando el año es bisiesto.
Marzo	—	31	—	
Abril,	—	30	—	
Mayo,	—	31	—	
Junio,	—	30	—	
Julio,	—	31	-	
Agosto,	—	31	—	
Septiembre,	—	30	—	
Octubre,	—	31	—	
Noviembre,	—	30	—	
Diciembre,	—	31	—	

Múltiplos y divisores del día.

278. El primer múltiplo del día es la *semana*, período de tiempo tan antiguo como el hombre, pues fué dictado por Dios a nuestros primeros padres, al imponerles el precepto de descansar el séptimo día. Los días de la semana se llaman:

Lunes (de Luna).
Martes (de Marte).
Miércoles (de Mercurio).
Jueves (de Júpiter).
Viernes (de Venus).
Sábado (de *Shabbath*, descanso).
Domingo (de *dies dominica*, día del Señor).

Además de la semana, existen otros múltiplos del día, expresados en el cuadro siguiente:

Múltiplos.....	Triduo	tres días.
	Semana.....	seis días.
	Octava.....	ocho días.
	Novena.	nueve días.
	Década.....	diez días.
	Quincena...	quince días.
	Mes...	28, 29, 30 ó 31 días.
Divisores.....	El día.......	se divide en 24 horas.
	La hora.....	— — 60 minutos.
	El minuto...	— — 60 segundos.

OBSERVACIÓN.—La definición de *día*, diciendo que es el tiempo que emplea la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje, corresponde al día *sideral* o *sidéreo*, que es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de una estrella por el mismo meridiano. El día *solar medio*, que es el día usual, tiene tres minutos y 56 segundos más que el día sidéreo. El año tiene 366 días sidéreos y un cuarto, próximamente. Véase, pues, cómo definir el día como el tiempo que emplea la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje, y decir en seguida que el año tiene 365 días y un cuarto es una contradicción, pues durante el año, la Tierra da 366 vueltas y un cuarto alrededor de su eje. El día sidéreo, útil a la Astronomía, por su invariabilidad, no serviría para los usos de la vida. Basta considerar, para convencerse de ello, que durante el año, el medio día sidéreo pasaría por todas las horas del día solar, de manera que habría un día en que sería medio día a la salida del Sol, otro día en que sería medio día a la puesta del mismo, etc.

Números complejos e incomplejos.

279. Acabamos de ver que los números concretos que se refieren a medidas de longitud, de superficie, de volumen, de capacidad y de peso, lo mismo que los que se refieren al sistema monetario y a las unidades de tiempo, constan de diversos órdenes de unidades, unos, múltiplos, y otros, divisores de la unidad principal.

Todos esos números se clasifican en *incomplejos* y *complejos*.

Llámase *incomplejo* un número concreto de una especie determinada, que expresa unidades de un solo orden en aquella especie.

Llámase número *complejo* un número concreto de especie determinada, que expresa unidades de dos o más órdenes en aquella especie.

EJEMPLOS:

Incomplejo de longitud......	6 metros.
Incomplejo agrario..........	7 Hectáreas.
Incomplejo de volumen......	3 centímetros cúbicos.
Incomplejo de capacidad....	9 Decalitros.

Incomplejo de peso.........	3 toneladas.
Incomplejo monetario.......	2 pesetas.
Incomplejo de tiempo.......	15 años.
Complejo de longitud.......	7 Km., 5 Dm. y 6 m.
Complejo agrario...........	3 Ha., 5 a. y 4 ca.
Complejo de volumen.......	4 Dm^3, 33 m^3 y 145 dm^3.
Complejo de capacidad......	9 Hl., 1 Dl. y 3 l.
Complejo de peso..........	3 Qm., 6 Mg., 2 Dg. y 7 g.
Complejo monetario........	7 duros, 3 pesetas y 8 céntimos.
Complejo de tiempo........	2 siglos, 40 años, 20 días y 15 horas.

Transformación de concretos.

280. En esta operación se distinguen los casos siguientes:

1.° *Convertir un incomplejo de orden superior en otro de orden inferior.*

2.° *Convertir un incomplejo de orden inferior en otro incomplejo de orden superior.*

3.° *Convertir un complejo en incomplejo del orden inferior.*

4.° *Convertir un complejo en incomplejo de un orden cualquiera, distinto del inferior.*

5.° *Convertir un incomplejo de orden inferior en complejo del mismo orden y de órdenes superiores.*

6.° *Convertir un incomplejo de orden superior en complejo del mismo orden y de ordenes inferiores.*

Primero. *Para convertir un incomplejo de orden superior en otro de orden inferior, se multiplica el incomplejo de orden superior por el número que expresa cuántas veces la unidad de orden superior contiene a la unidad de orden inferior.*

Si el número concreto es métrico-decimal, *el problema se reduce a poner ceros a la derecha del incomplejo de orden superior o a correr la coma hacia la derecha, si el incomplejo estuviera expresado por número decimal.*

EJEMPLOS. —1.° *Transformar 8 Mm. en decámetros.*— Como un miriámetro tiene 1000 Dm., se multiplicarán los miriámetros por 1000, o se añadirán tres ceros, y se tendrá:

8 Mm. = 8.000 Dm.

2.° *Transformar 7 Km^2 en decímetros cuadrados.*—Como las unidades de superficie pertenecen a un sistema de base *ciento*, la unidad de cada orden contiene *cien* veces a la unidad de su orden inmediato inferior, y como entre kilómetro y decímetro hay cuatro órdenes, el kilómetro cuadrado contendrá al decímetro cuadrado un número de veces expresado por la unidad seguida de cuatro veces dos ceros; luego habrá que multiplicar los 7 Km^2 por 100 millones, o agregarle ocho ceros.

Luego 7 Km^2 = $700_1000000$ dm^2.

3.° *Convertir 8 Mm^3 en centímetros cúbicos.*—Las unidades de volumen vimos que pertenecían a un sistema de base *mil*, o lo que es lo mismo, a un sistema en que una unidad de cualquier orden contiene mil unidades del orden inmediato inferior; luego el miriámetro cúbico contendrá al centímetro cúbico un número de veces expresado por la unidad seguida de tantas veces tres ceros como órdenes haya desde el miriámetro hasta el centímetro, y como estos órdenes son seis, los 8 Mm. se multiplicarán por la unidad seguida de 18 ceros.

Luego 8 Mm^3 = $8_3000000_2000000_1000000$.

281. De lo que acabamos de ver en estos tres ejemplos, se deduce: 1.° Que *cuando el incomplejo pertenece al sistema* decimal, *como ocurre cuando es* de longitud, de capacidad *o* de peso, *para convertir un incomplejo de orden superior en complejo de orden inferior, se ponen a la derecha del incomplejo de orden superior tantos ceros como órdenes haya desde el orden a que pertenece el incomplejo superior hasta el orden a que pertenece el inferior.*

2.° Que *cuando el número incomplejo pertenece a las* medidas de superficie, *que siguen un sistema de base* ciento, *para convertir un incomplejo de orden superior en incomplejo de orden inferior, se pondrán a la derecha del incomplejo de orden superior tantas veces dos ceros como órdenes haya desde el incomplejo de orden superior al incomplejo de orden inferior.*

3.° Que *cuando el número incomplejo pertenece a las* medidas de volumen, *que siguen un sistema de base* mil, *para convertir un incomplejo de orden superior en incomplejo de orden inferior, se pondrán a la derecha del incomplejo de orden superior tantas veces tres ceros como órde-*

nes haya desde el incomplejo de orden superior hasta el incomplejo de orden inferior.

282. Observación.—*Si el incomplejo de orden superior estuviese expresado por un número decimal, para convertirle en incomplejo de orden inferior se correrá la coma a la derecha tantos lugares como órdenes haya desde el superior al inferior, si el imcomplejo es de longitud, capacidad o peso; se correrá la coma tantas veces dos lugares como órdenes haya del superior al inferior, si el incomplejo es de superficie; y se correrá la coma a la derecha tantas veces tres lugares como órdenes haya del superior al inferior, si el incomplejo es de volumen. Si el número decimal no tuviese suficiente número de cifras decimales, se pondrán a su derecha los ceros necesarios.*

Háganse ejercicios sobre estos casos.

4.° *Transformar 20 duros en céntimos.*—Como un duro tiene 500 céntimos, se multiplicará 20 por 500 y se obtendrá:

$$20 \text{ duros} = 500 \text{ céntimos} \times 20 = 10000 \text{ céntimos.}$$

5.° *Transformar 20 días en minutos.*—Como el día tiene 1440 minutos, los 20 días tendrán 20 veces 1440 minutos.

Luego

$$20 \text{ días} = 1440 \text{ minutos} \times 20 = 28800 \text{ minutos.}$$

283. Segundo. 1. *Transformar en hectómetros los números concretos 1600 m. y 2385 m.* Como el metro está contenido cien veces en el hectómetro, se dividirá cada uno de los incomplejos por 100. Terminando el primer incomplejo en dos ceros, bastará suprimirlos; del otro incomplejo se separarán a la derecha dos cifras decimales.

Luego

$$1600 \text{ m.} = 16 \text{ Hm.}$$
$$2385 \text{ m.} = 23{,}85 \text{ Hm.}$$

2. *Transformar 7591653 m² en kilómetros cuadrados, y 47000.000 dm² en decámetros cuadrados.* El metro cuadrado está contenido en el kilómetro cuadrado un número de veces expresado por la unidad seguida de tantas veces dos ceros como órdenes haya desde el metro al kilómetro, y como desde el metro al kilómetro hay tres órdenes, el metro cuadrado está contenido 1,000000 de veces en el kilómetro cuadrado; del mis-

mo modo se probaría que el decímetro cuadrado está contenido 10000 veces en el decámetro cuadrado; luego el primer incomplejo se dividirá por un millón, y el segundo, por diez mil, y se tendrá:

$$7591653 \ m^2 = 7{,}591653 \ Km^2.$$
$$47000000 \ dm^2 = 4700 \ Dm^2.$$

3. *Tranformar 38000000000 m³ en kilómetros cúbicos, y 5930657481 cm³ en decámetros cúbicos.*

Por un razonamiento análogo al anterior se vería que el metro cúbico está contenido mil millones de veces en el kilómetro cúbico, por ser las unidades cúbicas de un sistema de base *mil;* y el centímetro cúbico, mil millones de veces en el decámetro cúbico; luego los dos incomplejos anteriores se dividirán por mil millones, y tendremos:

$$38000000000 \ m^3 = 38 \ Km^3.$$
$$5930657481 \ cm^3 = 5{,}930657481 \ Dm^3.$$

Por estos tres ejemplos se ve: Primero. Que *cuando el incomplejo pertenece al* sistema decimal, *para convertirle en incomplejo de orden superior se suprimirán tantos ceros o se correrá la coma tantos lugares a la izquierda como órdenes haya desde el incomplejo de orden inferior al incomplejo del orden superior.*

Segundo. Que *cuando el incomplejo es* de superficie, *para convertirle en incomplejo de orden superior, se suprimen tantas veces dos ceros o se corre la coma tantas veces dos cifras como órdenes haya desde el incomplejo del orden inferior hasta el incomplejo del orden superior.*

Tercero. Que *cuando el incomplejo es* de volumen, *para convertirle en otro incomplejo de orden superior, se suprimen tantas veces tres ceros o se corre la coma a la izquierda tantas veces tres cifras como órdenes haya desde el incomplejo de orden inferior al incomplejo del orden superior.*

Nota.—Cuando el incomplejo es entero, se supone la coma a la derecha de las unidades.

4.° *Transformar 35729 céntimos en duros.*—Como el duro tiene 500 céntimos, se dividirá el incomplejo de céntimos por 500, y se tendrá:

35729 céntimos = 71,458 duros,

es decir, 71 duros y 458 milésimas de duro.

5.° *Transformar 725826 minutos en días.*—El día tiene 1440 minutos; luego para convertir en días el incomplejo de minutos dado, se le dividirá por 1440, y se tendrá:

$$725826 \text{ minutos} = 504{,}046 \text{ días},$$

o sea 504 días y 46 milésimas de día.

OBSERVACIÓN.—*Cuando los números no son métrico-decimales y el resultado de esta transformación no es un número entero, se prefiere dejarlo en forma de quebrado, poniendo el divisor por denominador. Según esto, tendremos:*

$$35729 \text{ céntimos} = \frac{35729}{500} \text{ duros},$$

$$725826 \text{ minutos} = \frac{725826}{1440} \text{ días}.$$

284. Tercero. *Para transformar un complejo en incomplejo de orden inferior, se transforma el incomplejo de orden superior en incomplejo de orden inmediato inferior, y al resultado se le añade el incomplejo de este orden; la suma resultante se transforma en incomplejo del orden inmediato inferior, y al resultado se le suma el incomplejo de este mismo orden, y así se continúa hasta llegar al incomplejo de último orden que contenía el complejo dado.*

I. *Si el complejo es* métrico-decimal *basta poner cada uno de los incomplejos en el lugar que le corresponde, como si se fuera a escribir un número entero o decimal con unidades dadas de varios órdenes.*

EJEMPLOS.—1.° *Transformar en incomplejo de metros el complejo que consta de 7 Mm., 9 Hm., 6 Dm. y 3 m.* Como los miriámetros son unidades de quinto orden, los hectómetros de tercero, los decámetros de segundo y los metros de primero, bastará colocar estos órdenes de unidades en sus lugares correspondientes, poniendo un cero en el lugar de las unidades de cuarto orden, que no existen en este ejemplo. Luego

$$7 \text{ Mm} \ldots 9 \text{ Hm} \ldots 6 \text{ Dm} \ldots 3 \text{ m} \ldots = 70963 \text{ m}.$$

2.° *Convertir en incomplejo de gramos 6 Tm., 9 Qm., 4 kilogramos y 6 Dg.*

Tenemos en este ejemplo unidades de séptimo orden, unidades de sexto orden, unidades de cuarto y unidades de segundo, faltando las de quinto, tercero y primero; luego pondremos un cero en el primer lugar, un cero en el tercero y un cero en el quinto, y en los demás lugares las cifras que expresan los incomplejos de los órdenes correspondientes; por lo tanto,

7 Tm... 9 Qm... 4 Kg. y 6 Dg. = 7,904060 g.

II. *Si el complejo fuese* métrico-centesimal *o* de superficie, observaremos que, siendo un sistema *de base ciento*, no disponiendo más que de nueve cifras y pudiendo llegar hasta 99 el número de unidades de cada orden, *se necesitan para cada orden dos lugares*. Se hará, por consiguiente, *que todos los órdenes estén representados por dos cifras, poniendo un cero a la izquierda de los que no tengan más que una cifra, y dos ceros en los lugares que carezcan del orden correspondiente de unidades*. Una vez hecho esto, se juntarán los distintos órdenes de incomplejos del complejo dado, haciendo que cada orden ocupe el lugar que le corresponde.

EJEMPLO.—Convertir en centímetros cuadrados, 8 miriámetros cuadrados, 73 Hm^2, 9 Dm^2, 23 m^2 y 5 cm^2. Observaremos que este número complejo no contiene kilómetros cuadrados; luego habrá que poner dos ceros en su lugar; que los decámetros cuadrados sólo tienen una cifra; luego habrá que poner un cero a la izquierda de esa cifra; que tampoco tiene unidades de primer orden decimal, o sea decímetros cuadrados, y que los centímetros cuadrados sólo tienen una cifra; luego habrá que poner dos ceros en el lugar de los decímetros cuadrados y un cero a la izquierda de la cifra de los centímetros cuadrados. Hecho esto, se colocarán los distintos órdenes de unidades en el lugar que les corresponda, y resultará:

8 Mm^2... 73 Hm^2... 9 Dm^2 23 m^2 y 5 cm^2 = 8007309230005 cm^2.

III. *Si el número complejo perteneciese al* sistema milesimal, *o lo que es lo mismo, fuese* de volumen, teniendo en cuenta que una unidad de un orden contiene *mil* de orden inmediato inferior, que no se dispone más que de nueve cifras, y que las unidades de cada orden pueden llegar hasta 999, *cada orden de unidades necesita tres lugares*. Por lo tanto, *si faltan unidades de uno o más ordenes, habrá que colocar tres ceros en el lugar de cada orden que carezca de unidades. Si un orden de unidades no tiene más que dos cifras, se colocará* *un cero a la izquierda de ellas; y si no tuviese más que una cifra, se colocarían a su izquierda dos ceros.* Hecho esto, se agruparán los incomplejos que forman el complejo, haciendo que cada orden ocupe el lugar que le corresponde.

EJEMPLO.—Transformar en metros cúbicos el complejo siguiente:

$$87\ Mm^3 \ldots\ 9\ Km^3 \ldots\ 38\ Hm^3 \ldots\ 123\ m^3.$$

En este complejo faltan los decámetros cúbicos; luego se pondrán tres ceros en su lugar; los kilómetros cúbicos sólo tienen una cifra; luego se pondrán dos ceros a su izquierda; los hectómetros cúbicos tienen dos cifras; luego se pondrá un cero a su izquierda. Hecho esto, se agruparán todos los órdenes de manera que cada incomplejo ocupe el lugar que le corresponde, y tendremos:

$$87\ Mm^3 \ldots\ 9\ Km^3 \ldots\ 38\ Hm^3 \ldots\ 123\ m^3 = 87009038000123\ m^3.$$

OBSERVACIÓN.—Si el incomplejo que no tiene dos cifras en las medidas de superficie, o tres en las de volumen, es el incomplejo de orden superior, no se colocan cero o ceros a su izquierda, porque, como se ve, serían completamente inútiles.

IV. *Transformar en incomplejos de céntimos el complejo siguiente:*

11 duros, 4 pesetas y 85 céntimos. Se reducirán los duros a pesetas, y al resultado se le agregará el incomplejo de 4 pesetas; luego se reducirán las pesetas a céntimos, y al resultado se agregará el incomplejo de céntimos, como se ve a continuación:

$$\begin{array}{rl}
11 & \\
\times\ 5 & \text{pesetas.} \\
\hline
55 & \text{pesetas.} \\
+\ 4 & \text{—} \\
\hline
59 & \text{pesetas} = \begin{array}{rl} 5900 & \text{céntimos.} \\ +\ 85 & \text{—} \\ \hline 5985 & \text{céntimos.} \end{array}
\end{array}$$

Luego

11 duros, 4 pesetas, 85 céntimos = 5985 céntimos.

V. *Transformar en incomplejo de segundos el complejo siguiente: 25 días, 20 horas, 45 minutos y 55 segundos.* Se reducirán los días a horas, y al resultado se le sumará el incomplejo de horas; se reducirá la suma a minutos, y al resultado se le agregará el incomplejo de minutos; se reducirá la suma a segundos, y al resultado se agregará el incomplejo de segundos. La última suma será el número de segundos buscado. Véase la serie de operaciones que conducen al resultado pedido:

25		620		37245	
× 24	horas.	60	minutos.	60	segundos.
100		37200	minutos.	2234700	segundos.
50		+ 45	—	+ 55	—
600	horas.	37245	minutos.	2234755	segundos.
+ 20	—				
620	horas.				

Luego

25 días, 20 horas, 45 minutos y 55 segundos = 2234755 segundos.

Observación.—En el ejemplo IV parece que se han multiplicado 11 duros por 5 pesetas, lo cual no tiene sentido alguno, pues realmente nada significa tomar 11 duros, 5 pesetas de veces, o 5 pesetas, 11 duros de veces. La verdad está en que se toman 5 pesetas 11 veces, prescindiendo de que sean duros u otra cosa; es decir, considerando el 11 como abstracto. Lo mismo ocurre en el ejemplo V: en los productos 25 días por 24 horas, 620 horas por 60 minutos, 37245 minutos por 60 segundos, el número 25 sólo indica que hay que tomar 24 horas 25 veces; el número 620 sólo indica que hay que tomar 60 minutos 620 veces, así como el número 37245 indica solamente que hay que tomar 60 segundos 37245 veces; es decir, los números 25, 620 y 37245 se consideran como abstractos. En ocasión oportuna se dirá que el factor considerado como abstracto es el multiplicador, y el concreto, el multiplicando.

285. Cuarto. *Convertir un complejo en incomplejo de orden distinto del inferior.*

Para resolver este caso, *se reduce el complejo dado a incomplejo de orden inferior, por la regla dada en el caso anterior; y luego, si el complejo es* métrico-decimal, métrico-centesimal *o* de superficie, métrico-milesimal *o* de volumen, *se coloca la coma en el lugar de las unidades a que se quiere reducir el complejo, y si no es* métrico-decimal, *ni* centesimal, *ni* milesimal, *se le pone por denominador el número que expresa cuántas veces la unidad inferior está contenida en aquella a que reducimos el complejo.*

EJEMPLOS.—1.° *Convertir en incomplejo de kilogramos 75 Tm., 8 Qm., 6 Mg., 9 Kg., 4 Dg. y 6 g.*

Reduciendo primeramente el complejo a gramos, se tendrá: 75869046 g., y poniendo la coma en el lugar de los kilogramos, resulta: 75869,046 Kg.

2.° *Reducir a áreas 73 Ha., 9 a. y 35 ca.*

Reduciendo el complejo a incomplejo de centiáreas, se tendrá 730935 centiáreas, y poniendo la coma en el lugar de las áreas, resultará:

7309,35 a.

3.° *Convertir en decámetros cúbicos, 9 Mm³, 78 Km³, 136 metros cúbicos.*

Reduciendo este complejo a incomplejo de metros cúbicos, se tendrá:

9078000000 136 m³.

Poniendo ahora la coma en el lugar de los decámetros cúbicos, resultará:

9078000000,136 Dm³.

4.° *Convertir en incomplejo de semanas 1 mes de 30 días, 2 semanas, 5 días, 8 horas y 20 minutos.*

Convertiremos primero el complejo en minutos, y para ello observaremos que 30 días, 2 semanas y 5 días componen 49 días. Ahora, reduciendo el complejo de 49 días, 8 horas y 20 minutos, todo a minutos, como se ve en las operaciones siguientes:

$$\begin{array}{rl} 49 & \\ \times\ 24 & \text{horas} \\ \hline 196 & \\ 98 & \\ \hline 1176 & \text{horas} \\ +\ 8 & — \\ \hline 1184 & \text{horas} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1184 & \\ \times 60 & \text{minutos} \\ \hline 71040 & \text{minutos} \\ +\ 20 & — \\ \hline 71060 & \text{minutos} \end{array}$$

tendremos que 1 mes de 30 días, 2 semanas, 5 días, 8 horas y 20 minutos equivale a 71060 minutos. Y poniendo por denominador el número de minutos que tiene una semana, que son 10080, se tendrá el complejo dado, reducido a

$$\frac{71060}{10080} \text{ semanas.}$$

286. Quinto. *Convertir un incomplejo de orden inferior en complejo de igual orden y de órdenes superiores.* Para resolver este caso, *se reduce el incomplejo dado a incomplejo del orden inmediato superior; el resultado se reduce también a incomplejo del orden inmediato superior, y así sucesivamente, hasta llegar a un incomplejo que no contenga unidades de orden más elevado.*

Si el número es métrico-decimal, *la operación se hace separando las cifras de una en una; si es* métrico-centesimal, *separando las cifras de dos en dos, y si es* métrico-milesimal, *separando las cifras de tres en tres.*

Si el incomplejo no es métrico, *se hará por una serie de divisiones sucesivas*, como se verá en los ejemplos siguientes. *El último cociente y todos los restos precedentes formarán el complejo pedido.*

EJEMPLOS. — 1.º *Convertir en complejo el incomplejo* $7_1525893$ *g.* Separando las cifras de una en una y dando a cada cifra la denominación que le corresponde, se tendrá:

7525893 g. = 7 Tm., 5 Qm., 2 Mg., 5 Kg., 8 Hg., 9 Dg. y 3 g.

2.º *Convertir en complejo el incomplejo 783904 ca.*

Como pertenece al sistema centesimal, separaremos las cifras de dos en dos, dando a cada grupo de dos cifras la denominación correspondiente, y se tendrá:

783904 ca. = 78 Ha., 39 a. y 4 ca.

3.º *Transformar en complejo el incomplejo.*

$730_1508729$ m³.

Como este incomplejo pertenece al sistema de base *mil*, se separarán las cifras de tres en tres, dando a cada grupo de tres cifras la denominación correspondiente, y se tendrá:

730508729 m³ = 730 Hm³, 508 Dm³ y 729 m³.

4.º *Convertir en complejo el incomplejo* $4_1000000$ *de segundos.*

Se convertirán, primero, los segundos en minutos, dividiendo el número de segundos por 60; el cociente se convertirá en horas, dividiéndole por 60; el nuevo cociente se reducirá a días, dividiéndole por 24, y el último cociente, a meses de 30 días, dividiéndole por 30. El último cociente y todos los restos precedentes formarán el complejo pedido.

Véanse las operaciones:

4000000 segundos	60			
40	66666 minutos	60		
40	06	1111 horas	24	
40	06	151	46 días	30
40	06	7 horas	16 días	1 mes.
40 segundos	06 minutos			

Estas operaciones nos dicen que $4_{1}000000$ de segundos equivalen a 1 mes, 16 días, 7 horas, 6 minutos y 40 segundos.

287. Sexto. *Convertir un incomplejo de orden superior en complejo del mismo orden y de órdenes inferiores.*

Este caso ocurre únicamente cuando el incomplejo dado es fraccionario, y es lo que suele llamarse valuación de un quebrado. Para resolverlo, se reduce el incomplejo dado al orden inmediato inferior; la parte fraccionaria del resultado se reduce también al orden inmediato inferior, y así sucesivamente, hasta llegar al último orden.

Vamos a explicar la regla por medio de unos ejemplos:

1.° *Sea reducir a complejo el incomplejo* $\frac{13}{7}$ *de tonelada métrica*. Siendo este incomplejo métrico-decimal, la operación se hará transformando el quebrado ordinario en decimal, o dividiendo el numerador por el denominador, y aproximando el cociente hasta llegar a las unidades del último orden. Véase:

13	7
60	1 Tm., 8 Qm., 5 Mg., 7 Kg., 1 Hg., 4 Dg., 2 g. $\frac{6}{7}$.
40	
50	
10	
30	
20	
6	

La operación nos dice que $\frac{13}{7}$ de tonelada métrica equivalen a

1 Tm., 8 Qm., 5 Mg., 7 Kg., 1 Hg., 4 Dg., 2 $\frac{6}{7}$ g

Explicación: $\frac{13}{7}$ de tonelada contiene 1 tonelada y $\frac{6}{7}$ de tonelada. Estos $\frac{6}{7}$ de tonelada se reducen a quintales métricos, multiplicando el $\frac{6}{7}$ por 10, y sacando del resultado los enteros; de aquí el poner un cero a la derecha del resto, y continuar la división, que nos da 8 Qm. y un resto 4, o, lo que es lo mismo, 8 Qm. $\frac{4}{7}$ de quintal. Estos $\frac{4}{7}$ de quintal se reducirán a miriagramos, multiplicando el $\frac{4}{7}$ por 10; de aquí el agregar un cero al resto 4 y continuar la división, etc.

2.° *Convertir en complejo el incomplejo $\frac{15}{8}$ de semana.* Se dispondrá la operación del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
15 & 8 \\ \cline{2-2}
7 & \text{1 semana, 6 días, 3 horas.} \\
\times\ 7 & \\ \cline{1-1}
49 & \\
1 & \\
\times 24 & \\ \cline{1-1}
24 & \\
0 &
\end{array}
$$

Explicación.—Los $\frac{15}{8}$ de semana contienen 1 semana y $\frac{7}{8}$ de semana. Estos $\frac{7}{8}$ de semana se reducirán a días multiplicando $\frac{7}{8}$ por 7, y sacando del producto o del quebrado impropio que resulte los enteros; por esto se ha multiplicado el resto 7 por 7, y el producto 49 se ha dividido por 8, resultando 6 días, con un resto 1. Este 1 indica que al cociente 6 días hay que agregarle $\frac{1}{8}$ de día, que se reducirá a horas, multiplicando $\frac{1}{8}$ por 24, y sacando los enteros del quebrado impropio resultante; por esto se ha multiplicado 1 por 24, y el producto 24 se ha dividido por 8, dando por cociente 3 horas, con un resto cero; luego $\frac{15}{8}$ de semana equivalen a 1 semana, 6 días y 3 horas. De aquí la regla: *Para convertir en complejo un incomplejo fraccionario de un orden distinto del inferior, se divide el numerador por el denominador, y si el incomplejo era un quebrado impropio, el cociente entero expresará el número de unidades de orden superior que el incomplejo contiene; se multiplicará el resto por el número de veces que la unidad del cociente contiene a la del orden inmediato inferior, y el producto se dividirá por el mismo divisor, con lo que se tendrá el incomplejo siguiente del cociente; el nuevo resto se multiplicará por el número de veces que la unidad del último cociente contiene a la unidad del orden inmediato inferior; el producto se dividirá por el mismo divisor, y el cociente será el incomplejo siguiente del cociente, y así se continuará, hasta llegar al ínfimo orden o a un resto cero.*

Si el incomplejo estuviera expresado por un quebrado propio, se supondría que son cero las unidades de orden superior del primer cociente, y se seguirá la operación del modo que se ha dicho.

CALCULO DE NUMEROS CONCRETOS

Adición de concretos.

288. *Distinguiremos en esta operación cuatro casos: 1.º Sumar incomplejos del mismo orden. 2.º Sumar incomplejos de distintos órdenes. 3.º Sumar un complejo con un incomplejo. 4.º Sumar complejos.*

Primer caso: *Para sumar incomplejos del mismo orden, se suman como números abstractos, y el resultado será del orden de los sumandos.*

Ejemplos.—1.º *Sumar 753 Hl., 358 Hl. y 1897 Hl. de trigo.* Véase la operación:

$$\begin{array}{r} 753 \text{ Hl.} \\ 358 \text{ Hl.} \\ 1897 \text{ Hl.} \\ \hline 3008 \text{ Hl.} \end{array}$$

El resultado es de 3008 Hl. de trigo.

2.º *¿Cuántos años componen la suma de las edades de tres personas que tienen: la primera, 85 años; la segunda, 78, y la tercera, 69?*

$$\begin{array}{rl} 85 & \text{años.} \\ 78 & — \\ 69 & — \\ \hline 232 & — \end{array}$$

La suma de los años de las tres personas componen 232 años.

289. Segundo caso: *Para sumar incomplejos de órdenes distintos, se reducen los sumando a incomplejos del mismo orden, y se suman como abstractos, y el resultado será del orden de los sumandos.*

Ejemplos.—1.º *Sumar 47 Tm., 576 Mg., 6383 Kg. de carbón:*

Reduciendo a kilogramos todos los sumandos, se tendrá:

47 Tm. =	47000	Kg.
576 Mg. =	5760	—
	6383	—
	59143	—

La operación efectuada nos dice que la suma es igual a 59143 Kg. de carbón.

2.° *¿Cuánto componen la suma de las edades de tres personas que tienen: la primera, 55 años; la segunda, 625 meses, y la tercera, 15796 días?*

Reduciendo todos los sumandos a días, tendremos:

55 años =	20075	días.
625 meses =	18750	—
	15796	—
	54621	—

Las tres personas tienen 54621 días, que equivalen a 149 años y 236 días, o a 149 años, 7 meses de 30 días y 26 días.

OBSERVACIÓN.—Si consideramos que el año tiene 365 días y $\frac{1}{4}$ de día, próximamente, los 54621 días componen, aproximadamente, 149 años, 6 meses y 20 días.

290. Tercer caso: *Para sumar un complejo con un incomplejo podría reducirse el complejo al orden de unidades del sumando incomplejo, y quedaría reducido a sumar dos incomplejos del mismo orden; así se hace cuando son métricos los concretos que se han de sumar.*

Si no son métricos los sumandos, se sumará el sumando incomplejo con el incomplejo del mismo orden del sumando complejo.

EJEMPLOS.—1.° *Sumar 45 Kg., 7 Hg., 9 Dg., y 6 g. con 48 Dg.*

Reduciremos el complejo a incomplejo de decagramos y lo sumaremos con el incomplejo dado, como se verá a continuación:

45 Kg... 7 Hg... 9 Dg. y 6 g. =	4579,6 Dg.
	48
	4627,6

La suma es, pues, 4627,6 Dg.

2.º *Sumar 20 días, 15 horas y 20 minutos con 7 días.*

Sumaremos los siete días con los 20, quedando las mismas horas y los mismos minutos. Podemos disponer la operación de este modo:

	20 días,	15 horas,	20 minutos.
	7		
Suma buscada:	27 días,	15 horas,	20 minutos.

291. Cuarto caso: Para sumar números complejos, *podrían reducirse todos los sumandos a un mismo orden y sumarlos como incomplejos, y así suele hacerse cuando los sumandos son números métricos; pero si los sumandos no pertenecen al sistema métrico, es preferible sumar separadamente los incomplejos de cada orden, empezando por el orden inferior.* Se empieza por el orden inferior para que si alguna suma parcial contiene unidades del orden inmediato superior, puedan agregarse a las unidades de este orden antes de haber verificado su suma.

EJEMPLOS. — 1.º *Sea reunir en un número concreto los sumandos siguientes:*

8 Kl., 9 Hl., 6 Dl. y 7 litros; 13 Kl., 2 Hl. y 9 litros;
3 Kl., 6 Dl. y 4 litros.

Reduciéndolos a incomplejos del último orden, se tendrá:

8 Kl. 9 Hl. 6 Dl. 7 litros =	8967	litros.
13 Kl. 2 Hl. » 9 litros =	13209	—
3 Kl. » 6 Dl. 4 litros =	3064	—
La suma será.........	25240	litros.

o sea

25 Kl., 2 Hl. y 4 Dl.

2.º *Averiguar cuánto suma la edad de tres chicos que tienen: el primero, 16 años, 7 meses 25 días; el segundo, 15 años, 11 meses y 20 días, y el tercero, 13 años, 9 meses y 27 días.*

La operación se dispondrá del modo siguiente:

16 años	7	meses	25	días.	
15 —	11	—	20	—	
13 —	9	—	27	—	
46	29	12	72	30	
	5	2 años	12	2 meses.	

La suma pedida es 46 años, 5 meses y 12 días.

Explicación: Se han sumado primero los días, y han resultado 72. Este número se ha dividido por 30, para sacar los meses que contiene, y nos ha dado 22 meses y 12 días; hemos añadido 2 meses a la suma siguiente de los meses, y han resultado 29 meses, que se han dividido por 12, para sacar los años contenidos en 29 meses; los dos años que han resultado se han agregado a la suma siguiente de los años, y se ha obtenido el número 46 años. La suma total la forma la última suma parcial y los restos de las divisiones precedentes.

Sustracción de concretos.

292. Distinguiremos en esta ocasión cinco casos: 1.º *Restar dos incomplejos del mismo orden.* 2.º *Restar dos incomplejos de órdenes distintos.* 3.º *Restar un incomplejo de un complejo.* 4.º *Restar un complejo de otro complejo*, y 5.º *Restar un complejo de un incomplejo.*

Primer caso. Para restar dos incomplejos del mismo orden, *se restarán como abstractos, y la diferencia será del orden del minuendo y del sustraendo.*

Ejemplos. — 1.º *Restar 576 litros de 1893 litros. Se tendrá:*

	1893	litros.
	576	—
Diferencia:	1317	—

2.º *Un sujeto tiene 75 años; su nieto, 17. ¿Cuántos años más tiene el abuelo que el nieto?*

	75	años.
	17	—
Diferencia:	58	—

El abuelo tiene 58 años más que su nieto.

293. Segundo caso: Para restar dos incomplejos de órdenes distintos, *se reducen al mismo orden, y se está en el caso anterior.*

Ejemplos. — 1.º *Restar 125 litros de 83 Hl.* Se tendrá:

83 Hl. =	8300	litros.
	125	—
Diferencia:	8175	—

El resultado será 8175 litros, o, si se quiere, 81 Hl., 7 Dl. y 5 litros.

2.° *Un sujeto tiene 70 años; su nieto, 289 meses. ¿En cuánto excede la edad del abuelo a la del nieto?*

La operación se dispone así:

70 años =	840	meses.
	289	—
Diferencia:	551	—

El abuelo tiene 551 meses, o sea 45 años y 11 meses más que su nieto.

294. Tercer caso: Para restar un incomplejo de un complejo, *puede reducirse el complejo al orden de unidades del incomplejo, y se estará en el caso anterior; pero suele ser preferible restar el incomplejo sustraendo del incomplejo del mismo orden del minuendo. Puede ocurrir que el incomplejo sustraendo sea mayor que el incomplejo del mismo orden del minuendo* (no siendo el orden superior, porque entonces no sería posible la sustracción); *en este caso, se agregarán al incomplejo del minuendo tantas unidades de su orden como vale una unidad del orden inmediato superior, cuidando luego de rebajar una unidad al incomplejo de dicho orden inmediato superior.*

EJEMPLOS.—1.° *Restar 47 a. de 5 Ha., 93 a. y 48 ca.*

Si reducimos el complejo a áreas, se tendrá:

5 Ha. 93 a. 48 ca. =	593,48	áreas.
Restando de este minuendo las....	47	—
Resultará...........	546,48	—

Podíamos haber restado las 47 a. del sustraendo de las 93 áreas del minuendo, disponiendo el problema de este modo:

	5 Ha. 93 a. 48 ca.
	47
Diferencia:	5 Ha. 46 a. 48 ca.

resultado igual al anterior.

2.° *¿En cuánto excede la edad de un padre, que tiene 51 años, 7 meses y 25 días, a la de su hijo, que acaba de cumplir 17 años?*

Edad del padre....	51 años 7 meses 25 días.
Edad del hijo......	17 años
Diferencia....	34 años 7 meses 25 días.

Excede, pues, la edad del padre a la de su hijo en 34 años, 7 meses y 25 días.

295. Cuarto caso: Para restar un complejo de otro complejo, *se restarán separadamente cada uno de los incomplejos del sustraendo de los del mismo orden del minuendo, empezando por el orden inferior. Si algún incomplejo del sustraendo, no siendo el de mayor orden, fuese mayor que el incomplejo del mismo orden del minuendo, se agregarían a éste tantas unidades de su orden como vale una unidad del orden inmediato superior, teniendo cuidado de rebajarla después al incomplejo de dicho orden superior del minuendo.*

Si los números son métricos, es conveniente reducir los complejos a incomplejos del mismo orden y efectuar luego la sustracción.

EJEMPLOS.—1.° *De 9 Ha., 25 a. y 7 ca. se vendieron 2 Ha., 48 a. y 25 ca. ¿Cuánto le quedó al vendedor?*

Reduciendo minuendo y sustraendo a incomplejos del último orden, o sea de centiáreas, se tendrá:

9 Ha. 25 a. y 7 ca. =	92507	ca.
2 Ha. 48 a. y 25 ca. =	24825	—
Diferencia.......	67682	—

Le quedaron al vendedor 67682 ca. = 6 Ha., 76 a., 82 ca.

2.° *Un sujeto tiene 55 años, 7 meses y 25 días; su hijo, 19 años, 11 meses y 15 días. ¿En cuánto la edad del padre excede a la del hijo?*

	54	19	
Edad del padre..	55 años	7 meses	25 días.
Edad del hijo....	19 —	11 —	15 —
	35 años	8 meses	10 días.

La edad del padre excede a la del hijo en 35 años, 8 meses y 10 días.

Obsérvese que por ser el incomplejo 11 meses del sustraendo mayor que el incomplejo 7 meses del minuendo, se ha agregado a éste 12 meses, resultando un minuendo parcial de 19 meses, colocado encima del 7, del cual se ha restado los 11 meses. El año, o 12 meses, agregado a los 7 meses, se ha rebajado de 55 años, quedando 54, que se ha puesto encima del 55.

Quinto caso: Para restar un complejo de un incomplejo, *se* *transforma éste en complejo conveniente, y el caso queda reducido al anterior.*

Si los números son métricos, se puede reducir el incomplejo y el complejo a incomplejos del mismo orden, y se restan como dos incomplejos.

EJEMPLOS.— 1.° *De una finca de 15 Ha. vendió su dueño 4 Ha., 90 a. y 55 ca. ¿Cuánto le quedó al dueño?*

Extensión de la finca, 15 Ha......	=	150000	centiáreas.
Se vendieron 4 Ha. 90 a. 55 ca....	=	49055	—
Diferencia...........		100945	—

Le quedaron al dueño 100945 ca., o sea 10 Ha., 9 a. y 45 centiáreas.

2.° *Un sujeto tiene 51 años, 7 meses y 22 días. ¿Cuánto le falta para cumplir 90 años?*

Transformando el incomplejo 90 años en complejo, tomaremos de los 90 años 1 año, del cual tomaremos 11 meses, y convertiremos el mes restante en 30 días. El problema se dispondrá de este modo:

90 años	=	89 años	11 meses y	30 días.
Edad del sujeto		51 —	7 —	22 —
Diferéncia.....		38 años	4 meses y	8 días.

Multiplicación de concretos.

296. *Nota.*—La multiplicación y división de concretos no puede desarrollarse convenientemente sin el conocimiento de las cantidades concretas proporcionales, por lo que nos limitaremos a decir lo más indispensable para que en esta materia no queden incompletas estas NOCIONES. Nos limitaremos en la multiplicación a resolver la cuestión en que se propone hallar el valor de un número concreto de unidades, cuando se conoce el valor de una de ellas, y en la división, a resolver la cuestión en que se propone hallar el valor de una unidad concreta, conociendo el valor de un número concreto de la misma especie. Definamos ahora la multiplicación de concretos.

297. *La multiplicación de concretos tiene por objeto, dados dos números concretos, hallar otro número concreto, que sea respecto de uno de ellos lo que el otro es respecto de una unidad concreta dada de su especie.* De aquí se deduce que, siendo uno de los factores de la misma especie que la unidad, el producto ha de ser de la misma especie que el otro factor. El factor homogéneo con la unidad es el multiplicador, y el factor homogéneo con el producto es el multiplicando. En esta operación, el multiplicando es el valor correspondiente a una unidad concreta dada. Pues bien, a esta unidad concreta, cuyo valor es el multiplicando, la llamaremos *unidad principal*.

Distinguiremos en esta operación cuatro casos:

1.° *Que el multiplicando y el multiplicador sean incomplejos;* por ejemplo: sabiendo que 1 metro de tela vale 8 pesetas, averiguar lo que valen 15 m. de la misma tela. 2.° *Que el multiplicando sea complejo y el multiplicador incomplejo;* por ejemplo: sabiendo que 1 metro de tela vale 2 duros, 3 pesetas y 40 céntimos, averiguar lo que valen 12 m. de la misma tela. 3.° *Que el multiplicando sea incomplejo y el multiplicador complejo;* por ejemplo: sabiendo que 1 metro de tela vale 12 pesetas, averiguar lo que valen 2 Dm., 7 m. y 45 cm. de la misma tela. 4.° *Que multiplicando y multiplicador sean complejos;* por ejemplo: sabiendo que 1 metro de tela vale 1 duro, 4 pesetas y 80 céntimos, averiguar lo que valen 2 Dm., 5 m. y 75 cm. de la misma tela.

Antes de resolver estos casos, observaremos que para conocer qué factor es el multiplicando y qué factor es el multiplicador, hay que fijarse en cuál es el concreto homogéneo con la unidad principal; este concreto es el multiplicador, y, naturalmente, el otro será el multiplicando. Veamos los cuatro casos dichos.

298. Primer caso: Siendo la unidad principal el metro, los 15 m. serán el multiplicador, y como el multiplicador se considera como abstracto, el valor de la tela será 8 pesetas $\times$ 15 = = 120 pesetas, donde vemos que *para multiplicar dos incomplejos se multiplican como si fueran abstractos, y el producto es de la especie del multiplicando.*

299. Segundo caso: En el ejemplo del segundo caso, el metro es también la unidad principal; luego 12 m. serán el multiplicador, y el multiplicando será 2 duros, 3 pesetas y 40 céntimos.

Para resolver este caso, en que el multiplicando es complejo y el multiplicador incomplejo, *se multiplicará cada uno de los órdenes del multiplicando por el multiplicador, empezando por el orden inferior, para poder extraer de cada* *producto parcial las unidades de orden superior que contenga y agregarlas a las unidades de este orden.* Veámoslo:

Multiplicando	2 duros	3 pesetas	40 céntimos.
Multiplicador	12 metros		
	24 duros	36 pesetas	480 céntimos.

o sea 32 duros, 0 pesetas 80 céntimos.

Las 4 pesetas contenidas en 480 céntimos se han agregado a las 36 pesetas del segundo producto parcial, y como 4 pesetas y 36 pesetas componen 40 pesetas, que son 8 duros, se han agregado estos 8 duros a los 24 del tercer producto parcial, y han resultado 32 duros, 0 pesetas y 80 céntimos para el valor de los 12 m. de tela.

300. Tercer caso: En el ejemplo de este caso es también el metro la unidad principal; luego el complejo compuesto de 2 Dm., 7 m. y 45 cm. será el multiplicador, y las 12 pesetas, el multiplicando. En este caso hay que convertir el multiplicador en incomplejo del orden de la unidad principal, y el problema queda reducido a multiplicar dos incomplejos. Veámoslo:

Multiplicando	12 pesetas	=	12 pesetas.
Multiplicador	2 Dm. 7 m. 45 cm.	=	27,45 m.
	Producto.............		329,40 pesetas.

Los 2 Dm., 7 m. y 45 cm. de tela valen, por tanto, 329,40 pesetas.

Cuarto caso: En el ejemplo de este caso, como en los anteriores, el metro es la unidad principal.

Para resolver este caso, o sea para multiplicar dos complejos, *se reducirá el multiplicador a incomplejo del orden de la unidad principal, y al multiplicando puede dejársele complejo o reducírsele a incomplejo del orden inferior, para que resulte entero*, y de este modo, el cuarto caso queda reducido al segundo caso o al primero. Veámoslo:

Multiplicando..	1 duro, 4 pts., 80 cts. = 980 cts.
Multiplicador...	2 Dm., 5 m., 75 cm. = 25,75 m.
Producto...	25235 céntimos = 50 duros, 2 pts., 35 cts.

División de concretos.

301. *La división,* que tiene siempre por objeto, dado un producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro factor, *presenta,* tratándose de concretos, *dos casos generales:* el que resulta de dividir el producto por el multiplicando y el que resulta de dividir el producto por el multiplicador. Como el producto y el multiplicando son homogéneos, y el producto y el multiplicador son heterogéneos, de aquí los dos casos, que son: que *dividendo y divisor sean homogéneos,* y que *dividendo y divisor sean heterogéneos.*

En cada uno de estos casos generales se distinguen otros cuatro: 1.° *Que el dividendo y divisor sean incomplejos.* 2.° *Que el dividendo sea complejo y el divisor incomplejo.* 3.° *Que el dividendo sea incomplejo y el divisor complejo,* y 4.° *Que dividendo y divisor sean complejos.*

Si dividendo y divisor son homogéneos, cualquiera que el caso sea, dividendo y divisor *se reducen a incomplejos del mismo orden y se dividen como abstractos,* observando que el valor del cociente es el dividendo, y el valor de la unidad, el divisor.

EJEMPLO.—*Cuántos metros de tela se comprarán con 100 pesetas, si un metro vale 1 duro, 2 pesetas y 80 céntimos.*

100 pesetas, que es el valor del cociente, será el dividendo; 1 duro, 2 pesetas y 80 céntimos, que es el valor de un metro, será el divisor; se reducirán dividendo y divisor a céntimos, y se dividirán como abstractos.

Dividendo, 100 pts.	= 10000 cts.	10000	780
Divisor, 1 duro, 2 pts. 80 cts.	= 780 —	2200	12,82
		6400	
		1600	
		040	

Se pueden comprar 12 m. de tela y 82 cm.

302. Cuando son heterogéneos dividendo y divisor, daremos la regla para cada caso, observando que el divisor ha de ser siempre del orden de la unidad principal, que es aquella cuyo valor es el cociente.

Primer caso. *Para dividir un incomplejo por otro incomplejo, se dividen como abstractos.*

Ejemplo. — *Cuánto pesará un hectolitro de una sustancia, si 40 Hl. pesan 5760 Kg.*

Se busca el peso de 1 Hl.; luego los 40 Hl. serán el divisor, y, por lo tanto, 5760 Kg., el dividendo. La operación será:

5760 Kg.	40
17	144
16	
0	

Luego un hectolitro de la sustancia pesa 144 Kg.

303. Segundo caso: *Para dividir un complejo por un incomplejo, se dividirá cada uno de los órdenes del dividendo por el divisor, empezando por el orden superior y reduciendo cada resto al orden de unidades del incomplejo inmediato inferior.*

Ejemplo.—*Cuánto costará 1 m. de tela, si 12 m. cuestan 25 duros, 4 pesetas y 50 céntimos.*

El valor que se busca es el de 1 m. de tela; luego el divisor es los 12 m., y el dividendo, el complejo 25 duros, 4 pesetas y 50 céntimos. La operación será:

25 duros	4 pts.	50 cts.	12
1 —	= 5 —	—	2 duros, 0 pts., 79 cts.
	9 =	900	
		950	
		110	
		2	

Luego 1 m. de tela vale 2 duros, 0 pesetas y 79 céntimos.

Si el complejo fuese métrico, será preferible convertirle en incomplejo del orden inferior.

Ejemplo.—*25 Hl. de una sustancia pesan 2 Tm., 7 Qm., 8 Mg. y 6 Kg. ¿Cuál es el peso de un hectolitro?*

Dividendo: 2 Tm., 7 Qm., 8 Mg., 6 Kg.	2786	25
= 2786 Kg.	28	111,44
Divisor: = 25 Hl	36	
	110	
	100	
	00	

Pesa el hectolitro 111 Kg., 4 Hg. y 4 Dg.

304. Tercer caso: *Cuando el dividendo es incomplejo y el divisor complejo, se reducirá el divisor a incomplejo del* *orden de la unidad principal*, y el caso queda reducido a dividir dos incomplejos.

EJEMPLO.—*En 7 horas, 20 minutos y 30 segundos anda un tren, con movimiento supuesto uniforme, 500 Km. ¿Cuánto anda en una hora?* El cociente que se busca es el trozo de camino recorrido por el tren en una hora; luego el divisor será el tiempo expresado en horas, y el dividendo, los 500 Km.

Dividendo, 500 Km.

Divisor, 7 horas, 20 minutos y 30 segundos.

Reduciendo a horas el divisor, se tendrá:

$$7 \text{ horas, } 20 \text{ minutos y } 30 \text{ segundos} = \frac{26430}{3600} \text{ horas.}$$

La operación será:

$$500 \text{ Km.} : \frac{26420}{3600} = \frac{1800000}{26420} = 68{,}130 \text{ Km.}$$

Anda, pues, el tren, por hora, 68 Km. y 130 m.

305. Cuarto caso: *Para dividir un complejo por otro complejo, se reducirá el divisor a incomplejo del orden de la unidad principal*, y queda el caso reducido a dividir un complejo por un incomplejo; *pero si el divisor convertido en incomplejo del orden de la unidad principal resulta fraccionario, es preferible reducir el dividendo a incomplejo del orden inferior.*

EJEMPLO.—Un móvil con movimiento uniforme corre, en 5 horas y 12 minutos, 300 Km., 9 Hm. y 8 m. ¿Cuánto corre en uno hora?

Dividendo: 300 Km., 9 Hm., 8 m.

$$\text{Divisor: } 5 \text{ horas, } 12 \text{ m.} = \frac{312}{60} \text{ horas.}$$

Siendo fraccionario el divisor reducido a horas, se convierte el dividendo en incomplejo de metros, y será 300908 m.

La operación será:

$$300908 : \frac{312}{60} = \frac{18054480}{312} = 57866 \text{ m.}$$

El móvil corre por hora 57866 m., aproximadamente, o sea 57 Km. y 866 m.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

1.º *¿Qué longitud tendrá una circunferencia cuyo radio tiene 12 m.?*

La fórmula $c = 2\pi r$ nos dará:

$$c = 2 \times 3{,}14159 \times 12 \text{ m.} = 24 \times 3{,}14159 \text{ m.} = 75{,}398 \text{ m.}$$

La longitud de la circunferencia es, pues, 75 m. 398 milímetros, aproximadamente.

2.º *¿Qué distancia hay desde un punto de la superficie de la Tierra al centro de la misma?* Esta distancia es el radio de la Tierra. Sabiendo que el meridiano de Barcelona tiene 40000 Km., y poco más o menos los demás, la fórmula

$$r = \frac{c}{2\pi} \text{ nos dará: } r = \frac{40000}{2\pi} = \frac{20000}{3{,}14159} = 6366 \text{ Km.}$$

Luego *el radio de la Tierra tiene, aproximadamente, 6366 kilómetros.*

3.º *¿Cuántos metros de alfombra necesita una sala rectangular que tiene de largo 12 m. y de ancho 8.*

La fórmula Area $= b \times a \times u^2$ nos da:

$$\text{Area} = 12 \times 8 \times \text{m}^2 = 96\ u^2.$$

Luego para alfombrar dicha sala se necesitan 96 m² de alfombra.

4.º *¿Cuántos metros cuadrados de superficie tendrá un campo triangular cuya base tiene 100 m. y su altura 80.*

La fórmula Area $= \frac{1}{2}\, b \times a \times u^2$ nos da:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ 100 \times 80 \times \text{m}^2 = 4000 \text{ m}^2.$$

El campo tiene, pues, de superficie 4000 m².

5.° *¿Cuántos metros cuadrados de superficie tiene un círculo cuyo radio es de 10 m.?*

La fórmula $c = \pi r^2 \times u^2$ nos dará:

$$c = 3{,}141592 \times 100 \times \text{m}^2 = 314{,}1592\ \text{m}^2.$$

Luego el círculo tiene 314 m² y 1592 cm².

6.° *El lado de la base de una pirámide exagonal regular tiene 12 cm.; la apotema, 25. ¿Cuál es el área lateral de la pirámide?*

Teniendo 12 cm. el lado de la base, y siendo 6 los lados de la misma, el perímetro de la base será 12 cm. $\times$ 6 = 72 cm.

La fórmula $A = \frac{1}{2} p \times a \times u^2$ nos da:

$$A = \frac{1}{2} 72 \times 25 \times \text{cm}^2 = 36 \times 25 \times \text{cm}^2 = 900\ \text{cm}^2 = 9\ \text{dm}^2.$$

7.° *El lado de la base de un prisma pentagonal regular tiene 40 cm.; la arista lateral, 80. ¿Cuál será el área lateral del prisma?*

Siendo la base un pentágono regular, su perímetro será

$$40\ \text{cm.} \times 5 = 200\ \text{cm.},$$

y por la fórmula $A = p \times a \times u^2$ se tendrá:

$$A = 200 \times 80 \times \text{cm}^2 = 16000\ \text{cm}^2 = 1\ \text{m}^2\ \text{y}\ 60\ \text{dm}^2.$$

8.° *El radio de la base de un cono de revolución tiene 25 centímetros, y el lado del mismo, 50. ¿Cuál es el área lateral del cono?*

La fórmula $A = \pi r l \times u^2$ nos da:

$$A = 3{,}141592 \times 25 \times 50 \times \text{cm}^2 = 3926{,}99\ \text{cm}^2.$$

El área lateral del cono es, pues,

$$3926{,}99\ \text{cm}^2,\ \text{o bien}\ 39\ \text{dm}^2,\ 26\ \text{cm}^2\ \text{y}\ 99\ \text{mm}^2.$$

9.° *El radio de un cilindro de revolución tiene 15 cm., y el lado, 20. ¿Cuál será el área lateral del cilindro?*

La fórmula $A = 2 \pi r l \times u^2$ nos dará:

$$A = 2 \times 3{,}141592 \times 15 \times 20 \times \text{cm}^2 = 1884{,}9552\ \text{cm}^2.$$

El área lateral del cilindro será, por consiguiente,

1884,9552 cm², o sea 18 dm², 84 cm², 95 mm² y 52 dm².

10. *El radio de una esfera tiene 5 cm. ¿Cuál será su área?*

La fórmula $A = 4\pi r^2 \times u^2$ nos dará:

$$A = 4 \times 3{,}141592 \times 5^2 \times u^2 = 100 \times 3{,}141592 \times cm^2 = 314{,}1592\ cm^2.$$

11. *Una sala de suelo rectangular tiene de largo 12 m., de ancho 8 y de alto 5. ¿Cuántos metros cúbicos de aire contiene la sala?*

La fórmula del volumen de un paralelepídedo rectangular es:

$$V = a \times b \times c \times u^3;\ \text{luego}\ V = 12 \times 8 \times 5 \times m^3 = 480\ m^3.$$

La sala contiene 480 m³ de aire.

12. *La base de una pirámide tiene 20 m²; la altura, 9 m. de longitud. ¿Cuál será el volumen de la pirámide?*

La fórmula del volumen de la pirámide $V = \frac{1}{3} B \times a \times u^3$ nos dará:

$$V = \frac{1}{3}\, 20 \times 9 \times m^3 = 60\ m^3.$$

Es, pues, el volumen de la pirámide 60 m³.

13. *El radio de la base de un cono tiene 3 m.; la altura, 6. ¿Cuál es el volumen del cono?*

La fórmula del volumen del cono $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times a \times u^3$ nos dará:

$$V = \frac{1}{3}\, 3{,}141592 \times 3^2 \times 6 \times m^3 = 56{,}548656\ m^3.$$

El volumen del cono es, por lo tanto,

56 m³, 548 dm³ y 656 cm³.

14. *¿Qué volumen tendrá un cilindro de igual radio y altura que el cono anterior?*

La fórmula $V = \pi r^2 \times a \times u^3$ nos dará:

$$V = 3{,}141592 \times 3^2 \times 6 \times m^3 = 169{,}645968\ m^3.$$

Será, pues, el volumen del cilindro

$$169\ m^3,\ 645\ dm^3,\ 968\ cm.$$

15. *El radio de una esfera tiene 10 m. ¿Cuál será su volumen?*

La fórmula del volumen de la esfera $\frac{4}{3}\pi r^3 \times u^3$ nos dará:

$$V = \frac{4}{3} \times 3{,}141592 \times 10^3 \times m^3 = \frac{4}{3} \times 3141{,}592\ m^3 = 4188{,}789\ m^3.$$

Será, por consiguiente, el volumen de la esfera 4188 m^3 y 789 dm^3.

FIN

ÍNDICE