LECCIONES

DE

MECÁNICA RACIONAL

POR

D. TOMÁS ARIÑO Y SANCHO

Doctor en Ciencias,
Abogado y Catedrático de Mecánica racional de la Universidad de Madrid

Obra que contiene todos los conocimientos
de Mecánica racional exigidos en todas las carreras especiales
Civiles, Militares y de la Armada

TOMO II

MADRID
TIPOGRAFÍA DE G. ESTRADA
Doctor Fourquet, 7
1880

INDICE DEL TOMO II.

ESTÁTICA.

SEGUNDA PARTE.

LECCION XL.

LECCION XLI.

LECCION XLII.

LECCION XLIII.

LECCION XLIV.

LECCION XLV.

LECCION XLVI.

LECCION XLVII.

LECCION XLVIII.

Págs.

DINAMICA.

SEGUNDA PARTE.

LECCION XLIX.

LECCION L.

LECCION LI.

LECCION LII.

LECCION LIII.

Págs.

LECCION LIV.

LECCION LV.

LECCION LVI.

LECCION LVII.

LECCION LVIII.

LECCION LIX.

Págs.

LECCION LX.

LECCION LXI.

HIDROSTÁTICA.

LECCION LXII.

LECCION LXIII.

LECCION LXIV.

LECCION LXV.

HIDRODINAMICA.

LECCION LXVI.

LECCION LXVII.

LECCION LXVIII.

APENDICE.

DE LAS MÁQUINAS.

Teoría del trabajo de las máquinas.

MECÁNICA
RACIONAL

ESTÁTICA.

SEGUNDA PARTE.

LECCION XL.

Cómo se aplican las fuerzas á los sistemas materiales.—Equilibrio de fuerzas aplicadas por medio de cuerdas. Caso en que una de las cuerdas puede deslizarse por un anillo.—Equilibrio del polígono funicular.—Polígono de Varignon.—Caso en que hay anillos.—Caso de várias cuerdas en un mismo vértice del polígono.—Equilibrio de un hilo flexible é inestensible solicitado en sus diferentes puntos por fuerzas dadas. Ecuaciones de este equilibrio.—Integracion de estas ecuaciones.—Valor de la tension en cada punto del hilo.—Curva formada por el hilo.

Cómo se aplican las fuerzas á los sistemas materiales.

484. En la primera parte de la Estática hemos estudiado las leyes de equilibrio de los sólidos invariables ó sistemas materiales invariables, suponiéndoles enteramente libres, ó lo que es lo mismo, no sujetos á ninguna condicion. En esta segunda parte vamos á estudiar las mismas leyes, cuando los sólidos ó sistemas materiales están sujetos á condiciones dadas.

Pocas veces se aplican las fuerzas á los sistemas materiales directamente; lo más general es emplear para ello cuerpos apropiados, como varillas ó barras rígidas é inflexibles, pero movibles, ó cuerdas flexibles, pero insetensibles. Aunque ningun cuerpo es perfectamente rígido, ni perfectamente flexible, nosotros los supondremos por ahora, ya dotados de una rigidez absoluta, ya de una flexibilidad perfecta; y más adelante expondremos la manera de tener en cuenta la pequeña flexibilidad de los primeros y la rigidez de los segundos.

Equilibrio de fuerzas aplicadas por medio de cuerdas. Caso en que una de las cuerdas puede deslizarse por un anillo.

485. Sean P y Q dos fuerzas aplicadas en las extremidades de una cuerda flexible é inestensible; si estas fuerzas se equilibran, la cuerda debe estar tendida en línea recta, y las fuerzas deben ser iguales y contrarias; porque si estas dos fuerzas no tuvieran la misma direccion que la cuerda, la harian girar; y si estando en la misma direccion no fueran iguales y contrarias, harian marchar la cuerda en su direccion y en el sentido de la mayor.

Se llama *tension de la cuerda* en un punto dado el valor de cada una de estas fuerzas iguales, ó la reaccion mútua de las dos porciones de la cuerda que se reunen en este punto.

486. Si tres fuerzas P, Q, R (fig. 219), que actúan sobre un punto A, por medio de cuerdas que concurren en este punto, se equilibran, una cualquiera de estas fuerzas es igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos; de donde se deduce que estas tres cuerdas están en un plano, y que cada fuerza puede representarse por el seno del ángulo formado por las otras dos.

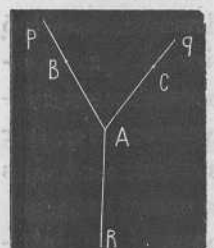

Fig. 219.

Imaginemos que se fija un punto B de la cuerda AP; la fuerza P viene á ser inútil, y suprimiéndola no se turbará el equilibrio. La presion que sufre el punto B, igual y directamente contraria á la fuerza P que habria que aplicar en este punto, si llegase á ser libre, para restablecer el equilibrio, es por lo tanto igual y contraria á la resultante de las fuerzas Q y R. Si se fija á la vez un punto B de la cuerda AP y un punto C de la cuerda AQ, la presion sobre el punto C será igual y contraria á Q.

487. Cuando dos fuerzas P y Q (fig. 220), están aplicadas á los extremos de una cuerda PAQ, que pasa por un anillo sujeto por una tercera fuerza R, si el equilibrio existe, no se destruirá suponiendo el anillo fijo. Entónces, pudiendo deslizarse la cuerda PAQ por este anillo, si las fuerzas P y Q son iguales se equilibrarán; y si son desiguales descompondremos la mayor en dos partes, una igual á la menor, que destruirá á ésta, y otra igual á su diferencia, que hará mover la cuerda segun su direccion; de donde resulta, que P=Q, es la condicion necesaria y suficiente para el equilibrio cuando el anillo está fijo.

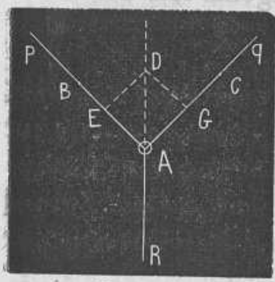

Fig. 220.

Puede demostrarse tambien este resultado del modo siguiente: si el equilibrio existe, no se turbará fijando dos puntos tomados respectivamente sobre las cuerdas AP y AQ. En todas las posiciones que el punto A puede tomar, la suma de sus distancias á los dos puntos B y C permanece constante; de manera, que en todas ellas, el punto A está sobre un elipsoide de revolucion. Se puede, pues, suprimir la cuerda BAC, con tal que se considere el punto A como sujeto á permanecer constantemente sobre esta superficie. Pero entónces, para que este punto esté en equilibrio, es necesario que la cuerda AR, segun la cual está dirigida la fuerza R, sea normal á la superficie; y como ésta es de revolucion, la normal está dirigida en el plano de la elipse meridiana segun la bisectriz del ángulo PAQ; y siendo la bisectriz la direccion de la resultante de las fuerzas P y Q, se tendrá por consiguiente P=Q.

488. Si representamos estas dos fuerzas por las rectas iguales AE y AG, tomadas sobre sus direcciones, su resultante estará representada por la diagonal AD del rombo AEDG. Si llamamos α al ángulo BAC, tendremos

$$AD = 2AE \cos \tfrac{1}{2}\alpha;$$

y como R es igual y directamente opuesta á esta resultante, será

$$R = 2P \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

R representa tambien la presion que experimenta el punto A cuando se fija el anillo.

Equilibrio del polígono funicular. Polígono de Varignon.

489. Consideremos várias fuerzas aplicadas á los diferentes vértices de una porcion de polígono cuyos diferentes lados son rectas inflexibles, pero movibles al rededor de los puntos de union, y busquemos las condiciones de su equilibrio, suponiendo que los vértices del polígono son libres, inclusos los de los extremos.

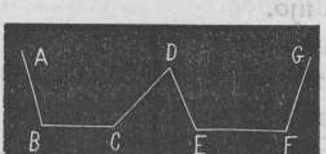

Fig. 221.

Sea ABCDEFG (fig. 221), el polígono de que se trata. Designemos los vértices B, C, D,..... por los números

$$(1), (2), (3)\ldots\ldots, (n-1), n;$$

las fuerzas aplicadas en ellos por

$$P^1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_{(n-1)}, P_n;$$

y los ángulos que forman con los ejes por

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda^3 \ldots\ldots, \lambda_n,$$
$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots\ldots, \mu_n,$$
$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots\ldots, \nu_n.$$

Si los extremos A y G no están fijos, será preciso, para que el polígono esté en equilibrio, aplicar en el punto B una fuerza en la direccion BA, y en el punto F una fuerza en la direccion FG; estas dos fuerzas serán las tensiones de los lados AB y FG que designaremos por T_0 y T_n. Cada lado inflexible del polígono no podrá permanecer en equilibrio si no es solicitado en sus extremos por dos fuerzas iguales y dirigidas en sentido contrario. Cada una de estas dos fuerzas representa la tension del lado correspondiente, que designaremos por T_1, T_2, $T_3 \ldots\ldots$, T_{n-1} para los dados (1), (2), (2), (3),...., hasta (n—1), (n). Designemos por

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_n;\ 6_0, 6_1, 6_2 \ldots\ldots, 6_n;\ \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n;$$

los ángulos que forman con los ejes los lados del polígono cuyas tensiones son T_0, T_1, $T_2 \ldots\ldots$, T_{n-1}, T_n, contadas sus direcciones á partir del vértice más próximo al extremo A. En cada vértice deberá existir el equilibrio entre las fuerzas aplicadas á este vértice y las tensiones que solicitan los lados que lo forman. Por consiguiente tendremos en el vértice (1)

$$-T_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\lambda_1 + T_1 \cos\alpha_1 = 0,$$
$$-T_0 \cos 6_0 + P_1 \cos\mu_1 + T_1 \cos 6_1 = 0,$$
$$-T_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\nu_1 + T_1 \cos\gamma_1 = 0;$$

en el vertice (2)

$$-T_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\lambda_2 + T_2 \cos\alpha_2 = 0,$$
$$-T_1 \cos 6_1 + P_2 \cos\mu_2 + T_2 \cos 6_2 = 0,$$
$$-T_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\nu_2 + T_2 \cos\gamma_2 = 0;$$

y ecuaciones análogas para los vértices (3),...., (n). Sumando todas las ecuaciones que se refieren á cada eje, se eliminarán las tensiones intermedias desconocidas, y encontraremos para el equilibrio las ecuaciones siguientes:

$$(1)\begin{cases}-T_0\cos\alpha_0+P_1\cos\lambda_1+\ldots+P_n\cos\lambda_n+T_n\cos\alpha_n=0,\\ -T_0\cos\beta_0+P\ \cos\mu_1+\ldots+P_n\cos\mu_n+T_n\cos\beta_n=0,\\ -T_0\cos\gamma_0+P_1\cos\nu_1+\ldots+P_n\cos\nu_n+T_n\cos\gamma_n=0.\end{cases}$$

Las ecuaciones (1) expresan, que para el equilibrio del polígono funicular es necesario en todos los casos, que todas las fuerzas del sistema, es decir, las tensiones de los lados extremos, y las fuerzas aplicadas á los vértices, trasportadas á un punto cualquiera del espacio, se equilibren; lo cual se demostraria fácilmente por un simple razonamiento. Cuando esta condicion esté satisfecha, se podrá siempre dar al polígono una forma tal, que el equilibrio exista, suponiendo como hemos dicho, que los lados son inflexibles. En efecto, sea $n-1$ el número de vértices del polígono, n el número de sus lados; tendremos que determinar, $n-1$ vértices, $3n-3$ ángulos que los $n-1$ lados que siguen al primero forman con los tres ejes coordenados, y sus $n-1$ tensiones; es decir, $5n-5$ cantidades. Hemos visto que cada vértice da 3 ecuaciones de condicion, y todos los vértices darán $3n-3$ ecuaciones de condicion; ademas los $n-1$ lados del polígono dan para los ángulos que forman, las $n-1$ relaciones

$$\cos^2\lambda_n+\cos^2\mu_n+\cos^2\nu_n=1;$$

y en fin, $n-1$ ecuaciones expresan la inestensibilidad de los lados del polígono, y tendremos en junto $5n-5$ ecuaciones; es decir, tantas como incógnitas. Si P_1, P_2... son pesos, y suponemos el eje de las x horizontal, el de las y vertical, y ademas el polígono está en un plano vertical, $\cos\gamma_0$, $\cos\gamma_1$, ... $\cos\gamma_n$, serán nulos, y ademas $\cos\beta_0=\text{sen}\,\alpha_0$... $\cos\beta_n=\text{sen}\,\alpha_n$; $\cos\lambda^1=0$,.. $\cos\lambda_n=0$;

la tercera de las ecuaciones (1) desaparece por sí misma, y las otras se reducen á

$$-T_0\cos\alpha_0+T_n\cos\alpha_n=0,$$
$$-T_0\operatorname{sen}\alpha_0+(P_1+P_2+P_3+\ldots..)+T_n\operatorname{sen}\alpha_n=0.$$

Supongamos que estos pesos se reducen á los pesos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, de los lados pesados del polígono; tendremos

$$P_1=\tfrac{1}{2}(p_1+p_2),\ P_2=\tfrac{1}{2}(p_2+p_3)\ldots..,\ P_{n-1}=\tfrac{1}{2}(p_{n-1}+p_n);$$

y las condiciones de equilibrio serán

$$T_n\cos\alpha_n=T_0\cos\alpha_0,$$
$$T_n\operatorname{sen}\alpha'_n=-\tfrac{1}{2}(p_1+2p_2+2p_3+\ldots..+p_2)+T_0\operatorname{sen}\alpha_0.$$

490. Tambien pueden determinarse gráficamente, con mucha facilidad, las condiciones de equilibrio del polígono funicular formado por cuerdas.

Sea ABCDEF (fig. 222), el polígono funicular. Para el equilibrio es necesario que el primer lado AB y el último EF estén solicitados por fuerzas P_0 y P_5 dirigidas segun la prolongacion de estos lados. En los diferentes vértices B, C, D.... actúan fuerzas P_1, P_2, P_3. .... por medio de cuerdas atadas á estos puntos. Es inútil suponer más de tres cuerdas reunidas en un mismo vértice, porque si en cualquiera de ellos actuasen dos ó más fuerzas, las podríamos representar todas por su resultante, que actuará por medio de una sola cuerda; de manera que las fuerzas P_1, P_2, P_3,.... representarán las resultantes de todas las fuerzas que actuarán sobre los vértices B, C, D,.....

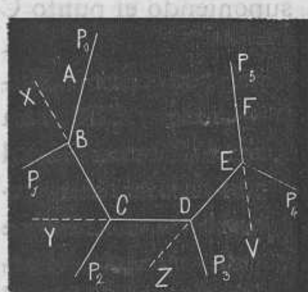

Fig. 222.

491. En el estado de equilibrio, cada lado del polígono tal como el BC, debe estar tirado por fuerzas iguales y contrarias, aplicadas en sus extremos; porque en efecto, cortando la cuerda que lo forma por uno de sus puntos, el equilibrio se destruirá, y cada uno de los puntos B y C será arrastrado en una cierta direccion. Las dos fuerzas que solicitan estos dos puntos, estando destruidas por la ligadura que establece la cuerda entre ellos, son necesariamente iguales, contrarias y dirigidas segun la prolongacion de BC; cada una de estas fuerzas representa la tension de la cuerda BC.

De este principio se deducen las condiciones de equilibrio del polígono funicular. La fuerza P_0, cuyo punto de aplicacion puede suponerse trasportado de A á B, y la fuerza P_1 tienen una resultante X, dirigida segun la prolongacion de la cuerda BC. En efecto, puesto que el equilibrio existe, cada uno de los vértices debe estar en equilibrio, el cual no se altererá suponiendo el punto C fijo; y entonces la resultante X tendrá la direccion de BC. La fuerza X mide, al mismo tiempo, la tension de la cuerda BC, porque, si hay equilibrio, ésta debe estar tirada en C por una fuerza igual y contraria á X. Trasladando X al punto C, se ve que la resultante Y, de X y P_2, está dirigida segun la prolongacion de CD y mide la tension de esta cuerda. Esta tension Y es la resultante de las fuerzas P_0, P_1, P_2, trasladadas paralelamente á sí mismas al punto C. Continuando de esta manera se verá; que la tension V de la última cuerda se obtiene componiendo las fuerzas P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, trasladadas paralelamente á sí mismas al punto E, y como existe el equilibrio, esta fuerza V es igual y directamente opuesta á la última fuerza P_5.

Así, todas las fuerzas inmediatamente aplicadas al polígono funicular trasladadas paralelamente á sí mismas, á un punto cualquiera, se equilibran alrededor de este punto; y la tension de cada cuerda es la resultante de todas las fuerzas que actúan de un mismo lado de esta cuerda.

492. Puede obtenerse este resultado de otra manera, suponiendo el polígono solidificado, de suerte, que las rectas que unen los puntos consecutivos, no puedan cambiar de longitud. Todas las fuerzas trasladadas paralelamente á sí mismas á un punto, deben equilibrarse; el equilibrio no debe alterarse, si suprimiendo la parte DEF, se aplica el punto D, segun la prolongacion de CD, una fuerza igual á la tension Y de esta cuerda; y es preciso que la fuerza Y y todas las que actúan sobre la parte conservada ABCD, se destruyan. La tension de la cuerda CD es, por lo tanto, igual á la resultante de las fuerzas P_0, P_1, P_2, como hemos visto por el otro método.

493. Cuando se conoce la figura del polígono en equilibrio, se puede determinar la relacion de dos fuerzas ó de dos tensiones cualesquiera.

En efecto, como cada vértice debe estar separadamente en equilibrio bajo la accion de las fuerzas y de las tensiones que le están aplicadas, se tiene

$$\frac{P_0}{P_1}=\frac{\operatorname{sen} P_1BC}{\operatorname{sen} ABC}, \quad \frac{P_1}{X}=\frac{\operatorname{sen} ABC}{\operatorname{sen} ABP_1},$$

$$\frac{X}{P_2}=\frac{\operatorname{sen} P_2CD}{\operatorname{sen} BCD}, \quad \frac{P_2}{Y}=\frac{\operatorname{sen} BCD}{\operatorname{sen} P_2BC},$$

y así sucesivamente.

Si se quiere tener la relacion de dos fuerzas ó tensiones cualesquiera, se multiplicarán ordenadamente cierto número de estas proporciones.

494. Las condiciones de equilibrio del polígono fu-

nicular pueden representarse por la siguiente construccion gráfica, que se llama *polígono de Varignon*. Por un punto cualquiera O (fig. 223), tracemos una recta OL, igual y paralela á la fuerza P_0, y en el mismo sentido que ella, por el punto L una recta LM igual y paralela á la fuerza P_1; la recta OM es igual y paralela á la resultante de P_0 y P_1, por lo tanto, el lado BC debe ser paralelo á OM, y la tension de este lado es igual á la fuerza que representa dicha recta. Por el punto M tracemos una recta MN igual y paralela á la fuerza P_2, la recta ON es paralela al lado CD é igual á la tension de este lado. Por el punto N tracemos una recta NR igual y paralela á P_3, la recta OR es paralela al lado DE é igual á la tension de este lado. Por el punto R tracemos una recta RS igual y paralela á P_4; la recta que una el punto S con el punto O, debe ser paralela á P_1, ó lo que es lo mismo, si por el punto S trazamos una recta igual y paralela á P_5, el extremo de esta recta debe coincidir con el punto O.

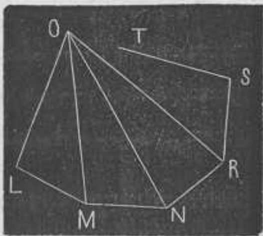

Fig. 223.

De aquí resulta, que si partiendo de un punto cualquiera, construimos el polígono de Varignon, las condiciones de equilibrio se reducen á las dos siguientes: 1.ª El extremo T del polígono debe coincidir con su orígen O; 2.ª Los lados intermedios del polígono funicular deben ser paralelos á las diagonales OM, ON, OR del polígono de Varignon.

Las tensiones de los lados BC, CD... están representadas por las longitudes de estas diagonales; los valores de estas tensiones no deben ser negativos; es decir, no deben tender á aproximar los extremos del hilo que forma el lado del polígono. Si resultára alguna tension negativa, sería preciso para el equilibrio reemplazar el cordon correspondiente por una varilla rígida, capaz de resistir las acciones de las fuerzas que tienden á aproximar sus extremos.

En el caso en que las fuerzas P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, que actúan sobre el polígono funicular, son todas paralelas á un plano, el polígono de Varignon es plano; el polígono funicular, cuyos lados son paralelos á los de éste, es tambien plano, y el plano de este polígono contiene las fuerzas P_0, P_1, P_2.... Tambien lo es cuando todas las fuerzas intermedias P_1, P_2, P_3, P_4, son paralelas entre sí, sean las que fueren las direcciones de P_0 y P_5; porque entónces los lados LM, MN, NR, RS, del polígono de Varignon están en línea recta, y este polígono se reduce entónces á un triángulo; el polígono funicular está situado todo en un plano paralelo al de este triángulo.

Caso en que hay anillos.

495. Si hay en el vértice B un anillo tirado por la fuerza P_1, y por el cual pasa la cuerda ABC, tendremos (487), $P_0 = X$, y la prolongacion de la fuerza P_1 será la bisectriz del ángulo ABC. Lo mismo puede decirse de todos los demas anillos; de modo, que si todos los vértices llevan anillos, las tensiones de todas las cuerdas son iguales, de donde resulta, que $P_0 = P_5$. Todas las fuerzas pueden entónces expresarse por medio de la tension P_0 y de los ángulos B, C, D... del polígono, por las fórmulas

$$P_1 = 2P_0 \cos \tfrac{1}{2} B,\quad P_2 = 2P_0 \cos \tfrac{1}{2} C,\quad P_3 = 2P_0 \cos \tfrac{1}{2} D...$$

Si es dada la forma del polígono, se conocerá por estas fórmulas la magnitud y direccion de las fuerzas que habrá que aplicar á cada vértice, para que el polígono esté en equilibrio. Estas fuerzas tomadas en sentido contrario serán las presiones ejercidas sobre los puntos B, C, D..., si fueran puntos fijos, sobre los cuales descansará la cuerda ABCD... E.

496. Supongamos que las direcciones de las cuerdas extremas AB y EF (fig. 224), se encuentran. Sea I el punto de encuentro y sea V una fuerza igual y contraria á la resultante de P_0 y P_5. Segun el principio (491), V es la resultante de P_1, P_2, P_3, P_4; por consiguiente, para obtener la tension de las cuerdas extremas, basta descomponer, segun sus direcciones, la resultante de todas las fuerzas trasladadas paralelamente á sí mismas al punto de encuentro de estas cuerdas.

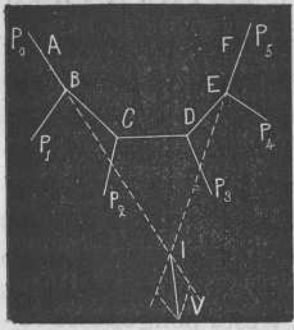

Fig. 224.

497. Si todas estas fuerzas son paralelas, por ejemplo, si representan pesos, todo el polígono está comprendido en un plano vertical. Para expresar que todas las fuerzas trasladadas paralelamente á sí mismas á un punto, se equilibran, bastarán dos ecuaciones. Tomando dos ejes en el plano de las fuerzas, uno horizontal y otro vertical, y si α_0 y β_0, α_5 y β_5, son los ángulos formados con los ejes por las cuerdas extremas, tendremos

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_5 \cos \alpha_5 = 0,$$
$$P_0 \cos \beta_0 + P_5 \cos \beta_5 + P_0 + P_2 + P_3 + \ldots = 0.$$

La primera ecuacion expresa que las componentes horizontales de las tensiones P_0 y P_5, son iguales y contrarias.

Caso de várias cuerdas en un mismo vértice del polígono.

498. Hemos supuesto que no habia más que tres fuerzas aplicadas en un mismo vértice del polígono. Cuando un número cualquiera de cuerdas solicitadas por fuerzas se reunen en un punto, es necesario para el equilibrio, que una cualquiera de ellas sea igual y directamente opuesta á la resultante de todas las demas. Si fijamos un punto sobre cada una de las cuerdas, excepto sobre una AP (fig. 225), podemos proponernos encontrar las presiones que la fuerza P ejerce sobre los puntos fijos.

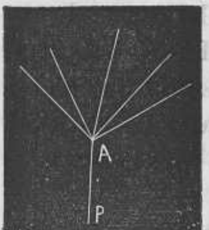

Fig. 225.

Si no hay más que tres cuerdas, no situadas en el mismo plano, la cuestion se resolverá descomponiendo la fuerza P en tres que actúan segun las prolongaciones de las cuerdas. Si hay más de tres, no se podrán determinar las presiones que la fuerza P ejerce sobre los puntos fijos. Esta indeterminacion es análoga á la que se encuentra cuando se buscan las presiones ejercidas por un cuerpo contra un plano, sobre el cual el cuerpo descansa por más de tres puntos.

Equilibrio de un hilo flexible é inestensible solicitado en sus diferentes puntos por fuerzas dadas. Ecuaciones de este equilibrio.

499. Considerando la curva formada por el hilo en equilibrio, como un polígono funicular de infinito número de lados, tendremos que la direccion de la tension en cada uno de los puntos del hilo, será la del elemento

correspondiente prolongado indefinidamente, es decir, la direccion de la tangente á la curva que forma el hilo en dicho punto.

Sea AMB (fig. 226), un hilo en equilibrio solicitado en sus diferentes puntos por fuerzas dadas. Un punto cualquiera M de este divide el hilo en dos partes AM y BM que ejercen una sobre otra en el estado de equilibrio acciones iguales y contrarias, cuya naturaleza es desconocida; pero se admite que todas las que provienen de AM actuando sobre MB, se reducen á una sola fuerza T aplicada en el punto M, y del mismo modo la accion de MB sobre AM se reduce á una fuerza igual y contraria á T. El valor comun de estas dos fuerzas es lo que se llama la tension del hilo en el punto M.

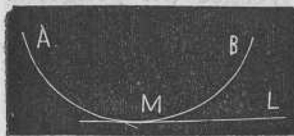

Fig. 226.

La direccion de esta tension, es, segun acabamos de ver, la de la tangente ML á la curva del hilo en el punto M.

500. Esto supuesto, para encontrar las condiciones de equilibrio de un hilo flexible é inestensible solicitado en sus diferentes puntos por fuerzas dadas, haremos uso del siguiente principio, muy sencillo y fecundo, y que podemos formular en los siguientes términos:

Concibamos que se solidifica un elemento mm' del hilo; es evidente que por esto no se turbará el equilibrio, si existia de antemano; es necesario, pues, que este elemento considerado aisladamente se encuentre en equilibrio bajo la accion de las fuerzas que le solicitan. Recíprocamente, si los diversos elementos del hilo están en equilibrio bajo la accion de las fuerzas que les solicitan, es incontestable que el sistema entero estará en equilibrio.

Sean X, Y, Z, las componentes de la fuerza P (fig. 227), que solicita al elemento mm' en cada uno de sus puntos. Este elemento estará sujeto ademas á la accion de las dos tensiones T y T' desiguales y contrarias, que se ejercen segun las tangentes en los puntos m y m'.

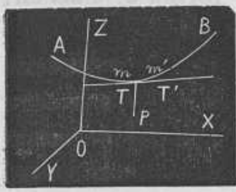

Fig. 227.

En toda la longitud del elemento infinitamente pequeño $mm'=ds$, se puede suponer el hilo homogéneo; la densidad del elemento será constante y su masa será proporcional á su longitud.

Llamando ρ á esta densidad, que permanece constante en todo el elemento, su masa será ρds, y como éste elemento es muy pequeño, las fuerzas que le solicitan pueden suponerse paralelas; la accion total de estas fuerzas, proporcional á la masa, tendrá por componentes $\rho X ds$, $\rho Y ds$, $\rho Z ds$, á las cuales habrá que agregar las tensiones T y T', dirigidas segun las tangentes á los extremos del elemento. Deberá, pues, existir el equilibrio entre estas cinco fuerzas, que pueden considerarse aplicadas al mismo punto, y llamando (x, y, z), y (x', y', z') á las coordenadas de los puntos m y m', las tres ecuaciones del equilibrio, serán

$$\left.\begin{aligned}\left(T'\frac{dx'}{ds}-T\frac{dx}{ds}\right)+\rho X\,ds=0,\\ \left(T'\frac{dy'}{ds}-T\frac{dy}{ds}\right)+\rho Y\,ds=0,\\ \left(T'\frac{dz'}{ds}-T\frac{dz}{ds}\right)+\rho Z\,ds=0.\end{aligned}\right\}(1)$$

Conviene notar, que la tension varía al pasar de un punto á otro del hilo, y puede representarse por una funcion contínua de las coordenadas x, y, z, que designaremos por $f(x, y, z)$.

Puesto que la longitud del elemento $m\,m'$, ó la distancia de los dos puntos m y m' es infinitamente pequeña, las tres diferencias

$$T'\frac{dx'}{ds}-T\frac{dx}{ds},\ T'\frac{dy'}{ds}-T\frac{dy}{ds},\ T'\frac{dz'}{ds}-T\frac{dz}{ds},$$

pueden reemplazarse por las diferenciales

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right),\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right),\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right);$$

y las ecuaciones (1) se reducen á

$$\left.\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\rho X ds=0,\\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\rho Y ds=0,\\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\rho Z ds=0.\end{aligned}\right\}(2)$$

Estas son las ecuaciones que expresan el equilibrio del hilo flexible é inestensible.

Integracion de estas ecuaciones.

501. Integremos la primera de las ecuaciones (2) con respecto á s, entre los límites correspondientes á los extremos del hilo, cuya longitud es l, es decir, desde $s=0$, á $s=l$; tendremos

$$\int_0^l d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\int_0^l \rho X ds=0.\ (3)$$

Sean $\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'$ los ángulos que las tangentes en los puntos A y B forman con los ejes y P_0, P_l las fuerzas que provienen de la fijeza de los puntos A y B, que son iguales y directamente opuestas á las tensiones de los elementos extremos del hilo. Tendremos

$$\int_0^l d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=P_0\cos\lambda+P_l\cos\lambda';$$

y la ecuacion será

$$(4)\qquad P_0\cos\lambda+P_l\cos\lambda'+\int_0^l \rho X ds=0;$$

que expresa que la suma algébrica de las componentes paralelas al eje OX, de todas las fuerzas que actúan sobre el hilo es nula.

La integracion de las otras dos ecuaciones (2) dará las siguientes:

$$P_0\cos\mu+P_l\cos\mu'+\int_0^l \rho\, Y ds=0,$$

$$P_0\cos\nu+P_l\cos\nu'+\int_0^l \rho Z ds=0;$$

que unidas á la anterior, indican, que las tres primeras ecuaciones del equilibrio se verifican en este caso.

502. Podemos tambien deducir de las ecuaciones (2) las ecuaciones de los momentos. Multiplicando las dos primeras ecuaciones por y, x, y restando la primera de la segunda; resulta

$$xd\left(T\frac{dy}{ds}\right)-yd\left(T\frac{dx}{ds}\right)+(Yx-Xy)\rho ds=0.$$

Pero

$$xd\left(T\frac{dy}{ds}\right)-y\,d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=d\left(xT\frac{dy}{ds}-yT\frac{dx}{ds}\right);$$

luego integrando entre los límites 0 y l, tendremos, siendo a, b, c, las coordenadas del punto A', y a', b', c' las del punto B,

$$(5)\quad P_0(a\cos\mu-b\cos\lambda)+P_l(a'\cos\mu'-b'\cos\lambda')$$
$$+\int_0^l\left(Yx-Xy\right)\rho ds=0.$$

Esta ecuacion expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el hilo, con respecto al eje OZ, es nula. Del mismo modo se obtendrian las ecuaciones de los momentos con respecto á los otros dos ejes.

Lo que acabamos de decir de todo el hilo, es aplicable á cualquiera porcion de él, con tal que agreguemos á las fuerzas que solicitan todos sus puntos, dos fuerzas aplicadas tangencialmente á sus extremos y equivalentes á las tensiones que esta porcion experimenta por la accion del resto del hilo.

503. Efectuando la diferenciacion indicada en la primera de las ecuaciones (2), resulta

$$\frac{dx}{ds}\,d\mathrm{T}+\mathrm{T}d\,\frac{dx}{ds}+\rho\mathrm{X}ds=0.$$

Sean α, β, γ los ángulos que la tangente en el punto m forma con los ejes; y λ_1, μ_1, ν_1, los ángulos que el radio de curvatura r forma con los mismos ejes, se tiene

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\ d\,\frac{dx}{ds}=\frac{ds\cos\lambda_1}{r};$$

en su consecuencia, las ecuaciones (2) pueden escribirse del modo siguiente:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} d\mathrm{T}\cos\alpha+\dfrac{\mathrm{T}ds}{r}\cos\gamma_1+\rho\,\mathrm{X}\,ds=0,\\ d\mathrm{T}\cos\beta+\dfrac{\mathrm{T}ds}{r}\cos\mu_1+\rho\,\mathrm{Y}\,ds=0,\\ d\mathrm{T}\cos\gamma+\dfrac{\mathrm{T}ds}{r}\cos\nu_1+\rho\mathrm{Z}ds=0. \end{array}\right.$$

Escritas en esta forma, expresan que existe el equilibrio entre la fuerza $d\mathrm{T}$, dirigida segun la tangente, la fuerza $\frac{\mathrm{T}ds}{r}$ dirigida segun el radio de curvatura y la fuerza mótriz $\rho\mathrm{P}\,ds$ del elemento de masa ds. De donde se deduce, que el plano osculador de la curva está determinado por la tangente y por la direccion de la fuerza P.

Valor de la tension en cada punto del hilo.

504. Para obtener la tension, multipliquemos las ecuaciones (6) respectivamente por cos α, cos β, cos γ, ó $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Teniendo presente que

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\cos\alpha\cos\lambda_1+\cos\beta\cos\mu_1+\cos\gamma\cos\nu_1=0,$$

y sumando, tendremos

$$dT+\rho(Xdx+Ydy+Zdz)=0,$$

ó (7) $$dT=-\rho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

La diferencial de la tension está expresada en funcion de las componentes de la fuerza que actúa en el punto considerado.

Si la cantidad $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$, producto del trinomio del trabajo por la densidad ρ, es la diferencial exacta de una funcion de x, y, z, tal como $f(x, y, z)$, podremos integrar la ecuacion (7), y tendremos

$$T=C-\int\rho(Xdx+Ydy+Zdz),$$

ó haciendo $\int\rho(Xdx+Ydy+Zdz)=f(x,y,z)$;

$$T=C-f(x,y,z).$$

Para un punto cuyas coordenadas sean x_0, y_0, z_0, y la tension T_0, tendremos

$$T_0=C-f(x_0,y_0,x_0);$$

de donde

$$T-T_0=f(x_0,y_0,z_0)-f(x,y,z),$$

(8) $$T=T_0-\{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)\}.$$

De modo que cuando $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$ es una diferencial exacta, conociendo la tension en un punto cualquiera del hilo en equilibrio, se podrá calcular ésta para todos los demas puntos.

Si el hilo es homogéneo en toda su longitud, ρ será constante, y bastará que $Xdx+Ydy+Zdz$, sea una diferencial exacta, para que se pueda calcular directamente la tension T.

505. La tension será constante en los dos casos siguientes, sea ó no el hilo homogéneo:

1.° Cuando $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, ó sea cuando $P=0$; pero entónces no actuando sobre el hilo ninguna fuerza, está necesariamente en equilibrio, y la tension es nula.

2.° Cuando la fuerza P es, en cada punto, perpendicular á la tangente.

En efecto, tendremos

$$\frac{X}{P}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{P}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{P}\cdot\frac{dz}{ds}=0,\ \text{ó}\ Xdx+Ydy+Zdz=0,$$

y por consiguiente

$$T=T_0.$$

En este caso las ecuaciones (6) se reducen á

$$(9)\left\{\begin{aligned}\frac{T}{r}\cos\lambda_1&=-\rho X,\\ \frac{T}{r}\cos\mu_1&=-\rho Y,\\ \frac{T}{r}\cos\nu_1&=-\rho Z.\end{aligned}\right.$$

Elevando al cuadrado y sumando, tendremos

$$\frac{T^2}{r^2}=\rho^2(X^2+Y^2+Z^2);$$

y como

$$X^2+Y^2+Z^2=P^2,$$

resulta

$$T=Pr\rho,\quad P=\frac{T}{r\rho}.$$

Como la tension es constante, vemos, que la fuerza motriz está en razon inversa del radio de curvatura.

Siendo α', β', γ', los ángulos de P, con los ejes, se tiene

$$(10)\left\{\begin{aligned}X&=P\cos\alpha'=\frac{T}{r\rho}\cos\alpha',\\ Y&=P\cos\beta'=\frac{T}{r\rho}\cos\beta',\\ Z&=P\cos\gamma'=\frac{T}{r\rho}\cos\gamma'.\end{aligned}\right.$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (9), resulta

$$\cos\alpha'=-\cos\lambda_1,\quad \cos\beta'=-\cos\mu_1,\quad \cos\gamma'=-\cos\nu_1,$$

lo que nos dice que la fuerza P está dirigida segun la prolongacion del radio de curvatura en el punto M.

Curva formada por el hilo.

506. Es muy interesante en este problema determinar la forma de la curva, que debe tomar el hilo, para que exista el equilibrio. Para obtenerla, integremos las ecuaciones (2), y tendremos, siendo A, B y C las constantes de la integracion,

$$\left\{\begin{aligned} -\mathrm{T}\frac{dx}{ds} &= \mathrm{A}+\int\rho\mathrm{X}ds,\\ -\mathrm{T}\frac{dy}{ds} &= \mathrm{B}+\int\rho\mathrm{Y}ds,\\ -\mathrm{T}\frac{dz}{ds} &= \mathrm{C}+\int\rho\mathrm{Z}ds; \end{aligned}\right.$$

de las cuales se deduce

$$\frac{dx}{\mathrm{A}+\int\rho\mathrm{X}ds}=\frac{dy}{\mathrm{B}+\int\rho\mathrm{Y}ds}=\frac{dz}{\mathrm{C}+\int\rho\mathrm{Y}ds},$$

que son las ecuaciones de la curva que el hilo deberá formar necesariamente para estar en equilibrio.

Si queremos obtener estas ecuaciones bajo forma puramente diferencial, eliminaremos T y dT entre las ecuaciones (2), puestas bajo la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds}d\mathrm{T}+\mathrm{T}d\frac{dx}{ds}+\rho\mathrm{X}ds=0,\\ &\frac{dy}{ds}d\mathrm{T}+\mathrm{T}d\frac{dy}{ds}+\rho\mathrm{Y}ds=0,\\ &\frac{dz}{ds}d\mathrm{T}+\mathrm{T}d\frac{dz}{s}+\rho\mathrm{Z}ds=0. \end{aligned}\right.$$

La eliminacion de dT da las ecuaciones

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\mathrm{T}\left(\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)+\rho(\mathrm{X}dy-\mathrm{Y}dx)=0,\\ &\mathrm{T}\left(\frac{dz}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}\right)+\rho(\mathrm{Y}dz-\mathrm{Z}dy)=0,\\ &\mathrm{T}\left(\frac{dx}{ds}d\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds}\right)+\rho(\mathrm{Z}dx-\mathrm{X}dz)=0; \end{aligned}\right.$$

una de estas ecuaciones es consecuencia de las otras dos. Poniendo en dos de ellas por T su valor, é integrando, obtendremos las ecuaciones

$$F(x, y, z)=0, \quad f(x, y, z)=0,$$

que son las ecuaciones de la curva.

En el caso en que, en cada uno de los puntos del hilo la fuerza P que lo solicita, está dirigida segun la tangente, el hilo se extiende en línea recta. Entónces, tenemos en efecto,

$$\frac{X}{\frac{dx}{ds}}=\frac{Y}{\frac{dy}{ds}}=\frac{Z}{\frac{dz}{ds}};$$

por consiguiente

$$X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}=0, \quad X\frac{dz}{ds}-Z\frac{dx}{ds}=0, \quad Y\frac{dz}{ds}-Z\frac{dy}{ds}=0;$$

y las dos últimas ecuaciones (11) se reducen á

$$\frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds}=0, \quad \frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds}=0;$$

que integradas, darán las ecuaciones de la recta

$$\begin{cases} y=c_1 z+c_2, \\ x=c'_1 z+c'_2. \end{cases}$$

Así en este caso, el hilo se extiende en línea recta, lo que hubiéramos podido preveer inmediatamente.

La recíproca es cierta; es decir, que si el hilo se extiende en línea recta, la fuerza que lo solicita en cada uno de sus puntos está dirigida segun esta misma recta; por esta razon, la plomada da la direccion de la gravedad, como digimos al tratar de la gravedad.

LECCION XLI.

Catenaria. Su ecuacion diferencial.—Ecuacion de la catenaria en términos finitos.—Propiedades de la catenaria.—Determinacion de la tension en un punto cualquiera de esta curva.—Catenaria de igual resistencia. —Construccion de la catenaria.—Curva de los puentes colgantes.—Construccion de esta curva.

Catenaria. Su ecuacion diferencial.

507. Los principios expuestos en la leccion anterior nos van á servir para dar la solucion del célebre problema que ha ocupado por mucho tiempo á los geómetras, el problema de la catenaria. La ecuacion de esta curva se deduce fácilmente de las fórmulas generales en ella establecidas; pero es preferible resolver el problema directamente.

La *catenaria* es la curva ABC (fig. 228), formada por un hilo pesado y homogéneo perfectamente flexible, suspendido por sus extremos de dos puntos fijos; y abandonado á sí mismo bajo la accion de su propio peso.

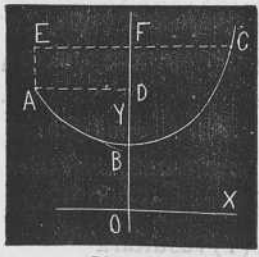

Fig. 228.

Supondremos, para no complicar inútilmente la cuestion, que el hilo es homogéneo en toda su longitud. Esta curva está contenida en el plano vertical que pasa por los puntos de suspension A y C; porque si una porcion de ella estuviera fuera de él, suponiéndola solidificada, y fijos los puntos en que encuentra al plano, giraria alrededor de la recta que une estos puntos, en virtud del peso de sus moléculas.

Tomemos en este plano por ejes coordenados dos ejes rectangulares, uno horizontal OX, y el otro vertical OY. Solidificando un elemento *mm'*, y repitiendo el mismo razonamiento hecho en el caso general, obtendremos inmediatamente, para expresar el equilibrio del hilo, las dos ecuaciones

$$(1) \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)=\rho ds;$$

siendo ρ el peso de la unidad de longitud del hilo, cantidad que es constante en toda la curva; ρds será el peso del elemento ds.

508. Integrando la primera ecuacion, será

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=\mathrm{C}.$$

En el punto más bajo, la tangente es necesariamente horizontal ó paralela al eje de las x, lo que exige que $\frac{dx}{ds}=1$; y llamando T_0 á la tension en este punto, tendremos $\mathrm{T}_0=\mathrm{C}$; la constante C representa por lo tanto la tension en el punto más bajo del hilo. Hagamos

$$\mathrm{T}_0=\mathrm{C}=\rho h,$$

siendo h la longitud del hilo, cuyo peso es igual á la tension en el punto más bajo, y que más adelante aprenderemos á determinar, tendremos

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=\rho h, \quad \mathrm{T}=\frac{\rho hds}{dx};$$

sustituyendo en la segunda ecuacion (1) resultará

$$d\left(h\rho\frac{dy}{dx}\right)=\rho ds, \quad \text{ó} \quad hd\frac{dy}{dx}=ds; \quad (2)$$

que es la ecuacion diferencial de la catenaria.

Ecuacion de la catenaria en términos finitos.

509. Hagamos $\frac{dx}{dy}=y'$, tendremos $ds=dx\sqrt{1+y'^2}$, y la ecuacion (2) se convertirá en

$$hdy'=dx\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{ó} \quad dx=\frac{hdy'}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad (3)$$

tambien $dx=\frac{dy}{y'}$, luego sustituyendo, tendremos

$$dy=\frac{hy'dy'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (4)$$

Integrando las ecuaciones (3) y (4) resulta

$$x=hl(y'+\sqrt{1+y'^2})+c_1 \quad y=h\sqrt{1+y'^2}+c_2;$$

de la ecuacion (2) sale

$$hdy'=ds, \quad \text{ó} \quad hy'=s+c_3.$$

Tomando por eje de las y la vertical que pasa por el punto más bajo de la curva, tendremos, para $x=0$, é $y'=\frac{dy}{dx}=0$, la constante $c_1=0$. La constante c_2 será cero, colocando el orígen de las coordenadas en un punto O del eje de las y para el cual sea $y=h$, punto que pronto aprenderemos á determinar. Si convenimos en contar los arcos s desde el punto más bajo, la constante c_3 será cero, porque s deberá ser cero para $x=0, y=h$, é $y'=0$; las tres ecuaciones anteriores serán

$$(5)\begin{cases} x=hl.(y'+\sqrt{1+y'^2}) \\ y=h\sqrt{1+y'^2} \\ s=hy' \end{cases}$$

De la primera de estas ecuaciones se deduce, poniendo por y' su valor $\frac{dy}{dx}$

$$e^{\frac{x}{h}}=\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$e^{-\frac{x}{h}}=\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

la segunda de estas últimas es el resultado de cambiar el signo de x. Sumándolas y restándolas sucesivamente, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{ds}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right);$$

integrándolas, serán

$$(6)\left\{\begin{aligned} y &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right), \\ s &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right). \end{aligned}\right.$$

La primera es la ecuacion de la catenaria en términos finitos. La segunda expresa la longitud del arco s en funcion de x. Las constantes de la integracion son cero por la manera como se han escogido los ejes; pues debe ser para $x=0$, $y=\mathrm{OB}=h$, $s=0$.

Propiedades de la Catenaria.

510. De la forma de la ecuacion de esta curva,

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

se deduce, que la catenaria es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Esta ecuacion no tiene más que un sólo *parámetro* h, como las del círculo, la parábola, la cicloide, la logarítmica; y por consiguiente, todas las catenarias son curvas semejantes.

La segunda y tercera de las ecuaciones (5) se pueden escribir como las dos primeras que siguen, observando que $y' = \frac{dy}{dx}$, $\sqrt{1+\frac{dy}{dx}} = \frac{ds}{dx}$; la tercera es el resultado de elevarlas al cuadrado y restarlas,

$$(7)\begin{cases} y = h\,\dfrac{ds}{dx}, \\ s = h\,\dfrac{dy}{dx}, \\ y^2 - s^2 = h^2. \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones expresa una propiedad de la catenaria.

La primera significa que en cada punto M de la catenaria (fig. 229), la proyeccion MK de la ordenada de la curva sobre la normal MN es constante, é igual á h.

En efecto,

$$\mathrm{MK} = y \cos \mathrm{PMK} = \frac{y}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{y}{\dfrac{ds}{dx}} = h.$$

La segunda expresa, que la proyeccion MI de la ordenada sobre la tangente MT es igual al arco BM, contado á partir del punto más bajo de la curva. En efecto

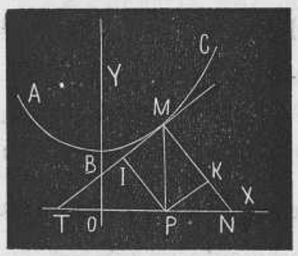

Fig. 229.

$$\mathrm{MI} = \mathrm{IP}\operatorname{tg}\mathrm{T} = h\frac{dy}{dx} = s.$$

La ecuacion tercera, consecuencia de las otros dos, nos dice que la ordenada y es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos s y h.

La curva, lugar de los puntos I tales que MI=arco BM, es una evoluta de la catenaria. La recta IP es tangente á esta curva en el punto I, y la longitud IP de esta tangente comprendida entre el punto I y el eje de las x es constante é igual á h.

511. El radio de curvatura de la catenaria es igual á la normal MN, pero está dirigido en sentido contrario.

En efecto $\quad y = \text{MN}\cos.\,\text{PMN} = \text{MN}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}};$

$$\text{MN} = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = y\,\frac{ds}{dx} = y\,.\,\frac{y}{h} = \frac{y^2}{h};$$

tambien, siendo r el radio de curvatura,

$$dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = h\,d\frac{dy}{dx}, \quad \text{ó} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{h};$$

$$r = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = h\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = h\,\frac{y^2}{h^2} = \frac{y^2}{h};$$

luego $\quad \text{MN} = r.$

Ademas, el radio de curvatura está dirigido en sentido contrario de la normal MN, porque aquel está siempre en la concavidad de la curva, y ésta vuelve su convexidad al eje de las x; por ser su ecuacion $ds = hd\,\frac{dy}{dx}$, en la que creciendo s al mismo tiempo que x, la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$, es siempre positiva.

512. Se puede encontrar con mucha facilidad el área del secmento BOMP (fig. 230), su expresion general es $\text{A} = \int y\,dx$; la segunda de las ecuaciones (7), es

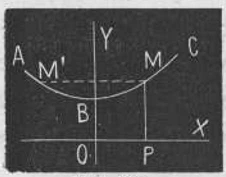

Fig. 230.

$$s = h\,\frac{dy}{dx}, \quad \text{ó} \quad dx = \frac{hdy}{\sqrt{y^2-h^2}},$$

por lo tanto

$$\text{A} = \int y\,dx = \int y\,\frac{hdy}{\sqrt{y^2-h^2}} = h\sqrt{y^2-h^2} = hs.$$

La constante de la integracion es cero. Esta área BOPM$=h.s=$OB. BM; es decir, que el área es igual al rectángulo construido sobre la ordenada constante OB y sobre el arco BM.

Con la misma facilidad se encuentra el volúmen V de revolucion engendrado por el secmento BOPM, cuya expresion general es $\pi \int y^2 dx$. Se tiene

$$\int y dx = hs, \text{ ó } y dx = h ds;$$

luego $$V = \pi \int y^2 dx = 2\pi \frac{h}{2} \int y ds.$$

Pero $2\pi \int y ds$ es el área de revolucion engendrada por el arco BM, llamándola S, se tendrá

$$V = \frac{h}{2} S.$$

Esta ecuacion establece entre la superficie y el volúmen de revolucion una relacion análoga á la relacion $A = hs$, que existe entre el arco generador y el área plana correspondiente.

La catenaria goza de otras muchas propiedades, en cuya exposicion no podemos detenernos. Sólo indicaremos que por el cálculo de variaciones se demuestra: 1.°, que es la curva plana por la cual deben unirse dos puntos dados, para que la superficie engendrada por su revolucion al rededor de un eje dado, sea un mínimo; 2.°, que entre todas las curvas de igual longitud, ella es la que por su revolucion al rededor de un eje dado, engendra la más grande y la más pequeña superficie; 3.°, de todas las curvas trazadas entre dos puntos dados, la catenaria es la que tiene el centro de gravedad más bajo.

Tension en un punto de la catenaria.

513. Hemos visto (508), que $T = \rho h \frac{ds}{dx}$, y como $y = h \frac{ds}{dx}$ tendremos

$$(8) \quad T = \rho y.$$

De manera, que la tension de la catenaria en cada punto es proporcional á la ordenada de este punto. En el punto más bajo $y=h$, y resulta $T_0=\rho h$, para la tension T_0 en este punto, como vimos al principio de esta leccion.

Tambien puede obtenerse la tension por la fórmula

$$dT=-\rho(Xdx+Ydy+Zdz);$$

en la cual en este caso son $X=0$, $Z=0$, $\rho Y=-\rho$; luego

$$dT=\rho dy,\quad T=\rho y.$$

No agregamos constante porque para $y=h$, se tiene $T_0=\rho h$.

Catenaria de igual resistencia.

514. Coriolis ha considerado el primero el caso en que el espesor del hilo pesado y perfectamente flexible, varía de un punto á otro proporcionalmente á la tension, lo que constituye el caso de una catenaria de igual resistencia, no ofreciendo más probabilidad de ruptura en un punto que en otro.

Sean p la relacion entre el peso de un elemento ds y su longitud, ó sea el peso de la unidad de longitud del hilo, T la tension, cuyo valor en el punto más bajo B (fig. 231), representaremos por T_0; x é y las coordenadas horizontal y vertical. Las ecuaciones de equilibrio para un punto cualquiera M de la curva son

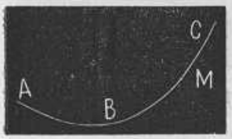

Fig. 231.

$$T\frac{dx}{ds}=T_0,\quad T\frac{dy}{ds}=\int pds;$$

la integral debe contarse desde el punto más bajo de la curva, en el cual $dy=0$. Eliminando T entre estas dos ecuaciones, resulta

$$\frac{dy}{dx}=\int\frac{pds}{T_0},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{T_0}\cdot\frac{ds}{dx}.$$

Por la condicion de igual resistencia debe existir la relacion

$$T=hp,$$

siendo h una constante; por medio de esta ecuacion se elimina p en la segunda de las anteriores, y se obtiene la ecuacion de la curva

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{T}{T_0h}\cdot\frac{ds}{dx}.$$

Poniendo por T su valor, deducido de la primera de las ecuaciones precedentes, se tendrá

$$h\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ds^2}{dx^2},$$

haciendo $\frac{dy}{dx}=y'$, resulta, observando que

$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

$$h\frac{dy'}{dx}=1+y'^2,\quad \frac{dx}{h}=\frac{dy'}{1+y'^2};$$

Integrando y tomando por orígen de las x el punto más bajo de la curva, para el cual $x=0$, $y'=0$, resulta

$$\frac{x}{h}=\text{arc tg}\,y',\quad y'=\frac{dy}{dx}=\text{tg}\,\frac{x}{h};$$

volviendo á integrar, siendo tambien el punto más bajo el orígen de las y, obtendremos

$$\frac{y}{h}=l\,\frac{1}{\cos\frac{x}{h}},\ \text{ó}\ \ e^{\frac{y}{h}}\cos\left(\frac{x}{h}\right)=1.$$

Tal es la ecuacion de la catenaria de igual resistencia, referida á su punto más bajo como orígen de coordenadas. El valor de la constante h se deduce de la ecuacion $T=hp$; aplicada al punto más bajo, se tiene $T_0=hp_0$. De manera que h será la longitud de una porcion de cadena, que tenga el espesor constante del punto más bajo, para que su peso $hp_0 = T_0$; es decir, la componente horizontal de la tension en los puntos de suspension C ó A. La mayor abscisa de esta curva corresponde á $y' = \frac{1}{0}$, ó como $y' = \operatorname{tg} \frac{x}{p}$, á $\frac{x}{h} = \frac{\pi}{2}$;

luego el límite X de x, ó la mitad de la amplitud de la curva, será

$$X = h\frac{\pi}{2} = \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Este límite es tal, que una cadena teniendo esta semiamplitud de larga y la misma fuerza que en el punto más bajo, tendrá por peso $T_0 \frac{\pi}{2}$; la altura correspondiente es $y = \infty$. Luego la curva, cualquiera que sea la longitud de la cadena, no llegará jamás á la amplitud $h\pi$, que es por lo tanto, un límite. Si queremos tener el espesor p de la cadena en funcion de la abscisa, encontraremos

$$p = \frac{T}{h} = \frac{T_0}{h} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{T_0}{h}\sqrt{1+y'^2} = \frac{T_0}{h \cos \frac{x}{h}}.$$

Podemos observar que llamando α al ángulo que forma la tangente á la curva con el eje de las x, ó arc tg y', tendremos la ecuacion

$$h\alpha = x.$$

Por consiguiente, el arco de círculo descrito del punto A como centro, con un radio h y comprendido entre el eje de las x y una paralela AN á la tangente en el punto M, será igual á la abscisa de este punto M.

Construccion de la catenaria.

515. Este problema tiene por objeto, dados los dos puntos de suspension A y C del hilo (fig. 232), y la longitud de este $ABC = l$, determinar el valor de la constante h que entra en la ecuacion de la catenaria y la posicion del orígen O, con respecto al cual la ecuacion de esta curva es

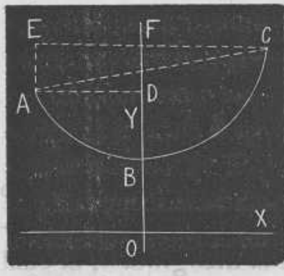

Fig. 232.

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Los datos de este problema son

$$CE = a,\ AE = b,\ ABC = l,$$

y las incógnitas

$$OB = h,\ AD = K,\ CF = K',\ BF = f.$$

Deduciremos la primera relacion, expresando que la suma de los arcos CB y BA es igual á l. De la ecuacion

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

resulta que

$$CB = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{K'}{h}} - e^{-\frac{K'}{h}}\right),\quad BA = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{K}{h}} - e^{-\frac{K}{h}}\right);$$

y (1) $$l = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{K}{h}} - e^{-\frac{K}{h}} + e^{\frac{K'}{h}} - e^{-\frac{K'}{h}}\right).$$

Calculando las ordenadas de los puntos A y C é igualando su diferencia á b, tendremos la ecuacion

(2) $$b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{K}{h}} + e^{-\frac{K}{h}} - e^{\frac{K'}{h}} - e^{-\frac{K'}{h}}\right).$$

De estas ecuaciones se deducen las siguientes:

$$l+b=h\left(e^{\frac{K}{h}}-e^{-\frac{K'}{h}}\right),$$

$$l-b=h\left(e^{\frac{K'}{h}}-e^{-\frac{K}{h}}\right),$$

$$l^2-b^2=h^2\left(e^{\frac{a}{h}}+e^{-\frac{a}{h}}\right),$$

$$\sqrt{l^2-b^2}=h\left(e^{\frac{a}{2h}}-e^{-\frac{a}{2h}}\right);$$

teniendo presente que $K+K'=a$, y que el segundo miembro de la tercera es un cuadrado perfecto. Esta última ecuacion no contiene más que la incógnita h, la cual podremos calcular al ménos por aproximacion cuando a, b, y l sean conocidas.

Para ello, hagamos $\frac{a}{2h}=\theta$, $\sqrt{l^2-b^2}=an$, con lo cual la última ecuacion toma la forma

$$\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2\theta}=n;$$

desarrollando el numerador en serie, se convierte en

$$(3)\qquad \frac{\theta^2}{1.2.3}+\frac{\theta^4}{1.2.3.4.5}+\ldots\ldots=n-1.$$

En esta ecuacion $n>1$, porque

$$n=\frac{\sqrt{l^2-b^2}}{a}>\frac{\sqrt{AC^2-b^2}}{a}=1;$$

ahora el primer miembro de la ecuacion (3) es nulo para $\theta=0$, é infinito para $\theta=\infty$, y crece con θ, de una manera contínua. Existe por lo tanto siempre un valor de θ, y uno sólo, que hace el primer miembro igual á $n-1$.

Si l es poco superior á la cuerda AC, $n-1$ y por consiguiente θ, es una cantidad muy pequeña; podemos con grande aproximacion tomar sólo el primer término del primer miembro de la ecuacion (3), que será en este caso

$$\frac{\theta^2}{6}=n-1,$$

ó

$$\theta=\sqrt{6(n-1)}=\sqrt{6\left(\frac{\sqrt{l^2-b^2}}{a}-1\right)};$$

en seguida obtendremos h por la fórmula $h=\frac{a}{2\theta}$.

Deduciremos K de la ecuacion

$$l+b=h\left(e^{\frac{K}{h}}-e^{-\frac{K'}{h}}\right)$$

que por ser $K+K'=a$, se reduce á

$$l+b=h\left(1-e^{-\frac{a}{h}}\right)e^{\frac{K}{h}}$$

y K' de la relacion

$$K'=a-K.$$

Y se obtendrá finalmente la incógnita f por medio de la ecuacion

$$h+f=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{K'}{h}}-e^{-\frac{K'}{h}}\right).$$

Si los dos puntos C y A están á la misma altura, se tendrá $b=0$, y las fórmulas se simplifican; entónces $K=K'=\frac{a}{2}$, porque la curva es simétrica con respecto al eje de las y.

Curva de los puentes colgantes.

516. En la construccion de los puentes colgantes se supone la condicion de que el peso del puente está sostenido por barras equidistantes, y cada una de las barras equidistantes que sostienen la cadena, soporta una parte igual del peso total del puente; de manera, que sus diferentes elementos están solicitados por fuerzas verticales proporcionales á las proyecciones horizontales de estos elementos. Busquemos la curva de equilibrio de una ca-

dena solicitada por pesos distribuidos uniformemente sobre la proyeccion horizontal de esta cadena, á razon de p kilógramos por unidad de longitud.

Sea AOC una cadena homogénea, suspendida de los dos puntos fijos A y C (fig. 233), prescindamos del peso de la cadena, y supongámosla solicitada en los diferentes elementos por fuerzas que satisfacen á las condiciones que acabamos de expresar; vamos á determinar la forma de la curva COA. Esta curva está en el plano vertical que pasa por los puntos de suspension A y C. Tomemos en este plano dos ejes coordenados, uno horizontal y otro vertical, llamemos T á la tension en el punto M y p á la fuerza total que solicita una porcion de cadena cuya proyeccion horizontal es igual á la unidad de longitud, por las fórmulas generales (500), tendremos

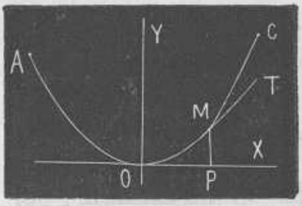

Fig. 233.

$$(1) \qquad d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)=0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)=p\,dx.$$

Si llamamos ph á la tension de la curva en el puntó más bajo, tendremos integrando la primera de estas ecuaciones

$$(2) \qquad \mathrm{T}\frac{dx}{ds}=ph;$$

en la que vemos, que la componente horizontal de la tension es constante.

Sustituyendo el valor de T, deducido de la (2) en la segunda de las (1), resulta

$$hd\frac{dy}{dx}=dx, \quad h\frac{dy}{dx}=x. \qquad (3)$$

Si tomamos por orígen el punto más bajo de la curva, la constante de la integracion es cero, por ser entónces

$x=0$, y $\frac{dy}{dx}=0$. Volviendo á integrar la (3), se tiene la

$$(4) \qquad x^2=2\,hy,$$

que es la ecuacion de la curva formada por la cadena. Esta curva es una parábola, cuyo eje es vertical y cuyo vértice es el punto más bajo de la cadena.

517. La tension se deduce de la ecuacion (2), que nos dará

$$T=ph\frac{ds}{dx}.$$

La ecuacion (4) de la parábola da $\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{h}$, por lo que

$$(5) \qquad T=p\sqrt{h^2+x^2}.$$

De manera, que la tension, igual á ph, para $x=0$, aumenta con la abscisa x.

Construccion de la curva.

518. Este problema es análogo al que ya resolvimos para la catenaria, y empleando la misma figura y notacion, los datos son

$$AF=a, \qquad CF=b, \qquad COA=l;$$

las incógnitas son

$$BF=f, \qquad AD=K \qquad CF=K'$$

y la tension h.

De la ecuacion de la curva $x^2=2\,hy$, deduciremos

$$2hf=K'^2, \qquad 2h(f-b)=K^2$$

ó $2hb=K'^2-K^2=(K'+K)(K'-K)=a(K'-K)$, por ser $K+K'=a$. Tendremos pues

$$K+K'=a, \qquad K'-K=\frac{2hb}{a}$$

de donde

$$K'=\frac{a}{2}+\frac{hb}{a}, \; K=\frac{a}{2}-\frac{hb}{a}.$$

Para encontrar h expresaremos, que la curva $CBA=l$.

Sabemos que $ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{h}\,dx\sqrt{h^2+x^2};$

é integrando

$$s = \frac{x}{2h}\sqrt{h^2+x^2} + \frac{h}{2}\,l.\,\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{h},$$

determinando la constante por la condicion de que $s=0$, para $x=0$.

Poniendo en esta fórmula $x=\mathrm{K}$ y $x=\mathrm{K}'$, y sumando los resultados, se tendrá

$$2hl = \mathrm{K}\sqrt{h^2+\mathrm{K}^2} + \mathrm{K}'\sqrt{h^2+\mathrm{K}'^2} + h^2 l.\,(\mathrm{K}+\sqrt{h^2+\mathrm{K}^2})$$
$$+ h^2 l.\,(\mathrm{K}'+\sqrt{h^2+\mathrm{K}'^2}) - 2h^2 l.\,h.$$

Sustituidos en esta ecuacion por K y K′ sus valores, obtendremos una ecuacion trascendente para determinar h. Como esta ecuacion es de una forma muy complicada, se simplifica cuando los puntos C y A están á la misma altura: entónces $b=0$, $\mathrm{K}=\mathrm{K}'=\frac{a}{2}$, y se tiene para encontrar h la ecuacion

$$hl = \mathrm{K}\sqrt{h^2+\mathrm{K}^2} + h^2 l.\,\frac{\mathrm{K}+\sqrt{h^2+\mathrm{K}^2}}{h}.$$

Conocidos h y K, la ecuacion $2hf=\mathrm{K}^2$, da $f=\frac{\mathrm{K}^2}{2h}$ y queda completamente resuelto el problema.

LECCION XLII.

Qué se entiende por ligaduras en Mecánica. — Definiciones de la velocidad virtual de un punto material, y del momento virtual de una fuerza.—Enunciado general del teorema de las velocidades virtuales, ó del trabajo virtual.—Demostracion de este teorema en los casos de un punto material; de dos puntos materiales unidos de manera que el movimiento del uno determine el del otro; y en el caso general de un número cualquiera de puntos sujetos á un sistema de ligaduras completas. — Caso en que el sistema de ligaduras es incompleto. — Caso en que las ligaduras están expresadas por desigualdades. — Qué forma suele darse ordinariamente á la ecuacion del teorema de las velocidades virtuales.

Qué se entiende por ligaduras en Mecánica.

519. Hemos dicho en la primera parte de la Dinámica, que un punto material es libre cuando se le puede atribuir indiferentemente en el espacio la posicion que se quiera, y hacerle pasar de esta posicion á otra por un camino enteramente arbitrario, en el cual no encuentre resistencia alguna.

Cuando esto no se verifica, el punto material no es libre, y se dice entónces que está sujeto á ciertas condiciones llamadas *ligaduras*. En el núm. 398 hemos visto los ejemplos de un punto material sujeto á moverse en una línea dada ó en una superficie dada.

Los puntos materiales que constituyen un sistema, pueden tambien estar sujetos á diversas ligaduras. Tomaremos como ejemplo un sólido invariable, que es un sistema material en el cual las distancias mútuas de los puntos materiales, tomados dos á dos de todas las maneras posibles, son constantes. Uno ó varios puntos del sistema pueden estar sujetos á permanecer sobre líneas ó superficies dadas, ó tambien á permanecer fijos. Puede el sistema material componerse de dos partes, una de las cuales esté sujeta á rodar ó deslizarse sobre la otra en su movimiento relativo. Si el sistema es sólido, y suponemos que uno de sus puntos está fijo, todos los demas puntos del sistema podrán moverse sobre superficies esféricas que tengan este punto por centro; si el sólido tiene dos puntos fijos, el movimiento será una rotacion al rededor de la recta que pasa por estos puntos.

Bastan estos ejemplos para comprender lo que se entiende por *ligadura* en Mecánica. El carácter comun de las ligaduras ó condiciones á que se sujeta un sistema, es la *restriccion* de los movimientos que puede tomar el sistema. Se dice que las ligaduras son *completas*, cuando bastan para definir las trayectorias de todos los puntos del sistema, y las velocidades simultáneas de los puntos sobre estas trayectorias. Así, un cuerpo sólido, sujeto á girar alrededor de un eje fijo, es un sistema con ligaduras completas; porque cada punto, en virtud de las ligaduras, describe alrededor del eje fijo una circunferencia; y en un instante cualquiera, las velocidades de los diferentes puntos son entre sí como sus distancias al eje. En este caso basta una sola ecuacion para definir el movimiento del sistema.

520. Las condiciones á que están sujetos los puntos que forman un sistema material, y que se llaman ligaduras en Mecánica, pueden expresarse analíticamente.

Sean A (x, y, z), A$'(x', y', z')$, A$''(x'', y'', z'')$... (fig. 234), n puntos materiales sujetos á condiciones dadas. Estas condiciones estarán ordinariamente expresadas por un cierto número de ecuaciones, entre las coordenadas de estos puntos; el número de estas ecuaciones debe ser siempre menor que $3n$; de lo contrario, cada punto tendria una posicion fija, y permaneceria en ella, cualesquiera que fueran las fuerzas aplicadas al sistema; pero puede ser igual á $3n-1$. En este caso el sistema es de *ligaduras completas*, y todos los puntos están sujetos á permanecer sobre las curvas dadas AL, A$'$L$'$...; y el movimiento de uno de los puntos, determina el de todos los demas. Porque eliminando todas las coordenadas, ménos las tres del punto A, vendremos á parar á dos ecuaciones de la forma

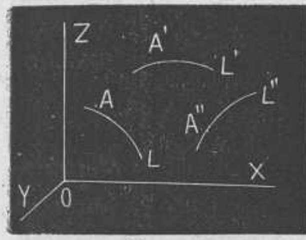

Fig. 234.

$$y = f(x), \quad z = F(x);$$

que son las de la curva AL, sobre la que el punto A debe permanecer. Del mismo modo veríamos que los demas puntos no pueden moverse más que sobre curvas determinadas. Ademas, todas las variables, ménos una, x, pueden expresarse en funcion de ésta, y cuando sea conocida la posicion de uno de los puntos, A por ejemplo, serán determinadas las de todos los demas; los movimientos infinitamente pequeños que se pueden hacer experimentar á los puntos del sistema, tienen con uno de ellos las relaciones que resultan de las $3n-1$ ecuaciones dadas.

Cada punto puede evidentemente moverse sobre su trayectoria en dos sentidos contrarios; pero la naturaleza de la cuestion bastará para determinar en cuál de estos se verifica el movimiento

521. Las ligaduras que pueden imaginarse en un sistema son muy variadas, pero nosotros las supondremos reducidas á las tres clases siguientes:

1.ª Que ciertos puntos del sistema permanezcan á distancias invariables los unos de los otros.

2.ª Que ciertos puntos del sistema estén sujetos á permanecer sobre curvas fijas, ó sobre superficies fijas, sin experimentar rozamiento de parte de estas curvas ó de estas superficies.

3.ª Que ciertas partes del sistema, consideradas como sólidos invariables, están sujetas á permanecer en contacto los unas con los otras, sin que se desarrolle rozamiento entre sus superficies.

Estas ligaduras pueden reemplazarse por fuerzas capaces de obligar al sistema á satisfacer á las mismas condiciones. En el caso en que dos puntos deben permanecer á una misma distancia el uno del otro, fuerzas iguales y contrarias introducidas entre estos dos puntos, y de una intensidad conveniente, podrán mantener esta invariabilidad de distancia. En el caso en que un punto debe permanecer sobre una curva ó sobre una superficie fija, sin rozamiento, una fuerza igual á la reaccion normal de la curva ó de la superficie sobre el punto, puede producir el mismo efecto. En el caso en que dos partes del sistema, consideradas como sólidos invariables, están sujetas á permanecer en contacto sin que haya rozamiento entre sus superficies, podemos considerar este resultado como producido por dos fuerzas iguales y contrarias, actuando sobre los dos sólidos en los puntos de contacto y segun la normal comun á sus superficies; estas fuerzas deben ser atractivas ó repulsivas, segun que los dos sólidos tiendan á separarse el uno del otro, ó por el contrario, á penetrar uno en el otro.

Definiciones de la velocidad virtual de un punto y del momento virtual de una fuerza.

522. Sean A, A′, A″....., (fig. 235), puntos materiales cualesquiera, sujetos á ciertas condiciones ó ligaduras de las anteriormente descritas. Supongamos todo el sistema trasportado de la posicion que ocupa, á una posicion infinitamente próxima, que satisfaga á todas las condiciones dadas. Se llama *velocidad virtual ó movimiento virtual* de uno cualquiera de estos puntos A, por ejemplo, la recta infinitamente pequeña A*a*, que une su primera posicion á la segunda. La palabra *virtual* indica que el movimiento atribuido al sistema es solamente posible, pero no ha tenido lugar realmente, y no hay que considerar las fuerzas que serian capaces de producir este movimiento.

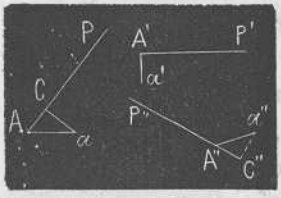

Fig. 335.

523. Supongamos aplicadas á los puntos A, A′, A″...., las fuerzas P, P′, P″....., y designemos por p, p', p''....., las proyecciones AC, A″C″....., de las velocidades virtuales sobre las direcciones de las fuerzas. Convendremos en considerar como positivas ó negativas estas proyecciones, segun que estén dirigidas á partir del punto A en el mismo sentido que la fuerza, ó en sentido contrario; ó segun que el ángulo PA*a* sea agudo ú obtuso. En la fig. 235, p será positiva, $p'=0$, y p'' negativa. Se llama momento virtual de la fuerza P al producto Pp del valor absoluto de la fuerza P por la proyeccion p de la velocidad virtual A*a* de su punto de aplicacion. Este momento será nulo si la velocidad virtual es perpendicular á la direccion de la fuerza, así P$p'=0$, por ser $p'=0$.

Se puede dar otra forma al momento virtual; porque

$$\mathrm{P}p = \mathrm{P}.\,\mathrm{A}a.\cos \mathrm{PA}a = \mathrm{P}\cos \mathrm{PA}a \times \mathrm{A}a;$$

y llamando T á la componente de la fuerza segun la velocidad virtual Aa, tendremos $\mathrm{T}=\mathrm{P}\cos \mathrm{PA}a$, de manera que

$$\mathrm{P}p = \mathrm{T}\times\mathrm{A}a.$$

En donde vemos que el momento virtual es igual al producto de la velocidad virtual por la componente de la fuerza segun la direccion de esta velocidad. Resulta, pues, que el momento virtual de una fuerza y el trabajo elemental de la misma fuerza (371), tienen la misma expresion; pero la primera cantidad no supone ningun movimiento del sistema, debido á las fuerzas que le solicitan, y la segunda supone este movimiento. Cuanto dijimos en el párrafo citado de los trabajos elementales de las fuerzas, es aplicable á los momentos virtuales de las mismas; y el teorema general de las velocidades virtueles se llama tambien por esta causa teorema del trabajo virtual.

Enunciado general del teorema de las velocidades virtuales, ó del trabajo virtual.

524. Si un número cualquiera de fuerzas se equilibran sobre un sistema de puntos materiales, sujetos á condiciones dadas, la suma de los momentos virtuales de las fuerzas es cero, para todo movimiento virtual compatible con las condiciones dadas; y recíprocamente, existirá el equilibrio si la suma de los momentos virtuales es nula para todos los movimientos posibles del sistema.

De manera, que la condicion necesaria y suficiente para el equilibrio, es que

$$\mathrm{P}p + \mathrm{P}'p' + \mathrm{P}''p'' + \ldots\ldots = 0.$$

Demostraremos este teorema en los casos, de un punto material, de dos puntos materiales unidos de manera que el movimiento del uno determine el del otro, y en el caso general de existir un número cualquiera de puntos materiales y un sistema completo de ligaduras.

425. 1.er *caso.* Sea R la resultante de un número cualquiera de fuerzas P, P′, P″....., aplicadas á un mismo punto A (fig. 236); tiremos por este punto una recta cualquiera Aq finita ó infinitamente pequeña; llamemos r, p, p', p''..... á las proyecciones de Aq sobre R, P, P′, P″....., afectando á estas cantidades de los signos correspondientes, segun los convenios anteriormente establecidos; vamos á demostrar que el momento virtual de la resultante es igual á la suma de los momentos virtuales de los componentes.

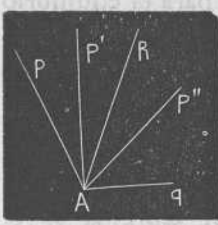

Fig. 236.

Llamando λ, α, α', α''....., á los ángulos que las fuerzas R, P, P′, P″....., forman con Aq, tendremos

$$R\cos\lambda = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + ...$$

Haciendo $Aq = l$ y multiplicando por l, será

$$Rl\cos\lambda = Pl\cos x + P'l\cos\alpha' + P''l\cos\alpha'' .....;$$

pero

$$l\cos\lambda = r,\quad l\cos\alpha = p,\quad l\cos\alpha' = p',\quad l\cos\alpha'' = p''.....;$$

y será por lo tanto

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + ...$$

De esta ecuacion resulta, si las fuerzas P, P′, P″....., se equilibran, siendo el punto A libre en el espacio, que para todo movimiento virtual del punto A, $R = 0$; por lo que

$$Pp + P'p' + P''p'' + ... = 0;$$

que demuestra el teorema de las velocidades virtuales en el caso particular de un sólo punto material enteramente libre en el espacio.

526. Este principio se extiende fácilmente al caso en que el punto A esté sujeto á permanecer sobre una superficie dada S (fig. 237). Todo movimiento infinitamente pequeño Aa de este punto, se efectúa entónces en el plano tangente á la superficie. De donde resulta que para el equilibrio del punto A, es necesario y suficiente que la resultante R sea cero, ó normal á la superficie, porque entónces $Rr=0$, por ser $r=0$, ó $R=0$; de modo que

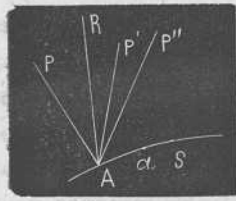

Fig. 237.

$$Pp+P'p'+P''p''+...=0.$$

Del mismo modo demostraríamos el teorema si el punto A estuviera sujeto á permanecer sobre una curva dada.

527. 2.º *caso.* Consideremos el caso de dos puntos A, A′ (fig. 238), unidos entre sí, de manera que el movimiento de uno de ellos determine el del otro; sean P, P′ las resultantes de las fuerzas aplicadas á cada uno de estos puntos; vamos á demostrar que si las dos fuerzas se equilibran, se tendrá $Pp+P'p'=0$. En efecto, unamos los puntos A, A′ por rectas inflexibles AB, A′B á un tercer punto B que arrastráran en sus movimientos; apliquemos en los puntos B y A por una parte, B y A′ por otra, segun las rectas BA, BA′, dos fuerzas iguales y directamente opuestas Q, —Q; Q′, —Q′; evidentemente, estas fuerzas no turbarán el equilibrio, si existia, ni cambiarán en nada la suma de los mo-

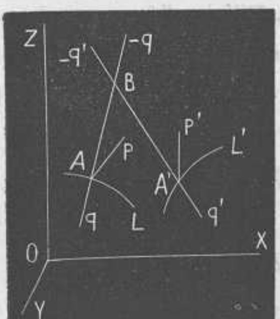

Fig. 238.

mentos virtuales, porque los momentos virtuales iguales y opuestos de las fuerzas introducidas, se destruyen. Luego si la suma de los momentos virtuales era nula ántes de la introduccion de las fuerzas, lo será despues; y si es nula despues de la introduccion de las fuerzas, es que lo era ántes. Como las fuerzas introducidas son arbitrarias, podremos escoger la fuerza Q, de manera que equilibre á la fuerza P; y la fuerza Q′, de manera que equilibre á la fuerza P′; escogidas así, es muy fácil probar que la suma de los momentos virtuales de las dos fuerzas P, P′ es cero. Sean para ello t, t', los ángulos que las fuerzas P, P′ forman, con las tangentes á las curvas descritas por los puntos A, A′; t_1, t_1' los ángulos que estas mismas tangentes forman con las fuerzas auxiliares Q, Q′; y t_2. t'_2 los ángulos que forman las fuerzas —Q,—Q′, con la tangente á la curva descrita por el punto auxiliar B. Para que la fuerza Q se equilibre con la fuerza P, es necesario y suficiente que la resultante de estas dos fuerzas sea perpendicular á la curva que describe el punto A, ó lo que es lo mismo, que la componente de esta resultante, segun la tangente, sea nula, es decir, que

$$P \cos t + Q \cos t_1 = 0.$$

Del mismo modo el equilibrio de las fuerzas P′ y Q′ exige, que

$$P' \cos t' + Q' \cos t'_1 = 0,$$

y el equilibrio de las fuerzas —Q, —Q′, nos dará

$$Q \cos t_2 + Q' \cos t'_2 = 0.$$

Multipliquemos respectivamente estas ecuaciones por las diferenciales ds, ds', ds_1 de los arcos descritos por los móviles A, A′, B, y sumemos, resultará

$$(1) \quad P\,ds \cos t + P'\,ds' \cos t' + Q(\cos t_1\, ds + \cos t_2\, ds_1) + Q'(\cos t'_1 ds' + \cos t'_2 ds_1) = 0;$$

la invariabilidad de las rectas AB, A′B, nos dará siendo

$A(x, y, z)$, $A(x', y', z')$, $B(a, b, c)$ y l, l' las distancias AB, A′B,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=l^2,$$
$$(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2=l'^2;$$

diferenciando, se tiene

$$(x-a)(dx-da)+(y-b)(dy-db)+(z-c)(dz-dc)=0,$$
$$(x'-a)(dx'-da)+(y'-b)(dy'-db)+(z'-c)(dz'-dc)=0,$$

que pueden ponerse bajo la forma

$$ds\left(\frac{x-a}{l}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{(y-b)}{l}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{z-c}{l}\cdot\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+\,ds_1\left(\frac{a-x}{l}\cdot\frac{da}{ds_1}+\frac{b-y}{l}\cdot\frac{db}{ds_1}+\frac{c-z}{l}\cdot\frac{dc}{ds_1}\right)=0,$$
$$ds'\left(\frac{x'-a}{l'}\cdot\frac{dx'}{ds'}+\frac{y'-b}{l'}\cdot\frac{dy'}{ds'}+\frac{z'-c}{l'}\cdot\frac{dz'}{ds'}\right)$$
$$+\,ds_1\left(\frac{a-x'}{l'}\cdot\frac{da}{ds_1}+\frac{b-y'}{l'}\cdot\frac{db}{ds_1}+\frac{c-z'}{l'}\cdot\frac{dc}{ds_1}\right)=0.$$

Pero las cantidades que multiplican á ds y ds_1 en la primera de estas ecuaciones, y á ds' y ds_1 en la segunda, representan respectivamente $\cos t_1$, $\cos t_2$ y $\cos t'_1$, $\cos t'_2$; luego

$$\cos t_1 ds+\cos t_2 ds_1=0,$$
$$\cos t'_1 ds'+\cos t'_2 ds_1=0;$$

por lo que la ecuacion (1), se reduce á

$$P\,ds\cos t+P'\,ds'\cos t'=0;$$

y como $P\,ds\cos t=Pp$, $P'ds'\cos t'=P'p'$, se tendrá necesariamente para el equilibrio

$$Pp+P'p'=0.$$

Recíprocamente, si se verifica esta ecuacion el equilibrio existe. En efecto, si se tiene

$$Pp+P'p'=0,\quad ó\quad P\,ds\cos t+P'ds\cos t'=0,$$

y si despues de haber unido los puntos A y A′ por las rectas invariables BA y BA′ se aplican en los puntos A, A′ cuatro fuerzas Q, —Q, Q′, —Q′, iguales dos á dos y opuestas, escogidas de manera que equilibren á las fuerzas P y P′, se tendrá

$$P \cos t + Q \cos t_1 = 0, \quad P' \cos t' + Q' \cos t'_1 = 0.$$

Y si, despues de haber hecho

$$Q \cos t_2 + Q' \cos t'_2 = K,$$

se suman estas ecuaciones, multiplicadas respectivamente por ds, ds', ds_1, se tendrá

$$P ds \cos t + P' ds' \cos t' + Q(\cos t_1 ds + \cos t_2 ds_1)$$
$$+ Q'(\cos t'_1 ds' + \cos t'_2 ds_1) = K ds_1.$$

Siendo invariables AB, A'B, tenemos

$$\cos t_1 ds + \cos t_2 ds_1 = 0, \quad \cos t'_1 ds' + \cos t'_2 ds_1 = 0,$$

y por hipótesis

$$P \cos t\, ds + P' \cos t' ds' = 0,$$

luego $K ds_1 = 0$,

y por consiguiente

$$ds_1 = 0, \quad \text{ó} \quad K = Q \cos t_2 + Q' \cos t'_2 = 0.$$

Pero ds_1, arco descrito por el punto B, no puede ser cero, ó la suma K de las componentes de las fuerzas que solicitan el punto B, segun la tangente á la curva que describe, no puede anularse sin que este punto esté en equilibrio; por otra parte, el equilibrio del punto B exije evidentemente el de los puntos A y A' que están unidos á él invariablemente, y no están solicitados por ninguna fuerza; luego no podemos tener $Pp + P'p' = 0$, sin que las fuerzas que soliciten á los puntos A y A' se equilibren.

528. 3.er *caso*. Sean A, A', A''... un número cualquiera de puntos sujetos á un sistema completo de ligaduras; es decir, tal, que el movimiento de uno de ellos determine el de todos los demas, y que no haya para todo el sistema más que un sólo movimiento posible, en el cual, los puntos recorrerán curvas completamente determinadas; P, P', P''... las resultantes de todas las fuerzas aplicadas á cada uno de estos puntos; si el equilibrio existe en el sistema, la suma de los momentos virtuales será cero y se verificará que

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots = 0.$$

Habiendo demostrado esta proposicion para un sistema de dos puntos, basta probar, que si es cierta para un sistema de m puntos, será tambien cierta para un sistema de $m+1$. Para probarlo, designemos por A, A', A''....., los $m+1$ puntos, y por P, P', P''..., las fuerzas que actúan sobre ellos; se podrán aplicar á uno de ellos, A' por ejemplo, dos fuerzas iguales y opuestas Q, —Q, y determinadas de tal suerte, que una de ellas Q se equilibre con la fuerza P, aplicada á otro punto A del sistema: bastará para esto que la suma $Pp+Qq=0$. Se podrá entónces suprimir las dos fuerzas P, Q, y prescindir del punto A; así no quedarán más que m puntos A', A'', A'''....., sometidos á la accion de las $m+1$ fuerzas —Q, P', P'', P'''.....; ahora, siendo cierto el teorema para m puntos, el equilibrio dará

$$-Qq+P'p'+P''p''+\dots\dots=0;$$

tambien tenemos

$$Qq+Pp=0.$$

Sumando estas dos ecuaciones, resulta

$$Pp+P'p'+P''p''+\dots\dots=0.$$

Recíprocamente, si la ecuacion anterior se verifica, el equilibrio existe. Esta recíproca se demuestra de un modo enteramente semejante al empleado para un sistema de dos puntos.

Ahora, hemos demostrado el teorema de las velocidades virtuales para el caso de dos puntos, luego será cierto para tres, para cuatro y en general para cualquier número de puntos, y un sistema completo de ligaduras.

Demostracion del teorema de las velocidades virtuales en el caso de un sistema incompleto de ligaduras.

529. Cuando el sistema de ligaduras de los puntos A, A', A''....., es incompleto, el movimiento de uno de ellos no determina el de todos los otros, se verifica el teorema de las velocidades virtuales, y es necesario,

si el equilibrio existe, que la suma de los momentos virtuales sea cero, ó lo que es lo mismo, que

$$Pp+P'p'+P''p''+.....=0;$$

para todos los movimientos que puede tomar el sistema.

En efecto, supongamos que existe el equilibrio, y que para un cierto movimiento, la suma de los momentos virtuales no sea nula; haciendo este movimiento al único posible por nuevas ligaduras, no destruiremos el equilibrio existente, y como el sistema de ligaduras será entónces completo, el equilibrio no podrá tener lugar sino siendo la suma de los momentos virtuales nula; luego la ecuacion

$$Pp+P'p'+P''p''+.....=\Sigma Pp=0$$

debe ser satisfecha, cuando hay equilibrio, sean las que fueren las ligaduras del sistema material.

Recíprocamente, si la suma $Pp+P'p'+P''p''+.....$ es nula para todos los movimientos posibles del sistema, habrá equilibrio; porque si el movimiento tuviera lugar, no se le impediria ligando los puntos de manera que este movimiento fuera sólo posible; y resultaria, que en un sistema cuyas ligaduras son completas, la suma de los momentos virtuales podrá ser nula, sin que haya equilibrio, lo cual es contrario á lo ya demostrado.

Resumiendo, cualquiera que sea el sistema de puntos que se considere, se tendrán todas las condiciones del equilibrio, igualando á cero la suma de los momentos virtuales de las fuerzas, para todos los movimientos compatibles con las ligaduras del sistema, que es lo que queríamos demostrar.

Caso en que las ligaduras están expresadas por desigualdades.

530. Cuando las ligaduras, que existen entre los diferentes puntos de un sistema, están expresadas por ecua-

ciones, cada uno de ellos puede experimentar dos movimientos iguales y de signo contrario. Pero hay sistemas en que esto no sucede. Concibamos un punto A situado sobre una superficie fija S (fig. 239), en cuyo interior no le es posible penetrar, es decir, que puede moverse sólo á un lado del plano tangente TT. Es claro que si se mueve en el plano tangente podrá marchar en dos sentidos opuestos Aa y Aa', pero para cualquier otro movimiento, su marcha será posible en un sentido é imposible en el otro.

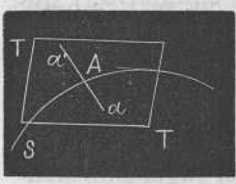

Fig. 239.

Las condiciones de esta especie están ordinariamente expresadas por desigualdades. Así, si un punto situado en un plano fijo no puede moverse más que de un lado de este plano, tomando éste por plano de las XY y el eje Z en el sentido de su movimiento posible, se tendrá para este punto, $z \geqq 0$, y habrá que expresar que la variacion de z es nula ó positiva, es decir

$$\delta z \geqq 0.$$

Se expresará que un punto no puede penetrar en el interior de una esfera fija, cuyo centro es el orígen de las coordenadas, por medio de la relacion

$$x^2+y^2+z^2 \geqq R^2,$$

siendo R el radio de la esfera, y si el punto está situado sobre la superficie esférica, tendremos, dándole un movimiento virtual

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z \geqq 0.$$

Si el sistema A, A′, A″..., está sujeto á condiciones de este género, el teorema de las velocidades virtuales experimenta una modificacion.

Basta, entónces, para el equilibrio, que la suma de los momentos virtuales de las fuerzas sea nula ó negativa para cada movimiento virtual del sistema. Si el sistema es de ligaduras completas, esto resulta de lo que hemos dicho ántes en el caso en que el movimiento del punto A no puede verificarse en un cierto sentido. Si el sistema es de ligaduras incompletas, el teorema se demuestra introduciendo un cierto número de condiciones tales, que el sistema venga á ser de ligaduras completas.

Qué forma suele darse ordinariamente á la ecuacion del teorema de las velocidades virtuales.

531. La ecuacion

$$(1)\quad Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0,$$

puede ponerse bajo otra forma más cómoda para las aplicaciones.

Sean X, Y, Z (fig. 240), las componentes de la fuerza P aplicada al punto A (x, y, z), δx, δy, δz, las variaciones de las coordenadas de este punto por un movimiento virtual Aa, compatible con el estado del sistema, de suerte que las coordenadas del punto a sean $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$. El momento virtual de la fuerza P, es igual á la suma de los momentos virtuales de sus componentes, por lo que

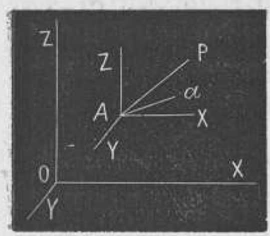

Fig. 240.

$$Pp = X\delta x + Y\delta y + Y\delta z,$$

del mismo modo $\quad P'p' = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z;$

y de la misma manera pueden expresarse $P''p''$, $P'''p'''$....

Sustituyendo estos valores en la (1), será

$$(2)\quad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

El signo Σ se extiende á tantos trinomios de esta forma como puntos materiales tiene el sistema. Bajo esta forma se usa ordinariamente la ecuacion del teorema de las velocidades virtuales.

LECCION XLIII.

Aplicaciones del teorema de las velocidades virtuales. Cómo se encuentran por medio de este teorema las ecuaciones del equilibrio de un sistema cualquiera.—Equilibrio de un sólido invariable.—Deduccion de las ecuaciones del equilibrio de un sólido invariable por una trasformacion de coordenadas. — Caso en que el sólido invariable tiene uno, dos ó más puntos fijos. — Equilibrio del polígono funicular. — Equilibrio estable, inestable é indiferente.

Aplicaciones del teorema de las velocidades virtuales. Cómo se encuentran por medio del teorema de las velocidades virtuales las ecuaciones del equilibrio de un sistema cualquiera.

532. El teorema de las velocidades virtuales encierra todas las verdades de la Estática; así que, todos los teoremas de esta parte de la Mecánica, no son más que casos particulares de éste; por lo cual vamos á dedicar esta leccion á la exposicion de sus aplicaciones principales, empezando por exponer el método general para deducir las ecuaciones del equilibrio de un sistema cualquiera.

Supongamos que las ligaduras que existen entre los diversos puntos del sistema, están expresadas por las i ecuaciones

$$(1)\quad L=0,\quad M=0,\quad N=0.....$$

Debiendo estas ecuaciones quedar satisfechas por las nuevas coordenadas de los puntos despues de un movimiento infinitamente pequeño compatible con las ligaduras del sistema, se tendrá

$$(2)\begin{cases} \frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx'}\delta x'+\frac{dL}{dy'}\delta y'+\ldots\ldots=0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x+\frac{dM}{dy}\delta y+\frac{dM}{dz}\delta z+\frac{dM}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0, \\ \frac{dN}{dx}\delta x+\frac{dN}{dy}\delta y+\frac{dN}{dz}\delta z+\frac{dN}{dx}\delta x+\ldots\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Para la inteligencia de estas ecuaciones, es preciso concebir, que á las i ecuaciones de condicion dadas, se añaden $3n-1-i$, ecuaciones nuevas, tales, que el movimiento considerado sea el único posible, ó que el sistema de ligaduras sea completo. Entónces todas las variables, ménos una, vienen á ser funciones de ésta, y se pueden bajo este punto de vista diferenciar las ecuaciones (1); con esto no se restringe la generalidad de la cuestion, puesto que el movimiento particular que se considera puede ser uno cualquiera de los que son compatibles con las ligaduras del sistema.

Las i ecuaciones de condicion contienen $3n$ variaciones

$$\delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \ldots\ldots,$$

siendo n el número de puntos materiales del sistema, de las cuales $3n-i$ son arbitrarias, y las otras en número de i, dependen de éstas. Sustituyendo los valores de estas últimas, deducidas de las ecuaciones (2), en la ecuacion del teorema de las velocidades virtuales

$$(3) \qquad \Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0,$$

la ecuacion que resulte contendrá solamente $3n-i$ términos que tendrán cada uno como factores una de las $3n-i$ variaciones arbitrarias, y como la ecuacion deberá verificarse cualesquiera que sean estas variaciones, habrá que igualar á cero sus $3n-i$ coeficientes. Obtendremos de este modo $3n-i$ ecuaciones, que unidas á las i ecuaciones (1), serán las $3n$ ecuaciones, entre las componentes de las fuerzas y las coordenadas de sus puntos de aplicacion, necesarias y suficientes para el equilibrio.

533. La eliminacion de las i variaciones por medio de las ecuaciones (2), puede hacerse por el método de los factores indeterminados.

Multipliquemos la primera por λ, la segunda por μ, etcétera, y suménoslas miembro á miembro con la ecuacion (3) desarrollada, é igualemos á cero los $3n$ coeficientes de las variaciones; resultarán las $3n$ ecuaciones siguientes:

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
X+\lambda\dfrac{dL}{dx}+\mu\dfrac{dM}{dx}+\nu\dfrac{dN}{dx}+\ldots=0,\\
Y+\lambda\dfrac{dL}{dy}+\mu\dfrac{dM}{dy}+\nu\dfrac{dN}{dy}+\ldots=0,\\
Z+\lambda\dfrac{dL}{dz}+\mu\dfrac{dM}{dz}+\nu\dfrac{dN}{dz}+\ldots=0,\\
X'+\lambda\dfrac{dL}{dx'}+\mu\dfrac{dM}{dx'}+\nu\dfrac{dN}{dx'}+\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{array}\right.
$$

en ellas determinaremos los factores λ, μ, ν, por medio de otras tantas de estas ecuaciones; quedarán $3n-i$ ecuaciones, que unidas con las (1), darán los valores de las $3n$ incógnitas para el caso del equilibrio.

Recíprocamente, si estas ecuaciones se verifican, las fuerzas se equilibran; porque multiplicando estas ecuaciones por δx, δy, δz, $\delta x'$..., y sumando, resultará la ecuacion

$$\left(X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\ldots\right)\delta x+\left(Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\ldots\right)\delta y+\ldots=0,$$

que se reduce á la ecuacion (3), teniendo en cuenta las relaciones (2); y la ecuacion (3) expresa, como sabemos, que la suma de los momentos virtuales de las fuerzas es nula.

534. De las ecuaciones (4) se deduce una importante consecuencia. Vemos que ellas no variarán, y el equilibrio actual del sistema subsistirá, si suprimimos la condicion $L=0$, á la cual el sistema debe satisfacer en todos sus movimientos, y agregamos al mismo tiempo á las

fuerzas primitivas, nuevas fuerzas que den los mismos sumandos para aquellas ecuaciones; á saber, una fuerza aplicada en A, cuyas componentes paralelas á los ejes sean

$$\lambda \frac{dL}{dx}, \quad \lambda \frac{dL}{dy}, \quad \lambda \frac{dL}{dz};$$

una fuerza aplicada en A′, cuyas componentes sean

$$\lambda \frac{dL}{dx'}, \quad \lambda \frac{dL}{dy'}, \quad \lambda \frac{dL}{dz'};$$

y así sucesivamente. La ligadura expresada por la ecuacion L=0, equivale, por lo tanto, á estas fuerzas.

La intensidad de la fuerza que debe aplicarse en el punto A, por ejemplo, es igual á

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

y su direccion es la de la normal á la superficie representada por la ecuacion L=0, cuando se consideran x, y, z, como únicas variables, puesto que los cosenos de los ángulos que la normal forma con los ejes, son proporcionales á $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$.

Las condiciones M=0, N=0, etc., pueden del mismo modo reemplazarse por fuerzas convenientes, aplicadas á todos los puntos del sistema. Estas fuerzas auxiliares, que pueden reemplazar las ligaduras que existen entre todos los puntos, son las que producen las tensiones y las presiones en los puntos del sistema.

En fin, si suprimimos todas las ligaduras, todos los puntos quedan libres, y las fuerzas P, P′, P″,..., aplicadas á estos puntos libres, son destruidas por las fuerzas

$$\lambda \frac{dL}{dx}, \quad \mu \frac{dM}{dx}, \quad \nu \frac{dN}{dx}, \ldots$$

$$\lambda \frac{dL}{dy}, \quad \mu \frac{dM}{dy}, \quad \nu \frac{dN}{dy}, \ldots$$

$$\lambda \frac{dL}{dz}, \quad \mu \frac{dM}{dz}, \quad \nu \frac{dN}{dz}, \ldots$$

aplicadas al punto A;

$$\lambda\frac{dL}{dx'},\quad \mu\frac{dM}{dx'},\quad \nu\frac{dN}{dx'},\ldots$$

$$\lambda\frac{dL}{dy'},\quad \mu\frac{dM}{dy'},\quad \nu\frac{dN}{dy'},\ldots$$

$$\lambda\frac{dL}{dz'},\quad \mu\frac{dM}{dz'},\quad \nu\frac{dN}{dz'},\ldots$$

aplicadas al punto A'; y así sucesivamente.

Equilibrio de un sólido invariable.

535. Para deducir las ecuaciones del equilibrio de un sólido de esta clase del teorema de las velocidades virtuales, debemos tener presente que para un sistema de puntos materiales sometidos á la accion de várias fuerzas, el número de ecuaciones de equilibrio es necesariamente igual al número de variables independientes; es decir, al número de coordenadas variables, cuyo valor habrá que determinar para que cada punto quede enteramente fijo.

Consideremos primero un punto aislado; si es libre, sus tres coordenadas podrán variar independientemente una de otra, y habrá, por lo tanto, tres ecuaciones de equilibrio. Si el punto está sujeto á permanecer sobre una superficie, una de las coordenadas será funcion de las otras dos, y el número de variables independientes se reducirá á dos, y no habrá más que dos ecuaciones de equilibrio. En fin, si el punto está sujeto á permanecer sobre una curva, dos coordenadas serán funciones de la tercera, que será la única variable independiente, y no habrá más que una ecuacion de equilibrio.

Examinemos ya un sólido ó sistema invariable y libre en el espacio, formado por *n* puntos materiales unidos entre sí de una manera invariable. Segun la manera de definir la forma de un sólido invariable (202), serán necesarias tres ecuaciones para expresar que las distancias mútuas de tres puntos tomados arbitrariamente en el cuerpo, son constantes; $3(n-3)$, ó $3n-9$ ecuaciones, expresarán que los $n-3$ puntos restantes, permanecen á distancias invariables de los tres primeros; de modo, que el número de condiciones ó ligaduras del sistema será $3n-9+3$, ó $3n-6$ ecuaciones entre las coordenadas de todos sus puntos; ahora se necesitan $3n$ ecuaciones para determinar las coordenadas de los n puntos del sistema, luego el número de ecuaciones de equilibrio, será seis; resultado conforme con lo que digimos en la primera parte de la Estática.

Si el sólido ó sistema invariable tuviera un punto fijo, sus tres coordenadas serian constantes, las seis variables independientes se reducirian á tres, por consiguiente, no hay más que tres ecuaciones de equilibrio para un sistema invariable sujeto á girar alrededor de un punto fijo.

Si el sistema está sujeto á girar al rededor de un eje fijo, las seis coordenadas de dos de sus puntos serán constantes, y como la fijeza de estos dos puntos lleva consigo la invariabilidad de su distancia, no habrá más que una sola variable independiente, y por consiguiente, una sola ecuacion de equilibrio.

536. Para obtener las seis ecuaciones del equilibrio en el caso de un sólido invariable, podíamos seguir el método general (532); pero es más sencillo imprimir al sistema seis movimientos virtuales arbitrarios é independientes los unos de los otros, de suerte, que las seis relaciones que resulten entre las fuerzas, no puedan deducirse unas de otras, y estas relaciones serán precisamente las seis ecuaciones del equilibrio.

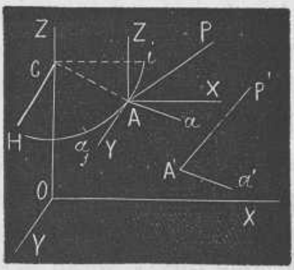

Fig. 241.

Demos al sistema un movimiento virtual paralelo al eje de las x, por ejemplo, de manera que sus puntos A, A'... (fig. 241), describan rectas iguales Aa, A'a';..... entónces $\delta y, \delta z, \delta y', \delta z'$......, son nulos, y $\delta x = \delta x' = \delta x''$.....

En este caso, la ecuacion general

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

se reduce, suprimiendo el factor comun δx, á $\Sigma X = 0$; por medio de movimientos análogos, paralelos á OY y á OZ, deduciremos las ecuaciones que se refieren á estos ejes, y las tres ecuaciones del equilibrio serán

$$(5) \quad \begin{cases} \Sigma X = 0, \\ \Sigma Y = 0, \\ \Sigma Z = 0. \end{cases}$$

Obtendremos las otras tres ecuaciones del equilibrio, haciendo girar el cuerpo sucesivamente alrededor de los tres ejes. Hagámosle girar primero alrededor de OZ. El punto A describirá un elemento Aa_1 de una circunferencia iAH de radio AC$=r$ y paralela al plano X Y. Sea AC$i = \omega$, tendremos $\delta z = 0$, y de

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \operatorname{sen} \omega,$$

se deduce variando y siendo $\delta\omega$ el ángulo que mide la rotacion

$$\delta x = -r \operatorname{sen} \omega \delta\omega \quad \delta y = r \cos \omega \delta\omega$$

ó bien

$$\delta x = -y\delta\omega, \quad \delta y = x\delta\omega;$$

y sustituyendo

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = (Yx - Xy)\delta\omega$$

y del mismo modo

$$X'\delta x' + Y\delta y' + Z'\delta z' = (Y'x' - X'y')\delta\omega,$$

y así sucesivamente. Sustituyendo estos valores en la ecuacion (1) y suprimiendo el factor $\delta\omega$, tendremos

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Por rotaciones al rededor de OY y OX se obtienen las ecuaciones correspondientes, análogas á ésta, y las tres ecuaciones del equilibrio serán

$$(6)\quad \begin{cases} \Sigma(Yx-Xy)=0, \\ \Sigma(Zy-Yz)=0, \\ \Sigma(Xz-Zx)=0. \end{cases}$$

Las seis ecuaciones (5) y (6) son las del equilibrio de un sólido invariable libre; y vemos que son las mismas que obtuvimos directamente en la primera parte de la Estática.

Deduccion de las ecuaciones del equilibrio de un sólido invariable por una trasformacion de coordenadas.

537. Supongamos los puntos del sólido referidos á un nuevo sistema de coordenadas rectangulares; las coordenadas antiguas de un punto x, y, z, estarán ligadas con las nuevas x_1, y_1, z_1, por las ecuaciones,

$$(7)\quad \begin{cases} x=\alpha+ax_1+by_1+cz_1, \\ y=\beta+a'x_1+b'y_1+c'z_1, \\ z=\gamma+a''x_1+b''y_1+c''z_1; \end{cases}$$

entre los cosenos $a, a', a'', \ldots$ se verifican las ecuaciones de condicion

$$(8)\quad \begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1, \\ b^2+b'^2+b''^2=1, \\ c^2+c'^2+c''^2=1; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} ab+a'b'+a''b''=0, \\ ac+a'c'+a''c''=0, \\ bc+b'c'+b''c''=0. \end{cases}$$

Si concebimos que los ejes de las x_1, y_1, z_1, forman parte del sistema sólido, un cambio cualquiera del sistema, cambiará la posicion de estos ejes, y los valores de x_1, y_1, z_1 no cambiarán; luego variando las (7) se tiene

$$(10)\quad \begin{cases} \delta x=\delta\alpha+x_1\delta a+y_1\delta b+z_1\delta c, \\ \delta y=\delta\beta+x_1\delta a'+y_1\delta b'+z_1\delta c', \\ \delta z=\delta\gamma+x_1\delta a''+y_1\delta b''+z_1\delta c''. \end{cases}$$

Supongamos que ántes del movimiento los nuevos ejes coincidian con los antiguos, tendremos entónces

$$x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1;$$

lo cual exige, que

$$\begin{gathered} a=1,\quad b=0,\quad c=0, \\ a'=0,\quad b'=1,\quad c'=0, \\ a''=0,\quad b''=0,\quad c''=1, \\ \delta a=0,\quad \delta b'=0,\quad \delta c''=0; \end{gathered}$$

y las ecuaciones de condicion (9) darán variando

$$\delta b+\delta a'=0,\quad \delta c+\delta a''=0,\quad \delta c'+\delta b''=0.$$

Hagamos

$$\delta a'=-\delta b=\delta\omega,\quad \delta c=-\delta a''=\delta\psi,\quad \delta b''=-\delta c'=\delta\varphi,$$

y tendremos en las (10)

$$\begin{gathered} \delta x=\delta\alpha-y\,\delta\omega+z\,\delta\psi, \\ \delta y=\delta\beta+x\,\delta\omega-z\,\delta\varphi, \\ \delta z=\delta\gamma-x\,\delta\psi+y\,\delta\varphi; \end{gathered}$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion general

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta)=0,$$

se reduce á

$$\delta\alpha\Sigma X+\delta\beta\Sigma Y+\delta\gamma\Sigma Z+\delta\omega\Sigma(Yx-Xy)+\delta\varphi\Sigma(Zy-Yz) \\ +\delta\psi\Sigma(Xz-Zx)=0.$$

Siendo las variaciones $\delta\alpha, \delta\beta$....., arbitrarias, para que esta ecuacion se verifique, es necesario que sean cero los coeficientes de estas variaciones; y tendremos de una vez las seis ecuaciones del equilibrio anteriormente encontradas

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0;$$
$$\Sigma(Yx-Xy)=0,\quad \Sigma(Zy-Yz)=0,\quad \Sigma(Xz-Yx)=0.$$

Caso en que el sólido invariable tiene uno, dos ó más puntos fijos.

538. Si un sólido invariable está retenido por un punto fijo, los movimientos de traslacion dirigidos paraelamente á los ejes no podrán tener lugar, sin romper

las ligaduras establecidas. Pero tomando el punto fijo por orígen de las coordenadas, podremos imprimir al sistema un movimiento de rotacion alrededor de cada uno de los ejes, y obtendremos para el equilibrio las tres ecuaciones (6); estas ecuaciones, cuyo número es precisamente igual al de variables independientes, bastan para asegurar el equilibrio.

Si el sistema invariable está retenido por dos puntos fijos, su movimiento virtual no podrá ser más que un movimiento de rotacion alrededor del eje fijo que pasa por estos dos puntos, y el teorema de las velocidades virtuales nos dará una sola ecuacion para el equilibrio. Tomando por eje fijo el eje de las z, la ecuacion única del equilibrio será $\Sigma(\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y)=0$, que es la primera de las (6). En este caso no hay más que una sola variable independiente, bastando la ecuacion anterior para el equilibrio del sistema.

Si el sistema invariable pudiera recibir no solamente un movimiento de rotacion alrededor del eie de las z, sino tambien un movimiento de traslacion paralelamente á este eje, el equilibrio exigiria las ecuaciones, $\Sigma\,\mathrm{Z}=0$, y $\Sigma(\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y)=0$, que bastarán para asegurar el equilibrio.

Si los puntos contenidos en el plano XY están sujetos á no salir de él, el movimiento de rotacion alrededor del eje de las z, y los movimientos de traslacion paralelos á los ejes X é Y, darán para el sistema invariable las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma\mathrm{X}=0,\quad \Sigma\mathrm{Y}=0,\quad \Sigma(\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y)=0;$$

y como en esta hipótesis, el número de variables independientes es tres, las ecuaciones anteriores expresarán las condiciones de equilibrio.

En fin, si el número de puntos fijos fuera de tres ó más, el sólido invariable estaria por sí mismo en equilibrio y no haria falta ninguna ecuacion para expresarlo.

Equilibrio del polígono funicular.

539. Pueden deducirse con mucha facilidad las leyes de equilibrio del polígono funicular, por medio del teorema de las velocidades virtuales.

Sean A, B, C, D, E, F, (fig. 242), los n puntos unidos por cuerdas, formando un polígono de $n-1$ lados, cuyos vértices están solicitados por n fuerzas P_0, P'_1 P''_2,...., P_n. Lo primero debemos expresar que las longitudes de estos lados l, l', l''...... son constantes; designando por x, y, z, x', y', z',....., las coordenadas de los puntos A, B....., referidos á tres ejes rectangulares, tendremos las $n-1$ ecuaciones

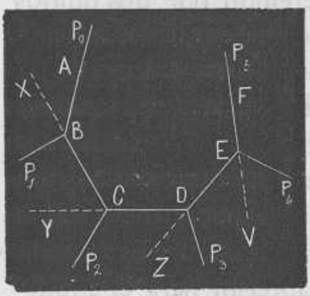

Fig. 242.

$$l-\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}=0,$$
$$l'-\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}=0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Variando estas ecuaciones, se tiene

$$\frac{x'-x}{l}\delta x+\frac{y'-y}{l}\delta y+\frac{z'-z}{l}\delta z+\frac{x-x'}{l}\delta x'+\frac{y-y'}{l}\delta y'$$
$$\frac{z-z'}{l}\delta z=0;$$

y además $n-2$ ecuaciones de esta forma. A estas $n-1$ ecuaciones debemos unir la del teorema de las velocidades virtuales

$$\Sigma(X\delta x+Z\delta y+Z\delta z)=0.$$

Empleando para la eliminacion de $n-1$ variaciones, el método de los multiplicadores, y usando las mismas notaciones, obtendremos las 3 n ecuaciones:

$$(11)\begin{cases} X+\lambda\,\frac{x'-x}{l}=0,\\ Y+\lambda\,\frac{y'-y}{l}=0,\\ Z+\lambda\,\frac{z'-z}{l}=0;\end{cases}$$

$$(12)\begin{cases} X'+\lambda\,\frac{x-x'}{l}+\mu\,\frac{x''-x'}{l'}=0,\\ Y'+\lambda\,\frac{y-y'}{l}+\mu\,\frac{y''-y'}{l'}=0,\\ Z'+\lambda\,\frac{z-z'}{l}+\mu\,\frac{z''-z'}{l'}=0;\end{cases}$$

$$(13)\begin{cases} X''+\mu\,\frac{x'-x''}{l'}+\nu\,\frac{x'''-x''}{l''}=0,\\ Y''+\mu\,\frac{y'-y''}{l'}+\nu\,\frac{y'''-y''}{l}=0,\\ Z''+\mu\,\frac{z'-z''}{l'}+\nu\,\frac{z'''-z''}{l''}=0.\end{cases}$$

Se ve inmediatamente la ley de formacion de estas ecuaciones. Eliminando entre ellas las $n-1$ indeterminadas $\lambda, \mu, \nu \ldots$, tendremos $3n-(n-1)=2n+1$ condiciones de equilibrio.

540. Los factores auxiliares λ, μ, ν... representan las tensiones de las diversas cuerdas que forman los lados del polígono, suponiendo á estas cantidades positivas. En efecto, $\lambda\,\frac{x'-x}{l}$, $\lambda\,\frac{y'-y}{l}$, $\lambda\,\frac{z-z'}{l}$, son las componentes de una fuerza igual á λ, actuando segun AB, de A hácia B; y las relaciones (11) hacen ver que esta fuerza λ y la fuerza P_0, aplicadas al punto A, se destruyen; de manera, que λ mide la tension de la cuerda AB. Tambien se deduce, como sabemos, que la fuerza P_0 está dirigida segun la prolongacion de AB, cuando el polígono está en equilibrio.

Las ecuaciones (12), ademas de las componentes de P_1, contienen las de una fuerza igual y directamente opuesta á λ, es decir, actuando en el punto B, segun AB, de B hácia A, y ademas contienen los valores de las componentes paralelas á los ejes de una fuerza igual á μ, dirigida segun BC, de B hácia C, si la cantidad μ es positiva; estas tres fuerzas se equilibran en el punto B, de manera que μ mide la tension de la cuerda BC. Del mismo modo veríamos que ν es la tension de la cuerda CD, y así sucesivamente.

Es fácil probar que la tension de una cuerda cualquiera es la resultante de las fuerzas que actúan á un mismo lado de ella, trasladadas paralelamente á sí mismas á un punto de su direccion.

Lo que precede, lo demuestra para la primera cuerda. Para la segunda, basta sumar las ecuaciones (11) y (12), lo que da

$$X+X'+\mu\frac{x''-x'}{l'}=0,$$
$$Y+Y'+\mu\frac{y''-y'}{l'}=0,$$
$$Z+Z'+\mu\frac{z''-z'}{l'}=0.$$

De aquí resulta que las fuerzas P, P_1 y la tension μ de la cuerda BC, actuando esta última de B hácia C, se equilibran; luego una fuerza igual y contraria á μ, que mide la tension de la cuerda BC, es la resultante de las fuerzas P_0 y P_1. Despues veríamos, sumando tres á tres las ecuaciones (11), (12) y (13), que la tension de la cuerda siguiente es la resultante de las fuerzas P_0, P_1, trasportadas á C, y de la fuerza P_2, y así sucesivamente.

Si λ, μ, ν... no fueran todas positivas, el polígono funicular no estaria en equilibrio; porque si μ, por ejemplo, fuera negativa, los puntos B y C estarian tirados por dos fuerzas iguales y contrarias que tenderian á aproximarlos. Aun en este caso, podria existir el equilibrio si las cuerdas se reemplazáran por varillas rígidas, porque hemos dicho que las distancias AB, BC,... deben permanecer constantes.

Equilibrio estable, inestable é indiferente.

541. Supongamos que el primer miembro de la ecuacion

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0,$$

sea la variacion exacta de una funcion V de $x, y, z, x', y', z', \ldots$, consideradas como variables independientes, ó como variables ligadas entre sí por las ecuaciones $L=0$, $M=0, \ldots$; tendremos

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=\delta V.$$

Para esto es necesario y suficiente que X, Y, Z, X', Y'... sean las derivadas parciales de la funcion V con respecto á $x, y, z, x', y', \ldots$ Entónces, para la posicion de equilibrio, y sólo para ella, $\delta V=0$, y el valor correspondiente de la funcion V, es un máximo ó un mínimo, si esta funcion es susceptible de máximo ó mínimo; porque para toda otra posicion del sistema su variacion es diferente de cero.

La expresion

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

análoga á

$$\Sigma(X dx+Y dy+Z dz),$$

es una variacion exacta, en los mismos casos que esta última es una diferencial exacta, y particularmente cuando las fuerzas motrices están dirigidas á centros fijos, y son funciones de las distancias de sus puntos de aplicacion á estos centros. Lo cual se demuestra como lo hicimos para la segunda expresion en el núm. 380.

Consideremos que los puntos A, A', A''... sujetos á ligaduras cualesquiera, están solicitados sólo por sus propios pesos p, p', p''..., tomemos el eje de las z vertical, se tendrá

$$X=0,\ Y=0,\ Z=p,\ X'=0,\ Y'=0,\ Z'=p'...,$$

la ecuacion

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0,$$

se convertirá en

$$p\delta z+p'\delta z'+p''\delta z''...=0,$$

que puede ponerse bajo la forma

$$\delta(pz+p'z'+p''z''+...)=0.$$

Sea P la suma de estos pesos y z_1 la ordenada del centro de gravedad del sistema, se tiene

$$pz+p'z'+p''z''+...=Pz_1,$$

y $$\delta(Pz_1)=0,$$

de donde $$\frac{\delta z_1}{dt}=0;$$

que nos dice; que en todo movimiento compatible con las ligaduras del sistema la velocidad virtual del centro de gravedad, proyectada sobre el eje de las z, es nula. Luego para el equilibrio entre diferentes pesos, es necesario y suficiente, que en cada movimiento virtual la direccion primitiva de la velocidad del centro de gravedad sea horizontal, ó que la ordenada del centro de gravedad sea un máximo ó un mínimo.

Tambien se tiene en este caso, que

$$\delta V=0,$$

ó que el equilibrio corresponde á un valor máximo ó mínimo de la funcion V. Pero hay entre el máximo y mínimo de esta funcion una diferencia esencial, que conviene señalar.

Se dice que el equilibrio de un cuerpo ó de un sistema de puntos es *estable*, cuando separándole, por poco que sea, de la posicion de equilibrio, tiende por sí mismo á volver á ella. El equilibrio es *inestable*, cuando separado el sistema, de su posicion de equilibrio y abandonado á sí mismo, tiende á alejarse más y más de su primitiva posicion. En fin, el equilibrio es indiferente, ó el cuerpo es *astático*, cuando separado de la posicion de equilibrio, no tiende por sí mismo ni á aproximarse ni á alejarse de su primitiva posicion. En el caso que consideramos de los sistemas pesados, la ordenada del centro de gravedad es, como hemos visto, la cantidad que debe ser máximo ó mínimo, cuando hay equilibrio y recíprocamente; ademas, el máximo de la ordenada corresponde al caso de equilibrio estable, y el mínimo al de equilibrio inestable.

Resumiendo, la condicion de equilibrio de un sistema cualquiera de cuerpos pesados consiste en que el centro de gravedad del sistema entero esté lo más bajo, ó lo más alto posible; si está lo más bajo posible, el equilibrio es estable, y si está lo más alto posible, el equilibrio es inestable. En otros términos, si cuando se separa infinitamente poco el cuerpo de su posicion de equilibrio, el centro de gravedad sube, el equilibrio es estable, y el cuerpo recobra por sí mismo su primitiva posicion; si el centro de gravedad desciende, el equilibrio es inestable, y el cuerpo se apartará más y más de su primitiva posicion; si el centro de gravedad ni asciende ni desciende, el cuerpo permanecerá en la segunda posicion que se le ha dado, y entónces el equilibrio es indiferente, ó lo que es lo mismo, el sistema es astático.

LECCION XLIV.

Equilibrio de los sólidos naturales.—Resistencia de un sólido prismático á la extension y á la compresion. Coeficiente de elasticidad. —Equilibrio de un sólido prolongado solicitado por fuerzas que tienden á doblarlo trasversalmente. — Aplicaciones de esta teoría. Equilibrio de los sólidos prismáticos empotrados.—Equilibrio de un sólido prismático retenido por dos apoyos y sometido trasversalmente á una fuerza, ó á dos, teniendo ó no en cuenta su propio peso.

Equilibrio de los sólidos naturales.

542. Los sólidos naturales están compuestos, como sabemos, de moléculas materiales que unas veces se aproximan unas á otras, disminuyendo en consecuencia el volúmen del sólido, y otras se alejan unas de otras, aumentando dicho volúmen, segun la preponderancia de la cohesion ó de la fuerza repulsiva debida al calórico; en una palabra, que los sólidos naturales no son sólidos invariables, tal cual hasta aquí los hemos considerado, y son necesarias nuevas consideraciones y algunos datos experimentales, para establecer las leyes de equilibrio de estos cuerpos.

Las seis ecuaciones del equilibrio de los sólidos invariables se verifican tambien para los sólidos naturales, pero en éstos no son suficientes para asegurar el equilibrio como en los primeros; y es necesario tener en cuenta nuevas consideraciones para establecer las ecuaciones del equilibrio de los sólidos naturales.

Las condiciones de equilibrio de un sólido natural se deducen de las de un sólido invariable, ya considerando aquél con la forma que tenía ántes de estar sometido á la accion de las fuerzas que se le aplican, ó bien con la que toma bajo la accion de estas fuerzas. En el primer caso, no se comete generalmente más que un error pequeño, tanto menor, cuanto ménos deformable sea el sólido; en el segundo caso, no se comete absolutamente error alguno. Pero esta segunda manera de aplicar las condiciones del equilibrio de un sólido invariable al de un sólido natural, no puede emplearse más que para estudiar un equilibrio, que ya se sabe que existe, y cuando sólo se trata de determinar los valores de algunas de las fuerzas que actúan sobre el sólido considerado.

Si dado un sólido natural, queremos averiguar si podrá estar en equilibrio bajo la accion de fuerzas conocidas, aplicadas á puntos determinados de él, no sabiendo de antemano la forma que tomará éste, cuando exista el equilibrio de que se trata, si puede existir, es necesario, ó bien despreciar la deformacion que las fuerzas harán sufrir al sólido, ó que se sepa cómo se deforma bajo la accion de estas fuerzas. En la mayor parte de los casos se procede del primer modo, es decir, que para buscar las condiciones de equilibrio, se considera que conserva la forma que tenía el sólido ántes de estar sometido á la accion de las fuerzas que se le aplican; cuando se sigue este método, se deben determinar las tensiones y presiones que se desarrollan en las diversas partes del sólido, para ver si pueden sufrirlas sin romperse: las cuestiones siguientes darán una idea exacta de este procedimiento.

Resistencia de un sólido prismático á la extension y á la compresion. Coeficiente de elasticidad.

543. Si un sólido homogéneo prismático, como una viga ó una barra de hierro, está fijo por uno de sus extremos, y sometido en el otro á la accion de una fuerza F, que tiende á alargarlo, experimenta, en efecto, un aumento de longitud, que varía con la energía de la fuerza F. Designando por l la longitud primitiva del sólido, por i el aumento de ésta debido á la accion de la fuerza F, y por ω el área de su seccion trasversal, la experiencia enseña que existe entre estas cantidades la siguiente relacion empírica

$$F = E\,\omega \frac{i}{l};$$

en la que E es una constante que depende sólo de la naturaleza del cuerpo, y se llama *coeficiente de elasticidad.* La relacion anterior indica que F es proporcional al área ω de la seccion trasversal del sólido, y al incremento $\frac{i}{l}$ de la unidad de longitud del mismo. La relacion anterior subsiste miéntras el aumento de longitud i no pase de un cierto límite, que se llama *límite de elasticidad*; porque de él en adelante se deforma el sólido de una manera permanente, y no vuelve á tomar su longitud primitiva cuando cesa la accion de la fuerza F; de manera, que al hacer uso de ella, debe tenerse en cuenta esta restriccion.

Si el mismo sólido prismático, fijo por uno de sus extremos, está sometido en el otro á la accion de una fuerza que tiende á comprimirlo ó á disminuir su longitud, la intensidad de la fuerza y la disminucion de longitud, que experimenta el sólido, están tambien ligados por la ecuacion anterior; de modo, que considerando que i representa un aumento de longitud positivo ó negativo, segun que la fuerza F tienda á aumentar ó á disminuir la longitud del sólido, la fórmula anterior abraza los dos casos. Tampoco puede aplicarse dicha fórmula, cuando i y F son negativos, al caso en que i excede el límite de elasticidad. Los límites de elasticidad suelen ser diferentes para la extension y para la compresion de un mismo cuerpo.

Por medio de la relacion experimental, que acabamos de establecer, vamos á estudiar algunos casos de equilibrio de los sólidos naturales.

Equilibro de un sólido prolongado solicitado por fuerzas que tienden á doblarlo trasversalmente.

544. Consideremos un sólido, que tenga la forma de un prisma simétrico con respecto á un plano, sometido á la accion de fuerzas que tienden á doblarlo paralelamente á este plano; y vamos á determinar la forma que tomará bajo la accion de las fuerzas que lo solicitan, suponiendo que la deformacion que experimenta es muy pequeña.

Sea ab (fig. 243), una seccion normal del sólido en estado de equilibrio, la cual divide á éste en dos partes M y N; supondremos que la fuerzas exteriores, que obran sobre la parte N del sólido, se reducen á un par (P,—P) cuyo plano es paralelo al de simetría; ó á una sola fuerza F dirigida en el plano de simetría paralelamente á la seccion ab.

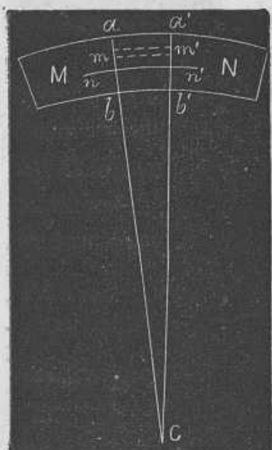

Fig. 243.

Consideremos por separado la parte N del sólido, y tratémosla como si fuera un sólido invariable (542). En él se equilibran las fuerzas que le están aplicadas, es decir, el par (P,—P), ó la fuerza F, y las diversas fuerzas molecualres que provienen de la accion de la parte M del sólido sobre la N que consideramos. Actuando cada una de estas últimas fuerzas sobre una de las moléculas de M próximas á la seccion *ab*, puede descomponerse en dos, una dirigida perpendicularmente á *ab*, y la otra situada en el plano de esta seccion. De las condiciones de equilibrio de un sólido invariable se deduce:

1.° Que la suma de las componentes de las acciones moleculares normales á *ab*, ejercidas por M sobre N, es nula; porque la suma de las proyecciones de la fuerza F, ó del par (P,—P), sobre una perpendicular á *ab*, es nula por la situacion que les hemos supuesto.

2.° La suma de las componentes paralelas á *ab*, de estas mismas acciones moleculares, es nula, si las fuerzas exteriores que obran sobre N se reducen á un par (P,—P); esta suma es igual á la resultante F de dichas fuerzas, si tienen una sola resultante, puesto que hemos supuesto que la resultante F está dirigida paralelamente á *ab*.

3.° Por fin, la suma de los momentos de las componentes normales á *ab* de las acciones moleculares, tomadas con respecto á un eje cualquiera, trazado en el plano *ab* perpendicularmente al de simetría, es igual al momento de la fuerza F, ó al del par (P,—P); con respecto al mismo eje.

545. Para deducir de estas tres proposiciones, las consecuencias á que dan lugar y que nos han de conducir á la determinacion de la forma de equilibrio del sólido prismático de que se trata, consideremos una segunda seccion *a'b'* infinitamente próxima á la *ab*, y concibamos que la porcion *aba'b'* del sólido está dividida en una infinidad de prismas elementales que tengan sus aristas dirigidas perpendicularmente á *ab*. Estos prismas elementales pueden considerarse como otras tantas fibras, cuya reunion constituye el sólido entero, y que en toda su longitud son

paralelas á las aristas; pero estas porciones de las fibras, comprendidas entre las secciones ab y $a'b'$, unas se alargan, y otras se acortan, al deformarse el sólido; porque si todas se alargasen ó todas se acortasen, la suma de las componentes normales á ab de las acciones moleculares ejercidas por M sobre N, no podria ser nula como lo exige la primera de las tres proposiciones anteriores.

Por lo tanto, entre las fibras que se alargan y las que se acortan, debe haber algunas que ni se alarguen ni se acorten: estas fibras intermedias que no varian de longitud á pesar de la deformacion del sólido, se llaman *fibras neutras*. Admitiremos que los puntos en que las fibras neutras encuentran al plano de la seccion ab están situados en una recta XX′ (fig. 244), perpendicular al plano de simetría; tomaremos esta recta y otra YY′, interseccion del plano ab con el de simetría, por ejes coordenados en el plano de la seccion ab, y x é y serán las coordenadas de un punto cualquiera de esta seccion con respecto á estos ejes.

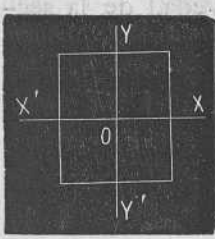

Fig. 244.

Sean nn' (fig. 243), la fibra neutra situada en el plano de simetría, ρ el radio de curvatura n C de la fibra correspondiente al punto n, despues que el sólido haya sufrido la deformacion; consideremos un elemento mm' de una fibra cualquiera que encuentra á la seccion ab en el punto $m(x,y)$, y cuya seccion trasversal tiene por área ω; la longitud primitiva de este elemento era nn', por ser los planos ab, $a'b'$ paralelos; su longitud despues de la deformacion, se deducirá de la proporcion:

$$\rho:\rho+y::nn':mm'=nn'\frac{\rho+y}{\rho};$$

el aumento de longitud del elemento mm' es en consecuencia $nn'\frac{y}{\rho}$ de manera, que $\frac{y}{\rho}$ es la relacion $\frac{i}{l}$ (543) entre su aumento de longitud y su longitud primitiva, y si llamamos f á la fuerza normal á *ab*, que produce el aumento de longitud del elemento *mm'*, tendremos:

$$f = \mathrm{E}\omega\frac{y}{\rho}.$$

La fuerza f es una de las componentes normales á *ab* de las acciones moleculares ejercidas por la parte M sobre la N: la suma de estas componentes será

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\Sigma\omega y;$$

esta suma debe ser cero por lo dicho anteriormente, de modo, que

$$\Sigma\omega y = 0;$$

lo que nos dice, que el centro de gravedad de la seccion *ab* está situado en el eje XX', y como por la simetría se encuentra tambien en el eje YY', estará necesariamente en el punto O de interseccion de los dos ejes; luego la fibra neutra, situada en el plano de simetría, pasa por el centro de gravedad de una seccion normal cualquiera *ab*.

546. De la tercera de las proposiciones enunciadas anteriormente se deduce, que la suma de los momentos de las fuerzas análogas á la f, con respecto al eje XX', es igual al momento de la fuerza F, con respecto á este eje, ó al momento del par (P,—P); el valor de esta suma de momentos es

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\Sigma\omega y^2;$$

y se llama *momento de elasticidad.* Igualando el momento de elasticidad al de la fuerza F, con respecto á XX' ó al del par (P,—P) obtendremos una ecuacion que nos dará el radio de curvatura ρ de la fibra neutra *nn'*, en el punto *n*, y que por consiguiente determinará la forma de esta fibra en toda su longintud, que es lo que buscábamos. Si la fibra neutra está referida á ejes coordenados rectangulares trazados en su plano, el radio de curvatura ρ es

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

pero por el supuesto, la deformacion del sólido es muy pequeña, de modo, que si tomamos por eje de las x la línea recta segun la cual está dirigida al principio la fibra neutra, $\frac{dy}{dx}$ tangente del ángulo que la tangente á la curva forma con el eje de las x, es una cantidad pequeña, cuyo cuadrado podemos despreciar con relacion á la unidad, y el valor anterior de ρ se convierte en

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

y haciendo $\mu = \Sigma\omega y^2$, el momento de elasticidad que podemos designar por M, será

$$M = E\mu \frac{d^2y}{dx^2}.$$

La cantidad $\mu = \Sigma\omega y^2$, depende únicamente de la forma de la seccion trasversal *ab* del sólido; se la puede determinar tomando por elemento ω de esta seccion el rectángulo $dx\,dy$, de modo que será

$$\mu = \int\int y^2 dx dy,$$

los límites de esta integral serán los correspondientes á la forma del contorno de la seccion *ab*. Esta cantidad es lo que se llama *momento de inercia* de la seccion *ab* con respecto al eje XX'; pronto veremos lo que significa este momento cuando expongamos la teoría general de los momentos de inercia; por ahora daremos á conocer los valores de μ, en varios casos particulares, y al tratar de dicha teoría, veremos cómo se determinan.

Si *ab* es un rectángulo de base *b* y altura $2a$, siendo la base paralela á XX', se tiene

$$\mu=\frac{2}{3}ba^3=\frac{1}{3}Sa^2,$$

designando por S el área del rectángulo. Si *ab* es un triángulo isósceles de base *b* y altura *a*, siendo la base paralela á XX', será

$$\mu=\frac{1}{36}ba^3=\frac{1}{18}Sa^2,$$

representando por S el área del triángulo. Si *ab* es un círculo de radio *r*,

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi r^4=\tfrac{1}{2}Sr^2.$$

Finalmente, si *ab* es el espacio comprendido entre dos circunferencias de círculo concéntricas, de radios *r* y *r'*,

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi(r^4-r'^4)=\tfrac{1}{2}S(r^2+r'^2).$$

Aplicaciones de esta teoría. Equilibrio de los sólidos prismáticos empotrados.

547. Supongamos que el sólido está empòtrado por un extremo (fig. 245), de manera que no sólo el extremo O de la fibra neutra está fijo, sino que la tangente á esta fibra en el punto O no puede cambiar de direccion, y que por el otro extremo obra la fuerza F perpendicularmente á la direccion primitiva OX de la fibra neutra; para el equilibrio debemos expresar que el momento de la fuerza F con respecto al punto *n*, en que la fibra neutra corta al plano *ab* de una seccion trasversal cualquiera, es igual al mo-

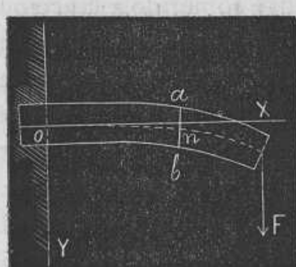

Fig. 245.

mento de elasticidad del prisma con respecto á la misma seccion.

Sean x é y las coordenadas del punto n con respecto á los ejes OX, OY; l la longitud primitiva del prisma, longitud que sin error sensible podemos tomar por la abscisa del punto de aplicacion de la fuerza F; tendremos, observando que la distancia del punto de aplicacion de F al punto n es $l-x$,

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2}=F(l-x);$$

integrando esta ecuacion, y teniendo presente que para $x=0$, son $y=0$, y $\frac{dy}{dx}=0$, resultará

$$y=\frac{F}{E\mu}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right);$$

que es la ecuacion de la curva formada por la fibra neutra en virtud de la accion de la fuerza F. La flecha f, que marca la flexion producida por la accion de la fuerza F, es decir, la cantidad que el extremo de la fibra neutra se separa del eje OX, se obtiene haciendo $x=l$ en el valor de y; lo cual, verificados los cálculos, dará

$$f=\tfrac{1}{3}\,\frac{Fl^3}{E\mu}.$$

548. Supongamos que encontrándose el prisma en las mismas condiciones, está únicamente sometido á la accion de su propio peso, que obra paralelamente al eje OY. La resultante de los pesos de todas las moléculas de la parte del prisma situada á la derecha de la seccion ab, tiene por valor $p(l-x)$, designando por p el peso de la unidad de longitud del prisma, y está aplicada en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las bases del prisma, separado del total por la seccion ab; el momento de este peso con respecto al punto n es igual á $\frac{1}{2}p(l-x)^2$; y se tendrá que la ecuacion de equilibrio es

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2}=\tfrac{1}{2}p\,(l-x)^2;$$

integrándola, y observando que $y=0$, y $\frac{dy}{dx}=0$, para $x=0$, se obtendrá la siguiente ecuacion de la curva, formada por la fibra neutra,

$$y=\frac{p}{2E\mu}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right).$$

La flecha producida por la accion del peso del prisma se obtiene, como en el caso anterior, haciendo $x=l$, y es

$$f=\frac{pl^4}{8E\mu}.$$

549. Si el prisma, siempre en las mismas condiciones que en los casos anteriores, está sometido á la vez á su propio peso y á una fuerza F aplicada á su extremo, y que obra en el mismo sentido que el peso, es claro que se obtendrá la ecuacion de la curva que forma la fibra neutra, igualando y á la suma de los valores que acabamos de encontrar para esta ordenada en los dos casos anteriores. La flecha f será igualmente la suma de las flechas correspondientes á estos dos casos.

Equilibrio de un sólido prismático retenido por dos apoyos y sometido trasversalmente á una fuerza, ó á dos, teniendo ó no en cuenta su propio peso.

550. Supongamos un prisma que descansa simplemente sobre dos apoyos M y N (fig. 246), y sometido á la accion de una fuerza F dirigida perpendicularmente á su longitud. Las reacciones paralelas Q y Q', que los apoyos M y N ejercen sobre el sólido, compuestas entre sí, en el supuesto de ser éste invariable de forma, deben evidentemente tener por resultante una fuerza igual y directamente

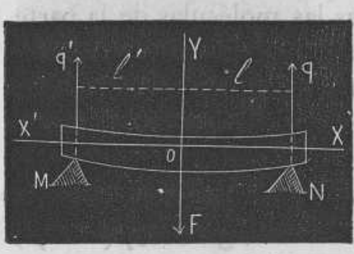

Fig. 246.

opuesta á la fuerza F; los valores de estas reacciones son

$$Q=\frac{Fl'}{l+l'},\quad Q'=\frac{Fl}{l+l'},$$

designando por l y l' las distancias de los puntos M y N á la vertical OY, ó bien, lo que con poca diferencia es lo mismo, las longitudes de las dos partes del sólido situadas á derecha é izquierda del punto de aplicacion O de la fuerza F. Ocupémonos primero de la parte del sólido situada á la derecha del punto O, y que está sometida en su extremo á la accion de la fuerza Q, tendremos para un punto cualquiera de la fibra neutra de esta parte, referida á los ejes OX, OY, la ecuacion de equilibrio

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2}=Q(l-x)$$

que integrada, teniendo en cuenta que $y=0$, para $x=0$, dará

$$y=\frac{Q}{E\mu}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Cx;$$

en la que la constante C es el valor de $\frac{dy}{dx}$, para $x=0$.

Para la otra parte del sólido referido á los mismos ejes, obtendremos del mismo modo

$$y'=\frac{Q'}{E\mu}\left(\frac{l'x'^2}{2}-\frac{x'^3}{6}\right)+C'x'.$$

Para determinar las constantes C y C' debemos observar que $C=-C'$; y ademas que para $x=l$, y $x'=l'$, debe ser $y=y'$; introduciendo estas condiciones en las ecuaciones, y poniendo por Q y Q' sus valores, obtendremos

$$C=\frac{Fll'(l-l')}{3E\mu(l+l')};$$

con lo cual, recordando que $C'=-C$, son completamente conocidas las dos ecuaciones anteriores, que determinan la forma de la curva de cada una de las partes de la fibra neutra.

551. Si en lugar de una sola fuerza F, que obra en un punto cualquiera del prisma sostenido en sus extremos

por dos apoyos, hubiese dos fuerzas iguales F y F′, paralelas y aplicadas en dos puntos equidistantes del medio del prisma, estando ademas estas dos fuerzas dirigidas perpendicularmente á su longitud, es claro que las reacciones Q y Q′ de los dos apoyos serian iguales á cada una de las fuerzas F y F′ de que se trata. Para toda la parte del prisma comprendida entre los puntos de aplicacion de estas fuerzas F y F′, el momento de elasticidad debe ser igual al momento del par formado por la fuerza F y la reaccion Q, situadas á un mismo lado de la seccion trasversal, con respecto al cual se considera el momento de elasticidad; como el momento de este par es constante, y el valor del momento de elasticidad es, segun sabemos (546), $\frac{E\mu}{\rho}$, tendremos que el radio de curvatura ρ de la fibra neutra es constante en toda la parte comprendida entre los dos puntos de aplicacion de las fuerzas F y F′; es decir, que esta parte de la fibra neutra afecta la forma de un arco de círculo; en cuanto á las otras dos partes del prisma, situadas fuera de los puntos de aplicacion de las fuerzas F y F′, se determinará fácilmente su forma, por el procedimiento ántes expuesto, y expresando que se unen con la parte intermedia en los puntos de aplicacion de las fuerzas F y F′.

552. Si el prisma, descansando sobre dos apoyos de la misma altura, está sometido únicamente á su propio peso, las reacciones de los apoyos son iguales á $\frac{pl}{2}$, siendo p el peso de la unidad de longitud del prisma y l la longitud total. Tomando por orígen de cordenadas el punto medio de la fibra neutra, y expresando que la parte del prisma situada á la derecha de una seccion trasversal cualquiera, está en equilibrio bajo la accion de su propio peso, y de la fuerza $\frac{pl}{2}$ aplicada verticalmente en su

extremo de abajo á arriba, deduciremos fácilmente que la ecuacion de equilibrio es

$$E\mu \frac{d^2y}{d'x^2} = -\tfrac{1}{2}p\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + \tfrac{1}{2}pl\left(\frac{l}{2}-x\right) = \tfrac{1}{2}p\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right);$$

de la que resulta integrando

$$y = \frac{p}{48\,E\mu}(3l^2x^2 - 2x^4),$$

teniendo en cuenta que $y=0$ y $\frac{dy}{dx}=0$, para $x=0$, en razon á la simetría.

Todas las cuestiones de este género que se pueden presentar, se resuelven de un modo análogo.

LECCION XLV.

Resistencia de los sólidos á la ruptura. Seccion de ruptura.—Sólido de igual resistencia y su forma de equilibrio cuando la fuerza aplicada es menor que la que determina la ruptura.—Dinamómetro de Poncelet.—Acciones mútuas de dos sólidos que se tocan.—Rozamiento y sus leyes experimentales. Coeficiente de rozamiento. Angulo de rozamiento.

Resistencia de los sólidos á la ruptura. Seccion de ruptura.

553. Para el estudio de la resistencia de los sólidos naturales, que se emplean en las construcciones, en las máquinas y en la industria, es muy importante la determinacion de lo que en la leccion anterior hemos llamado límite de elasticidad, y de la fuerza, que pasando de este límite, determina la ruptura del sólido natural.

Al efecto, sea R la fuerza capaz de romper un prisma cuya seccion trasversal tenga por área la unidad de superficie, obrando en uno de sus extremos y en sentido de su longitud, de modo que tienda á estirarlo; la fuerza capaz de romper una fibra de seccion ω, actuando de la misma manera, será igual á $R\omega$. Para que un prisma, sometido á la accion de las fuerzas que le hacen doblar trasversalmente, no se rompa en ninguna de sus partes, es necesario que para una fibra cualquiera, la fuerza f (545), sea menor que $R\omega$; es decir, que

$$f = E\omega\frac{y}{\rho} < R\omega, \quad \text{ó} \quad E\frac{y}{\rho} < R;$$

para satisfacer á esta condicion, basta evidentemente que quede satisfecha en cada seccion trasversal para la fibra correspondiente al mayor valor de la ordenada y; si llamamos Y á este mayor valor, deberá verificarse para una seccion cualquiera del prisma, que

$$E\frac{Y}{\rho}<R.$$

El momento M de elasticidad tiene por valor

$$M=\frac{E\mu}{\rho},$$

despejando en esta igualdad $\frac{E}{\rho}$, y sustituyendo en la desigualdad anterior, tomará la forma

$$M<\frac{R\mu}{Y}.$$

Para que el prisma que consideramos no se rompa en ninguna de sus partes, en virtud de la accion de las fuerzas que le están aplicadas, basta que la condicion anterior quede satisfecha para la seccion á que corresponde el mayor valor del momento de elasticidad M; y esta seccion es por la que el prisma principiaria á romperse, si las fuerzas que le hacen doblar fuesen suficientemente grandes: por esta razon se le da el nombre de *seccion de ruptura*.

Fácilmente podemos encontrar, en cada uno de los casos estudiados en la leccion anterior, la seccion para la cual el momento de elasticidad es el mayor, ó sea la seccion de ruptura; en efecto, sabemos que para una seccion cualquiera el momento de elasticidad es igual al momento de la resultante F de las fuerzas aplicadas á la parte del sólido que se encuentra á un lado de la seccion, tomado con relacion al centro de gravedad de la misma seccion, ó bien al momento del par (P,—P), á que se reducen estas fuerzas (546). En el caso de que un prisma empotrado por uno de sus extremos, esté sometido á la accion de su propio peso, ó á la de una fuerza aplicada en el otro extremo, la seccion de ruptura es la que se encuentra tocando á la parte empotrada, para la cual se tiene $x=0$. En el caso de un prisma retenido en dos apoyos y sometido á una fuerza que obra en un punto cualquiera del prisma, la seccion de ruptura es la que contiene el punto de aplicacion de esta fuerza.

Sólido de igual resistencia y su forma de equilibrio cuando la fuerza que se le aplica es menor que la que determina la ruptura.

554. Lo que acabamos de exponer puede aplicarse, sin error sensible, á un sólido no prismático prolongado, cuyas secciones trasversales varien muy poco de un punto á otro, con tal que este sólido sea simétrico con respecto á un plano, y que la fibra neutra situada en el plano de simetría sea rectilínea, cuando el sólido no haya sufrido deformacion alguna; debe tenerse presente la variacion de dimensiones de las secciones trasversales, que son constantes en el prisma que ántes hemos estudiado. Se llama *sólido de igual resistencia* á un sólido que cumple con todas estas condiciones, y para el que se verifica en todas las secciones, que

$$M=\frac{R\mu}{Y};$$

la cual podrá cumplirse eligiendo convenientemente las fuerzas que le estén aplicadas.

Particularmente consideremos un sólido empotrado por un extremo, y sometido en el otro á la accion de una fuerza F dirigida en el plano de simetría perpendicularmente á su longitud (fig. 245). Supongamos que la seccion trasversal sea un rectángulo cuyo lado b, perpendicular al plano de simetría, conserva el mismo valor en toda su longitud, miéntras que el lado $2z$ paralelo á este plano varía de una seccion á otra. El momento de inercia para una seccion de esta forma, es (546).

$$\mu = \frac{2}{3} b z^3.$$

ademas $Y = z$; por lo que

$$M = \frac{R\mu}{Y} = \frac{2}{3} R b z^2.$$

Por otra parte sabemos, que el momento de la fuerza F con respecto al centro de la seccion que consideramos es $F(l - x)$, siendo l la longitud total del sólido, y x la abscisa del centro de la seccion de que se trata, y como este momento es igual al de elasticidad M del sólido relativo á dicha seccion, se sigue que si el sólido ha de ser de igual resistencia, es necesario que cualquiera que sea el valor de x, se verifique la relacion

$$F(l - x) = \frac{2}{3} R b z^2,$$

para un valor conveniente de la fuerza F. Despejando z^2 resulta

$$z^2 = \frac{3}{2Rb} F(l - x) = \frac{3l}{2Rb} F \frac{l - x}{l},$$

y haciendo $\frac{3lF}{2Rb} = a^2$, será

$$z^2 = \frac{a^2}{l}(l - x);$$

esta ecuacion expresa de qué modo debe variar el espesor $2z$, con la abscisa x del punto á que corresponde: vemos, pues, que el plano de simetría debe cortar la superficie del sólido, ántes de la deformacion, segun una parábola de segundo grado que tenga la fibra neutra por eje, y el punto de aplicacion de la fuerza F por vértice; el mayor espesor del sólido que corresponde á la extremidad empotrada, tiene por valor $2a$.

555. Para determinar la forma que toma un sólido de igual resistencia, cuando está en equilibrio, y la fuerza F

tiene un valor cualquiera, inferior al que determina la ruptura del sólido, tenemos la ecuacion

$$E\mu\frac{d^2y}{dx^2}=F(l-x);$$

en este caso μ no es constante, sino que varía de una seccion trasversal del sólido á otra. Haciendo uso de la relacion anterior entre z y x, deduciremos

$$\mu=\frac{2}{3}bz^3=\frac{2}{3}ba^3\left(\frac{l-x}{l}\right)^{\frac{3}{2}};$$

sustituyendo este valor de μ en la precedente, obtendremos la ecuacion diferencial de la curva que forma la fibra neutra, que será

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3Fl^{\frac{3}{2}}}{2Eba^3}\frac{1}{\sqrt{l-x}}.$$

Integrando esta ecuacion, teniendo presente que para $x=0$, son $y=0$, y $\frac{dy}{dx}=0$, resultará

$$y=2\frac{Fl^{\frac{3}{2}}}{Eba^3}(l-x)^{\frac{3}{2}}+3\frac{Fl^2x}{Eba^3}-2\frac{Fl^3}{Eba^3};$$

que es la ecuacion finita de la curva, segun la cual está dirigida la fibra neutra. Haciendo en ella $x=l$, tendremos el valor de la flecha producida por la accion de la fuerza F, que es

$$f=\frac{Fl^3}{Eba^3};$$

esta flecha es doble de la que la misma fuerza produciria si el sólido fuese prismático y tuviese en toda su longitud una seccion trasversal igual á la del extremo empotrado; porque poniendo por μ su valor $\frac{2}{3}ba^3$, en la fórmula $f=\frac{1}{3}\frac{Fl^3}{E\mu}$, que da la flecha en aquel caso, resulta

$$f=\frac{1}{2}\frac{Fl^3}{Eba^3}.$$

Es claro, que tanto la ley de la variacion del espesor del sólido desde un extremo á otro, para que sea de igual resistencia, como el valor de la flecha producida por la accion de una fuerza F aplicada al extremo libre, perpendicularmente á la longitud del sólido y en el plano de simetría, pueden aplicarse, sin gran error, á un sólido prolongado, cuyas secciones trasversales no tengan sus centros de gravedad en línea recta ántes de la deformacion, con tal que la línea de estos centros se aproxime mucho á una recta. En este caso, de todos los resultados obtenidos, sólo la ecuacion que determina la forma de la fibra neutra despues de la deformacion, es lo que no podrá aplicarse.

Dinamómetro de Poncelet.

556. El dinamómetro es un aparato destinado á medir de la intensidad ó energía de las fuerzas. Hay muchas clases de dinamómetros, todos fundados ordinariamente en la mayor ó menor flexion que producen las fuerzas que obran sobre ellos.

El dinamómetro de Poncelet (fig. 247), fundado en la teoría del sólido de igual resistencia, se compone de dos láminas de acero, cuyas extremidades están unidas por medio de otras articuladas AA', BB'. Cada una de las mitades MA, MB, NA', NB' de las primeras tiene la forma del sólido de igual resistencia arriba descrito. Conforme á la observacion hecha,

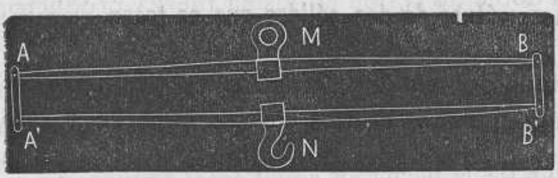

Fig. 247.

no es necesario que estén en línea recta los centros de gravedad de las diversas secciones trasversales, al contrario, se las construye de modo que el lado interior de su contorno esté en línea recta, y el exterior esté formado por dos arcos de parábola, que tengan por vértices respectivos los extremos de la lámina y el costado inferior por eje comun; fácilmente se comprende que para esto debe decrecer el espesor de la lámina desde el medio hácia cada una de las extremidades, segun la ley ántes encontrada para un sólido de igual resistencia. Cuando el dinamómetro está en equilibrio bajo la accion de fuerzas iguales y contrarias, aplicadas en los puntos medios M y N de las láminas, y que tienden á separar estos puntos entre sí, es claro, que cada una de las cuatro partes MA, MB, NA′, NB′, de ellas, se encuentra en las mismas condiciones que el sólido empotrado por uno de sus extremos, que hemos considerado al principio; el incremento total que experimenta la distancia entre los puntos medios M y N de las dos láminas, es proporcional á la intensidad ó energía de las fuerzas que obran sobre estos dos puntos; y es doble del que resultaria, si las láminas fueran prismas del espesor que tienen en sus puntos medios. El empleo de láminas de caras parabólicas, tales como las acabamos de describir, en vez de láminas prismáticas, presenta la ventaja de duplicar la sensibilidad del aparato, sin disminuir su resistencia á la ruptura.

Acciones mútuas de dos sólidos que se tocan.

557. Cuando dos sólidos naturales, en equilibrio, se tocan por uno ó muchos puntos de sus superficies, las moléculas de cada uno de los dos sólidos, situadas en la proximidad de los puntos de contacto, ejercen acciones sobre las del otro sólido, que se encuentran igualmente en la proximidad de dichos puntos. No es posible considerar separadamente cada una de estas acciones molecu-

lares, para hacerlas entrar con todas las demas fuerzas en las ecuaciones que expresan el equilibrio de los dos sólidos; por lo que, las consideraremos en conjunto reemplazándolas por un pequeño número de fuerzas, capaces de producir el mismo efecto. Vamos á ver qué idea nos podemos formar de estas últimas fuerzas, que representan las acciones que los dos sólidos ejercen el uno sobre el otro.

Supongamos un sólido pesado, como una bala de hierro, por ejemplo, colocada sobre una mesa que no toca más que por un sólo punto. En realidad la bala toca á la mesa en gran número de puntos, que constituyen una faceta ó pequeña cara de contacto, á causa de la deformacion que experimentan la bala y la mesa; una pequeña parte de la superficie de la bala se aplasta ligeramente y se adapta sobre una parte correspondiente de la superficie de la mesa, que se hace ligeramente cóncava por la presencia de la bala; pero prescindiremos de esta deformacion y supondremos el contacto de la bala con la mesa por un sólo punto, como si fuera simplemente el de una superficie esférica con un plano. Estando la bala en equilibrio sobre la mesa, cuya superficie supondremos horizontal, es claro que su peso queda equilibrado por el conjunto de las acciones que sus moléculas experimentan de parte de la mesa, en la proximidad del punto de contacto; estas fuerzas moleculares aplicadas á la bala pueden evidentemente reemplazarse por una fuerza única, igual y contraria al peso de la bala, y por consiguiente dirigida verticalmente de abajo á arriba: esta fuerza única, capaz de producir sobre la bala el mismo efecto que las acciones moleculares de que se trata, constituye lo que se llama la presion de la mesa sobre la bala. Siendo las acciones que las moléculas de la bala ejercen sobre la mesa respectivamente iguales y contrarias á las que experimentan de parte de estas mismas moléculas, claro es que se las puede igualmente sustituir por una fuerza única, igual y contraria á la anterior; esta segunda fuerza constituye lo que se llama la presion de la bala sobre la mesa. Así, en el ejemplo que acabamos de considerar, cada uno de los cuerpos ejerce sobre el otro una presion dirigida segun la normal comun á sus superficies, trazada por sus puntos de contacto: estas dos presiones son iguales y de sentidos contrarios, como las acciones que se desarrollan entre dos moléculas cualesquiera.

558. Si el cuerpo pesado descansa sobre una mesa, cuya superficie toca por muchos puntos, se puede considerar que en cada uno se verifica lo que hemos dicho para un sólo punto de contacto; el cuerpo experimenta de parte de la mesa, en cada uno de sus puntos de contacto, una presion dirigida verticalmente de abajo á arriba, y lo mismo se puede decir que el cuerpo ejerce sobre la mesa, en estos diferentes puntos, presiones iguales y contrarias á las precedentes. Si el cuerpo toca á la superficie de la mesa por una cara plana de extension determinada, puede considerarse á cada punto de esta superficie como un punto de contacto; en tal caso, el cuerpo experimenta de parte de la mesa, en cada punto de la superficie de contacto una presion dirigida verticalmente de abajo á arriba, y ejerce al mismo tiempo sobre la mesa, en este punto, una presion igual y contraria á la anterior.

Rozamiento y sus leyes experimentales. Coeficiente de rozamiento. Angulo de rozamiento.

559. Un cuerpo pesado se encuentra en el estado de equilibrio que acabamos de considerar, es decir, apoyado sobre una mesa cuya superficie horizontal toca en número determinado de putos; supongamos que se le aplica una fuerza de traccion F, en direccion horizontal, que

tiende á hacerle resbalar sobre la superficie de la mesa. Si esta fuerza es muy pequeña, no producirá efecto alguno; el cuerpo permanecerá inmóvil lo mismo que si la fuerza no actuase. Si se aumenta progresivamente la intensidad de la fuerza F, llegará pronto un instante en que el equilibrio dejará de existir y el cuerpo principiará á moverse. Para que continúe existiendo el equilibrio despues de la aplicacion de la fuerza F, miéntras ésta no tenga intensidad para poner en movimiento el sólido, es necesario que se desenvuelvan nuevas acciones entre las moléculas del cuerpo y las de la mesa, que se opongan á que la fuerza F produzca su efecto. Estas nuevas acciones moleculares, nulas al principio, cuando el cuerpo no estaba sometido más que á la accion de su propio peso, aumentan progresivamente al mismo tiempo que la fuerza de traccion F, á la cual equilibran constantemente; pero no pueden aumentar más allá de un cierto límite; de manera, que si la fuerza F, creciendo contínuamente, las hace llegar á este límite, el menor incremento que experimente la fuerza F, produce el resbalamiento del cuerpo. El conjunto de las acciones moleculares que se desarrollan de este modo, y que se oponen al resbalamiento del cuerpo, considerado en el instante en que estas acciones llegan al límite de que no pueden pasar, constituye lo que se llama resistencia al resbalamiento ó simplemente *rozamiento*; estas expresiones designan en particular una fuerza única, capaz de reemplazar á las acciones moleculares de que se trata, fuerza que está dirigida en el plano horizontal que forma la superficie de la mesa, y en sentido contrario á la direccion del movimiento del cuerpo sobre dicha superficie. La intensidad de la resistencia que llamamos rozamiento, es evidentemente igual á la de la fuerza de traccion F, en el momento en que es suficientemente grande, para que cediendo á su accion, el cuerpo principie á resbalar.

560. El estudio experimental del rozamiento fué hecho por Coulomb, en el año 1781, del cual dedujo las siguientes leyes, que son las que todavía se aplican: Primera, *el rozamiento es proporcional á la presion*. Segunda, *el rozamiento es independiente de la extension de las superficies en contacto*. Tercera, *el rozamiento depende de la naturaleza de las superficies frotantes*. Para deducirlas empleó una caja en la que ponia pesos en mayor ó menor cantidad, y encontró que la fuerza de traccion necesaria para producir el resbalamiento sobre la superficie horizontal en que se apoyaba, variaba con arreglo á dichas leyes.

Sea N la presion ejercida por el cuerpo que se considera sobre la superficie en que se le tratra de hacer resbalar; las leyes anteriores prueban que el rozamiento que se desarrolla bajo la accion de la presion N, puede representarse por fN, siendo f un coeficiente que depende únicamente de la naturaleza de las superficies en contacto. Este coeficiente f, que es la relacion del rozamiento fN á la presion N, se llama *coeficiente de rozamiento*.

561. El rozamiento es el resultado de la deformacion que experimentan á la vez, el cuerpo que resbala, y aquel sobre cuya superficie resbala, por la accion de la presion mútua N que se ejerce por el uno sobre el otro: las superficies en contacto no conservan sus formas geométricas, y la resultante de las acciones moleculares desarrolladas en los puntos de contacto de las superficies, no sigue la direccion de la normal, sino una direccion inclinada respecto de estas superficies.

Ademas de las tres leyes anteriores, se verifica la siguiente, que sólo es aproximada: *el rozamiento es independiente de la velocidad del resbalamiento*; es decir, que el coeficiente f de rozamiento es constante cualquiera que sea la velocidad. Pero recientes observaciones han demostrado que para muy grandes velocidades el valor del coeficiente f disminuye sensiblemente; se sabe hace mucho tiempo, que f es mayor al partir el cuerpo, que cuando el movimiento está ya establecido; por cuyas razones, la ley de que tratamos es sólo aproximada, y el coeficiente f es una funcion de la velocidad v del móvil, y el valor de esta funcion disminuye á medida que v aumenta; pero esta disminucion es poco sensible para grandes variaciones de la velocidad v; por consiguiente, se han determinado los valores del coeficiente f en dos casos: 1.°, al empezar el movimiento; y 2.°, durante la marcha ordinaria del móvil, sin tener en cuenta la velocidad.

562. Apliquemos las nociones anteriores al caso de dos sólidos S y S′ (fig. 248), que solo tengan un punto de contacto C; bajo la accion de las fuerzas á que los dos sólidos están sometidos se desenvuelven en C, no sólo presiones normales N y N′, que se oponen á que los sólidos penetren el uno en el otro, sino tambien reacciones tangenciales R y—R, que tienden á oponerse á que resbalen el uno sobre el otro; estas reacciones R y—R, iguales y contrarias la una á la otra, como las presiones normales N y N′, no pueden tener una intensidad mayor que el valor fN del rozamiento correspondiente á dichas presiones, siendo f el coeficiente de rozamiento propio de la naturaleza de las superficies de los sólidos S y S′, pudiendo tener una intensidad cualquiera comprendida entre 0 y fN, y una direccion cualquiera en el plano tangente comun, en C, á los dos sólidos.

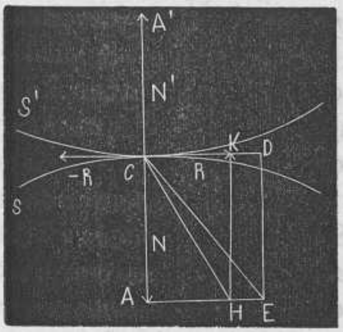

Fig. 248.

Sea $CA=N$ la recta que representa la presion del sólido S′ sobre el sólido S; tomemos sobre la direccion de la reaccion tangencial R, que el sólido S sufre tambien por la accion de S′, una longitud $CD=fN$, que representa el rozamiento de estos sólidos, y construyamos el rectángulo CDEA, sobre las líneas CD y CA. Construyamos, del mismo modo, el rectángulo CKHA en el cual el lado CK representa la reaccion R, la diagonal CH del segundo rectángulo representa la resultante de las dos acciones normal y tangencial que el sólido sufre de S′; se puede considerar á esta resultante como la accion total que el sólido S′ ejerce sobre S. Decir que el valor de la reaccion KC no puede exceder á fN, es evidentemente lo mismo que decir, que el ángulo HCA no puede ser mayor que ECA; este ángulo ECA, que llamaremos α, se determina por la relacion

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{EA}{CA}=\frac{fN}{N}=f;$$

por lo tanto, depende sólo del coeficiente de rozamiento, ó sea de la naturaleza de las superficies de los dos sólidos en la proximidad del punto C, y se le da el nombre de *ángulo de rozamiento*. Así la accion total CH, que el sólido S′ ejerce sobre el sólido S, forma precisamente con la normal CA un ángulo menor que el ángulo de rozamiento. Supongamos que la recta CE gira alrededor de la normal CA, engendrará una superficie cónica de revolucion que tendrá dicha normal por eje: podremos enunciar de otro modo la condicion que acabamos de indicar, diciendo, que la accion CH del sólido S′ sobre el S en el punto C, está precisamente dirigida en el interior de este cono, cuyo ángulo en el vértice depende únicamente de la naturaleza de las superficies de los sólidos. Siendo la accion total que el sólido S ejerce sobre S′, igual y contraria á la que él experimenta, esta accion de S sobre S′ debe estar igualmente dirigida en el interior de un cono igual al anterior, que tenga el vértice en C y su eje coincida con CA', prolongacion de CA. Los dos conos de que acabamos de hablar son evidentemente las dos hojas de una misma superficie cónica, que tenga la normal comun ACA' por eje, el punto C por vértice y el ángulo de rozamiento α por ángulo de las generatrices con el eje.

563. Cuando dos sólidos tienen más de un punto de contacto, se puede repetir para cada uno de ellos lo que acabamos de decir para uno sólo: las acciones iguales y contrarias que los dos sólidos ejercen el uno sobre el otro en cada uno de los puntos de contacto, están necesariamente dirigidas por dentro de las dos hojas opuestas de una superficie cónica, que tenga por eje la normal comun en el punto de contacto, por vértice este mismo punto, y por ángulo de las generatrices con el eje, el de rozamiento correspondiente.

El ángulo de la superficie cónica, en cuyo interior deben estar necesariamente dirigidas las acciones mútuas de los dos sólidos en cada uno de sus puntos de contacto, tiene un valor mayor ó menor, segun que el coeficiente de rozamiento correspondiente á las superficies tangentes en este punto, es tambien mayor ó menor. Si se supone que el coeficiente de rozamiento sea nulo, la superficie cónica se reducirá á su eje, y por consiguiente, las acciones mútuas en los dos sólidos no podrán tener más que una sola direccion, que es la de la normal comun á sus superficies, trazada por el punto de contacto.

Este caso ideal es el que hemos supuesto, cuando hemos considerado el equilibrio de un punto material sujeto á permanecer sobre una curva, ó sobre una superficie dadas.

564. El rozamiento es útil en ciertos casos y perjudicial en otros. Es útil para dar estabilidad á las construcciones, para proporcionar á los animales puntos de apoyo que les permitan marchar en la superficie de la

Tierra; para dar á las ruedas de una locomotora un punto de apoyo análogo sobre los carriles, para parar las máquinas por medio de frenos; para realizar ciertas trasmisiones de movimiento, etc. El rozamiento es generalmente perjudicial en las máquinas, porque absorbe inútilmente una porcion del trabajo motor.

En el primer caso se procura aumentar el rozamiento, y en el segundo disminuirlo. El estudio de los valores del coeficiente f, contenidos en la tabla que termina esta leccion, da sobre este particular noticias muy preciosas. De ella se deduce, por ejemplo, la grande influencia de las sustancias grasas interpuestas entre las superficies frotantes. Para disminuir el rozamiento que se desarrolla en las máquinas, debe cuidarse de engrasar los apoyos sobre que giran los árboles de las ruedas, y verter aceite en las diversas articulaciones móviles. Un jugo natural llamado sinobia hace el mismo papel en las articulaciones de los miembros de los animales. Experiencias muy recientes de M. Girord, han demostrado que se obtiene una reduccion considerable del coeficiente de rozamiento, interponiendo entre las partes frotantes de los órganos de las máquinas, una capa de agua inyectada á una presion bastante grande, y se cree que la reduccion será mayor aún, si se logra reemplazar el agua por una especie de colchon de aire. Mas estos perfeccionamientos están poco generalizados en la industria, y se atribuye á la capa de agua el defecto de gastar rápidamente las superficies metálicas frotantes. Las grasas, que se usan generalmente, tienen la ventaja de permanecer mucho tiempo entre los dos cuerpos en contacto, á pesar de la tendencia de los flúidos á escaparse lateralmente bajo la accion de las presiones que se les hace sufrir, pero se descomponen rápidamente, por lo que se les debe renovar con frecuencia.

Terminaremos esta leccion con la siguiente tabla que contiene los resultados de algunas experiencias de M. Morin sobre el rozamiento.

565. Tabla de los valores del coeficiente f y del ángulo α de rozamiento.

NATURALEZA DE LAS SUPERFICIES FROTANTES.	Al estado de movimiento.		Al empezar á moverse	
	f	α	f	α
Madera sobre madera, en seco....	0,36	19° 18′	0,50	26° 34′
— engrasadas........	0,07	4.° 0′	0,20	11° 19′
Madera y metal, en seco........	0,42	22° 47′	0,60	3° 58′
— engrasados........	0,08	4° 35′	0,12	6° 51
Metal sobre metal, en seco.......	0,19	10° 46′	0,19	10° 46
— engrasados.........	0,09	5° 9′	0,10	5° 43′
Cuerda mojada sobre madera.....	0,35	18° 16′	0,87	41° 2′
Cuerda sobre hierro fundido......	0,15	8° 32′	"	"
Cuero sobre madera ó metal, en seco	0,30	16° 42′	0,47	25° 11′
— engrasados.........	0,20	11° 19′	"	"
Hierro forjado sobre piedra......	0,45	24° 14′	"	"
Piedra sobre madera...........	0,40	21° 48′	"	"
Piedra sobre piedra............	0,76	37° 14′	"	"

LECCION XLVI.

Equilibrio de dos sólidos que se tocan. Polígono de apoyo. — Equilibrio de un sólido pesado sobre un plano, apoyándose por uno, dos, tres ó más puntos. Presiones sobre los puntos de apoyo. — Presiones ejercidas sobre el suelo por los cuatro piés de una mesa. — Presiones ejercidas por un sólido cualquiera que se apoya por una cara plana rectangular.

Equilibrio de dos sólidos que se tocan. Polígono de apoyo.

566. Si dos sólidos S y S′ (fig. 248), en equilibrio, son tangentes en un sólo punto, debe existir el equilibrio entre todas las fuerzas que obran sobre cada uno de ellos; es decir, entre las fuerzas que les están directamente aplicadas y la accion que experimenta en el punto de contacto de parte del otro sólido; lo cual exige, que si se considera cada uno de los sólidos como invariable de forma, y se componen entre sí las fuerzas que le están directamente aplicadas, prescindiendo de la accion que experimenta de parte del otro sólido, se deberá encontrar precisamente para estas fuerzas una resultante única, igual y directamente opuesta á dicha accion. Segun ésto, es fácil ver que para que los sólidos S y S′ estén en equilibrio, es necesario: 1.°, que todas las fuerzas directamente aplicadas á uno cualquiera de ellos, tenga una resultante única que pase por el punto de contacto: 2.°, que la resultante de las fuerzas directamente aplicadas al sólido S sea igual y contraria á la resultante de las aplicadas al só-

lido S': 3.°, que estas dos resultantes estén dirigidas al interior del cono de rozamiento: y 4.°, que estas dos fuerzas actúen en un sentido tal, que tiendan á apoyar los sólidos uno contra otro y no á separarlos.

567. Cuando dos sólidos en equilibrio son tangentes en muchos puntos, las fuerzas directamente aplicadas á uno de ellos S, se equilibran con las acciones que experimenta de parte del otro S' en los diversos puntos en que se tocan; y como las acciones de S' sobre S no han de tener precisamente una resultante única, resulta, que para que exista el equilibrio no es necesario tampoco que las fuerzas directamente aplicadas al sólido S tengan una resultante única; todo lo que puede decirse en este caso de una manera general, es que las fuerzas directamente aplicadas al sólido S, y las acciones que este sólido ejerce sobre S', constituyen dos sistemas de fuerzas equivalentes (93); porque uno y otro son equilibrados por el conjunto de las acciones de S' sobre S.

568. Consideremos en particular dos sólidos S y S' tangentes en muchos puntos A, B, C, D....., (fig. 249), situados todos en un mismo plano P. Supongamos que las partes materiales del sólido S que se encuentran sobre las perpendiculares al plano PP, trazadas por los puntos de contacto A, B, C....., y en la proximidad de estos puntos, están todas situadas á una misma region del plano P; y por consiguiente, que las partes materiales del sólido S' situadas sobre las mismas perpendiculares al plano P y próximas á los puntos A, B, C....., están todas situadas en la otra region de este plano. Supongamos, ademas,

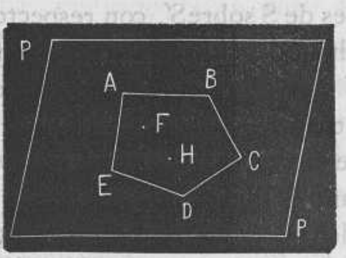

Fig. 249.

que las fuerzas directamente aplicadas al sólido S′ tengan una resultante única R, lo cual exige precisamente como consecuencia, que las fuerzas aplicadas al sólido S′ tengan una resultante única igual y opuesta á la anterior.

La resultante R de las fuerzas, directamente aplicadas al sólido S, es equivalente al sistema de las acciones que este sólido ejerce sobre el S′ en los diferentes puntos de contacto A,B,C..., como acabamos de probar; esta fuerza R es tambien la resultante de las acciones de S sobre S′, y su momento, con respecto á una recta cualquiera trazada en el plano P, es igual á la suma de los momentos de las acciones de S sobre S′, con respecto á la misma recta.

Esto supuesto, construyamos un polígono convexo ABCDE que tenga por vértices puntos elegidos entre los de contacto de los dos sólidos, y que en su interior ó en sus lados contenga todos los puntos de contacto que no están en sus vértices. Por lo supuesto, las diversas acciones de S sobre S′, tienden á empujar los puntos A, B,C..., del sólido S′, hácia una misma region del plano P, y por consiguiente, la resultante R de estas acciones debe tender á empujar el sólido S′ hácia esta misma region del plano; los momentos de estas acciones de S sobre S′, con respecto al lado AB del polígono que hemos construido, son por lo mismo todos del mismo signo, y el momento de la fuerza R, con respecto á este lado, tiene por lo tanto el mismo signo que cada uno de ellos: luego la direccion de la fuerza R debe cortar al plano P en un punto situado, con respecto á la recta AB, del mismo lado que los puntos de contacto C, D, E....., que no están sobre esta línea. Lo que acabamos de decir del lado AB del polígono ABCDE, podemos repetirlo para cada uno de los otros lados; y de aquí se deduce inmediatamente, que la direccion de la fuerza R debe cortar al plano P en el interior de este polígono convexo, al cual se da el nombre de *po-*

lígono de apoyo de ios dos sólidos. Ademas, es necesario que la fuerza R tienda á apoyar el sólido S sobre el S′ y no á separarlo.

Si ademas de las hipótesis anteriores, suponemos ahora que el coeficiente de rozamiento sea igual para los diversos puntos de contacto A, B, C, D......, de los sólidos S y S′, cada una de las acciones de S sobre S′, no podrá formar con la perpendicular al plano P un ángulo mayor que el ángulo de rozamiento comun á los diversos puntos de contacto; ademas se puede encontrar la magnitud y direccion de la fuerza R, trasportando las acciones de S sobre S′, paralelamente á sí mismas, al punto en que esta fuerza R corta al plano P, y componiéndolas por la regla del polígono de las fuerzas; es fácil deducir tambien, que la fuerza R no puede formar con la perpendicular al plano P un ángulo mayor que el de rozamiento de que ántes hemos hablado.

Cuanto acabamos de decir es independiente del número de puntos de contacto que tengan los sólidos S y S′, y es por lo tanto aplicable al caso en que su contacto se verifique en toda la extension de una cara plana.

Equilibrio de un sólido pesado sobre un plano, apoyándose por uno, dos, tres ó más puntos. Presiones sobre los puntos de apoyo.

569. Un cuerpo sólido, sometido únicamente á la accion de su propio peso, y colocado sobre un plano, es decir, sobre una cara plana de otro cuerpo, está evidentemente comprendido en el caso general que acabamos de examinar. Las acciones de la gravedad sobre las diferentes partes del cuerpo, tienen una resultante, que es su propio peso, que actúa segun la vertical trazada por su centro de gravedad de arriba á abajo.

Para que el cuerpo esté en equilibrio, es necesario: 1.°, que la vertical trazada por su centro de gravedad encuentre al plano sobre que descansa en el interior del polígono de apoyo, construido segun la definicion dada: 2.°, que el ángulo formado por la vertical y la perpendicular al plano, ó lo que es lo mismo, el ángulo formado por el plano con el horizontal, sea menor que el ángulo de rozamiento correspondiente á la naturaleza de las superficies en contacto.

En el caso particular en que el cuerpo, que se considera, descansa sobre un plano horizontal, la segunda condicion está siempre satisfecha, y sólo tenemos que averiguar si se cumple la primera, para saber si el cuerpo está ó no en equilibrio en una posicion dada.

570. Vamos á determinar el valor de las presiones que un cuerpo pesado, colocado sobre un plano horizontal, ejerce sobre sus diferentes puntos de apoyo, y consideremos para esto los distintos casos que pueden presentarse segun el número de puntos de contacto. Si el cuerpo no se apoya más que por un sólo punto, no puede estar en equilibrio, si su centro de gravedad no está situado en la vertical trazada por el punto de apoyo; y la presion que el cuerpo ejerce sobre este punto, es claro que está representada por su peso. Si el cuerpo se apoya por dos puntos O y A, (fig. 250), el polígono de apoyo es en este caso la recta OA, y la vertical, trazada por el centro de gravedad del cuerpo, debe encontrar al plano sobre que descansa en un punto B de esta recta, situado entre los puntos O y A; para obtener las presiones ejercidas por el cuerpo en estos puntos, basta descomponer el peso P del cuerpo aplicado segun la vertical, en dos componentes paralelas

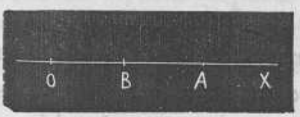

Fig. 250.

que obren sobre los puntos O y A; de este modo tendremos $\frac{P\times AB}{OA}$, y $\frac{P\times OB}{OA}$, para las presiones respectivas en los puntos O y A.

Si el cuerpo se apoya por tres puntos A, D, C, no situados en línea recta (fig. 251), la vertical que pasa por su centro de gravedad, debe encontrar al plano en un punto B situado en el interior del triángulo ADC, que es en este caso el polígono de apoyo; las presiones que el cuerpo ejerce sobre el plano en los puntos A, D y C, son las tres componentes paralelas del peso P del cuerpo, que actúa en el punto B; el momento de la resultante P con respecto al plano vertical trazado por AD, es igual al momento de la componente aplicada en C con respecto al mismo plano vertical, y por consiguiente, esta componente y la resultante, están en razon inversa de las superficies de los triángulos ABD y ADC; luego las presiones ejercidas por el cuerpo sobre cada uno de los tres puntos de apoyo A, D, C, son respectivamente

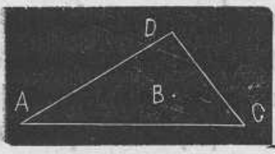

Fig. 251.

$$\frac{P\times BDC}{ADC}, \frac{P\times ABC}{ADC}, \frac{P\times ADB}{ADC}.$$

Si el número de puntos de apoyo sobre el plano es mayor de tres, no es posible en general determinar las presiones, que ejerce en cada uno de ellos, conociendo sólo la posicion que la vertical que pasa por su centro de gravedad, ocupa con respecto á dichos puntos; en efecto, se pueden encontrar una infinidad de sistemas de fuerzas paralelas y del mismo sentido aplicadas á los puntos de apoyo, que tengan por resultante el peso del cuerpo aplicado en su centro de gravedad: se pueden dar valores arbitrarios á estas presiones á excepcion de tres de ellas, siempre que estos valores no pasen de ciertos límites, y deducir de ellos fácilmente los valores restantes, de modo que la resultante de todas sea igual al peso del cuerpo, y tenga la direccion de la vertical que pasa por su centro de gravedad. La misma dificultad se presenta tambien cuando el cuerpo se apoya en tres puntos situados en línea recta; la determinacion de las presiones ejercidas por el cuerpo sobre cada uno de ellos, no puede efectuarse por el sólo conocimiento del punto en que la vertical trazada por el centro de gravedad del cuerpo corta á la recta que contiene los tres puntos de apoyo. Las presiones que el cuerpo ejerce sobre el plano, en los diferentes puntos de contacto, no son, sin embargo, indeterminadas; pero no se pueden encontrar sus valores si no se conoce la naturaleza del cuerpo pesado que se considera, su grado de rigidez ó flexibilidad, y tambien estas mismas circunstancias en el cuerpo sobre que se apoya, bajo la accion de las presiones que experimenta este segundo cuerpo de parte del primero. En las dos cuestiones siguientes se verá esto con toda claridad.

Presiones ejercidas sobre el suelo por los cuatro piés de una mesa.

571. Sea ABCD (fig. 252), una mesa rectangular, sostenida en sus cuatro ángulos por piés verticales, que se proyectan en MN y RQ, sobre el plano vertical, y que descansa sobre un terreno horizontal LT, y está sometida á la accion de su propio peso F, que obra verticalmente en un punto (O,O′) de su superficie superior; se piden las presiones desarrolladas en los piés de la mesa, ó en las porciones del suelo sobre que se apo-

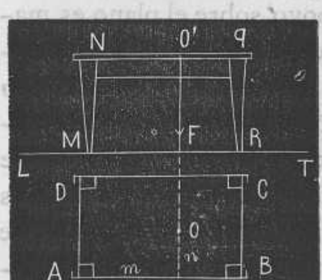

Fig. 252.

yan estos piés. Siendo el número de apoyos superior á tres, el problema no puede resolverse enteramente por las leyes de la Estática, segun hemos visto en el párrafo anterior; y la solucion depende de la ley física, segun la cual, se opera la deformacion de las partes en contacto en los puntos A, B, C, D.

Supondremos que la deformacion recae exclusivamente sobre el suelo, lo que equivale á atribuir á los piés de la mesa una gran rigidez comparativamente con la del terreno; ademas admitiremos, que los piés de la mesa se introducen cada uno en el suelo una cantidad proporcional á la presion que ejerce; de suerte, que si llamamos ω á la seccion recta del pié, z á la cantidad de que él penetra en el terreno, y E al coeficiente de elasticidad determinado por la experiencia, la presion P ejercida por el pié, estará dada por la ecuacion

$$P = E\omega z.$$

Supondremos, por fin, que la deformacion del suelo es bastante pequeña, para poder considerar los piés como verticales despues de esta deformacion. Las reacciones serán tambien verticales y paralelas al peso F. Llamemos a y b, á las dimensiones horizontales de la mesa; m y n, á las distancias del punto O á los lados AD y AB; P, P', P'', P''' á las reacciones desconocidas de los apoyos A, B, C, D.

Entre estas cuatro cantidades desconocidas, tendremos las tres ecuaciones que da la Estática; á saber, la ecuacion de las fuerzas proyectadas sobre una vertical, y las ecuaciones de los momentos con respecto á los dos ejes AB y AD;

$$(1)\quad \begin{cases} P + P' + P'' + P''' = F, \\ (P' + P'')\,a = F m, \\ (P'' + P''')\,b = F n. \end{cases}$$

La cuarta ecuacion que nos falta para poder determinar las cuatro incógnitas, se deducirá de la hipótesis que hemos hecho, sobre la deformacion del suelo en los cuatro puntos de apoyo. Las depresiones respectivas de los puntos A, B, C, D, son: $z=\frac{P}{E\omega}, z'=\frac{P'}{E\omega}, z''=\frac{P''}{E\omega}, z'''=\frac{P'''}{E\omega}$, suponiendo que los cuatro piés tienen la misma seccion ω; estas depresiones son todas sensiblemente verticales; por otra parte, las extremidades inferiores de los piés deben estar en un mismo plano ántes y despues de la deformacion, y como son los vértices de un paralelógramo, existe entre el nuevo punto B y el nuevo punto A la misma diferencia de altura, que entre el nuevo punto C y el nuevo punto D; es decir, $z'-z=z''-z'''$, ó sea

$$\frac{P'}{E\omega}-\frac{P}{E\omega}=\frac{P''}{E\omega}-\frac{P'''}{E\omega}, \text{ ó } P'-P=P''-P'''; \quad (2)$$

las tres ecuaciones (1) y la (2) determinan las cuatro presiones buscadas, y la última no contiene el coeficiente E.

De ellas se deducen los siguientes valores para P, P′, P″ y P‴,

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} P&=\frac{F}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right),\\ P'&=\frac{F}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right),\\ P''&=\frac{F}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{b}-\frac{1}{2}\right),\\ P'''&=\frac{F}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right).\end{aligned}\right.$$

Estos valores, para ser admisibles, deben ser todos positivos, porque para que uno de ellos fuera negativo, sería necesario que el pié correspondiente ejerciera sobre el suelo una traccion en lugar de una presion, lo cual es imposible, puesto que la mesa está solamente colocada sobre el suelo sin estar adherida á él por ninguna parte.

Luego es necesario, para que la solucion sea admisible, que se verifiquen las condiciones

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}<\frac{3}{2},$$
$$\frac{m}{a}-\frac{n}{b}<\frac{1}{2},$$
$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}>\frac{1}{2},$$
$$\frac{m}{a}-\frac{n}{b}>-\frac{1}{2}.$$

Estas condiciones quedan todas satisfechas, siempre que el punto O se encuentre en el interior de rombo KLNM (fig. 253), que resulta uniendo los puntos medios de los lados del rectángulo ABCD, formado por los apoyos. Si, por el contrario, la vertical trazada por el centro de gravedad cortára al plano horizontal fuera de este rombo, por ejemplo, en O′, en el triángulo MKC, una de las cuatro condiciones, la $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}<\frac{3}{2}$, no será satisfecha, y por consiguiente, el cálculo asignará á la presion P del pié opuesto A, un valor negativo inadmisible. Esto indica que el pié A no descansa sobre el suelo; el cálculo establecido en la hipótesis de que el suelo ejerce sobre la mesa una reaccion aplicada en este punto A, debe volverse á empezar suponniendo nula la reaccion P. Pero entónces el número de puntos de apoyo se reduce á tres, y la Estática basta para determinar las tres presiones desconocidas. Aplicando á los tres apoyos B, C, D la regla dada en el núm. 570, encontraremos la solucion del problema en las ecuaciones siguientes:

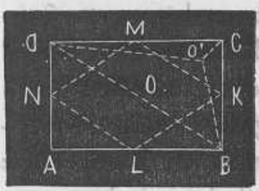

Fig. 253.

$$P=0,$$

$$P'=F\times\frac{O'DC}{BCD}=F\times\frac{O'DC}{\frac{a\times b}{2}},$$

$$P''=F\times\frac{O'BD}{BCD}=F\times\frac{O'BD}{\frac{a\times b}{2}},$$

$$P'''=F\times\frac{O'BC}{BCD}=F\times\frac{O'BC}{\frac{a\times b}{2}}.$$

En todos los casos, se conocerán las presiones desarrolladas sobre los piés de la mesa, y se podrá calcular por la fórmula $P=E\omega z$, la depresion correspondiente del suelo.

Si el centro de gravedad de la mesa coincide con su centro de figura, tendremos, que en las fórmulas, $m=\frac{a}{2}$, $n=\frac{b}{2}$, con lo cual nos darán, $P=P'=P''=P'''=\frac{F}{4}$; los cuatro piés soportan presiones iguales entre sí, y cada una de ellas es igual á la cuarta parte del peso F de la mesa.

Presiones ejercidas por un sólido pesado que se apoya por una cara plana rectangular.

572. Supongamos esta cara horizontal, y vamos á estudiar las presiones del sólido pesado sobre ella. Sea el sólido S (fig. 254), que descansa sobre un plano horizontal por una cara plana rectangular, cuya proyeccion horizontal es ABCD; supongamos que la superficie lateral del sólido, en la proximidad de la cara de apoyo, está formada por planos perpendiculares á esta cara y trazados por sus cuatro lados, y que el centro de gravedad G del sólido se encuentra en el plano vertical que pasa por los puntos medios *m* y *n* de los lados AD y BC de la cara de apoyo. Supongamos, ademas, que la superficie plana sobre la que descansa el cuerpo S presenta una gran rigidez, y permanece plana á pesar de la ligera depresion que

el peso del cuerpo le hace sufrir; que el sólido S sea en todas sus partes igualmente comprensible por la accion de las fuerzas que le pueden estar aplicadas, al ménos en la parte próxima á la cara de apoyo A′B′; y que en razon á esta igual comprensibilidad, las moléculas que estaban en un plano HK paralelo y muy próximo á la cara A′B′, ántes que el sólido estuviese sometido á las presiones que experimenta de arriba á abajo sobre la cara de apoyo, se encuentran en un mismo plano H′K′ despues de la deformacion que estas presiones le hacen sufrir. Consideremos en el sólido un prisma vertical PQ, de base infinitamente pequeña ω y que termine en los planos HK y A′B′, ántes de ser deformado el sólido en la proximidad de su cara de apoyo; este prisma se acortará á causa de las presiones que experimentan sus extremidades, y su longitud, que era al principio PQ, se reduce á Q′Q; PQ′ es, pues, el decremento de su longitud, y por consiguiente tendremos para la presion p que la base inferior Q de este prisma experimenta de parte del plano de apoyo (543), el valor

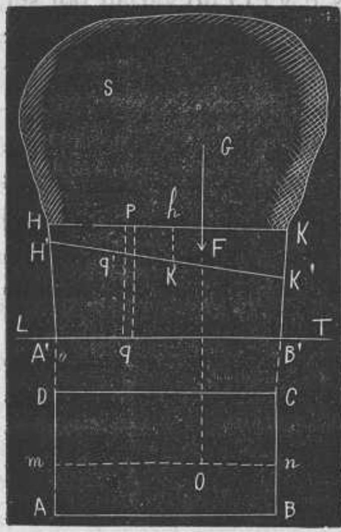

Fig. 234.

$$p = E\omega \frac{P'Q}{PQ}.$$

Esta fórmula dará los valores de la presion p, que el sólido experimenta, en los diferentes elementos ω en que se puede concebir descompuesta la cara de apoyo, con tal que se dé á PQ′ el valor correspondiente á cada uno de estos elementos; las cantidades E y PQ no varian por ser el sólido igualmente compresible en toda la extension de la cara de apoyo, y los planos HK y A′B′ son paralelos y equidistantes en todos sus puntos. Todas las presiones análogas á p son verticales y están dirigidas de abajo á arriba, y la resultante debe ser igual y opuesta al peso F del sólido, aplicado en su centro de gravedad G; estas presiones son ademas proporcionales á los productos $\omega \times PQ'$, cada uno de los cuales representa el volúmen de la parte de prisma PQ comprendida entre los planos HK y H′K′. La resultante de estas presiones p pasa por el centro de gravedad de la capa del sólido, comprendida entre los planos HK y H′K′, suponiendo siempre que esta capa sea homogénea; y ademas dicha resultante tiene por valor el producto del volúmen de la capa HKH′K′ por el factor constante $\frac{E}{PQ}$.

Lo que nos dice que el sólido S debe experimentar, por la accion de su propio peso, una deformacion tal, que la vertical trazada por su centro de gravedad pase tambien por el de la capa HKH′K′ considerada como un cuerpo homogéneo; las presiones, que este sólido experimenta, en los diversos elementos iguales de la cara de apoyo A′B′ son proporcionales á las partes de las verticales trazadas por estos elementos y comprendidas entre los planos HK y H′K′. Estando situado el centro de gravedad, por hipótesis, en el plano vertical, cuya traza horizontal es mn, se deduce fácilmente que la interseccion de los planos HK, H′K′ debe ser paralela á los lados AD y BC de la cara de apoyo del sólido; y el centro de gravedad del cuerpo homogéneo comprendido entre estos planos, coincide con el del trapecio interseccion del cuerpo con el plano vertical mn. De aquí se deduce que las presiones son las mismas para los diversos elementos iguales de la cara de apoyo que están situados sobre una paralela cualquiera á los lados AD y BC de esta cara; y que si se supone, que la vertical trazada por el punto G pasa por un punto O, más próximo á BC que á AD, las presiones sobre los elementos iguales de la cara de apoyo aumentarán constantemente, desde el lado AD de ésta, hasta el BC. Sean a y b las longitudes de los lados AD y AB de la cara de apoyo; siendo F la presion total sobre esta cara, será $\frac{F}{ab}$ la presion media referida á la unidad de superficie, y por consiguiente $F\frac{\omega}{ab}$ la presion sobre un elemento ω, situado á igual distancia de los lados AD y BC. Segun esto, es fácil probar, que para el elemento ω más próximo al lado BC la presion p, que es mayor que para todos los demas, tiene por valor

$$p = F\frac{\omega}{ab} \cdot \frac{KK'}{hk},$$

siendo hk la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio HKH'K'.

573. Consideremos ahora que por un cambio de forma de la parte superior del sólido, muda de lugar su centro de gravedad G, sin que salga del plano vertical trazado por mn. El trapecio KHK'H' deberá cambiar de forma al mismo tiempo, de modo, que su centro de gravedad se encuentre siempre sobre la vertical trazada por el punto G. Si la proyeccion horizontal O de este centro de gravedad se aproxima al lado BC de la base, sin que cambie el peso total del sólido, el lado KK' del trapecio debe aumentar, y el HH' disminuir de la misma cantidad; porque es necesario que el volúmen comprendido entre los planos HK y H'K' permanezca constante, y por consiguiente tambien el área del trapecio HKH'K'; lo que exige que la semisma hk de los lados HH' y KK' conserve el

mismo valor. Cuando On no sea más que $\frac{1}{3}$ de AB, el lado HH′ del trapecio se reducirá á cero, y el trapecio se convertirá en un triángulo, en que el lado KK′ opuesto al vértice H será doble de hk; en este caso, la presion p sufrida por el elemento ω de la cara de apoyo, más próximo al lado BC, será igual á $2F\frac{\omega}{ab}$; es decir, que será doble de la presion media correspondiente á un elemento de la misma extension.

Si la proyeccion horizontal O del centro de gravedad G se aproxima más á BC, la línea H′K′ que en el caso anterior ha venido á pasar por el punto H, debe elevarse por encima de este punto H y descender más por debajo del punto K′; lo cual indica que la presion tiende á ser negativa en la proximidad de la arista AD de la cara de apoyo; es decir, á convertirse en una traccion. Esto es lo que sucederia en efecto si la cara de apoyo estuviera pegada al plano sobre que descansa: pero como esta cara está sólo colocada sobre el plano, las cosas no pueden suceder así, el sólido S no puede sufrir más que presiones de parte del plano que lo sostiene. En este caso, las presiones no se ejercen sobre toda la superficie del rectángulo ABCD; una parte de este rectángulo, la situada hácia la arista AD, no sufre ninguna presion, y la parte restante que sufre la presion total F, es otro rectángulo que se encuentra en el caso del rectángulo entero, cuando $On = \frac{1}{3}$AB. Si llamamos e á la distancia On, cuando es menor que $\frac{1}{3}$AB, $3e$ y a serán los lados del rectángulo de apoyo en este caso, y $F\frac{\omega}{3ea} = p$, será la presion media sobre el elemento ω situado muy cerca de la arista BC.

Vemos, por el valor que acabamos de encontrar para la presion sobre un elemento ω, próximo á BC, que esta presion aumenta á medida que e disminuye. Sea Rω la presion capaz de determinar el aplastamiento del prisma elemental que tiene por base ω. Si se establece la relacion

$$2F\frac{\omega}{3ea}=R\omega,$$

se deduce

$$e=\frac{2}{3}\frac{F}{Ra}.$$

este valor de e es el límite más allá del cual no se debe hacer decrecer la distancia e, ú On, pues si decreciera más, el sólido S se aplastaria en la proximidad de la arista BC. Hemos llegado por este medio á añadir un nuevo elemento á la condicion de equilibrio del sólido pesado S, puesto sobre un plano horizontal. Habíamos encontrado que este equilibrio no podia tener lugar, sin que la vertical trazada por el centro de gravedad G del sólido cortára al plano en un punto situado en el interior del rectángulo ABCD, que constituye su polígono de apoyo; y ahora vemos que es necesario, ademas, que esta vertical pase en el interior del rectángulo, á una distancia suficientemente grande de cada uno de sus lados.

Estas consideraciones son muy importantes siempre que se trate del equilibrio de los sólidos que se apoyan por caras planas, como sucede en las construcciones de ladrillo y de piedra, y en particular en las bóvedas.

LECCION XLVII.

Momentos de inercia. Definiciones. -- Relacion entre los momentos de inercia de un cuerpo con respecto á ejes paralelos; y cuál de estos momentos es el menor.—Relacion entre los momentos de inercia de un cuerpo con respecto á ejes concurrentes. Elipsoide de inercia.—Ejes principales y momentos principales de inercia.—Determinacion de los ejes y de los momentos principales de inercia.—Relacion entre los ejes principales relativos á diferentes puntos.—Punto para los cuales los momentos de inercia principales son iguales.

Momentos de inercia. Definiciones.

574. Se llama *momento de inercia de un punto material* con respcto á un eje el producto de la masa de este punto por el cuadrado de su distancia al eje. El momento de inercia de un cuerpo ó sistema de puntos materiales de forma invariable, con respecto á un eje, es la suma de los momentos de inercia de todos estos puntos con respecto á este eje. De modo, que siendo $m, m', m'', \ldots.$ las masas de los puntos del sistema, y $d, d', d'', \ldots.,$ sus distancias respectivas al eje, el momento de inercia del sistema será

$$md^2 + m'd'^2 + m''d''^2 + m'''d'''^2 + \ldots. = \Sigma md^2.$$

Los puntos materiales que componen un cuerpo, no están distribuidos de una manera contínua, sino que están separados entre sí por espacios vacíos llamados poros. Sin embargo, puede obtenerse en cada caso el momento de inercia, suponiendo la masa distribuida de una manera contínua en los cuerpos; esto equivale á tomar, en lugar de Σmd^2, la integral definida de d^2d.M, para toda la extension del cuerpo; y como hemos visto al tratar de los centros de gravedad de los cuerpos sólidos, los resultados de esta hipótesis difieren muy poco de la verdad, porque los poros son sumamente pequeños relativamente al volúmen de todo el cuerpo. Bastará, pues, descomponer el cuerpo en una infinidad de elementos infinitamente pequeños, tomar el momento de inercia de un elemento cualquiera, y obtendremos el del cuerpo por medio de integraciones, cuyos límites serán los correspondientes á la superficie que termina el cuerpo.

El momento de inercia de un cuerpo, ó de un sistema, Σmd^2, varía con el eje respecto al cual se toma el momento, y tambien con los ejes coordenados á que el eje se refiere; y hace un papel muy importante en las cuestiones de movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un eje, ó de un punto fijo, en la teoría de la elasticidad y en otras várias partes de la ciencia. Las variaciones de los momentos de inercia se determinan por medio de leyes generales fáciles de establecer, en los dos casos generales que debemos examinar; el caso en que los ejes sean paralelos, y el caso en que los ejes sean concurrentes.

Relacion entre los momentos de inercia de un cuerpo con respecto á ejes paralelos, y cuál de estos momentos es el menor.

575. Dado el momento de inercia de un cuerpo sólido con respecto á un eje que pasa por su centro de gravedad, se puede obtener fácilmente su momento de inercia con respecto á otro eje paralelo al primero.

Tomemos el centro de gravedad O (fig. 255), por orígen de las coordenadas, el primer eje, por eje de las z, y por plano ZX el plano de los dos ejes paralelos; sea

$a=$ O A, su más corta distancia. Consideremos un punto cualquiera M (x, y, z) del sistema, y sean m su masa, d y D sus distancias MH, MK á OH y AB. Tenemos

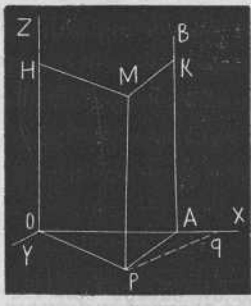

Fig. 255.

$$D^2=(x-a)^2+y^2=x^2+y^2-2ax+a^2,$$

$$D^2=d^2-2ax+a^2;$$

multiplicando por m, resulta

$$mD^2=md^2-2amx+ma^2.$$

Escribiendo tantas ecuaciones análogas á esta, como puntos tiene el sistema, sumándolas miembro á miembro, y designando por M la masa del cuerpo, se tiene

$$\Sigma mD^2=\Sigma md^2-2a\Sigma mx+Ma^2.$$

Siendo el orígen de las coordenadas el centro de gravedad, sabemos que $\Sigma mx=0$; y tendremos, por fin,

$$(1)\quad \Sigma mD^2=\Sigma md^2+Ma^2.$$

De modo, que el momento de inercia de un cuerpo, ó de un sistema de puntos materiales, con respecto á un eje cualquiera, es igual al momento de este cuerpo ó sistema con respecto á un eje paralelo al primero trazado por su centro de gravedad, más el producto de la masa del cuerpo ó sistema por el cuadrado de la distancia de los dos ejes.

De aquí se deduce, que el momento de inercia de un cuerpo con respecto á un eje que pasa por su centro de gravedad, es menor que el que se refiere á cualquier otro eje paralelo á éste; y que este momento es constante para todos los ejes paralelos equidistantes del centro de gravedad, y que aumenta á medida que el eje se aleja de este punto.

Supongamos que se determina una recta K por la condicion

$$\Sigma md^2=MK^2,$$

siendo M la masa total del sólido, la recta K es lo que se llama *radio de giro* del sólido, con respecto al eje á que se refiere el momento. Es claro que el radio de giro, es el radio de una superficie cilíndrica, que tiene por eje, el eje del momento, y sobre la cual está distribuida toda la masa del sólido, sin que el momento de inercia con respecto á dicho eje cambie de valor.

La ecuacion (1) puede escribirse bajo la forma

$$\Sigma m D^2 = M(K^2 + a^2).$$

Relacion entre los momentos de inercia de un cuerpo con respecto á ejes concurrentes. Elipsoide de inercia.

576. Vamos á calcular esta relacion para todos los ejes que pasan por un punto fijo O del espacio (fig. 256). Sea OH uno de estos ejes, tomemos por orígen de las coordenadas el punto de encuentro O de todos los ejes, sean $M(x, y, z)$ un punto cualquiera del cuerpo cuya masa es m, $d = MP$, la distancia del punto al eje; $r = OM$ el radio vector, que une el punto M con el orígen, α, β, γ los ángulos del eje OH con los ejes coordenados α', β', γ', los de OM con los ejes, δ el ángulo del radio vector con el eje OH; tendremos

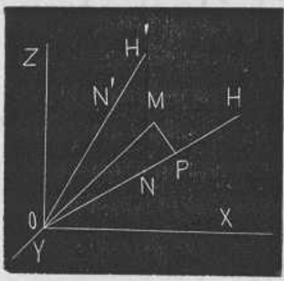

Fig. 256.

$$d = r \operatorname{sen} \delta, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\cos\alpha' = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta' = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma' = \frac{z}{r},$$

$$\cos\delta = \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r},$$

$$r\cos\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

$$d^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\delta = r^2(1 - \cos^2\delta) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$-(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2;$$

$$(1)\quad d^2=(x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$
$$-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2;$$

tambien

$$d^2=x^2(1-\cos^2\alpha)+y^2(1-\cos^2\beta)+z^2(1-\cos^2\gamma)$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma,$$
$$(2)\quad d^2=x^2\operatorname{sen}^2\alpha+y^2\operatorname{sen}\beta+z^2\operatorname{sen}^2\gamma-2xy\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma;$$

teniendo presente que

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

El valor de d^2, desarrollando los cálculos en la (1), toma la forma

$$(3)\quad d^2=(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(x^2+z^2)\cos^2\beta+(x^2+y^2)\cos^2\gamma$$
$$-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Multipliquemos por m esta ecuacion (3), y sumemos todas las ecuaciones análogas relativas á los otros puntos del sistema; haciendo para abreviar

$$\begin{array}{lll} A=\Sigma m(y^2+z^2), & D=\Sigma myz, & G=\Sigma mx^2, \\ B=\Sigma m(x^2+z^2), & E=\Sigma mzx, & H=\Sigma my^2, \\ C=\Sigma m(x^2+y^2), & F=\Sigma mxy, & K=\Sigma mz^2: \end{array}$$

y llamando $\mu=\Sigma md^2$, al momento de inercia del sistema con respecto al eje OH, tendremos

$$(4)\quad \mu=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma$$
$$-2D\cos\beta\cos\gamma-2E\cos\alpha\cos\gamma-2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Tambien de la ecuacion (2), se deduce del mismo modo,

$$(5)\quad \mu=G\operatorname{sen}^2\alpha+H\operatorname{sen}^2\beta+K\operatorname{sen}^2\gamma$$
$$-2D\cos\beta\cos\gamma+2E\cos\alpha\cos\gamma-2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Las cantidades A, B, C, son los valores de μ cuando se hace coincidir OH respectivamente con los ejes OX, OY, OZ, ó lo que es lo mismo, cuando

$$\cos\alpha=1,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=0,$$
$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=1,\ \cos\gamma=0,$$
$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=1;$$

es decir, los momentos de inercia relativos á los ejes

OX, OY, OZ.

Cualquiera de las ecuaciones (4) y (5) da los diferentes valores de los momentos de inercia del sistema, con respecto á todos los ejes que pasen por el punto O, dando á α, β, γ, los valores correspondientes á cada uno de estos ejes.

577. Concibamos que por el orígen se trazan diversos ejes análogos al OH, y que sobre cada uno de estos ejes se toman longitudes $ON=\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, $ON'=\frac{1}{\sqrt{\mu'}}$,..... siendo μ, μ',..... los momentos de inercia del sistema con respecto á los ejes OH, OH',.....; vamos á buscar el lugar geométrico de todos los puntos N, N',..... Cuando se conozca este lugar, se obtendrá el momento de inercia con respecto á un eje dado, por la relacion $\mu=\frac{1}{ON^2}$; para obtenerlo, sean X, Y, Z, las coordenadas del punto N, se tendrá

$$\cos\alpha=\frac{X}{ON},\ \cos\beta=\frac{Y}{ON},\ \cos\gamma=\frac{Z}{ON},\ ON=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

$$\text{ó}\quad \cos\alpha=X\sqrt{\mu}\quad \cos\beta=Y\sqrt{\mu},\quad \cos\gamma=Y\sqrt{\mu};$$

sustituyendo estos valores de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ en la ecuacion (4), y suprimiendo el factor comun μ, resulta

$$(6)\quad AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1.$$

El lugar geométrico representado por esta ecuacion es un elipsoide; porque es una superficie de segundo grado que tiene el centro en el orígen de las coordenadas, los coeficientes A, B, C son positivos, y las rectas, que miden las distancias del centro á un punto de la superficie, son reales y finitas, por ser $ON=\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, y la cantidad $\mu=\Sigma md^2$, es finita y positiva.

De aquí se deduce, que para todo cuerpo ó sistema de puntos materiales, si por un punto cualquiera del espacio O, se trazan una infinidad de ejes, se determinan los momentos de inercia del sistema con respecto á estos mismos ejes, y á partir del punto O, se toma sobre cada eje una longitud numéricamente equivalente á la unidad dividida por la raíz cuadrada del momento de inercia correspondiente, las extremidades de estas diversas longitudes tienen por lugar geométrico la superficie de un elipsoide cuyo centro es el punto O. Este elipsoide se llama *elipsoide de los momentos de inercia*, ó simplemente *elipsoide de inercia*.

Si todos los puntos materiales del sistema estuvieran situados sobre un mismo eje, el momento de inercia relativo á este eje sería nulo, y la longitud correspondiente sería infinita, de donde resulta que el elipsoide de inercia se trasformaria en una superficie cilíndrica.

Ejes principales y momentos principales de inercia.

578. Siendo la direccion de los ejes coordenados arbitraria, podremos siempre hacerlos coincidir con los ejes de simetría del elipsoide de inercia; los rectángulos de las coordenadas desaparecerán de la ecuacion (6), de suerte, que se tendrá

$$D=0,\ E=0,\ F=0;$$

y por consiguiente

$$\Sigma myz=0,\quad \Sigma mxz=0,\quad \Sigma mxy=0.$$

Estas ecuaciones nos dicen que se puede siempre hacer pasar por un punto dado O tres ejes rectangulares, de tal manera escogidos, que tomándoles por ejes coordenados, sean cero las sumas que se obtienen multiplicando la masa de cada punto material por los productos de las coordenadas de estos puntos. Estos tres ejes se llaman *ejes principales de inercia* del sistema relativos al punto O, y los momentos de inercia correspondientes, se llaman *momentos principales de inercia*.

El sistema de ejes principales es único, por no tener el elipsoide, en general, más que un sólo sistema de ejes de simetría. Cuando el elipsoide es de revolucion, dos de sus ejes de simetría son iguales, y existen una infinidad de sistemas de ejes rectangulares, propios para hacer desaparecer de su ecuacion los productos de las coordenadas, para los cuales se verificarán las condiciones

$$\Sigma myz=0,\quad \Sigma mxz=0,\quad \Sigma mxy=0;$$

en otros términos, que existen una infinidad de sistemas de ejes principales. Cada uno de estos sistemas está formado por el eje de revolucion y por otros dos ejes, que pasan por el centro del elipsoide y se cortan á ángulo recto en el plano de su ecuador.

Si el elipsoide se reduce á una esfera, todo sistema de tres ejes rectangulares, que pasa por el orígen, hace desaparecer los productos de las coordenadas y forma, por consiguiente, un sistema de ejes principales. En este caso A=B=C, y para un sistema cualquiera de tres diámetros perpendiculares de la esfera serán nulos D, E y F. Ademas, los momentos de inercia con respecto á todos estos ejes son iguales, porque haciendo en la ecuacion (4)

$$A=B=C,\quad D=0,\quad E=0,\quad F=0,$$

resulta

$$\mu=A(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=A;$$

de manera, que el valor de μ es independiente de los ángulos α, β, γ, es decir, de la direccion del eje OH.

579. Existen, como hemos visto, relaciones necesarias entre los momentos de inercia tomados con respecto á diversos ejes que pasan por el punto O y los radios vectores ON, ON',..... de un cierto elipsoide. Por lo cual, toda propiedad de estos radios vectores, toda relacion que los haga depender uno de otro, entrañará necesariamente una propiedad correspondiente de los momentos de inercia, y establecerá entre ellos relaciones más ó mé-

nos importantes, que en un gran número de casos podrán deducirse unas de otras.

Así, 1.°, en virtud de la relacion

$$ON = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{\overline{ON}^2}, \quad \mu\overline{ON}^2 = 1,$$

el valor del momento de inercia μ aumenta cuando el radio vector ON disminuye, y recíprocamente; y es claro que el momento de inercia que corresponde al eje mayor del elipsoide es el momento de inercia mínimo, y el correspondiente al eje menor del elipsoide será el momento de inercia máximo.

2.° Si hacemos coincidir los ejes coordenados con los ejes principales, la ecuacion del elipsoide y las que dan el valor de un momento de inercia cualquiera, se reducen á las siguientes:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$\mu = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$
$$\mu = G\,\mathrm{sen}^2\alpha + H\,\mathrm{sen}^2\beta + K\,\mathrm{sen}^2\gamma.$$

Designando por μ', μ'', μ''', los tres momentos de inercia relativos á los ejes actuales de las x, y, z, tendremos

$$\mu' = A, \quad \mu'' = B, \quad \mu''' = C;$$

y por consiguiente

$$\mu = \mu'\cos^2\alpha + \mu''\cos^2\beta + \mu'''\cos^2\gamma;$$

esta última fórmula sirve para calcular de un modo muy expedito, los momentos de inercia relativos á un eje cualquiera, cuando se conocen los momentos de inercia principales y los ángulos que forma el eje de que se trata con las ejes principales.

3.° Consideremos un sistema cualquiera de tres ejes rectangulares, y designemos por μ_1, μ_2, μ_3 los momentos de inercia relativos á estos tres ejes, por

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3,$$

los ángulos que estos ejes forman con los ejes principales, tendremos

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,$$
$$\cos^2 6_1+\cos^2 6_2+\cos^2 6_3=1,$$
$$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1,$$
$$\mu_1=\mu'\cos^2\alpha_1+\mu''\cos^2 6_1+\mu'''^2\cos^2\gamma_1,$$
$$\mu_2=\mu'\cos^2\alpha_2+\mu''\cos^2 6_2+\mu'''\cos^2\gamma_2,$$
$$\mu_3=\mu'\cos^2\alpha_3+\mu''\cos^2 6_3+\mu'''\cos^2\gamma_3,$$
$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=\mu'+\mu''+\mu''';$$

de suerte, que la suma de los momentos de inercia relativos á estos tres ejes rectangulares, es constante é igual á la suma de los momentos de inercia principales.

Determinacion de los ejes y de los momentos principales de inercia.

580. Acabamos de ver, que la determinacion del momento de inercia de un cuerpo con respecto á un eje cualquiera, depende del conocimiento de los momentos y ejes principales de inercia, y de los ángulos que forma dicho eje con los ejes principales. Se determinan los ejes y los momentos principales de inercia, determinando en magnitud y direccion los ejes principales del elipsoide, ó sea sus ejes de simetría, los cuales son perpendiculares á los planos tangentes al elipsoide, tirados por sus extremos.

En efecto, el radio tirado del centro del elipsoide al punto x', y', z', situado sobre la superficie, será un eje principal si viene á ser perpendicular al plano tangente, es decir, si viene á coincidir con la normal. La ecuacion del elipsoide es

$$u=Ax'^2+By'^2+Cz'^2-2Dy'z'-2Ex'z'-2Ex'y'-1=0,$$

el radio vector y la normal forman con los ejes ángulos cuyos cosenos son respectivamente proporcionales á las cantidades

$$x',\quad \frac{du}{dx'}=2(Ax'-Fy'-Ez'),$$
$$y',\quad \frac{du}{dy'}=2(By'-Fx'-Dz'),$$
$$z',\quad \frac{du}{dz'}=2(Cz'-Ex'-Dy').$$

De manera, que para que el radio vector coincida con la normal y venga á ser un eje principal, es necesario que

$$\frac{Ax'-Fy'-Ez'}{x'}=\frac{By'-Fx'-Dz'}{y'}=\frac{Cz'-Ex'-Dy'}{z'};$$

pero siendo x', y', z', proporcionales á $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, podremos reemplazar las unas por las otras en estas relaciones, y se convertirán en

$$\frac{A\cos\alpha-F\cos 6-E\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{B\cos 6-F\cos\alpha-D\cos\gamma}{\cos 6}=\frac{C\cos\gamma-E\cos\alpha-D\cos 6}{\cos\gamma}$$
$$=\frac{A\cos^2\alpha+B\cos^2 6+C\cos^2\gamma-2D\cos 6\cos\gamma-2E\cos\alpha\cos\gamma-2F\cos\alpha\cos 6}{\cos^2\alpha+\cos^2 6+\cos^2\gamma}=\mu;$$

obtenida ésta multiplicando, la anterior serie de razones iguales, la 1.ª por $\cos\alpha$, la 2.ª por $\cos 6$, la 3.ª por $\cos\gamma$, y sumando, y teniendo presente que el denominador es la unidad, y el numerador el valor de μ segun la ecuacion (4); como el radio vector ha venido á ser un eje principal, μ será uno de los momentos principales. Se deducen de las ecuaciones precedentes las siguientes:

$$(\mu-A)\cos\alpha+F\cos 6+E\cos\gamma=0,$$
$$(\mu-B)\cos 6+F\cos\alpha+D\cos\gamma=0,$$
$$(\mu-C)\cos\gamma+E\cos\alpha+D\cos 6=0.$$

Eliminando $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, entre estas tres ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuacion de 3.er grado

$$(7)\quad (\mu-A)(\mu-B)(\mu-C)-D^2(\mu-A)-E^2(\mu-B)-F^2(\mu-C)+2DFF=0,$$

que tendrá sus tres raíces reales y finitas; estas raíces serán precisamente los valores de los momentos de inercia principales. A estos tres momentos corresponden tres sistemas de valores de los ángulos $\alpha, 6, \gamma$, determinados por las ecuaciones precedentes, de las que resulta

$$\frac{\cos\alpha}{(\mu-B)(\mu-C)-D^2}=\frac{\cos\beta}{(\mu-C)(\mu-A)-E^2}=\frac{\cos\gamma}{(\mu-A)(\mu-B)-F^2}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{[(\mu-B)(\mu-C)-D^2]^2+[(\mu-C)(\mu-A)-E^2]^2+[(\mu-A)(\mu-B)-F^2]^2}};$$

estos tres sistemas de valores determinan la direccion de los tres ejes principales.

581. La ecuacion de tercer grado (7) se presenta en un gran número de cuestiones importantes. M. Binet ha demostrado el primero, que sus raíces representan los momentos de inercia principales; podemos darle otra forma más conveniente, que haga ver inmediatamente la realidad de sus raíces.

La ecuacion,

$$(\mu-A)\cos\alpha+F\cos\beta+E\cos\gamma=0,$$

puede ponerse bajo la forma

$$F\cos\beta+E\cos\gamma=(A-\mu)\cos\alpha,$$

dividiendo por EF y añadiendo á los dos miembros $\frac{\cos\alpha}{D}$,

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\alpha}{EF}\left(A+\frac{EF}{D}-\mu\right).$$

Del mismo modo deduciremos de las otras ecuaciones

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\beta}{DF}\left(B+\frac{DF}{F}-\mu\right),$$

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\gamma}{DE}\left(C+\frac{DE}{F}-\mu\right);$$

haciendo para abreviar

$$A+\frac{EF}{D}=L,\ B+\frac{DE}{F}=M,\ C+\frac{DE}{F}=N,$$

tendremos

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\alpha}{EF}(L-\mu)=\frac{\cos\beta}{DF}(M-\mu)$$

$$=\frac{\cos\gamma}{DE}(N-\mu)=$$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha}{D}}{\frac{DEF}{D^2(L-\mu)}}=\frac{\frac{\cos\beta}{E}}{\frac{DEF}{E^2(M-\mu)}}=\frac{\frac{\cos\gamma}{F}}{\frac{DEF}{F^2(N-\mu)}}=\frac{\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}}{\frac{DEF}{D^2(L-\mu)}+\frac{DEF}{E^2(M-\mu)}+\frac{DEF}{F^2(N-\mu)}}$$

Igualando el primero y último miembro de esta serie de igualdades, resulta

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos 6}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos 6}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}}{\frac{DEF}{D^2(L-\mu)}+\frac{DEF}{E^2(M-\mu)}+\frac{DEF}{F^2(N-\mu)}},$$

ó
$$\frac{DEF}{D^2(L-\mu)}+\frac{DEF}{E^2(M-\mu)}+\frac{DEF}{F^2(N-\mu)}=1,$$

(8)
$$\frac{\frac{1}{D^2}}{\mu-L}+\frac{\frac{1}{E^2}}{\mu-M}+\frac{\frac{1}{F^2}}{\mu-N}+\frac{1}{DEF}=0.$$

Bajo esta forma vemos que la ecuacion de tercer grado, suponiendo las cantidades L, M, N colocadas por orden de magnitud, tiene tres raíces reales, comprendidas entre las cantidades $-\infty$, L, M, N; ó entre las cantidades L, M, N, $+\infty$, segun que el producto DEF es positivo ó negativo.

Para que el elipsoide de inercia sea de revolucion, es preciso que la ecuacion (8) tenga dos raíces iguales, y para que se convierta en una esfera, las tres raíces de esta ecuacion deben ser iguales. Se obtendrá, pues, la condicion analítica que lo exprese, haciendo, para el primer caso, que el primer miembro de la ecuacion (8) y su primera derivada tengan una raíz comun; y para el segundo, expresando que sus tres raíces sean iguales.

Relacion entre los ejes principales relativos á diferentes puntos.

582. Los ejes principales relativos á un punto cualquiera de un cuerpo son paralelos á los ejes principales,

relativos al centro de gravedad de este cuerpo, cuando la recta que une el primer punto al segundo, es un eje principal relativo al segundo. Para demostrarlo, sean O (fig. 257), el centro de gravedad de un sistema de puntos, y OX, OY, OZ los ejes principales relativos á este punto. Por un punto O′ de OZ, tracemos O′X′, O′Y′ paralelos á OX y á OY; digo que O′Z, O′X′, O′Y′ son los ejes principales del sistema relativos al punto O′.

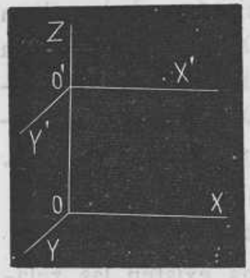

Fig. 257.

Sea M (x, y, z) un punto del sistema cuyas coordenadas respecto á los ejes O′X′, O′Y′, O′ Z, son x', y', z'. Puesto que los primeros ejes OX, OY, OZ, son ejes pricipales con respecto al centro de gravedad, tenemos

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma mxy = 0;$$

pero estando el punto O′ situado en el eje OZ á una distancia h del punto O, se tiene

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + h;$$

luego

$$\Sigma mx'y' = \Sigma mxy = 0,$$

$$\Sigma my'z' = \Sigma myz - h\Sigma my.$$

Mas $\Sigma myz = 0$, por hipótesis, y $\Sigma my = 0$, por ser el O centro de gravedad del sistema; luego $\Sigma my'z' = 0$, y O′X′ es un eje principal relativamente al punto O′. Del mismo modo demostraríamos que O′Y′ es un eje principal relativo al mismo punto.

Puntos para los cuales los momentos principales de inercia son iguales.

583. Busquemos el punto de un cuerpo para el cual los tres momentos principales, y por consiguiente, todos los momentos relativos á ejes cualesquiera que pasan por este punto, son iguales entre sí. Tomemos por

ejes coordenados OX, OY, OZ, los tres ejes principales relativos al centro de gravedad del sistema dado. Sean α, β, γ las coordenadas de un punto O′ que satisface á la condicion exigida. Entónces, tres ejes rectangulares cualesquiera, que tengan su orígen en O′, serán ejes principales del sistema: luego si se toman tres ejes O′X′, O′Y′, O′Z′, paralelos á los primeros, se tendrá

$$\Sigma my'z'=0, \quad \Sigma mx'z'=0, \quad \Sigma mx'y'=0;$$

entre los dos sistemas de coordenadas existen las relaciones

$$x=x'+\alpha \quad y=y'+\beta, \quad z=z'+\gamma;$$

y como los ejes primitivos son principales, serán

$$\Sigma myz=0, \quad \Sigma mxz=0, \quad \Sigma mxy=0,$$

la ecuacion $\Sigma mx'y'=0$, se convierte en

$$\Sigma m(x-\alpha)(y-\beta)=0,$$

ó

$$\Sigma mxy-\beta mx-\alpha\Sigma my+\alpha\beta\Sigma m=0.$$

Pero $\Sigma mxy=0$, $\Sigma mx=0$, $\Sigma my=0$, luego

$$\alpha\beta=0;$$

y del mismo modo encontraríamos

$$\alpha\gamma=0, \quad \beta\gamma=0.$$

En donde vemos, que dos de las tres coordenadas α, β y γ, deben ser cero. Supongamos que sean β y γ; entónces el punto O′ está en el eje OX.

Hasta ahora sólo hemos expresado que los ejes principales relativos al punto O′ son paralelos á los OX, OY, OZ; debemos expresar ademas que los momentos correspondientes á los nuevos ejes son iguales. Segun lo demostrado (575) estos momentos son A, $B+M\alpha^2$, $C+M\alpha^2$; luego tendremos

$$A=B+M\alpha^2=C+M\alpha^2, \quad B=C,$$

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{A-B}{M}};$$

y para que α sea real, debe ser $A > B$. Es preciso, pues, que el elipsoide relativo al punto O sea de revolucion alrededor de su eje menor, actualmente dirigido segun OX, al cual se refiere el momento A. Existen dos puntos O′ y O_1, simétricos con respecto al punto O y situados á una distancia de este punto igual á $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$ el uno, y á $-\sqrt{\frac{A-B}{M}}$ el otro.

LECCION XLVIII.

Determinacion de los momentos de inercia.—Momentos de inercia de un prisma ó cilindro rectos de seccion cualquiera.—Momentos de inercia del elipsoide, esfera y capa esférica.—Momentos de inercia de los sólidos de revolucion.—Momentos de inercia del cilindro, capa cilíndrica, secmento esférico, esfera, cono, tronco de cono y secmento de paraboloide.—Momentos de inercia de un cuerpo con relacion á los planos coordenados.—Triángulo de inercia.—Otro método para determinar los momentos de inercia.

Determinacion de los momentos de inercia.

584. Hemos visto en la leccion anterior las relaciones que existen entre los momentos de inercia de un cuerpo con relacion á ejes paralelos, y á todos los ejes que concurren en punto, y para concluir esta teoría nos falta exponer cómo se determina el valor del momento de inercia de un sólido ó sistema invariable con respecto á un eje dado; y una vez obtenido este valor, fácilmente calcularemos el que le corresponde con respecto á otro eje cualquiera, haciendo uso de las relaciones establecidas.

Para calcular el valor del momento de inercia de un cuerpo con respecto á un eje dado, referiremos el cuerpo á tres ejes coordenados rectangulares, tales que uno de ellos, el eje de las x, por ejemplo, sea el eje con respecto al cual queremos obtener el momento de inercia; y descompondremos el cuerpo en elementos rectangulares, cuyo volúmen sea $dx\,dy\,dz$, como lo hicimos al buscar el centro de gravedad.

Designando por ρ la masa específica del cuerpo en el punto que tiene por coordenadas x, y, z, la masa de un elemento, situado en este punto, será $\rho dxdydz$; la distancia de este elemento al eje de las x, es y^2+z^2, de modo, que el momento de inercia del sólido con respecto á este eje, tiene el valor siguiente

$$\int\int\int \rho(y^2+z^2)dzdydz,$$

la integral triple se extiende á todos los elementos que constituyen el sólido. Para simplificar, conviene observar, que la integral anterior es la suma de las dos siguientes,

$$\int\int\int \rho y^2 dxdydz, \int\int\int \rho z^2 dxdydz.$$

Si el sólido es homogéneo, ρ es constante, y se puede sacar del signo integral, con lo cual se simplifica la operacion; si no es homogéneo, ρ es funcion de las coordenadas de los diferentes puntos del sólido. En todos los ejemplos que siguen, supondremos que el cuerpo es homogéneo.

Designando por A, B, C, los momentos de inercia relativos á los ejes coordenados, tendremos

$$A=\int\int\int \rho(y^2+z^2)dxdydz,$$

$$B=\int\int\int \rho(x^2+z^2)dxdydz,$$

$$C=\int\int\int \rho(x^2+y^2)dxdydz.$$

Haciendo para abreviar,

$$\int\int\int x^2 dxdydz=G, \quad \int\int\int y^2 dxdydz=H,$$

$$\int\int\int z^2 dxdydz=K,$$

resulta

$$A=\rho(H+K), \quad B=\rho(G+K), \quad C=\rho(G+H).$$

Por ser $m=\rho\, dxdydz$, A, B, C, G, H, K, tienen la misma significacion que en el párrafo (576). Los límites de las integrales, que contienen estas cantidades, deben tomarse de manera que comprendan todo el cuerpo.

Momentos de inercia de un prisma ó cilindro rectos de seccion cualquiera.

585. Tomemos el centro de gravedad por orígen de las coordenadas, y por eje de las x el eje longitudinal del prisma ó del cilindro, cuya longitud supondremos igual á $2a$; hechas las integraciones relativas á x, desde $x=-a$, hasta $x=+a$, se tendrá

$$G=\tfrac{2}{3}a^3\int\int dydz,\quad H=2a\int\int y^2dydz,$$

$$K=2a\int\int z^2dydz.$$

El eje de las x será siempre un eje principal, porque siendo el orígen el centro de gravedad, $x_1=\int_{-a}^{+a}xdx=0$, y las dos integrales siguientes, son cero por sí mismas,

$$\int\int\int_{-a}^{+a}xydxdydz=0,\qquad \int\int\int_{-a}^{+a}xzdxdydz=0;$$

y como representan á $\Sigma mxy=0$, y á $\Sigma mxz=0$, ecuaciones de dicho eje, éstas se verifican.

Supongamos que el prisma tiene por base un rectángulo cuyos lados, paralelos á los ejes de las y y de las z, son $2b$ y $2c$. El prisma se convertirá entónces en un paralelepípedo rectángulo, los límites de y serán $-b,+b$, y los de $z,-c,+c$, y tendremos

$$\int_{-c}^{+}\int_{-b}^{+b}dz\,dy=4bc,\qquad \int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b}y^2dydz=\frac{4}{3}b^3c,$$

$$\int_{-c}^{c+}\int_{-b}^{+b}z^2dydz=\frac{4}{3}bc^3,$$

y por consiguiente

$$G=\frac{8}{3}a^3bc,\quad H=\frac{8}{3}ab^3c,\quad K=\frac{8}{3}\,abc^3.$$

El volúmen del paralelepípedo es $8abc$ y su masa $M=8\rho abc$; y tendremos por fin

$$A=\frac{M}{3}(b^2+c^2),\quad B=\frac{M}{3}(a^2+c^2),\quad C=\frac{M}{3}(a^2+b^2).$$

Los ejes de las y y de las z son como el de las x ejes principales, porque

$$\int_{-b}^{+b} ydy=0,\qquad \int_{-c}^{+c} zdz=0.$$

Si suponemos

$$a>b>c,$$

se tendrá

$$a^2+b^2>a^2+c^2>b^2+c^2,\quad \text{ó}\quad C>B>A;$$

y vemos que el mayor momento de inercia corresponde á la menor arista, y el menor á la más grande, como ya sabíamos.

Si $a=b$, será $A=B$; y si $a=b=c$, se tendrá $A=B=C$; es decir, que en el cubo los tres momentos de inercia son iguales.

De un modo análogo se determina el momento de inercia de un cilindro.

586. Si la seccion del cilindro es una elipse cuyos semi-ejes, paralelos á los de las y y de las z, son b y c, se tendrá

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

$$\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b} dydz=2b\int_{-c}^{+c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dz=2\,bc\frac{\pi}{2}=\pi bc;$$

por ser $\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}\sqrt{c^2-z^2}\,dz=\frac{1}{c}$ área semicírculo de radio $c=\frac{1}{c}\cdot\frac{\pi c^2}{2}=\frac{\pi c}{2}$;

tambien $\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b} y^2 dy dz = \frac{2b^3}{3}\int_{-c}^{+c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz$

$$=\frac{2}{3}b^3 c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}b^3 c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi,$$

haciendo

$$z = c\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Pero teniendo presente, que

$$\cos^4\varphi = \frac{\cos 4\varphi}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{3}{8},$$

$$\int\cos^4\varphi\, d\varphi = \int\left(\frac{\cos 4\varphi}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{3}{8}\right)d\varphi$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,4\varphi}{32} + \frac{\mathrm{sen}\,2\varphi}{4} + \frac{3}{8}\varphi,$$

y será

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 d\varphi = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16};$$

y por fin

$$\int_{-c}^{+c}\int_{-c}^{+b} y^2 dy dz = \frac{1}{4}b^3 c\pi;$$

se tendrá del mismo modo

$$\int_{-c}^{+c}\int_{-b}^{+b} z^2 dy dz = \frac{1}{4}bc^3\pi;$$

por consiguiente

$$G = \tfrac{2}{3}\pi a^3 bc,\quad H = \tfrac{1}{2}\pi ab^3 c,\quad K = \tfrac{1}{2}\pi abc^3.$$

El volúmen del cilindro es $2\pi abc$, su masa

$$M = 2\pi\rho abc,$$

y resultará

$$A = \frac{M}{4}(b^2+c^2),\quad B = M\left(\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{3}\right),\quad C = M\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{3}\right).$$

Momentos de inercia del elipsoide, esfera y capa esférica.

587. Sean $2a$, $2b$, $2c$, los ejes del elipsoide, su ecuacion ordinaria es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

para todo punto interior, el primer miembro será menor que 1, y para todo punto exterior será mayor que 1.

Resolviendo la ecuacion con respecto á z, tendremos

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

para que z sea real, es necesario que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$; haciendo, $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=r$, se tendrá

$$G=\int\int\int x^2dxdydz=2c\int_{-a}^{+a}x^2dx\int_{-r}^{+r}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dy;$$

$$\int_{-r}^{+r}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{b}\int_{-r}^{+r}(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi b(a^2-x^2)}{2a^2};$$

$$G=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}x^2(a^2-x^2)dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc;$$

del mismo modo se obtiene

$$H=\frac{4}{15}\pi ab^3c,\quad K=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

El volúmen del elipsoide es $\frac{4}{3}\pi abc$, su masa

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho abc,$$

luego

$$A=\frac{M}{5}(b^2+c^2),\quad B=\frac{M}{5}(a^2+c^2),\quad C=\frac{M}{5}(a^2+b^2).$$

Los tres ejes coordenados son tambien ejes principales, y si $a>b>c$, se tendrá $C>B>A$; es decir, el momento mayor corresponde al eje menor del elipsoide y el menor al mayor de estos ejes, lo cual ya sabíamos.

588. Si el elipsoide se convierte en una esfera de radio r, será

$$a=b=c=r,$$

y resultará

$$A=B=C=\frac{2M}{5}r^2=\frac{8\pi\rho r^5}{15};$$

el momento de inercia de la esfera con respecto á un diámetro cualquiera de la esfera, es $\frac{2M}{5}r^2$, ó lo que es lo mismo, que esta cantidad es el momento de inercia de la esfera para cualquiera de sus diámetros.

Si el radio de la esfera aumenta en la cantidad dr, su momento de inercia aumenta en la cantidad $\frac{8}{3}\pi\rho r^4 dr$, que es, por consiguiente, el momento de inercia de la capa esférica infinitamente delgada comprendida entre dos esferas concéntricas, cuyos radios son r y $r+dr$. De aquí resulta que

$$\frac{8\pi}{3}\int_a^b \rho r^4 dr=\frac{8\pi\rho}{15}(b^5-a^5),$$

es el momento de inercia, con relacion á un diámetro cualquiera, de una capa esférica cuyos radios interior y exterior son a y b, en la cual la densidad ρ es constante en toda la capa, ó para todos los puntos situados á la misma distancia del centro, aunque varíe con esta distancia.

Momentos de inercia de los sólidos de revolucion.

589. Directamente, y por una sola integracion, puede obtenerse el momento de inercia de un sólido de revolucion, con respecto al eje de revolucion.

Sea ABCD (fig. 258), la superficie meridiana, que tomaremos por generatriz, y OX el eje de revolucion; tomemos esta recta por eje de las x, y por eje de las y una perpendicular OY situada en el plano meridiano. Sean MP y M'P' dos ordenadas infinitamente próximas, y KHH'K' un rectángulo comprendido entre dos ordenadas; haciendo $PK=u$,

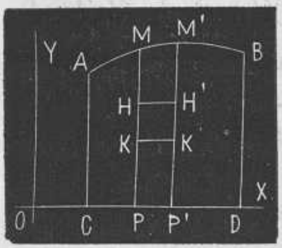

Fig. 258.

$OP=x$, se tendrá $KHH'K'=dudx$,

y el volúmen del sólido engendrado por la revolucion de este rectángulo será $2\pi ududx$. El momento de inercia de este sólido es $2\pi\rho ududx.u^2=2\pi\rho u^3dudx$,

el del sólido engendrado por PMM'P' es

$$2\pi\int_0^y \rho u^3dudx=\frac{\pi}{2}\rho y^4dx;$$

y el momento de inercia del volúmen engendrado por la revolucion del área ACBD, será

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4\,dx,$$

designando por a y b las abscisas OC y OD de los extremos de la curva AB.

Momentos de inercia del cilindro, capa cilíndrica, secmento esférico, esfera, cono, tronco de cono y secmento de paraboloide.

590. Como aplicaciones de la fórmula anterior, determinemos estos momentos de inercia.

El momento de inercia de un cilindro de revolucion de radio r será, segun ella,

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_a^b r^4dx=\tfrac{1}{2}\pi\rho r^4(b-a)=\tfrac{1}{2}\pi\rho r^4 h.$$

Siendo $h=b-a$, la altura del cilindro.

El de una capa cilíndrica cuyos radios interior y exterior sean r y r', y su altura $h=b-a$, será

$$\pi=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_a^b(r'^4-r^4)dx=\tfrac{1}{2}\pi\rho(r'^4-r^4)(b-a)=\tfrac{1}{2}\pi\rho h(r'^4-r^4).$$

El de un secmento esférico engendrado por el secmento de círculo BAC (fig. 259), será, siendo la ecuacion de la circunferencia $y^2=2rx-x^2$,

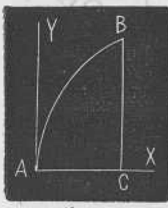

Fig. 259.

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_0^b y^4dx=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_0^b(2rx-x^2)^2dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_0^b(4r^2x^2-4rx^3+x^4)dx;$$

é integrando

$$\mu=\tfrac{1}{2}\rho\pi b^3\left(\frac{4r^2}{3}+\frac{b^2}{5}-rb\right).$$

Si la abscisa $b=2r$, el secmento se convierte en una esfera, y el momento de inercia es $\mu=\dfrac{8\pi\rho r^5}{15}=\dfrac{2\,\text{M}}{5}r^2$; el mismo que obtuvimos considerando á la esfera como un caso particular del elipsoide.

591. El de un cono comprendido entre la superficie engendrada por la recta que pasa por el orígen de las coordenadas, $y=ax$, y por un plano cuya ecuacion es $x=h$, será

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_0^h y^4dx=\tfrac{1}{2}\pi\rho a^4\int_0^h x^4dx=\tfrac{1}{2}\pi\rho a^4.\frac{h^5}{5};$$

siendo r y h los valores particulares de x é y correspondientes á la base del cono, de la ecuacion de la recta sale $a=\dfrac{r}{h}$; la masa del cono es $\text{M}=\tfrac{1}{3}\pi r^2h\rho$, y el momento de inercia tomará la forma

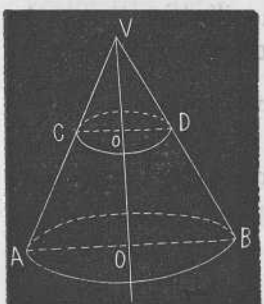

Fig. 260.

$$\mu=\frac{\pi\rho r^4h}{10}=\frac{3\,\text{M}}{10}r^2.$$

El de un tronco de cono ABCD (figura 260), con respecto á su eje, siendo R y r los radios de las bases, $a=\text{tg OVB}$, $y=r+ax$, la ecuacion de la generatriz, $Oo=h$ la altura del tronco; tendremos $dx=\frac{dy}{a}$, y

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_r^R y^4dx=\tfrac{1}{2}\frac{\pi\rho}{a}\int_r^R y^4dy=\frac{\pi\rho}{10a}(R^5-r^5).$$

La masa M del tronco es

$$M=\pi\rho\int_r^R y^2dx=\frac{\pi\rho}{a}\int_r^R y^2dy=\frac{\pi\rho}{3a}(R^3-r^3),$$

luego

$$\mu=\frac{3M}{10}\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$$

El de una porcion de paraboloide engendrado por la parábola, $y^2=px$, y terminado por una parte por el plano YZ, y por la otra por un plano cuya ecuacion es $x=h$, será

$$\mu=\tfrac{1}{2}\pi\rho\int_0^h y^4dx=\frac{\pi\rho p^2}{2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi\rho p^2h^3}{6}.$$

La masa M es

$$M=\frac{\pi\rho h^2 p}{2},\ r^2=ph,$$

luego

$$\mu=\frac{M}{3}r^2.$$

Momentos de inercia de un cuerpo con relacion á los planos coordenados.

592. Hemos visto (576), que $G=\Sigma mx^2$, $H=\Sigma my^2$, $K=\Sigma mz^2$; estas cantidades expresan las sumas de los productos de las masas de los puntos, por los cuadrados de sus distancias á los planos coordenados, y pueden considerarse como los momentos de inercia del cuerpo con relacion á los planos coordenados, YZ, ZX, XY. Entre estos momentos y los principales A, B, C, existen las relaciones

$$A=\Sigma m(y^2+z^2)=\Sigma my^2+\Sigma mz^2,$$
$$B=\Sigma mx^2+\Sigma mz^2,$$
$$C=\Sigma mx^2+\Sigma my^2.$$

De estas relaciones se deducen las siguientes:

$$\Sigma mx^2=\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$
$$\Sigma my^2=\tfrac{1}{2}(A+C-B),$$
$$\Sigma mz^2=\tfrac{1}{2}(A+B-C),$$

y como ninguna de estas sumas, en un sólido de tres dimensiones, puede ser cero, ni negativa, tendremos las desigualdades

$$B+C>A,$$
$$C+A>B,$$
$$A+B>C.$$

En otros términos, con tres rectas finitas proporcionales á los momentos de inercia A, B, C de un sólido con respecto á tres ejes rectangulares, se puede construir siempre un triángulo.

Sumando las tres ecuaciones miembro á miembro, resulta

$$\Sigma m(x^2+y^2+z^2)=\tfrac{1}{2}(A+B+C).$$

La suma, $\Sigma m(x^2+y^2+z^2)$, puede llamarse el momento de inercia del sólido con respecto al orígen O de las coordenadas, ó el momento polar del sólido.

Triángulo de inercia.

593 El momento de inercia μ de un sólido, con respecto á un eje OH trazado por un punto fijo O, está dado por la ecuacion

$$\mu=A\cos^2\alpha+\cos^2\beta+C\cos^2\gamma,$$

siendo A, B, C, los momentos principales de inercia con respecto al punto O, y α, β, γ los ángulos del eje OH con los tres ejes. El elipsoide de inercia sabemos que es el lugar de los puntos N, que se obtienen tomando sobre cada recta OH, una longitud $ON=\frac{1}{\sqrt{\mu}}$; sus semi-ejes principales son $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}$, y el momento de inercia correspondiente al eje ON, está representado por

$$\mu=\frac{1}{\overline{ON}^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

siendo x, y, z las coordenadas del punto N.

Por lo dicho en el número anterior, con tres rectas proporcionales á los momentos principales A, B, C se puede construir un triángulo ABC (fig. 261), en el cual BC=A, AC=B, AB=C. Esto supuesto á cada punto N de la superficie del elipsoide, corresponderá en el triángulo un punto N definido por sus distancias $Na=a$, $Nb=b$, $Nc=c$ á los tres lados.

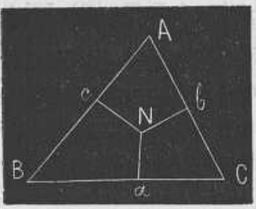

Fig. 261.

Para determinar la posicion de este punto, basta buscar las distancias a, b, c, de manera que satisfagan á las ecuaciones

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{y^2}=\frac{c}{z^2}.$$

El punto N será la interseccion de las rectas, lugares geométricos de los puntos cuyas distancias á los lados son proporcionales á las cantidades dadas x^2, y^2, z^2. Multipliquemos los dos términos de la primera razon por A, los de la segunda por B, los de la tercera por C, y sumemos, resultará

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{y^2}=\frac{c}{z^2}=\frac{Aa+Bb+Cc}{Ax^2+By^2+Cz^2}=\frac{2T}{1},$$

Siendo T el área del triángulo. En efecto, se tiene $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ para todos los puntos N del elipsoide, $Aa+Bb+Cc$ es el duplo del área del triángulo ABC; luego

$$a=2Tx^2, \quad b=2Ty^2, \quad c=2Tz^2,$$

fórmulas sencillas de trasformacion.

Sumándolas, tendremos, recordando que $\mu=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$,

$$a+b+c=2T(x^2+y^2+z^2)=\frac{2T}{\mu},$$

por consiguiente

$$\mu=\frac{2T}{a+b+c}.$$

Luego el momento de inercia correspondiente al eje ON, ó al punto N que representa este eje sobre el plano, es igual al duplo del área del triángulo ABC, dividido por la suma de las distancias del punto N á los tres lados.

Este triángulo se llama *triángulo de inercia*; y su área, en funcion de los tres lados, ó de los momentos de inercia del sólido con respecto á los planos principales y con respecto al punto O, es

$$T=\sqrt{\frac{A+B+C}{2}\times\frac{A+B-C}{2}\times\frac{A+C-B}{2}\times\frac{B+C-A}{2}}.$$

Ahora, $\frac{A+B+C}{2}=\Sigma m(x^2+y^2+z^2)$, ó sea la suma de las masas por el cuadrado de las distancias al punto O; y

$$\frac{A+B-C}{2}=\Sigma mz^2, \frac{A+C-B}{2}=\Sigma my^2, \frac{B+C-A}{2}=\Sigma mx^2,$$

ó sea los momentos de inercia del sólido respecto á los planos XY, XZ, YZ.

Se pasa, en consecuencia, de las coordenadas x, y, z de de la superficie del elipsoide á las coordenadas a, b, c, tomadas sobre el plano del triángulo por una trasformacion en la cual, salvo un factor constante, se cambia x^2 en a, y^2 en b, z^2 en c. Toda funcion lineal de x^2, y^2, z^2 se convierte en una funcion lineal de a, b, c, y esta funcion igualada á cero representa una recta sobre el plano del triángulo. Por consiguiente, la interseccion del elipsoide de inercia con otra superficie de segundo grado que tenga los mismos planos principales, se trasformará sobre el plano en una recta. La curva llamada poloide, cuya ecuacion y propiedades encontraremos más adelante, satisface á esta condicion, segun veremos al tratar del movimiento de un sólido que tiene un punto fijo.

Otro método para determinar los momentos de inercia.

594. La fórmula (576)

$$\mu = G \operatorname{sen}^2\alpha + H \operatorname{sen}^2\beta + K \operatorname{sen}^2\gamma,$$

da un medio muy sencillo para encontrar el momento de inercia, que consiste en determinar las constantes G, H, K, que representan los momentos de inercia del cuerpo con respecto á los planos coordenados, y sustituir sus valores en dicha fórmula. Para calcular, por ejemplo,

$$G = \Sigma m x^2,$$

dividiremos el cuerpo en rebanadas infinitamente delgadas por planos paralelos al plano YZ; sea V el área de la seccion causada en el cuerpo por uno de estos planos, cuya distancia al coordenado YZ es x, la masa de la rebanada comprendida entre los planos correspondientes á las abscisas x y $x+dx$, es $\rho V dx$, y su momento de inercia con respecto á dicho plano coordenado, será $\rho V x^2 dx$. Suponiendo que en el sentido del eje de las x el cuerpo se extiende desde x_0 hasta x_1, el valor de G será

$$G = \rho \int_{x_0}^{x_1} V_x x^2 dx.$$

Del mismo modo, llamando V_y y V_z á las áreas, y_0 é y_1, z_0 y z_1, á los límites respectivos, los valores de H y de K serán

$$H = \rho \int_{y_0}^{y_1} V_y y^2 dy,$$

$$K = \rho \int_{z_0}^{z_1} V_z z^2 dz.$$

Sustituidos estos valores de G, H, K en la fórmula anterior, tendremos el momento de inercia μ del cuerpo con respecto á un eje, que forma con los ejes principales los ángulos α, β, γ.

De este modo pueden calcularse con facilidad los momentos de inercia de todos los cuerpos.

Aconsejamos á los alumnos, que determinen por este método, todos los que en esta leccion hemos calculado.

DINÁMICA

SEGUNDA PARTE

LECCION XLIX

Movimiento de un sistema cualquiera de puntos. Teorema de d'Alambert.—Demostracion de este teorema. Fuerzas efectivas y fuerzas perdidas.—Ecuacion general del movimiento de un sistema. Sus consecuencias.—Qué son fuerzas instantáneas ó percusiones. Su medida.—Extension del teorema de d'Alambert á las fuerzas instantáneas. Cómo se aplica el teorema en este caso.

Movimiento de un sistema cualquiera de puntos. Teorema de d'Alambert.

595. La segunda parte de la Dinámica trata del movimiento de un sistema cualquiera de puntos materiales. Ya sabemos que varios puntos materiales forman un sistema, cuando existe entre ellos cierta dependencia, en virtud de la cual, el movimiento de uno de ellos es modificado por el movimiento de los demas; ó lo que es lo mismo, en virtud de la cual, si todos estos puntos, excepto uno de ellos, tomado arbitrariamente, reciben ciertos movimientos, este último recibirá un movimiento correspondiente. La dependencia de los puntos puede realizarse por medio de fuerzas, ó por medio de ligadu-

ras análogas á las que hemos considerado en la Estática, y que pueden reemplazarse por fuerzas equivalentes.

La Dinámica de los sistemas materiales se deduce de la Dinámica de un solo punto, escribiendo las ecuaciones del movimiento de cada uno de los puntos del sistema, bajo la accion de las fuerzas dadas que lo solicitan, y de las fuerzas desconocidas que reemplazan las ligaduras del sistema; así obtendremos un grupo de ecuaciones simultáneas, que determinarân enteramente el movimiento del sistema, á partir de un estado inicial dado.

596. El teorema de d'Alambert es una ley general del movimiento de los sistemas materiales, por medio del cual se determina el movimiento de un sistema de puntos sometidos á fuerzas cualesquiera y sujetos á condiciones dadas. Está fundado en una observacion que hicimos (434) tratando del movimiento de un sólo punto material, en donde vimos, que en cada instante existe el equilibrio entre las fuerzas efectivas que solicitan un punto material y la fuerza de reaccion $-mj$, que es igual en valor absoluto al producto de la masa por la aceleracion comunicada á este punto, y está dirigida en sentido contrario á la aceleracion. El teorema de d'Alambert no es más que la extension de esta observacion, casi evidente, al movimiento de un sistema de tantos puntos como se quiera.

Demostracion de este teorema. Fuerzas efectivas y fuerzas perdidas.

597. Antes de dar esta demostracion, recordaremos la definicion general del equilibrio. Se dice que várias fuerzas aplicadas á un punto material ó á un sistema de puntos, se equilibran, cuando el estado del sistema no cambia por la supresion de estas fuerzas. Esta definicion

no supone que el sistema esté en reposo, puede estar en movimiento, y entónces, se dice que las fuerzas se equilibran, cuando suprimiéndolas no se modifica el movimiento del sistema.

Sean M, M', M",.... los puntos de un sistema en movimiento, m, m', m''..... sus masas y P, P', P",..... las fuerzas que los solicitan. Estos puntos están sujetos á ciertas condiciones, expresadas ordinariamente por ecuaciones entre sus coordenadas.

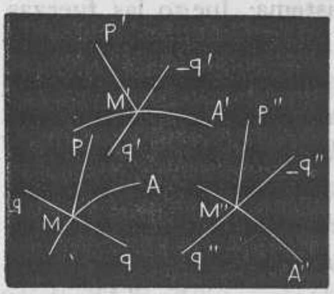

Fig. 262.

Fijémonos en particular en uno de estos puntos, el M por ejemplo, solicitado por la fuerza P (fig. 262). El movimiento de este punto no es lo mismo que si estuviera libre. Sea Q la fuerza que habria que aplicarle, si estuviera libre, para darle el movimiento que tiene realmente. Las componentes de la fuerza Q, paralelas á los ejes

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2},$$

son funciones del tiempo, conocidas ó desconocidas, pero determinadas. Sean del mismo modo Q', Q",..... las fuerzas que habria que aplicar á los puntos M', M",..... si estuvieran libres, para darles el movimiento que tienen en el sistema. Se ve, que si sustituimos las fuerzas P, P', P",... por las Q, Q', Q",.... todos los puntos tomarán el mismo movimiento que ántes, sin que las primitivas condiciones analíticas dejen de ser satisfechas. Así, al sistema de puntos sujetos á las condiciones dadas y solicitados por las fuerzas P, P', P",.... se podrá sustituir el sistema de puntos sujetos á las mismas condiciones y solicitados por las fuerzas Q, Q', Q'',.....

Esto supuesto, estando solicitado el sistema por las fuerzas P, P', P'',.... no se modificará su movimiento, si se aplican respectivamente á los puntos M, M', M'',..... las fuerzas iguales y directamente opuestas Q y —Q, Q' y —Q', Q'' y —Q'',..... que se equilibran dos á dos sobre cada uno de ellos. Acabamos de ver, que sin cambio alguno en las ligaduras del sistema, las fuerzas Q, Q', Q''..... producen el movimiento efectivo del sistema; luego las fuerzas P, P', P''....., —Q, —Q', —Q'',..... se equilibran, puesto que el movimiento no cambia por su supresion. Así venimos á parar en consecuencia al teorema de d'Alambert, que se enuncia diciendo, *que las fuerzas motrices de un sistema se equilibran en cada instante con fuerzas iguales y contrarias á las fuerzas que producirian su movimiento efectivo, si todos sus puntos vinieran á ser libres.*

598. Puede presentarse el teorema de d'Alambert bajo otra forma, muy conveniente en algunos casos. Descompongamos la fuerza P aplicada al punto M (figura 263), en dos, una la fuerza Q, y la otra una fuerza que llamaremos R. Sean del mismo modo Q', R', Q'', R'',..... las componentes análogas de las demas fuerzas P', P'',..... Se pueden reemplazar las fuerzas P, P', P'',.... por sus componentes Q y R, Q' y R', Q'' y R'',.....; mas entónces se ve, que las fuerzas R, R', R'',..... deben equilibrarse por sí mismas, puesto que las componentes Q, Q', Q'',..... dan al sistema el mismo movimiento que las fuerzas P, P', P'',..... Las fuerzas R, R', R'' se llaman fuerzas *perdidas*; y las fuerzas Q, Q', Q'', se llaman fuerzas *efectivas*, porque producen en el sistema el mismo

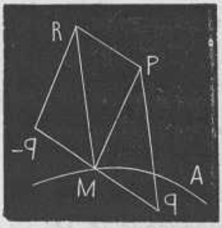

Fig. 263.

efecto que las fuerzas motrices P, P′, P″,..... Luego se puede enunciar el teorema, diciendo, que en cada instante, *las fuerzas perdidas se equilibran.*

Este enunciado equivale al precedente, porque cada fuerza R es la resultante de las fuerzas P y —Q. Decir que las fuerzas R se equilibran, equivale á decir que sus componentes P y—Q, P′ y—Q′,..... se equilibran.

Ecuacion general del movimiento de un sistema. Sus consecuencias.

599. Por el teorema de d'Alambert todas las cuestiones de movimiento se reducen á cuestiones de equilibrio, entre las fuerzas directamente aplicadas, y las de reaccion de sus diferentes puntos.

Esto supuesto, veamos cómo de este teorema se deducen las ecuaciones del movimiento de un sistema, que serán tantas como coordenadas independientes contiene.

Sean P la fuerza aplicada al punto M, cuya masa es m, X, Y, Z, sus componentes paralelas á los ejes; las de la fuerza de reaccion, que hemos llamado —Q, son

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{dy^2}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Las dos fuerzas P y —Q pueden reemplazarse por tres fuerzas paralelas á los ejes, cuyas expresiones son

$$X-m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y-m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z-m\frac{dz^2}{dt^2}.$$

Para las fuerzas P′ y—Q′, P″ y—Q″,..... aplicadas en los puntos M′, M″,..... obtendremos expresiones análogas. Como todas estas fuerzas se equilibran, aplicando el teorema de las velocidades virtuales, tendremos

$$\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{d^2t}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z$$
$$+\left(X'-m'\frac{d^2x'}{dx^2}\right)\delta x'+.....=0,$$

ecuación que puede ponerse bajo la forma

$$(1)\quad \Sigma\Big[\Big(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\delta x+\Big(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\Big)\delta y+\Big(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\Big)\delta z\Big]=0.$$

Esta es la ecuacion general del movimiento de un sistema, que dará en todos los casos tantas ecuaciones como coordenadas independientes tiene el sistema; en ella el signo Σ se extiende á tantos trinómios de esta forma, como puntos materiales tiene el sistema; y δx, δy, δz designan las componentes de un movimiento virtual cualquiera, que se podrá hacer sufrir al punto $M(x, y, z)$, en un instante cualquiera del movimiento, sin que dejen de verificarse las condiciones ó ligaduras del sistema, tales como son en el momento que se considera, y no entrando para nada el tiempo en las cantidades δx, δy, δz, Las componentes X, Y, Z serán nulas para todos los puntos materiales en los cuales no se aplique ninguna fuerza.

600. Por medio de la ecuacion general que acabamos de establecer, vamos á ver cómo se obtienen en cada caso las ecuaciones del movimiento, es decir, un sistema de tantas ecuaciones como coordenadas independientes hay en el sistema material en movimiento.

Sean

$$(2)\quad L=0,\ M=0,\ N=0,\ldots.$$

k ecuaciones de condicion, que expresan las ligaduras del sistema; estas ecuaciones contendrán, ademas de las coordenadas de los diferentes puntos, el tiempo, de suerte, que las condiciones pueden variar con el tiempo, y deben quedar satisfechas por el sistema en su posicion actual, y en la que corresponda á un cambio de posicion cualquiera. Habrá, pues, que diferenciar las ecuaciones (2) con respecto á $x, y, z, x', y', z',\ldots.$, sin hacer variar el tiempo. Obtendremos así entre las variaciones δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y',\ldots.$ las k ecuaciones siguientes:

$$
(3)\quad\left\{\begin{array}{l}
\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0,\\
\frac{dM}{dx}\delta x+\frac{dM}{dy}\delta y+\frac{dM}{dz}\delta z+\frac{dM}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0,\\
\frac{dN}{dx}\delta x+\frac{dN}{dy}\delta y+\frac{dN}{dz}\delta z+\frac{dN}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

Si n es el número de puntos del sistema, habrá, por consiguiente, $3n-k$ variaciones arbitrarias, y k variaciones funciones de éstas, determinadas por las k ecuaciones precedentes. Sustituiremos los valores de estas k variones en la ecuacion (1), é igualando á cero los coeficientes de las $3n-k$ variaciones restantes, obtendremos $3n-k$ ecuaciones diferenciales, en las que entrará el tiempo, las fuerzas y las coordenadas de los puntos del sistema; uniéndolas con las k relaciones (2), tendremos $3n$ ecuaciones para determinar las $3n$ variables $x, y, z, x', y', z'\ldots\ldots$ en funcion del tiempo: no habrá más que integrar estas ecuaciones, para conocer la posicion de cada punto del sistema en una época cualquiera del movimiento.

601. Para verificar la eliminacion indicada, podemos emplear el método de los factores arbitrarios. Si multiplicamos las ecuaciones (3) por los factores $\lambda, \mu, \nu,\ldots\ldots$, las sumamos con la ecuacion (1) desarrollada, é igualamos á cero los coeficientes de las $3n$ variaciones, obtendremos las $3n$ ecuaciones siguientes:

$$
(4)\quad\left\{\begin{array}{l}
m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\nu\frac{dN}{dx}+\ldots\ldots\\
m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\nu\frac{dN}{dy}+\ldots\ldots\\
m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}+\nu\frac{dN}{dz}+\ldots\ldots\\
m'\frac{d^2x'}{dt^2}=X'+\lambda\frac{dL}{dx'}+\mu\frac{dM}{dx'}+\nu\frac{dN}{dx'}+\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
$$

La eliminacion de las k factores arbitrarios λ, μ, ν,..... entre estas ecuaciones, nos dará $3n-k$ ecuaciones diferenciales de segundo órden entre las componentes de las fuerzas X, Y, Z,..... las coordenadas x, y, z, x', y', z',..... y el tiempo; que unidas á las k ecuaciones (2), darán un grupo de $3n$ ecuaciones para determinar las $3n$ coordenadas en funcion del tiempo. Suponemos que las componentes de las fuerzas X, Y, Z, X'.... son conocidas, ó están expresadas en funcion de las coordenadas x, y, z, x',..... y del tiempo.

602. Los factores λ, μ, ν, representan las fuerzas perdidas, y hacen conocer las tensiones y presiones que se ejercen en las ligaduras físicas del sistema. Para verlo claro, descompongamos la fuerza P en sus dos componentes Q y R, y hagamos la misma descomposicion para las fuerzas P', P'',..... Sabemos que si se suprimen las fuerzas perdidas R, R', R'',..... cada punto conservará su movimiento; y ademas, que bajo la accion de las fuerzas efectivas Q, Q', Q'',..... cada punto tendria el mismo movimiento, que si se hiciera enteramente libre; de suerte, que los puntos sujetos á las ligaduras dadas se moverán entónces sin ejercer ninguna accion los unos sobre los otros, y por consiguiente, las ligaduras físicas del sistema no experimentan ni tensiones ni presiones, cuando se suprimen las componentes R, R' R'',..

Si se restablecen estas componentes, se equilibran por medio de las ligaduras del sistema y el movimiento se conserva el mismo; luego, vemos que estas últimas fuerzas producen solas las tensiones y presiones en las ligaduras del sistema. Por consiguiente, cuando se conozcan R, R', R'',..... se podrán determinar las acciones que las ligaduras producen sobre los puntos del sistema, y por consiguiente, las tensiones y presiones que las ligaduras experimentan, como hemos visto en un sistema de puntos sujetos á condiciones cualesquiera, y sometidos á fuerzas dadas que se equilibran.

Fácilmente se obtienen las expresiones de las fuerzas perdidas R, R′, R″,..... Las componentes de R paralelas á los ejes son

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y - m\frac{dy^2}{dt^2},\ Z - m\frac{dz^2}{dt^2},$$

las de R′ son

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2},\ Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2},\ Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Y de las ecuaciones (4) se deducen

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots\right),$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots\right),$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \ldots\right),$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} + \ldots\right),$$

. . . .

expresiones en las que se deben reemplazar λ, μ, ν,..... por sus valores determinados por las ecuaciones (4).

603. Si el sistema está determinado por otras variables, que no sean las coordenadas de sus puntos, se seguirá siempre la misma marcha; y el teorema de las velocidades virtuales nos dará siempre tantas ecuaciones como variables independientes existan; de suerte, que uniéndolas á las ecuaciones de condicion, se podrán siempre determinar todas las variables en funcion del tiempo, que es precisamente el objeto del problema propuesto.

Las constantes introducidas por la integracion de las $3n - k$ ecuaciones, serán $6n - 2k$, y se determinarán por los datos que resultan del conocimiento del estado inicial del sistema, es decir, por las coordenadas iniciales de todos sus puntos, y por los valores de las velocidades iniciales de que van animados los mismos. Estas posiciones iniciales no son enteramente arbitrarias, porque sus coordenadas deben satisfacer á las k ecuaciones dadas; de suerte, que no se pueden dar arbitrariamente más que $3n-k$ de estas coordenadas. Tambien las componentes de sus velocidades deben satisfacer á las k ecuaciones que se obtienen entre $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$,...., diferenciando las k ecuaciones dadas; de donde se sigue, que no se podrán dar arbitrariamente más que $3n-k$ componentes de las velocidades iniciales. De manera, que para que el estado inicial sea enteramente determinado, como es indispensable, es preciso que se nos den $6n-2k$ cantidades, que pueden escogerse arbitrariamente, pero no se nos pueden dar más.

Esto supuesto, cuando se hayan integrado las ecuaciones diferenciales, se tendrán para determinar todas las coordenadas de las n puntos, primero las k ecuaciones dadas, y segundo $3n-k$ ecuaciones, que contendrán $6n-2k$ constantes arbitrarias. Debiendo ser éstas $3n-k$ ecuaciones satisfechas para cualquier valor del tiempo, se hará en ellas $t=0$, y se reemplazarán las coordenadas por sus valores iniciales, resultarán $3n-k$ ecuaciones entre las constantes y cantidades conocidas; las k ecuaciones restantes serán necesariamente satisfechas, puesto que se han debido escoger las coordenadas iniciales, de suerte, que las ligaduras iniciales existan. Diferenciando despues las $3n-k$ ecuaciones entre las coordenadas, se tendrá un número igual entre las componentes de las velocidades; y si se sustituyen los valores iniciales de las coordenadas y de las componentes, se tendrán $3n-k$ nuevas ecuaciones entre las constantes arbitrarias y cantidades conocidas. Se tendrán, pues, $6n-2k$ ecuaciones para determinar las $6n-2k$ constantes, y se podrán deducir los valores de estas incógnitas; y las coordenadas de todos los puntos del sistema serán completamente determinadas en funcion del tiempo.

Qué son fuerzas instantáneas ó percusiones. Su medida.

604. La observacion y la experiencia enseñan que no hay fuerzas instantáneas, en el sentido riguroso de la palabra, es decir, que no existe ninguna fuerza capaz de producir, en un instante indivisible, un cambio finito ni en la magnitud ni en la direccion de la velocidad de un cuerpo cualquiera. Pero hay fuerzas que se llaman *instantáneas*, las cuales, actuando con una intensidad muy grande, durante un tiempo sumamente pequeño, y casi siempre inapreciable, comunican á un cuerpo, en este intervalo de tiempo, una velocidad finita que puede llegar á ser considerable. Estas fuerzas se llaman tambien fuerzas *impulsivas* ó *percusiones*.

Supongamos un cuerpo, ó punto material, solicitado por una fuerza de esta clase P, segun una recta OX; la ecuacion de su movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{P},$$

siendo m la masa del cuerpo. Si integramos esta ecuacion desde $t=0$, hasta $t=\theta$, siendo θ un intervalo de tiempo muy pequeño, tal como una fraccion de segundo, se tiene, si u es la velocidad del cuerpo al fin del tiempo θ, y suponiendo nula la velocidad inicial,

$$mu=\int_0^\theta \mathrm{P}dt.$$

Concluido el tiempo θ, la fuerza P deja de actuar, y por consiguiente el móvil conserva su velocidad adquirida u. Pero entónces la cantidad de movimiento mu, poseida por el cuerpo, é igual á $\int_0^\theta P dt$, puede tener y tendrá un valor finito, siempre que la intensidad de la fuerza P sea muy grande, durante el tiempo muy pequeño θ.

Cuando la direccion de la fuerza P es variable durante el tiempo θ, si representamos por X, Y, Z las componentes de esta fuerza, tendremos las tres ecuaciones

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z;$$

y al fin del tiempo θ, serán

$$m\frac{dx}{dt}=\int_0^\theta X dt, \quad m\frac{dy}{dt}=\int_0^\theta Y dt, \quad m\frac{dz}{dt}=\int_0^\theta Z dt.$$

Hemos visto (333) que una fuerza puede medirse por la cantidad de movimiento; y si asimilamos la cantidad de movimiento mv á una fuerza, dirigida segun la tangente á la trayectoria, $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, serán las componentes de esta fuerza paralelas á los ejes; y por esto se las llama componentes de la cantidad de movimiento. Las ecuaciones precedentes dan las expresiones de estas componentes en funcion de las componentes de la fuerza instantánea.

Extension del teorema de d'Alambert á las fuerzas instantáneas. Cómo se aplica el teorema en éste caso.

605. El teorema de d'Alambert se aplica á las fuerzas instantáneas, reemplazando estas fuerzas por las cantidades de movimiento que son capaces de producir.

Consideremos el sistema durante el tiempo, muy pequeño, θ comprendido entre t_0, y $t_0+\theta$, que es el de la accion de la fuerza instantánea. La fórmula general

$$(a)\ \Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

contiene las variaciones δx, δy, δz, $\delta x'$,..... las cuales pueden considerarse como constantes durante el corto intervalo de tiempo θ. Para probarlo, sean

$$(b)\quad L=0,\ M=0,\ N=0,\ldots.$$

las k ecuaciones de condicion; las variaciones δx, δy,..... están sujetas á las k ecuaciones siguientes:

$$(c)\quad \begin{cases} \frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0,\\ \frac{dM}{dx}\delta x+\frac{dM}{dy}\delta y+\frac{dM}{dz}\delta z+\frac{dM}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0,\\ \frac{dN}{dx}\delta x+\frac{dN}{dy}\delta y+\frac{dN}{dz}\delta z+\frac{dN}{dx'}\delta x'+\ldots\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ahora, durante el muy corto tiempo θ, los puntos del sistema no experimentan más que cambios de lugar insensibles, de suerte, que se pueden considerar sus coordenadas x, y, z, x', y', z',..... como constantes; de donde resulta, que las variaciones δx, δy,.... permanecen tambien constantes.

Esto supuesto, multipliquemos la ecuacion (a) por dt, y considerando á $\delta x, \delta y, \delta z$..... como constantes, integremos con respecto á t, desde t_0, hasta $t_0+\theta$; tendremos

$$(d)\quad \begin{cases} \Sigma\Big[\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}Xdt+m\frac{dx_0}{dt}-m\frac{dx}{dt}\right)\delta x\\ +\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}Ydt+m\frac{dy_0}{dt}-m\frac{dy}{dt}\right)\delta y\\ +\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta}Zdt+m\frac{dz_0}{dt}-m\frac{dz}{dt}\right)\delta z\Big]=0, \end{cases}$$

designamos con el sub-índice 0 los valores de las cantidades en la época t_0, y sin sub-índice los valores de las mismas cantidades en la época $t_0+\theta$.

Para interpretar esta ecuacion, observaremos, que la fuerza P cuyas componentes X, Y, Z, están aplicadas durante el tiempo θ á la masa m, comunicarian al punto material, si estuviera libre, una cantidad de movimiento mu, cuyas componentes son (604) $\int X dt, \int Y dt, \int Z dt$; los términos $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ son las componentes de la cantidad de movimiento mv, que el punto m posee al cabo del tiempo $t_0+\theta$; del mismo modo $m\frac{dx_0}{dt}$, $m\frac{dy_0}{dt}$, $m\frac{dz_0}{dt}$ son las componentes de la cantidad de movimiento mv_0, siendo v_0 la velocidad al fin del tiempo t_0; y si consideramos, ademas, las cantidades de movimiento como fuerzas, la ecuacion (d) nos dice, *que existe el equilibrio entre las cantidades de movimiento que las fuerzas instantáneas comunicarian á los diferentes puntos, si estuvieran libres, las cantidades de movimiento que poseen al momento en que las fuerzas instantáneas empiezan á actuar, y las que tienen despues de la accion, tomando estas últimas con signo contrario.* Este enunciado supone siempre, que prescindimos durante el tiempo θ de las fuerzas ordinarias, tales como la gravedad, que no tienen una intensidad muy grande.

Si el sistema parte del reposo, $m\frac{dx_0}{dt}, m\frac{dy_0}{dt}, m'\frac{dz_0}{dt}, m'\frac{dx'_0}{dt}, \ldots$ son cero, y desaparecen de la ecuacion (d), que se puede enunciar diciendo, *que existe el equilibrio entre las cantidades de movimiento que las fuerzas darian á los diversos puntos del sistema, si estuvieran libres, y las que tienen efectivamente, y con las cuales comienza á moverse el sistema al fin del tiempo θ, tomadas estas últimas con signo contrario.*

606. Para aplicar el teorema de d'Alambert en el caso en que haya fuerzas instantáneas, debemos seguir la marcha indicada en el núm. (600). De las ecuaciones (c) podemos deducir los valores de k variaciones, y sustituirlos en la ecuacion (d), despues igualaremos á cero los coeficientes de las $3n-k$ variaciones restantes, y tendremos las ecua-

ciones que resuelven el problema. Pero es preferible emplear el método de los factores arbitrarios, y tendremos designando por $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ estos k factores arbitrarios, las $3n$ ecuaciones siguientes

$$\left\{\begin{array}{l} m\frac{dx}{dt}-m\frac{dx_0}{dt}=\int \mathrm{X}dt+\lambda\frac{d\mathrm{L}}{dx}+\mu\frac{d\mathrm{M}}{dx}+\nu\frac{d\mathrm{N}}{dx}+\ldots\ldots \\ m\frac{dy}{dt}-m\frac{dy_0}{dt}=\int \mathrm{Y}dt+\lambda\frac{d\mathrm{L}}{dy}+\mu\frac{d\mathrm{M}}{dy}+\nu\frac{d\mathrm{N}}{dy}+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En las cuales $\int \mathrm{X}dx$, $\int \mathrm{Y}dt$, $\int \mathrm{Z}dt$ son las componentes de la cantidad de movimiento, que la fuerza P sería capaz de comunicar al punto m en el tiempo θ, si estuviera libre, la cual es conocida por la experiencia.

Se reemplazarán estas cantidades y sus análogas por sus valores, y tendremos $3n-k$ ecuaciones, resultado de la eliminacion de los factores $\lambda, \mu, \nu, \ldots\ldots$ entre las $3n$ ecuaciones.

Por otra parte, si diferenciamos con relacion al tiempo las ecuaciones de condicion, tendremos k ecuaciones como la siguiente,

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt}+\frac{d\mathrm{L}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d\mathrm{L}}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d\mathrm{L}}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{d\mathrm{L}}{dx}\cdot\frac{dx'}{dt}+\ldots\ldots=0;$$

y considerando como constantes las funciones $\frac{d\mathrm{L}}{dt}$, $\frac{d\mathrm{L}}{dx}$,..... que no varian sensiblemente, en él duracion del corto intervalo θ, se podrán poner bajo la forma

$$\frac{d\mathrm{L}}{dx}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{d\,t}\cdot\right)+\frac{d\mathrm{L}}{dy}\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)+\ldots\ldots=0.$$

Tendremos, pues, $3n$ ecuaciones para determinar las $3n$ incógnitas $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$,....; es decir, las componentes de la velocidad de cada punto.

LECCION L.

Aplicaciones del teorema de d'Alambert. Movimiento de un sistema formado por dos puntos mantenidos á una distancia invariable.—Movimiento de traslacion de un sistema de dos cuerpos unidos por una varilla incompresible é inestensible.—Movimiento de varios cuerpos enlazados por cuerdas.—Marcha de un tren sobre una vía férrea. Traccion á distancia.—Movimiento de dos cuerpos enlazados por un hilo y colocados sobre dos planos inclinados.—Movimiento de una cadena sobre dos planos inclinados.—Movimiento de dos puntos, cuya distancia es invariable, sujetos á permanecer sobre dos curvas dadas.

Aplicaciones del teorema de d'Alambert. Movimiento de un sistema formado por dos puntos mantenidos á una distancia invariable.

607. Todos los problemas de movimiento se resuelven por medio del teorema de d'Alambert, siguiendo el método general expuesto en la leccion anterior, y á fin de ver cómo debe procederse en las aplicaciones de este importante teorema, en los diferentes casos que pueden ocurrir, vamos á presentar en esta leccion algunos casos particulares.

Dos puntos M y M′ (fig. 26), solicitados por sus pesos mg, $m'g$, y mantenidos á una distancia invariable $MM'=l$, por una varilla rígida, que supondremos sin masa y sin peso, forman un sistema libre en el espacio; vamos á buscar las ecuaciones diferenciales de su movimiento, y á deducir de ellas las leyes con que se verifica.

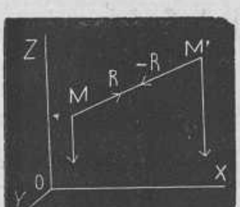

Fig. 264.

La ecuacion que expresa la invariabilidad de la distancia entre los puntos, ó sea la ligadura del sistema, es siendo M (x, y, z), y M$'(x', y', z')$,

$$(1)\quad l^2 = (x-x')^2 + (y-y_1)^2 + (z-z')^2,$$

variando esta ecuacion, tendremos

$$(2)\quad (x-x')(\delta x - \delta x') + (y-y')(\delta y - \delta y') + (z-z')(\delta z - \delta z') = 0.$$

La ecuacion general para un sistema de dos puntos es

$$(3)\quad \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)z\delta + \left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' + \left(Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y' + \left(Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\delta z' = 0.$$

Suponiendo el eje de las z vertical, tendremos

$$X = 0, \qquad X' = 0,$$
$$Y = 0, \qquad Y' = 0,$$
$$Z = -mg, \quad Z' = -m'g.$$

Eliminando, por sustitucion, una de las variaciones $\delta z'$, por ejemplo, entre las ecuaciones (2) y (3), sustistuyendo los valores anteriores, é igualando á cero las coeficientes de las cinco variaciones restantes $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y'$, resultarán las cinco ecuaciones diferenciales

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} + m'\left(g + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\right)\dfrac{x-x'}{z-z'} = 0, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} + m'\left(g + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\right)\dfrac{y-y'}{z-z'} = 0, \\ m\left(g + \dfrac{d^2z}{dt^2}\right) + m'\left(g + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\right) = 0, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} - m'\left(g + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\right)\dfrac{x-x'}{z-z'} = 0, \\ m'\dfrac{d^2y'}{dt^2} - m'\left(g + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\right)\dfrac{y-y'}{z-z'} = 0. \end{array}\right.$$

Estas cinco ecuaciones (4), unidas á la (1), bastan para determinar las seis coordenadas x, y, z, x', y', z', en funcion de t, y resuelven por lo tanto el problema. La integracion de las cinco ecuaciones diferenciales de segundo órden (4), producirá diez constantes arbitrarias, que se deducirán de las circunstancias iniciales del movimiento, es decir, que haciendo $t=0$, tendremos conocidas

$$x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}, \frac{dx'_0}{dt}, \frac{dy'_0}{dt}, \frac{dz'_0}{dt},$$

ó sean los valores de las coordenadas de los puntos móviles, y los valores de las velocidades iniciales de los mismos. Como son doce cantidades, y deben satisfacer á las dos ecuaciones (1) y (2), quedan diez que sirven para determinar las diez constantes de la integracion de las ecuaciones (4).

608. Este problema se puede resolver tambien directamente. Para ello sean T la tension de la varilla que une los puntos M y M', α, β, γ, los ángulos de la recta MM' con los ejes, introduciendo las fuerzas mútuas T y —T, podemos considerar los puntos M y M' como libres; y tendremos las seis ecuaciones

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{T}\cos\alpha, & m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}=-\mathrm{T}\cos\alpha, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{T}\cos\beta, & m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}=-\mathrm{T}\cos\beta, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{T}\cos\gamma-mg, & m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}=-\mathrm{T}\cos\gamma-m'g. \end{array}\right.$$

Teniendo presente que

$$\cos\alpha=\frac{x'-x}{l},\quad \cos\beta=\frac{y'-y}{l},\quad \cos\gamma=\frac{z'-z}{l};$$

sustituyendo estos valores, y despejando en cada una $\frac{\mathrm{T}}{l}$, tendremos

$$\frac{\mathrm{T}}{l}=\frac{m\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x'-x}=\frac{m\dfrac{d^2y}{dt^2}}{y'-y}=\frac{m\dfrac{d^2z}{dt^2}+mg}{z'-z}$$

$$=-\frac{m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}}{x'-y}=-\frac{m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}}{y'-x}=-\frac{m'\dfrac{d^2z'}{dt^2}+m'g}{z'-z};$$

serie de igualdades que da cinco ecuaciones distintas, prescindiendo de la tension T, que unidas á la (1) resuelven el problema.

Este método da á conocer al mismo tiempo la tension T.

Tambien pudiera tratarse este problema empleando para la eliminacion el método de los factores arbitrarios.

Movimiento de traslacion de un sistema de dos cuerpos unidos por una varilla incompresible é inestensible.

609. Dos cuerpos M y M' de masas m y m' unidos por una varilla incompresible é inestensible CD (fig. 265), cuya longitud es l, y su masa por unidad de longitud m_1, forman un sistema animado de un movimiento de traslacion, segun la direccion AB de la varilla, y están solicitados por dos fuerzas dadas F y F', segun la misma recta. Vamos á buscar el movimiento del sistema y la tension T de la varilla en un punto cualquiera de su longitud.

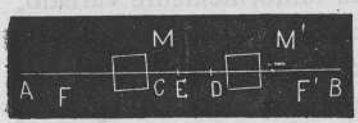

Fig. 265.

Siendo el movimiento del sistema rectilíneo y de traslacion, las aceleraciones totales de los diferentes puntos, se reducen á las aceleraciones tangenciales, y son iguales entre sí, en cada instante. Las fuerzas de reaccion se componen, por consiguiente, en una fuerza única, igual á su suma algébrica, é igual en valor absoluto al producto de la aceleracion comun j por la masa total $m+m'+m_1 l$.

Segun el teorema de d'Alambert, debe existir el equilibrio entre esta fuerza y las F y F' directamente aplicadas al sistema, luego

$$F-F'-(m+m'+m_1 l)j=0,$$

suponiendo que el movimiento se acelera en el sentido de la fuerza F; la ecuacion es cierta en general, teniendo cuidado de dar los signos convenientes á las fuerzas.

De ella se deduce

$$j=\frac{F-F'}{m+m'+m_1l},\quad \text{ó}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F-F'}{m+m'+m_1l},$$

que integrada, dará la ecuacion finita del movimimiento

$$x=x_0+v_0t+\tfrac{1}{2}\frac{F-F'}{m+m'+m_1l}t^2;$$

en la cual x es la distancia de un punto particular del sistema á un orígen fijo, tamado á la derecha de D, al cabo del tiempo t, x_0, y v_0 los valores de esta distancia y de la velocidad comun, para $t=0$.

Esta ecuacion resuelve la primera parte del problema, y prueba que el movimiento es uniformemente variado, lo cual hubiéramos podido deducir inmediatamente, observando que el valor de la aceleracion j es constante.

610. Para encontrar la tension T de la varilla en el punto E, determinado por la distancia CE$=h$, supongamos cortada la varilla por este punto, y consideremos separadamente el sistema formado por cada una de las dos porciones, comprendidos los cuerpos M y M' á que está unida la varilla. Tomemos, por ejemplo, la porcion de la derecha del punto E; las fuerzas que actúan sobre esta porcion, considerada como aisladada, son la tension T, y la fuerza F'; la aceleracion j es la misma que la del movimiento comun, y podemos reemplazar en la ecuacion que da j, la fuerza F por T, la masa m por cero, y la masa m_1l por m_1h; se tendrá

$$j=\frac{T-E'}{m'+m'h};$$

igualando este valor de j con el de aquella ecuacion, resulta

$$\frac{T-F'}{m'+m_1h}=\frac{F-F'}{m+m'+m_1l};$$

de esta igualdad se deduce

$$T=\frac{(m'+m_1h)(F-F')}{m+m'+m_1l}+F'.$$

Haciendo $h=0$, y $h=l$ en esta fórmula, obtendremos la tension en los puntos C y D.

Si la masa de la varilla es muy pequeña, podemos hacer $m_1=0$, y será

$$T=\frac{m'(F-F')}{m+m'}+F'=\frac{F'm+m'F}{m+m'}$$

y la tension es entónces constante en toda la extension de la varilla.

Si las fuerzas F y F′ están aplicadas directamente á los extremos de la varilla, sin la interposicion de las masas m y m', serán $m=m'=0$, y tendremos

$$T=F'+\frac{h}{l}(F-F')=\frac{F'(l-h)+Fh}{l}$$

y la tension de la varilla varía desde $T=F'$, en el punto D, hasta $T=F$ en el punto C.

Movimiento de varios cuerpos ligados por cuerdas.

611. Supongamos un sistema de cuerpos m, m', m'' (figura 266), unidos unos á otros por medio de cuerdas, movible sobre un plano horizontal, y representemos la fuerza motriz por un peso H, cuya masa es μ, que tira de la última cuerda, vamos á deducir las leyes del movimiento de un sistema de esta clase. En un instante cualquiera todos los puntos del sistema tienen una misma velocidad; luego, $m\frac{dv}{dt}$, $m'\frac{dv}{dt}$, $m''\frac{dv}{dt}$ y $\mu\frac{dv}{dt}$ representan las fuerzas capaces de dar á estas masas, si estuvieran libres, su movimiento efectivo.

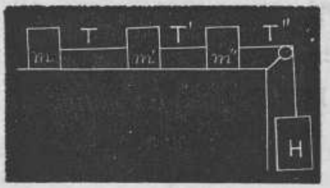

Fig. 266.

Como μg es la fuerza motriz del sistema, y esta fuerza segun el teorema de d'Alambert, debe equilibrar á las precedentes, tomadas en sentido contrario, la ecuacion del movimiento es

$$\mu g-\mu\frac{dv}{dt}-m\frac{dv}{dt}-m'\frac{dv}{dt}-m''\frac{dv}{dt}=0;$$

ó lo que es lo mismo, llamando $M=\mu+m+m'+m''$, á la masa total del sistema,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\mu g}{M};$$

el movimiento es tambien en este caso uniformemente acelerado, y la fuerza aceleratriz es á g, como μ es á M, ó como la masa μ del peso motor es á toda la masa del sistema.

Si quisiéramos tener en cuenta el rozamiento, supondríamos aplicada á cada masa una fuerza, que le fuera proporcional, y dirigida en sentido contrario al movimiento. Tambien en este caso sería el movimiento uniformemente acelerado.

Puede tambien resolverse este problema sin hacer uso del teorema de d'Alambert. Sean T, T', T'', las tensiones de las tres cuerdas, la tension T, por ejemplo, es igual á una cualquiera de las dos fuerzas iguales y contrarias que deberíamos aplicar en los puntos m y m' para reemplazar la cuerda que les une, si llegára á suprimirse; tendremos, por lo tanto,

$$m\frac{dv}{dt}=T,\quad m'\frac{dv}{dt}=T'-T$$

$$m''\frac{dv}{dt}=T''-T',\quad \mu\frac{dv}{dt}=\mu g-T''.$$

Sumando estas ecuaciones, resulta como ántes

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\mu g}{M}.$$

Con este valor de $\frac{dv}{dt}$, se deducen

$$T=m\frac{\mu g}{M},\quad T'=(m+m')\frac{\mu g}{M},\quad T''=(m+m'+m'')\frac{\mu g}{M};$$

en las cuales se ve, que

$$T < T' < T'',$$

lo cual debia suceder, porque la tension T″ pone en movimiento tres masas, T′ dos, y T una sola.

Hemos prescindido en este cálculo de la masa de las cuerdas. Si la hubiéramos tenido en cuenta, la tension sería variable en la extension de una misma cuerda.

Marcha de un tren sobre una vía férrea. Traccion á distancia.

612. Con arreglo á los principios que acabamos de exponer, se determina el movimiento de los trenes en las vías férreas.

Supongamos un tren CD (fig. 267), cuya masa es m, que recorre la recta $AB=l$, en el tiempo t; y sale de la estacion A sin velocidad, y llega á la estacion B igualmente sin velocidad, es decir, que estando parado en A, parte, y viene á parar en B.

Fig. 267.

El movimiento debe por lo tanto acelerarse á la partida, adquirir despues un máximo de velocidad, y luégo disminuir ésta hasta ser cero en el punto de llegada; y para que la aceleracion de estos diversos movimientos sea la menor posible en valor absoluto, es necesario evidentemente hacer de manera que la aceleracion sea constante durante la primera mitad del trayecto, y despues que se haga negativa, sin cambiar de valor absoluto durante la segunda mitad. La velocidad media en el trayecto es igual á $\frac{l}{t}$; la velocidad máxima del tren tendrá lugar en esta hipótesis, en el medio i del camino recorrido, y será el duplo $\frac{2l}{t}$ de la velocidad media; la aceleracion j, constante prescindiendo del signo, durante todo el trayecto, será igual al cociente de la velocidad $\frac{2l}{t}$, adquirida en el tiempo $\frac{t}{2}$, por el tiempo $\frac{t}{2}$ empleado en adquirirla, es decir, igual á $\frac{4l}{t^2}$. La fuerza de reaccion correspondiente á esta aceleracion, es $m\frac{4l}{t^2}$ en valor absoluto; esta es la medida de la fuerza F, motriz en la primera mitad del movimiento, y resistente en la segunda mitad, que es preciso aplicar al tren, durante el trayecto del punto A al punto B; el exceso de la fuerza de traccion desarrollada por la locomotora, sobre las resistencias sufridas por el tren en el primer período, y el de las resistencias sobre la fuerza de traccion durante el segundo, son los que producen el incremento y decremento respectivos de la velocidad.

Si designamos por R la suma de las resistencias en un cierto instante, y por T la fuerza de traccion, tendremos

$$T-R=\frac{4lm}{t^2}, \quad \text{ó} \quad T=R+\frac{4lm}{t^2}.$$

La traccion T mide la tension de la amarra que une el ténder al primer wagon; y vemos que excede á la suma de las resistencias en la cantidad $\frac{4lm}{t^2}$, la cual es tanto más grande, cuanto mayores son l y m, y la duracion t del trayecto es más pequeña. Se podrá por esta fórmula calcular la tension de las amarras, y asegurarse de que el esfuerzo de la locomotora no llegará á romperlas.

En los trenes expresos, el número $\frac{l}{t^2}$ tiene un valor muy grande, porque los trayectos son grandes, y el tiempo destinado á recorrerlos es lo más pequeño posible; pero la masa m del tren es pequeña. El exceso de la tension, debido á la fuerza de reaccion, no adquiere un valor muy grande. Lo contrario sucede en los trenes de mercancías: la relacion

$\frac{l}{t^2}$, es más pequeña que en los expresos, pero el factor m es mucho mayor, y el término $\frac{4lm}{t^2}$ puede llegar á tener un valor muy grande.

613. Suele emplearse en algunos casos la *traccion á distancia*, y vamos á ver cómo se ejerce esta traccion.

Supongamos que se emplea, para poner en movimiento un tren CD, un cable inestensible que se arrolla en el cilindro B, á medida que se desarrolla del cilindro A (figura 268). Sea, como ántes, $AB=l$ su longitud, y t el tiempo empleado en recorrerla; la aceleracion del tren, uniformemente repartida á lo largo del trayecto es igual á $\pm\frac{4l}{t^2}$, con el signo $+$ en el primer período, y el $-$ en el segundo. Sean ω la seccion del cable, y ρ el peso específico del metal de que está formado; el cable tendrá en cada instante la misma aceleracion que el tren CD, y si llamamos P al peso del tren y R á la suma de las resistencias que se oponen al movimiento, el exceso de la tension del cable en el punto B, sobre la tension desarrollada en el punto A, será igual, segun el problema anterior, á

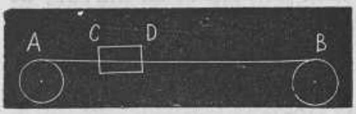

Fig. 268.

$$R+\left(\frac{\omega\rho l}{g}+\frac{P}{g}\right)\frac{4l}{t^2},$$

durante todo el período de la aceleracion positiva.

El límite inferior de esta tension corresponde al caso ideal en que se suprimiera el tren, sin modificar las velocidades, y en el que la tension fuera nula en el punto A; la cual es igual entónces á $\frac{\omega\rho l}{g}\cdot\frac{4l}{t^2}=\frac{4\omega\rho l^2}{gt^2}$; dividiendo por ω, resultará $\frac{4\rho l^2}{gt^2}$ para el límite inferior de la tension del cable, por unidad de seccion.

Para que el cable, que supondremos de hierro, no se rompa, es preciso que esta tension no exceda de 4kg. por milímetro cuadrado, ó 4000000 kg. por metro cuadrado; límite práctico de los esfuerzos que se prolongan durante un cierto tiempo. Tendremos, pues, la desigualdad

$$\frac{4\rho l^2}{gt^2} < 4000000, \quad ó \quad \frac{l}{t} < \tfrac{1}{2}\sqrt{4000000 \cdot \frac{g}{\rho}}.$$

Para el hierro $\rho = 7800$ kg. por metro cúbico, $g = 9.8$; el límite superior de $\frac{l}{t}$, velocidad media en el trayecto, es 35 metros próximamente; si la velocidad es mayor, se altera rápidamente la elasticidad del cable y se rompe muy pronto.

Movimiento de dos cuerpos unidos por un hilo y colocados sobre dos planos inclinados.

614. Dos cuerpos pesados C y C′ (fig. 269), cuyas masas son m y m', están colocados sobre dos planos inclinados AB y A′B, y unidos por un hilo que pasa sobre una polea situada en la arista comun á los dos planos. Las dos porciones del hilo son respectivamente paralelas á estos dos planos y pasan por los centros de gravedad de los dos cuerpos; vamos á buscar la ley del movimiento de este sistema.

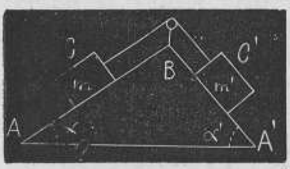

Fig. 269.

Podemos suponer que cada una de las masas está reunida en su centro de gravedad; sean $Bm = x$, $Bm' = x'$, $\alpha = BAA'$, $\alpha' = BA'A$, y l la longitud total del hilo. Prescindiendo del rozamiento, la fuerza motriz del punto m, en la direccion de su movimiento, es $mg \operatorname{sen} \alpha$, y la que daria á este punto si estuviera libre, el movimiento que tiene realmente es $m\frac{d^2x}{dt^2}$. Segun el teorema de d'Alambert, la fuerza $mg\,\text{sen}\,\alpha - m\frac{d^2x}{dt^2}$ debe equilibrarse con la fuerza análoga $m'g\,\text{sen}\,\alpha' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}$, que estará aplicada en el punto m' y tirará en sentido contrario de la anterior; de modo que tendremos

$$(1)\qquad m\left(g\,\text{sen}\,\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m'\left(g\,\text{sen}\,\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right).$$

Se tiene ademas la relacion

$$x + x' = l,$$

por medio de la cual puede eliminarse x' en la ecuacion anterior; verificándolo y despejando $\frac{d^2x}{dt^2}$, resulta

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{m\,\text{sen}\,\alpha - m'\,\text{sen}\,\alpha'}{m+m'}.$$

Siendo la aceleracion $\frac{d^2x}{dt^2}$ constante, el movimiento es uniformemente acelerado. Integrando esta ecuacion, resulta

$$(3)\qquad v = \frac{dx}{dt} = g\frac{m\,\text{sen}\,\alpha - m'\,\text{sen}\,\alpha'}{m+m'}t + c,$$

$$(4)\qquad x = g\frac{m\,\text{sen}\,\alpha - m'\,\text{sen}\,\alpha'}{m+m'}\frac{t^2}{2} + ct + c';$$

siendo las constantes c y c' los valores de v y de x, cuando $t=0$.

Si fuera

$$m\,\text{sen}\,\alpha = m'\,\text{sen}\,\alpha',$$

se tendria

$$v = c, \quad x = ct + c',$$

y el movimiento sería uniforme. Si ademas fuera $c=0$; se tendria $v=0$, y $x=c'$. El sistema permaneceria en reposo, lo cual está perfectamente conforme con las condiciones de equilibrio de dos cuerpos, colocados como en el actual problema.

615. Se puede resolver este problema sin hacer uso del teorema de d'Alambert, introduciendo en el cálculo la tension T del hilo. Las ecuaciones del movimiento de cada uno de los cuerpos, son

$$(b)\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=mg\,\text{sen}\,\alpha-\text{T}, \\ m'\dfrac{dx'^2}{dt^2}=m'g\,\text{sen}\,\alpha'-\text{T}; \end{cases}$$

de las cuales eliminando T, se deduce

$$m\left(g\,\text{sen}\,\alpha-\frac{d^2x}{dt^3}\right)=m'\left(g\,\text{sen}\,\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right);$$

teniendo presente, que $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{d^2x'}{dt^2}$, á causa de que $x+x'=l$, resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g(m\,\text{sen}\,\alpha-m'\,\text{sen}\,\alpha')}{m+m'},$$

y la primera de las ecuaciones da

$$(d)\quad \text{T}=\frac{gmm'(\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha')}{m+m'};$$

en la que vemos que la tension es constante.

Pudiéramos haber obtenido el mismo resultado, empleando el teorema de las velocidades virtuales. Las fuerzas

$$m\left(g\,\text{sen}\,\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad m'\left(g\,\text{sen}\,\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)$$

se equilibran, y tendremos en virtud de dicho teorema

$$(a)\quad m\left(g\,\text{sen}\,\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+m'\left(g\text{sen}\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x'=0;$$

de la ecuacion $x+x'=l$, resulta $\delta x+\delta x'=0$, y eliminando $\frac{\delta x}{\delta x'}$ obtendremos como ántes

$$m\left(g\,\text{sen}\,\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-m'\left(g\,\text{sen}\,\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=0.$$

El método de los factores arbitrarios nos conduce al mismo resultado. Multiplicando por $-\lambda$ la ecuacion

$$\delta x+\delta x'=0,$$

y sumándola con la (*a*), resulta

$$\left[m\left(g\operatorname{sen}\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\lambda\right]\delta x+\left[m'\left(g\operatorname{sen}x'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)-\lambda\right]\delta x'=0;$$

é igualando á cero los coeficientes de δx y $\delta x'$, tendremos

$$m\left(g\operatorname{sen}\alpha-\frac{dx^2}{dt^2}\right)=\lambda,$$

$$m'\left(g\operatorname{sen}\alpha'-\frac{dx^{2\prime}}{dt^2}\right)=\lambda.$$

Ecuaciones que no difieren de las (*b*), más que en que T está reemplazado por λ; de modo que el factor λ representa la tension T del hilo como debia suceder, segun lo dicho en el núm. (602)

Este problema da la teoría completa de la máquina d'Atwovd, haciendo $\alpha=\alpha'=90^0$, lo que reduce las fórmulas (3) y (4) del núm. 614 á las siguientes

$$v=\frac{g(m-m')}{m+m'}t+c,$$

$$x=\frac{g(m-m')}{m+m'}\cdot\frac{t^2}{2}+ct+c'.$$

La tension segun la fórmula (*d*) núm. 615, es

$$T=\frac{2gmm'}{m+m'}.$$

616. En este problema hemos supuesto conocidas las velocidades iniciales de las dos masas m y m'. Supongamos ahora que éstas se ponen en movimiento por fuerzas instantáneas, y determinemos las velocidades iniciales. Sean a y a' las velocidades que estas fuerzas instantáneas imprimirian á las masas m y m', si cada una de ellas estuviera libre, y designemos por v_0 la velocidad efectiva de la masa m despues de la percusion. La velocidad inicial de la masa m' será $-v_0$; porque, de $x+x'=l$, resulta

$$\frac{dx'}{dt}=-\frac{dx}{dt}.$$

Segun el teorema de d'Alambert, extendido á este caso, debe existir el equilibrio entre las cantidades de movimiento que las fuerzas instantáneas comunicarian á las dos masas, si estuvieran libres, y las que realmente tienen al empezar á moverse, tomando estas últimas en sentido contrario; se tendrá pues

$$m(a-v_0)=m'(a'+v_0)$$

de donde

$$v_0=\frac{ma-m'a'}{m+m'}.$$

Movimiento de una cadena sobre dos planos inclinados.

617. Para resolver este problema, análogo al anterior, sea CBC′ una cadena homogénea pesada, que descansa sobre dos planos inclinados, dispuestos como en la figura 269 de aquel problema. Empleando las mismas notaciones y llamando ρ á la masa de la unidad de longitud de la cadena, tendremos

$$x+x'=l.$$

Sea m_1 la masa de una molécula tomada en la porcion BC; las fuerzas que la solicitan son, la fuerza motriz $m_1 g \operatorname{sen}\alpha$, y la fuerza efectiva $m_1\frac{dx^2}{dt^2}$. Todas las fuerzas motrices de la parte BC, y sus fuerzas efectivas tomadas en sentido contrario, se componen en una sola

$$\left(g\operatorname{sen}\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\Sigma m_1,\quad \text{ó}\quad \rho x\left(g\operatorname{sen}\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Del mismo modo, la diferencia entre las fuerzas efectivas y las motrices de la parte BC′ es

$$\rho x'\left(g\operatorname{sen}\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right);$$

y la ecuacion del movimiento, segun el teorema de d'Alambert, es

$$x\left(g\operatorname{sen}\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=x'\left(g\operatorname{sen}\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right);$$

ó eliminando x' por la relacion $x+x'=l$,

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}-g\,\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha'}{l}\,x+g\operatorname{sen}\alpha'=0.$$

Para integrar esta ecuacion, hagamos

$$g\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha'}{l}=n^2,$$

con lo cual se convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2}-n^2\left(x-\frac{l\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha'}\right)=0,$$

y haciendo

$$x-\frac{l\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha'}=y,$$

se reduce á

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dt^2}-n^2y=0.$$

La integral de esta ecuacion, lineal de segundo órden, es

$$y=\mathrm{A}e^{nt}+\mathrm{B}e^{-nt};$$

tambien tendremos

$$x=\frac{l\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha'}+\mathrm{A}\,e^{nt}+\mathrm{B}e^{-nt},$$

siendo A y B dos constantes. Para determinarlas, supongamos conocidas la posicion y la velocidad inicial del punto C, es decir, que para $t=0$, son conocidas x_0 y v^0; se tendrá

$$x_0=\frac{l\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha'}+\mathrm{A}+\mathrm{B},$$

$$v_0=\frac{dx_0}{dt}=n(\mathrm{A}-\mathrm{B});$$

que dan $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, y $\mathrm{A}-\mathrm{B}$, y por lo tanto A y B.

Al cabo de un cierto tiempo, que se determinaria haciendo $x=l$, toda la cadena se encuentra en el plano AB. El movimiento cambia entónces de naturaleza, viniendo á ser uniformemente acelerado.

La condicion necesaria y suficiente para que la cadena permanezca en reposo, es que se tenga

$$\mathrm{A}=0,\ \mathrm{B}=0.$$

En efecto

$$v=\frac{dx}{dt}=n(Ae^{nt}-Be^{-nt},)$$

y para que sea $v=0$, es necesario que

$$Ae^{nt}-Be^{-nt}=0,$$

ó

$$Ae^{2nt}=B;$$

y para que esta ecuacion se verifique, cualquiera que sea el valor de t, es necesario y suficiente que sean á la vez $A=0$, y $B=0$. En este caso

$$x=BC=\frac{l\,\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha'},$$

$$x'=BC'=\frac{l\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha'},$$

y por consiguiente, que

$$\frac{BC}{BC'}=\frac{\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\alpha};$$

lo cual nos indica que la recta CC' es horizontal, como era fácil de preveer.

Movimiento de dos puntos, cuya distancia es invariable, sujetos á permanecer sobre dos curvas dadas.

618. Este problema es muy á propósito para comprender el uso de sus multiplicadores $\lambda, \mu, \nu, \ldots\ldots$, introducidos en las ecuaciones del movimiento para verificar la eliminacion.

Sean m y m' dos puntos materiales solicitados por dos fuerzas P y P' (fig. 270), constantes ó variables, $mm'=l$, la distancia invariable de estos puntos, sujetos á permanecer sobre las curvas dadas mA y m'A'. Supondremos, para mayor sencillez, las curvas y las fuerzas situadas en un mismo plano, que tomaremos por plano XY.

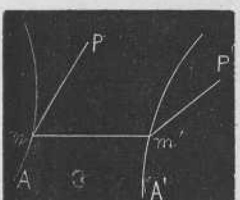

Fig. 270.

Sean X, Y, X', Y' las componentes paralelas á los ejes de las fuerzas P y P'. Segun el teorema de d'Alambert, empleando las notaciones usuales, la ecuacion del movimiento será

$$(1)\quad \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y$$
$$+ \left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' + \left(Y' - m'\frac{d^2y'}{d^2t}\right)\delta y' = 0.$$

Siendo $f(x,y)=0$, y $\varphi(x,y)=0$, las ecuaciones de las curvas mA y m'A', las ecuaciones de condicion serán

$$(2)\quad \begin{cases} f(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0, \\ (x-x')^2+(y-y')^2=l^2. \end{cases}$$

El sistema es, como vemos, de ligaduras completas. Estas ecuaciones dan las siguientes:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{df}{dx}\delta x + \dfrac{df}{dy}\delta y = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{dx}\delta x + \dfrac{d\varphi}{dy}\delta y = 0, \\ \dfrac{x-x'}{l}(\delta x - \delta x') + \dfrac{y-y'}{l}(\delta y - \delta y') = 0. \end{cases}$$

Multiplicando las ecuaciones (3) por los factores arbitrarios λ, μ, ν, sumándolas con la ecuacion (1), é igualando á cero las coeficientes de las variaciones $\delta x, \delta y, \delta x', \delta y'$, tendremos

$$(4)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\dfrac{df}{dx} + \nu\dfrac{x-x'}{l}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\dfrac{df}{dy} + \nu\dfrac{y-y'}{l}, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = X' + \mu\dfrac{dx}{dx'} - \nu\dfrac{x-x'}{l}, \\ m'\dfrac{d^2y'}{dt^2} = Y' + \mu\dfrac{dx}{dy'} - \nu\dfrac{y-y'}{l}. \end{cases}$$

Estas ecuaciones indican que los puntos m y m' se moverian como puntos libres, si se aplicáran al punto m dos nuevas fuerzas, cuyas componentes paralelas á los ejes, fueran respectivamente

$$\lambda\frac{df}{dx},\ \lambda\frac{df}{dy},\ \nu\frac{x-x'}{l},\ \nu\frac{y-y'}{l};$$

y al punto m' dos fuerzas cuyas componentes fueran

$$\mu\frac{d\varphi}{dx},\ \mu\frac{d\varphi}{dy},\ -\nu\frac{x-x'}{l},\ -\nu\frac{y-y'}{l}.$$

La resultante de $\lambda\frac{df}{dx}$ y $\lambda\frac{df}{dy}$ es $\lambda\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}$, y es normal á la curva Am. Esta fuerza es igual y contraria á la presion, que experimenta la curva Am, por el movimiento del punto m.

Del mismo modo, la resultante de $\nu\frac{x-x'}{l}$ y $\nu\frac{y-y'}{l}$ es una fuerza dirigida segun mm' y cuya intensidad es ν. Las mismas observaciones pueden hacerse respecto al punto m'.

Las dos fuerzas iguales y contrarias dirigidas segun mm' expresan las acciones que los dos puntos m, m' ejercen el uno sobre el otro por medio de la ligadura mm': cada una de estas fuerzas es igual á la tension ó presion que experimenta esta ligadura.

LECCION LI.

Teoremas generales del movimiento.—Teorema del movimiento del centro de gravedad.—Velocidad inicial del centro de gravedad de un sistema puesto en movimiento por fuerzas instantáneas.—Conservacion del movimiento del centro de gravedad.— Consecuencias de la ley del movimiento del centro de gravedad.—Teorema de las cantidades de movimiento proyectadas sobre un eje.

Teoremas generales del movimiento.

619. Los teoremas generales demostrados para el movimiento de un punto material, se verifican tambien en el movimiento de un sistema compuesto de un número cualquiera de puntos materiales; y para probarlo, basta establecer para cada punto la ecuacion que es la traduccion analítica del teorema general correspondiente, y sumar todas estas ecuaciones miembro á miembro; la ecuacion final, hecha la reduccion de los términos que se destruyen, es la expresion del teorema extendido al sistema dado.

El teorema de d'Alambert, por medio del cual toda cuestion de movimiento se reduce inmediatamente á una cuestion de equilibrio, y que nos da todas las ecuaciones necesarias para definir el movimiento de un sistema material, comprende como corolarios todos los teoremas generales del movimiento. Esto no obstante, el teorema de d'Alambert no da á conocer inmediatamente ninguna propiedad del movimiento del sistema material á que se aplica, mientras que los teoremas generales que vamos á exponer, y que son los cuatro establecidos en la primera parte de la Dinámica, cada uno de ellos nos da á conocer una propiedad general del movimiento.

Antes de exponer estos teoremas, conviene recordar, que las fuerzas que actuan sobre los diferentes puntos de un sistema material, son de dos clases: fuerzas *exteriores*, que provienen de puntos que no forman parte del sistema material que se considera, y fuerzas *interiores*, que provienen de puntos que forman parte del sistema material, y son entre sí dos á dos iguales y contrarias, en virtud del principio de igualdad de la accion y la reaccion. Tambien las fuerzas pueden ser fuerzas *dadas*, y fuerzas *que reemplazan á las ligaduras*, pudiendo ser estas últimas interiores ó exteriores.

Teorema del movimiento del centro de gravedad.

620. Consideremos un sistema de puntos materiales m, m', m'',....., solicitados respectivamente por fuerzas P, P', P'',....., cuyas componentes paralelas á los ejes son X, Y, Z, X', Y', Z',..... Por el teorema de d'Alambert, si aplicamos al punto m fuerzas paralelas á los tres ejes, é iguales respectivamente, á $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, y á los demas puntos fuerzas análogas, todas estas fuerzas deben equilibrarse por medio de las ligaduras del sistema. Las condiciones de este equilibrio están comprendidas en la ecuacion general del teorema de las velocidades virtuales; pero podemos llegar á propiedades importantes sin necesidad de expresar todas estas condiciones.

Así, existiendo el equilibrio entre las fuerzas mencionadas, en el sistema cuyo movimiento estudiamos, subsistirá introduciendo entre los diferentes puntos nuevas ligaduras de la clase que se quiera, siempre que no sean incompatibles con las condiciones dadas: se puede suponer, por ejemplo, que las distancias de los diferentes puntos del sistema vienen á ser invariables, si las ligaduras son tales, que los puntos puedan moverse sin que sus distancias cambien. De aquí resulta que las fuerzas deben satisfacer á las seis ecuaciones del equilibrio de un sistema sólido, siempre que despues de la solidificacion no haya ningun punto fijo ni ningun punto sujeto á permanecer sobre una curva ó superficie dada. Entónces el sistema podrá moverse como un sólido invariable y se verificarán, teniendo presente esta restriccion, las tres primeras ecuaciones del equilibrio, y tendremos las siguientes:

$$\begin{aligned} &\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,\\ &\Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,\\ &\Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0; \end{aligned} \quad \text{ó} \quad (1) \left\{\begin{aligned} &\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\\ &\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,\\ &\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z. \end{aligned}\right.$$

Para que el sistema pueda moverse como un cuerpo sólido, es decir, sin que sus distancias varíen, es necesario y suficiente que cada ecuacion de condicion se reduzca á una relacion entre las distancias de sus diferentes puntos.

En efecto, sea $L=0$, una ecuacion que debe existir siempre entre las coordenadas $x, y, z, x', \ldots$ y cuyo primer miembro L es una funcion f de t y de $x, y, z, x', \ldots$

Representemos por $p, q, r, \ldots$ las $3n-6$ distancias de los diferentes puntos del sistema que deben permanecer constantes. Tenemos

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &p=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},\\ &q=\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Se puede reducir á seis el número de coordenadas arbitrarias é independientes, y supongamos que estas sean x, y, z, x'', x', z'. Obtendremos todas las demas en funcion de éstas y de las cantidades $p, q, r, \ldots$ Y cada ecuacion de condicion como la $L=0$, tomará la forma

$$L=f(p, q, r, \ldots x, y, z, x'', x', z')=0.$$

Para un movimiento virtual cualquiera, $p, q, r, \ldots$, permanecen constantes, no variando t, y por consiguiente, puesto que la ecuacion $L=0$, debe ser satisfecha cualquiera que sean x, y, z, x'', x', z', estas cantidades no deben entrar en la funcion f. Luego, eliminando de la ecuacion $L=0$, $3n-6$ coordenadas por medio de las ecuaciones (a), las otras seis deben desaparecer al mismo tiempo, y la ecuacion $L=0$ debe reducirse á una relacion entre las distancias $p, q, r, \ldots$

621. Las ecuaciones (1) que se verifican en el movimiento de todo cuerpo sólido libre, ó de todo sistema material que puede moverse como un cuerpo sólido, pueden tomar otra forma. Sean x_1, y_1, z_1, las coordenadas del centro de gravedad, y M la masa total del sistema; sabemos que

$$Mx_1=\Sigma mx,\ My_1=\Sigma my,\ Mz_1=\Sigma mz;$$

diferenciando estas ecuaciones, serán

$$(2)\quad \begin{cases} M\dfrac{dx_1}{dt}=\Sigma m\dfrac{dx}{dt}, \\ M\dfrac{dy_1}{dt}=\Sigma m\dfrac{dy}{dt}, \\ M\dfrac{dz_1}{dt}=\Sigma m\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Suponiendo que un punto material está siempre situado en el centro de gravedad, estas ecuaciones nos darán su velocidad al fin de un tiempo dado cualquiera, cuando se conozcan las de todos los puntos del sistema.

Volviendo á diferenciar las ecuaciones (2), tendremos

$$(3)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma m\dfrac{d^2z}{dt^2}; \end{cases}$$

comparando las ecuaciones (1) y (3), resultan las

$$(4)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z. \end{cases}$$

De las cuales resulta el teorema siguiente:

El centro de gravedad de todo sistema libre se mueve como si las masas de todos los puntos materiales estuvieran reunidas en él, y todas las fuerzas motrices fueran trasladadas á dicho centro paralelamente á sí mismas.

Conviene observar, que las ecuaciones (4), que tienen la forma de las ecuaciones diferenciales del movimiento de un punto material de masa M, no contienen las fuerzas interiores en sus segundos miembros, porque siendo estas fuerzas iguales y opuestas dos á dos, sus proyecciones sobre cada eje son iguales dos á dos y de signos contrarios. Y tambien, que las fuerzas exteriores, que son las únicas que existen en sus segundos miembros, pueden trasportarse paralelamente á sí mismas á un punto cualquiera, sin que dichos segundos miembros cambien de valor, porque las proyecciones de las fuerzas sobre un eje no cambian de valor ni de signo con esta traslacion.

En virtud de esta propiedad, se llama *resultante de traslacion* á la resultante de todas las fuerzas exteriores, que actúan sobre un sistema, trasladadas paralelamente á sí mismas á un mismo punto del espacio. La fuerza así obtenida, aplicada al centro de gravedad, donde se supone concentrada toda la masa del sistema, actúa sobre este punto como si estuviera aislado. Hasta aquí hemos debido considerar el movimiento de un punto único, como una abstraccion imposible de realizar; y ahora vemos que el centro de gravedad de un sistema es un punto geométrico, que posee las propiedades del movimiento de un punto material aislado.

622. El teorema del movimiento del centro de gravedad nos indica tambien, que cuando prescindimos de las dimensiones de un cuerpo, para reducirlo idealmente á un punto material, el centro de gravedad es el punto en que debemos suponer concentrada toda la masa del cuerpo. Y todo lo dicho en la primera parte de la Dinámica, sobre el movimiento de un punto material, es aplicable al movimiento del centro de gravedad de un sistema material.

Velocidad inicial del centro de gravedad de un sistema puesto en movimiento por fuerzas instantáneas.

623. Supongamos que el sistema, primitivamente en reposo, se pone en movimiento por la accion de fuerzas instantáneas, y vamos á determinar, en esta hipótesis, la velocidad inicial que debe tomar el centro de gravedad.

Para ello sabemos, que si representamos por θ el tiempo durante el cual ejercen su accion las fuerzas instantáneas, la primera de las ecuaciones (1).

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

se convierte por la integracion en la que sigue:

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma \int_0^\theta X dt.$$

Sean a, b, c las componentes de la velocidad, que la fuerza instantánea $P(X, Y, Z)$, aplicada al punto m, le daria si estuviera libre; sabemos que

$$\int_0^\theta X\,dt = ma,$$

y por consiguiente

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma ma;$$

y fórmulas análogas para los demas ejes. En virtud de las ecuaciones (2), tendremos

$$(5)\quad \begin{cases} M\dfrac{dx_1}{dt} = \Sigma ma, \\ M\dfrac{dy_1}{dt} = \Sigma mb, \\ M\dfrac{dz_1}{dt} = \Sigma mc; \end{cases}$$

fórmulas que dan las componentes $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ de la velocidad, con la cual el centro de gravedad debe empezar á moverse. Esta velocidad es la que tomaria un punto de masa M, colocado en el centro de gravedad y solicitado por todas las fuerzas instantáneas del sistema, trasportadas paralelamente á sí mismas á este punto. Considerando como otras tantas fuerzas las cantidades de movimiento, que estas fuerzas instantáneas imprimirian á masas libres, se concebirán estas fuerzas trasladadas paralelamente á sí mismas al centro de gravedad, y se tomará su resultante.

La velocidad inicial del centro de gravedad estará dirigida segun esta resultante, y será igual al valor numérico de la misma resultante, dividido por la masa M.

Conservacion del movimiento del centro de gravedad.

624. El principio de la conservacion del movimiento del centro de gravedad, se deduce fácilmente de las

ecuaciones (4)

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,$$
$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,$$
$$M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Supongamos que todas las fuerzas exteriores, que son las que entran en los segundos miembros de estas ecuaciones, trasladadas paralelamente á sí mismas á un punto cualquiera se equilibran, tendremos

$$(6)\quad \Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0;$$

las ecuaciones (4) del movimiento del centro de gravedad se reducen en este caso á

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z_1}{dt^2}=0;$$

de las que se deducen, integrando, las siguientes

$$(7)\qquad \frac{dx_1}{dt}=c,\quad \frac{dy_1}{dt}=c',\quad \frac{dz_1}{dt}=c'';$$

siendo c, c', c'' constantes. El movimiento del centro de gravedad, es por lo tanto uniforme y rectilíneo. Este caso se presenta cuando no hay fuerzas exteriores, reduciéndose todas las que obran sobre el sistema á las acciones mútuas que se ejercen entre sus diferentes puntos.

Puede presentarse esta ley bajo otra forma. En virtud de las ecuaciones (6), las (1) se convierten en

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

ó $$\Sigma m\frac{dx}{dt}=c_1,\quad \Sigma m\frac{dy}{dt}=c_2,\quad \Sigma m\frac{dz}{dt}=c_3;$$

es decir, que las sumas de las cantidades de movimiento de las masas del sistema, estimadas paralelamente á los ejes, son constantes; la resultante será tambien constante. Y si consideramos las cantidades de movimiento de todas las moléculas como fuerzas, y las trasladamos paralelamente á sí mismas á un mismo punto, darán una resultante de magnitud y direccion constantes. El centro de gravedad del sistema se mueve segun una recta paralela á esta resultante, y con una velocidad igual á esta resultante, dividida por la masa total del sistema.

Consecuencias de la ley del movimiento del centro de gravedad.

625. Cuando un sistema no está solicitado más que por fuerzas interiores, su centro de gravedad se mueve como un punto material, que no está solicitado por ninguna fuerza; su movimiento será debido á una velocidad inicial, y por lo tanto, este movimiento será uniforme y rectilíneo. Como caso particular, cuando no exista velocidad inicial, su movimiento será nulo, y el centro de gravedad permanecerá inmóvil.

Lo primero es lo que sucede probablemente á nuestro sistema planetario. Este sistema, tomado en su conjunto, está formado por el Sol, los planetas, sus satélites, los cometas, aereolitos, bolidos, etc.; cuyas partículas ejercen unas sobre otras acciones iguales y contrarias. Y está colocado, si no en el vacío absoluto, en un medio cuya densidad es sumamente pequeña, y á una distancia tan grande de los otros sistemas, que pueblan el espacio, que las atracciones que sobre él ejercen estos sistemas, pueden considerarse como nulas. En estas condiciones, las fuerzas exteriores son despreciables, y el sistema solar es un conjunto de cuerpos sometidos únicamente á sus mútuas acciones interiores; luego su centro de gravedad está inmóvil, ó animado en el espacio de un movimiento uniforme y rectilíneo. La observacion ha logrado comprobar este movimiento comun de nuestro sistema planetario, en virtud del cual, se dirige hácia la constelacion de Hércules, dirigiéndose el centro de gravedad del sistema hácia la estrella z de esta constelacion, con un movimiento uniforme y rectilíneo.

626. Si durante el curso del movimiento, sufren cualquiera alteracion las fuerzas interiores, no se modifica por ello en nada el movimiento del centro de gravedad. Si se lanza un cuerpo pesado en el vacío en una direccion cualquiera, siendo la gravedad la única fuerza que obra sobre sus moléculas, su centro de gravedad describe una parábola en el plano vertical trazado por la direccion de su velocidad inicial (386). Si el cuerpo de que se trata es una bomba, y esta bomba revienta ántes de caer al suelo, como la explosion es producida únicamente por el desarrollo de fuerzas interiores, el centro de gravedad de la bomba continuará su movimiento, recorriendo la parábola segun la cual ha principiado á moverse, sin experimentar ninguna modificacion por la ruptura del proyectil, hasta que alguno de los fracmentos encuentra un cuerpo extraño, ó cae en la superficie de la Tierra. Entónces el movimiento del centro de gravedad se modifica, porque la reaccion sufrida por dicho fracmento, es una nueva fuerza exterior, que se combina con la gravedad para contribuir á la modificacion del movimiento. La presencia del aire atmosférico modifica tambien estos resultados; el aire atmosférico opone una resistencia sensible al movimiento de los cuerpos, animados de una gran velocidad; esta resistencia es una fuerza exterior, que depende de la velocidad, de la forma y de la extension de los fracmentos; hay pues una modificacion de las fuerzas exteriores debida á la presencia del aire, y por consiguiente, el movimiento del centro de gravedad de la bomba, será modificado á causa de la ruptura, aun ántes de caer al suelo sus fracmentos.

627. La conservacion del movimiento del centro de gravedad, nos da la explicacion de una porcion de fenó-

menos, como la marcha de los animales sobre el suelo, la propulsion de los barcos por medio de remos, de paletas ó de hélices, el vuelo de las aves, la natacion, el retroceso de las armas de fuego, y otros muchos fenómenos; en todos los cuales hay desarrollo de fuerzas exteriores, que permiten sacar el centro de gravedad de su estado de inmovilidad.

Concibamos que un sér animado, un hombre, por ejemplo, se encuentra aislado en el espacio, sin estar sometido á ninguna fuerza exterior y que su centro de gravedad esté inmóvil; este sér no podrá por sí solo poner su centro de gravedad en movimiento; porque de cualquier modo que haga funcionar sus músculos, para mover las diversas partes de su cuerpo, no puede desenvolver más que fuerzas interiores, que no son capaces de sacar el centro de gravedad de su estado primitivo de inmovilidad. Pero si está situado sobre el suelo, la reaccion que éste ejerce sobre sus piés es una fuerza exterior, que le permite poner en movimiento su centro de gravedad, y marchar en la direccion conveniente.

La propulsion de los barcos por medio de remos, de peletas, ó de hélices, consiste en echar hácia atrás una cierta cantidad de agua, para producir el movimiento del cuerpo flotante hácia adelante; el centro de gravedad del sistema formado por el barco y por el agua desalojada, permanece inmóvil, porque no hay más que fuerzas interiores, pero el centro de gravedad del barco marcha hácia adelante, tanto como exige la cantidad de agua que se ha echado hácia atrás. De una manera análoga se explica el vuelo de las aves y la natacion. En el disparo de una arma de fuego, el proyectil es lanzado hácia adelante, y el arma retrocede hácia atrás, y las velocidades que toman las dos partes del sistema, son en los primeros instantes inversamente proporcionales á las masas; de tal suerte, que el centro de gravedad de todo el sistema formado por el arma y el proyectil, permanece inmóvil en el punto en que se encuentra, al empezar á moverse el proyectil.

Teorema de las cantidades de movimiento proyetadas sobre un eje.

628. Si proyectamos el movimiento de un punto material sobre un eje fijo, se verifica para el movimiento proyectado (363), la ecuacion

$$mv - mv_0 = \Sigma \int_0^t \mathrm{F}dt,$$

en la cual F es la proyeccion de una cualquiera de las fuerzas que obran sobre el punto material; el signo Σ indica una suma de tantos sumandos como fuerzas obran sobre él; porque la proyeccion de la resultante de las fuerzas aplicadas á este punto, es igual á la suma de las proyecciones de las mismas fuerzas; y por consiguiente, el impulso elemental ó total de la proyeccion de la resultante, es igual á la suma de los impulsos elementales ó totales de las proyecciones de las componentes. Si escribimos tantas ecuaciones análogas á la anterior, como puntos tiene el sistema, y las sumamos ordenadamente, obtendremos la siguiente

$$\Sigma mv - \Sigma mv_0 = \Sigma \int_0^t \mathrm{F}dt.$$

El signo Σ del primer miembro de esta ecuacion se extiende á tantos sumandos como puntos materiales tiene el sistema, y el del segundo, á todas las fuerzas que actuan sobre todos los puntos materiales de dicho sistema. Las proyecciones de las fuerzas interiores sobre el eje de que se trata, son dos á dos iguales y de signos contrarios, por lo que se destruyen mútuamente en el segundo miembro de la ecuacion precedente; de modo, que se puede escribir prescindiendo de los términos correspondientes á las fuerzas interiores; podremos pues enunciar el teorema que encierra dicha ecuacion en los siguientes términos:

El incremento total de la suma de las cantidades de movimiento de un sistema material, proyectadas sobre un eje fijo cualquiera, durante un tiempo tambien cualquiera, es igual á la suma de los impulsos totales de las proyecciones de las fuerzas exteriores sobre este eje, durante el mismo tiempo.

629. Tambien este teorema nos facilita la explicacion del retroceso de las armas de fuego. Antes de la inflamacion de la pólvora, el cañon y su carga forman un sistema inmóvil, en el cual la suma de las cantidades de movimiento proyectadas sobre el eje del cañon es nula.

Esta suma de cantidades de movimiento proyectadas debe permanecer constantemente nula, mientras no se desarrollen fuerzas exteriores, que proyectadas sobre el eje de la pieza, produzcan una suma de impulsos diferente de cero. La inflamacion de la pólvora solo produce fuerzas interiores; luego el cañon y el proyectil toman al mismo tiempo movimientos necesariamente dirigidos en sentidos contrarios el uno del otro; de manera, que la suma de las cantidades de movimiento del sistema, proyectadas sobre el eje de la pieza, conserve el valor nulo que tenía en un principio. Las velocidades contrarias del proyectil y de la pieza, están en razon inversa de sus masas, si despreciamos la masa de la pólvora, ó de las materias que producen por su inflamacion el disparo; pero si no se puede despreciar la masa de estas sustancias, el retroceso de la pieza se verifica con una velocidad algo mayor, que la que encontraríamos por la indicada proporcion.

La ascension de los *cohetes voladores* se explica de una manera análoga. La inflamacion del combustible que entra en la composicion de uno de estos cohetes, hace salir una cantidad mayor ó menor de materia por un orificio abierto en su parte inferior; el cuerpo del cohete debe pues retroceder, es decir, ponerse en movimiento hácia arriba; con el objeto de que la ascension sea rápida, suele mezclarse con el combustible vidrio machacado ú otra sustancia muy pesada, para que la cantidad de movimiento en el sentido inferior sea grande, y debiendo ser igual la que produce la ascension, ésta se verifica con mucha rapidez segun se va consumiendo el cartucho. La accion de la gravedad va destruyendo la cantidad de movimiento ascensional, ó sea la velocidad del cohete, hasta que llega al punto más alto de su curso, en el que la velocidad es cero, y luégo desciende como todos los cuerpos pesados.

LECCION LII.

Teorema de los momentos de las cantidades de movimiento.—Teorema de las áreas.—Teorema de las áreas en el movimiento relativo.—Plano del máximo de las áreas ó plano invariable.—Aplicaciones del teorema de las áreas.

Teorema de los momentos de las cantidades de movimiento.

630. El teorema de los momentos de las cantidades de movimiento para un punto material puede expresarse por la ecuacion

$$M(mv)-M(mv_0)=\int_{t_0}^{t} M(F\,dt);$$

en la que el signo M indica los momentos tomados con respecto á un eje fijo cualquiera; v_0 y v son las velocidades del punto material al fin de los tiempos t_0 y t, y F la resultante de las fuerzas que actúan sobre el punto.

Esta ecuacion es aplicable á cada uno de los puntos que componen un sistema dado, y puede ponerse bajo otra forma. Sean para ello F la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas al punto, $f_1, f_2, \ldots f_n$; las fuerzas interiores dirigidas de este punto á todos los demas del sistema; podremos dar á la ecuacion precedente la forma

$$M(mv)-M(mv_0)=\int_{t_0}^{t} M(F\,dt)+\int_{t_0}^{t} M(f_1\,dt)$$
$$+\int_{t_0}^{t} M(f_2\,dt)+\ldots\ldots+\int_{t_0}^{t} M(f_n\,dt).$$

Para cada punto del sistema podemos escribir una ecuacion como esta. Sumando ordenadamente todas estas ecuaciones, y observando que las fuerzas interiores son en el conjunto, iguales y contrarias dos á dos, por lo que se destruirán en la suma, obtendremos la ecuacion

$$(1)\quad \Sigma M(mv) - \Sigma M(mv_0) = \Sigma \int_{t_0}^{t} M(F dt);$$

que no contiene más que los momentos de las fuerzas exteriores, la cual puede enunciarse en los siguientes términos:

El incremento total de la suma de los momentos de las cantidades de movimiento del sistema, con respecto á un eje fijo cualquiera, durante un tiempo tambien cualquiera, es igual á la suma de los momentos, con respecto á este eje, de todos los impulsos elementales de las fuerzas exteriores, correspondientes á todos los elementos del tiempo que se considera.

631. El teorema de los momentos de las cantidades de movimiento se deduce con mucha facilidad del teorema de d'Alambert.

Si el conjunto de puntos materiales puede moverse como un sistema sólido, las fuerzas perdidas

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},\quad X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2},\ldots..$$

se equilibran, y deben satisfacer á las tres ecuaciones del equilibrio de un sistema sólido, que expresan que las sumas de los momentos de las fuerzas, con respecto á los tres ejes, son nulas; se tiene pues, con respecto al eje z

$$\Sigma\left[\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x - \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y\right] = 0,$$

y ecuaciones análogas para los ejes de las y, y de las x. Estas ecuaciones pueden ponerse bajo la forma

$$(2)\quad\begin{cases}\Sigma m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2}-y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Yx-Xy),\\ \Sigma m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2}-x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(Xz-Zx),\\ \Sigma m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2}-z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(Zy-Yz).\end{cases}$$

Hemos dicho que suponiendo el sistema solidificado, no debe haber ningun punto fijo, ni sujeto á permanecer sobre una línea ó superficie fija. Sin embargo, las ecuaciones (2) y sus consecuencias subsisten si existe en el sistema un punto fijo, con tal que se le tome por orígen de coordenadas; porque la condicion de equilibrio del sistema solidificado, es en este caso, que la suma de los momentos de las fuerzas, con respecto á tres ejes que pasan por el punto fijo, sea nula para cada uno de estos ejes.

Multipliquemos la primera de las ecuaciones (2) por dt, é integremos, observando que $d(xdy-ydx)=xd^2y-yd^2x$, resultará

$$(3)\quad \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma\left(m\frac{dy}{dt}x-m\frac{dx}{dt}y\right)$$
$$=c+\int_{t_0}^{t}(Yx-Xy)dt.$$

El primer miembro de esta ecuacion es la suma de los momentos de las cantidades de movimiento, con respecto al eje de las z, al fin del tiempo t; la constante c en el segundo miembro es la misma suma al fin del tiempo t_0, é $\int_{t_0}^{t}(Yx-Xy)\,dt$ es la suma, entre estos dos tiempos, de los momentos de los impulsos elementales de las fuerzas exteriores, comprendidas entre ellas las que pueden representar las ligaduras. Las fuerzas interiores desaparecen por sí mismas de la ecuacion (3), que representa, como la (1), el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento con respecto al eje de las z, el cual puede tomarse en cualquiera direccion. Lo mismo hubiéramos deducido de las otras dos ecuaciones, con respecto á los ejes de las x y de las y.

632. Las sumas $\Sigma(Yx-Xy),\ldots$ que forman los segundos miembros de las ecuaciones (2), son cero, cuando suponiendo el sistema solificado, las fuerzas que lo solicitan se equilibran, ó se reducen á una fuerza única que pasa por el orígen de las coordenadas. En estos dos casos, integrando las ecuaciones (2), resulta

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=c, \\ \Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=c', \\ \Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=c''. \end{cases}$$

Las constantes c, c', c'', se determinan segun las posiciones y las velocidades iniciales de los puntos del sistema. De las ecuaciones (4) resulta, que la suma de los momentos de las cantidades de movimiento de las masas del sistema, con respecto á cada uno de los ejes coordenados, y por consiguiente con respecto á una recta cualquiera, es constante.

Luego si en un instante cualquiera, consideramos las cantidades de movimiento como fuerzas que animan los diferentes puntos del sistema, y las componemos como si estuvieran aplicadas á un cuerpo sólido, reduciéndolas á tres fuerzas dirigidas segun los ejes, y á tres pares paralelos á los planos coordenados, se encontrará siempre la misma resultante y el mismo par resultante, con respecto al mismo orígen. El momento de este par resultante es $k=\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}$, y su plano, perpendicular á la recta que forma con los ejes ángulos cuyos cosenos son $\frac{c''}{k}$, $\frac{c'}{k}$, $\frac{c}{k}$, tiene por ecuacion

$$c''x+c'y+cz=0.$$

633. Para ver esta trasformacion con claridad, refi-

ramos el movimiento del sistema á tres ejes fijos rectangulares OX, OY, OZ, (fig. 271). Sea M un punto de masa m, cuya velocidad sea v en un instante dado, y que tenga la direccion MA; tomemos sobre esta recta una longitud MA igual á la cantidad de movimiento mv del punto, valuada en una escala arbitraria.

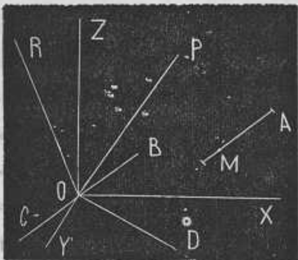

Fig. 271.

Consideremos MA como una fuerza, y apliquemos al orígen O, que supondremos unido invariablemente al sistema, dos fuerzas opuestas OB, OC iguales y paralelas á MA. Las dos fuerzas OC, MA, iguales, paralelas y opuestas, forman un par, cuyo eje podemos representar por OD, proporcional al momento del par, perpendicular á su plano y dirigido en el sentido definido por los convenios establecidos en la teoría de los pares. Así reemplazaremos las cantidades de movimiento efectivas, sin alterar sus proyecciones, ni sus momentos, por las mismas cantidades de movimiento trasportadas paralelamente á sí mismas al punto O, y por una serie de pares cuyos ejes podemos suponer tambien aplicados en este punto. Componiendo todas las fuerzas, obtendremos una resultante OP; y haciendo lo mismo con los ejes de los pares, resultará un eje resultante OR.

La suma de las proyecciones, en el instante considerado, de las cantidades de movimiento sobre un eje cualquiera, OX por ejemplo, estará representada por la proyeccion de OP sobre este eje; del mismo modo, la suma de los momentos de las cantidades de movimiento con respecto al eje OX, estará representada por la proyeccion del eje resultante OR sobre OX.

La resultante OP, y el eje del par resultante OR, serán constantes, como hemos dicho arriba, en virtud de las ecuaciones (4).

Teorema de las áreas.

634. Este teorema se deduce fácilmente de las ecuaciones (4). Mientras que el punto M (x, y, z) (fig. 272), describe su trayectoria MN, la proyeccion OM', de su rádio vector OM sobre el plano XY, describe el área $\lambda = M'ON'$, cuya diferencial es

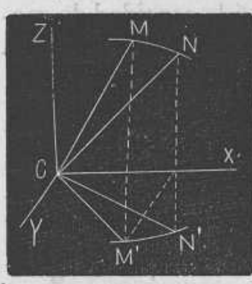

Fig. 272.

$$d\lambda = \tfrac{1}{2}(xdy - ydx);$$

con lo cual, se puede escribir la primera de las ecuaciones (4), del siguiente modo

$$\Sigma m \frac{d\lambda}{dt} = \tfrac{1}{2} c,$$

é integrando, teniendo presente que para $t = 0, \lambda = 0$, y la constante de la integracion es cero, será

$$\Sigma m\lambda = \tfrac{1}{2} ct.$$

Designando por λ' y λ'' las áreas descritas por las proyecciones del radio vector sobre los planos ZX, y ZY, se tendrá del mismo modo

$$\Sigma m\lambda' = \tfrac{1}{2} c't, \quad \Sigma m\lambda'' = \tfrac{1}{2} c''t.$$

Cada una de las constantes c, c', c'', representa el duplo de la suma de las áreas descritas en la unidad de tiempo, por la proyeccion de cada radio vector sobre el plano coordenado correspondiente, multiplicadas respectivamente por las masas de cadá uno de los puntos. De estas ecuaciones resulta el teorema de las áreas, cuyo enunciado es el siguiente:

Si las fuerzas motrices aplicadas á un sistema se equilibran, ó tienen una resultante única que pasa por el orígen *de las coordenadas, la suma de las áreas descritas por las proyecciones de los radios vectores sobre cada uno de los planos coordenados, multiplicadas respectivamente por las masas de los puntos materiales correspondientes, es proporcional al tiempo.*

El enunciado del teorema de las áreas, se simplificaria, si las masas de los diversos puntos materiales fueran iguales entre sí; porque se podria suprimir la masa de cada punto, que sería un factor comun á todos los términos de la suma; y el teorema consistiria, en que la suma de las áreas descritas por las proyecciones de los radios vectores, sobre cada uno de los planos coordenados, sería proporcional al tiempo t. Si quisiéramos hacer esta simplificacion en el caso general, en que las masas m, m', m''....., son desiguales, escogiendo por unidad una masa m_1, que esté contenida un número exacto de veces en cada una de dichas masas, de modo que se tenga

$$m = nm_1, \quad m' = n'm_1, \quad m'' = n''m_1 \ldots\ldots$$

siendo n, n', n'',... números enteros; podemos reemplazar el punto material de masa m, por n puntos materiales de masa m_1, que estén juntos los unos con los otros, el punto material de masa m', por n' puntos materiales de masa m_1, y así sucesivamente; de esta manera todos los puntos materiales tienen masas iguales á m_1, y por consiguiente se puede suprimir este factor comun, y enunciar el teorema como ántes hemos indicado. Conviene, sin embargo, observar que en realidad, en lugar de la suma de las áreas, es necesario tomar siempre la suma de los productos de las áreas, que corresponden á los diversos puntos materiales del sistema, por las masas de estos puntos materiales.

635. El teorema de las áreas se verifica en particular, cuando las fuerzas motrices del sistema se reducen á las acciones mútuas entre sus diferentes puntos; ó son

fuerzas dirigidas todas constantemente hácia un punto fijo, con tal que se tome éste por orígen de las coordenadas, porque en ambos casos estas fuerzas se destruyen. Si suponemos el Sol fijo, todas las fuerzas motrices de los planetas se reducen á fuerzas dirigidas hácia el centro del Sol, y á las atracciones y repulsiones mútuas, que se destruyen dos á dos.

Luego el teorema de las áreas se verifica en nuestro sistema planetario, con respecto á todo plano trazado por el centro del Sol.

El teorema de las áreas subsistirá, si sobrevienen en el sistema considerado choques ó explosiones, que provienen siempre de acciones mútuas entre sus moléculas, y se destruyen entre sí dos á dos, por ser fuerzas interiores.

Teorema de las áreas en el movimiento relativo.

636. En lo dicho anteriormente hemos supuesto el orígen de las coordenadas fijo en el espacio, y vamos á ver que el teorema de las áreas tambien se verifica cuando el orígen es móvil con el sistema, es decir, en el movimiento relativo. Sean A (x_1, y_1, z_1) (fig. 273), el orígen móvil, M un punto de masa m, cuyas coordenadas son x, y, z, con respecto á los ejes fijos OX, OY, OZ, y x', y', z' con respecto á los ejes móviles AX', AY', AZ', paralelos á los fijos. Sabemos, que

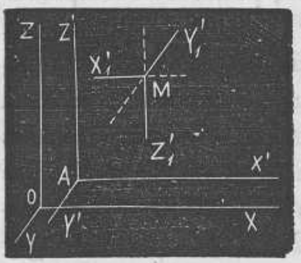

Fig. 273.

$$(5)\quad x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y', \quad z = z_1 + z';$$

sustituyamos estos valores en las ecuaciones (2), sin hacer por ahora esta sustitucion en $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$; la primemera se convierte en la

$$(6)\quad x_1\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}-y_1\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}+\Sigma m\left(x'\frac{d^2y}{dt^2}-y'\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$
$$=x_1\Sigma Y-y_1\Sigma X+\Sigma(Yx'-Xy');$$

suponemos que no hay en el sistema ningun punto fijo, y entónces tenemos por las tres primeras ecuaciones del equilibrio del sistema solidificado (620)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X,\quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y,$$

con lo que la ecuacion (6) se simplifica, y queda reducida á

$$(7)\quad \Sigma m\left(x'\frac{dy^2}{dt^2}-y'\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Yx'-Xy').$$

De las ecuaciones (5) se deducen, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}$, y $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{d^2y'}{dt^2}$; y sustituyendo en la (7), resulta

$$(8)\quad \frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m x'-\frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma my'+\Sigma m\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2}-y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)$$
$$=\Sigma(Yx'-Xy');$$

y obtendremos dos ecuaciones análogas á las dos últimas (2). Para que estas ecuaciones sean semejantes á las (2) del núm. 619, es necesario y suficiente que

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma mx'-\frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma my'=0,$$

y lo mismo las dos cantidades análogas. Esto puede conseguirse de várias maneras.

Una de estas consiste, en tomar el centro de gravedad por orígen de los ejes móviles, porque entónces, $\Sigma mx'=0$, $\Sigma my'=0$, $\Sigma mz'=0$; y tendremos en este caso las ecuaciones

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma m\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2}-y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=\Sigma(Yx'-Xy'),\\&\Sigma m\left(z'\frac{d^2x'}{dt^2}-x'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=\Sigma(Xz'-Zx'),\\&\Sigma m\left(y'\frac{d^2z'}{d^2t}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=\Sigma(Zy'-Yz').\end{aligned}\right.$$

Tambien desaparecen los citados términos, y resultan las ecuaciones (9), si tomamos por orígen móvil un punto que tenga en el espacio un movimiento rectilíneo y uniforme, porque entónces $\frac{d^2x_1}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}=0$, $\frac{d^2z_1}{dt_2}=0$.

Y por último, existe otra manera, pero mucho ménos útil, de llegar al mismo resultado, que consiste en determinar el punto A por las condiciones siguientes:

$$\frac{\frac{d^2x_1}{dt^2}}{\Sigma mx'}=\frac{\frac{d^2y_1}{dt^2}}{\Sigma my'}=\frac{\frac{d^2z_1}{dt^2}}{\Sigma mz'}.$$

Estas ecuaciones significan, que la fuerza aceleratriz del punto A, ó la que habria que aplicarle en cada instante, para que tomára el movimiento que tiene realmente, debe estar constantemente dirigida hácia el centro de gravedad del sistema; puesto que $\Sigma mx'$, $\Sigma my'$, $\Sigma mz'$ son proporcionales á las coordenadas móviles del centro de gravedad del sistema.

637. Si el orígen de las coordenadas móviles se escoje de una de estas tres maneras, se tendrán, con respecto á los ejes móviles, propiedades semejantes á las encontradas para los ejes fijos, porque las ecuaciones (9) tienen la misma forma que las ecuaciones (2) del número 631. Así, si las fuerzas se equilibran, suponiendo el sistema solidificado, ó se reducen á una sola que pasa por el orígen móvil, los segundos miembros de las ecuaciones (9) son cero, y se deduce tambien que la suma de las áreas descritas por las proyecciones de los radios vectores sobre uno de los planos coordenados, multiplicadas por las masas correspondientes, es proporcional al tiempo, ó crece de cantidades iguales en tiempos iguales; y el teorema de las áreas es cierto con respecto á este plano móvil. En nuestro sistema planetario, por ejemplo, se puede tomar por orígen de las coordenadas su centro de gravedad; porque suponiendo que las estrellas no ejer-

cen ninguna accion sobre el sistema, el movimiento de este punto es rectilíneo y uniforme. Por otra parte, las fuerzas motrices del sistema se reducen á las acciones mútuas entre sus diferentes puntos, de suerte que se verifica el teorema de las áreas con respecto á un plano cualquiera que pasa por su centro de gravedad.

Plano del máximo de las áreas ó plano invariable.

638. El plano del máximo de las áreas es un plano tal, que la suma de los productos de las masas de los puntos materiales por las áreas que describen las proyecciones de sus radios vectores sobre este plano, es un máximo.

Para determinarlo consideremos un sistema de puntos en movimiento, para el cual se verifica el teorema de las áreas, tomando por orígen un punto O, fijo ó móvil, segun las condiciones anteriormente establecidas.

El radio vector OM del punto M (fig. 274), describe en el espacio una superficie cónica, cuyo elemento MON coincide con el plano tangente; sean ds este elemento, α, β, γ los ángulos que la perpendicular OL á su plano forma con los ejes OX, OY, OZ; ω el área OM′N′ descrita por la proyeccion del radio vector OM sobre un plano cualquiera P, perpendicular á una recta OH, que forma con los ejes los ángulos a, b, l. Llamando φ=LOH, al ángulo del plano de la área con el plano de proyeccion P; tendremos

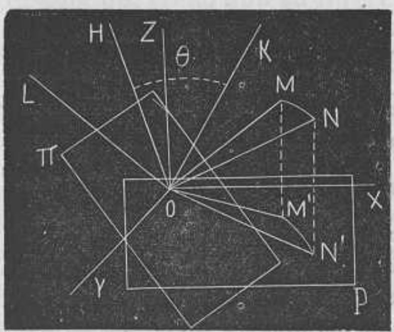

Fig. 274.

$$d\omega = ds \cos\varphi,$$

porque $d\omega$ es la proyeccion del área ds sobre el plano P. Las proyecciones de ds sobre los planos coordenados son $d\lambda, d\lambda', d\lambda''$, y se tiene,

$$d\lambda''=ds\cos\alpha,\quad d\lambda'=ds\cos\beta,\quad d\lambda=ds\cos\gamma,$$

y $$\cos\varphi=\cos\alpha\cos a+\cos\beta\cos b+\cos\gamma\cos l;$$

multiplicando esta última por ds, y teniendo en cuenta las precedentes, se tiene

$$d\omega=d\lambda''\cos a+d\lambda'\cos b+d\lambda\cos l,$$

de donde integrando,

$$\omega=\lambda''\cos a+\lambda'\cos b+\lambda\cos l;$$

por consiguiente, multiplicando esta ecuacion por m, y sus análogas por $m', m'',\ldots\ldots$ y sumándolas ordenadamente, tendremos

$$\Sigma m\omega=\cos a\Sigma m\lambda''+\cos b\Sigma m\lambda'+\cos l\Sigma m\lambda.$$

Pero sabemos (634) que

$$\Sigma m\lambda=\tfrac{1}{2}ct,\quad \Sigma m\lambda'=\tfrac{1}{2}c't,\quad \Sigma m\lambda''=\tfrac{1}{2}c''t;$$

luego

$$(10)\quad \Sigma m\omega=(c''\cos a+c'\cos b+c\cos l)\frac{t}{2}.$$

En esta ecuacion el coeficiente de t es constante, siendo dada la posicion del plano P. Hagamos

$$\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}=k,$$

podemos escribir la ecuacion anterior bajo la forma

$$(11)\quad \Sigma m\omega=\left(\frac{c''}{k}\cos a+\frac{c'}{k}\cos b+\frac{c}{k}\cos c\right)\frac{k}{2}.t.$$

Las cantidades $\frac{c''}{k}$, $\frac{c'}{k}$, $\frac{c}{k}$ son menores que la unidad, y pueden representar los cosenos de los ángulos formados por una cierta recta OK con los ejes coordenados, recta cuya direccion es independiente de la posicion del plano P. Por consiguiente, si concebimos un plano π perpendicular á OK, la posicion de este plano no depende de la del plano P. Siendo θ el ángulo HOK de los planos P y π, se tiene

$$\cos\theta=\frac{c''}{k}\cos a+\frac{c'}{k}\cos b+\frac{c}{k}\cos l,$$

por consiguiente

$$(12)\quad \Sigma m\omega = \tfrac{1}{2}kt\cos\theta.$$

Así, la suma de las áreas descritas sobre el plano P, multiplicadas respectivamente por las masas de los puntos correspondientes, es igual al producto de $\frac{1}{2}kt$ por el coseno del ángulo de los dos planos P y π.

Como la cantidad constante k es independientemente de la posicion del plano P, la ecuacion (12) nos dice, que la cantidad $\Sigma m\omega$ es un máximo, cuando $\cos\theta = 1, \theta = 0$; es decir, cuando el plano de proyeccion P coincide con el plano π; entónces tendremos

$$(13)\quad \Sigma m\omega = \tfrac{1}{2}Kt.$$

Existe, pues, un plano fijo tal, que la suma de las áreas descritas durante un tiempo cualquiera por las proyecciones de los radios vectores de los puntos móviles sobre este plano, multiplicadas por sus masas, es mayor que para otro plano cualquiera de proyeccion. Este plano está siempre fijo en el espacio, cualquiera que sea el tiempo trascurrido, como que su direccion depende de las cantidades constantes $\frac{c''}{k}, \frac{c'}{k}, \frac{c}{k}$, y se le llama por esta razon plano del máximo de las áreas, ó *plano invariable.*

Su ecuacion es como vimos (632)

$$c''x + c'y + cz = 0;$$

y la suma $\Sigma m\omega$ relativa á otro plano de proyeccion, se deduce de la que se refiere al plano π, multiplicándola por el coseno del ángulo de los dos planos. Este plano es el mismo que el del par resultante de las cantidades de movimiento del sistema solidificado, que determinamos en el citado núm. 632.

En nuestro sistema solar, una vez determinado el plano invariable, se pueden referir á él los movimientos de todos los cuerpos del sistema, y comparar entre sí, todas las observaciones astronómicas hechas en los tiempos pasados, presentes y futuros. La determinacion del plano invariable del sistema solar es una de las cuestiones más importantes de la Mecánica celeste.

Aplicaciones del teorema de las áreas.

639. El teorema de las áreas nos explica, porqué el movimiento anual de la Tierra alrededor del Sol no es uniforme. En efecto, siendo este teorema aplicable al movimiento de los planetas en sus órbitas, las cuales son elipses que tienen el Sol en uno de sus focos, los radios vectores, que unen el centro del Sol con el centro del planeta, son desiguales; y en el perihelio, que son menores, deberá el centro del planeta estar animado de mayor velocidad, que en el afhelio, en que son mayores, para que las áreas descritas por el radio vector en tiempos iguales sean iguales, como deben serlo en virtud del teorema de las áreas.

640. Las fuerzas interiores no tienen, como hemos dicho, influencia alguna sobre la suma de los momentos de las cantidades de movimiento con relacion á un eje cualquiera, ó lo que es lo mismo, sobre las sumas de los productos de las masas, por las áreas que describen durante la unidad de tiempo, las proyecciones de los radios vectores sobre planos fijos.

Así, si un cuerpo gira al rededor de un eje fijo, y por un esfuerzo interior ciertas partes del cuerpo se aproximan al eje, la suma de los productos de las masas por las áreas descritas durante la unidad de tiempo, en proyeccion sobre un plano normal al eje, no experimentará cambio ninguno en virtud de esta accion interior; de donde resulta, que la velocidad angular ω aumenta, porque el área descrita en la unidad de tiempo por un radio vector

r tiene por valor $\frac{1}{2}\omega r^2$; si r disminuye, ω debe aumentar para que el producto $\frac{1}{2}\omega r^2$ permanezca constante.

El enfriamiento de un cuerpo produce una contraccion ó disminucion de volúmen, debida á la accion de fuerzas interiores; luego un cuerpo que gira al rededor de un eje debe adquirir velocidades angulares más y más grandes á medida que se enfria.

Apliquemos este resultado á la Tierra, que gira alrededor de su eje.

Las observaciones meteorológicas han demostrado que la temperatura de la Tierra disminuye aunque muy lentamente; luego la velocidad angular de la rotacion de la Tierra aumenta tambien lentamente. Por otra parte, las observaciones astronómicas, desde Hiparco hasta nuestros dias, prueban que, en un período de más de dos mil años, la velocidad de la rotacion de la Tierra ha variado muy poco; lo que demuestra que la temperatura de nuestro globo ha variado tambien muy poco.

641. En virtud del teorema de las áreas, un sér animado, aislado en el espacio, y que no recibe la accion de ninguna fuerza exterior, y está primitivamente en reposo, no solo no podrá mover su centro de gravedad, sino que le será imposible darse á sí mismo un movimiento de rotacion al rededor de dicho punto; porque de cualquier modo que haga funcionar sus miembros, no puede desarrollar más que fuerzas interiores, que no alteran la suma de las áreas descritas por las proyecciones de los radios vectores, que parten de dicho punto, sobre un plano cualquiera que pase por su centro de gravedad, la cual debe conservar siempre el mismo valor; y si al principio era nula, despues debe tambien serlo. Así, cuando mueve algunas partes de su cuerpo, de manera que la suma de las áreas que les corresponden, proyectadas sobre un plano determinado, tiene un valor positivo, hay precisamen-

te otras partes del cuerpo que se mueven al mismo tiempo en sentido contrario, de manera que describan áreas cuya suma de proyecciones sea negativa, á fin de que la suma total de las áreas, relativas á todas las partes del cuerpo, sea igual cero.

Cuando un hombre puesto de pié sobre el suelo, y estando en reposo, empieza á marchar hácia adelante, hace pasar su centro de gravedad del estado de reposo al de movimiento; vamos á explicar cómo. Mientras que el hombre se encuentra en reposo, está sometido á dos fuerzas exteriores que se equilibran, que son, la accion de la gravedad que obra sobre las moléculas de su cuerpo, y la resultante de las presiones que sufre de parte del suelo, en los diferentes puntos en que le toca; cuando el hombre quiere ponerse en marcha y adelanta un pié, solo desarrolla fuerzas interiores, que no pueden poner su centro de gravedad en movimiento; pero en virtud de teorema de las áreas, y conforme á lo que acabamos de decir, al mismo tiempo que adelanta un pié, el otro pié y el resto del cuerpo tienden á retroceder, retroceso que no se verifica por el rozamiento que se desarrolla, y lo impide hasta un cierto límite, y como este rozamiento es una fuerza exterior, el centro de gravedad del cuerpo adelanta; de manera que el rozamiento, que el suelo ejerce sobre la planta del pié, es la fuerza que determina el movimiento del cuerpo. Es sabido, que sobre un piso resbaladizo, para el cual el coeficiente de rozamiento es pequeño, al adelantar un pié, el otro resbala hácia atras, y hay peligro de caer si no se tiene cuidado; lo cual se observa frecuentemente al marchar sobre un piso de hielo, ú otra superficie lisa, y áun más si se tienen puestos patines.

LECCION LIII.

Teorema de las fuerzas vivas.—Consecuencias del teorema de las fuerzas vivas.—Teorema de las fuerzas vivas en el movimiento relativo.—Teorema de la menor accion.—Importancia relativa de los teoremas generales que rigen el movimiento de un sistema material cualquiera.

Teorema de las fuerzas vivas.

642. En el movimiento de un punto material se verifica, que el incremento de la fuerza viva del punto solicitado por una fuerza F, durante un intervalo de tiempo cualquiera, es igual al duplo del trabajo desarrollado por la fuerza durante este tiempo. Como el trabajo de la resultante de várias fuerzas es igual á la suma de los trabajos de las componentes, si el punto está solicitado por várias fuerzas, el incremento de la fuerza viva del punto es igual al duplo de la suma de los trabajos desarrollados por todas estas fuerzas.

Sean v_0 y v las velocidades de un punto de masa m al principio y al fin del tiempo t; F_1, F'_1, F''_1,..... las componentes tangenciales de las fuerzas F, F', F''..... que obran sobre el punto, en un instante cualquiera, ds el elemento de trayectoria descrito por el móvil en el tiempo dt, contado á partir de este instante. La ecuacion de las fuerzas vivas en el movimiento de este punto, será

$$mv^2 - mv^2_0 = 2\Sigma \int_{s_0}^{s} F_1 ds;$$

el signo suma se extiende á tantos sumando como fuerzas actúan sobre el punto, y los límites s_0 y s son los arcos correspondientes á la posicion inicial y final del punto.

Escribamos tantas ecuaciones análogas á la anterior, como puntos tiene el sistema material en movimiento, considerando un mismo intervalo de tiempo para todos, y sumemos miembro á miembro todas estas ecuaciones, el resultado final será

$$(1) \quad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\Sigma \int F_1 ds,$$

en la cual los signos Σ del primer miembro se extienden á tantos sumandos como puntos materiales tiene el sistema, y el mismo signo en el segundo miembro á tantos sumandos de la misma forma, como fuerzas obran sobre todos los puntos del sistema.

El primer miembro de esta ecuacion expresa el incremento de la suma de las fuerzas vivas del sistema al pasar de la posicion inicial á la posicion final; y el segundo la suma de los trabajos desarrollados por todas las fuerzas que obran sobre el sistema, al pasar éste de una posicion á otra; entre estas fuerzas se encuentran á la vez las fuerzas exteriores y las interiores, ya sean fuerzas dadas, ya representen las ligaduras del sistema. Sólo desaparecen las fuerzas en el segundo miembro de la ecuacion anterior, en los casos particulares en que su trabajo individual es cero por sí mismo.

La ecuacion (1) es la expresion analítica del teorema de las fuerzas vivas, el más importante de toda la Dinámica, en lo que se refiere al movimiento de las máquinas, el cual se enuncia en los siguientes términos:

El incremento total de la fuerza viva de un sistema material en movimiento, durante un intervalo de tiempo cualquiera, es igual al duplo de la suma de los trabajos de todas las fuerzas, tanto exteriores como interiores, que actúan sobre *los diversos puntos del sistema, durante el mismo tiempo.*

Es muy esencial observar que las fuerzas interiores no desaparecen por sí mismas de la ecuacion de las fuerzas vivas, como sucede en los tres primeros teoremas generales, lo cual constituye una diferencia importante entre esta ecuacion y las que expresan analíticamente los otros tres teoremas. Por consiguiente, siempre que se trata del estudio de las fuerzas interiores, se usa el teorema de las fuerzas vivas.

643. El teorema de las fuerzas vivas está comprendido, como todos los teoremas generales, en el teorema de d'Alambert.

La ecuacion general del movimiento, que expresa este teorema, es

$$(2)\quad \Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0;$$

en la cual m, m', m'',..... son las masas de los puntos materiales del sistema, solicitados por las fuerzas P, P', P'',..... cuyas componentes paralelas á los ejes son X, Y, Z, X', Y', Z',.....

Las ligaduras del sistema estarán expresadas por cierto número de ecuaciones.

$$(3)\quad L=0,\ M=0,\ N=0,.....$$

que deben ser satisfechas durante todo el movimiento, por las coordenadas de los puntos del sistema, en todas sus posiciones.

Dando un movimiento virtual al sistema, durante el cual puede suponerse el tiempo constante, deduciremos de las ecuaciones (3) las siguientes:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x+\dfrac{dL}{dy}dy+\dfrac{dL}{dz}\delta z+\dfrac{dL}{dx'}\delta x'+.....=0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x+\dfrac{dM}{dy}\delta y+\dfrac{dM}{dz}\delta z+\dfrac{dM}{dx'}\delta x'+.....=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En el movimiento efectivo del sistema las coordenadas de sus diferentes puntos deben satisfacer á las ecuaciones de condicion (3), y se tiene, diferenciándolas con relacion á t como variable independiente,

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{dL}{dt}dt+\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\frac{dL}{dx'}dx'+\ldots\ldots=0, \\ \frac{dM}{dt}dt+\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dx'}dx'+\ldots\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supongamos que las ecuaciones de condicion no contienen el tiempo explícitamente; entónces

$$\frac{dL}{dt}=0,\ \frac{dM}{dt}=0,\ldots\ldots$$

y de la comparacion de las ecuaciones (4) y (5) deduciremos

$$\delta x=dx,\ \delta y=dy,\ \delta z=dz,\ \delta x'=dx',\ldots\ldots$$

Así, entre todos los movimientos virtuales, compatibles con las ligaduras del sistema, podremos escoger el que se refiere al movimiento real de cada punto, para el cual la ecuacion (1) será

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right]=0;$$

que se puede poner bajo la forma

$$(6)\quad \Sigma m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Pero de

$$v^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},$$

se deduce

$$\tfrac{1}{2}dv^2=\frac{dxd^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2};$$

$$(7)\quad d\Sigma mv^2=2\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz);$$

ó llamando dp á la proyeccion del camino recorrido por el punto de masa m, sobre la direccion de la fuerza P, será

$$(8)\quad d\Sigma mv^2=2\Sigma Pdp.$$

Luego la diferencial de la suma de las fuerzas vivas, de todos los puntos del sistema, es el duplo de la suma de las cantidades de trabajo elemental de las fuerzas motrices.

Integrando la ecuacion (7) entre los límites t_0 y t, tendremos, designando por v_0 la velocidad inicial y por v la velocidad final para cada uno de los puntos,

$$(9) \quad \Sigma mv^2 - \Sigma nv_0^2 = 2\int_{t_0}^{t} \Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

que es la ecuacion de las fuerzas vivas y puede enunciarse en los mismos términos que la ecuacion (1), en razon á que el trinomio del trabajo, $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$, es equivalente á $\mathrm{F}_1 ds$.

644. Puede demostrarse directamente, de una manera muy sencilla, el teorema de las fuerzas vivas. La fuerza P que actúa sobre un punto de masa m, tiene por componentes tangencial y centrípeta, $m\frac{dv}{dt}$, y $\frac{mv^2}{\rho}$, siendo ρ el radio de curvatura. Introduciendo con la fuerza P dos fuerzas iguales y contrarias á estas componentes, deben equilibrarse con ella, y por consiguiente, la suma de los momentos virtuales de las tres debe ser cero.

Como en la demostracion anterior, si las ligaduras del sistema no dependen explícitamente del tiempo, podemos tomar el movimiento real ds, por el movimiento virtual δs. Sea dp la proyeccion de ds sobre la fuerza P, el momento virtual de esta fuerza es $\mathrm{P}dp$, el de la fuerza tangencial tomada en sentido contrario es

$$-m\frac{dv}{dt}ds = -m\frac{ds}{dt}dv = -mv\,dv;$$

el de una fuerza igual y contraria á la fuerza centrípeta es cero; luego tendremos

$$\mathrm{P}dp - mvdv = 0, \quad \text{ó} \quad \Sigma\mathrm{P}dp - \Sigma mvdv = 0,$$

que puede ponerse bajo la forma

$$d\Sigma mv^2 = 2\Sigma\mathrm{P}dp$$

que es precisamente la ecuacion (8), y se puede deducir de ella la ecuacion (9).

Consecuencias del teorema de las fuerzas vivas.

645. El teorema de las fuerzas vivas suele denominarse algunas veces *teorema del efecto del trabajo.* En él vemos que el trabajo positivo de las fuerzas tiene por efecto aumentar la fuerza viva total de un sistema móvil, miéntras que el trabajo negativo produce una disminucion de dicha fuerza. El trabajo motor, *gastado* por las fuerzas durante un cierto recorrido de los puntos móviles, se vuelve á encontrar bajo la forma de fuerza viva, al cabo de este recorrido, en el sistema que se mueve, y la fuerza viva que el sistema pierde, para vencer las resistencias que se oponen al movimiento, aparece del mismo modo en el trabajo negativo desarrollado por estas resistencias. Bajo este punto de vista, puede decirse que *el movimiento de un sistema material es una serie no interrumpida de cambios de trabajo en fuerza viva y de fuerza viva en trabajo.*

Sea T la suma algébrica de los trabajos de las fuerzas motrices ó resistentes; apliquemos la ecuacion de las fuerzas vivas, será

$$(10) \quad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2T,$$

al cabo de un cierto intervalo de tiempo, y supongamos que al principio y al fin de este intervalo las velocidades de los mismos puntos son las mismas, ó lo que es lo mismo, que $v=v_0$; resultará que $\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0^2$, y T será por lo tanto cero; luego el trabajo total de las fuerzas es nulo durante el intervalo de tiempo considerado.

Esta conclusion se aplica principalmente á los movimientos periódicos, es decir, á los movimientos en virtud de los cuales los diversos puntos materiales que componen un sistema, vuelven al cabo de tiempos iguales á las posiciones precedentemente ocupadas, y se vuelven á encontrar animados de las mismas velocidades. Cuando esto se verifica, el trabajo total de las fuerzas es nulo para cada uno de los períodos.

En una máquina que empieza á trabajar partiendo del reposo, y vuelve al reposo cuando su trabajo cesa, se tiene al principio del movimiento $v_0=0$, y al fin $v=0$, para todos los puntos de la máquina. Luego $T=0$, es decir, que la suma de los trabajos de todas las fuerzas que actúan sobre la máquina, desde que empieza á marchar, hasta que pára, es idénticamente nula; el trabajo positivo de las fuerzas motrices es por lo tanto, durante este intervalo, igual en valor absoluto al trabajo negativo de las resistencias.

646. Si no hay fuerzas motrices aplicadas al sistema, ó si las fuerzas se equilibran, se tiene en la ecuacion (8) $\Sigma P dp=0$, integrada aquella ecuacion, da

$$(11) \quad \Sigma m v^2 = \text{cons.}^{\text{te}}.$$

De manera, *que en un sistema sujeto á condiciones cualesquiera, pero que no dependan del tiempo, si no hay fuerzas motrices, ó si las fuerzas motrices se equilibran contínuamente, la suma de las fuerzas vivas permanece constante.* Este principio se conoce con el nombre de *principio de la conservacion de las fuerzas vivas.* Debemos observar que en los sistemas en que tiene lugar, no estando sometidos los puntos á la accion de ninguna fuerza motriz, las velocidades no varian más que á causa de sus ligaduras y de la precision de moverse sobre superficies ó curvas fijas.

647. Si la funcion $\Sigma(X dx+Y dy+Z dz)$ es la diferencial exacta de una funcion de las variables $x, y, z, x', y', z', \ldots$ consideradas como independientes, ó como ligadas entre sí por las ecuaciones $L=0$, $M=0$, $N=0, \ldots$; de modo que se tenga

$$(12) \quad 2\Sigma(dx+Y dy+Z dz)=dj(x, y, z, x', y', z', \ldots..),$$

tendremos, integrando la ecuacion (7) con relacion al tiempo

$$(13)\quad \Sigma mv^2 = f(x, y, z, x'. y', z', \ldots\ldots) + C;$$

al principio del tiempo t, la velocidad es v_0, y las coordenadas $x_0, y_0, z_0, x_0', \ldots\ldots$, y tendremos

$$\Sigma mv_0^2 = f(x_0. y_0, z_0, x'_0, y'_0, \ldots\ldots) + C;$$

por consiguiente

$$(14)\ \Sigma mv^2_0 - \Sigma mv_0^2 = f(x, y, z, x', y' \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots).$$

Así, que cuando el sistema pasa de una posicion á otra, el incremento de la suma de las fuerzas vivas solo depende de las coordenadas de sus puntos en estas dos posiciones. No hay necesidad, para calcular este incremento, de conocer ni las ligaduras de los puntos en este intervalo, ni los caminos que han seguido, ni el tiempo empleado en recorrerlos.

La ecuacion (14) prueba tambien, que si los puntos móviles vuelven al fin del tiempo t á ocupar las posiciones que tenian al fin del tiempo t_0, la suma de las fuerzas vivas tiene el mismo valor en estas dos épocas. En este caso

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0^2,$$

porque $f(x, y, z, x' \ldots\ldots)$ y $f(x_0. y_0, z_0, x'_0 \ldots\ldots)$ tienen el mismo valor generalmente. Decimos generalmente, porque hay algun caso en que la funcion aumenta en una cantidad constante, y entónces no se verifica la consecuencia sino teniendo en cuenta esta constante.

La expresion $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ es la diferencial exacta de una funcion de $x. y, z, x'. y', \ldots\ldots$ cuando las fuerzas motrices están constantemente dirigidas hácia puntos fijos, y son funciones de las distancias de los puntos de aplicacion á dichos puntos fijos. Lo cual sucede cuando las fuerzas provienen de atracciones y repulsiones mútuas, cuyas intensidades son funciones de las distancias de los puntos entre los cuales se ejercen.

Dicha expresion no es una diferencial exacta cuando hay rozamiento á la resistencia de un medio. Todo lo cual está conforme con lo que dijimos al tratar esta misma cuestion en la primera parte de la Dinámica, y se prueba del mismo modo.

648. En el caso de un sistema de n puntos y $3n-1$ ecuaciones de condicion, es decir, que las ligaduras del sistema son completas, cada punto se mueve, en un mismo instante, sobre una curva completamente determinada, y el movimiento puede definirse por medio de una variable única, expresada en funcion del tiempo. En este caso, cuando se prescinde del rozamiento y de la resistencia del medio en que se mueve el sistema, la ecuacion de las fuerzas vivas basta para determinar el movimiento de cada punto, porque uniendo esta ecuacion á las $3n-1$, que expresan las ligaduras, resultan $3n$ ecuaciones para determinar las $3n$ variables $x, y, z, x', y', z', \ldots$ Antes de emplear la ecuacion de las fuerzas vivas, conviene expresar todas las variables en funcion de una de ellas, convenientemente escogida, la cual se determina luégo por medio de dicha ecuacion.

Cuando no se prescinde del rozamiento ni de la resistencia del medio, que suelen llamarse *resistencias pasivas*, éstas permanecen desconocidas en la ecuacion del trabajo; mas no por eso dejará de verificarse ésta, y siempre tendremos, llamando T al trabajo total durante el tiempo que se considere, la ecuacion

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\mathrm{T}.$$

Teorema de las fuerzas vivas en el movimiento relativo.

649. El teorema de las fuerzas vivas se verifica tambien en el movimiento relativo de un sistema cualquiera, y la suma de las fuerzas vivas se descompone en dos partes: una, la

fuerza viva de la masa entera, concentrada en el centro de gravedad, y otra la fuerza viva correspondiente al movimiento relativo del sistema, con respecto á ejes de direccion constante trazados por el centro de gravedad.

Sean Gx_1, Gy_1, Gz_1, tres ejes paralelos á tres ejes fijos OX, OY, OZ, y trazados por el centro de gravedad $G(x_1, y_1, z_1)$, al fin de un tiempo cualquiera; x', y', z' las coordenadas de un punto cualquiera A (x, y, z), con respecto á estos ejes móviles; tenemos

$$(15) \quad x = x_1 + x', \; y = y_1 + y', \; z = z_1 + z';$$

de las que, diferenciando, se deducen

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx'}{dt}, \; \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy'}{dt}, \; \frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz'}{dt}.$$

Sean v la velocidad del punto A, v_r la velocidad relativa, es decir, su velocidad aparente para un observador situado en el centro de gravedad y participando del movimiento de los ejes móviles, y v_1 la velocidad del centro de gravedad G.

Sabemos que

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

elevando al cuadrado las ecuaciones (16), y sustituyendo, será

$$v^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}{dt^2} + \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} +$$

$$+ 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{dz'}{dt}\right),$$

$$(17) \quad v^2 = v_1^2 + v_r^2 + 2\left(\frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{dz'}{dt}\right);$$

multipliquemos por m los dos miembros de esta ecuacion, y sumando ordenadamente todas las ecuaciones así obtenidas para todos los puntos del sistema, obtendremos la siguiente:

$$(18) \quad \Sigma m v^2 = \Sigma m v_1^2 + \Sigma m v_r^2;$$

observando que

$$\Sigma m\left(\frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt^2} + \ldots\right) = \frac{dx_1}{dt} \Sigma m \frac{dx'}{dt} + \frac{dy'}{dx} \Sigma m \frac{dy'}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \Sigma m \frac{dz'}{dt} = 0,$$

por ser el orígen G el centro de gravedad del sistema, para el cual $\Sigma mx'=0, \Sigma my'=0 \ldots\ldots$ y por lo tanto

$$\Sigma m \frac{dx'}{dt}=0, \Sigma m \frac{dy'}{dt}=0, \ldots\ldots$$

Podemos poner en vez de $\Sigma mv_1^2 = Mv_1^2$, siendo M la masa total del sistema, y la ecuacion (18) toma la forma

$$\Sigma mv^2 = Mv_1^2 + \Sigma mv_r^2;$$

que nos dice, *que la suma de las fuerzas vivas de los puntos en su movimiento absoluto es igual, en cada instante, al producto de la masa total del sistema multiplicada por el cuadrado de la velocidad del centro de gravedad, más la suma de las fuerzas vivas en el movimiento relativo alrededor del centro de gravedad.*

Suponiendo, como al principio, que el sistema es enteramente libre, sustituyamos el valor anterior de Σmv^2 en la ecuacion

$$d\Sigma mv^2 = 2\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz);$$

obtendremos

$$(19) \quad dMv_1^2 + d\Sigma mv_r^2$$
$$= 2\Sigma(Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1) + 2\Sigma(Xdx' + Ydy' + Zdz');$$

de las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \ M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \ M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z,$$

se deduce

$$M\frac{2dx_1 d^2x_1 + 2dy_1 d^2y_1 + 2dz_1 d^2z}{dt^2} = dMv_1^2$$
$$= 2\Sigma(Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1);$$

y simplificando la (19), resulta,

$$d\Sigma mv_r^2 = 2\Sigma(Xdx' + Ydy' + Zdz');$$

que expresa, que en el movimiento relativo de un sistema absolutamente libre, alrededor de su centro de gravedad, la diferencial de la suma de las fuerzas vivas de los puntos del sistema es igual al duplo de la suma de las cantidades de trabajo aparente de las fuerzas motrices.

Teorema de la menor accion.

650. Cuando las ecuaciones de condicion son independientes del tiempo, y la funcion

$$\Sigma(\mathrm{X}dx+dy+\mathrm{Z}dz)=df,$$

siendo f una funcion de las coordenadas, se verifica el teorema de la menor accion, que se enuncia así: *Entre todos los movimientos por los cuales se puede imaginar que el sistema pasa de una de sus posiciones á otra, satisfaciendo á las ecuaciones de condicion, el movimiento efectivo es el que reduce á un mínimo la suma de los productos de las cantidades de movimiento de cada punto material por los arcos elementales que describe sobre su trayectoria real ó efectiva.*

O lo que es lo mismo, para el movimiento efectivo se verifica que $\Sigma\int mvds$ es un mínimo, y satisface á la condicion

$$\delta\Sigma\int mvds=0.$$

Efectuando la diferenciacion tendremos

$$\delta\Sigma\int mvds=\Sigma\int m\delta vds+\Sigma\int mv\delta ds;$$

el primer sumando, poniendo por ds su valor vdt, será

$$\Sigma\int m\delta vds=\Sigma\int mv\delta vdt=\int dt\,\Sigma mv\delta v=\tfrac{1}{2}\int dt\delta\Sigma mv^2,$$

teniendo presente que dt es factor comun, y los signos Σ y δ pueden permutarse.

La ecuacion de las fuerzas vivas en el supuesto en que procedemos, es

$$\Sigma mv^2=2\int\Sigma\Big(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz\Big)=f+\mathrm{C},$$

tomando las variaciones en esta ecuacion, resulta

$$\Sigma mv\delta v = \delta f = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

luego

$$\Sigma \int m\delta v ds = \int \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dt.$$

El segundo sumando se trasforma como si se tratase de un punto único. De

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

se deduce

$$ds\delta ds = dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz;$$

dividiendo por dt y multiplicando por m, se convierte en

$$mv\delta ds = m\frac{dx}{dt}\delta dx + m\frac{dy}{dt}\delta dy + m\frac{dz}{dt}\delta dz,$$

y $$\Sigma \int mv\delta ds = \Sigma \int m\frac{dx}{dt}\delta dx + \Sigma \int m\frac{dy}{dt}\delta dy + \Sigma \int m\frac{dz}{dt}\delta dz,$$

integrando por partes estos términos, será

$$\Sigma \int m\frac{dx}{dt}\delta dx = \Sigma m\frac{dx}{dt}\delta x - \Sigma \int \delta x\, m\frac{d^2x}{dt^2}dt,$$

y del mismo modo se trasforman los otros términos. Y por fin

$$\Sigma \int mv\delta ds = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$

$$- \Sigma \int \left(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + m\frac{dy^2}{dt^2}\delta y + m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dt.$$

Reuniendo los resultados, se tiene

$$\delta\Sigma \int mvds = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) +$$

$$+ \int \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dt.$$

$$- \Sigma \int \left(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + m\frac{dy^2}{dt^2}\delta y + m\frac{dz^2}{dt^2}\delta z\right)dt$$

$$= \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) +$$

$$+ \int \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{dy^2}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{dz^2}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.$$

La suma fuera del signo $\int$ es nula en los límites, puesto que la posicion inicial y final de los puntos se suponen fijas; ademas, el movimiento efectivo por el cual el sistema pasa de la primera posicion á la segunda, exige que en cada instante se verifique la ecuacion

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{dx^2}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0,$$

luego

$$\delta\Sigma\int mvds=0;$$

condicion que basta, salvo ciertos casos excepcionales, para que $\Sigma\int mvds$ sea mínimo. Esta funcion no puede ser nunca un máximo, como vimos al tratar de este teorema con relacion á un solo punto material.

Importancia respectiva de los teoremas generales que rigen el movimiento de un sistema material cualquiera.

651. Los cinco teoremas generales que acabamos de exponer, no tienen la misma importancia: el primero se refiere únicamente al centro de gravedad del sistema, y nos da una idea clara y sencilla de la manera de moverse en el espacio el conjunto del sistema, permitiéndonos estudiar el movimiento del centro de gravedad como si se tratase de un punto material.

Los teoremas segundo y tercero que se refieren á las cantidades de movimiento proyectadas sobre un eje, y á los momentos de estas cantidades de movimiento, tambien con respecto á un eje, expresan relaciones entre las fuerzas aplicadas al sistema material, y los efectos producidos por ellas sobre las diferentes partes del sistema; relaciones ó ecuaciones que sirven para determinar los valores de algunas de las cantidades que contienen en funcion de los demas. El número de ecuaciones que producen, parece que es indefinido, como lo son los ejes á que pueden referirse uno y otro; pero fácilmente se ve que de ellas solo son distintas seis, tres relativas á cada uno; lo cual se comprende con solo considerar las cantidades de movimiento como fuerzas, proyectar estas sobre los tres ejes coordenados, y tomar los momentos de ellas con respecto á los mismos ejes, como si se tratára de establecer las condiciones del equilibrio de un sólido invariable; de modo que segun esto, el segundo teorema da tres ecuaciones distintas, y el tercero otras tres, en junto seis.

El teorema de las fuerzas vivas solo da una ecuacion, la cual contiene todas las fuerzas del sistema, lo que no sucede en los tres primeros, que solo contienen las fuerzas exteriores. Conviene tener presente que en este teorema Σmv^2 es una cantidad esencialmente positiva, como todos los sumandos que comprende.

El teorema de la menor accion ya hemos dicho en la primera parte de la Dinámica (383), que su importancia hoy es más histórica que científica.

LECCION LIV.

Movimiento de rotacion de un sólido alrededor de un eje fijo.—Caso en que el cuerpo se pone en movimiento por la accion de fuerzas instantáneas ó percusiones.—Cálculo de las percusiones ejercidas sobre el eje fijo.—Condiciones para que el eje no experimente ninguna percusion.—Centro de percusion.—Condicion para que solo obre la percusion sobre un punto del eje.

Movimiento de rotacion de un sólido alrededor de un eje fijo.

652. Habiendo establecido en las lecciones anteriores los teoremas generales del movimiento de un sistema material cualquiera, vamos á aplicar estos teoremas á los diferentes casos de movimiento que puede presentar un cuerpo sólido.

El problema general que vamos á resolver, consiste en determinar el movimiento de un sólido sometido á la accion de fuerzas dadas. Los casos de movimiento que puede presentar son cuatro: 1.° Que el sólido esté sujeto á girar alrededor de un eje fijo. 2.° Que esté sujeto á girar alrededor de un punto fijo. 3.° Que esté libre en el espacio. 4.° Que esté sujeto á permanecer en contacto con una superficie fija.

Empecemos por el primer caso.

653. En la Cinemática hemos visto, que en el movimiento de rotacion de un sólido alrededor de un eje, todos los puntos del sólido describen arcos de círculo semejantes, cuyos radios son sus distancias al eje; y que llamando ω á la velocidad angular, la velocidad absoluta es $v=r\omega$,

siendo r la distancia del punto de que se trata al eje.

Aplicando á la resolucion de este problema el teorema de d'Alambert, segun el cual, todas las fuerzas motrices del sistema se equilibran en cada instante con las fuerzas efectivas tomadas en sentido contrario, se obtendrá la ecuacion única que lo resuelve, porque el sistema es de ligaduras completas, y basta una sola ecuacion para resolverlo.

Para ello, sea P la fuerza motriz de un punto m, que describe alrededor del eje OZ (fig. 275), un arco MmM' de radio Km=r; la fuerza que habria que aplicar á este punto, si estuviera libre, para darle su movimiento efectivo, es la resultante de dos fuerzas; la fuerza tangencial

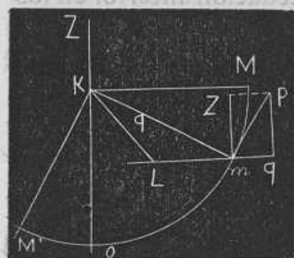

Fig. 275.

$$m\frac{dv}{dt}=mr\frac{d\omega}{dt};$$

y la fuerza centrípeta, dirigida segun el radio mK,

$$m\frac{v^2}{r}=mr\omega^2.$$

Descompongamos la fuerza P en dos, una Z paralela al eje OZ, y otra Q situada en el plano del círculo MmM', á una distancia KL=q del eje de rotacion. Para todos los puntos del cuerpo las componentes Z, y $mr\omega^2$, están siempre destruidas por la resistencia del eje fijo. Todas las otras componentes, Q, y $mr\frac{d\omega}{dt}$, están situadas dos á dos en planos perpendiculares al eje, y para el equilibrio, la suma de sus momentos con respecto al eje debe ser nula, y tendremos

$$\Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt}=\Sigma Qq.$$

Como $\frac{d\omega}{dt}$ es constante para todos los puntos del sólido, se podrá sacar del signo Σ, y resultará

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma m r^2 = \Sigma Qq,$$

y por lo tanto

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma Qq}{\Sigma m r^2}.$$

Esta ecuacion determina la velocidad angular en una época cualquiera, y es por consiguiente la ecuacion del movimiento de rotacion; $\frac{d\omega}{dt}$ es la *aceleracion angular* del movimiento, y puede enunciarse la ecuacion anterior en los siguientes términos:

La aceleracion angular de un sólido, sujeto á girar alrededor de un eje fijo, es en cada instante igual á la suma de los momentos de las fuerzas motrices, con respecto á este eje, dividida por el momento de inercia del cuerpo.

Si las fuerzas motrices son nulas, $\frac{d\omega}{dt}=0$, $\omega=$ constante; y el movimiento de rotacion es uniforme. Si $\Sigma Qq=0$, ó lo que es lo mismo, si las fuerzas motrices se equilibran alrededor del eje, tambien el movimiento es uniforme, porque no pudiendo ser cero $\Sigma m r^2$, se tendrá $\frac{d\omega}{dt}=0$, y la velocidad angular será constante. Si la suma ΣQq, sin ser constantemente nula, viene á ser cero para una cierta posicion del móvil, la aceleracion $\frac{d\omega}{dt}$ se reduce á cero al mismo tiempo, y en general cambia de signo cuando el sólido pasa por esta posicion; ántes de llegar á ella, $\frac{d\omega}{dt}$ es positivo, por ejemplo, y la velocidad angular aumenta; despues $\frac{d\omega}{dt}$ es negativo, y la velocidad angular disminuye. Luego la posicion para la cual la suma de los momentos de las fuerzas es nula, es, en general, la que reduce á un máximo ó á un mínimo la velocidad angular.

Caso en que el cuerpo se pone en movimiento por la accion de fuerzas instantáneas ó percusiones.

654. Supongamos que todos los puntos del sólido se ponen en movimiento por percusiones simultáneas; descompongamos cada percusion ó fuerza instantánea en dos, una Z paralela al eje OZ (fig. 275), y que es destruida por la resistencia de este, y otra Q situada en el plano del círculo MmM' perpendicular al eje. Sea v la velocidad que esta última componente sería capaz de imprimir al punto m si estuviera libre; mv será la cantidad de movimiento correspondiente. Siendo ω la velocidad angular del cuerpo, la cantidad de movimiento efectiva del punto m, situado á una distancia r de este eje es $mr\omega$; luego si llamamos q á la perpendicular KL, tendremos, expresando que existe el equilibrio entre las cantidades de movimiento impresas y las cantidades de movimiento efectivas, tomadas estas últimas en sentido contrario,

$$\Sigma mvq - \omega \Sigma mr^2 = 0$$

ó

$$\omega = \frac{\Sigma mvq}{\Sigma mr^2} \quad (1)$$

655. Si todas las velocidades $v, v', v'', \ldots$ comunicadas á los diferentes puntos del sistema son iguales y paralelas, puede darse otra forma á la ecuacion anterior. Para ello, sea μ la suma de las masas á que se comunica directamente esta velocidad comun v, que por las ligaduras del sistema no pueden tomar realmente; llamemos f á la distancia del centro de gravedad de la masa μ á un plano que pasa por el eje, y es paralelo á la direccion de las velocidades. Como el momento de la resultante con respecto á este plano, es igual á la suma de los momentos de las componentes, tendremos

$$\Sigma mvq = v\Sigma mq = v\mu f;$$

con lo cual, la fórmula (1) toma la forma

$$(2) \quad \omega = \frac{\mu v f}{\Sigma m r^2};$$

en la que μ puede no ser la masa total del sistema, pero $\Sigma m r^2$ es su momento de inercia total.

Esta fórmula es aplicable á un cuepo sólido C (figura 276), móvil alrededor de un eje fijo OZ, contra el cual viene á chocar otro cuerpo c_1, cuyos puntos van animados de velocidades iguales y paralelas, y que despues del choque queda unido en c_2 al primero. Entónces debemos suponer, que μ es la masa del cuerpo c_1, v su velocidad, f la distancia de su centro de gravedad á un plano que pasa por el eje OZ y es paralelo á la direccion de la velocidad v; y que $\Sigma m r^2$ es el momento de inercia del sistema invariable, formado por los cuerpos C y c_2. Es evidente que esto equivale, á imprimir á los puntos de la parte c_2, del sistema C, c_2, percusiones capaces de dar á todos los puntos de esta masa μ, velocidades iguales y paralelas á v.

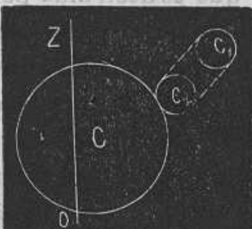

Fig. 276.

Si el cuerpo C es chocado simultáneamente por várias masas μ, μ', μ''..... animadas de velocidades diferentes, y que quedan unidas á él, despues del choque de todas ellas, se tendrá

$$\omega = \frac{\Sigma \mu v f}{\Sigma m r^2};$$

siendo $\Sigma \mu v f$ la suma de todas las cantidades análogas á $\mu v f$, relativas á las masas μ, μ', μ''.....

Si el cuerpo, en lugar de experimentar percusiones simultáneas, recibe una serie de choques, que se suceden en épocas cualesquiera, la velocidad angular estará siempre determinada por la fórmula

$$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \mu'' v'' f'' + \ldots}{\Sigma m r^2};$$

porque, despues del primer choque, el movimiento es el mismo que si el choque tuviera lugar en cualquiera de los instantes siguientes, estando el cuerpo en reposo; por consiguiente, se puede suponer que el cuerpo recibe el primer choque y el segundo, en el mismo instante, para determinar la velocidad angular despues de la segunda percusion, y lo mismo sucederá para las percusiones sucesivas.

656. La fórmula (1) puede deducirse de la ecuacion del movimiento de rotacion (653)

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Sigma Qq}{\Sigma mr^2},$$

por una integracion. Basta suponer que la fuerza Q, que actúa perpendicularmente al eje, es una percusion. Siendo el tiempo θ muy pequeño, podemos suponer que q permanece constante durante este intervalo de tiempo. Entónces, integrando la ecuacion, desde $t=0$, hasta $t=\theta$, se tiene

$$\omega=\frac{1}{\Sigma mr^2}\Sigma q\int_0^\theta Qdt;$$

pero sabemos, que

$$\int_0^\theta Q\,dt=mv,$$

por estar la fuerza impulsiva medida por la cantidad de movimiento (604); luego

$$\omega=\frac{\Sigma mvq}{\Sigma mr^2}.$$

Cálculo de las percusiones ejercidas sobre el eje fijo.

657. Tomemos el eje fijo por eje de las z, y por plano XY, el plano perpendicular al eje fijo, trazado por

el punto del cuerpo al que está aplicada la fuerza instantánea; y llamemos α y β las coordenadas de este punto de aplicacion. Supongamos que el cuerpo se pone en movimiento por la accion de una fuerza instantánea, que imprime una velocidad V á una cierta masa μ, en cuyo centro de gravedad está aplicada; la medida de esta fuerza instantánea es la cantidad de movimiento μV. Sabemos que las cantidades de movimiento impresas á los diferentes puntos, deben equilibrarse con las cantidades de movimiento efectivas, tomadas en sentido contrario, y este equilibrio debe tener lugar en virtud de la fijeza del eje. Para que el eje esté fijo, basta que lo estén dos de sus puntos tomados á voluntad, tales como el punto O, orígen de las coordenadas, y otro punto H cualquiera tomado sobre el eje OZ (fig. 278). Suponiendo que estos puntos dejen de estar fijos, se podrán destruir las percusiones ejercidas sobre el eje, y mantener este eje inmóvil, aplicando en los dos puntos O y H dos fuerzas instantáneas R_1 y R_2, de intensidades y direcciones convenientes. Si se introducen estas dos fuerzas, que representan las resistencias de los puntos fijos, el equilibrio subsistirá considerando al cuerpo como enteramente libre. Debemos, pues, aplicar á este sistema de fuerzas, las condiciones del equilibrio de un cuerpo enteramente libre.

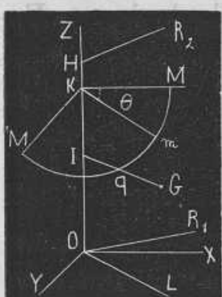

Fig. 278.

Para ello sean X, Y, Z las componentes de la cantidad de movimiento μV; X_1, Y_1, Z_1, las de la resistencia del punto O; X_2, Y_2, Z_2, las de resistencia del punto H; y $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, las componentes de la cantidad de movimiento efectiva del punto m; hagamos $OH = h$.

Las seis ecuaciones del equilibrio serán las siguientes:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &X-\Sigma m\frac{dx}{dt}+X_1+X_2=0,\\ &Y-\Sigma m\frac{dy}{dt}+Y_1+Y_2=0,\\ &Z-\Sigma m\frac{dz}{dt}+Z_1+Z_2=0;\\ &Y_2h-Z\beta+\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=0,\\ &Z\alpha-X_2h+\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=0,\\ &X\beta-Y\alpha+\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Se pueden simplificar estas ecuaciones, observando que z es constante, porque cada punto describe un círculo paralelo al plano XY; por lo tanto $\frac{dz}{dt}=0$.

Podemos tambien reemplazar x é y por las coordenadas polares en el plano XY; llamando θ al ángulo de mK con una paralela al eje de las x, serán

$$x=r\cos\theta,\ y=r\operatorname{sen}\theta,\ \frac{dx}{dt}=-r\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}=-y\omega,$$

$$\frac{dy}{dt}=r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=x\omega;$$

teniendo presente que $\frac{d\theta}{dt}=\omega$, ó sea la velocidad angular.

Tendremos

$$\Sigma m\frac{dx}{dt}=-\Sigma my\omega=-\omega\Sigma my=-\omega My_1,$$

$$\Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma mx\omega=\omega\Sigma mx=\omega Mx_1,$$

designando por M la masa total del cuerpo, y por x_1, y_1 las coordenadas de su centro de gravedad. Con estas simplificaciones se pueden escribir las ecuaciones (3) del modo siguiente:

$$(4)\quad X+\omega My_1+X_1+X_2=0,$$

$$(5)\quad Y-\omega Mx_1+Y_1+Y_2=0,$$

$$(6)\quad Z+Z_1+Z_2=0,$$

$$(7)\quad Y_2h-Z\beta+\omega\Sigma mxz=0,$$

$$(8)\quad Z\alpha-X_2h-\omega\Sigma myz=0,$$

$$(9)\quad X\beta-Y\alpha+\omega\Sigma mr^2=0.$$

La última ecuacion no contiene las componentes de las resistencias de los puntos O y H, y es la ecuacion del movimiento, es decir, que determina la velocidad angular ω. De ella se deduce

$$(9) \quad \omega = \frac{Y\alpha - X\beta}{\Sigma mr^2},$$

valor que está conforme con el de la fórmula

$$\omega = \frac{\mu vf}{\Sigma mr^2},$$

designando por v la proyeccion de la velocidad V sobre un plano perpendicular al eje; porque μvf es el momento con respecto al eje OZ de la percusion aplicada al cuerpo, en el punto del plano XY que tiene por coordenadas α y β, y que está representado por $Y\alpha - X\beta$.

Las ecuaciones (7) y (8) determinan X_2 é Y_2; las ecuaciones (4) y (5) determinan X_1 é Y_1; y la ecuacion (6) nos dará la suma $Z_1 + Z_2$. No se pueden determinar Z_1 y Z_2 separadamente, porque estas dos fuerzas actúan segun la direccion del eje OZ y se componen en una igual á su suma. Si hacemos variar la distancia h, las ecuaciones (7) y (8) muestran que X_2 é Y_2 varian en razon inversa de h.

Condiciones para que el eje no experimente ninguna percusion. Centro de percusion.

658. Para que el eje no experimente ninguna percusion, es necesario que las componentes de las resistencias $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$, sean todas nulas; y si introducimos estas hipótesis en las ecuaciones del número anterior, resultan las cinco siguientes

$$(10) \quad X + \omega M y_1 = 0,$$

$$(11) \quad Y - \omega M x_1 = 0,$$

$$(12) \quad Z = 0,$$

$$(13) \quad \Sigma mxz = 0,$$

$$(14) \quad \Sigma myz = 0.$$

La ecuacion $Z=0$, indica, que la percusion aplicada á la masa μ, debe actuar en un plano perpendicular al eje OZ; y las dos últimas expresan, que este eje debe ser uno de los ejes principales de inercia relativos al punto O.

Para interpretar las ecuaciones (10) y (11), hagamos pasar el plano de las ZX por el centro de gravedad del cuerpo, y entónces tendremos $y_1=0$, $x_1=GI=a$; con lo cual se convierten las ecuaciones citadas en

$$X=0, \quad Y=\omega Ma.$$

La primera nos dice que la percusion se reduce á su componente Y, puesto que ya hemos visto que $Z=0$; es decir, que la percusion debe ser perpendicular al plano ZOG que pasa por el eje y por el centro de gravedad del cuerpo. La segunda nos da el valor de f, ó de la más corta distancia de esta fuerza al eje; porque tenemos

$$Y=\mu v, \quad \omega=\frac{\mu v f}{\Sigma m r^2};$$

y poniendo estos valores de Y y de ω en dicha ecuacion, será

$$\mu v=\frac{\mu v f}{\Sigma m r^2} Ma$$

de donde

$$f=\frac{\Sigma m r^2}{Ma}.$$

Sea MK^2 el momento de inercia con respecto á un eje, trazado por el centro de gravedad G del cuerpo, y paralelo á OZ; tendremos

$$\Sigma m r^2=M(a^2+K^2)$$

y por lo tanto

$$f=a+\frac{K^2}{a}.$$

Resumiendo, resultan las tres condiciones siguientes para que el eje no sufra ninguna percusion.

1.ª La direccion de la percusion debe ser perpendicular al plano que pasa por el eje fijo y por el centro de gravedad del cuerpo. 2.ª Este eje debe ser uno de los ejes principales de inercia, para el punto en que encuentra al plano que contiene la fuerza instantánea, y es perpendicular á dicho eje. 3.ª La distancia de esta fuerza al eje debe ser igual á $a+\frac{K^2}{a}$, siendo a la distancia del centro de gravedad del cuerpo al eje, y MK^2 el momento de inercia del cuerpo, con respecto á un eje paralelo al eje fijo, trazado por el centro de gravedad.

659. Se llama *centro de percusion*, el punto al cual la percusion debe aplicarse, en el plano que determinan el eje fijo y el centro de gravedad, para que no se ejerza ningun esfuerzo sobre el eje fijo: la distancia del centro de percusion á dicho eje es $a+\frac{K^2}{a}$.

Si el eje pasa por el centro de gravedad, experimenta siempre una percusion; porque para que no se ejerza ningun esfuerzo sobre el eje, la percusion debe ser igual á ωMa; y debe ser nula, si a es nula; es decir, si el eje pasa por el centro de gravedad del cuerpo; pero entónces $f=\infty$; y el centro de percusion debe estar por lo tanto en el infinito.

Recíprocamente, si el cuerpo está en movimiento alrededor del eje, se podrá pararle bruscamente, sin que experimente ninguna percusion el eje, aplicando al centro de percusion una fuerza instantánea igual á ωMa, perpendicular al plano trazado por el eje y por el centro de gravedad del cuerpo.

Condicion para que sólo obre la percusion sobre un punto del eje.

660. Si este punto es el H, es necesario que X_1, Y_1, Z_1, componentes de la cantidad de movimiento debida á la fuerza aplicada en el punto O, sean nulas; y las ecuaciones (4), (5) y (6) dan suponiendo $y_1=0$, $x_1=a$,

$$X_2=-X,\quad Y_2=-Y+\omega Ma,\quad Z_2=-Z;$$

pero $$\omega = \frac{Y\alpha - X\beta}{\Sigma mr^2} = \frac{\mu vf}{\Sigma mr^2};$$

y si Z=0, las (7) y (8) dan

$$h = \frac{\omega E}{\omega Ma - Y} = \frac{\omega D}{X};$$

haciendo $E = \Sigma mxz$, $D = \Sigma myz$.

La ecuacion de condicion es por consiguiente

$$DY + EX = \omega Ma.$$

Si OZ es un eje principal de inercia, respecto al punto O, D y E son nulas, y se tiene $h=0$; lo que nos dice, que la percusion está aplicada al punto O.

LECCION LV.

Rotacion de un cuerpo solicitado por fuerzas cualesquiera alrededor de un eje fijo.—Cálculo de las presiones que se ejercen sobre el eje. —Caso en que no hay fuerzas motrices.—Caso en que las fuerzas motrices se reducen á un par.—Aplicacion á las muelas de molino. —Péndulo compuesto. Ecuacion de su movimiento.—Longitud del péndulo compuesto.—Eje de oscilacion. Los ejes de oscilacion y de suspension son recíprocos.—Eje de la más breve oscilacion,

Rotacion de un cuerpo solicitado por fuerzas cualesquiera alrededor de un eje fijo.

661. En la leccion anterior hemos estudiado la rotacion de un cuerpo, cuando es producida por fuerzas instantáneas ó percusiones, vamos ya á examinarla en el caso de ser producida por fuerzas cualesquiera, que actúan sobre el cuerpo de una manera contínua.

Sean X, Y, Z (fig. 278), las componentes de la fuerza motriz P, aplicada al punto m (x, y, z), que describe alrededor del eje OZ el círculo MmM'. Las componentes de la fuerza efectiva de este punto, tomadas en sentido contrario, son

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2};$$

las cuales, segun el teorema de d'Alambert, deben equilibrarse con las fuerzas motrices por medio del eje; lo que exige que la suma de sus momentos, con respecto á este eje sea nula; y tendremos para ecuacion del movimiento

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y-\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x\right]=0,$$

que puede ponerse bajo la forma

$$(1) \quad \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Yx-Xy).$$

El símbolo Σ en esta ecuacion se extiende á tantos sumandos como puntos materiales tiene el sistema. Puede simplificarse esta ecuacion cambiando las coordenadas rectilíneas x é y por las polares r y θ. Sean $mKM=\theta$, $mK=r$; tendremos

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \frac{dx}{dt}=-y\omega, \quad \frac{dy}{dt}=x\omega,$$

teniendo presente que $\frac{d\theta}{dt}=\omega$; de ellas resulta

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=(x^2+y^2)\omega=r^2\omega;$$

y tambien, volviendo á diferenciar,

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=r^2\frac{d\omega}{dt}.$$

Por lo que la ecuacion (1) se reduce á

$$\Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt}=\Sigma(Yx-Xy);$$

$\frac{d\omega}{dt}$ es constante para todos los puntos del cuerpo, y se puede sacar fuera del signo Σ, y tendremos,

$$(2) \quad \frac{d\omega}{dt}=\frac{\Sigma(Y\Sigma-Xy)}{\Sigma mr^2},$$

y como $Qq=Yx-Xy$, esta ecuacion es la misma que obtuvimos en el núm. 653.

Cálculo de las presiones que se ejercen sobre el eje.

662. Para calcular estas presiones podemos considerar el cuerpo como enteramente libre, con tal que á dos puntos cualesquiera O y H, tomados sobre el eje, se apliquen dos fuerzas $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$, y $R_2(X_2, Y_2, Z_2)$, iguales y contrarias á las presiones ejercidas sobre estos dos puntos en cada instante del movimiento. Podremos aplicar las seis ecuaciones del equilibrio de un sólido invariable

libre, puesto que segun el teorema de d'Alambert, debe existir el equilibrio entre las fuerzas motrices y las fuerzas efectivas tomadas con signo contrario; y tendremos haciendo $\mathrm{OH}=h$, las seis siguientes ecuaciones;

$$
(3)\quad\left\{\begin{array}{l}
\Sigma\left(X-m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+X_1+X_2=0,\\
\Sigma\left(Y-m\dfrac{d^2y}{dt}\right)+Y_1+Y_2=0,\\
\Sigma\left(Z-m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)+Z_1+Z_2=0,\\
\Sigma\left[\left(Y-m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)z-\left(Z-m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)y\right]+Y_2h=0,\\
\Sigma\left[\left(Z-m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)x-\left(X-m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)z\right]-X_2h=0,\\
\Sigma\left[\left(X-m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)y-\left(Y-m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)x\right]\qquad=0.
\end{array}\right.
$$

Siendo z constante, $\frac{dz}{dt}=0$, $\frac{d^2z}{dt^2}=0$; é introduciendo ω en vez de x é y, se simplifican las seis ecuaciones anteriores; observando que

$$
\frac{dx}{dt}=-y\omega,\quad \frac{dy}{dt}=x\omega,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-y\frac{d\omega}{dt}-\omega\frac{dy}{dt}=-y\frac{d\omega}{dt}-x\omega^2,
$$
$$
\frac{d^2y}{dt^2}=x\frac{d\omega}{dt}+\omega\frac{dx}{dt}=x\frac{d\omega}{dt}-y\omega^2;
$$

y designando por M la masa del cuerpo, y por x_1, y_1, z_1 las coordenadas de su centro de gravedad, podrán escribirse dichas ecuaciones como sigue:

$$
(4)\quad\left\{\begin{array}{l}
\Sigma X+\dfrac{d\omega}{dt}My_1+\omega^2Mx_1+X_1+X_2=0,\\
\Sigma Y-\dfrac{d\omega}{dt}Mx_1+\omega^2My_1+Y_1+Y_2=0,\\
\Sigma Z+Z_1+Z_2=0,\\
\Sigma(Zy-Yz)+\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma mxz-\omega^2\Sigma myz-Y_2h=0,\\
\Sigma(Xz-Zx)+\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma myz+\omega^2\Sigma mxz+X_2h=0,\\
\Sigma(Yx-Xy)-\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2=0.
\end{array}\right.
$$

Estas seis ecuaciones dan las componentes de las presiones buscadas. La última no contiene dichas componentes, y es la ecuacion de movimiento ántes encontrada. Cuando se haya integrado esta ecuacion, las ecuaciones 4.ª y 5.ª darán X_2 é Y_2, cuyos valores están en razon inversa de h; porque X_2h é Y_2h son los momentos de los pares que resultan de la traslacion al punto O, de las componentes X_2 é Y_2 de R_2. Ahora estos momentos deben ser independientes de la posicion del punto H, puesto que cada uno de estos pares debe destruir otros pares que son por sí mismos independientes de dicha posicion. Conocidas X_2 é Y_2, las dos primeras ecuaciones darán X_1 é Y_1, y la 3.ª dará Z_1+Z_2, sin determinar particularmente ninguna de estas componentes, porque lo mismo es aplicar Z_1 y Z_2 en los puntos O y H, que la fuerza Z_1+Z_2 en el punto O.

Caso en que no hay fuerzas motrices.

663. Cuando no hay fuerzas motrices, X, Y, Z, son cero para todos los puntos del cuerpo, y la ecuacion (2) se reduce á $\frac{d\omega}{dt}=0$, $\omega=$constante; el movimiento de rotacion es uniforme, como ya sabíamos; y las ecuaciones (4) se reducen, despejando en ellas las componentes X_2, Y_2, X_1, Y_1, Z_1+Z_2, á las siguientes:

$$(5)\quad \begin{cases} X_2=-\dfrac{\omega^2}{h}\Sigma mxz \\ Y_2=-\dfrac{\omega^2}{h}\Sigma myz \\ X_1=\dfrac{\omega^2}{h}\Sigma mxz-\omega^2 Mx_1 \\ Y_1=\dfrac{\omega^2}{h}\Sigma myz-\omega^2 My_1 \\ Z_1+Z_2=0. \end{cases}$$

Esta última ecuacion nos dice, que las resistencias R_1

y R_2 se reducen á dos fuerzas perpendiculares al eje, puesto que sus componentes paralelas á este eje, dan una suma $Z_1+Z_2=0$; condicion que se verifica siendo $Z_1=0$, y $Z_2=0$; y tambien siendo $Z_1=-Z_2$.

Como el movimiento de rotacion es uniforme, la fuerza tangencial es nula para todos los puntos del cuerpo, y las resistencias R_1 y R_2 se equilibran con las fuerzas centrífugas de todos los puntos del cuerpo, que como sabemos, actúan sobre el eje perpendicularmente á su direccion.

Segun las ecuaciones (5), las resistencias R_1 y R_2 son proporcionales al cuadrado de la velocidad angular constante ω, porque sus componentes son proporcionales todas al cuadrado de dicha velocidad.

664. Si X_2 é Y_2 son cero, el punto H no experimenta ninguna presion, y para esto es preciso que

$$(6) \quad \Sigma mxz=0, \ \Sigma myz=0;$$

es decir, que OZ sea uno de los ejes principales de inercia del cuerpo, relativos al punto O. Luego, *si un cuerpo retenido por un solo punto fijo, comienza á girar alrededor de uno de los ejes principales de inercia, relativos á este punto, continuará girando alrededor de este eje, como si estuviera fijo.*

En este caso las ecuaciones (5) dan

$$X_1=-\omega^2 Mx_1, \ Y_1=-\omega^2 My_1,$$

de las que se deduce

$$R_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2}=\omega^2 Ma,$$

siendo a la distancia del centro de gravedad al eje; es decir, $a=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. Tambien tenemos dividiendo

$$\frac{X_1}{Y_1}=\frac{x_1}{y_1};$$

lo que nos indica que la fuerza R_1, ó la presion sobre el punto O, está situada en el plano ZOG, que determinan el eje OZ y el punto G. Obtendremos este resultado, tomando este plano por plano, de las ZOX, en el instante que se considera.

665. Puede hacerse de manera que el punto O no experimente ninguna presion, y entónces el eje no soportará ninguna. Para lo cual, es necesario y suficiente que $X_1=0$, é $Y_1=0$, y por consiguiente $x_1=0$, é $y_1=0$; es decir, que el centro de gravedad debe estar situado en el eje de rotacion, y entónces habiendo empezado el movimiento alrededor de este eje, supuesto fijo, continuará uniformemente alrededor del mismo eje cuando éste venga á ser enteramente libre. El eje, de rotacion es entónces un eje principal de inercia para todos los puntos de su direccion.

Caso en que las fuerzas motrices se reducen á un par.

666. Las consecuencias precedentes subsisten, cuando las fuerzas se reducen á un par, cuyo plano es perpendicular al eje. En este caso, sabemos que se verifican las ecuaciones siguientes:

$$\Sigma X=0,\ \Sigma Y=0,\ \Sigma Z=0,$$
$$\Sigma(Zy-Yz)=0,\ \Sigma(Xz-Zx)=0.$$

Para que el punto H no sufra ninguna presion, es preciso que $X_2=0$, $Y_2=0$, $Z_2=0$; y las ecuaciones 4.ª y 5.ª del sistema (4) núm. 662, darán

$$-\frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz+\omega^2 myz=0,$$
$$-\frac{d\omega}{dt}\Sigma myz-\omega^2\Sigma mxz=0.$$

Eliminando $\frac{d\omega}{dt}$ entre estas dos ecuaciones, resulta

$$\omega^2\left[\left(\Sigma mxz\right)^2+\left(\Sigma myz\right)^2\right]=0,$$

lo cual exige, que

$$\Sigma mxz=0,\ \text{y}\ \Sigma myz=0;$$

es decir, que el eje de rotacion debe ser un eje principal de inercia, relativo al punto O. Entónces, las tres primeras ecuaciones (5) nos darán las componentes X_1, Y_1, Z_1 de la presion ejercida sobre el punto O, presion perpendicular al eje, por ser $Z_1=0$. Si en una época cualquiera este eje deja de estar fijo, y el cuerpo está solo retenido por el punto O, continuará girando uniformemente alrededor del mismo eje.

667. Para que el punto O no sufra ninguna presion, es preciso que $X_1=0$, $Y_1=0$, $Z_1=0$; entónces las dos primeras ecuaciones del sistema (4), dan

$$y_1\frac{d\omega}{dt}+\omega^2x_1=0,\quad -x_1\frac{d\omega}{dt}+\omega^2y_1=0,$$

de las que se deduce eliminando $\frac{d\omega}{dt}$,

$$\omega^2(y_1^2+x_1^2)=0,$$

la cual exige que

$$x_1=0,\quad y_1=0;$$

por lo tanto, el centro de gravedad está situado sobre el eje OZ, que es uno de los ejes principales de inercia para este punto O, y por consiguiente para todos los puntos de dicho eje. Luego, si un cuerpo empieza á girar alrededor de uno de los ejes principales de inercia, que se refieren á su centro de gravedad, y está solicitado constantemente por un par, situado en un plano perpendicular á este eje, su movimiento se continuará sin alteracion alguna, cuando este eje venga á ser enteramente libre.

Vemos, pues, que el sistema goza de las mismas propiedades que en el caso en que no hay fuerzas motrices.

Si OZ no es uno de los ejes principales de inercia, relativos al punto O, estando fijo sólo este punto, la presion en el punto H no será jamás nula, y el cuerpo no continuará girando alrededor del eje OZ. Vemos por esto, que un cuerpo retenido por un punto fijo O, y solicitado por un par, no tiende á girar alrededor de una perpendicular OZ al plano de este par, si esta perpendicular no es uno de los ejes principales de inercia, relativos al punto O.

Aplicacion á las muelas de molino.

668. La muela móvil de un molino harinero ofrece el ejemplo de un cuerpo sólido, que gira alrededor de un eje, al cual está unida por un solo punto.

Los granos de trigo, que se trata de convertir en harina, pasan entre la muela fija, *ó muela durmiente*, y la muela móvil, esparciéndose al mismo tiempo por las estrías practicadas en las superficies de las dos; y el movimiento comunicado á una de ellas basta para producir la molienda del grano. Si la muela móvil estuviera invariablemente unida al eje de rotacion, el trabajo de la molienda sería muy desigual, los granos pequeños quedarian enteros en el intervalo uniforme de las dos muelas. Se obtiene mejor harina, dejando á la muela móvil la libertad de oscilar alrededor de su punto de suspension, pero la oscilacion debe ser muy pequeña. Para esto, se disponen las muelas de manera, que el eje de rotacion sea un eje principal de inercia relativo al punto de apoyo; entónces, la rotacion uniforme tiende á persistir indefinidamente sin la intervencion de fuerzas exteriores. Es necesario para conseguirlo, que se tenga $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$, con respecto á los ejes que pasan por el centro de suspension. Estando la muela encentrada, si estas condiciones están satisfechas para un punto del eje de rotacion OZ, lo estarán para todos los demas. Las alturas z de las masas m, influyen en los valores de las sumas anteriores, y para reglar estos valores, y hacer que sean cero, se procura la posibilidad de hacer variar la altura z, para algunos puntos al ménos de la muela; se hacen con este fin en la superficie superior de la muela, á los extremos de dos diámetros rectangulares, cuatro cavidades cilíndricas, en las que se introducen masas metálicas, móviles á lo largo de una varilla vertical, recubierta de hilo. Se hacen subir ó bajar estas masas adicionales, sin que el centro de gravedad general, salga del eje de rotacion, y de manera que Σmxz y Σmyz se aproximen á cero. Se conoce que la disposicion es conveniente, para la estabilidad del movimiento de la muela, haciéndola girar sin trigo, y por medio de varios tanteos, se le llega á dar la disposicion conveniente.

Péndulo compuesto. Ecuacion de su movimiento.

669. El péndulo compuesto puede servir como ejemplo de la rotacion de un cuerpo sólido alrededor de un eje fijo. Se llama péndulo compuesto un cuerpo sólido, que puede girar alrededor de un eje fijo horizontal.

Sea el eje fijo horizontal el OZ (fig. 279), y tomemos por eje de las x, la horizontal OX perpendicular á OZ, y por eje de las y una vertical OY dirigida de arriba á abajo, en el sentido de la gravedad. La ecuacion del movimiento es la ecuacion (2) del núm. 661,

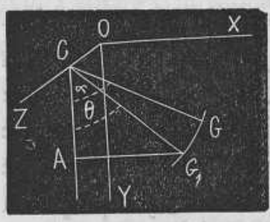

Fig. 279.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma(Yx - Xy)}{\Sigma mr^2};$$

en la cual X, Y, Z, son las componentes de la fuerza motriz aplicada á un punto cualquiera m del cuerpo, las cuales tienen los valores

$$X = 0,\ Y = mg,\ Z = 0;$$

y por consiguiente

$$\Sigma(Yx - Xy) = g\,\Sigma mx = gMx_1,$$

siendo M la masa total del cuerpo, y x_1 la coordenada de su centro de gravedad G.

Tiremos GC perpendicular al eje OZ, la vertical CA y una perpendicular G_1A á ésta. Sea G la posicion inicial del centro de gravedad G_1, es decir, su posicion para $t=0$, $GC=a$, $ACG_1=\theta$, $ACG=\alpha$; tenemos

$$x_1=G_1A=a\operatorname{sen}\theta,$$

y por consiguiente

$$\Sigma(Yx-Xy)=gMa\operatorname{sen}\theta.$$

Tambien $\omega=-\frac{d\theta}{dt}$, por disminuir θ creciendo el tiempo; y si llamamos MK^2 al momento de inercia del cuerpo, con respecto á un eje trazado por el punto G, paralelamente al OZ, será

$$\Sigma mr^2=M(a^2+K^2);$$

poniendo estos valores en la ecuacion del movimiento, teniendo presente que $\frac{d\omega}{dt}=-\frac{d^2\theta}{dt^2}$, se tendrá

$$(7)\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{ga}{a^2+K^2}\operatorname{sen}\theta=0.$$

Esta ecuacion determina θ en funcion de t, y es la ecuacion del movimiento angular del centro de gravedad. Multiplicándola por $2d\theta$ para integrarla, resultará

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=U^2+\frac{2ga}{a^2+K^2}(\cos\theta-\cos\alpha);$$

siendo U la velocidad angular inicial.

Longitud del péndulo compuesto.

670. En vez de integrar la ecuacion (7), puede reducirse el movimiento del péndulo compuesto al del péndulo simple. Si el cuerpo se reduce á un punto material pesado, ligado á un eje por una recta rígida de longitud l, y prescindimos de la masa de esta recta, la ecuacion del

movimiento será como vimos (413)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta=0,$$

que puede deducirse de la ecuacion (7), haciendo $K=0$, y $a=l$. Supongamos la longitud l determinada de manera, que ambas ecuaciones sean idénticas, ó que

$$\frac{ga}{a^2+K^2}=\frac{g}{l},$$

de la que se deduce

$$l=a+\frac{K^2}{a}.$$

Entónces el péndulo compuesto, ó mejor la recta CG, y el péndulo simple, tendrán el mismo movimiento angular, siempre que los valores iniciales de θ y de $\frac{d\theta}{dt}$ sean los mismos para los dos péndulos. De manera, que cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo horizontal, se puede siempre determinar la longitud de un péndulo simple, cuyo movimiento sea idéntico al del cuerpo, cualquiera que sea la amplitud de las oscilaciones. Si éstas son muy pequeñas, la duracion de una oscilacion estará dada por la fórmula

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

que podrá servir para determinar g por medio del péndulo compuesto, conociendo solamente la distancia del centro de gravedad del cuerpo al eje de suspension, y el momento de inercia del cuerpo con respecto á un eje, paralelo al eje de suspension, trazado por el centro de gravedad.

Eje de oscilacion. Los ejes de oscilacion y suspension son recíprocos.

671. Si en el plano que pasa por el eje y por el centro de gravedad del péndulo, se traza una recta LHI (fig. 280), paralela á este eje y á una distancia de él igual á l, cada punto de esta recta se moverá como si no formára parte del cuerpo y que estuviera ligado al eje por una recta rígida y sin masa.

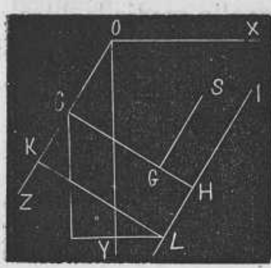

Fig. 280.

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la identidad del movimiento del péndulo compuesto y del péndulo simple cuya longitud es l. Esto no sucede en los demas puntos del cuerpo, más próximos ó más lejanos del eje. Estos oscilan más de prisa, y los primeros más despacio, que si no estuvieran ligados á los demas puntos del cuerpo.

La recta LHI se llama eje de *oscilacion del cuerpo*, correspondiente al eje de suspension OZ. El punto H de de esta recta situado sobre la CG perpendicular al eje de rotacion, se llama *centro de oscilacion*. Se le obtiene prolongando la CG en una cantidad igual á $\frac{K^2}{a}$.

672. Los ejes de oscilacion y de suspension son recíprocos; es decir, que si se hace oscilar el cuerpo alrededor de LI, el eje primitivo de suspension OZ vendrá á ser el eje de oscilacion. En efecto, las distancias del centro de gravedad al eje de suspension y al eje de oscilacion, dan un producto igual K^2; luego si se toma esta última recta por eje fijo, la primera vendrá á ser el eje de

oscilacion. La longitud del péndulo simple, que verifica sus oscilaciones en igual tiempo, será la misma que ántes, y el movimiento del péndulo compuesto será idéntico en uno y otro caso.

Segun este principio, dado el eje de suspension de un cuerpo, se puede encontrar por la experiencia el eje de oscilacion correspondiente. Basta para ello medir la duracion de las pequeñas oscilaciones, primero alrededor del eje primitivo, y despues alrededor de diferentes ejes paralelos, hasta encontrar uno tal, que la duracion de las oscilaciones sea la misma para los dos. La distancia de los dos ejes de suspension, será la longitud designada por l, y hará conocer el eje de oscilacion, relativo al primer eje de suspension.

Hay una infinidad de ejes de suspension, alrededor de los cuales las pequeñas oscilaciones son de la misma duracion.

El valor de l y la duracion de las oscilaciones son los mismos, para todos los ejes de suspension paralelos entre sí, y situados á igual distancia del centro de gravedad; porque K y a tiene los mismos valores para todos estos ejes. Ademas, llamando A, B, C, los tres momentos de inercia principales, relativos al centro de gravedad G; α, β, γ, á los ángulos que OZ forma con los ejes principales del punto G; el momento de inercia con respecto á GS, recta paralela á OZ, que está representado por MK^2, será

$$MK^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

y por consiguiente

$$l = a + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{Ma}.$$

Se puede hacer variar á los ángulos α, β, γ de manera, que l permanezca constante; luego, hay una infinidad de ejes alrededor de los cuales la duracion de las pequeñas oscilaciones es la misma.

Eje de la más breve oscilacion.

673. Podemos proponernos encontrar para un cuerpo dado, el eje alrededor del cual la duracion de una oscilacion es la más corta, ó para el cual la longitud es la más pequeña.

Supongamos que se tiene $A<B<C$. Se sabe que el menor valor de

$$A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma,$$

es A. Hay pues, que hacer

$$\alpha=0, \beta=90^\circ, \gamma=90.^\circ$$

en la ecuacion anterior, y resulta

$$l=a+\frac{A}{Ma}.$$

Donde vemos que el eje de suspension es perpendicular al eje del menor momento de inercia relativo al centro de gravedad.

Ahora, para obtener el mínimo de l, igualaremos á cero $\frac{dl}{da}$, lo que nos dará

$$\frac{dl}{da}=1-\frac{A}{M}\cdot\frac{1}{a^2}, \text{ ó } 1-\frac{A}{M}\cdot\frac{1}{a^2}=0,$$

$$a=\sqrt{\frac{A}{M}}, \quad l=2\sqrt{\frac{A}{M}},$$

Se tiene un mínimo, porque haciendo variar a, $\frac{dl}{da}$ no se anula más que una sola vez pasando de negativo á positivo

LECCION LVI.

Movimiento de rotacion de un sólido alrededor de un punto fijo.—Determinacion de los momentos de las cantidades de movimiento de un sólido con respecto á sus ejes principales de inercia.—Deduccion de las ecuaciones del movimiento del sólido por medio del teorema de los momentos de las cantidades de movimiento.—Deducir los valores de las variables p, q, r, en funcion de las variables φ, ψ, θ.—Resolucion del problema por medio de las cuadraturas en el caso de que las fuerzas exteriores son todas nulas.

Movimiento de rotacion de un sólido alrededor de un punto fijo.

674. Estudiado en las lecciones anteriores el movimiento de rotacion de un cuerpo alrededor de un eje fijo, vamos á ocuparnos ya del otro caso de rotacion, ó sea de la rotacion de un sólido alrededor de un punto fijo. El estudio del movimiento de un cuerpo sólido, sujeto á girar alrededor de un punto fijo, es uno de los problemas más difíciles de la Dinámica, y puede resolverse analíticamente, ó por medio de consideraciones geométricas; nosotros vamos á estudiarlo bajo este último aspecto, siguiendo el método de M. Poinsot, expuesto en sú célebre teoría de la rotacion de los cuerpos, porque es mucho más sencillo, y da una idea mucho más clara del modo como se verifica la rotacion de un cuerpo que tiene un punto fijo, que la coleccion de fórmulas que explican analíticamente este movimiento.

Por el punto fijo O (fig. 281), tracemos en el espacio tres ejes fijos rectangulares OX', OY', OZ'; por el mismo punto tracemos en el cuerpo sólido tres ejes rectangulares OX, OY, OZ, que coincidan con los ejes principales del elipsoide de inercia del cuerpo, relativos al punto O; estos ejes, unidos al cuerpo, se moverán con él. El problema estará resuelto si se llega á determinar en cada instante la posicion de los tres ejes OX, OY, OZ, con respecto á los tres ejes fijos OX', OY', OZ'. Las variables que determinan esta posicion son; el ángulo ψ que la traza ON del pano YX forma con el eje fijo OX'; el ángulo φ, que la misma traza, forma con el eje móvil OX; y el ángulo diedro θ que forman los planos XY y X'Y', que está medido por el ángulo que forman los ejes OZ y OZ'.

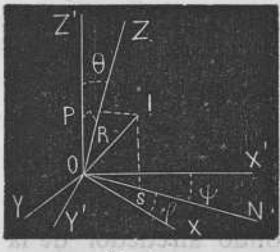

Fig. 281.

Los ángulos ψ, θ y φ son positivos, si mirados sus planos en la direccion de los ejes Z'O, NO y ZO, se ve á las rectas que los describen OX', OZ' ON moverse de izquierda á derecha; y negativos, si se mueven para describirlos de derecha á izquierda.

Dados, en un cierto instante, estos tres ángulos en magnitud y en signo, se podrán construir las posiciones de los ejes móviles. En efecto, bastará construir en el plano X'Y' el ángulo NOX'$=\psi$, por el lado ON de este ángulo se traza un plano que forme con el fijo X'Y' un ángulo igual θ, y en este plano se traza un eje OX, que forme con ON un ángulo igual φ; se traza luégo el eje OY, perpendicular á OX, y en el punto O se levantará una perpendicular OZ, de manera, que el observador que mire, segun ella, el ángulo de los otros dos ejes, vea el eje OX á la izquierda y al OY á la derecha.

De suerte, que el movimiento será enteramente conocido, cuando se conozcan en cada instante ψ, θ y φ, en funcion de t.

675. La figura contiene tres ejes OZ′, ON y OZ alrededor de los cuales se verifican, para el cuerpo sólido, las rotaciones que producen las variaciones de los ángulos ψ, φ y θ. Porque, un pequeño incremento del ángulo ψ puede atribuirse á una rotacion del sólido alrededor del eje OZ′; un pequeño incremento del ángulo diedro θ puede atribuirse á una rotacion del sólido alrededor de la recta ON, que es la arista de este diedro; y un pequeño incremento del ángulo φ puede considerarse que proviene de una rotacion del sólido alrededor del eje OZ. Por analogía con los movimientos de rotacion de la Tierra y de la Luna, se llama *rotacion propia* del sólido, la que se verifica alrededor de su eje principal OZ; *precesion*, la rotacion que se efectúa alrededor del eje OZ′, y que produce el movimiento de la línea ON, llamada *línea de los nodos*; y *nutacion*, la rotacion alrededor de ON, que hace variar el ángulo ZOZ′, comprendido entre los ejes de la rotacion propia y de la precesion. Todo movimiento elemental del cuerpo, alrededor del punto fijo O, es una rotacion alrededor de un cierto eje instantáneo OI (214), y puede considerarse como la resultante de tres rotaciones componentes OR, OP, OS, alrededor de los ejes OZ, OZ′, ON.

Para abreviar, representaremos por ψ', θ', φ' las velocidades de los ángulos ψ, θ, φ; de suerte, que $\psi' = \frac{d\psi}{dt}$, será *la velocidad angular de precesion*, ó simplemente *la precesion*, $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, la velocidad angular de nutacion, ó simplemente *la nutacion*, y $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$, la velocidad angular de la rotacion propia, ó sea simplemente la rotacion propia alrededor de su eje principal OZ. La resultante de las tres velocidades angulares ψ', θ' y φ', será en magnitud y direccion el eje OI de la rotacion instantánea ω del sólido.

676. En lugar de descomponer la rotacion instantánea ω en sus tres componentes ψ', θ' y φ', la podemos descomponer en tres componentes p, q, r dirigidas segun los tres ejes rectangulares OX, OY, OZ; y si llegamos á expresar, en funcion del tiempo, las velocidades angulares p, q, r, será fácil pasar de estas velocidades á su resultante ω, y despues descomponer ω en sus tres componentes ψ', θ' y φ', que conviene conocer para encontrar las variaciones de los ángulos ψ, θ y φ. La cuestion queda así reducida á determinar p, q, r en funcion del tiempo t. Encontraremos las ecuaciones que ligan entre sí estas variables, aplicando al movimiento del cuerpo los teoremas generales, y principalmente el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento, alrededor de los ejes OX, OY, OZ.

Pero estos ejes, unidos al sólido, son móviles con él, y el teorema de las cantidades de movimiento exige, que el eje, con respecto al cual se toman los momentos, permanezca fijo en el espacio; por lo que tomaremos los momentos con respecto á rectas fijas, que coincidan con las posiciones de los ejes OX, OY, OZ, al principio del intervalo de tiempo, durante el cual se quiere aplicar el teorema de los momentos.

Determinacion de los momentos de las cantidades de movimiento de un sólido con respecto á sus ejes principales de inercia.

677. Designemos por OX, OY, OZ, como ántes, los los tres ejes principales de inercia del sólido con relacion al punto O (fig. 281); vamos á calcular la suma de los

momentos de las cantidades de movimiento del sólido, con respecto á uno de ellos OX, teniendo presente, segun lo dicho anteriormente, que el movimiento instantáneo del sólido es la rotacion resultante de las rotaciones p, q, r, alrededor de los mismos ejes.

El momento de una fuerza P, cuyas componentes paralelas á los ejes son X, Y, Z, con respecto al eje OX, y que solicita á un punto, cuyas coordenadas son x, y, z, está representado por la fórmula (74)

$$M_{ox}(P)=Zy-Yz.$$

Para aplicar esta fórmula á las cantidades de movimiento, reemplazaremos P por mv, Z por $m\frac{dz}{dt}$, é Y por $m\frac{dy}{dt}$, llamando m á la masa del punto, v á la velocidad lineal, y $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ á sus componentes paralelas á los ejes OY y OZ. La cuestion se reduce á determinar las componentes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la velocidad lineal del punto (x, y, z), conociendo las componentes p, q, r de la rotacion instantánea.

En la Cinemática (273) hemos resuelto este problema, y encontrado que

$$\frac{dx}{dt}=qz-ry,$$
$$\frac{dy}{dt}=rx-pz,$$
$$\frac{dz}{dt}=py-qx.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de los momentos, resultará

$$M_{ox}(mv)=m(py-qx)y-m(rx-pz)z=$$
$$=p.m(y^2+z^2)-q.mxy-r.mxz;$$

del mismo modo obtendremos

$$M_{oy}(mv)=q.m(z^2+x^2)-r.myz-p.mxy.,$$
$$M_{oz}(mv)=r.m(x^2+y^2)-p.mxz-q.myz.$$

Escribamos tantas ecuaciones análogas á éstas, como puntos tiene el cuerpo; sumémoslas ordenadamente, teniendo presente que las rotaciones p, q, r, son, en un mismo instante, factores comunes á todos los términos de las diferentes sumas, y podremos sacarlas del signo Σ; y obtendremos las ecuaciones siguientes:

$$\Sigma M_{ox}(mv) = p.\Sigma m(y^2+z^2) - q\Sigma mxy - r\Sigma mxz,$$
$$\Sigma M_{oy}(mv) = q.\Sigma m(z^2+x^2) - r\Sigma myz - p\Sigma mxy,$$
$$\Sigma M_{oz}(mv) = r.\Sigma m(x^2+y^2) - p\Sigma mxz - q\Sigma myz.$$

Sabemos que (577), $\Sigma m(y^2+z^2)=\mathrm{A}$, $\Sigma m(z^2+x^2)=\mathrm{B}$, $\Sigma m(x^2+y^2)=\mathrm{C}$; siendo A, B y C los momentos de inercia del sólido con respecto á los ejes OX, OY, OZ; además $\Sigma mxy=\mathrm{F}$, $\Sigma mxz=\mathrm{E}$, $\Sigma myz=\mathrm{D}$; con lo que las anteriores ecuaciones toman la forma

$$\Sigma M_{ox}(mv) = \mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r,$$
$$\Sigma M_{oy}(mv) = \mathrm{B}q - \mathrm{D}r - \mathrm{F}p,$$
$$\Sigma M_{oz}(mv) = \mathrm{C}r - \mathrm{E}p - \mathrm{D}q.$$

Estas fórmulas se verifican cualesquiera que sean los ejes rectangulares OX, OY, OZ; si estos ejes son los ejes principales de inercia del cuerpo, relativos al punto O, tendremos $\mathrm{D}=0$, $\mathrm{E}=0$, $\mathrm{F}=0$; y las fórmulas se reducen á las siguientes.

$$\Sigma M_{ox}(mv) = \mathrm{A}p,$$
$$\Sigma M_{oy}(mv) = \mathrm{B}q,$$
$$\Sigma M_{oz}(mv) = \mathrm{C}r.$$

Que expresan, *que la suma de los momentos de las cantidades de movimiento con respecto á uno de los ejes principales de inercia del cuerpo, que pasan por el punto fijo* O, *se obtienen multiplicando el momento de inercia del cuerpo respecto á este eje por la componente de la velocidad angular estimada segun el mismo eje*. O lo que es lo mismo, que para calcular la suma de los momentos con respecto al eje principal OX, se puede prescindir de las rotaciones componentes alrededor de los otros ejes OY, OZ; todo pasa para esta suma, como si sólo existiera la rotacion p.

678. Sobre los tres ejes principales OX, OY, OZ (fig. 282), tomemos, á partir del orígen O, las cantidades $OP=Ap$, $OQ=Bq$, $OR=Cr$, iguales respectivamente á las sumas de los momentos de las cantidades de movimiento, y hallemos la resultante OG de estas tres rectas consideradas como fuerzas. *La resultante* OG *es el eje del par resultante* de los momentos de las cantidades de movimiento, trasportadas paralelamente á sí mismas al punto O; el *plano del máximo de las áreas*, en el instante considerado, es un plano perpendicular á la recta OG.

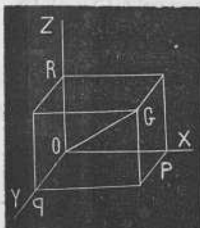

Fig. 282.

Deduccion de las ecuaciones del movimiento del sólido por medio del teorema de los momentos de las cantidades de movimiento.

679. Las ecuaciones del movimiento del sólido son tres, puesto que tres son las variables que hay que expresar en funcion del tiempo; las cuales vamos á obtener, aplicando el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento, tomado con respecto á tres ejes distintos. Tenemos que expresar, que al cabo de un cierto intervalo de tiempo, infinitamente pequeño, el incremento de la suma de los momentos de las cantidades de movimiento, con respecto á un eje, que permanece fijo durante este intervalo de tiempo, es igual á la suma de los momentos de los impulsos elementales de las fuerzas exteriores, con respecto al mismo eje.

Sean p, q, r, las componentes de la rotacion instantánea alrededor de los ejes principales OX, OY, OZ, (fig. 283), al principio del tiempo dt. Al cabo del tiempo dt, los ejes principales de inercia del sólido relativos al punto O, han venido á situarse en OX_1, OY_1 OZ_1, en virtud de las rotaciones p, q, r; en el mismo tiempo las rotaciones del sólido alrededor de estos ejes, han tomado los valores $p+dp, q+dq$ y $r+dr$, tan poco diferentes de p, q y r como se quiera. Y resulta, que al principio del tiempo dt, las sumas de los momentos de las cantidades de movimiento son

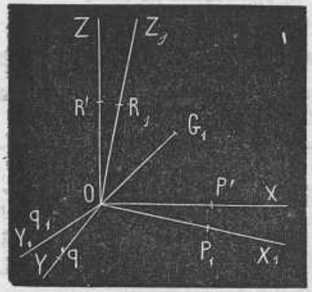

Fig. 283.

$$Ap,\ Bq,\ Cr,$$

alrededor de

$$OX,\ OY,\ OZ;$$

y que las mismas sumas al fin del tiempo dt, se convierten en

$$A(p+dp),\ B(q+dq),\ C(r+dr),$$

alrededor de

$$OX_1,\ OY_1,\ OZ_1.$$

680. Para encontrar el incremento de la suma de los momentos, alrededor de los ejes OX, OY, OZ, que es lo que nos proponemos, tomemos sobre OX_1, OY_1, OZ_1 longitudes $OP_1 = A(p+dp), OQ_1 = B(q+dq), OR_1 = C(r+dr)$; compongamos estas longitudes, y obtendremos por resultado el eje OG_1 del par resultante de los momentos de las cantidades de movimiento; descompongamos luégo la resultante OG_1, segun los tres ejes OX, OY, OZ; las componentes OP', OQ', OR', serán los momentos buscados al fin del tiempo dt.

La proyeccion OP' de la resultante OG_1, es la suma algébrica de las proyecciones sobre OX de sus componentes OP_1, OQ_1, OR_1. La recta $OP_1 = A(p+dp)$, que forma con OX un ángulo infinitamente pequeño, se proyecta sobre OX en su verdadera magnitud, prescindiendo de los infinitamente pequeños de órden superior. OQ_1 forma con OX un ángulo $Q_1OX = \frac{\pi}{2} + rdt$; porque este ángulo resulta de la rotacion r del sólido alrededor del eje OZ, y las rotaciones p y q alrededor de los otros dos ejes, no lo pueden alterar más que en cantidades infinitamente pequeñas. Todo sucede como si se tira en el plano XY (fig. 284), una recta $OQ_1 = B(q+dq)$, que forme con OY un ángulo rdt. La proyeccion Oe de OQ_1 sobre OX es igual á la distancia Q_1H, que tiene por medida el producto de este arco por el radio, es decir, $B(q+dq).rdt$; la cual debe tomarse negativamente.

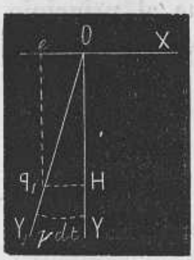

Fig. 284.

Falta proyectar $OR_1 = C(r+dr)$ sobre OX; y veremos del mismo modo, que Z_1O forma con OX un ángulo igual á $\frac{\pi}{2} - qdt$, que la proyeccion de OR_1 sobre OX debe tomarse positivamente y que es igual á $C(r+dr).qdt$. Sumando algébricamente las tres proyecciones, obtendremos para la proyeccion de OG_1 sobre OX

$$A(p+dp) - B(q+dq)rdt + C(r+dr)qdt.$$

Restando Ap, se obtiene para el incremento de la suma de los momentos de las cantidades de movimiento, alrededor de la recta fija OX, durante el tiempo dt,

$$Adp - B(q+dq)rdt + C(r+dr)qdt;$$

esta cantidad es igual á la suma de los momentos de los impulsos elementales de las fuerzas exteriores. Sea L la suma de los momentos de estas fuerzas, con respecto á OX; $\mathrm{L}dt$ será la suma de los momentos de sus impulsos, y tendremos la ecuacion

$$\mathrm{A}dp-\mathrm{B}(q+dq)rdt+\mathrm{C}(r+dr)qdt=\mathrm{L}dt,$$

reduciendo y suprimiendo los infinitamente pequeños de segundo órden, será

$$(1)\quad \mathrm{A}\left(\frac{dp}{dt}\right)-(\mathrm{B}-\mathrm{C})qr=\mathrm{L}.$$

De una manera análoga obtendremos para los ejes OY, OZ, llamando M y N á las sumas de los momentos de las fuerzas exteriores, con respecto á estos ejes, las ecuaciones

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{B}\left(\frac{dq}{dt}\right)-(\mathrm{C}-\mathrm{A})rp=\mathrm{M}, \\ \mathrm{C}\left(\frac{dr}{dt}\right)-(\mathrm{A}-\mathrm{B})pq=\mathrm{N}. \end{cases}$$

Estas tres fórmulas dan las aceleraciones angulares alrededor de los tres ejes, en funcion de los momentos de las fuerzas y de las velocidades angulares. El problema del movimiento del cuerpo queda reducido á la siguiente cuestion de análisis; deducir de las ecuaciones (1) los valores generales de p, q, r en funcion del tiempo t.

681. Vamos á examinar particularmente el caso notable, en que los momentos de las fuerzas exteriores, con respecto á los ejes, son constantemente nulos; es decir, en que $\mathrm{L}=0$, $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$. Entónces las fórmulas (1) toman la forma

$$\mathrm{A}\left(\frac{dp}{dt}\right)=(\mathrm{B}-\mathrm{C})qr,$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{dq}{dt}\right)=(\mathrm{C}-\mathrm{A})rp,$$

$$\mathrm{C}\left(\frac{dr}{dt}\right)=(\mathrm{A}-\mathrm{B})pq;$$

las cuales nos dicen, que la aceleracion, alrededor de cada eje principal, es igual al producto de las velocidades angulares del sólido alrededor de los otros dos ejes, multiplicado respectivamente por los cocientes

$$\frac{B-C}{A}, \frac{C-A}{B}, \frac{A-B}{C}.$$

Si el elipsoide de inercia, con relacion al punto O, se reduce á una esfera, se tiene $A=B=C$; y las aceleraciones angulares $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ son separadamente nulas; las velocidades angulares p, q, r son entónces constantes; el cuerpo gira indefinidamente con una velocidad constante alrededor del eje resultante, cuya direccion permanece fija en el espacio; este eje es en efecto principal en la esfera de inercia relativa al punto O, y la rotacion, una vez comenzada alrededor de su direccion, persiste indefinidamente (665), á pesar de no tener el cuerpo más que un punto fijo.

Si el elipsoide de inercia, relativo al punto O, es de revolucion, se tiene $A=B$, si OZ es el eje de la superficie. La tercera ecuacion nos advierte entonces, que $\frac{dr}{dt}=0$, y que la velocidad angular r es constante.

En general, cuando no hay fuerzas exteriores, ó cuando tienen una resultante única, que pasa por el punto fijo, el eje resultante de los momentos de las cantidades de movimiento tiene una longitud constante, y una direccion fija en el espacio (632); y sus componentes segun los ejes coordenados móviles son Ap, Bq, Cr (677); y se deduce la relacion

$$(2) \quad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2,$$

en la cual G es la longitud invariable del eje resultante.

682. El teorema de las fuerzas vivas nos demuestra por otra parte, que la fuerza viva del sistema sólido es constante. Llamemos H á esta fuerza viva, sea ω la velocidad angular del cuerpo, alrededor del eje instantáneo de rotacion, I el momento de inercia alrededor de este

eje, la fuerza viva es $I\omega^2$, por ser

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m r^2 \omega^2 = \omega^2 \Sigma m r^2 = I\omega^2;$$

luego (3) $I\omega^2 = H$,

siendo H constante.

Esta ecuacion se trasforma por medio de la ecuacion del elipsoide de inercia. La ecuacion de este elipsoide es

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

El momento de inercia del sólido, alrededor de la recta que une el punto O al punto N (X, Y, Z), tomado sobre la superficie del elipsoide, es $\mu = \frac{1}{\lambda^2} = I$, designando por λ la distancia $ON = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, comprendida entre estos dos puntos (577).

Sean P (fig. 285), el polo de la rotacion instantánea sobre el elipsoide, $OP = \lambda$, X, Y, Z, las coordenadas del punto P, ó las proyecciones sobre los ejes de la longitud λ. La velocidad angular ω alrededor de OP, tiene por proyecciones sobre los ejes las velocidades angulares p, q, r; y por consiguiente los cosenos de los ángulos de OP con los ejes, tienen los valores

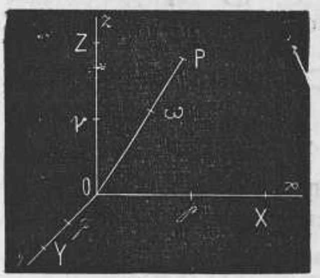

Fig. 285.

$$\frac{p}{\omega} = \frac{X}{\lambda}, \quad \frac{q}{\omega} = \frac{Y}{\lambda}, \quad \frac{r}{\omega} = \frac{Z}{\lambda},$$

relaciones que dan

$$X = \frac{p\lambda}{\omega}, \quad Y = \frac{q\lambda}{\omega}, \quad Z = \frac{r\lambda}{\omega};$$

sustituyendo en la ecuacion del elipsoide, será

$$1 = A\frac{p^2\lambda^2}{\omega^2} + B\frac{q^2\lambda^2}{\omega^2} + C\frac{r^2\lambda^2}{\omega^2}$$

ó dividiendo por $\frac{\lambda^2}{\omega^2}$,

$$\frac{\omega^2}{\lambda^2}=Ap^2+Bq^2+Cr^2,\ \text{ó}\ Ap^2+Bp^2+Cr^2=I\,\omega^2, \quad (4)$$

teniendo presente que $\frac{1}{\lambda^2}=I$.

Las ecuaciones (2) y (4) pueden deducirse de las (1), despues de hacer en ellas $L=0$, $M=0$, $N=0$. Basta para ello multiplicar la 1.ª por Ap, la 2.ª por Bq y la 3.ª por Cr y sumar; resulta

$$\frac{A^2pdp+B^2qdq+C^2rdr}{dt}=0,$$

é integrando

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=\text{constante}=G^2,$$

ó sea la ecuacion (2).

La (4) se obtiene multiplicando las (1) respectivamente por p, q, r, y sumando; tendremos

$$Apdp+Bqdq+Crdr=0,$$

que integrada es

$$A^2+Bq^2+Cr^2=\text{constante}=H.$$

Deducir los valores de las variables p, q, r, en funcion de las variables φ, ψ, θ.

683. Las ecuaciones (1) bastan para determinar analíticamente las variables p, q, r, en funcion del tiempo t, y con las tres constantes de la integracion.

El problema no está aún resuelto enteramente con esta determinacion, porque es preciso expresar, ademas, en funcion del tiempo, los ángulos φ, ψ, θ, que fijan en cada instante la posicion exacta del sólido; para lo cual expresaremos p, q, r, en funcion de los ángulos φ, ψ y θ, y de las velocidades $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, de estos ángulos.

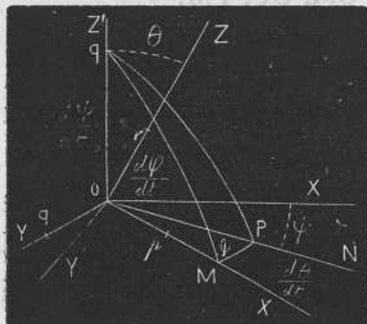

Fig. 286.

Las rotaciones p, q, r, tienen lugar alrededor de los ejes OX, OY, OZ, (figura 286), miéntras que la rotacion instantánea descompuesta segun los ejes OZ', ON, OZ, tiene por componentes $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$.

Para obtener p, basta proyectar sobre OX las tres rotaciones $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, y tendremos,

$$p = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OX + \frac{d\theta}{dt}\cos NOX + \frac{d\varphi}{dt}\cos ZOX;$$

proyectando las mismas tres rotaciones, sobre OY, y OZ, obtendremos los valores de q y r, que son

$$q = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OY + \frac{d\theta}{dt}\cos NOY + \frac{d\varphi}{dt}\cos ZOY$$

$$r = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OZ + \frac{d\theta}{dt}\cos NOZ + \frac{d\varphi}{dt}\cos ZOZ.$$

Los ángulos ZOX, ZOY, NOZ son rectos, y sus cosenos son cero; la rotacion $\frac{d\varphi}{dt}$ se proyecta en su verdadera magnitud sobre OZ; teniendo presente que $NOX = \varphi$, $NOY = \varphi + \frac{\pi}{2}$, se reducen á

$$p = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OX + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi$$

$$q = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OY - \frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\varphi$$

$$r = \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Para calcular los cosenos de los ángulos Z'OX, Z'OY, del punto O, como centro, describamos una esfera, que será cortada por los planos Z'OX, Z'ON, XON, segun los arcos de círculo máximo QM, QP, PM.

En el triángulo esférico MPQ, tenemos que

$$\cos QM = \cos QP \cos PM + \operatorname{sen} QP \operatorname{sen} PM \cos QPM,$$

y observando que $QPM = \frac{\pi}{2} - \theta$, y que $QP = \frac{\pi}{2}$, será,

$$\cos QM = \cos Z'OX = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta.$$

Para deducir $\cos Z'OY$, basta aumentar el ángulo φ de un ángulo recto, lo que nos dará

$$\cos Z'OY = \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \theta = \cos \varphi \operatorname{sen} \theta.$$

Tendremos para pasar de las variables p, q, r, á las variables φ, ψ, θ, las tres ecuaciones

$$(5) \quad \begin{cases} p = \dfrac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta + \dfrac{d\theta}{dt} \cos \varphi, \\ q = \dfrac{d\psi}{dt} \cos \varphi \operatorname{sen} \theta - \dfrac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \varphi, \\ r = \dfrac{d\psi}{dt} \cos \theta + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Resolucion del problema por las cuadraturas, en el caso en que las fuerzas exteriores son todas nulas.

684. Las seis ecuaciones (1) y (5) contienen la solucion general del problema propuesto, cuya resolucion vamos á terminar, en el caso particular en que las fuerzas exteriores son nulas, es decir, cuando $L=0$, $M=0$, $N=0$; condiciones que reducen las tres ecuaciones (1), á las que siguen:

$$(a) \quad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} - (B - C) q r = 0, \\ B \dfrac{dq}{dt} - (C - A) r p = 0, \\ C \dfrac{dr}{dt} - (A - B) p q = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones (2) y (4)

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2,$$
$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=H,$$

darán p y q en funcion de r. Resolviéndolas con respecto á p^2 y q^2, resulta

$$p^2=\frac{G^2-HB+C(B-C)r^2}{A(A-B)}$$
$$q^2=\frac{G^2-HA+C(A-C)r^2}{B(B-A)};$$

sustituyendo estos valores en la tercera de las (a), obtendremos

$$C\frac{dr}{dt}=(A-B)\sqrt{\frac{G^2-HB+C(B-C)r^2}{A(A-B)}}\times\sqrt{\frac{G^2-HA+C(A-C)r^2}{B(B-A)}};$$

ecuacion en la que pueden separarse las variables, y que toma la forma

$$\frac{dr}{\sqrt{(a+br^2)(a'+b'r^2)}}=fdt,$$

siendo a, b, a', b' y f, cantidades conocidas. Esta ecuacion se integra por las cuadraturas; y como el radical contiene un polinomio de 4.° grado en r, la solucion general no puede obtenerse sino por medio de las funciones elípticas.

Cuando se conoce r en funcion del tiempo, p y q se expresan por medio de r, y las tres rotaciones serán conocidas en funcion de t.

Haremos para terminar la solucion, una hipótesis sobre la posicion de los ejes fijos OX′, OY′, OZ′; admitiendo, que el eje OZ′ coincide al principio del movimiento, con el eje del par resultante de los momentos de las cantidades de movimiento; estando este eje inmóvil, la coincidencia será permanente. Ahora, el eje del par resultante tiene por componentes segun los ejes OX, OY, OZ, las cantidades Ap, Bq, Cr; obtendremos, pues, (fig. 286),

$$Ap=G\cos Z'OX=G\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,$$
$$Bq=G\cos Z'OY=G\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta,$$
$$Cr=G\cos\theta.$$

De las cuales se deduce

$$tg\varphi = \frac{Ap}{Bq}, \quad \cos\theta = \frac{Cr}{G}.$$

Conociendo p, q, r, en funcion de t, deduciremos φ y θ. Para determinar ψ, eliminaremos $\frac{d\theta}{dt}$ entre las dos primeras ecuaciones (5), y resultará

$$p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen}\theta;$$

ecuacion, que integrada por una cuadratura, dará ψ, puesto que p, q, φ y θ, son conocidas; con lo cual quedará el problema completamente resuelto.

LECCION LVII.

Teoría de la rotacion de los cuerpos de Poinsot.—Poloide y herpoloide.—Ecuaciones de la poloide.—Trazado de la herpoloide.—Medida de la estabilidad de la rotacion alrededor de un eje principal.—Efecto de un par instantáneo sobre un sólido que tiene un punto fijo.—Efecto general de un par.—Aplicacion al movimiento del peon.

Teoría de la rotacion de los cuerpos de Poinsot.

685. Por medio de consideraciones geométricas ha conseguido Poinsot, terminar la resolucion del problema de la rotacion de los cuerpos, cuando no hay fuerzas exteriores, y por consiguiente los momentos L, M, N, son los tres nulos.

Empezaremos, para la exposicion de la teoría, por suponer que el elipsoide de inercia del cuerpo con respecto al punto fijo O, está referido á sus ejes principales. La ecuacion del elipsoide referido á estos ejes es

$$(1)\quad AX^2+BY^2+CZ^2=1,$$

y el momento de inercia, alrededor del radio de longitud λ, será igual á $\frac{1}{\lambda^2}$.

Por la Geometría analítica sabemos: que el plano tangente al elipsoide, representado por la ecuacion (1), en el punto cuyas coordenadas son X, Y, Z, tiene por ecuacion

$$AXx+BYy+CZz=1;$$

y la distancia de este plano al orígen O, es

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2X^2+B^2Y^2+C^2Z^2}}.$$

Y que si sobre los ejes coordenados rectangulares (figura 287), tomamos desde el orígen longitudes $OD = Ap$, $OE = Bq$, $OF = Cr$, y componemos estas tres longitudes como si fueran fuerzas, cuya resultante sea OG; la ecuacion del plano trazado por el orígen, perpendicularmente á la OG, será

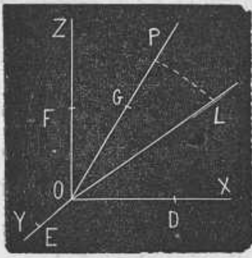

Fig. 287.

$$Apx + Bqy + Crz = 0.$$

686. Esto supuesto, sea en un instante dado OL la direccion del eje instantáneo de rotacion, X, Y, Z, las coordenadas del punto L en el elipsoide de inercia representado por la ecuacion (1), y llamemos ω á la velocidad angular de la rotacion del sólido alrededor de OL.

En el punto L, tracemos un plano tangente al elipsoide; su ecuacion será

$$(2)\quad AXx + BYy + CZz = 1.$$

Representemos por λ la longitud OL; tenemos la serie de razones iguales

$$(3)\quad \frac{\omega}{\lambda} = \frac{p}{X} = \frac{q}{Y} = \frac{r}{Z} = \frac{Ap}{AX} = \frac{Bq}{BY} = \frac{Cr}{CZ};$$

de las que se deduce

$$(4)\quad \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}{\sqrt{A^2X^2+B^2Y^2+C^2Z^2}}.$$

Pero $\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}$ es igual á la cantidad constante G; es decir, á la diagonal del paralelepípedo, ó al eje del par resultante de los momentos de las cantidades de movimiento (681); $\sqrt{A^2X^2+B^2Y^2+C^2Z^2} = \frac{1}{\delta}$, ó sea la cantidad inversa de la distancia δ del orígen O al plano tangente al elipsoide, y la ecuacion (4) será

$$(5)\quad \frac{\omega}{\lambda}=\frac{G}{\frac{1}{\delta}}=G\delta.$$

Como $\frac{1}{\lambda^2}$ es igual al momento de inercia I del sólido, alrededor del eje de rotacion OL, tendremos

$$\frac{\omega^2}{\lambda^2}=I\omega^2=H,$$

siendo H la fuerza viva constante del sólido; luego

$$(6)\quad G^2\delta^2=H;$$

y como H y G son constantes, la distancia δ será tambien constante.

De las igualdades (3) se deduce, reemplazando $\frac{\omega}{\lambda}$ por su valor $\sqrt{H}$.

$$(7)\quad X=\frac{p}{\sqrt{H}},\ Y=\frac{q}{\sqrt{H}},\ Z=\frac{r}{\sqrt{H}},$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion (2), resulta la siguiente

$$\frac{Ap}{\sqrt{H}}x+\frac{Bq}{\sqrt{H}}y+\frac{Cr}{\sqrt{H}}z=1,$$

ó lo que es lo mismo

$$(8)\quad Apx+Bqy+Crz=\sqrt{H}.$$

El plano tangente al elipsoide en el punto L, es por consiguiente paralelo al plano $Apx+Bqy+Crz=0$, trazado por el punto O, perpendicularmente á la recta OG; mas este plano, es el plano del máximo de las áreas (678), que sabemos conserva en el espacio una fijeza absoluta.

Por consiguiente, *el plano tangente al elipsoide tirado por el punto* L, *polo instantáneo de rotacion del sólido, tiene una direccion constante en el espacio; ademas su distancia al punto fijo* O, $\delta=\frac{\sqrt{H}}{G}$, *es invariable; luego dicho plano está fijo en el espacio. El movimiento del cuerpo se efectúa de manera, que el elipsoide de inercia sea constantemente tangente á* *este plano fijo; la rotacion instantánea tiene lugar en cada instante alrededor del radio tirado del punto* O *al punto de contacto, y la velocidad angular*, $\omega=\lambda\sqrt{H}$, *es proporcional á la longitud* λ *de este radio.* Tal es el enunciado del teorema de Poinsot.

La proyeccion de OL sobre la direccion del eje OG es una recta OP constante; y lo mismo sucede á la proyeccion sobre OG de la velocidad angular ω, que es proporcional á OL; y por lo tanto, la velocidad angular del sólido, estimada alrededor del eje de los momentos de las cantidades de movimiento, es constante.

Poloide y herpoloide.

687. Podemos concebir fácilmente la imágen del movimiento del cuerpo.

Sea O (fig. 288) el punto fijo; OS el eje instantáneo de rotacion en una época dada; ω la velocidad angular del sólido en esta época.

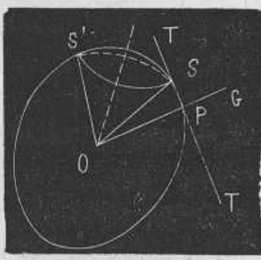

Fig. 288.

En el punto S, donde el eje instantáneo corta á la superficie del elipsoide

$$AX^2+BY^2+CZ^2=1,$$

tiremos un plano tangente TT á esta superficie. Del punto O bajemos sobre este plano una perpendicular OP; ésta será la direccion constante del eje resultante de los momentos de las cantidades de movimiento.

De estos datos se deducirá la fuerza viva H del cuerpo y la magnitud G del eje del par resultante. Se tiene, en efecto, llamando λ al radio OS

$$H=\frac{\omega^2}{\lambda^2}, \quad \text{y} \quad G\delta=\sqrt{H}=\frac{\omega}{\lambda}$$

siendo δ la distancia OP del punto al plano tangente. Se tiene, pues

$$G=\frac{\omega}{\lambda\delta}.$$

El plano TT y el punto O están fijos en el espacio, y el elipsoide se mueve alrededor de su centro, de modo que permanezca siempre tangente al plano TT. El movimiento relativo del elipsoide con respecto al plano no se modificará suponiendo el elipsoide fijo, y que se hace rodar sobre su superficie el plano TT, bajo la condicion de que permanezca constantemente á la distancia, δ=OP, del centro O.

En este movimiento, el punto de contacto del plano y del elipsoide, traza sobre el elipsoide una curva SS′, á la que Poinsot ha dado el nombre de *poloide*, ó sea la *trayectoria del polo* instantáneo de rotacion sobre el elipsoide; sobre el plano tangente, el mismo punto traza una segunda curva llamada *herpoloide*, sobre el cual la poloide viene á rodar en el movimiento relativo. La poloide es por consiguiente la base de un cono OSS′, que tiene su vértice en el punto O y forma cuerpo con el sólido; y la herpoloide es la base de un segundo cono, del mismo vértice pero fijo en el espacio; el movimiento del sólido se resume en la rodadura del cono móvil sobre el cono fijo, como dijimos en la Cinemática; y tambien sabemos que esta rodadura es el movimiento más general de que puede estar animado un sólido que tiene un punto fijo (231).

688. Cuando el elipsoide es de revolucion, la poloide viene á ser uno de los paralelos de la superficie; los dos conos son conos rectos de base circular, y la velocidad angular del sólido alrededor de su eje instantáneo es constante. En el caso general, la poloide es una curva cerrada, que da la vuelta sobre el elipsoide, alrededor del extremo del eje mayor, ó del extremo del eje menor; puede

reducirse por excepcion á un sistema de dos elipses, cuando pasa por el extremo del eje medio.

689. Sobre el plano TT, la herpoloide es en general una curva *sinuosa*, cuya forma media es un círculo que tiene por centro el punto P; las sinuosidades de la curva hacen que entre en este círculo y que salga alternativamente por períodos iguales; la curva puede cerrarse al cabo de cierto número de espiras, ó en otros casos, prolongarse indefinidamente sin volver jamás á pasar por su punto de partida.

Estas sinuosidades no desaparecen, sino en el caso de que el elipsoide es de revolucion; entónces la herpoloide se reduce á su círculo medio. Otro caso notable se presenta cuando la poloide pasa por los extremos del eje medio. Entónces la herpoloide se trasforma en una espiral indefinida, que da una porcion de veces la vuelta al punto P, y cuya longitud total es sin embargo finita. Supongamos que el sólido haya empezado á rodar alrededor del eje medio; si se le separa ligeramente de esta posicion, en la que la rotacion podria indefinidamente persistir (664), y que se tiene cuidado de llevar, en el sentido conveniente, el eje de la nueva rotacion instantánea á un punto de una de las elipses que constituyen la poloide correspondiente, el polo instantáneo tomará un movimiento indefinido, y podrá tener por posicion límite el vértice opuesto del eje medio, despues de la inversion completa del cuerpo; el eje medio tiende á tomar su orientacion, invirtiéndose de extremo á extremo. Pero esta inversion exigirá un tiempo indefinido para terminarse.

Ecuaciones de la poloide.

690. Para encontrar las ecuaciones de la poloide, observaremos que esta línea es la interseccion de dos super-

ficies, una de las cuales es el elipsoide de inercia, cuya ecuacion puede ponerse bajo la forma

$$(9)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

y la otra se obtendrá, recordando que la poloide es el lugar geométrico de los puntos del elipsoide, en que el plano tangente está á una distancia constante δ del orígen.

La ecuacion del plano tangente en el punto (x, y, z) de la superficie es

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1,$$

su distancia al orígen es

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};\ \text{ó}\ \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{\delta^2}\quad (10).$$

Esta ecuacion, que expresa que la distancia del plano tangente al orígen es constante, y la ecuacion (9) del elipsoide de inercia, son las ecuaciones de la poloide. Esta curva es la interseccion de las superficies representadas por las ecuaciones (9) y (10), que las dos son elipsoides, que tienen los mismos planos principales. Las proyecciones de la interseccion sobre los planos coordenados, son por lo tanto curvas de segundo grado. Eliminando sucesivamente z, x é y, obtendremos las ecuaciones de las proyecciones:

sobre el plano XY,

$$(11)\quad \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\delta^2};$$

sobre el plano YZ

$$(12)\quad \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\delta^2};$$

y sobre el plano ZX

$$(13)\quad \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\delta^2}.$$

Supongamos $a<b<c$; la distancia δ deberá estar comprendida entre a y c, pudiendo ser $<b$, ó $>b$. Por consiguiente $\frac{1}{c^2}<\frac{1}{\delta^2}$, $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{b^2}>\frac{1}{c^2}$; luego los tres coeficientes de la ecuacion (11) son negativos, y cambiando los signos, será

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{c^2},$$

que representa una elipse.

La ecuacion (12) tambien representa una elipse; porque

$$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2},\ \frac{1}{a^2}>\frac{1}{c^2},\ \text{y}\ \frac{1}{a^2}>\frac{1}{\delta^2}.$$

La ecuacion (13) representa una hipérbola, porque los coeficientes $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$, y $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$, son de signos contrarios; y representa dos rectas, cuando $\delta=b$; entónces la poloide se reduce al sistema de dos elipses, interseccion de la superficie del elipsoide de inercia con los dos planos que representa la ecuacion (13). Las hipérbolas representadas por esta ecuacion en el caso general, están situadas en uno ú otro de los ángulos formados por las rectas

$$\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0,$$

segun que se tiene $\frac{1}{b^2}>\frac{1}{\delta^2}$, ó $\frac{1}{b^2}<\frac{1}{\delta^2}$; luego la poloide es, sobre el elipsoide, una curva cerrada que da vuelta alrededor del vértice del eje menor, ó del vértice del eje mayor, segun que δ es menor, ó mayor que b.

Si el elipsoide de inercia es de revolucion, siendo por ejemplo $a=b$, la poloide se reduce á un círculo alrededor del vértice del eje c.

Trazado de la herpoloide.

691. Para trazar esta curva, sea O (fig. 289), el centro del elipsoide, P el pié de la perpendicular bajada de este punto sobre el plano invariable TT; M el punto de contacto, en un instante dado, del elipsoide con este plano.

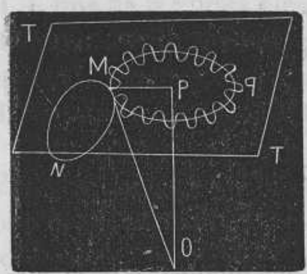

Fig. 289.

La rotacion del elipsoide se verificará en este instante alrededor de la recta OM; de manera que los arcos de la poloide MN se apliquen sucesivamente sobre el plano TT. El resultado de esta aplicacion sucesiva será una curva MQ que da la vuelta alrededor del punto P, y en la cual los radios PM variarán generalmente entre dos límites; de suerte, que la herpoloide es en general una curva sinuosa, que se extiende alrededor del punto P, aproximándose y alejándose á intervalos iguales, y pudiendo en ocasiones no cerrarse, si el ángulo al centro, que corresponde á la aplicacion del perímetro entero de la poloide, no es comensurable con el ángulo recto.

692. El caso en que la poloide es una de las elipses límites, pasando por los vértices del eje medio, presenta una excepcion. En este caso, la herpoloide, en lugar de ser una curva ondulada, conservándose á una distancia media del punto P, constante, es una espiral MP (fig. 290), que aproximándose más y más á este punto, no llega jamás á coincidir con él. Aunque esta curva se prolongue indefinidamente, su longitud es finita; porque como resulta de la aplicacion sobre el plano de los arcos sucesivos de la elipse límite, tiene por longitud total la longitud de esta elipse.

Fig. 290.

En fin, cuando la poloide se reduce á un paralelo del elipsoide de revolucion, la herpoloide se reduce á un círculo que tiene por centro el punto P; y el movimiento del sólido consiste en la rodadura de un cono recto de base circular unido al cuerpo, sobre un cono recto de base circular fijo en el espacio.

Medida de la estabilidad de la rotacion alrededor de un eje principal.

693. Sean (fig. 291), OA el eje menor, OB el eje medio y OC el eje mayor del elipsoide de inercia. La rotacion del sólido, una vez comenzada alrededor de uno de estos tres ejes, continúa indefinidamente, si no interviene ninguna fuerza exterior. Sin embargo, la *estabilidad* de la rotacion no es la misma alrededor de cada uno de los tres.

Fig. 291.

Tiremos por el eje medio BB′ los dos planos GF, DE que corten la superficie segun las elipses, á lo largo de las cuales, el plano tangente está á la distancia OB del centro. Todos los puntos de estas elipses podrán servir sucesivamente de polos de la rotacion instantánea, de suerte, que el movimiento del sólido podrá consistir en la aplicacion sucesiva de los arcos de la elipse BGB′ sobre el plano invariable. No sucede lo mismo con el eje mayor y el eje menor, porque las distancias OC, OA, son el máximo y el mínimo del radio vector tirado del punto O á la superficie, y de la distancia del plano tangente al centro.

Si mientras el radio vector gira alrededor del eje OC, se hace intervenir una fuerza que lleve el polo instantáneo al punto L, próximo al punto C, el cuerpo tomará por poloide, á partir de este instante, una curva cerrada L′L que da la vuelta alrededor del vertice C, de la superficie; lo mismo sucederá, mientras que el punto L no sea lanzado por una fuerza, fuera del uso comprendido entre las dos semi-elipses BEB′, BGB′.

Del mismo modo, si la rotacion se verifica alrededor de OA, y se le separa un poco, la poloide vendrá á ser una curva KK′, rodeando el punto A, y esta alteracion se conservará, mientras que el polo instantáneo no sea llevado fuera del uso elipsoidal EBFB′.

En cualquier punto que se coloque el polo instáneo de la rotacion, con tal que no caiga sobre las elipses límites ED, FG, la polóide será una curva cerrada que rodea al vértice C, ó al vértice A, segun que el polo inicial cae en el uso GBB′E, ó en el uso EBB′F.

Luego se puede tomar por medida de la estabilidad de la rotacion alrededor del eje mayor, ó alrededor del eje menor, la superficie de los usos que contienen los vértices de estos ejes, de suerte, que la estabilidad del eje mayor está medida por la superficie GBB′E, y la del eje menor por la superficie EB′BF.

694. La estabilidad de la rotacion alrededor del eje medio es nula; porque si la rotacion alrededor de OB empieza, y se le separa un poco moviendo el eje instantáneo de rotacion, el polo instantáneo será llevado al uso GBB′E, ó al uso adyacente EBB′F; en el primer caso, la nueva poloide rodeará al punto C, vértice del eje mayor; en el segundo, rodeará el punto A, vértice del eje menor. La rotacion alterada se efectuará, por consiguiente, alrededor de uno de los ejes extremos, abandonando al eje medio.

Hay un caso excepcional, que es aquel en que el movimiento del eje instantáneo lleva el polo de la rotacion sobre una de las elipses límites; porque entónces la poloide viene á ser esta misma elipse; el cuerpo se moverá por lo tanto, ya de manera que vuelva el polo al punto B, que acaba de abandonar, ya de manera que se aleje más y más de este punto, á lo largo de la elipse límite, y llevándolo más y más cerca del vértice opuesto B'.

Efecto de un par instantáneo sobre un sólido que tiene un punto fijo.

695. Hemos llamado fuerza instantánea al impulso total, $P=\int_{t_0}^{t} F dt = mv$, de una fuerza F, variable y de mucha energía, que actúa durante un tiempo muy pequeño $t-t_0$ (604). Un *par instantáneo* es un par formado por dos fuerzas instantáneas (P, —P), ó por dos impulsos totales, iguales, paralelos y contrarios, actuando durante un tiempo muy corto.

Supongamos que un cuerpo sólido, que tiene un punto fijo, está en reposo, y que se aplica á este cuerpo, un par instantáneo (P,—P); vamos á ver qué movimiento tomará el cuerpo. Descompongamos este par segun los tres planos principales del sólido, relativos al punto O, y llamemos L', M', N', á sus tres pares componentes. Por el teorema de d'Alambert, extendido á las fuerzas instantáneas (605), existe el equilibrio entre las percusiones, las cantidades de movimiento iniciales y las cantidades de movimiento finales, tomadas en sentido contrario. Apliquemos el teorema de los momentos; si p', q', r', son las componentes de la rotacion instantánea alrededor de los ejes principales al fin de la percusion, Ap', Bq', Cr, son los momentos de las cantidades de movimiento con respecto á estos ejes, y por consiguiente, el equilibrio exige las tres ecuaciones

$$Ap'=L',\quad Bq'=M',\quad Cq'=N';$$

es decir, que cada par instantáneo componente se conduce como si estuviera solo. Basta, por lo tanto, componer las velocidades p', q', r', para obtener en direccion y magnitud la velocidad angular ω'. Sea OI (fig. 292), el eje instantáneo, I el punto en que este eje encuentra al elipsoide de inercia. Las coordenadas X, Y, Z del punto I serán proporcionales á las componentes p', q', r', de la velocidad angular: luego el plano tangente al elipsoide en el punto I, plano cuya ecuacion es (685)

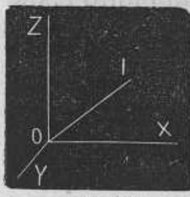

Fig. 292.

$$AXx+BYy+CZz=1,$$

es paralelo al plano

$$Ap'x+Bq'y+Cr'z=0,$$

ó al plano $\qquad L x'+M'y+N'z=0,$

el cual, siendo perpendicular á la direccion cuyas componentes, segun los ejes, son L′, M′, N′, es paralelo al plano del par dado.

Ó lo que es lo mismo, el eje de rotacion alrededor del cual el sólido empieza á rodar por la accion del par instantáneo (P,—P), es en el elipsoide de inercia el diámetro conjugado del plano de este par. Entónces, cesando la accion del par, el cuerpo vuelve á quedar libre, y como posee una velocidad ω' alrededor del eje instantáneo OI, sigue á partir de este instante el movimiento definido por el teorema de Poinsot. La rotacion no persiste alrededor de la recta OI, si esta recta no es un eje principal.

Efecto general de un par.

696. Hagamos actuar sobre el sólido un par (F,—F), formado por dos fuerzas finitas F dadas en cada instante

en magnitud y en posicion. Sea OS (fig. 293) el eje de rotacion del cuerpo, en un cierto instante, en virtud de su movimiento anterior.

Si se suprime en este instante el par (F, — F) durante un tiempo *dt*, el cuerpo seguirá durante este tiempo la ley de Poinsot, y al cabo del tiempo *dt* tendrá por eje de rotacion una recta OL, distinta de OS, y que terminará sobre el elipsoide en un punto L de la poloide, á una distancia infinitamente pequeña del punto S. En este instante hagamos actuar sobre el sólido el par instantáneo (F*dt*,—F*dt*); si el sólido estuviera en reposo resultaria una rotacion alrededor de un eje instantáneo OI, diámetro conjugado del plano del par en el elipsoide (686). En virtud del principio de la independencia del efecto de las fuerzas, se obtendrá el movimiento efectivo del sólido, componiendo la rotacion alrededor de OS, debida al movimiento anteriormente adquirido, con la rotacion OI, debida al efecto de las fuerzas exteriores.

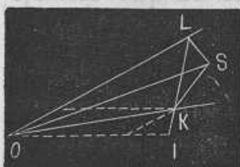

Fig. 293.

Luego el eje de la rotacion resultante será una recta OK comprendida en el plano LOI, y el efecto del par habrá sido hacer marchar el polo instantáneo sobre el elipsoide de inercia de una cierta cantidad SK. La poloide SL del teorema de Poinsot, será reemplazada por otro camino SK del polo instantáneo, que será debido á los efectos combinados de la inercia y de las fuerzas exteriores.

697. Cuando el elipsoide de inercia es una superficie de revolucion alrededor del eje OZ (fig. 294), la poloide de Poinsot es un paralelo LL′ de la superficie, y en virtud de la inercia toma el cuerpo *un movimiento uniforme de precision*. Tomemos, en efecto, por eje fijo OZ′, el eje OG del par de las cantidades de movimiento;

sea MN el plano fijo sobre el cual rueda el elipsoide, y

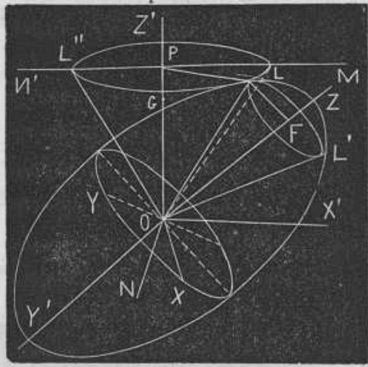

Fig. 294.

LL' la poloide. El movimiento del cuerpo será una rodadura del cono recto OLL', sobre el cono recto OLL'', y en este movimiento la *línea de los nodos* ON estará animada en el plano Y'OX' de una velocidad angular constante. La generatriz comun OL de los dos conos está en cada instante en el plano de los ejes OP y OF de las dos superficies, y la línea de los nodos es perpendicular á este plano; el plano LON es el plano tangente á los dos conos segun la generatriz OL.

698. Siendo siempre el elipsoide de inercia de revolucion, el efecto de un par, puede aún ser un movimiento de precesion uniforme. Sea OZ (fig. 295), el eje de revolucion de elipsoide, y el ecuador de la superficie EE. Supongamos que el movimiento del cuerpo sea el resultado de la rodadura del cono recto OLL', unido al elipsoide,

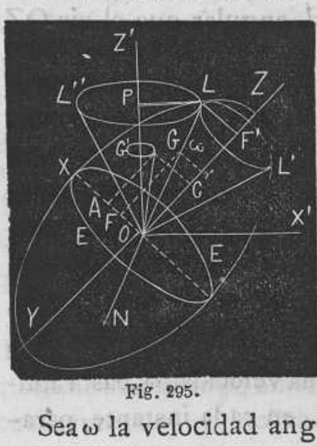

Fig. 295.

sobre el cono fijo OLL''. En este caso la *línea de los nodos*, ON, interseccion del plano del ecuador con el plano Y'OX', perpendicular al eje OZ' del cono fijo, estará animada de un movimiento de rotacion uniforme alrededor del punto O; es normal al plano Z'OZ de los dos ejes de los conos, y á la generatriz OL de contacto.

Sea ω la velocidad angular del sólido, alrededor de OL;

busquemos el eje de los momentos de las cantidades de movimiento, y descompongamos para esto la velocidad ω, segun los tres ejes principales del elipsoide de inercia relativo al punto O. Siendo el elipsoide de revolucion alrededor de OZ, se pueden tomar arbitrariamente por ejes principales dos rectas perpendiculares, tiradas por el punto O en el plano del ecuador; escogeremos la recta ON y su perpendicular OX, trazada en el plano ZOZ'. Sea A el momento de inercia del sólido alrededor del eje OX; A será tambien el momento de inercia alrededor de ON; y sea C el momento de inercia alrededor de OZ. La velocidad angular ω nos dará las componentes p y r segun OX y OZ; la tercera componente segun ON es cero por ser ON perpendicular á OL. Obtendremos las componentes del eje de los momentos, tomando sobre OX una longitud $OA = Ap$, y sobre OZ una longitud $OC = Cr$; el eje buscado OG es la resultante de estas longitudes (678). Se ve que este eje está contenido en el plano ZOZ'; que ademas siendo la rotacion ω constante y formando siempre los mismos ángulos con las rectas OX y OZ, OG será una longitud constante y formará un ángulo constante con el eje OZ'; es decir, OG describirá alrededor de OZ' un cono recto, con la misma velocidad angular que el eje OZ del elipsoide móvil. El extremo G describe en este movimiento una circunferencia GG', con una velocidad constante, normal al plano Z'OG y por consiguiente paralela á la línea ON. Ahora, la velocidad del extremo del eje del par resultante de los momentos de las cantidades de movimiento, es en cada instante igual y paralela al eje del par resultante de los momentos de las fuerzas exteriores. Luego para imprimir al sólido el movimiento de precesion uniforme, definido por la rodadura del cono OLL' sobre el cono OLL'', con una velocidad ω, basta aplicar al sólido un par cuyo eje sea, en cada instante, paralelo á la línea de los nodos ON, y que tenga por medida la velocidad lineal constante del punto G.

Aplicacion al movimiento del peon.

699. El movimiento cónico uniforme del peon, confirma la teoría anterior.

El peon, que sirve como juguete á los niños, es un sólido de revolucion alrededor del eje OZ, (fig. 296), terminado en su parte inferior por una punta de hierro O, que descansa sobre un plano horizontal Y'OX'. El elipsoide de inercia del peon, con respecto al punto O, es tambien de revolucion alrededor del eje OZ.

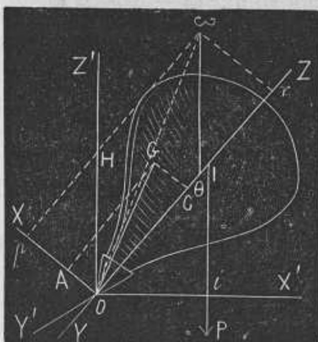

Fig. 296.

Supongamos que el movimiento cónico del peon se realice, y que gire alrededor de su eje con una cierta velocidad angular θ, y que al mismo tiempo el eje OZ gira alrededor de la vertical OZ' con una velocidad angular φ, que hemos llamado velocidad de precesion.

Para encontrar el eje instantáneo de rotacion, compongamos la rotacion, alrededor de OZ', con la rotacion θ alrededor de OZ; la resultante Oω será, en magnitud y direccion, el eje de la rotacion instantánea; la direccion Oω será la generatriz de contacto de dos conos circulares, que ruedan uno sobre otro en el movimiento del sólido.

Veamos lo que sucede en el instante en que el eje OZ del peon atraviesa el plano Z'OX'. En el punto O elevemos en este plano la OX perpendicular á la OZ, la cual será un eje principal del sólido. Descompongamos la rotacion instantánea $O\omega$ segun las dos direcciones rectangulares OZ y OX, y obtendremos las componentes $p = Op$ alrededor de OX y $r = Or$ alrededor de OZ, y formemos los productos

$$Ap = OA, \quad Cr = OC;$$

la resultante OG de las dos rectas OA, OC, será el eje de los momentos, que seguirá el movimiento del plano Z'OZ. La velocidad lineal del punto G alrededor de OZ' será igual al producto $\varphi \times GH$; que es la medida del par que debe aplicarse al sólido, y cuyo eje debe ser en cada instante paralelo á la línea de los nodos. Ahora, la única fuerza que solicita al cuerpo, prescindiendo de la reaccion del punto O, cuyo momento es nulo, es el peso P del peon aplicado en su centro de gravedad I; el plano del par formado por las fuerzas exteriores trasladadas al punto O, es por consiguiente el plano Z'OZ, y el eje del par está en efecto dirigido segun la línea de los nodos OY'. El momento del par es igual á $P \times Oi$. La condicion necesaria y suficiente para que haya precesion uniforme, es por lo tanto,

$$P \times Oi = GH \times \varphi.$$

Hemos prescindido del par debido al rozamiento del punto O sobre el plano fijo; este par influye en el movimiento, porque se observa una reduccion gradual de la velocidad de la rotacion propia θ del peon, reduccion debida al trabajo negativo del rozamiento sobre el plano de apoyo. Las reacciones del plano Y'OX' sobre el peon, comprenden en realidad una fuerza y un par; el par es debido al rozamiento del punto O. La fuerza puede descomponerse en dos: una vertical é igual al peso P; la otra horizontal, y que se equilibra con las fuerzas centrífugas desarrolladas por la rotacion φ del peon alrededor del eje OZ.

LECCION LVIII.

Movimiento de un cuerpo sólido libre.—Movimiento de la Tierra en el espacio.—Efecto de una fuerza instantánea sobre un cuerpo sólido libre.—Caso en que la percusion sea perpendicular al eje instantáneo.—Condiciones para que persista el movimiento.—Rotacion de los proyectiles en las armas rayadas.—Su desviacion del plano del tiro.—Movimiento oscilatorio de una barra elástica

Movimiento de un cuerpo sólido libre.

700. Estudiado en las lecciones anteriores el movimiento de rotacion de un sólido, ya alrededor de un eje, ya alrededor de un punto, vamos, segun el órden que nos propusimos, á estudiar el movimiento de un cuerpo sólido libre.

Cuando un sólido libre se mueve en el espacio, su centro de gravedad se mueve como un punto material cuya masa sea la masa total del sólido, y que esté solicitado por todas las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo trasportadas á este punto paralelamente á sí mismas (621). De manera, que el movimiento del centro de gravedad puede determinarse de antemano, y sólo falta encontrar el movimiento del cuerpo con respecto á su centro de gravedad.

Para encontrarlo, tracemos por este punto tres ejes de direccion constante, y busquemos el movimiento del sólido con respecto á estos tres ejes, supuestos fijos; este movimiento, será el movimiento de rotacion del cuerpo alrededor de su centro de gravedad, considerado como fijo, por la accion de las fuerzas realmente aplicadas al cuerpo, y las fuerzas ficticias que hay que introducir para tratar el movimiento relativo como un movimiento absoluto. Teniendo los ejes móviles, por hipótesis, un movimiento de traslacion, las fuerzas aparentes se reducen á las fuerzas de reaccion del movimiento de arrastre (440), que son todas paralelas y proporcionales á las masas, y por consiguiente tienen una resultante igual á su suma aplicada al centro de gravedad del cuerpo sólido.

De aquí resulta, que la suma de los momentos de las fuerzas aparentes, con respecto á cualquier eje trazado por el centro de gravedad, es nula, por consiguiente, el movimiento relativo del sólido, alrededor de su centro de gravedad, es solo debido á las fuerzas que realmente se le aplican, y no difiere del movimiento absoluto que tomaria el cuerpo por la accion de las mismas fuerzas, si el centro de gravedad estuviera realmente fijo. Y de lo expuesto se deduce este teorema: *Un cuerpo sólido gira alrededor de su centro de gravedad, como si este centro estuviera fijo.*

El problema del movimiento general de un sólido libre, se divide claramente en dos cuestiones, que pueden resolverse independientemente una de otra: movimiento del centro de gravedad, y movimiento alrededor del centro de gravedad considerado como un punto fijo.

701. Si las fuerzas aplicadas al sólido son todas nulas, el centro de gravedad del sólido se mueve en línea recta y con una velocidad constante, y al mismo tiempo el movimiento del sólido alrededor del centro de gravedad seguirá las leyes del teorema de Poinsot; el elipsoide central de inercia rodará sobre un plano de direccion constante, trazado á una distancia invariable del centro de gravedad. No habiendo fuerzas exteriores, el sólido libre se

moverá en virtud de la inercia, que produce este complejo resultado.

Si las fuerzas exteriores se reducen al peso del cuerpo, su centro de gravedad describirá una parábola (385); el momento de la resultante, representada por el peso del cuerpo, es nulo con respecto á todos los ejes que pasan por el centro de gravedad. En el movimiento con respecto al centro de gravedad, el cuerpo se encontrará en las condiciones necesarias para que pueda aplicársele el teorema de Poinsot.

Si el sólido es una esfera homogénea, cuyos puntos son atraidos por un centro fijo, en razon inversa de los cuadrados de sus distancias y en razon directa de sus masas, el centro de gravedad describirá una seccion cónica; ademas, pasando siempre la resultante de las atracciones por el centro, la esfera conservará un movimiento de rotacion uniforme alrededor de un eje fijo, constantemente paralelo á un plano dado.

Si en lugar de ser una esfera homogénea, el cuerpo atraido es un elipsoide de revolucion, este resultado se modifica como vamos á ver, aplicando lo expuesto al complicado movimiento de la Tierra.

Movimiento de la Tierra en el espacio.

702. Ya digimos que la Tierra en el espacio va animada de dos movimientos principales, uno de rotacion uniforme alrededor de la línea de los polos, llamado movimiento diurno, y otro de traslacion llamado movimiento anual, en virtud del cual describe en un año una elipse alrededor del Sol, que ocupa uno de sus focos; pero ademas de estos movimientos, los astrónomos han descubierto en nuestro globo otros movimientos, más difíles de estudiar. Considerando sólo los dos movimientos

principales, hemos admitido implícitamente que el eje terrestre se trasladaba en el espacio, paralelamente á sí mismo; pero este movimiento no es el más general de un cuerpo sólido. Descompusimos el movimiento de la Tierra, en una traslacion y una rotacion alrededor de un eje que pasa por su centro; y haciendo abstraccion del primer movimiento, el segundo, que se verifica alrededor de un punto fijo, puede consistir en una serie de rotaciones instantáneas alrededor de ejes sucesivos que pasan por este punto; y este movimiento contínuo de rotacion se realiza por la rodadura de un cono unido al cuerpo móvil, sobre la superficie de un segundo cono fijo en el espacio.

No siendo la traslacion del eje de rotacion, paralelamente á sí mismo, el movimiento más general de un cuerpo libre, es probable que la Tierra esté animada de un movimiento más complicado.

Se ha demostrado, en efecto, que el eje de la Tierra no está ni rigurosamente fijo en el globo, ni es rigurosamente paralelo á una direccion fija en el espacio. Hiparco reconoció el primero que el eje de la Tierra describe, en 26000 años, un cono recto alrededor de una perpendicular al plano de la eclíptica: este movimiento, sumamente lento, produce otro, de cerca de 50 segundos por año, de la línea de los equinoccios, ó sea la interseccion de la eclíptica con el ecuador, que se denomina en astronomía *precesion de los equinoccios*.

Más tarde ha demostrado Bradley que el eje de la Tierra no sigue exactamente la superficie del cono recto indicado por Hiparco, sino que oscila de algunos segundos á una y otra parte de esta superficie en un período de cerca de 18 años; este movimiento se llama *nutacion*. Estos movimientos se explican imaginando un cono muy poco abierto, que tenga su vértice en el centro mismo de la Tierra y forme cuerpo con ella, y un segundo cono del mismo vértice fijo en el espacio, y suponiendo que el primer cono rueda sobre el segundo, dando cada dia una vuelta entera. Si se desprecia la nutacion, pequeño balanceo del eje terrestre á una parte y otra de una posicion media, y se considera sólo la precesion, se puede definir el movimiento, así simplificado, tomando por cono fijo y cono móvil dos conos de revolucion. El polo real del globo, en lugar de ser un punto rigurosamente fijo sobre la superficie de la Tierra, es un punto móvil que, en esta hipótesis, describe cada dia alrededor del polo medio un círculo de cerca de $0^m,26$ de radio.

703. La precesion de los equinoccios, movimiento de la línea equinoccial de cerca de 50″ por año, en sentido inverso del movimiento aparente del Sol, combinado con el movimiento diurno de la Tierra, dan un eje instantáneo del globo terrestre, que no está rigurosamente fijo en la Tierra: el movimiento real de ésta consiste en la rodadura de un cono muy poco abierto, unido á ella, dentro de un cono fijo, cuyo eje es perpendicular á la eclíptica, y en el que el ángulo de la generatriz con el eje es igual á la *oblicuidad* de la eclíptica. Aplicando la teoría expuesta en la leccion anterior se ve que la precesion uniforme del globo es debida á un par, cuyo eje coincide con la línea de los nodos, es decir, con la línea equinoccial. El momento de este par es muy pequeño. La teoría de la gravitacion universal conduce, en efecto, á demostrar la existencia de este par, el cual es debido á la atraccion del Sol sobre el abultamiento ecuatorial de la superficie terrestre. Si la Tierra fuera perfectamente esférica, la resultante de las acciones del Sol sobre todos los puntos materiales que la componen, sería una fuerza que pasaria constantemente por el centro de gravedad del globo, y esta fuerza no contribuiria á imprimirle una rotacion al-

rededor de este punto. Pero el globo terrestre tiene la forma de un elipsoide de revolucion ligeramente aplastado por los polos y abultado en la region ecuatorial. Resulta de aquí una pequeña desviacion de la resultante de las acciones solares: esta fuerza, trasportada al centro de gravedad de la Tierra, da orígen á un par que produce la precesion observada.

La gravitacion explica tambien el fenómeno de la nutacion, debida á la atraccion de la Luna; pero esta explicacion, mucho más complicada, es ya del dominio de la Mecánica celeste.

Efecto de una fuerza instantánea sobre un cuerpo sólido libre.

704. Sea C (fig. 297), un sólido libre en el espacio, el cual supondremos en reposo, sea G su centro de gravedad. Apliquemos á este cuerpo en un punto dado m, una fuerza impulsiva $P = \int_{t_0}^{t} F dt$; siendo la fuerza F muy grande, y actuando durante un tiempo muy pequeño $t - t_0$. Para encontrar el movimiento que tomará el cuerpo, busquemos primero el movimiento del centro de gravedad, y luégo el movimiento del sólido alrededor del centro de gravedad.

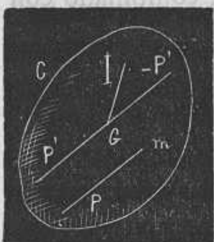

Fig. 297.

Llevemos la fuerza P paralelamente á sí misma al centro de gravedad G, lo cual equivale á reemplazar la fuerza P por una fuerza P′, igual y paralela á P, y un par (P,—P′). El movimiento del centro de gravedad será producido por la fuerza P′, actuando sobre la masa entera M del cuerpo, concentrada en el punto G. Siendo P′ el impulso total, el teorema de las cantidades de movimiento enseña, que este impulso es igual al incremento de la cantidad de movimiento, tomada en su direccion. Siendo nula la velocidad inicial, la velocidad v al fin de la percusion, será

$$(1)\quad Mv = P,$$

ecuacion que nos dará la magnitud de la velocidad v; su direccion es paralela á la fuerza P; de modo, que esta velocidad queda completamente determinada.

El movimiento del sólido con relacion al centro de gravedad, supuesto fijo, es producido por el par instantáneo (P, —P'); por lo tanto, el cuerpo empieza á girar alrededor de un eje GI, que es en el elipsoide central, el diámetro conjugado del plano del par, ó del plano que determinan el punto G y la percusion P; tambien conocemos la velocidad angular del sólido en esta rotacion, pues sabemos encontrar las componentes de esta velocidad, alrededor de los ejes principales del elipsoide central (686).

Desde el instante en que cesa la percusion, no actuando ninguna fuerza sobre el sólido, éste se mueve segun la ley de Poinsot, alrededor de su centro de gravedad supuesto fijo, y al mismo tiempo el centro de gravedad se mueve en línea recta con la velocidad constante v, en la direccion de la percusion recibida.

Caso en que la percusion sea perpendicular al eje instantáneo.

705. En el caso particular en que la fuerza P sea perpendicular al eje instantáneo GI (fig. 298), podemos hacer pasar por esta recta un plano IGM perpendicular á la direccion de P; para lo cual basta trazar desde el punto M una paralela MA á GI, que será perpendicular á PM por el supuesto; y por consiguiente PM es perpendicular al plano IGM determinado por las rectas GI y MA.

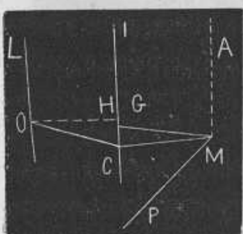

Fig. 298.

Entónces los dos movimientos elementales, de traslacion paralelamente á PM y de rotacion alrededor de GI, se pueden componer en una sola rotacion como hemos visto en la Cinemática (260). El momento de la fuerza P, con respecto al eje GI, es Pp; siendo p=CM, ó sea la distancia de P al eje; y llamando K al radio de giro del sólido con respecto al eje GI, la ecuacion del movimiento de rotacion será

$$(2) \quad \omega=\frac{Pp}{MK^2}.$$

La rotacion ω y la traslacion v, que son perpendiculares, se componen en una rotacion cuya velocidad angular es ω, alrededor de un eje OL paralelo al primero, y situado á una distancia OH de éste, igual á $\frac{v}{\omega}$. Tambien de la ecuacion (1) sale, $v=\frac{P}{M}$, y dividiendo esta relacion por la ecuacion (2), resulta

$$\frac{v}{\omega}=\frac{K^2}{p};$$

luego

$$OH=\frac{K^2}{p}, \quad \text{ó} \quad MC\times OH=K^2.$$

De manera, que si OL es el eje de suspension del sólido, considerado como un péndulo compuesto, MA es el eje de oscilacion conjugado (671). Entónces el movimiento inicial del sólido, es una rotacion instantánea alrededor del eje OL, con una velocidad ω.

Si suponemos fijo el eje OL, alrededor del cual empieza á girar el sólido, la percusion P no ejercerá esfuerzo alguno sobre este eje, porque le imprime un movimiento inicial compatible con la ligadura supuesta, y como esta ligadura no impide en nada el movimiento que P tiende á producir, el eje no experimenta ninguna presion.

Si invertimos el problema, y queremos saber las condiciones á que debe satisfacer la percusion P, para que un eje fijo OL no experimente ningun esfuerzo, mientras ella ejerce su accion, veremos, que es suficiente que la percusion P esté contenida en el plano diametral conjugado del diámetro GI, trazado en el elipsoide central de inercia paralelamente al eje dado OL, y que sea perpendicular al plano IGM determinado por dicho eje y por el centro de gravedad G; condiciones que indican, que la percusion P está aplicada en un cierto punto M de la recta GM, segun la cual, el plano OGL corta al plano diametral conjugado á la direccion OL; y por último, el producto $CM \times OH = K^2$, siendo K el radio de giro del sólido alrededor del eje GI; lo cual puede enunciarse diciendo, que el punto M pié de la perpendicular en el plano LOG, pertenece al eje de oscilacion conjugado á la recta LO, considerada como eje de suspension del péndulo formado por el cuerpo. El punto M es el centro de percusion correspondiente al eje OL.

Condiciones para que persista el movimiento.

706. Hemos estudiado hasta aquí el movimiento inicial; para que este movimiento pueda persistir alrededor del eje GI, es necesario y suficiente que este eje sea uno de los ejes principales del elipsoide central de inercia. Ahora, GI (fig. 299), es un eje conjugado al plano GmP, y para que sea principal es necesario y suficiente que el ángulo IGm sea recto; porque la recta GI es por hipótesis, perpendicular á Pm, y será perpendicular á su plano conjugado si es tambien perpendicular á Gm. En este caso las tres rectas GI y Gm, y GP′, trazada paralelamente á mP, son los tres ejes principales del elipsoide central. La traslacion v y la rotacion ω, se compo-

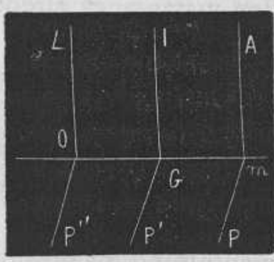

Fig. 299.

nen en una rotacion única alrededor del eje OE, determinado por la ecuacion

$$OG \times Gm = K^2.$$

La recta OL es un eje principal de inercia con relacion al punto O. Para probarlo, sabemos que las tres rectas Gm, GP′, GI son los ejes principales del elipsoide central, y tomándolos por ejes coordenados, se tendrán las tres ecuaciones siguientes

$$\Sigma mxy = 0, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Traslademos los ejes coordenados paralelamente á sí mismos al punto O; las z y las y no varian, las x se convertirán en x', y se tendrá $x' = x - a$, siendo $a = \text{GO}$; y las ecuaciones anteriores se convierten en las siguientes:

$$\Sigma m(x'-a)y = 0, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma m(x'-a)z = 0,$$

ó

$$\Sigma mx'y - \Sigma amy = 0; \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mx'z - a\Sigma mz = 0;$$

a sale del símbolo Σ por ser constante. Por ser G el centro de gravedad del cuerpo $\Sigma my = 0$ y $\Sigma mz = 0$, con lo cual se reducen las anteriores ecuaciones á las que siguen:

$$\Sigma mx'y = 0, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mx'z = 0;$$

que expresan, que los ejes OL, OG, OP″, son los ejes principales del elipsoide de inercia relativo al punto O.

707. El movimiento contínuo consiste entónces en una serie de rotaciones instantáneas alrededor de ejes OL paralelos á GI, trazados en el plano perpendicular á la direccion de la percusion, á la distancia constante OG del centro de gravedad. Podemos imaginar el movimiento contínuo del sólido, suponiendo que las diversas posiciones del eje forman una superficie cilíndrica cuyo eje sea GI, y su radio sea GO, y que esta superficie arrrastra el cuerpo rodando uniformemente sobre un plano fijo trazado por OL paralelamente á la fuerza P.

Este resultado no depende de la magnitud de la fuerza P; la cual influye en el valor de la velocidad angular ω, pero no en la posicion del eje OL. Ademas, los puntos O y m son conjugados, es decir, que si la fuerza obra sobre el cuerpo en el punto O, perpendicularmente al plano OGI, girará alrededor del eje mA. Se puede reemplazar la percusion P, sin cambiar la posicion del eje instantáneo, por tantas percusiones como se quiera, con tal que tengan todas una resultante perpendicular al plano LOG, y aplicada en el punto m.

Si el sólido estuviera fijo por el punto O, una percusion P, ejercida en el punto m, no determinará ninguna presion sobre este punto O, y el sólido girará indefinidamente alrededor del eje OL. Cuatro son las condiciones para que esto se verifique: 1.ª, que la direccion de P esté situada en el plano diametral conjugado del eje OL, en el elipsoide de inercia relativo al punto O; 2.ª, que el eje OL sea un eje principal de este elipsoide, lo que exije, que su plano diametral conjugado, sea tambien un plano principal; 3.ª, que la percusion P sea perpendicular al plano LOG, ó paralela al eje principal OP''; y 4.ª, que se tenga siempre $Gm.GO = K^2$, siendo K el radio de giro del sólido alrededor del eje GI.

Rotacion de los proyectiles lanzados por armas rayadas. Su desviacion del plano del tiro.

708. Los proyectiles lanzados por las armas rayadas son cuerpos que se mueven libremente en el espacio, á los cuales puede aplicarse todo lo que llevamos dicho en esta leccion. El uso de las armas rayadas tiene por objeto aumentar la precision del tiro, que era muy escasa con las armas lisas. En vez de los proyectiles esféricos usados hasta mediados de este siglo, se usan proyectiles cilindro-cónicos, que á igualdad de peso, experimentan menor resistencia del aire que aquellos; y ya forzándolos

en el arma al tiempo de colocarlos, ya guarneciéndolos de unos apéndices de plomo, que encajan perfectamente en las rayas ó estrías que lleva la pieza, se los sujeta á tomar en el ánima del cañon un movimiento helizoidal prolongado, que les comunica una rotacion rápida alrededor de su eje de figura.

Dos fuerzas principales actúan sobre el proyectil, en cuanto sale de la pieza, su propio peso y la resistencia del aire; la primera, aplicada á su centro de gravedad, no influye en el movimiento de rotacion de que va animado el proyectil, y la segunda, á causa de la forma oblonga de éste, se reduce á una fuerza que no pasa por su centro de gravedad. Llevemos esta fuerza paralelamente á sí misma al centro de gravedad; esta traslacion producirá un par, el cual actuará para alterar la direccion y la intensidad de la rotacion del proyectil. El eje resultante de los momentos de las cantidades de movimiento se compone en cada instante, con el impulso elemental de este par; de donde resulta una desviacion contínua, que altera la trayectoria y la hace salir del plano vertical del tiro, ó sea el determinado por el eje de la pieza y la vertical del punto de partida.

Esta *desviacion* lateral, muy pequeña en general, puede determinarse por el cálculo ó por la experiencia; su sentido depende del sentido de las rayas de la pieza. Por este medio se reemplaza por un movimiento definido y estable, el movimiento, caprichoso digámoslo así, de los antiguos proyectiles, que experimenta todas las perturbaciones debidas á las resistencias variables que encuentran en su camino al traves de la atmósfera. La operacion de apuntar es más delicada, porque el proyectil sale del plano en que primitivamente fué lanzado. Así, para las piezas de artillería de gran alcance, hay que emplear dos alzas, una horizontal y otra vertical, que sirve para tener en cuenta esta desviacion, las cuales están graduadas segun las distancias á que se quiera que llegue el tiro. La alza horizontal debe ademas corregirse del efecto del viento.

La precision del tiro con las armas perfeccionadas, supone una apreciacion exacta de las distancias; el error cometido en esta apreciacion es tanto más probable, cuanto mayor es la distancia; así, el alcance práctico de las piezas de artillería está limitado por esta circunstancia, que no hay que tener en cuenta, cuando los proyectiles no han de ir á un punto preciso. En este último caso el alcance no está limitado más que por la resistencia de las piezas á las cargas de pólvora, exigidas por el camino que se quiere hacer recorrer al proyectil.

Movimiento oscilatorio de una barra elástica.

709. Para terminar esta leccion, vamos á examinar esta cuestion de movimiento. Sea MN (fig. 300), una barra elástica homogénea de longitud l, y de seccion recta ω, vertical y sujeta invariablemente por el extremo M, y que lleva un peso P en el extremo libre N, siendo el peso de la barra muy pequeño con respecto á este peso adicional. La barra se alarga por la accion del peso P, que toma un movimiento y llega con una cierta velocidad á la posicion de equilibrio, ó sea á la posicion en que este peso se equilibra con la tension desarrollada en la barra, en virtud de la traccion que sobre ella ejerce el peso; éste pasa por consiguiente de esta posicion de equilibrio, y cuando se anula la velocidad, sube por la tension de la barra, vuelve á descender, produciéndose una serie de oscilaciones que

Fig. 300.

teóricamente se prolongan de un modo indefinido. Vamos á buscar la ley de este movimiento oscilatorio.

Para calcular el aumento de longitud, sabemos (543) que siendo x este aumento, T la tension de la barra y E el coeficiente de elasticidad, se tiene

$$T = E\omega \frac{x}{l}.$$

En la posicion de equilibrio la tension es igual al peso, y llamando i al aumento de longitud correspondiente, será

$$P = E\omega \frac{i}{l}, \text{ ó } i = \frac{Pl}{E\omega}.$$

Tomemos sobre la prolongacion de la recta MN$=l$, (fig. 301), NO$=i$; el punto O será la posicion de equilibrio del extremo N; si se colocára, sin velocidad inicial, el peso P en el extremo de la barra, préviamente estirada, de modo que su longitud haya aumentado en la cantidad NO, mantendria este aumento de longitud sin tomar ningun movimiento oscilatorio.

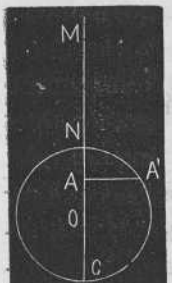

Fig. 301.

Cuando la extremidad libre de la barra está en A, á una distancia cualquiera NA$=x$ de su posicion primitiva y á una distancia OA$=x'=i-x$ de la posicion de equilibrio, el peso móvil está solicitado hácia arriba por la tension $T = E\omega \frac{x}{l}$, y hácia abajo por el peso P; la resultante de estas dos fuerzas $P - T$, ó $E\omega \frac{i}{l} - E\omega \frac{x}{l} = E\omega \frac{i-x}{l} = E\omega \frac{x'}{l}$.

Este es el valor de la fuerza que tiende á llevar el peso móvil hácia el punto O; la cual está dirigida hácia abajo cuando el punto móvil A está sobre el punto O, y hácia arriba cuando el punto está debajo del punto O. Luego la fuerza que produce el movimiento buscado, está constantemente dirigida hácia el punto O, y es proporcional á la distancia x' del móvil á este punto. Hemos estudiado (350) el movimiento producido por una fuerza de esta clase: este movimiento es la proyeccion sobre NC del movimiento uniforme del punto A′, que recorre la circunferencia descrita del punto O como centro con un radio ON. Así se encuentra, que el límite del aumento de longitud de la barra, es NC, duplo del que corresponde al equilibrio, y que se llama por esta causa alargamiento *estático*. La duracion de la oscilacion simple, que hace recorrer al peso P la distancia NC, es igual al tiempo que emplea el punto A′ en recorrer la semi-circunferencia NA′C. La velocidad del punto A sobre la trayectoria, es igual á la velocidad V del punto A, cuando pasa por el punto O. Podemos calcular esta velocidad por el teorema de las fuerzas vivas; porque la mitad de la fuerza viva $\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2$, del peso P á su paso por O, es igual al trabajo de las fuerzas P y T en el recorrido NO; el trabajo de la fuerza P es positivo, é igual á Pi; la fuerza T, cuyo valor en el punto A es $E\omega\,\frac{x}{l}$, desarrolla un trabajo elemental $E\omega\,\frac{xdx}{l}$, por el recorrido dx; y por el recorrido x el trabajo total es $E\omega\,\frac{x^2}{2l}$; y por el recorrido i, $E\omega\,\frac{i^2}{2l}$; luego el trabajo de las fuerzas P y T es

$$Pi - E\omega\,\frac{i^2}{2l};$$

de consiguiente

$$\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}V^2 = Pi - E\omega\frac{i^2}{2l};$$

de donde

$$V = \sqrt{\frac{Pi - E\omega\frac{i^2}{2l}}{\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}}}.$$

Poniendo en vez de $E\omega\frac{i}{l}$, su valor P, en el segundo término del numerador del radical, y simplificando resulta

$$V=\sqrt{gi}.$$

El punto A′ tiene una velocidad igual á $\sqrt{gi}$, el tiempo t empleado en recorrer la semicircunferencia NA′C, será

$$\frac{\pi i}{\sqrt{gi}}=\pi\sqrt{\frac{i}{g}};$$

que es la duracion de una pequeña oscilacion del péndulo circular de longitud i; por lo que pueden aplicarse á estas oscilaciones, las leyes de las del péndulo simple, expuestas en la leccion XXXII.

LECCION LIX.

Movimiento de un cuerpo sujeto á permanecer en contacto con una superficie fija.—Movimiento de un cuerpo redondo sobre un plano inclinado.—Movimiento rectilíneo de una bola de marfil sobre una mesa de billar.—Movimiento curvilíneo de una bola de marfil sobre una mesa de billar.

Movimiento de un cuerpo sujeto á permanecer en contacto con una superficie fija.

710. El último caso de movimiento que debemos examinar es el de un cuerpo que permanece en contacto con una superficie fija.

Un cuerpo sólido que se mueve tocando siempre la superficie de otro sólido, por uno ó varios puntos, puede considerarse como libre, con tal que entre las fuerzas que lo solicitan, introduzcamos las reacciones que se desarrollan en los puntos de contacto, y aplicar á su movimiento las leyes expuestas en la leccion anterior para el movimiento de un cuerpo sólido libre.

Cuando dos sólidos naturales resbalan uno sobre otro, ya esté uno de ellos fijo, ya se muevan los dos, se desarrollan en la inmediacion de los puntos de contacto, acciones que tienden á aproximar las moléculas del uno á las del otro; estas moléculas así desviadas de sus posiciones naturales de equilibrio, vuelven á sus primitivas posiciones, despues de haber ejecutado un número más ó ménos grande de oscilaciones, alrededor de su posicion de equilibrio, en virtud de la velocidad adquirida; movimiento oscilatorio que se trasmite á todo el cuerpo, y es análogo al que hemos estudiado en el núm. 709.

711. En cada uno de los puntos de contacto pueden reemplazarse todas las acciones moleculares por una sola fuerza, y descomponer ésta en dos componentes; una situada en el plano tangente comun á las superficies de los dos sólidos, y otra normal á sus superficies. Esta queda destruida por la resistencia que oponen los sólidos á la penetracion, y la componente situada en el plano tangente se opone al resbalamiento de los dos sólidos; y esta resistencia al resbalamiento, es lo que hemos llamado *rozamiento*. En el núm. 560 hemos expuesto las leyes experimentales del rozamiento, considerado como la resistencia que se desarrolla al resbalar un cuerpo sobre otro, al principio del movimiento; las cuales son aplicables tambien al rozamiento durante el movimiento, como se ha probado por la experiencia. De modo, que tambien aquí se verifica: 1.° Que el rozamiento es proporcional á la presion; 2.° Que es independiente de la extension de las superficies en contacto; y 3.° Que tambien es independiente de la velocidad de los dos sólidos. Ya dijimos (561), que el rozamiento durante el movimiento es algo menor que el rozamiento al principio del movimiento, ó rozamiento de partida.

Cuando dos sólidos naturales sólo tienen un punto de contacto, puede prescindirse de las acciones moleculares producidas por el resbalamiento, con tal que se considere á cada uno, sometido á la accion de un rozamiento debido á su contacto con el otro sólido. Estas dos fuerzas de rozamiento aplicadas á los puntos de contacto de los sólidos, son iguales y directamente opuestas, y su direccion coincide con la del resbalamiento elemental, que tiene lugar á partir del instante considerado, y se encuentra en el plano tangente comun á los dos sólidos en el punto de contacto.

Si dos sólidos naturales resbalan uno sobre otro, teniendo varios puntos aislados de contacto, ó gran número de ellos, que forman una línea ó una superficie de contacto, podemos aplicar á cada uno de ellos lo que acabamos de decir para uno solo; en cada uno se pueden considerar dos fuerzas iguales y opuestas, aplicadas á cada uno de los sólidos, y cuya direccion coincida con la del resbalamiento elemental de los dos sólidos en el punto de que se trata.

Si los dos sólidos que resbalan el uno sobre el otro, se tocan por una superficie plana, y su movimiento es de traslacion paralelamente á la superficie plana de contacto, todas las fuerzas de rozamiento que obran sobre cada uno de estos dos sólidos, son paralelas entre sí y están dirigidas en el mismo sentido; y pueden reemplazarse por una sola, igual á su suma, paralela á ellas, y dirigida segun el resbalamiento elemental de los dos sólidos. En este caso pueden considerarse los dos sólidos, como sometidos cada uno á una sola fuerza de rozamiento, cuya intensidad constituirá el rozamiento total de cada uno de los dos sólidos sobre el otro; estas dos fuerzas están ademas en iguales condiciones á las que corresponden á cada punto de contacto, considerado separadamente.

712. Ya sabemos qué *coeficiente de rozamiento* es la relacion del rozamiento á la presion; y *ángulo de rozamiento*, es el ángulo cuya tangente es igual al coeficiente de rozamiento; definiciones que dimos en el núm. 562. Esta relacion depende únicamente de la naturaleza de las superficies de los cuerpos que resbalan el uno sobre el otro. Se prueba por la experiencia, que para los mismos cuerpos el coeficiente de rozamiento durante el movi-

miento, es menor generalmente que el correspondiente al rozamiento de partida, segun se ve en la tabla del número 565.

Expuestas estas indicaciones generales sobre el movimiento de un cuerpo sólido, sujeto en su movimiento á permanecer en contacto con la superficie de otro sólido, vamos á estudiar algunos casos particulares de este movimiento.

Movimiento de un cuerpo redondo sobre un plano inclinado.

713. Un cuerpo redondo homogéneo O, cilíndrico ó esférico, colocado sin velocidad inicial sobre un plano inclinado AB, y solicitado por su propio peso, desciende á lo largo de este plano; vamos á estudiar las leyes de este movimiento

Se ve desde luégo, que el cuerpo desciende á lo largo de la línea de máxima pendiente del plano; pero no podemos asegurar *á priori*, si el movimiento será un resbalamiento simple, ó una rodadura simple, ó una combinacion de estos dos movimientos. El cuerpo está solicitado por dos fuerzas, su peso P (fig. 302), aplicado en su centro de gravedad, y la reaccion del plano aplicada en el punto de contacto C del cuerpo con el plano; esta reaccion puede descomponerse en dos componentes; una N, normal al plano, y otra R, tangencial, que es el rozamiento; el peso P puede tambien descomponerse en dos fuerzas, una F paralela al plano, y otra H normal á él.

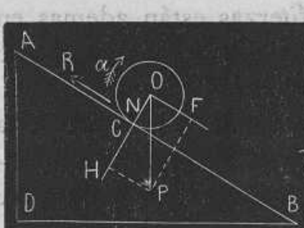

Fig. 302.

Sean $\frac{dv}{dt}$ la aceleracion lineal del centro de gravedad, y

$\frac{d\omega}{dt}$ la aceleracion angular del cuerpo, en su rotacion alrededor del eje, que se proyecta en O; la primera está dirigida paralelamente al plano en el sentido descendente; y la segunda $\frac{d\omega}{dt}$, que es debida á la fuerza R, está dirigida en el sentido en que esta fuerza tiende á hacer girar al cuerpo alrededor del punto O, esto es, en el sentido de la flecha *a*.

Obtendremos las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad, proyectando el movimiento sobre dos ejes, uno normal al plano, y otro paralelo á la línea de máxima pendiente del plano. De este modo resultará

$$(1) \quad N - H = 0,$$

$$(2) \quad F - R = \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt},$$

teniendo presente que la masa del cuerpo es $\frac{P}{g}$, y que la aceleracion del centro de gravedad en el sentido de la normal es nula.

La ecuacion del movimiento alrededor del centro de gravedad, considerado como un punto fijo, ó alrededor del eje que se proyecta en O, y que es un eje de simetría del cuerpo, es

$$(3) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{Rr}{\frac{P}{g} K^2}$$

siendo r el radio de la esfera ó del cilindro, y K el radio de giro del sólido alrededor del eje O; sabemos (575) que $K^2 = \frac{1}{2} r^2$ para el cilindro, y $K^2 = \frac{2}{5} r^2$ para la esfera. De la ecuacion (1) podemos deducir el valor de la reaccion normal N; y las ecuaciones (2) y (3) contienen las tres incógnitas $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ y R, que se determinan del modo siguiente en los diferentes casos que pueden ocurrir.

714. 1.° Si el cuerpo rueda en el punto C, el roza-

miento R no llega á su límite superior fN, siendo f el coeficiente de rozamiento; porque este límite supone que el resbalamiento se verifica efectivamente. Pero entónces entre $\frac{dv}{dt}$ y $\frac{d\omega}{dt}$ existe la relacion

$$(4) \quad \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt},$$

deducida diferenciando la relacion $v = r\omega$; porque la velocidad del punto C en el movimiento de traslacion es igual y contraria, en cada instante, á la velocidad lineal del mismo punto, en el movimiento de rotacion alrededor del centro de gravedad.

En este caso, el problema está determinado por las tres ecuaciones siguientes:

$$F - R = \frac{P}{g}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Rr}{\frac{P}{g}K^2},$$

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt};$$

debiendo verificarse ademas la condicion $R < fN$, ó $< fH$. Eliminando $\frac{dv}{dt}$, y $\frac{d\omega}{dt}$, entre estas tres ecuaciones, tendremos para determinar R, la ecuacion,

$$\frac{F-R}{\frac{P}{g}} = \frac{Rr^2}{\frac{P}{g}K^2},$$

ó

$$(F-R)K^2 = Rr^2;$$

y por fin

$$R = F \times \frac{K^2}{K^2+r^2}.$$

Para que haya rodadura, es necesario y suficiente, que

$$F \times \frac{K^2}{K^2+r^2} < fH,$$

ó que

$$\frac{F}{H} < f \times \frac{K^2+r^2}{K^2}.$$

Pero la razon $\frac{F}{H}$ de las componentes del peso P, es igual á la razon $\frac{AD}{BD}$ de la altura del plano á su base, ó sea la inclinacion sobre el horizonte del plano dado. Tambien f es la inclinacion del plano que forma con el horizonte un ángulo igual al ángulo de rozamiento. Un punto único, colocado sobre el plano, empezará á resbalar en cuanto su inclinacion sea mayor que la inclinacion f; miéntras que un cuerpo redondo colocado en la misma situacion sobre el plano, no resbalará hasta que su inclinacion no exceda á $f \times \frac{K^2+r^2}{K^2}$; y poniendo por K su valor, no sea mayor que $3f$, si el cuerpo es cilíndrico, y $\frac{7}{2}f$, si el cuerpo es esférico.

715. 2.° Si el cuerpo redondo resbala sobre el plano, R es igual á su límite fH, y el problema sólo contiene las dos incógnitas v y ω, no existiendo entónces la ecuacion $\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$, puesto que no hay rodadura; las ecuaciones del problema, son en este caso,

$$F - fH = \frac{P}{g}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{fHr}{\frac{P}{g}K^2}.$$

Este caso supone necesariamente, que la inclinacion del plano es superior al límite, que hemos determinado para el anterior; porque para que el rozamiento R, tenga la direccion que hemos supuesto, es preciso que la velocidad absoluta del punto de contacto C esté dirigida en sentido contrario, es decir, en el sentido de la fuerza F; ahora, esta velocidad es la diferencia entre la velocidad lineal del centro de gravedad, y la velocidad lineal, debida al movimiento alrededor del centro de gravedad. Esta diferencia debe permanecer positiva; lo mismo debe suceder con las aceleraciones correspondientes, y por consiguiente:

$$\frac{dv}{dt} > \frac{d\omega}{dt} r;$$

y poniendo en esta desigualdad por $\frac{dv}{dt}$, y $\frac{d\omega}{dt}$, sus valores, y suprimiendo $\frac{P}{g}$ en ambos miembros, será

$$F - fH > \frac{fHr^2}{K^2};$$

de la que se deduce

$$\frac{F}{H} > \frac{K^2 + r^2}{K^2} \times f.$$

716. 3.° Para que el sólido resbale sin ninguna rodadura sobre el plano, es necesario que la velocidad angular ω sea igual 0, lo que supone H=0, y que el plano inclinado venga á ser vertical; el cuerpo cae como un cuerpo libre, rasando al plano sin tocarló. La aceleracion angular del sólido es entónces nula, y su velocidad angular es constante.

717. Vamos á ver las condiciones del movimiento en el primer caso. Este movimiento es enteramente conocido, cuando se conoce la ley del movimiento del centro de gravedad; ley conocida desde luégo, porque este punto está animado de un movimiento uniformemente acelerado, pues si entre las ecuaciones (2), (3) y (4), del movimiento en este caso, eliminamos R y ω, se deduce para la aceleracion $\frac{dv}{dt}$ un valor constante

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{g} F \times \frac{K^2 + r^2}{r^2}.$$

Para encontrar la velocidad v del centro de gravedad, cuando el cuerpo ha llegado á una posicion O′ (fig. 303), podemos valernos del teorema de las fuerzas vivas. Al pasar el cuerpo de la posicion inicial O á la posicion final O′, la única fuerza que produce trabajo es la gravedad, porque el rozamiento R y la reaccion normal N, están aplicadas en cada instante al punto de contacto C, alrededor del cual el cuerpo gira en su movimiento absoluto; y podemos suponer fijo este punto durante un instante, y que el camino que recorre es nulo, luego el trabajo de estas dos fuerzas es nulo en este instante y en todos los sucesivos; es decir, que el trabajo total del rozamiento R y de la presion normal N es rigurosamente nulo. Sea $h = O'H$, el camino vertical recorrido por el centro de gravedad en el descenso de O á O'; el trabajo de la gravedad será Ph, el cual es igual á la mitad de la fuerza viva del cuerpo, por ser nula la velocidad inicial.

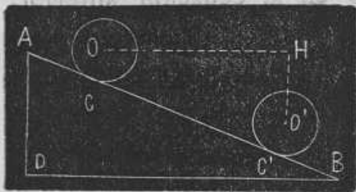

Fig. 303.

Esta fuerza viva es la suma de las fuerzas vivas $\frac{P}{g}v^2$, de la masa entera condensada en su centro de gravedad, y de la fuerza viva $\frac{P}{g}K^2\frac{v^2}{r^2}$, debida al movimiento del sólido alrededor de su eje O'. La ecuacion de las fuerzas vivas es en este caso

$$\frac{P}{g}v^2 + \frac{P}{g}K^2 \times \frac{v^2}{r^2} = 2Ph,$$

de donde se deduce

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{K^2}{r^2}}}.$$

718. Si el cuerpo ha sido lanzado de abajo á arriba, á lo largo del plano inclinado, con una velocidad inicial v_0, al llegar á una altura h', elevándose, tendrá una velocidad v' que se deduce de la ecuacion

$$\left(\frac{P}{g}v'^2 + \frac{P}{g}K^2\frac{v'^2}{r^2}\right) - \left(\frac{P}{g}v_0^2 + \frac{P}{g}K^2\frac{v_0^2}{r^2}\right) = -2Ph'.$$

Si quisiéramos saber hasta qué altura se elevaria, no habria más que hacer $v'=0$ en la ecuacion anterior, despejar h', y resulta

$$h'=\frac{v_0^2}{2g}\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right).$$

Esta altura h' es mayor que la altura $\frac{v_0^2}{2g}$, debida á la velocidad v_0, lo cual no se opone á los principios establecidos, porque hemos supuesto que el cuerpo rueda sobre el plano inclinado, y á la velocidad v_0 del centro de gravedad, debemos añadir la velocidad angular $\omega_0=\frac{v_0}{r}$ del sólido alrededor de su centro de gravedad, por consiguiente, la fuerza viva inicial del sólido es superior á la fuerza viva de un punto material de la misma masa, animado de la velocidad v_0.

Movimiento rectilíneo de una bola de marfil sobre una mesa de billar.

719. Sea O esta bola, colocada sobre su correspondiente mesa AB (fig. 304), á la que se aplica una percusion T en su plano vertical medio, á una distancia OH por debajo de su centro. Esta percusion da á su centro de gravedad O una velocidad v_0, y al mismo tiempo imprime á la bola un movimiento de rotacion ω_0, en el sentido de la flecha, alrededor de la horizontal que se proyecta en O perpendicularmente al plano del dibujo; esta horizontal es en efecto,

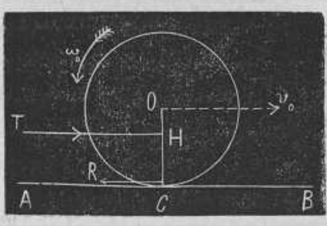

Fig. 304.

en la esfera central de inercia de la bola, el diámetro conjugado del plano trazado por el centro de gravedad O y la percusion T; y en la esfera todo diámetro es un eje principal de inercia.

Una vez lanzada la bola, sólo está solicitada por dos fuerzas exteriores, el rozamiento de la bola contra el tapiz de la mesa y la gravedad; pero la gravedad, siempre vertical y pasando por el centro de gravedad O, en nada contribuye á modificar la velocidad del centro de gravedad, ni á la rotacion alrededor del diámetro que se proyecta en O. Sean v la velocidad del punto O, ω la velocidad angular alrededor de este eje al cabo de un tiempo cualquiera t, y r el radio de la bola. El rozamiento entre la bola y el tapiz es igual al producto fP del peso P de la bola por el coeficiente de rozamiento. La fuerza $R=fP$ que actúa sobre la bola, está dirigida en sentido contrario del movimiento del punto de contacto C; mas este punto tiene por velocidad absoluta la suma $v+r\omega$, de la velocidad de traslacion, comun á todos los puntos de la bola, y de la velocidad debida á la rotacion alrededor del punto O; el sentido del rozamiento R depende del signo de la cantidad $v+r\omega$; si esta es positiva, el rozamiento está dirigido á la izquierda, que es lo que suponemos en la figura 304; si es negativa, está dirigido á la derecha. El primer caso se verifica en el orígen del movimiento, porque v_0 y ω_0, son las dos positivas; desde que éste empieza, la fuerza constante R actúa para disminuir á la vez las velocidades v y ω; la aceleracion que esta fuerza imprime al centro de gravedad O, es negativa é igual

á $-\frac{R}{m}=\frac{-R}{\frac{P}{g}}$, y como $R=fP$, es igual á $-fg$. La aceleracion angular que R comunica á la bola, alrededor del eje O, es negativa é igual á $-\frac{\mathrm{R}r}{\frac{2}{5}\frac{\mathrm{P}}{g}r^2}=-\frac{5}{2}\frac{fg}{r}$. De modo, que al cabo del tiempo t las velocidades v y ω tienen los valores siguientes:

$$v=v_0-fgt$$

$$\omega=\omega_0-\frac{5}{2}\frac{fgt}{r};$$

quitemos el denominador r en la segunda ecuacion, y hagamos $u=r\omega$, y $u_0=r\omega_0$, que es lo mismo que llamar ω á la velocidad lineal del punto C, debida á la rotacion de la bola, prescindiendo de la traslacion v; las dos ecuaciones anteriores, se reducen á las que siguen,

$$(5)\quad \begin{cases} v=v_0-fgt, \\ u=u_0-\frac{5}{2}fgt. \end{cases}$$

720. Para discutir estas ecuaciones, establecidas en el supuesto de que R está dirigida á la izquierda, es decir, que $v+r\omega$, ó $v+u$ positiva, tracemos dos ejes rectangulares OT, OV (fig. 305), uno que represente los tiempos, y otro que represente las velocidades. Sobre OV tomemos $\mathrm{OA}=v_0$, $\mathrm{OB}=u_0$; sobre el eje OT, $\mathrm{OL}=\frac{v_0}{fg}$, $\mathrm{OH}=\frac{u_0}{\frac{5}{2}fg}$, y tracemos AL y BH; las ordenadas de estas rectas representarán los valores sucesivos de v y u.

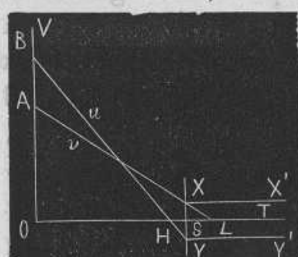

Fig. 305.

En la figura vemos, que u se anula ántes que v, y la suma $u+v$ se anula para un cierto valor del tiempo $t=\mathrm{OS}$, comprendido entre $t=\mathrm{OH}$ y $t=\mathrm{OL}$. En el momento en que $u+v$ se hace nula, ó cuando las ecuaciones anteriores dejan de ser aplicables, v tiene el valor positivo SX, y u el negativo SY; las velocidades ω y v de rotacion y traslacion, tienen entónces exactamente los valores convenientes para asegurar la rodadura sin resbalamiento de la bola sobre el tapiz; el rozamiento de resbalamiento es nulo, y las velocidades u y v se conservan desde este instante, puesto que no interviene ninguna fuerza para modificarlas. Las rectas BY y AX, se prolongan segun las rectas YY', y XX', paralelas al eje de los tiempos, y á igual distancia hácia arriba y hácia abajo de este eje.

721. Puede presentarse otro caso, que es aquel en que la velocidad v se anula ántes que la velocidad ω, como vemos en la (figura 306); entónces desde la época definida por el valor $t = \frac{v_0}{fg}$, la velocidad v cambia de signo, pasando por cero, y el centro de gravedad toma un movimiento retrógrado; la ley del movimiento no se altera sin embargo, hasta que el tiempo llega á tener el valor $t =$ OS, que anula la suma $v + u$. En este momento la rodadura simple tiene lugar, por ser iguales u y v, y dejando de producirse el rozamiento R, estas velocidades conservan sus valores, que están representados por las rectas YY' y XX'; pero habiendo venido á ser v negativa, el movimiento de la bola es retrógrado, es decir, de sentido contrario al primitivo.

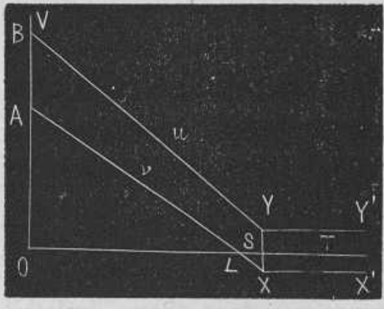

Fig. 306.

722. Existe un caso singular muy notable, que es aquel en que las velocidades v y u se anulan á la vez, ó

en el mismo instante. En este caso, representado en la (figura 307), el resbalamiento cesa y el rozamiento se anula cuando t=OS. La bola no está entónces solicitada por ninguna fuerza, y las velocidades v y u conservan indefinidamente los valores que tienen en este instante; y como las dos son nulas, la bola permanece en reposo. Las paralelas YY', y XX' se confunden en este caso con el eje de los tiempos.

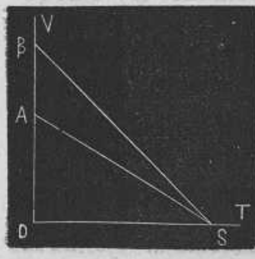

Fig. 307.

Vamos á buscar la distancia OH, del centro (fig. 304), á que debe picarse la bola, para que se produzca este efecto. Llamando T á la fuerza instantánea que actúa sobre la bola, tendremos

$$v_0 = \frac{T}{m} = \frac{T}{\frac{P}{g}},$$

$$\omega_0 = \frac{T \times OH}{\frac{2}{5}\left(\frac{P}{g}\right) r^2}.$$

Para que la bola se pare, es necesario que se verifique la igualdad

$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{v_0}{r\omega_0} = \frac{\frac{T}{\frac{P}{g}}}{\frac{T \times OH}{\frac{2}{5} \times \frac{P}{g} \times r}} = \frac{2r}{5OH}.$$

Luego la distancia OH debe ser igual al radio r, y hay que picar la bola al nivel mismo del tapiz. Estos resultados sólo son aproximados, porque no hemos tenido cuenta de la resistencia á la rodadura, que es suficiente para producir al cabo de poco tiempo la parada de las bolas.

Movimiento curvilíneo de una bola de marfil sobre una mesa de billar. (a)

723. Supongamos que al principio del movimiento la bola va animada de un movimiento de rotacion alrededor de una recta inclinada, que pasa por su centro de gravedad; se podrá descomponer esta rotacion en tres rotaciones segun tres ejes trazados por este punto, uno vertical y dos horizontales, de direccion constante; ejes que son en cada instante, ejes de simetría de la esfera.

La primera rotacion alrededor de la vertical, se conservará sin alteracion, porque el rozamiento de resbalamiento, única fuerza que modifica las velocidades, tiene un momento cero con respecto al eje alrededor del cual se verifica. Prescindimos aquí del trabajo negativo debido al rozamiento, producido por la rotacion de la bola en las inmediaciones del punto de contacto, análogo al que experimenta un pivote vertical sobre su gorron; rozamiento que la experiencia prueba que es muy pequeño, puesto que la rotacion de una bola de billar, alrededor de un eje vertical, puede prolongarse por mucho tiempo.

Las otras dos rotaciones, combinadas con la traslacion de la bola, producen rozamientos de resbalamiento, que tienden á reducir á la vez la velocidad lineal del centro de gravedad, y las velocidades angulares alrededor de los ejes horizontales trazados por este punto.

Sean P el peso de la bola, f el coeficiente de rozamiento entre el marfil y el tapiz de la mesa, Pf representará el rozamiento total, en el caso en que haya resbalamien-

---

(a) La solucion de este problema, que vamos á exponer, es debida á M. Resal.

to, OX, OY, OZ (fig. 308), tres ejes rectangulares siendo el OZ vertical; GX′, GY′, GZ′, tres ejes paralelos á los anteriores trazados por el centro de gravedad G de la bola; C el punto de contacto entre la bola y el tapiz, y r el radio de la bola.

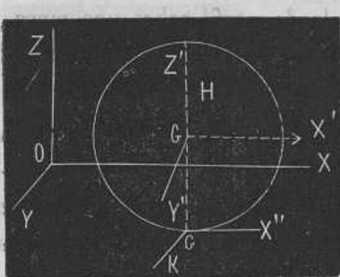

Fig. 308.

Descompongamos el rozamiento fP aplicado en C en dos componentes X″ y K, paralelas á los ejes OX y OY; representemos por u y v las velocidades del centro de gravedad en los sentidos de los ejes OX y OY, por p y q las velocidades angulares de la bola alrededor de los ejes GX′ y GY′, y por m la masa de la bola, su momento de inercia μ, con respecto á un eje trazado por su centro, es $\frac{2}{5}mr^2$.

Las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad son

$$(6)\qquad \begin{cases} m\dfrac{du}{dt}=\mathrm{X}, \\ m\dfrac{dv}{dt}=\mathrm{Y}; \end{cases}$$

y las ecuaciones del movimiento de rotacion alrededor del centro de gravedad son

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\mathrm{Y}r}{\frac{2}{5}mr^2},$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{-\mathrm{X}r}{\frac{2}{5}mr^2};$$

que pueden ponerse bajo la forma

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{2}{5}mr\,\dfrac{dp}{dt}=\mathrm{Y}, \\ \frac{2}{5}mr\,\dfrac{dq}{dt}=-\mathrm{X}. \end{cases}$$

Eliminando X é Y entre las ecuaciones (6) y (7), obtendremos

$$(8)\quad \begin{cases} m\dfrac{du}{dt}+\dfrac{2}{5}mr\dfrac{dq}{dt}=0, \\ m\dfrac{dv}{dt}-\dfrac{2}{5}mr\dfrac{dp}{dt}=0; \end{cases}$$

suprimiendo m, é integrando estas ecuaciones, serán

$$(9)\quad \begin{cases} u+\dfrac{2}{5}r\times q=c, \\ v-\dfrac{2}{5}r\times p=c', \end{cases}$$

siendo c y c' las constantes de la integracion

724. Tomemos sobre la vertical GZ′ una longitud $GH=\frac{2}{5}r$; el punto H, que participa á la vez de las traslaciones u y v, y de las rotaciones p y q, tendrá una velocidad paralelamente al eje OX, igual $u+\frac{2r}{5}q$, y una velocidad $v-\frac{2r}{5}p$ paralelamente al eje OY. Siendo constantes estas velocidades, la velocidad total del punto H es tambien constante en magnitud y direccion, y está representada por la diagonal del rectángulo construido sobre ellas. Tenemos evidentemente, que

$$GH\times GC=\frac{2}{5}r\times r=\frac{2}{5}r^2,$$

ó

$$GH\times GC=\frac{\frac{2}{5}mr^2}{m}=\frac{\mu}{m};$$

luego el punto H es el centro de percusion de la bola con respecto á un eje horizontal cualquiera trazado por el punto de contacto C; es decir, HC es la longitud del péndulo simple que oscilará en el mismo tiempo que el péndulo compuesto que resultará suspendiendo la bola por el punto C. El movimiento de la bola lleva en cada instante nuevos puntos materiales á ocupar la posicion del punto H, y cada uno de ellos, en el instante en que pasa por este lugar, posee la velocidad constante, que resulta de componer las velocidades constantes c y c'.

725. Conocemos la magnitud del rozamiento fP, vamos á buscar su direccion.

Esta fuerza se desarrolla en el punto de contacto de la bola con el tapiz de la mesa, en una direccion opuesta al resbalamiento, es decir, en la direccion opuesta á la velocidad del punto C. Mas este punto tiene en la direccion CX″ una velocidad $u-qr$, y en la direccion CK una velocidad $v+pr$. Estableceremos la condicion de que el rozamiento, hecha abstraccion de su signo, tiene la misma direccion que el resbalamiento, la cual estará expresada por la proporcion

$$(10) \qquad \frac{X}{Y}=\frac{u-qr}{v+pr}.$$

De las ecuaciones (6) y (7) se deduce

$$\frac{X}{Y}=\frac{du}{dv}=\frac{-dq}{dp}=\frac{-rdq}{rdp}=\frac{du-rdq}{dv+rdp}=\frac{d(u-rq)}{d(v+rp)};$$

de esta y la anterior resulta

$$(11) \qquad \frac{u-qr}{v+pr}=\frac{d(u-qr)}{d(v+pr)},$$

lo que nos indica, que la relacion $\frac{u-qr}{v+pr}$ permanece constante, y lo mismo sucede á su igual $\frac{X}{Y}$; y la fuerza de rozamiento fP, permanece paralela á una misma direccion.

El centro de gravedad de la bola, solicitado por la fuerza fP, constante en direccion y magnitud, describe un arco de parábola, mientras que el rozamiento conserva la direccion que hemos supuesto. Esta direccion está determinada por los valores simultáneos de las cantidades u_0-q_0r, y v_0+p_0r, al principio del movimiento. Conocidos estos valores, podremos determinar X é Y, y luégo por medio de las cuatro ecuaciones (6) y (7) los valores de u, v, p y q. Para simplificar, podemos tomar el eje OY paralelo á la direccion constante de la fuerza fP y dirigido en sentido contrario; y por consiguiente, $X=0$, y $u-qr=0$. El resbalamiento está entónces dirigido paralelamente al eje de las y. Las cantidades v y p varian en cada instante, y disminuyen las dos proporcionalmente al tiempo; porque Y actuando en sentido contrario de las y positivas, tiene el valor negativo $-fP$; luego la suma $v+pr$ disminuye, y llegará un momento en que será nula.

En este instante el resbalamiento cesa, y el centro de gravedad de la bola, que aún posee una velocidad igual á la r.sultante de u y v, continúa moviéndose segun la recta tangente á la trayectoria que acaba de recorrer.

Podemos notar como caso particular, aquél en que, en el mismo instante, sea $u=0$, $v=0$, y $p=0$; la ecuacion $u-qr=0$, prueba que tambien $q=0$; la bola estará en reposo, y en él continuará, pues no hay ninguna fuerza que vuelva á ponerla en movimiento.

LECCION LX.

Choque de los cuerpos.—Choque directo de dos cuerpos esféricos.—Choque de dos cuerpos no elásticos.—Fuerzas vivas durante el choque.—Choque de los cuerpos perfectamente elásticos.—Casos particulares.—Teorema de Carnot.—Péndulo balístico.

Choque de los cuerpos.

726. Para el estudio del choque de los cuerpos estos se dividen, en perfectamente elásticos y no elásticos. *Cuerpos perfectamente elásticos*, son aquellos que recobran exactamente su forma primitiva cuando cesa la fuerza que les obligó á cambiar de forma; y *cuerpos no elásticos*, son los que no tienen la propiedad de recobrar su forma primitiva una vez deformados. Los cuerpos en la naturaleza, ni son perfectamente elásticos, ni están completamente desprovistos de elasticidad, estando todos comprendidos entre los dos casos extremos que acabamos de definir. Todos los sólidos naturales son elásticos, miéntras los esfuerzos que se les aplican, no exceden de un cierto límite, llamado *límite de elasticidad*; más allá de este límite, los cuerpos se deforman como si fueran no elásticos, sus deformaciones persisten, ya total, ya parcialmente.

El choque se produce, cuando dos cuerpos en movimiento van á ocupar al mismo tiempo el mismo lugar del espacio; siendo imposible que los cuerpos ocupen á la vez el mismo lugar del espacio, las leyes de sus movimientos se modifican por la accion de las fuerzas repulsivas que se desarrollan al contacto de los dos cuerpos, las cuales cambian la magnitud y la direccion de sus respectivas velocidades. Como la duracion del choque es muy corta, podemos considerar las fuerzas que se desarrollan durante él, como instantáneas ó percusiones de gran intensidad para modificar en este corto intervalo las velocidades de los puntos, sin alterar sensiblemente sus posiciones. Tambien en este corto intervalo podemos prescindir del efecto de las fuerzas exteriores contínuas, por ser relativamente muy pequeño.

La pequeña duracion del choque, la dividiremos en dos períodos: el primero desde el principio del choque, hasta el instante en que los cuerpos adquieren una velocidad comun; y el segundo desde este instante, hasta aquél en que los cuerpos recobran su forma primitiva, si son elásticos; sino lo son, conservan la velocidad comun, y caminan juntos despues del choque, de manera que en éstos, el choque no tiene más que el primer período.

Choque directo de dos cuerpos esféricos.

727. Consideremos dos cuerpos esféricos C y C′, cuyos centros se mueven sobre la recta Ox; sean m y m' sus masas, v y v' las velocidades de que van animados, y supongamos que se mueven en el mismo sentido Ox (figura 309); será necesario para que los dos cuerpos se encuentren, que la velocidad de C sea mayor que la de C′, y tendremos $v > v'$; entónces llegará un instante en que los dos cuerpos estarán en contacto y empezará el choque. Desde este instante se desarrollan las fuerzas mole-

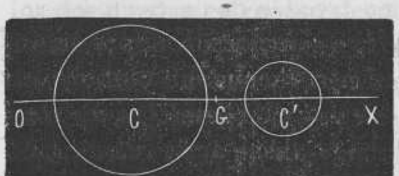

Fig. 309.

culares, y los cuerpos se deforman; la velocidad del cuerpo C disminuye por la resistencia que le opone el cuerpo C', y la de éste aumenta en virtud del empuje que recibe del cuerpo C; este cambio recíproco de velocidades subsiste hasta el instante en que las velocidades v y v' llegan á ser iguales; en este instante termina la duracion que hemos llamado primer período del choque. Considerando á los dos cuerpos como sistemas de puntos materiales de forma variable, la determinacion del movimiento de cada uno de estos puntos sería muy difícil; pero se puede obtener con mucha facilidad el movimiento del centro de gravedad de cada uno de los cuerpos, por medio del teorema del movimiento del centro de gravedad de un sistema (621), y del principio de que la accion es igual y contraria á la reaccion; en virtud de este principio, debemos suponer aplicadas en los centros de gravedad dos fuerzas iguales y contrarias dirigidas segun la recta Ox, y que son las resultantes de todas las acciones moleculares que se desarrollan por el choque.

Sean O el orígen de las coordenadas, OC$=x$, OC'$=x'$, R el valor comun de las dos presiones iguales y contrarias aplicadas á los centros de las esferas que provienen de los acciones mútuas de sus moléculas. Las ecuaciones del movimiento de los centros C y C' de las esferas, son

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{R},\quad m'\frac{d^2x'}{dt^2}=\mathrm{R}.$$

Sumándolas, se tendrá

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}=0,$$

é integrando

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=\text{cons.}^{\text{te}};$$

siendo v y v' las velocidades iniciales de los centros de las esferas, tendremos

$$mv+m'v'=\text{cons.}^{\text{te}},$$

y por consiguiente

$$(2)\quad m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=mv+m'v';$$

ecuacian que expresa, que la suma de las cantidades de movimiento permanece constante en toda la duracion del movimiento.

Choque de dos cuerpos no elásticos.

728. Si los cuerpos están desprovistos de elasticidad, caminan unidos despues del choque, animados de una velocidad comun que designaremos por u, cuyo valor vamos á encontrar.

En este caso $\frac{dx}{dt}=u$, y $\frac{dx'}{dt}=u$, y la ecuacion (2) tomará la forma

$$(3)\quad (m+m')u=mv+mv',$$

de donde

$$(4)\quad u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

Esta fórmula indica, que si los cuerpos ántes del choque van en el mismo sentido, despues del choque caminarán unidos en el mismo sentido. Si van en sentido contrario, v y v' serán de signo contrario, y la velocidad comun u, tendrá el signo de la velocidad de la esfera que tenga mayor cantidad de movimiento; y si las cantidades de movimiento de los dos cuerpos son iguales, $u=0$, y los dos quedan en reposo despues del choque.

La ecuacion (3) puede ponerse bajo la forma

$$m(v-u)=m'(u-v').$$

El cuerpo C ha perdido una velocidad representada por $v-u$, y una cantidad de movimiento igual á $m(v-u)$; el cuerpo C' ha ganado una velocidad representada por $u-v'$, y una cantidad de movimiento igual á $m'(u-v')$: en virtud de la ecuacion anterior, estas cantidades de movimimiento son iguales; es decir, que la cantidad de movimiento que pierde el cuerpo C, es igual á la que gana el segundo; cosa evidente por otra parte, puesto que, segun ántes hemos dicho, la suma de las cantidades de movimiento permanece constante en toda la duracion del choque.

Fuerzas vivas durante el choque.

729. Las ecuaciones (1)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{R},\quad m\frac{d^2x'}{dt^2}=\mathrm{R},$$

se verifican en toda la duracion del choque, y como contienen la reaccion R, es necesaria otra ecuacion para determinar las velocidades $\frac{dx}{dt}$, y $\frac{dx'}{dt}$, despues del choque. Multiplicando la primera por $2dx$, y la segunda por $2dx'$, sumándolas é integrando el resultado, tendremos

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)=\text{cons.}^{\text{te}}+2\int \mathrm{R}dr;$$

siendo, $r=x'-x$, la distancia de los centros de gravedad de las esferas, y por consiguiente $dr=dx'-dx$.

Determinaremos la cons.$^{\text{te}}$, contando el tiempo desde el principio del choque, y empezando á contar la integral desde este valor inicial del tiempo; entónces $\mathrm{R}=0$, por no haberse desarrollado aún las acciones moleculares que representa, y resultará

$$mv^2+m'v'^2=\text{cons.}^{\text{te}};$$

sustituyendo este valor, tendremos

$$(5)\quad m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2=mv^2+m'v'^2+2\int \mathrm{R}dr.$$

Esta ecuacion expresa, que la suma de las fuerzas vivas en una época cualquiera, es igual á esta suma tomada al principio del choque, más el duplo de la integral

Rdr, tomada desde el principio del choque. En el primer período del choque la suma de las fuerzas vivas es siempre menor que ántes del choque, porque disminuyendo en él la distancia de los centros, $dr<0$, y los elementos de la integral $\int \mathrm{R}dr$ son todos negativos en este período. En el segundo, la distancia de los centros aumenta y los elementos de la integral son todos positivos. Pero como R tiene valores menores que en el primer período, la integral $\int \mathrm{R}dr$, tomada en toda la duracion del choque es negativa. Por consiguiente, la suma de las fuerzas vivas es siempre menor que ántes del choque, y la diferencia va disminuyendo en el segundo período.

Choque de dos cuerpos perfectamente elásticos.

730. Si los cuerpos son perfectamente elásticos, los elementos de la integral $\int \mathrm{R}dr$ se destruyen dos á dos, porque la resultante R de las acciones moleculares, vuelve á tomar el mismo valor, cuando la distancia r es la misma, y los dos cuerpos pasan en el segundo período del choque, por las mismas fases que en el primero, pero en sentido inverso, siendo los dos períodos, digámoslo así, simultáneos, y los efectos producidos iguales y opuestos el uno al otro; por consiguiente, la integral tomada para toda la duracion del choque, es igual cero. En este caso, la ecuacion (5) es

$$(6) \quad m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

Podemos determinar las velocidades de los centros de gravedad de los cuerpos despues del choque; llamándolas, $V=\frac{dx}{dt}$, y $V'=\frac{dx}{dt}$, tendremos, por las ecuaciones, (2) y (6), las

$$(7)\quad mV+m'V'=mv+mv',$$

$$(8)\quad mV^2+m'V'^2=mv^2+m'v'^2;$$

que darán las velocidades V y V' despues del choque.

Para obtenerlas, escribámoslas bajo la forma

$$m(V-v)=m'(v'-V'),$$

$$m(V^2-v^2)=m'(v'^2-V'^2);$$

dividiéndolas, resulta

$$(9)\quad V+v=V'+v'.$$

De las ecuaciones (7) y (9), que son de primer grado, se deduce

$$(10)\quad V=\frac{(m-m')v+2m'v'}{m+m'},$$

$$(11)\quad V'=\frac{(m'-m')v'+2mv}{m+m'}.$$

731. Veamos las consecuencias que se deducen de estas fórmulas. Añadiendo y quitando mv en el numerador de la (10), se puede poner bajo la forma

$$V=\frac{2(mv+mv')}{m+m'}-v,$$

y siendo u la velocidad comun de los centros de gravedad, en el momento de la máxima compresion, su valor por la (4) es

$$u=\frac{mv'+m'v'}{m+m'},$$

y sustituyendo, la anterior se puede escribir como sigue:

$$V=2u-v.$$

Por una trasformacion análoga, encontraremos

$$V'=2u-v';$$

de las cuales se deduce $u=\frac{V'+v'}{2}$, y $u=\frac{V+v}{2}$. Luego la velocidad de cada cuerpo, en el instante de la máxima compresion, es el promedio de sus velocidades ántes y despues del choque.

Restando las ecuaciones anteriores, resulta

$$V'-V=v-v';$$

que nos dice, que la velocidad relativa con la que el centro de gravedad C se aleja de C', despues del choque, es igual á aquella con que se aproximaba en el instante en que se ha verificado el choque.

Casos particulares.

732. Si el cuerpo C' está en reposo, cuando choca con el cuerpo C, la velocidad $v'=0$, y si los cuerpos no son elásticos, la fórmula (4) dará la velocidad comun

$$u=\frac{mv}{m+m'}.$$

Si la masa m' es infinitamente grande con respecto á la masa m, la velocidad $u=0$; es decir, que los dos cuerpos quedan en reposo despues del choque. Esto es lo que sucede, cuando los cuerpos no elásticos caen chocando á la Tierra.

Si los cuerpos son elásticos, siendo como ántes $v'=0$ las velocidades, despues del choque, son, segun las fórmulas (10), y (11),

$$V=\frac{(m-m')v}{m+m'},\quad V'=\frac{2mv}{m+m'};$$

Si m' es infinitamente grande con respecto á m, tendremos

$$V=-v',\quad V'=0;$$

lo que nos dice, que el cuerpo chocado permanece en reposo, y el otro es reflejado en sentido contrario con una velocidad igual á aquella con que ha venido á encontrar al primero. Tal sucede cuando una esfera elástica pesada, cae de una cierta altura sobre un plano fijo horizontal, que es tambien elástico; la esfera vuelve á subir por la reaccion del plano fijo, hasta la misma altura de donde cayó.

Cuando las masas m y m' son iguales, si los cuerpos no son elásticos, su velocidad comun despues del choque, será

$$u=\frac{v+v'}{2},$$

es decir, la media aritmética entre las velocidades de los dos cuerpos ántes del choque.

Si en el mismo caso de ser $m=m'$, los cuerpos son perfectamente elásticos, las fórmulas (10) y (11), dan

$$V=v',\quad V'=v;$$

los cuerpos, en este caso, no hacen más que cambiar de velocidad. Y si uno de ellos, tal como el C' está en reposo, el otro quedará inmóvil despues del choque, y le trasmitirá su velocidad; porque, para $v'=0$, tendremos

$$V=0,\quad V'=v.$$

733. Este resultado puede verificarse por la experiencia del siguiente modo:

Dos bolas de marfil del mismo diámetro, están suspendidas á los extremos de dos hilos iguales ca, $c'b$, (fig. 310), formando un doble péndulo. Separada la bola a de su posicion de equilibrio á la posicion a', se la deja caer y viene á chocar á la bola b; siendo el marfil muy elástico hay comunicacion de movimiento de la bola a á la b; la primera queda en reposo en su primitiva posicion, y b la recorre el arco bb', con la misma velocidad que poseia la bola a'; es decir, con la velocidad debida á la altura del punto a' sobre el punto a. Por consiguiente se elevará hasta el punto b', situado á la misma altura; despues volverá á caer de la posicion b', á la posicion b, chocará con la a, quedando ella en reposo; se elevará ésta, volverá á caer, y se repetirá el fenómeno,

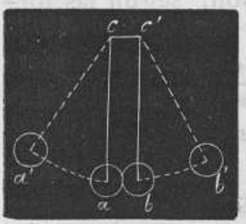

Fig. 310.

produciéndose una serie de movimientos oscilatorios de los dos péndulos, cada uno de los cuales efectúa dos semi-oscilaciones, una ascendente y otra descendente, á uno y otro lado de la vertical media del aparato.

Lo mismo sucedería si un número cualquiera de bolas de billar iguales c', c'', c''', (fig. 311), en reposo, vienen á ser chocadas por otra bola c segun la recta que une sus centros. Todas las bolas excepto la última c''', permanecerán en reposo; y ésta se moverá con la misma velocidad que tenía la primera c, en el momento del choque.

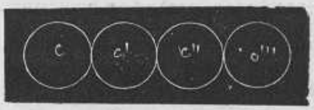

Fig. 311.

Todas estas experiencias nos dan cuenta de la propagacion del movimiento por medio de los cuerpos elásticos. La duracion del choque de dos bolas es muy pequeña y no puede apreciarse por la observacion directa. Pero, si el número de bolas intermedias es suficientemente grande, las duraciones de los choques sucesivos se acumulan, y es posible apreciar la duracion, desde que choca la primera, hasta que empieza á moverse la última.

La trasmision del sonido en los medios elásticos, de lugar á un fenómeno análogo; las moléculas de aire colocadas á lo largo de un rayo sonoro, son conmovidas sucesivamente, y cada una comunica á la molécula que le sigue, la velocidad que ha recibido de la molécula que precede. La velocidad de la propagacion de la conmocion, ó sea la velocidad del sonido, depende de la densidad y de la elasticidad del medio.

Teorema de Carnot.

734. Cuando los cuerpos son perfectamente elásticos, la suma de las fuerzas vivas no cambia por efecto del cho-

que, como aparece de la ecuacion (6). Pero si los cuerpos no son elásticos, hay pérdida de fuerza viva, y por consiguiente de trabajo, como aparece de la ecuacion (5), en la cual, la integral $\int \mathrm{R}dr$, no es nunca cero en estos cuerpos; y el teorema de Carnot tiene por objeto calcular la pérdida de fuerza viva en este caso.

Este teorema es una consecuencia inmediata del teorema de d'Alembert, extendido á las fuerzas instantáneas; y sólo es cierto cuando se prescinde del rozamiento de los cuerpos unos sobre otros, ó cuando se supone que las reacciones desarrolladas por el choque, son normales á las superficies de contacto. Segun el teorema de d'Alembert, existe el equilibrio entre las fuerzas instantáneas que actúan realmente sobre los cuerpos, las cantidades de movimiento iniciales, y las cantidades de movimiento finales tomadas en sentido contrario.

Sean m la masa de una molécula del sistema; u, u', u'' las componentes de su velocidad ántes del choque; $\mathrm{V}', \mathrm{V}'', \mathrm{V}'''$, las componentes de su velocidad despues del choque; X, Y, Z, las componentes de las fuerzas instantáneas desarrolladas por el choque; la ecuacion del teorema de d'Alembert es

$$\Sigma[(\mathrm{X}-m(\mathrm{V}'-u))\delta x+(\mathrm{Y}-m(\mathrm{V}''-u'))\delta y+$$
$$+(\mathrm{Z}-m(\mathrm{V}'''-u''))\delta z]=0;$$

esta ecuacion tiene lugar para todos los movimientos virtuales del sistema; entre los cuales, escogeremos el que coincide con el movimiento real que experimentan los puntos del sistema al fin del choque, y que se verifica con las velocidades $\mathrm{V}', \mathrm{V}'', \mathrm{V}'''$, para el cual se tendrá que

$$\delta x=\mathrm{V}'dt,\ \delta y=\mathrm{V}''dt,\ \delta z=\mathrm{V}'''dt.$$

El trinomio del trabajo, $\Sigma(\mathrm{X}\delta x+\mathrm{Y}\delta y+\mathrm{Z}\delta z)=0$, en este movimiento; porque estando la accion y la reaccion que los dos cuerpos ejercen el uno sobre el otro, dirigidas segun la normal comun á sus superficies, en el punto de contacto, el trabajo de estas fuerzas es nulo. Con estas simplificaciones y dividiendo por dt la ecuacion del equilibrio, se reduce á

$$\Sigma m[(V'-u)V'+(V''-u')V''+(V'''-u'')V''']=0,$$

ó $$\Sigma m[(V'^2+V''^2+V''')^2-(V'u+V''u'+V'''u'')]=0.$$

Designemos por v la velocidad absoluta del punto m ántes del choque, por V la velocidad del mismo punto despues del choque, y por v_1 la velocidad perdida, es decir, la velocidad que compuesta con la velocidad v da por resultante final V. Tendremos

$$v^2=u^2+u'^2+u''^2,$$

$$V^2=V'^2+V''^2+V'''^2,$$

$$v_1^2=(V'-u)^2+(V''-u')^2+(V'''-u'')^2$$

$$=(V'^2+V''^2+V'''^2)+(u^2+u'^2+u''^2)-2(V'u+V''u'+V'''u'')$$

$$=V^2+v^2-2(V'u+V''u'+V'''u'').$$

De donde

$$V'u+V''u'+V'''u''=\frac{V^2+v^2-v_1^2}{2};$$

y sustituyendo en la ecuacion, será

$$\Sigma m\left[\left(V'^2+V''^2+V'''^2\right)-\frac{V^2+v^2-v_1^2}{2}\right]=\Sigma m\left[V^2-\frac{V^2+v^2-v_1^2}{2}\right]=0,$$

ó $$\Sigma m V^2-\Sigma m v^2+\Sigma m v_1^2=0,$$

ó lo que es lo mismo

$$\Sigma m V^2=\Sigma m v^2-\Sigma m v_1^2,$$

que es la ecuacion del teorema de Carnot, y se enuncia diciendo:

Que la pérdida de fuerza viva, que ocasiona el choque, *es igual á la suma de las fuerzas vivas debidas á las velocidades perdidas*; ó lo que es lo mismo, *que la suma de las fuerzas vivas despues del choque de los cuerpos no elásticos, es igual á la suma de las fuerzas vivas ántes del choque, disminuida de la suma de las fuerzas vivas debidas á las velocidades perdidas durante el choque.*

Estando comprendidos todos los sólidos naturales entre los cuerpos no elásticos y los perfectamente elásticos, en el choque de dos sólidos naturales hay siempre una pérdida de fuerza viva, que puede calcularse por este teorema; y que será mayor ó menor, segun que los cuerpos se acerquen más á los no elásticos ó á los perfectamente elásticos. Y como una pérdida de fuerza viva representa siempre, como sabemos, una pérdida de trabajo, deben evitarse los choques en las máquinas para que no tengan lugar estas pérdidas de trabajo.

Péndulo balístico.

735. En la teoría del choque de los cuerpos está fundado el *péndulo balístico*, que es un péndulo compuesto, que se emplea para medir la velocidad inicial de los proyectiles, es decir, su velocidad al salir de la boca del cañon. Este aparato se compone esencialmente de un cuerpo blando, no elástico por consiguiente, unido á un eje horizontal; el proyectil viene á chocar con este cuerpo al salir de la pieza, y penetra en él hasta una cierta profundidad; al fin del choque, el proyectil y el péndulo forman un mismo sistema material, animado de cierta velocidad angular alrededor del eje de suspension; el péndulo se separa de la vertical en virtud de la velocidad que le comunica el proyectil, y su centro de gravedad se eleva hasta que el trabajo negativo de la gravedad destruye su fuerza viva, en este instante el pendulo llega al estremo de la semi-oscilacion ascendente, y desciende luégo en sentido contrario. Una corredera, arrastrada por el péndulo durante el movimiento ascendente, y abandonada en el punto que ocupa cuando el péndulo empieza á descender, sirve para determinar el ángulo de separacion, y por consiguiente el trabajo negativo de la gravedad; el valor absoluto de este trabajo es igual á la mitad de la fuerza viva del siste-

ma. Conocida esta fuerza viva, se deduce sucesivamente la velocidad angular inicial del péndulo, la velocidad lineal del proyectil al fin del choque, y la velocidad lineal de éste al principio del choque, que es la verdadera incógnita del problema.

Para resolverlo, sean PM (fig. 312), el cuerpo del péndulo, O su eje de suspension y G el centro de gravedad del sistema oscilatorio; la recta BA trazada en el plano medio del péndulo perpendicularmente al eje O, y un poco debajo del punto G, representa la trayectoria del proyectil, que supondremos ha penetrado hasta el punto A en la tierra que llena el cuerpo del péndulo. Designemos por v la velocidad del proyectil ántes del choque, por V la velocidad lineal que conserva despues del choque, cuando forma con el péndulo un mismo sistema material; por p el peso del proyectil; por μ el momento de inercia con respecto al eje O, y por ω la velocidad angular de la rotacion que sucede al choque, en virtud de la cual, el punto A tiene la velocidad V. La punta C arrastra la corredera á lo largo del arco CD á medida que el péndulo se aparta de su posicion de equilibrio, y la abandona en el punto D en el momento en que viniendo á ser cero su velocidad, empieza á descender. En este movimiento ascendente el centro de gravedad describe el arco GF, y se eleva verticalmente de la cantidad $GH=h$, que puede medirse.

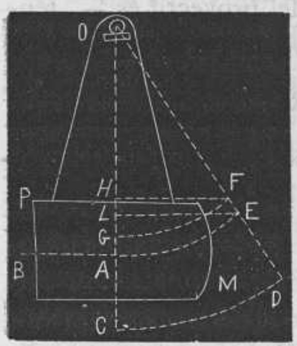

Fig. 312.

Siendo $OA=l$, $OG=a$, $COD=\alpha$, será

$$h=OG-OH=a-a\cos\alpha=a(1-\cos\alpha).$$

Representemos por R la reaccion media, desarrollada en el tiempo que dura el choque del proyectil con el péndulo, y por θ esta duracion; el impulso de la fuerza R estará representado por $R\theta$; actuando este impulso sobre el proyectil en el sentido AB, es decir, en sentido contrario al movimiento, reduce la velocidad, del valor inicial v, al valor final V. Por el teorema de las cantidades de movimiento, y teniendo presente que la masa del proyectil es $\frac{p}{g}$, tendremos

$$\frac{p}{g}(v-V)=R\theta.$$

Esta misma fuerza, actuando sobre el péndulo, le imprime un movimiento de rotacion, cuya ecuacion es

$$\omega=\frac{R\theta l}{\mu}.$$

Reemplazando $R\theta$ por su valor en la anterior, resulta

$$\mu\omega=\frac{pl}{g}(v-V);$$

de esta se deduce

$$v=V+\frac{g\mu\omega}{pl},$$

y como $V=\omega l$, tendremos

$$(a)\qquad v=\omega\times\frac{pl^2+g\mu}{pl}.$$

736. La fuerza viva del sistema, se compone de la fuerza viva $\mu\omega^2$ del péndulo, y da la fuerza viva del proyectil $\frac{p}{g}\,l^2\omega^2$; y es por consiguiente igual á

$$\left(\mu+\frac{p}{g}l^2\right)\omega^2.$$

La cual se reduce á 0, cuando el ángulo de separacion llega al valor α; entónces, el centro de gravedad del péndulo se ha elevado de la cantidad $h=a(1-\cos\alpha)$, y el centro de gravedad del proyectil de la cantidad AL, que se deduce de la proporcion $\frac{AL}{HG}=\frac{OA}{OG}=\frac{l}{a}$. El trabajo de la gravedad es por consiguiente, llamando P al peso del péndulo

$$Ph+p\times\frac{hl}{a}=h\left(P+\frac{pl}{a}\right)=a(1-\cos\alpha)\left(P+\frac{pl}{a}\right);$$

de modo, que la ecuacion del teorema de las fuerzas vivas será

$$\left(\mu+\frac{p}{g}l^2\right)\omega^2=2a(1-\cos\alpha)\left(P+\frac{pl}{a}\right);$$

ecuacion que nos dará ω; y conocida ésta, la ecuacion (a) da el valor de v, que es la incógnita del problema.

Es necesario que el proyectil hiera al péndulo en el centro de percusion correspondiente al eje O; de otro modo, este eje experimentará presiones durante el choque que podrian descomponer el aparato. Sabemos que la distancia del centro de percusion al eje es $a+\frac{K^2}{a}$, siendo a la distancia OG del centro de gravedad al eje, y K el rádio de giro, alrededor de un eje paralelo al eje O, trazado por el centro de gravedad G; es decir, que la distancia l es la longitud del péndulo simple, que oscilará en el mismo tiempo que el péndulo balístico. De esta manera, la adicion del proyectil en el punto A no alterará la duracion de las oscilaciones del péndulo. Luégo se podrá determinar empíricamente el punto A, en donde el proyectil debe dar, colocando el proyectil á diferentes alturas en el plano medio trasversal del péndulo, y haciéndole oscilar cada vez en las diversas posiciones; la posicion buscada es aquella para la cual la adicion del proyectil al péndulo, no altera la duracion de las oscilaciones.

LECCION LXI.

Movimientos vibratorios.—Movimientos vibratorios de las cuerdas. Ecuaciones de este movimiento—Su integracion.—Vibraciones trasversales.—Duracion de una vibracion.—Nodos de vibracion. —Vibraciones longitudinales.

Movimientos vibratorios.

737. Se llama vibratorio el movimiento de un punto material que oscila á uno y otro lado de su posicion de equilibrio, ejecutando un número indefinido de oscilaciones. En el núm. 709 hemos visto un ejemplo de esta clase de movimientos. Un sistema de puntos posee un movimiento vibratorio, cuando cada uno de ellos se mueve en las condiciones que acabamos de indicar para uno sólo.

Consideremos un sistema de n puntos materiales, sujetos á ciertas condiciones ó ligaduras; sean m_1 la masa, y x_1, y_1, z_1, las coordenadas de uno de ellos; x_2, y_2, z_2, las coordenadas del punto de masa m_2; y en general x_n, y_n, z_n, las coordenadas del de masa m_n; X_1, Y_1, Z_1, las componentes de la fuerza que actúa sobre el primero, X_2, Y_2, Z_2 las de la que actúa sobre el segundo, y X_n, Y_n, Z_n las de la que actúa sobre el enesimo. Las ligaduras las supondremos expresadas por las k ecuaciones de condicion

$$(1) \quad L_1=0,\ L_2=0,\ L_3=0, \ldots.. L_k=0.$$

Las fuerzas X, Y, Z las supondremos expresadas por funciones de las coordenadas x, y, z de los diferentes puntos, independientemente del tiempo y de las velocidades.

La ecuacion general del movimiento del sistema es, como sabemos, segun el teorema de d'Alembert.

$$(2)\quad \Sigma_{i=1}^{i=n}\left[\left(X_i - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \right.$$
$$\left. + \left(Z_i - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i\right] = 0;$$

debiendo las variaciones δ satisfacer á las ecuaciones de condicion

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{dL_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL_1}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dL_1}{dz_1} + \frac{dL_1}{dx_2}\delta x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ \frac{dL_2}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL_2}{dy_1}\delta y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \frac{dL_3}{dx_1}\delta x_1 + + \frac{dL_3}{dy_1}\delta y_1 + \ldots\ldots\ldots = 0, \\ \vdots \\ \frac{dL_k}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL_k}{uy_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{cases}$$

738. Supongamos, que para valores particulares de las coordenadas $x_1 = d_1, y_1 = b_1, z_1 = c_1, \; x_2 = a_2, y_2 = b_2, z_2 = c_2, \ldots\ldots x_n = a_n, y_n = b_n, z_n = c_n$, esté el sistema en una posicion de equilibrio estable; las fuerzas X, Y, Z, tomarán en esta posicion ciertos valores constantes que representaremos por las letras A, B, C, afectadas de los mismos índices.

Cuando por un medio cualquiera se separa el sistema, infinitamente poco, de esta posicion de equilibrio, tenderá por sí mismo á volver á la posicion primitiva; cada punto adquirirá una pequeña velocidad de sentido contrario á la que se le imprimió, en virtud de la cual, cada punto pasará, en sentido contrario, más allá de la posicion de equilibrio; volverá á la posicion primera, pasará más allá, volverá y así sucesivamente. Tal será el movimiento oscilatorio del sistema.

Su estudio, que será más ó ménos complicado, se hará en general por medio de las ecuaciones (1), (2) y (3), que acabamos de establecer; pero nosotros sólo vamos á examinar algunos casos particulares de este problema.

Movimientos vibratorios de las cuerdas. Ecuaciones de este movimiento.

Las cuerdas de piano, de violin, de guitarra, etc., ejecutan vibraciones, alrededor de sus posiciones de equilibrio, cuando por un medio cualquiera se las separa de estas posiciones. Vamos á estudiar estos movimientos vibratorios de las cuerdas.

739. Sea OA (fig. 313), una cuerda homogénea perfectamente flexible, elástica y un poco estensible, de diámetro constante y muy pequeño, de longitud l, extendida en línea recta del punto fijo O al punto fijo A, por una fuerza equivalente á un peso P, que desarrolla en ella la tension T_0.

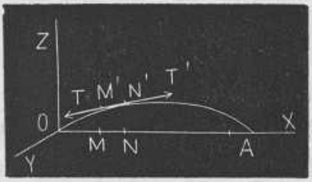

Fig. 313.

Prescindiremos de su peso con relacion á P, y por consiguiente afectará la forma de una recta ONA en su posicion de equilibrio. Supongamos que se la separa un poco de la posicion de equilibrio ONA, imprimiendo al mismo tiempo á todos sus puntos pequeñas velocidades, entónces la cuerda vibrará alrededor de su posicion de equilibrio OA; se trata de determinar la posicion y la velocidad de cada uno de sus puntos en un instante cualquiera.

Sea OM'A la curva plana ó alaveada que representa la forma de la cuerda en una época cualquiera; tomemos tres ejes rectangulares, OX en la direccion OA de la cuerda en equilibrio, OY y OZ perpendiculares á él. Las coordenadas de un punto material M son en el estado de equilibrio, x, 0, 0; y en estado de movimiento $x+u, y$, z; siendo los movimientos de la cuerda muy pequeños, u, y, z tienen siempre valores muy pequeños, y son funciones del tiempo t y de x. El problema se reduce á encontrar los valores de u, y, z, en funcion de estas variables independientes.

Sea $M'N'=ds$ el elemento de la cuerda, que corresponde en la posicion de equilibrio al elemento $MN=dx$; existe una relacion muy sencilla entre dx y ds, que expresa, que MN y M'N' tienen la misma masa. Sea p el peso de toda la cuerda, l su longitud, ρ su densidad en el punto M, y ω la seccion normal constante; se tendrá que $\rho\omega ds$ es la masa de M'N', y la de MN es $\frac{p}{gl}dx$, luego será

$$(1) \quad \rho\omega ds = \frac{p}{gl}dx.$$

Las fuerzas que actúan sobre un elemento M'N' de la cuerda, son las fuerzas exteriores y las tensiones. Sean X, Y, Z las componentes, por unidad de masa, de las fuerzas exteriores para cada porcion de la cuerda; T y T' las tensiones que actúan tangencialmente en los extremos del elemento M'N', dependientes del aumento de longitud que ha sufrido este elemento; m la masa del elemento M'N', T la tension en M', dirigida en el sentido N'M'; T' la tension en N' dirigida en el sentido M'N'; α, β, γ los ángulos de T con los ejes coordenados; α', β', γ', los ángulos de T' con los mismos ejes.

Las ecuaciones del movimiento son por consiguiente:

$$(2) \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2u}{dt^2} = mX + T'\cos\alpha' - T\cos\alpha, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mY + T'\cos\beta' - T\cos\beta, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = mZ + T'\cos\gamma' - T\cos\gamma; \end{cases}$$

que vamos á trasformar en otras, que no contengan más que X, Y, Z, u, y, z, y las variables independientes x y t.

740. Los ángulos α y α' son muy pequeños y sus cosenos son casi iguales á la unidad; la diferencia T′—T viene á ser la diferencial de T con respecto á x; de suerte, que teniendo presente que $m=\frac{p}{gl}dx$, la primera ecuacion toma la forma

$$\frac{p}{gl}dx\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{p}{gl}dx\mathrm{X}+\frac{d\mathrm{T}}{dx}dx,$$

ó
$$\frac{d^2u}{dt^2}=\mathrm{X}+\frac{gl}{p}\,\frac{d\mathrm{T}}{dx}.$$

Por medio de la fórmula del núm. 543.

$$\mathrm{T}=\mathrm{E}\omega\frac{i}{l},$$

podemos eliminar T de la ecuacion anterior. Para otra tension T_0 se tendrá, siendo i_0 el aumento de longitud

$$\mathrm{T}_0=\mathrm{E}\omega\,\frac{i_0}{l}\,;$$

de las cuales se deduce restando

$$\mathrm{T}-\mathrm{T}_0=\mathrm{E}\omega\frac{i-i_0}{l}.$$

En esta ecuacion vemos que la relacion entre el incremento de la tension $\mathrm{T}-\mathrm{T}_0$, y el incremento de la longitud $\frac{i-i_0}{l}$, es constante é igual á Eω.

El incremento total del elemento MN es igual á $\frac{du}{dx}dx$, y el incremento proporcional del mismo elemento es igual á $\frac{du}{dx}$, de suerte, que

$$\mathrm{T}-\mathrm{T}_0=\mathrm{E}\omega\frac{du}{dx};$$

de donde
$$\mathrm{T}=\mathrm{T}_0+\mathrm{E}\omega\frac{du}{dx};$$

que diferenciada con relacion á x, y multiplicada por $\frac{gl}{p}$, dará

$$\frac{gl}{p}\frac{d\mathrm{T}}{dx}=\frac{gl}{p}\,\mathrm{E}\omega\,\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Y la ecuacion primera de las (2) toma la forma

$$\frac{d^2u}{dt^2}=X+\frac{glE\omega}{p}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

741. La segunda de dichas ecuaciones

$$m\frac{dy^2}{dt^2}=mY+T'\cos\theta'-T\cos\theta$$

puede ponerse bajo la forma

$$\frac{p}{gl}dx\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{p}{gl}dxY+\frac{d}{dx}(T\cos\theta)\,dx,$$

ó bien

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\frac{gl}{p}\frac{d}{dx}(T\cos\theta).$$

Hemos encontrado

$$T=T_0+E\omega\frac{du}{dx};$$

pero cos θ es igual á la diferencia de las ordenadas de N′ y M′, dividida por la distancia M′N′ de estos dos puntos, es decir

$$\cos\theta=\frac{\frac{dy}{dx}dx}{dx+\frac{du}{dx}dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{1+\frac{du}{dx}}$$

y multiplicando por la anterior, resulta

$$T\cos\theta=T_0\frac{\frac{dy}{dx}}{1+\frac{du}{dx}}+E\omega\frac{\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}}{1+\frac{du}{dx}},$$

ecuacion que puede simplificarse observando, que $\frac{du}{dx}$ se puede despreciar con respecto á la unidad, y que $\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}$ es infinitamente pequeño de segundo órden, y entónces la ecuacion se reduce á

$$T\cos\theta=T_0\frac{dy}{dx};$$

luego

$$\frac{d}{dx}(T\cos\theta)=T_0\frac{d^2y}{dx^2},$$

y tendremos la ecuacion

$$\frac{d^2 y}{dt^2}=Y+\frac{gl}{p}T_0\frac{d^2 y}{dx}.$$

Del mismo modo obtendríamos la tercera ecuacion

$$\frac{d^2 z}{dt^2}=Z+\frac{gl}{p}T_0\frac{d^2 z}{dx^2}.$$

742. Las tres ecuaciones del movimiento son

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}=X+\dfrac{gl}{p}E\omega\dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=Y+\dfrac{gl}{p}T_0\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=Z+\dfrac{gl}{p}T_0\dfrac{d^2z}{dx^2}; \end{cases}$$

bajo cuya forma se ve, que los movimientos proyectados sobre los tres ejes, son independientes los unos de los otros.

Las ecuaciones del problema son ecuaciones lineales de segundo órden, con derivadas parciales; la integracion es posible cuando las fuerzas X, Y, Z son constantes, lo que tiene lugar, cuando la cuerda sólo está solicitada por su propio peso.

Si la cuerda no estuviera extendida horizontalmente, supondremos que la vertical forma con los ejes los ángulos dados λ, μ, ν, y tendremos

$$X=g\cos\lambda,$$
$$Y=g\cos\mu,$$
$$Z=g\cos\nu;$$

y habrá que integrar una ecuacion de la forma

$$(4)\quad \frac{d^2u}{dt^2}=A+B\frac{d^2u}{dx^2},$$

siendo A y B cantidades constantes.

Sea $u=f(x)$ una solucion particular, independiente del tiempo t, de la ecuacion (4), que queremos integrar; de suerte, que se tenga

$$B\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+A=0.$$

Cambiaremos de variable, haciendo

$$u = f(x) + u',$$

que diferenciada, da

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{d^2 u'}{dx^2},$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u'}{dx^2};$$

por consiguiente, sustituyendo estos valores en la ecuacion (4), resulta

$$\frac{d^2 u'}{dt^2} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2 u'}{dx^2},$$

y como $\mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{d^2(x)}{dx^2} = 0$, será

$$(5) \qquad \frac{d^2 u'}{dt^2} = \mathrm{B}\frac{d^2 u'}{dx^2},$$

ecuacion de la misma forma que la (4), pero sin el término independiente. Es de notar que $u = f(x)$, es la ecuacion de equilibrio de la cuerda solicitada por la fuerza A; porque la aceleracion $\frac{d^2 u}{dt^2}$ es nula para todos los puntos de la cuerda, cuando ésta ocupa la posicion de equilibrio; de suerte, que u' es la porcion de la ordenada u que varía con el tiempo t; medida esta porcion á contar desde la posicion de equilibrio; luego las fuerzas constantes en nada modifican el movimiento de la cuerda.

743. La ecuacion diferencial

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

se integra resolviendo la ecuacion de segundo grado

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}r^2 = 0,$$

que resulta da

$$r = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}\sqrt{-1};$$

y por consiguiente la integral de dicha ecuacion es

$$u = \mathrm{C}e^{+y\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}\sqrt{-1}} + \mathrm{C}'e^{-y\sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}\sqrt{-1}}.$$

Si A y B son del mismo signo, las esponenciales imaginarias se trasforman en senos y cosenos.

Del mismo modo encontraríamos z é y. En las aplicaciones á las cuerdas vibrantes, las componentes X, Y, Z, de la gravedad son muy pequeñas con respecto á los coeficientes $\frac{gl}{p}E\omega$, $\frac{gl}{p}T_0$, y como no cambian en nada las leyes de las vibraciones de las cuerdas, podemos prescindir de ellas, y las ecuaciones del movimiento de la cuerda son

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}=\dfrac{gl}{p}E\omega\dfrac{d^2u}{dx^2}=a^2\dfrac{d^2u}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{gl}{p}T_0\dfrac{d^2y}{dt^2}=b^2\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=b^2\dfrac{d^2z}{dx^2}; \end{cases}$$

siendo $a^2=\frac{gl}{p}E\omega$, y $b^2=\frac{gl}{p}T_0$. Segun estas ecuaciones u, y, z, deben contarse desde posicion de equilibrio que tomaria la cuerda por la accion de la gravedad, si su movimiento se redujera á cero.

744. Las vibraciones que se producen segun OX, se llaman longitudinales, y las paralelas á los ejes OY y OZ se llaman vibraciones trasversales. Como las ecuaciones en y, y en z, son de la misma forma, las vibraciones trasversales son las mismas paralelamente á OY, que paralelamente á OZ; bastará pues integrar cualquiera de las últimas ecuaciones (6) para obtenerlas.

Vibraciones trasversales.

745. Para determinar las vibraciones trasversales tenemos que integrar la ecuacion con diferenciales parciales

$$\frac{d^2y}{dt^2}=b^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

la cual tiene por integral general

$$(7)\quad y=\varphi(x+bt)+\psi(x-bt);$$

como se prueba fácilmente diferenciando sucesivamente la funcion y con respecto á las variables t y x.

746. Las funciones φ y ψ son dos funciones enteramente arbitrarias, que vamos á determinar. Para conseguirlo, es preciso conocer, para $t=0$, la curva formada por la cuerda y la componente de la velocidad de cada punto paralela al eje de las y.

Sean para $t=0$,

$$(8)\quad y=f(x),\quad \frac{dy}{dx}=f_1(x);$$

introduciendo esta hipótesis en la ecuacion (7), y en su derivada con relacion á t, resulta

$$(9)\quad \begin{cases} f(x)=\varphi(x)+\psi(x) \\ f_1(x)=b[\varphi'(x)-\psi'(x)]; \end{cases}$$

de la última de las (9), se deduce

$$\varphi'(x)-\psi'(x)=\frac{f_1(x)}{b};$$

que integrada con relacion á x, y haciendo para abreviar

$$(10)\quad \frac{1}{b}\int f_1(x)dx=\mathrm{F}(x),$$

será

$$(11)\quad \varphi(x)-\psi(x)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}.$$

De la primera de las ecuaciones (9) y de la (11) se deducen

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}], \\ \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-(\mathrm{F}(x)+\mathrm{C})]. \end{cases}$$

Poniendo en vez de x, $x+bt$ en $\varphi(x)$, y $x-bt$ en $\psi(x)$, y sumando despues las dos funciones, obtendremos el valor de y, sin la constante C.

747. Conviene observar, que por las dos ecuaciones (12), las funciones φ y ψ no son conocidas como $f(x)$ y $\mathrm{F}(x)$, más que para los valores de la variable x com-

prendidos entre 0 y l; y debemos conocerlos más allá de estos límites, porque debiendo poner por $x, x+bt$ y $x-bt$, estas nuevas variables podrán exceder á los límites 0 y l, porque el tiempo t puede crecer indefinidamente. Para determinar las funciones φ y ψ para valores de x, no comprendidos entre estos límites, vamos á expresar que los puntos O y A son fijos.

Para el punto O (0, 0, 0), tendremos, cualquiera que sea el valor de t,

$$\varphi(bt)+\psi(-bt)=0.$$

Haciendo $bt=z'$, esta condicion se reduce á

$$(13)\quad \varphi(z')+\psi(-z')=0.$$

Para el punto A tendremos, para un tiempo cualquiera,

$$(14)\quad \varphi(z'+l)+\psi(l-z')=0.$$

Las funciones $\varphi(z')$ y $\psi(z')$, son conocidas para los valores de $z'=bt$, comprendidos entre 0 y l, la última ecuacion da

$$\varphi(l+z')=-\psi(l-z');$$

$\psi(l-z')$ es conocido para los valores de z' comprendidos entre 0 y l, pues $l-z'$ se encuentra entre estos límites; luego $\varphi(l+z')$ será tambien conocida para los mismos valores de z'. Por consiguiente, si hacemos para abreviar $l+z'=z''$, $\varphi(z'')$ será conocida para los valores de z'' comprendidos entre l y $2l$; y la funcion φ será conocida para todos los valores comprendidos entre 0 y $2l$.

748. Si en la ecuacion (14) ponemos en vez de z', $z'+l$, se reduce á

$$\varphi(2l+z')+\psi(-z')=0;$$

y restando de esta la (13), resulta

$$\varphi(2l+z')=\varphi(z').$$

Luego la funcion $\varphi(z')$ es periódica, y tiene por período $2l$; y como se conoce esta funcion para todos los valores de la variable, comprendidos entre 0 y $2l$, será conocida para todos los valores de z' positivos ó negativos.

La otra funcion ψ está determinada por la ecuacion (13), que da

$$\psi(-z')=-\varphi(z');$$

es periódica como la primera, y su período es tambien $2l$. En efecto, la ecuacion anterior da

$$\varphi(2l+z')+\psi(-2l-z')=0,$$

y como $\varphi(2l+z')=\varphi(z')=-\psi(z')$, resulta

$$\psi(-z')=\psi(-2l-z'),$$

y poniendo $-2l-z'=z''$ se tiene la funcion periódica

$$\psi(2l+z'')=\psi(z'').$$

Resulta de esta discusion, que cuando bz aumenta en la cantidad $2l$, ó t en $\frac{2l}{b}$, la ordenada y vuelve á tomar el mismo valor, lo mismo que la velocidad $\frac{dy}{dt}$. Lo mismo sucede á z y á $\frac{dz}{dt}$. Luego la cuerda ejecuta una serie de vibraciones todas iguales é isocronas, cuya duracion es $\frac{2l}{b}$.

749. Suponiendo los puntos O y A absolutamente fijos, y prescindiendo de la resistencia del aire, la cuerda ejecutará una serie indefinida de oscilaciones de esta clase. Pero la resistencia del aire y la comunicacion de una parte del movimiento de la cuerda á los puntos fijos O y A, disminuirá gradualmente la amplitud de las vibraciones, concluyendo por aniquilarlas, sin alterar sensiblemente su isocronismo. Este último hecho, análogo al que tiene lugar en el péndulo simple, puede demostrarse por el cálculo y comprobarse por la experiencia.

Duracion de una vibracion.

750. La duracion T de una vibracion de la cuerda, se obtiene contando el número n, de las que ejecuta en la

unidad de tiempo; tenemos

$$T=\frac{2l}{b},\quad n=\frac{1}{T}=\frac{b}{2l};$$

pero $b^2=\frac{gl}{p}T_0$, luego

$$n=\frac{\sqrt{\frac{gl}{p}T_0}}{2l}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{gT_0}{pl}}.$$

La cuerda, en su movimiento, comunica sus vibraciones al aire, que ejecuta entónces el mismo número de vibraciones en igual tiempo. El sonido producido tiene por medida n; y es tanto más elevado, cuanto mayor es el número de vibraciones que la cuerda ejecuta en un tiempo dado.

Este número es independiente de la amplitud de las vibraciones, de la forma inicial de la cuerda, y del modo de hacerla vibrar.

Para una misma cuerda, este número es proporcional á la raíz cuadrada de la tension T_0; para cuerdas de la misma materia y del mismo grueso, siendo el peso p proporcional á la longitud l, los números de vibraciones están en razon inversa de las longitudes; y para cuerdas de igual longitud é igualmente tensas, n está en razon inversa de las raíces cuadradas de los pesos. Todas estas leyes son confirmadas por la experiencia.

Nodos de vibracion.

751. En algunos casos la cuerda, por razon de su estado inicial, se divide espontáneamente en un cierto número de partes iguales, que vibran unísonas, y cuyos puntos de separacion llamados *nodos*, permanecen inmóviles en toda la duracion del movimiento. Entónces el sonido se eleva proporcionalmente al número de estas partes, como vamos á ver. Siendo dadas la tension y las dimensiones de la cuerda, se puede disponer de su forma y

de la velocidad inicial de cada uno de sus puntos, de suerte, que su movimiento esté representado por la cuacion $y=\theta X$, siendo θ funcion de t, y X una funcion de x sola. En efecto la ecuacion

$$\frac{d^2y}{dt^2}=b^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

se verificará haciendo

$$(15)\quad \frac{1}{X}\frac{dX}{dx^2}=\frac{1}{b^2}\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Como el primer miembro es solo funcion de x, y el segundo de t, esta ecuacion no puede existir si los dos miembros no se reducen á una misma constante $-K^2$. Luego tendremos

$$(16)\quad \frac{d^2X}{dx^2}+K^2X=0,$$

que tendrá por integral particular

$$(17)\quad X=\text{sen}\,Kx.$$

Despues se determina la funcion θ por la ecuacion

$$(18)\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+b^2K^2.\,{}^2\theta=0,$$

de la que integrando se deduce

$$\theta=C\cos bKt+C'\text{sen}\,bKt,$$

y por consiguiente, la relacion $y=\theta X$ se convierte en

$$y=\text{sen}\,Kx(C\cos bKt+C'\text{sen}\,bKt).$$

Haciendo $t=0$, tendremos la forma inicial de la cuerda representada por la ecuacion

$$(19)\quad r=C\,\text{sen}\,Kx;$$

tambien podemos hacer que la velocidad inicial sea nula, suponiendo nula la constante C′; entónces el movimiento de la cuerda está representado por

$$(20)\quad y=C\,\text{sen}\,Kx\cos bKt.$$

Ademas debemos expresar que los puntos O y A permanecen siempre fijos; en el primero para $x=0$, será $y=0$, cualquiera que sea t; mas en el segundo en que $x=l$, para que sea $y=0$, es necesario que $Kl=m\pi$, siendo m un número entero cualquiera; de esta relacion sale $K=\frac{m\pi}{l}$, y la ecuacion del movimiento de la cuerda es, sustituyendo,

$$(21) \quad y=C\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi bt}{l}.$$

De modo, que la cuerda, que sin velocidad inicial, tiene la forma de la curva $y=C\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}$, si se la abandona á sí misma, efectuará una serie indefinida de vibraciones isocronas, cuya ley expresa la ecuacion (21).

752. Se sabe que y debe ser una funcion periódica del tiempo. En efecto, en cada ecuacion y toma el mismo valor, cuando t aumenta en la cantidad $\frac{1}{m}\cdot\frac{2l}{b}$. En este ejemplo y, y $\frac{dy}{dx}$, tienen los mismos valores cuando el tiempo aumenta en el período $\frac{1}{m}\frac{2l}{b}$, y el número de vibraciones efectuadas en la unidad de tiempo es $m\frac{b}{2l}$, es decir, m veces el que corresponde al sonido más grave de la cuerda, determinado por la teoría general.

753. Vamos á demostrar que en este caso la cuerda se divide espontáneamente en m partes iguales, que vibran como si estuvieran separadas, de suerte, que hay $m-1$ nodos de vibracion. En efecto, se obtendrán todos los puntos que permanecen inmóviles en toda la duracion del movimiento, haciendo $y=0$, lo que exige que

$$\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}=0, \text{ ó } x=\frac{i}{m}l,$$

siendo i un número entero cualquiera menor que m. Entónces $y=0$, para

$$x=0, \frac{1}{m}, \frac{2l}{m}, \frac{3l}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}l, l,$$

cualquiera que sea t.

Sin considerar un ejemplo particular, hubiéramos podido escoger las funciones $f(x)$ y $f_1(x)$, de suerte, que $\varphi(z')$ y $\psi(z')$ vuelvan á ser las mismas, no sólo cuando z' crece de $2l$, sino cuando esta variable crece en un submúltiplo cualquiera $\frac{2l}{m}$, de $2l$; y obtendremos como ántes comprobada la existencia de $m-1$ nodos de vibracion.

Vibraciones longitudinales.

754. El movimiento longitudinal de la cuerda, es decir, en el sentido del eje OX, está dado por la ecuacion

$$\frac{du^2}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

que tiene la misma forma que la ecuacion de las vibraciones trasversales

$$\frac{d^2y}{dt^2}=l^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

y se resuelve del mismo modo.

Resulta, pues, que si designamos por n' el número de vibraciones longitudinales efectuadas en la unidad de tiempo, tendremos (750)

$$n'=\frac{a}{2l},$$

y por ser

$$a=\sqrt{\frac{gl\mathrm{E}\omega}{p}},$$

resultará

$$(22)\qquad n'=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g\mathrm{E}\omega}{pl}};$$

luego se tendrá

$$(23)\qquad \frac{n}{n'}=\sqrt{\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}\omega}}.$$

La cantidad $\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}\omega}$ es una cantidad muy pequeña; porque de la ecuacion

$$(24)\qquad \mathrm{T}-\mathrm{T}_0=\mathrm{E}\omega\frac{ds-dx}{dx},$$

en la que $E\omega$ es el incremento de la tension que habrá que dar á la cuerda, para doblar la longitud de cada elemento; pues haciendo $ds=2dx$, tendremos $T-T_0=E\omega$. Luego la cantidad constante $E\omega$, es mucho mayor que T_0; y por lo tanto $\frac{n}{n'}$ es muy pequeña: por consiguiente, de los dos sonidos más graves dados por una misma cuerda, el que corresponde á las vibraciones longitudinales es mucho más agudo.

755. Tambien tendremos la fórmula,

$$\frac{n}{n'}=\sqrt{\frac{\lambda}{l}},$$

siendo l la longitud de la cuerda cuya tension es T_0, y λ el aumento de longitud que produce un aumento de tension igual á T_0; lo cual se deduce de la ecuacion (24), hahaciendo $T=2T_0$, y observando que los aumentos de longitud λ, y $ds-dx$, de l y dx, son proporcionales á estas longitudes; y se tiene $\frac{T_0}{E\omega}=\frac{\lambda}{l}$, y como λ es muy pequeña con relacion á l, tambien $\frac{T}{E\omega}$ es muy pequeña.

HIDROSTÁTICA

LECCION LXII.

Mecánica de flúidos.—Constitucion molecular de los flúidos.— Qué se entiende por presion en el interior de un flúido.— Teorema fundamental de la Mecánica de flúidos.—Distribucion de las presiones en una masa flúida en equilibrio, sometida á la accion de fuerzas exteriores dadas.—Principio de la trasmision de las presiones.—Presiones en los líquidos pesados.— Presiones en un flúido sometido á fuerzas cualesquiera.

Mecánica de flúidos.

756. Las leyes generales de la Mecánica son aplicables á todos los sistemas materiales, cualquiera que sea la manera como estén agrupadas sus moléculas; por consiguiente, á los cuerpos líquidos y gaseosos que sólo difieren de los sólidos por su constitucion molecular. Los líquidos y los gases se designan colectivamente con el nombre de flúidos.

La Mecánica de flúidos tiene por objeto el estudio de las leyes del equilibrio y movimiento de los flúidos. Ya dijimos que tiene, como la Mecánica de sólidos, dos partes, Hidrostática é Hidrodinámica; la primera trata del estudio de las leyes de equilibrio de los flúidos y la segunda de las leyes de su movimiento.

Constitucion molecular de los flúidos.

757. Los cuerpos en la naturaleza se presentan, como dijimos en la primera leccion, en tres estados, solido, líquido y gaseoso, dependientes de las condiciones de temperatura y presion en que se encuentran. Para explicar la constitucion molecular de los cuerpos, se admite que sobre sus moléculas obran dos fuerzas; la atraccion molecular, y la fuerza repulsiva debida al calor. Si predomina la atraccion molecular, los cuerpos se presentan en estado sólido, tienen forma definida, y es necesario un esfuerzo más ó ménos grande, para separar sus moléculas. Si la atraccion molecular es muy poco superior á la fuerza repulsiva, los cuerpos se presentan en estado líquido, no tienen forma definida y toman las de las vasijas que los contienen, siendo necesario muy pequeño esfuerzo para separar sus moléculas unas de otras. Si predomina, por el contario, la fuerza repulsiva, los cuerpos se presentan al estado gaseoso, no tienen forma definida, sus moléculas están en un estado constante de repulsion y tiende á ocupar todo el espacio que se les presenta.

Todos los cuerpos toman los tres estados que acabamos de definir, cuando se les coloca en condiciones convenientes de temperatura y presion.

Hasta últimos del año 1877 no se habia conseguido liquidar algunos gases, los cuales se llamaban gases permanentes; que eran el oxígeno, el hidrógeno, el ázoe, el aire atmosférico, el óxido de carbono y el bióxido de ázoe. Mas en el mes de Diciembre de dicho año dos físicos, llamados M. Cailletet y M. Pictet, francés el primero y suizo el segundo, lograron liquidar dichos gases, casi al mismo tiempo, sometiéndolos, por procedimientos algo distintos, á presiones enormes, de centenares de atmósferas, y á una temperatura muy baja. Se llaman *vapores* los gases que están á una temperatura próxima á la en que se verifica su cambio de estado.

758. Los líquidos y los gases se distinguen por su compresibilidad, es decir, por la mayor ó menor facilidad con que se les puede hacer disminuir de volúmen. Los líquidos son casi incompresibles, ó son muy poco compresibles, siendo necesarios los esfuerzos más enérgicos, para hacerles ocupar un volúmen menor. Durante mucho tiempo se les ha tenido por absolutamente incompresibles; pero por medio del aparato llamado *Piezómetro*, se ha demostrado experimentalmente, que todos son compresibles; y tambien se han determinado los coeficientes de compresibilidad de los diversos líquidos, coeficientes que están expresados por números sumamente pequeños. Teóricamente se reconoce tambien su compresibilidad, porque todos pueden trasmitir las vibraciones sonoras, lo que prueba su elastidad y porosidad, y que son susceptibles de sufrir pequeñas compresiones y dilataciones. Su dilatabilidad es, por consiguiente, muy pequeña.

Los gases, por el contrario, son muy compresibles y muy dilatables, obedeciendo, en sus cambios de volúmen, á las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac.

Si el volúmen de una masa gaseosa es igual á 1, bajo una presion tambien igual 1, la misma masa ocupará un volúmen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}$, cuando la presion sea 2, 3...n; y cuando la presion sea $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}$, el volúmen que ocupará la masa gaseosa será 2, 3,....n; en otros términos, *el volúmen que ocupa una masa gaseosa está en razon inversa de la presion que soporta*. Tal es la ley de Mariotte, la cual supone que la temperatura es constante. Cuando cambia la temperatura, es preciso tener en cúenta la ley de Gay-Lussac, que consiste, en que *el aumento de volúmen que experimentan todos los gases por un mismo aumento de temperatura es constante*. Se llama coeficiente de dilatacion de los gases, el aumento de volúmen que experimenta la unidad de volúmen de un gas, cuando su temperatura se eleva de 0^0 á 1^0. Se designa por α, y su valor es $\alpha = 0{,}00\ 367$.

Las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac se demuestran por la experiencia, y se representan analíticamente por la fórmula.

$$(1) \quad HV = K(1 + \alpha t);$$

en la cual, H representa la presion á que está sometida la masa gaseosa, V el volúmen que ocupa, α el coeficiente de dilatacion, y t la temperatura.

Estas leyes no son rigurosamente exactas, siendo tanto más aproximadas á la verdad, cuanto más léjos se encuentran los gases de la temperatura y presion á que cambian de estado.

759. El cambio de estado de un gas tiene lugar cuando la presion H es una funcion determinada de la temperatura t. Sea

$$(2) \quad H = f(t),$$

la ecuacion que expresa las condiciones del cambio de estado; la ecuacion (1) no será aplicable más que para los valores de las variables que correspondan al estado gaseoso, ó sea para los que satisfagan á la condicion $H < f(t)$.

Podemos expresar gráficamente esta condicion; sean OT y OH (fig. 314), dos ejes rectangulares, tomemos OT por eje de las temperaturas, y OH por eje de las presiones. Apliquemos la ecuacion (1) á una masa de gas cuyo peso sea igual á la unidad, el peso específico P del gas, está en razon inversa de su volúmen V; porque el producto PV es igual al peso total del gas que permanece constante é igual á la unidad durante toda la serie de experiencias; luego podremos reemplazar HV, por $\frac{H}{P}$, y escribir la ecuacion (1) como sigue:

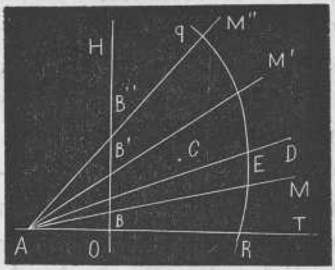

Fig. 314.

$$(3)\quad \frac{H}{P} = K(1 + \alpha t).$$

Dada esta forma á la ecuacion (1), si damos á P un valor arbitrario, la ecuacion (3) representa una recta AM, que corta al eje OT en el punto A, dado por la relacion $1 + \alpha t = 0$, correspondiente á $H = 0$, y al eje OH en el punto B para el cual $H = PK$, correspondiente á $t = 0$. Haciendo variar á P, se tendrán para los diferentes valores de esta cantidad, rectas AM, AM′, AM″,.... que pasan todas por el punto A, y cuyas ordenadas en el orígen serán OB, OB′ OB″, proporcionales á los valores sucesivos de P.

Construyendo la curva que representa la ecuacion $H = f(t)$ del cambio de estado, obtendremos una curva QR, que define el estado de saturacion del vapor, es decir, la curva del paso del estado gaseoso al estado líquido. Para todo punto C, tomado á la izquierda de esta curva, se tiene $H > f(t)$, y el flúido está en estado líquido; para un punto D tomado á la derecha de la curva, $H < f(t)$, el flúido está en estado gaseoso, y sólo entónces es aplicable la ecuacion (1), ó su equivalente la ecuacion (3). Esta ecuacion no es aplicable más que á los valores simultáneos de H y t, que satisfagan, como ántes hemos dicho, á la condicion $H < f(t)$; la cual sólo se verifica en la region situada á la derecha de la curva QR.

Para los gases, que hasta aquí se han llamado permanentes, las curvas QR que limitan la aplicacion de las leyes de Mariotte y de Gay-Lussac, están muy cerca del punto A; este punto corresponde á una temperatura de —273° cintígrados, como veremos más adelante, y en las experiencias ordinarias rara vez la temperatura es inferior á—50°; de suerte, que sin inconveniente alguno, pueden aplicarse dichas leyes á estos gases, y tratarlos como si realmente fueran permanentes.

760. Lo que acabamos de decir, se refiere á los flúidos naturales; pero en Mecánica racional se consideran éstos, como si fueran flúidos perfectos, formados por un conjunto de moléculas materiales sin adherencia alguna entre sí, y que ceden al menor esfuerzo que tienda á separarlas unas de otras, y no se observa ninguna resistencia análoga al rozamiento, cuando una porcion de la masa flúida resbala sobre la otra. Un *líquido perfecto* es un líquido hipotético, que no presenta ninguna *viscosidad* ó adherencia entre sus moléculas, que dé lugar á un rozamiento cuando resbalan unas sobre otras, y que es ademas incompresible. Se llama gas *perfecto*, un gas sin adherencia entre sus moléculas, que sigue indefinidamente las leyes de Moriotte y de Gay-Lussac.

Qué se entiende por presion en el interior de un flúido.

761. Hemos considerado en los párrafos anteriores la presion exterior, que se ejerce sobre una masa flúida, de la cual podemos formarnos una idea exacta, suponiendo la masa encerrada en una vasija, que tenga sólo movible una pared, la cual será empujada hácia fuera por la accion del flúido; y para mantenerla en equilibrio, habrá que aplicarle una cierta fuerza, que medirá la presion sufrida por la masa flúida. Trazando una superficie infinitamente pequeña, sobre la envolvente de una masa flúida cualquiera, la presion ejercida por este elemento de superficie sobre el flúido contiguo es igual y contraria á la presion ejercida por el flúido sobre este elemento; y es

la fuerza que habria que aplicar al elemento supuesto móvil, para equilibrar la accion que el flúido ejerce sobre este elemento.

Para extender esta definicion á la presion ejercida sobre cualquier elemento de la superficie, tomada en el interior de una masa flúida, basta concebir una superficie que contenga este elemento y que divida la masa en dos partes, iguales ó desiguales; y que una de éstas se solidifique, sin que sufran alteracion ninguna las moléculas materiales que la constituyen. El elemento de superficie interior viene á ser entónces un elemento de pared, y sufre de parte del flúido que la toca una cierta presion, que no ha cambiado por la solidificacion imaginada; la presion se ejerce, por consiguiente, sobre las dos caras de este elemento, cuando las dos están en contacto con el flúido. Segun esta definicion, la presion depende á la vez de la extension de este elemento y de su direccion.

762. Podemos determinar la magnitud de la presion, que se ejerce sobre un elemento de superficie, teniendo en cuenta el agrupamiento molecular de los flúidos. Un flúido está formado de moléculas sumamente pequeñas, separadas más unas de otras por los intervalos, tambien muy pequeños, llamados poros, sobre cada una de las cuales ejercen las que la rodean acciones atractivas ó repulsivas, cuya intensidad varía con su distancia. Tomemos en el interior de un flúido un pequeño elemento de superficie plana S (fig. 315); cada molécula del flúido comprendida en este elemento, recibe ciertas acciones de las moléculas próximas situadas á un lado de esta superficie, y otras acciones de las moléculas situadas al lado opuesto. Consideremos primero las acciones que provienen de las moléculas situadas sobre la parte superior de la superficie S; sus resultantes, toma-

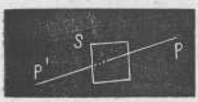

Fig. 315.

das separadamente para cada una de las moléculas, serán sensiblemente paralelas, y se compondrán en una fuerza única P, que será la presion ejercida por el líquido sobre el elemento; la resultante de las acciones de las moléculas situadas en el lado opuesto, será una fuerza P′, igual y opuesta á P; porque ya esté el flúido en reposo, ya en movimiento, habrá siempre equilibrio entre las fuerzas P y P′, en razon á la disposicion simétrica que tienen las moléculas, situadas á uno y otro lado del elemento de superficie S.

763. Definida la presion P sobre un elemento de superficie ω, tan pequeño como se quiera, con una direccion determinada, el cociente $\frac{P}{\omega}$ es la presion media del flúido sobre la unidad de superficie, en la extension del área plana S. Se llama presion de un flúido en un punto M (fig. 316), segun un plano S, el límite, ó verdadero valor p de la relacion $\frac{P}{\omega}$, cuando se reduce gradualmente la superficie ω, de modo, que siempre comprenda el punto M. Establecidas estas definiciones, vamos á establecer el siguiente principio.

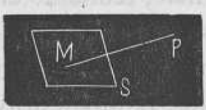

Fig. 316.

En un flúido perfecto la presion p en un punto dado M, para una direccion dada del plano S, es normal á este plano. Este principio resulta de la carencia de viscosidad del flúido; porque si la presion $pd\omega$, fuera oblícua al plano del elemento, podria descomponerse en dos componentes; una normal al plano, y otra situada en él, y ésta produciria un rozamiento ó un efecto de viscosidad, lo cual es contrario al supuesto de ser el flúido un flúido perfecto.

Teorema fundamental de la Mecánica de flúidos.

764. *En un flúido perfecto en equilibrio, la presion por unidad de superficie en un punto O, es la misma en todas las direcciones alrededor de este punto.*

La demostracion de este teorema se funda en que las presiones que experimentan las caras de un poliedro sumergido en el flúido, son del mismo órden de magnitud que estas caras, mientras que la fuerza exterior que lo solicita, es del mismo órden de magnitud que su volúmen. Tracemos en el punto O tres ejes rectangulares OX, OY, OZ, (fig. 317), y tomemos sobre estos tres ejes longitudes a=OA, b=OB, c_1=OC, infinitamente pequeñas. Podemos considerar el tetraedro material, cuyas caras son OAB, OBC, OAC, ABC, como en equilibrio bajo la accion de una fuerza exterior, tal como la gravedad, que obre sobre él, y las presiones desarrolladas sobre estas cuatro caras, presiones normales á ellas, en virtud del lema que acabamos de establecer. Sean p, p', p'', p''' las presiones medias sobre dichas caras ABC, OBC, OAC y OAB; α, β, γ, los ángulos que la normal al plano ABC forma con los mismos ejes coordenados; λ, μ, ν, los ángulos que la fuerza exterior forma con los mismos ejes. Expresaremos esta fuerza en virtud de la fórmula $F = mj$, por el producto $j \times \rho . V$, llamando ρ á la densidad ó masa específica del flúido, V al volúmen del tetraedro OABC, y j á la aceleracion que la fuerza imprimiria á la masa del tetraedro, si estuviera libre en el espacio. Del mismo modo llamando c, c', c'', c''', las áreas de las caras ABC, OBC, OAC, OAB, las presiones totales

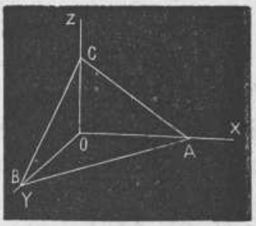

Fig. 317.

sobre dichas caras estarán representadas por los productos

$$p\times c,\ p'\times c',\ p''\times c'',\ p'''\times c''';$$

la primera, forma con los ejes los ángulos $\alpha, \beta, \gamma; p', p'', p'''$, son respectivamente paralelas á los ejes OX, OY, OZ. Proyectemos estas cinco fuerzas sobre los ejes, y establezcamos las condiciones de equilibrio $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$; tendremos

$$p\times c\cos\alpha=p'\times c'+j\times\rho.\,V\cos\lambda$$
$$p\times c\cos\beta=p''\times c''+j\times\rho.\,V\cos\mu$$
$$p\times c\cos\gamma=p'''\times c'''+j\times\rho.\,V\cos\nu.$$

Pero $ABC=c$, forma con los planos coordenados los mismos ángulos α, β, γ, que la normal á esta cara forma con los ejes, luego se tiene

$$c.\cos\alpha=c',$$
$$c.\cos\beta=c'',$$
$$c.\cos\gamma+c''',$$

dividiendo la primera ecuacion por c', la segunda por c'' y la tercera por c''', despues de sustituir, se reducirán á las siguientes

$$p=p'+j\rho\cos\lambda.\frac{V}{c'}=p'+\frac{1}{3}j\rho\cos\lambda\times a,$$
$$p=p''+j\rho\cos\mu.\frac{V}{c''}=p''+\frac{1}{3}j\rho\cos\mu\times b,$$
$$p=p'''+j\rho\cos\nu\,\frac{X}{c'''}=p'''+\frac{1}{3}j\rho\cos\nu\times c_1.$$

Estas ecúaciones son ciertas siendo a, b, c_1, tan pequeñas como se quiera; luego serán ciertas en el límite, cuando a, b, c_1, se reducen á cero; y resultará

$$p=p'=p''=p''';$$

luego la presion, por unidad de superficie del flúido en el punto O, es constante para todos los planos que pasan por dicho punto; porque puede disponerse de las relaciones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c_1}$, de manera, que el plano ABC tenga una direccion cualquiera.

765. La presion por unidad de superficie es tambien la misma en todos sentidos, alrededor de un punto tomado en el interior de un flúido perfecto en equilibrio, y no depende de la direccion del plano que se considera.

Lo mismo sucede para un flúido natural en reposo, porque las presiones en éste, son tambien normales, como supone el lema en que se funda el anterior teorema. Tambien se verifica para un flúido perfecto en movimiento: en virtud del teorema de d'Alembert, el tetraedro infinitamente pequeño se encuentra en equilibrio, en cada instante, bajo la accion de las presiones, de la fuerza exterior que le está realmente aplicada, y de la fuerza de reaccion $-mj$, del mismo órden de magnitud que la masa; por lo cual desaparece esta última, como toda fuerza exterior, cuando se reducen indefinidamente las aristas del tetraedro.

Solo en los flúidos naturales en movimiento, no es aplicable rigurosamente el teorema sobre la igualdad de presion en todos sentidos. Se le admite sin embargo como aproximado, cuidando de corregir los resultados que se obtienen al aplicarlo; lo cual complica más el difícil problema del movimiento de los flúidos, cuando se quiere tener en cuenta la viscosidad.

Distribucion de las presiones en una masa flúida en equilibrio sometida á la accion de fuerzas exteriores dadas.

766. La resolucion de este problema, que es el objeto principal de la Hidrostática, puede conseguirse por dos métodos; el uno fundado en el teorema del trabajo virtual; y el otro, fundado en la aplicacion de las ecuaciones generales del equilibrio; primero vamos á resolver el problema por el primer método, y más adelante haremos uso del segundo.

Si se ejerce una presion sobre una masa flúida, ésta se trasmite íntegra en todas direcciones. Supongamos un tubo AB (fig. 318), de seccion constante y muy pequeña, que contiene una masa flúida en equilibrio, sometida únicamente á las presiones que sobre ella ejerce la vasija, y que está cerrada por dos pistones movibles, á los que se aplican dos fuerzas normales F y F'; el equilibrio exije que la fuerza F sea igual á la presion total ejercida por el flúido sobre la superficie del piston A; y que la fuerza F' sea tambien igual á la presion total del flúido sobre la superficie del piston B; vamos á demostrar que F=F'.

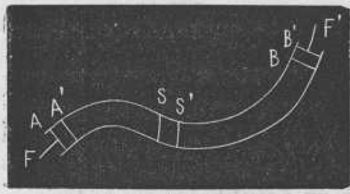

Fig. 318.

Para demostrarlo, tenemos que el sistema material formado por el flúido entre los planos A y B está en equilibrio, y por consiguiente, la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas aplicadas á sus diferentes puntos es nula para todo movimiento virtual que se le imprima; estas fuerzas son las acciones moleculares del flúido, y las presiones de las paredes que lo envuelven. Si imaginamos que todas las moléculas avanzan á lo largo del tubo de una cantidad infinitamente pequeña e=SS', los trabajos de las fuerzas interiores desaparecerán, porque este movimiento virtual no altera las posiciones relativas de las moléculas; el piston A avanzará de la cantidad AA'=e, y el piston B de la misma cantidad BB'=e. En este movimiento virtual son nulos, no solo los trabajos de las fuerzas interiores, sino tambien los trabajos de las presiones de toda la pared curva del tubo; porque estas presiones normales á su superficie, son perpendiculares á los caminos recorridos por los puntos de aplicacion. Las únicas fuerzas, cuyo trabajo no se anula, son F y F'; el de la primera es $F\times e$, y el de la segunda $-F'\times e$; la suma de estos trabajos es cero, por el teorema del trabajo virtual, luego

$$F\times e - F'\times e = 0,$$

ó

$$F = F'.$$

De manera, que la presion ejercida por el piston A se ha trasmitido íntegra al piston B, y por consiguiente, siendo iguales las presiones en la seccion A y en la seccion B, las presiones por unidad de superficie son tambien iguales en los dos extremos del tubo. Del mismo modo se veria, que la presion por unidad de superficie es la misma en una seccion S cualquiera del tubo; de suerte, que la presion es constante en toda la extension del tubo.

Principio de la trasmision de las presiones.

767. *En una masa flúida en equilibrio, sobre la cual no actúa ninguna fuerza, y que está sometida únicamente á las presiones de la vasija que la contiene, la presion por unidad de superficie es constante.*

Para demostrarlo, imaginemos en la masa flúida un tubo de seccion constante AB, que comprenda en una de sus secciones S un punto cualquiera M. En virtud del lema precedente, la presion es constante en toda la extension del tubo, y por consiguiente, la presion en el punto M es igual á la presion en A ó en B, puntos tomados arbitrariamente en la masa flúida.

768. Hemos prescindido en los párrafos anteriores del peso de los flúidos, vamos ya á resolver el problema de la distribucion de las presiones en el interior de un líquido pesado, cuya densidad ρ sea conocida.

Imaginemos un tubo sumamente delgado de seccion constante ω, que une, en el interior del líquido, dos puntos cualesquiera A y B (fig. 319), y expresemos que el líquido contenido en este tubo, entre las secciones A y B, está en equilibrio bajo la accion de las presiones P y P', que se ejercen sobre los pistones móviles A y B, y de la gravedad que solicita todas las moléculas del líquido comprendidas entre los dos pistones. Para esto demos un movimiento virtual e, á lo largo del tubo, á los dos pistones y al líquido que comprenden; las reacciones de la parte curva del tubo no producen, como en el núm. 766, ningun trabajo; la suma de los trabajos virtuales de las presiones P y P' será $Pe—P'e$, á la cual hay que añadir el trabajo de la gravedad.

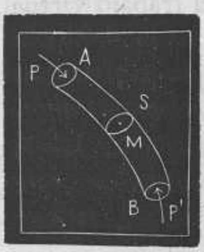

Fig. 319.

El trabajo de la gravedad es igual al producto del peso total del sistema, por el camino positivo ó negativo recorrido por su centro de gravedad. Puede tambien obtenerse este trabajo, multiplicando el peso de uno de los pequeños cilindros iguales AA' ó BB' (fig. 320), por el camino vertical que recorre el centro de gravedad de esta pequeña masa al pasar del extremo A del tubo al extremo B, ó al contrario; porque el centro de gravedad conserva la misma posicion, ya se suponga que el cilindro líquido entero, pasa de la posicion AB á la posicion A'B', ya se suponga que el pequeño cilindro AA' se traslada y viene á ocupar la posicion de su igual BB', ó al reves si el movimiento virtual es ascendente. El peso de

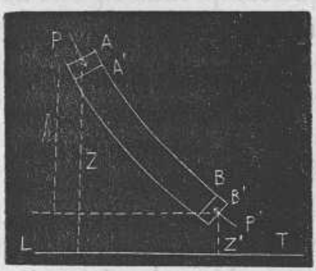

Fig. 320.

este pequeño cilindro es $\rho\omega e$, y los centros de gravedad de estos pequeños cilindros están muy próximos á los centros de gravedad de las secciones A y B; sean z y z' las alturas de estos últimos puntos sobre el plano horizontal LT; el trabajo de la gravedad, debido al movimiento virtual e, estará expresado por $\rho\omega e(z-z')$ y la ecuacion del teorema del trabajo virtual, es

$$Pe-P'e+\rho\omega e(z-z')=0;$$

de la que se deduce

$$\frac{P'}{\omega}=\frac{P}{\omega}+\rho(z-z'),$$

ó

$$p'=p+\rho h,$$

designando por p y p' las presiones por unidad de superficie en A y en B, y por h la diferencia de nivel de los puntos A y B.

Si $h=0$, los puntos A y B están al mismo nivel y resulta $p=p'$. Luego en un líquido pesado en equilibrio, la presion es constante para todos los puntos situados en un plano horizontal.

769. El teorema que acabamos de establecer es aplicable tambien á los gases pesados, pero no puede demostrarse de la misma manera, porque la densidad ρ de un gas, no es constante como la de un líquido, y varía con la presion en la relacion que expresa la ley de Mariotte. Para establecer el teorema en este caso, razonaremos sobre pequeñas diferencias de nivel; y como la presion en el interior de un gas en equilibrio varía de una manera contínua, dos puntos muy próximos A y B tienen presiones muy poco diferentes, y la densidad ρ del gas es sensiblemente constante en todo el intervalo AB. En este caso el gas se conduce como un líquido en esta extension, y podremos aplicar la ecuacion

$$p'=p+\rho h,$$

ó lo que es lo mismo

$$p+dp=p+\rho dz,$$

llamando p á la presion en el punto A, $p+dp$ á la presion en el punto B, y dz á la diferencia de alturas entre los puntos A y B; y será

$$dp=\rho dz.$$

La densidad ρ es una funcion de la presion p; luego p es una funcion de la altura z, y el teorema de la trasmision de las presiones queda demostrado para los gases pesados como para los líquidos.

Vemos que en el interior de los flúidos pesados en equilibrio existen superficies de igual presion, que son planos horizontales; la presion es constante para cada uno de ellos; y varía de uno á otro. Estas superficies se llaman superficies de nivel en Hidrostática, de las cuales nos ocuparemos luégo.

Presiones en un flúido sometido á fuerzas cualesquiera.

770. Vamos á estudiar en general la presion que se ejerce en un punto de una masa flúida en equilibrio, sometida á fuerzas cualesquiera. Supongamos los diversos puntos de la masa flúida referidos á tres ejes rectangulares OX, OY, OZ, (fig. 321); sea p la presion por unidad de superficie en el punto A$(x, y, z,)$ y ρ la masa específica. Consideremos el paralelepípedo rectángulo AH, cuyas aristas paralelas á los ejes son AB$=dx$, AD$=dy$, AF$=dz$; y expresemos, que la masa flúida comprendida dentro de este paralelepípedo está en equilibrio, bajo la accion de la fuerza exterior directamente aplicada á este paralelepípedo y de las presiones que se ejercen sobre sus caras. La fuerza exterior estará

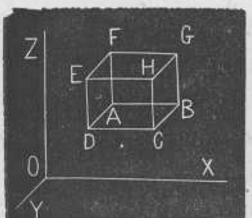

Fig. 321.

expresada por el producto mj de la masa por la aceleracion dada j, y será igual á $j\rho dxdydz$; proyectando esta fuerza sobre los tres ejes, y llamando X, Y, Z, á las componentes de la aceleracion, las componentes de la fuerza son

$$\rho X dxdydz,\ \rho Y dxdydz,\ \rho Z dxdydz.$$

La presion sobre la cara ADEF actúa paralelamente al eje OX, y en el sentido positivo; la presion sobre la cara opuesta actúa paralelamente á la misma recta, pero en sentido negativo; y si p es la presion por unidad de superficie sobre AE, $p+\frac{dp}{dx}dx$ es la presion por unidad de superficie sobre la cara opuesta BH; las presiones totales por lo tanto, son con sus signos

$$p\,dy\,dz,\quad -\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dydz.$$

La ecuacion del equilibrio $\Sigma X=0$, será en este caso

$$pdydz-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dydz,+\rho X dxdydz=0.$$

la cual simplificada se reduce á la

$$(1)\quad \frac{dp}{dx}=\rho X.$$

Del mismo modo, sobre los ejes OY y OZ, de las ecuaciones $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$, se obtienen las ecuaciones

$$(2)\quad \frac{dp}{dx}=\rho Y,$$

$$(3)\quad \frac{dp}{dz}=\rho Z.$$

Estas ecuaciones, obtenidas representando por p la presion media sobre la unidad de superficie, son ciertas cuando estas caras se hacen tan pequeñas como se quiera, y son por lo tanto aplicables al caso en que representemos por p la presion del flúido por unidad de superficie en el punto A.

Multiplicando respectivamente las ecuaciones (1), (2) y (3) por dx, dy, dz, y sumando, la suma $\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy+\frac{dp}{dz}dz$, es la diferencial total de la presion total p, cuando las variables x, y, z, reciben los incrementos dx, dy, dz, y la podemos representar por dp, y obtendremos la ecuacion

$$(4) \quad dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz);$$

que es la ecuacion general del equilibrio de los flúidos, y suele llamarse *la ecuacion de la Hidrostática.*

771. Las ecuaciones de los momentos $\Sigma(Yz-Zy)=0$, $\Sigma(Zx-Xz)=0$, $\Sigma(Xy-Yx)=0$, se verifican por sí mismas, y no dan ninguna nueva condicion; porque las presiones son todas normales á las caras del paralelepípedo, y la resultante sobre cada una de ellas, pasa sensiblemente por su centro de gravedad, y todas por consiguiente por el centro de gravedad del paralelepípedo.

Las fuerzas exteriores, paralelas y proporcionales á las masas de las diversas moléculas, se componen en una fuerza única, que pasa tambien por el centro de gravedad; luego todas las fuerzas tienen el mismo punto de aplicacion, y basta para el equilibrio, que la resultante de traslacion sea nula, lo cual expresan las ecuaciones (1), (2) y (3), ó mejor la (4), en las que los factores dx, dy, dz, permanecen arbitrarios.

LECCION LXIII.

Cómo varía la presion en una masa flúida. Superficies de nivel.—Discusion de la ecuacion de la Hidrostática. — Caso en que $Xdx+Ydy+Zdz$ es integrable.—Aplicacion á los líquidos pesados.—Representacion de la presion por la altura de una columna líquida.—Caso en que $Xdx+Ydy+Zdz$ no es integrable.—Forma de la superficie de la Tierra.—Equilibrio relativo de un líquido que gira alrededor de un eje vertical.

Cómo varía la presion en una masa flúida. Superficies de nivel.

772 Supongamos un flúido en equilibrio, solicitado por fuerzas cualesquiera aplicadas en cada uno de los puntos que le componen, y dadas para cada uno en magnitud y direccion; la presion varía de una manera contínua en el seno de la masa flúida. Esto supuesto, el lugar geométrico de todos los puntos en que la presion es constante, *se llama superficie de nivel.*

Segun esta definicion, p será constante para todos los puntos de una superficie de nivel, $dp=0$; y la ecuacion (4) del número anterior se reduce á

$$(1)\quad Xdx+Ydy+Zdz=0,$$

que es la ecuacion diferencial de las superficies de nivel. De esta ecuacion se deduce inmediatamente, *que las superficies de nivel son normales á las fuerzas exteriores que solicitan sus diferentes puntos.* Esta propiedad de las superficies de nivel, se demuestra del mismo modo que en el número 376.

773. Variando la presion en el interior de un flúido, de un punto á otro infinitamente próximo, no situado en la misma superficie de nivel, hay en él infinitas superficies de nivel. Vamos á ver cómo varía la presion de una superficie de nivel á otra infinitamente próxima.

La ecuacion (4) de la leccion anterior

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

dará esta variacion, cuando se pasa del punto $A(x, y, z)$ al punto $B(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Puede tambien calcularse esta variacion directamente. Sean S y S′ (fig. 322), dos superficies de nivel infinitamente próximas, definidas la primera por la presion p, y la segunda por la presion $p+dp$. En un punto A de la primera tracemos la normal AF, que será la direccion de la fuerza que solicita al punto A. Las direcciones de las fuerzas que obran sobre las moléculas próximas á este punto, son paralelas á la recta AF, y como las superficies S y S′ son infinitamente próximas, esta recta es próximamente normal á la superficie S′ en el punto B.

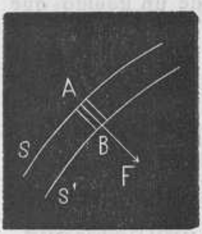

Fig. 322.

Tracemos un cilindro recto infinitamente pequeño AB, de seccion ω, y longitud $AB = ds$, y expresemos que está en equilibrio, bajo la accion de las presiones que se ejercen en su superficie, y de la resultante de las fuerzas aplicadas á sus diversas moléculas; para lo cual, la suma algébrica de las proyecciones de todas estas fuerzas sobre la direccion AF debe ser igual á cero. Las presiones que se ejercen sobre la superficie convexa de este cilindro, son normales al eje de proyeccion, por consiguiente, sus proyecciones sobre él son nulas; y la suma contendrá las presiones sobre la base A, las presiones sobre la base B, y la resultante de las fuerzas. La presion total en A es $p\omega$, la presion total en B es $(p+dp)\omega$, y actúa en sentido contrario á la anterior.

La resultante de las fuerzas está expresada por $j.\rho\omega ds$, ó sea el producto de la masa $\rho\omega ds$, siendo ρ la masa específica, por la aceleracion j, que representa la fuerza referida á la unidad de masa. Todas estas fuerzas actúan paralelamente al eje del cilindro, y se proyectan sobre él en su verdadera magnitud, y tendremos la ecuacion

$$p\omega-(p+dp)\omega+j\rho\omega ds=0;$$

que simplificada es

$$dp=\rho j ds;$$

la cual sirve para calcular la variacion de la presion, al pasar de la superficie de nivel S á otra infinitamente próxima S'.

Teniendo presente que jds es el trabajo de la fuerza j, Xdx, Ydy, Zdz, los trabajos de sus componentes X, Y, Z, será $jds=Xdx+Ydy+Zdz$; y la ecuacion anterior se convierte en la ecuacion de la Hidrostática

$$(2) \quad dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Discusion de la ecuacion de la Hidrostática.

774. Si el equilibrio existe, la presion p es determinada en cada punto del flúido, y por consiguiente p es una funcion determinada de las coordenadas x, y, z, del punto que se considera; las componentes X, Y, Z, y la densidad ρ son funciones dadas de las mismas variables. Entónces el primer miembro de la ecuacion anterior es una diferencial exacta, luego el segundo debe serlo tambien; y la primera condicion del equilibrio es que la funcion

$$\rho(Xdx+Ydy+Ydz),$$

sea la diferencial exacta, de una cierta funcion $f(x, y, z)$ de las variables x, y, z; para lo cual es necesario que se verifiquen en ella las condiciones de integrabilidad; y las condiciones del equilibrio del flúido, vienen á reducirse á las condiciones de integrabilidad de la funcion anterior.

775. Estas condiciones son, segun sabemos, que si la funcion $Mdx+Ndy+Pdz$, es la diferencial exacta de una funcion $f(x, y, z)$, se verifiquen las identidades

$$M=\frac{df}{dx},\ N=\frac{df}{dy},\ P=\frac{df}{dz};$$

y por consiguiente

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d^2f}{dx\,dy}=\frac{dN}{dx},$$

$$\frac{dM}{dz}=\frac{d^2f}{dx\,dz}=\frac{dP}{dx},$$

$$\frac{dN}{dz}=\frac{d^2f}{dy\,dz}=\frac{dP}{dy};$$

ó $$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},\ \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx},\ \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy};$$

que son las condiciones nesesarias y suficientes para que la funcion dada sea una diferencial exacta; estas condiciones son tambien suficientes, y si se verifican, se podrá determinar la funcion f. Hagamos para ello

$$f=U+V+W,$$

representando U una funcion de las tres variables x, y, z; V una funcion de y, z; y W una funcion de z.

Tomemos las derivadas parciales de esta ecuacion con relacion á x, á y, y á z, y comparemos con las funciones dadas; resultará

$$\begin{cases}\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dU}{dx}=M,\\[2mm] \dfrac{df}{dy}=\dfrac{dU}{dy}+\dfrac{dV}{dy}=N,\\[2mm] \dfrac{df}{dz}=\dfrac{dU}{dz}+\dfrac{dV}{dz}+\dfrac{dW}{dz}=P;\end{cases}$$

ó $$\begin{cases}\dfrac{dU}{dx}=M,\\[2mm] \dfrac{dV}{dy}=N-\dfrac{dU}{dy},\\[2mm] \dfrac{dW}{dz}=P-\dfrac{dU}{dz}-\dfrac{dV}{dz}.\end{cases}$$

Luego la funcion U se obtendrá integrando Mdx, considerando á x, como única variable; la funcion V es la integral de $\left(N-\frac{dU}{dy}\right)dy$ con respecto á la sola variable y, y la funcion W es la integral con respecto á z de $\left(P-\frac{dU}{dz}-\frac{dV}{dz}\right)dz$. Pero es necesario, para que la hipótesis en que procedemos se verifique, que V no contenga x, y que W no contenga ni x ni y, lo cual resulta de las ecuaciones de condicion; porque diferenciando bajo el signo $\int$, se tiene

$$\frac{dV}{dx}=\frac{d}{dx}\int\left(N-\frac{dU}{dy}\right)dy=\int\left(\frac{dN}{dx}-\frac{d^2U}{dxdy}\right)dy;$$

pero

$$\frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}=\frac{d^2U}{dx\,dy},$$

luego $\frac{dV}{dx}=0$, y la funcion V no contiene x. Del mismo modo

$$\frac{dW}{dy}=\frac{d}{dx}\int\left(P-\frac{dU}{dz}-\frac{dV}{dz}\right)dz=\int\left(\frac{dP}{dx}-\frac{d^2U}{dz\,dx}-\frac{d^2V}{dzdx}\right)dz$$

$$=\int\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)dz=0,$$

por ser, $\frac{d^2V}{dx\,dz}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dz}\right)=0$, á causa de ser V independiente de x; y tambien $\frac{dP}{dx}=\frac{dM}{dz}$. Por último,

$$\frac{dW}{dy}=\frac{d}{dy}\int\left(P-\frac{dU}{dx}-\frac{dV}{dz}\right)dz=\int\left(\frac{dP}{dy}-\frac{d^2U}{dydz}-\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)dz.$$

De la relacion $U=\int Mdx$, se deduce

$$\frac{dU}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx=\int\frac{dN}{dx}dx=N,$$

$$\frac{d^2U}{dydz}=\frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy};$$

$$\frac{d^2V}{dydz}=\frac{d}{dz}\left(N-\frac{dU}{dy}\right)=\frac{dN}{dz}-\frac{d^2U}{dy\,dz}=\frac{dN}{dz}-\frac{d^2}{dy\,dz}\int Mdx,$$

$$=\frac{dN}{dz}-\frac{d}{dy}\int\frac{dM}{dz}dx=\frac{dN}{dz}-\frac{d}{dy}\int\frac{dP}{dx}dx=\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}=0;$$

y siendo $\frac{dP}{dy}-\frac{d^2U}{dy\,dz}-\frac{d^2V}{dy\,dz}=0$, por sí misma, tendremos $\frac{dW}{dy}=0$, y la funcion W, no contiene ni x ni y, y la funcion f se determina por las tres cuadraturas indicadas.

Canchy ha dado á esta funcion la forma de la suma de las tres integrales definidas siguientes, designando en ellas, $x_0.y_0, z_0$, tres constantes arbitrarias,

$$f=\int_{x_0}^{x}M(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}P(x_0,y_0,z)dz;$$

cuya forma puede verificarse fácilmente por la diferenciacion.

776. En la cuestion que nos ocupa, conociendo las funciones ρ, X, Y, Z, podremos encontrar la funcion que representa la presion p, siempre que se verifiquen las condiciones de integrabilidad

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d(\rho X)}{dy}=\frac{d(\rho Y)}{dx},\\&\frac{d(\rho X)}{dz}=\frac{d(\rho Z)}{dx},\\&\frac{d(\rho Y)}{dz}=\frac{d(\rho Z)}{dy}.\end{aligned}\right.$$

Dos casos pueden ocurrir: 1.°, aquel en que el trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$ es por sí mismo la diferencial exacta de una cierta funcion, en el cual las condiciones (3) se reducen á las

$$(4)\quad \frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx},\ \frac{dX}{dz}=\frac{dZ}{dx},\ \frac{dY}{dz}=\frac{dZ}{dy};$$

2.° el caso en que el factor ρ, reduce á la funcion $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$, á una difrencial exacta; en este caso, las condiciones de integridad son las (3), que desarrolladas serán

$$(5)\quad \begin{cases} \rho\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)+X\frac{d\rho}{dy}-Y\frac{d\rho}{dx}=0, \\ \rho\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\frac{d\rho}{dz}-Z\frac{d\rho}{dy}=0, \\ \rho\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+Z\frac{d\rho}{dx}-X\frac{d\rho}{dz}=0. \end{cases}$$

Multiplicando la primera por Z, la segunda por X, la tercera por Y, y sumando, todos los términos que contienen las derivadas $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$ desaparecen, lo mismo que el factor comun ρ. Y la condicion para que se pueda encontrar un factor comun ρ, que haga integrable el trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$, cuando las condiciones (4) no se verifican, es

$$(6)\quad Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)+X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)=0.$$

Caso en que $Xdx+Ydy+Zdz$ es integrable.

777. Primer caso: $Xdx+Ydy+Zdz$ diferencial exacta; las ecuaciones (4) se verifican y podremos encontrar una funcion $f(x.y,z)$, cuya diferencial sea $Xdx+Ydy+Zdz$. La ecuacion general de las superficies de nivel será

$$(7)\quad f(x,y,z),=C,$$

y la ecuacion $dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$, se reduce á

$$dp=\rho df.$$

En esta ecuacion vemos que ρ es constante ó funcion de p; porque en todos los puntos de una superficie de nivel p es constante, y la funcion f tambien; dp y df tiene el mismo valor, cada una en toda la extension de la capa infinitamente delgada, comprendida entre las superficies de nivel $f=C$, y $f+df.=C+dC$; luego ρ es constante en toda la extension de esta capa; si la densidad no es constante en todos los puntos de la masa flúida, variará de una capa á la inmediata, ρ será funcion de f, ó lo que es lo mismo, de p.

En todos los puntos de una superficie de nivel, la densidad es por consiguiente constante. Tambien de la ecuacion $dp=\rho j ds$, se deduce que la distancia ds de dos superficies de nivel, infinitamente próximas, varía en razon inversa de la intensidad de la fuerza j.

778. Cuando el flúido es un líquido perfecto homogéneo, ρ es constante. Cuando el flúido es un gas perfecto, á temperatura constante t, ρ es una funcion de p segun las leyes de Mariotte y Gay-Lussac; pues de la ecuacion (3) núm. 759

$$\frac{H}{P}=K(1+\alpha t),$$

se deduce reemplazando H por p, y P por ρg,

$$\frac{p}{\rho}=Kg(1+\alpha t)=k,$$

siendo k constante, si t es constante. La ecuacion $dp=\rho df$, se convierte en $dp=\frac{p}{k}df$, ó $\frac{dp}{p}=\frac{df}{k}$. Si la temperatura del gas no fuera constante en todos sus puntos, tendríamos

$$\rho=\frac{p}{Kg(1+\alpha t)},$$

y por consiguiente

$$dp=\frac{p}{Kg(1+\alpha t)}df, \quad ó \quad \frac{dp}{p}=\frac{1}{Kg(1+\alpha t)}df;$$

ecuacion en la que vemos, que t es funcion f, es decir, que la temperatura es constante en todos los puntos de una superficie de nivel, y solo varía de una á otra. Las superficies de nivel, ademas de ser superficies de igual presion, son tambien superficies *isotermas*, ó de igual temtemperatura.

Aplicacion á los líquidos pesados.

779. Tomemos al eje OZ vertical y de abajo á arriba. Las componentes de la gravedad referida á la unidad de masa, son $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$; luego

$$Xdx+Ydy+Zdz=-gdz,$$

que integrada será

$$f=-gz+C;$$

y las superficies de nivel son planos horizontales, como ya sabíamos (378).

Si se trata de un líquido, la superficie libre es una superficie de igual presion, será por consiguiente una superficie de nivel, es decir, un plano horizontal.

Si varios líquidos de densidades diferentes, no susceptibles de mezclarse, están superpuestos en la misma vasija, las superficies de separacion son planos horizontales; pues de otro modo la densidad no sería constante en toda la extension de una misma superficie de nivel, que como acabamos de decir es un plano horizontal.

780. La presion en un punto dado, se obtendrá integrando la ecuacion

$$dp=\rho df=-\rho gdz=-Pdz,$$

que da

$$p=p_0-Pz,$$

cuando ρ es constante en todos los puntos de la masa líquida. Si esta masa se compone de varios líquidos superpuestos, debemos dar á P los valores sucesivos que corresponden á cada uno de ellos. Sea S la superficie libre, y sean S′, S″, S‴, (fig. 323), las superficies de separacion de los diferentes líquidos. Designemos por p_0 la presion que se ejerce sobre la superficie libre, que será, por ejemplo, la presion atmosférica, la presion en B será igual á

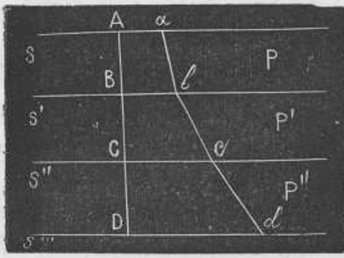

Fig. 323

$$p_0 + P \times AB.$$

De este punto en adelante calcularemos la presion por la fórmula $dp = -P'dz$, la cual dará para el punto C una presion igual

$$p_0 + P \times AB + P' \times BC.$$

Se calculará del mismo modo y por la misma fórmula la presion en D, que es

$$p_0 + P \times AB + P' \times BC + P'' \times CD;$$

P, P′, P″, son los pesos específicos de los diferentes líquidos.

Para representar las presiones en los diferentes puntos de la vertical AD, se puede construir una línea cuyas ordenadas horizontales, sean proporcionales á estas presiones. Tomemos en una escala arbitraria

$$\begin{aligned}
Aa &= p_0,\\
Bb &= p_0 + P \times AB,\\
Cc &= p_0 + P \times AB + P' \times BC,\\
Dd &= p_0 + P \times AB + P' \times BC + P'' \times CD,
\end{aligned}$$

y uniendo por rectas los puntos a, b, c, d, la línea poligonal $abcd$ es la línea pedida. Vemos en la figura que el contorno $abcd$ es convexo respecto de AD; esta condicion es necesaria para la estabilidad del equilibrio; ó en otros términos, es necesario que los líquidos estén dispuestos de abajo arriba por órden de creciente de pesos específicos, es decir, que $P'' > P' > P$..... De todo lo cual daremos la razon más adelante.

Representacion de las presiones por la altura de una columna líquida.

781. Hemos determinado hasta aquí la presion p, por unidad de superficie, por el peso que se ejerce sobre un área dada, un centímetro cuadrado por ejemplo, estimada en kilógramos; pero es más cómodo y más usado en Hidrostática, definir esta presion por la altura de una columna líquida de densidad conocida. La presion p está representada por el producto $p = P \times h$, del peso específico por una altura h; si dividimos esta igualdad por el peso específico P' de un líquido determinado, resultará $\frac{p}{P'} = \frac{P}{P'} \times h$, que representa una altura equivalente á la presion que se trata de determinar. Por ejemplo, la presion normal de la atmósfera es igual al nivel del mar, á $103,^{kg}30$ por decímetro cuadrado; si dividimos por el peso $13,^{kg}596$, del decímetro cúbico de mercurio, encontraremos que la presion está representada por una columna de mercurio de $0,^{m}76$; que equivale á una columna de agua de $10,^{m}33$. Esta representacion es conveniente, sobre todo, cuando no hay que considerar más que un solo líquido, tomándole por líquido tipo, las presiones, abstraccion hecha de la presion atmosférica, estarán representadas por la altura misma de la superficie libre del líquido, sobre los puntos en que se la quiera valúar. Sea S

(fig. 324), la superficie libre de un líquido pesado, la presion en B, hecha abstraccion de la presion exterior que se ejerce en A, está representada por la columna AB, y la línea, cuyas ordenadas horizontales representan las presiones á diversas alturas, será la bisectriz AC del ángulo en A. Para volver á la presion en peso, basta multiplicar AB por el peso de la unidad de volúmen del líquido.

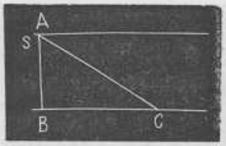

Fig. 324.

Caso en que $Xdx + Ydy + Zdz$ no es integrable.

782. Cuando la funcion $Xdx + Ydy + Zdz$ no es la diferencial exacta de una funcion, el equilibrio del flúido es posible, si el factor ρ hace integrable la ecuacion

$$(17) \quad Xdx + Ydy + Zdx = 0.$$

Hemos visto que para que esto suceda, debe verificarse la identidad

$$(18) \quad Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) + X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) = 0.$$

Por ejemplo, si $X = y$, $Y = -x$, $Z = 0$, la ecuacion de condicion queda satisfecha por estos valores, y por consiguiente, la ecuacion (17), que es en este caso $ydx - xdy = 0$, es integrable. El factor que hace esta ecuacion integrable es $\frac{1}{x^2 + y^2}$, ó $\frac{1}{x^2}$, ó $\frac{1}{xy}$, ... En general, la ecuacion diferencial (17) es siempre integrable, si se tiene $Z = 0$, y X ó Y no contienen z, porque entónces se reduce á una ecuacion diferencial con dos variables.

783. El método general, que se puede seguir para integrar la ecuacion (17), consiste en tratar primero una de las tres variables, z por ejemplo, como una constante, lo

que equivale á hacer $dz=0$, y á integrar la ecuacion con dos variables

$$Xdx+Ydy=0.$$

Esta ecuacion siempre es integrable; sea $U=C$ su integral general, siendo U una funcion conocida de las variables x é y, de la constante z, y C una constante arbitraria. Diferenciándola en este supuesto será

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy=0,$$

ecuacion que debe ser igual á la propuesta, multiplicada por un cierto factor λ, y comparándolas tendremos

$$\frac{dU}{dx}=\lambda X,$$

$$\frac{dU}{dy}=\lambda Y;$$

el factor λ será una funcion de las variables x é y, y del parametro constante z.

Para pasar á la integral de la ecuacion dada, diferenciemos la ecuacion $U=C$, considerando como variables á $x, y. z$, y á C como una funcion de z; resultará

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz=\frac{dC}{dz}dz,$$

ó sustituyendo

$$\lambda Xdx+\lambda Ydy+\frac{dU}{dz}dz=\frac{dC}{dz}dz,$$

ecuacion, que debe ser idéntica á la ecuacion (17). Multiplicando aquella por λ, y restando, resulta

$$\frac{dU}{dz}-\lambda Z=\frac{dC}{dz}.$$

De la cual integrando, se deduce

$$C=\int\left(\frac{dU}{dz}-\lambda Z\right)dz,$$

y la cuestion estaria resuelta, si la funcion bajo el signo $\int$ no contuviera más variables que z, lo cual exije las dos condiciones siguientes:

$$\frac{d^2U}{dzdx}-\frac{d(\lambda Z)}{dx}=\frac{d(\lambda X)}{dz}-\frac{d(\lambda Z)}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2U}{dzdy}-\frac{d(\lambda Z)}{dy}=\frac{d(\lambda Y)}{dz}-\frac{d(\lambda Z)}{dy}=0.$$

Mas $\frac{d(\lambda X)}{dy}=\frac{d(\lambda Y)}{dx}$, por ser $\lambda(Xdx+Ydy)$ la diferencial de la funcion U; y el factor λ hace integrable no solamente la funcion $Xdx+Ydy$, sino tambien la funcion $Xdx+Ydy+Zdz$. Pero la dificultad para determinar este factor λ, es por lo ménos tan grande, como lo que presenta el encontrar el factor ρ. Este método nó siempre conduce al resultado apetecido. Para saber si resuelve el problema, en la ecuacion $U=C$, despejaremos x en funcion de y, z y C; sustituiremos este valor en la ecuacion diferencial

$$\frac{dU}{dz}-\lambda Z=\frac{dC}{dz},$$

y será eficaz el método, si la variable y desaparece por sí misma de la ecuacion final. Entónces se determinará C, integrando la ecuacion diferencial, que no contendrá más que las variables C y z. El resultado sólo tiene interes analítico, pero no tiene ninguna aplicacion física. La densidad ρ de un flúido, ó es constante, ó funcion de la presion; en los dos casos $\frac{dp}{\rho}$ es una diferencial exacta, y por consiguiente, $Xdx+Ydy+Zdz$ es tambien una diferencial exacta, sin intervencion de ningun factor funcion de las coordenadas.

Forma de la superficie de la Tierra.

784. La forma general de la superficie terrestre es la superficie del mar, idealmente prolongada por todos los continentes. La superficie del mar, como la superficie li-

bre de un líquido en equilibrio, es una superficie de nivel, normal á las direcciones de las fuerzas que solicitan todos sus puntos. Las fuerzas principales que actúan sobre un punto material, situado en la superficie del globo, son la atraccion terrestre y la fuerza centrífuga, cuya resultante es la gravedad; la direccion de la gravedad es la vertical, por consiguiente, la superficie libre de las aguas tranquilas del mar es normal á las verticales de sus diferentes puntos. Segun la hipótesis generalmente admitida, el globo terrestre ha pasado por el estado flúido, ántes que la corteza exterior, ó toda su masa se haya solidificado por el enfriamiento; por lo tanto, la superficie general del globo terrestre debe ser una superficie de nivel, prolongacion de la superficie libre de los mares. Las depresiones, elevaciones y dislocaciones que se observan, son pequeñas modificaciones, que no alteran profundamente la forma general de la superficie de la Tierra.

Si la atraccion fuera la única fuerza que solicitára las moléculas de la superficie terrestre, la forma de equilibrio de esta superficie sería esférica; porque la atraccion de una esfera homogénea sobre un punto situado en su superficie, está dirigida hácia el centro de la esfera, y es normal á dicha superficie (161). Pero la atraccion está modificada por la fuerza centrífuga, y por otras fuerzas que producen una desviacion de la vertical; la primera en el plano meridiano, y las otras la separan un poco de este plano; luego la forma esférica no es la forma de equilibrio en virtud de estas acciones, y el problema de la determinacion de la figura de la Tierra, viene á ser un problema muy complicado. La observacion ha demostrado que la Tierra es próximamente un elipsoide de revolucion, achatado por los polos y abultado por el ecuador, cuyo achatamiento es $\frac{1}{299}$. El cálculo prueba, en efecto, que la forma de elipsoide de revolucion satisface á las condiciones de equilibrio de un flúido, que gira alrededor de un eje. Tambien el elipsoide de ejes desiguales satisface á las condiciones de equilibrio en algunos casos.

785. Ya vimos (457), que el fenómeno de las mareas que se observa en las costas del Occéano, es debido al cambio periódico de la direccion de la vertical de cada lugar, producido por la accion atractiva de la Luna y de el Sol.

La superficie de las aguas tranquilas, tendiendo siempre á ser normal á la vertical de cada punto, si cambia la direccion de la vertical, el equilibrio se alterará, y la superficie libre del mar tomará una nueva forma. La desviacion de la vertical producida por las acciones del Sol, de la Luna y de las fuerzas aparentes, debidas á la traslacion de la Tierra, es muy pequeña; por lo que la deformacion del elipsoide medio será muy pequeña. Calculando, como lo hicimos en el núm. 459, separadamente la accion del Sol y la accion de la Luna, á cada uno corresponderá una nueva forma del elipsoide; y la forma definitiva se obtendrá componiendo estas dos formas, es decir, sumando algébricamente las alturas correspondientes. Ya dijimos en el lugar citado que la accion de la Luna es casi el doble de la del Sol, porque su proximidad á la Tierra compensa la pequeñez de su masa. El mar no se pone en equilibrio instantáneamente por las acciones variables que experimenta, sino que estas obran con lentitud, y la observacion señala un retraso de 36 horas próximamente á cada marea, con respecto á las posiciones del Sol y de la Luna que la producen. La alta mar tiene lugar á la vez para dos puntos situados en los extremos de un diámetro; el mar baja para todos los puntos del círculo máximo cuyos polos son estos dos puntos. Las mareas son mayores cuando la accion del Sol y la de la Luna se suman, es decir, cuando los dos astros están en oposicion, Luna llena; ó en conjuncion, Luna nueva; y son menores cuando dichas acciones se restan, lo cual tiene lugar en las cuadraturas, cuarto creciente y cuarto menguante. La elevacion y depresion de las aguas es muy pequeña en alta mar, y sólo se manifiesta con alguna intensidad en las costas, sobre todo en los puntos en que éstas oponen un obstáculo á la propagacion de las olas, como sucede en nuestras costas del Cantábrico. La hora de la marea alta, y la altura media de la marea son elementos muy variables de un punto á otro de la costa, y las leyes de las oscilaciones de la superficie de las aguas son peculiares de cada localidad.

Equilibrio relativo de un líquido que gira alrededor de un eje vertical.

786. Examinemos, como ejemplo de equilibrio de los flúidos, el de un líquido solicitado por su propio peso y por la fuerza centrífuga, que gira uniformemente con una velocidad ω, alrededor de un eje vertical OZ (fig. 325), y determinemos la forma que toman las superficies de nivel.

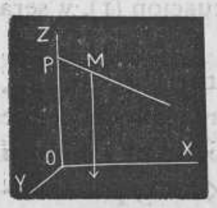

Fig. 325.

Las fuerzas que solicitan una molécula $M(x, y, z)$ del líquido, son, su peso mg, que actúa en el sentido de las z negativas, y la fuerza centrífuga $m\omega^2 r$, dirigida segun la prolongacion de la perpendicular PM á OZ, siendo $PM = r$. Las componentes de la fuerza centrífuga, segun los ejes X, Y, Z, son $m\omega^2 x$, $m\omega^2 y$, y cero; y tendremos, suponiendo que la masa m se toma por unidad de masa,

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g;$$

y la ecuacion de las superficies de nivel es

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0;$$

integrando resulta

$$(1)\quad \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - gz = C.$$

Esta ecuacion nos dice que las superficies de nivel son paraboloides de revolucion, alrededor del eje OZ.

787. Determinemos segun estos principios, y prescindiendo de la presion atmosférica, la superficie libre del líquido, cuyo volúmen es V, contenido en un vaso cilíndrico ABCD (fig. 326), de paredes verticales que tiene por base el círculo CD, de radio $OD = r$.

Fig. 326.

La superficie libre del líquido es un paraboloide, las secciones de éste por los planos coordenados son las parábolas AKB, HKH', y su ecuacion es la (1). La constante C se determina por la condicion de que el volúmen comprendido entre el paraboloide y el cilindro es constante, é igual á V.

La ecuacion de la parábola AKB, situada en el plano ZX, se obtiene, haciendo $y=0$, en la ecuacion (1), y será

$$(2)\quad \tfrac{1}{2}\omega^2 x^2 - gz = C.$$

Dividiendo el área OKBD en elementos verticales pq, cuya superficie es zdx, y haciéndola girar alrededor de OZ, obtendremos el volúmen del líquido; el volúmen engendrado por el elemento pq es $zdx \times 2\pi x$, y el volúmen total es

$$V = \int_0^r 2\pi zx dx.$$

De la ecuacion (2) se deduce $z = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 x^2 - C}{g}$;

luego $zxdx = \frac{\omega^2}{2g} x^3 dx - \frac{C}{g} x dx$;

que integrada entre los límites 0 y r, da, despues de multiplicar por 2π,

$$(3) \quad V = \frac{\pi\omega^2}{4g} r^4 - \frac{\pi r^2}{g} C;$$

de donde

$$C = \frac{r^2\omega^2}{4} - \frac{gV}{\pi r^2}.$$

La altura OK del líquido, en el centro del vaso, se obtiene haciendo $x=0$, é $y=0$, en la ecuacion (1); y resulta

$$(4) \quad OK = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{r^2\omega^2}{4g};$$

como πr^2 es el área del círculo de la base, $\frac{V}{\pi r^2}$ es la altura del líquido cuando no hay rotacion, ó cuando $\omega=0$; luego $\frac{r^2\omega^2}{4g}$ es la depresion que la rotacion ω produce en el líquido en el centro del vaso. Si designamos por $v=r\omega$ la velocidad de la superficie exterior del vaso, tendremos, que la depresion formada en el centro del vaso por la rotacion es igual á $\frac{v^2}{4g}$, ó $\frac{1}{2}.\frac{v^2}{2g}$, ó sea la mitad de la altura correspondiente á la velocidad v, para expresar la altura de la depresion.

La fórmula (4) es aplicable miéntras que OK sea positiva. Pero si

$$\frac{r^2\omega^2}{4} > \frac{gV}{\pi r^2}, \quad \text{ú} \quad \omega > \frac{2\sqrt{gV}}{r^2\sqrt{\pi}},$$

OK será negativa, la constante C será positiva, y la depresion formada dejará al descubierto el centro del fondo del vaso; entónces las fórmulas establecidas deben modificarse.

788. Si $C = \frac{r^2\omega^2}{4} - g\frac{V}{\pi r^2}$ es positiva, lo que indica

que OK (fig. 327) es negativa, y que el fondo del vaso se descubre en parte por la rotacion; el límite inferior $x=0$, debe reemplazarse por $x=OS=x_0$, al determinar el volúmen V del líquido, y será

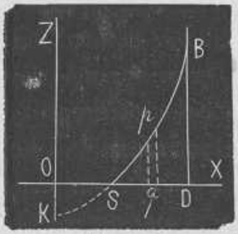

Fig. 327.

$$V=\int_{x_0}^{r} 2\pi z x dx;$$

la ecuacion $\frac{1}{2}\omega^2 x^2 - gz = C$, dará para x_0, valor de x cuando $z=0$, $x_0=\sqrt{\frac{2C}{\omega}}$, y la incógnita C entrará en el límite inferior de la integral anterior.

El valor de esta integral definida es, hechos los cálculos

$$V=\frac{\pi C^2}{g\omega^2}-\frac{\pi r^2}{g}C+\frac{\pi r^4\omega^2}{4g};$$

y se obtendrá C resolviendo la ecuacion de segundo grado

$$C^2-r^2\omega^2 C+\frac{r^4\omega^2}{4}-g\frac{V\omega^2}{\pi}=0,$$

cuyos tres primeros términos son el cuadrado de $C-\frac{r^2\omega^2}{2}$; por consiguiente sus raíces son reales, y serán

$$C=\frac{r^2\omega^2}{2}\pm\omega\sqrt{\frac{gV}{\pi}}.$$

Estas raíces son del mismo signo, porque el término independiente de C es positivo, por la condicion

$$\frac{r^2\omega^2}{4}-\frac{gV}{\pi r^2}>0$$

y ademas son positivas, porque su suma $r^2\omega^2$ lo es.

La ecuacion de la parábola límite es en este caso

$$\frac{1}{2}\omega^2 x^2-gz=\frac{r^2\omega^2}{2}\pm\omega\sqrt{\frac{gV}{\pi}}.$$

Para $x=r$, debemos tener para z un valor positivo; de modo, que debemos tomar el signo ménos del radical de este modo obtendremos $z=BD=\frac{\omega}{g}\sqrt{\frac{gV}{\pi}}$.

LECCION LXIV.

Presiones en los gases pesados. Nivelacion barométrica.—Equilibrio de una mezcla de gases pesados.—Equilibrio de los flúidos en vasos comunicantes.—Presiones de los flúidos sobre las paredes de las vasijas que los contienen. Problemas.—Determinacion analítica del centro de pesesion de un área plana.

Presiones en los gases pesados.—Nivelacion barométrica.

789. Si la temperatura de un gas es constante en toda su masa, podemos calcular la presion por la fórmula

$$p=k\rho,$$

en la que $k=\mathrm{K}g(1+\alpha t)$. La ecuacion

$$dp=\rho df,$$

se trasforma, dividiéndola por la anterior, en

$$\frac{dp}{p}=\frac{1}{k}df=-\frac{g}{k}dz=-\frac{dz}{\mathrm{K}(1+\alpha t)};$$

integrando esta ecuacion, y llamando p_0 á la presion correspondiente á la altura z, resultará

$$(8)\quad l.\frac{p}{p_0}=-\frac{z-z_0}{\mathrm{K}(1+\alpha t)};$$

y pasando de los logaritmos á los números, será

$$(9)\quad p=p_0\times e^{-\frac{z-z_0}{\mathrm{K}(1+\alpha t)}},$$

en la que vemos, que la presion p disminuye á medida que la altura $z-z_0$ aumenta; y es próximamente constante en todos los puntos de una masa gaseosa de poca altura, porque siendo $z-z_0$ muy pequeño, $e^{-\frac{z-z_0}{K(1+\alpha t)}}$ es próximamente igual á 1.

790. En este cálculo hemos supuesto que g es constante, lo cual no es cierto, sino cuando la altura de la masa gaseosa es pequeña. Cuando se trata de la presion atmosférica, como la altura de la atmósfera es muy grande, no puede aplicarse el procedimiento que acabamos de exponer. Entónces el peso g' de la unidad de masa, ó la aceleracion debida á la gravedad á la altura z, estará dado por la fórmula

$$\frac{g'}{g}=\frac{r^2}{(r+z)^2},$$

siendo r el rádio de la Tierra. La ecuacion del equilibrio del aire es

$$dp=-\rho g'dz;$$

y la densidad ρ, á la temperatura t, bajo la presion p, está siempre expresada por

$$\rho=\frac{p}{Kg(1+\alpha t)},$$

en la que g es la aceleracion debida á la gravedad en la estacion inferior, habiéndose determinado K para esta misma estacion.

Por consiguiente

$$\rho g'=\frac{p}{K(1+\alpha t)}\cdot\frac{g'}{g}=\frac{p}{K(1+\alpha t)}\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2};$$

sustituyendo y dividiendo por p, resultará

$$(10)\quad \frac{dp}{p}=-\frac{1}{K(1+\alpha t)}\cdot\frac{r^2}{(r+z)^2}dz.$$

La temperatura t varía con la altura z, pero se ignora la ley de esta variacion; y hasta que se conozca esta ley, no se podrá integrar la ecuacion (10). Se orilla esta dificultad, reemplazando t por el promedio de las temperaturas t_0 y t_1, observadas en la estacion inferior y en la estacion superior, es decir, haciendo $t=\frac{t_0+t_1}{2}$. El coeficiente de dilatacion de los gases $\alpha = 0,00366$, que multiplica á t, es bastante pequeño, en su consecuencia, el resultado que obtengamos será muy aproximado al verdadero; ademas, para tener en cuenta la presencia del vapor de agua contenido en la atmósfera, se fuerza un poco este valor, y se pone $\alpha = 0,004$; y será

$$1 + \alpha t = 1 + \frac{2(t_0 + t_1)}{1000}.$$

La integral definida de la ecuacion (10), despues de sustituir este valor, tomada desde $z=0$, hasta $z=z$, y siendo respectivamente las presiones p_0 y p, es

$$(11) \quad l.\frac{p_0}{p} = \frac{r}{K\left(1 + \frac{2(t_0+t_1)}{1000}\right)} \cdot \frac{z}{r+z}.$$

791. Las presiones atmosféricas p_0 y p se miden por las alturas de las columnas barométricas correspondientes, determinadas en la estacion inferior y en la estacion superior. Conocidas estas presiones, la fórmula (11) dará la altura vertical que separa las dos estaciones; este es el fundamento de la nivelacion barométrica, ó sea de la determinacion de alturas por medio del barómetro.

Al llevar el barómetro de una estacion á otra disminuye la gravedad á medida que nos elevamos, y debemos tener en cuenta esta disminucion, y tambien de las diferencias de temperatura; circunstancias que alteran la densidad del mercurio, y las alturas de las columnas barométricas que miden las presiones. El coeficiente de dilatacion absoluta del mercurio es $6 = \frac{1}{5412}$; sea h la altura barométrica leida en la estacion inferior, á la temperatura t'_0 del termómetro unido al barómetro, ρ_0 la densidad del mercurio á 0^0; $\frac{\rho_0 g}{1+6t'_0}$ será el peso de la unidad de volúmen del mercurio á t'_0; la altura h corresponde á la presion $p_0 = \frac{\rho_0 g}{1+6t'_0}.h.$

Del mismo modo, $p=\frac{\rho_0 g'}{1+\beta t'_1}.h'$, siendo h' la altura del barómetro, observada en la estacion superior. De estas relaciones se deduce

$$\frac{p_0}{p}=\frac{g}{g'}\cdot\frac{1+\beta t'_1}{1+\beta t'_0}\cdot\frac{h}{h'}=\frac{(r+z)^2}{r^2}\cdot\frac{1+\beta t'_1}{1+\beta_0 t'}\cdot\frac{h}{h'}.$$

Como β es muy pequeño, podemos reemplazar la fraccion $\frac{1+\beta t'_1}{1+\beta t'_0}$, por su valor aproximado $\frac{1}{1+\beta(t'_0-t'_1)}$; obtenido, multiplicando los dos términos de aquella por $1-\beta t_1'$ y despreciando en el numerador $-\beta^2 t'^2_1$ y en el denominador $-\beta^2 t'_0 t_1'$; que bajo esta forma nos indica, que la correccion de las temperaturas del mercurio se reduce á reemplazar la altura h' por $h'\,(1+\beta\,(t'_0-t'_1))$, sin cambiar en nada la altura h observada en la estacion inferior. Llamemos H á este producto, ó á la altura barométrica de la estacion superior corregida, y tendremos

$$\frac{p_0}{p}=\frac{(r+z)^2}{r^2}\times\frac{h}{H},$$

y $$l.\frac{p_0}{p}=l.\frac{h}{H}+2l.\frac{r+z}{r}=l.\frac{h}{H}+2\,l.\left(1+\frac{z}{r}\right)$$

y la ecuacion (11), de la que hemos de deducir el valor de z, será

$$l.\frac{h}{H}+2\,l.\left(1+\frac{z}{r}\right)=\frac{r}{K\left(1+\frac{(t_0+t_1)}{1000}\right)}\cdot\frac{z}{r+z}.$$

Pasando de los logaritmos neperianos designados por $l.$ á los vulgares designados por log., para lo cual basta multiplicar por el módulo $\mu=0{,}434295.....$, la ecuacion toma la forma

$$\log.\frac{h}{H}+2\log.\left(1+\frac{z}{r}\right)=\frac{\mu r}{K\left(1+\frac{2(t_0+t_1)}{1000}\right)}\cdot\frac{z}{r+};$$

despejando la z del numerador del segundo miembro, suponiendo las demas z conocidas, resulta

$$(12)\quad z=\frac{K}{\mu}\left(1+\frac{2\,(t_0+t_1)}{1000}\right)\left[\log.\frac{h}{H}+2\log.\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]\left(1+\frac{z}{r}\right).$$

792. Esta fórmula es á propósito para el cálculo por aproximaciones sucesivas. Observaremos en ella, que z es muy pequeña con relacion al radio de la Tierra, $r=6366200^{m}$, próximamente; podremos, pues, hacer $z=0$ en el segundo miembro, y tendremos un valor aproximado para z; sustituiremos este primer valor en el segundo miembro de la ecuacion (12), y obtendremos un segundo valor de z, más aproximado que el primero y así sucesivamente. Limitándonos á la primera aproximacion, la fórmula se reduce á

$$(14) \quad z=A\left(1+\frac{2(t_0+t_1)}{1000}\right)\log.\frac{h}{H}.$$

La cantidad constante A, se ha determinado por repetidas experiencias, y varía con la latitud φ del lugar de la observacion. Ramond ha deducido de muchísimas observaciones, hechas en los Pirneos, la fórmula

$$z=18393^{m}\times(1+0,002837\cos 2\varphi)\left(1+\frac{2(t_0+t_1)}{1000}\right)\log.\frac{h}{H}.$$

Para más exactitud se usa la fórmula completa, en que el coeficiente numérico tiene un valor un poco diferente

$$(15) \quad z=18336^{m}\times(1+0,002837\cos 2\varphi)\left(1+\frac{2(t_0+t_1)}{1000}\right)$$
$$\times\left[\log.\frac{h}{H}+2\log.\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]\left(1+\frac{z}{r}\right).$$

Desarrollando en serie $1+\frac{z}{r}$, y tomando sólo el primer término de la serie, resulta la siguiente ecuacion, dada por Laplace en su *Mecánica celeste*,

$$z=\log.\frac{h}{H}\times 18336^{m}\times(1+0,002871\cos 2\varphi)\left(1+\frac{2(t_0+t_1)}{1000}\right)$$
$$\times\left[1+\frac{\log.\frac{h}{H}+0,868589\frac{z}{r}}{\log.\frac{h}{H}}\right]. \quad (16)$$

En esta fórmula $H=h'\left(1+\frac{1}{5412}(t'_0-t'_1)\right)$. Las temperaturas t'_0 y t'_1 del mercurio, al hacer las dos observaciones, se determinan por el termómetro unido al barómetro, es decir, por un termómetro sumergido en el mercurio de la cubeta del barómetro. Las temperaturas t_0 y t_1 se determinan en las dos observaciones por un termómetro libre.

De estas fórmulas se han deducido otras por simples trasformaciones, las cuales se han reducido á tablas, que facilitan considerablemente la determinacion de alturas por medio del barómetro. Tales son las de Litrow insertas en el Anuario del Observatorio de Madrid del año 1860, y las de Gauss insertas en el del año 1877.

793. Para la aplicacion de las fórmulas establecidas á la nivelacion barométrica, debe tenerse presente, que las superficies de nivel en la atmósfera, son superficies paralelas á la superficie del mar, cuando se supone que la atmósfera está en equilibrio; este equilibrio exije que todos los puntos de una superficie de nivel tengan la misma temperatura, lo cual no puede suceder, porque en cada instante el Sol calienta una region de esta superficie, miéntras que el enfriamiento de la noche hace bajar la temperatura de la region opuesta. Luego es imposible el equilibrio de la atmósfera. El desigual caldeamiento de las capas atmosféricas hace que se eleven las más calientes, y por consiguiente ménos densas, y que se precipiten á ocupar su lugar las más frias y más densas, resultando de estas desigualdades de temperatura las corrientes que se llaman *vientos*. De aquí resulta, que las fórmulas de nivelacion barométrica no son absolutamente exactas, porque se fundan en la hipótesis del equilibrio de la atmósfera, y de la constancia de la presion en cada uno de sus puntos; y en efecto, las presiones observadas no son rigurosamente constantes.

A pesar de esta falta de exactitud de las fórmulas, producen resultados muy próximos á la verdad, porque las causas que hacen variar las presiones de la atmósfera, actúan probablemente en el mismo sentido cuando las dos estaciones en que se observa el barómetro están próximas, y las observaciones son simultáneas, ó trascurre poco tiempo de una á otra.

Cuando se quiere una altura muy aproximada á la verdadera, se repiten las observaciones en las dos estaciones, procurando que sean simultáneas, y de este modo se obtendrá en cada una la presion media del aire, ó la presion en cada una de ellas, y la fórmula dará la altura buscada.

Equilibrio de una mezcla de gases pesados.

794. Cuando varios gases pesados están unos en presencia de otros, no se superponen como los líquidos, sino que cada uno, como si estuviera solo, llena todo el espacio que se le ofrece, y la presion de la mezcla que resulta es igual á la suma de las presiones de todos ellos.

Sea $p=k\rho$ la relacion entre la presion y la densidad en uno de estos gases; la ecuacion del equilibrio será para este gas

$$\frac{dp}{p}=-\frac{g}{k}\,dz;$$

de la que se deduce, tomando la integral definida, y despejando p

$$p=p_0e^{-\frac{g(z-z_0)}{k}}$$

y haciendo $z-z_0=h$

$$p=p_0e^{-\frac{gh}{k}}$$

La densidad á la altura p será

$$\rho=\frac{p}{k}=\frac{p_0e^{-\frac{gh}{k}}}{k}.$$

Para una mezcla de gases, cuyas relaciones entre sus presiones individuales p_0, p_0', p_0'', p'''_0 .... y sus densidades, sean k, k', k'', k''',.....; á la altura z_0, la presion total, será en la base de la columna gaseosa

$$p_0+p'_0+p''_0+p'''_0+\ldots.;$$

y á la altura h

$$p_0 e^{-\frac{gh}{k}}+p_0' e^{-\frac{gh}{k'}}+p_0'' e^{-\frac{gh}{k''}}+\ldots..;$$

la densidad del primer gas es $\frac{p_0 e^{-\frac{gh}{k}}}{k}$, la del segundo $\frac{p_0' e^{-\frac{gh}{k'}}}{k'}$; la del tercero $\frac{p_0'' e^{-\frac{gh}{k}}}{k''}$,....., todas á la altura h; por ser sus densidades en la base

$$\frac{p_0}{k},\ \frac{p_0'}{k'},\ \frac{p_0''}{k''},\ldots..;$$

á la altura h las densidades serán éstas multiplicadas por los números

$$e^{-\frac{gh}{k}},\ e^{-\frac{gh}{k'}},\ e^{-\frac{gh}{k''}}\ldots..$$

Estos números desiguales, son tanto más pequeños, cuanto menores son k, k', k''..... ; y k es tanto menor cuanto más denso es el gas considerado como se ve en la relacion $k=\frac{p}{\rho}$. La disminucion de la cantidad de un gas, á una altura dada, es tanto más sensible cuanto mayor es su densidad. Esto explica porqué algunos gases muy pesados, como el ácido carbónico, el ácido sulfuroso, el cloro, etc., se condensan en los sitios más bajos de los lugares en que están mezclados con el aire atmosférico, el vapor de agua y otros gases más ligeros.

Equilibiro de los flúidos en vasos comunicantes.

795. Las superficies de nivel, cuya ecuacion diferencial es

$$Xdx+YdyZdz=0,$$

no existen realmente donde no hay continuidad del flúido; más allá de las paredes sólidas que limitan el espacio que ocupa, vienen á ser ficticias. La presion p es constante en toda la extension real de la superficie de nivel, y la pared debe ejercer, para el equilibrio, esta misma presion p por unidad de superficie en el punto en que está en contacto con el flúido. Luego el equilibrio no existirá, si cada punto de la pared no tiene una resistencia suficiente para desarrollar la presion p.

796. Apliquemos estos resultados á los líquidos. Consideremos, primero un sólo líquido en dos vasos comunicantes: en el tubo de comunicacion el líquido estará en las mismas condiciones que si estuviera en un sólo vaso; el plano horizontal SS′ (fig. 328), será una superficie de nivel, y lo mismo lo será todo plano que pase por el tubo de comunicacion; en los vasos M y N las superficies libres del líquido, AB y CD, estarán en un plano horizontal, que es tambien la superficie de nivel, para la cual, fuera de la presion atmosférica, la presion es nula; de modo que el líquido se eleva en los dos vasos á la misma altura.

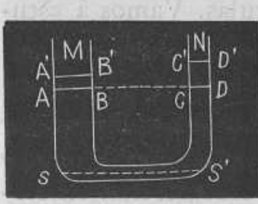

Fig. 328.

Supongamos que sobre AB en el vaso M y sobre CD en el vaso N, se vierten dos líquidos de densidades diferentes ρ, y ρ', elevándose en el primero hasta la altura $AA'=h$, y en el segundo hasta $CC'=h'$. Será necesario para el equilibrio que estas columnas líquidas ejerzan presiones iguales sobre la unidad de superficie de AB y CD, que están en una misma superficie de nivel, y tendremos

$$\omega g \rho h = \omega g \rho' h',$$

ó

$$\rho h = \rho' h';$$

es decir, que las alturas á que los líquidos se elevan en los dos vasos están en razon inversa de sus densidades.

Veríamos del mismo modo que si se añade un número cualquiera de líquidos en los dos vasos, será necesario para el equilibrio, que la suma de los productos de las densidades de los líquidos contenidos en el vaso M, por sus respectivas alturas, sea igual á la suma de los productos de las densidades, por las alturas de los líquidos contenidos en el vaso N.

Presiones de los flúidos sobre las paredes de las vasijas que los contienen.

797. En las lecciones anteriores hemos estudiado las presiones que se desarrollan en los flúidos por la accion de las fuerzas que solicitan sus moléculas. Vamos á estudiar ahora las presiones que se ejercen sobre las paredes de los recipientes en que están contenidos.

Para encontrar la presion que ejerce un flúido en equilibrio sobre una porcion de pared, terminada en un contorno cerrado, se divide el área de esta porcion en elementos superficiales, infinitamente pequeños, se conoce (763) para cada uno de estos elementos, la presion p por unidad de superficie, la cual se ejerce normalmente á su plano; por consiguiente, el problema se reduce á componer estas fuerzas infinitamente pequeñas $pd\omega$, aplicadas á cada uno de estos elementos y cuya posicion y magnitud son conocidas. Si la porcion de pared de que se trata es plana, todas las fuerzas $pd\omega$ son paralelas, por ser normales á la superficie, y tienen una resultante única; el punto de aplicacion de esta resultante se llama *centro de presion* de la superficie dada. Cuando la superficie que recibe la presion es una superficie esférica, todas las presiones elementales pasan por el centro de la esfera, y se componen en una sola fuerza, que pasa por este punto, el cual es en este caso el centro de presion.

798. Ordinariamente no se consideran las presiones de una manera tan general, y se estudian solo las que ejercen los líquidos pesados y homogéneos prescindiendo de la presion atmosférica, entónces el centro de presion es un punto bien determinado que depende únicamente de la forma y de la posicion de la superficie sobre que se ejerce la presion.

La determinacion del centro de presion, así definido, se reduce á la determinacion del centro de gravedad de un volúmen homogéneo. Sea AB (fig. 329), la superficie libre del líquido que sabemos es un plano horizontal, CD una porcion de pared plana; tomemos en esta porcion de pared un elemento superficial infinitamente pequeño e; la presion

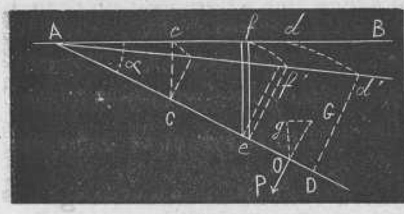

Fig. 329.

sobre este elemento, referida á la unidad de superficie, prescindiendo de la presion atmosférica, está representada por la altura ef de la superficie libre del líquido sobre el punto e, y está dirigida segun la normal ef' al elemento; por consiguiente, su magnitud es igual al peso de una columna líquida ef', cuya base sea el elemento $d\omega$ de superficie, y cuya altura es la ef', igual ef trasportada sobre la normal á la pared. Hagamos esta operacion para todos los elementos de la superficie dada; obtendremos un tronco de cilindro $Cc'd'D$, que tendrá por base el área dada y por altura en cada punto, la distancia de este punto á la superficie libre. Las extremidades de todas las columnas líquidas, así obtenidas, estarán situadas en un plano $c'd'$, que pasa por la recta que se proyecta en A, segun la cual el plano de la pared corta á la superficie libre del líquido.

La presion total que designaremos por P, es igual al peso de este cilindro líquido y pasa por su centro de gravedad G; luego se obtendrá el centro de presion O del área dada, proyectando el punto G sobre el plano de la pared.

Observaremos que al llevar las columnas verticales *ef*, á la posicion *ef'* normal á la pared, los volúmenes de estas columnas están todos multiplicados por $\frac{1}{\cos\alpha}$, siendo α el ángulo de que han girado las verticales para venir á ser normales á la pared; es decir, el ángulo de la pared con el horizonte. El centro de gravedad G del cilindro deformado, se obtendrá del mismo modo haciendo girar del ángulo α la vertical O*g*, que pasa por el centro de gravedad *g* del cilindro primitivo C*cd*D. Luego el centro de presion es el pié de la vertical bajada sobre la pared del centro de gravedad *g* del cilindro de aristas verticales C*cd*D. Es preferible la primera construccion á la segunda, porque es más general y da el centro de presion en todos los casos, miéntras que la segunda no es aplicable al caso en que la pared sea vertical.

Problemas.

799. Apliquemos esta teoría á algunos problemas. —1.° *Pared rectangular*, de la que un lado está dirigido segun la recta horizontal que se proyecta en A, (figura 330); el lado opuesto se proyecta en D, y los otros dos lados están dirigidos segun las líneas de máxima pendiente de la pared. El tronco de cilindro se obtendrá, tomando sobre la normal á la pared en el punto D, una longitud D*d'*=D*d*, y trazando la A*d'*; obtendremos así

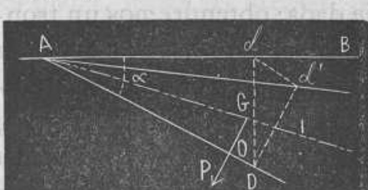

Fig. 330.

un prisma recto, cuya base es el triángulo ADd' y cuya altura es la dimension del rectángulo que se proyecta en A. Sea $AD=a$, y b la otra dimension del rectángulo, tendremos $Dd=a\,\mathrm{sen}\,\alpha$; el área del triángulo $ADd'=\frac{1}{2}a^2\mathrm{sen}\,\alpha$, y el volúmen del prisma es $\frac{1}{2}a^2b\,\mathrm{sen}\,\alpha$. La presion total P, siendo ρ la densidad del líquido, será

$$P=\frac{\rho}{2}\cdot a^2b\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

El centro de gravedad G del prisma, está en su plano vertical medio, á los dos tercios de la mediana AI del triángulo ADd', contando desde el punto A. Luego el centro de presion O está sobre la mediana del rectángulo, á los dos tercios de la dimension AD á partir del punto A.

800. 2.° *Triángulo*, cuyo vértice es el punto A situado sobre la superficie libre del liquido, y cuya base horizontal b se proyecta en D, (fig. 330). El tronco de cilindro se convierte en este caso en una pirámide cuadrangular, cuyo vértice está en A, y su base se proyecta segun la recta Dd'. El peso P de esta pirámide es

$$P=\frac{1}{3}\rho.AD\times Dd'.b=\frac{\rho}{3}a^2b\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

El centro de gravedad G está á los tres cuartos de la recta que une el vértice A al centro de gravedad de la base I. El centro de presion O está sobre la mediana que pasa por D, á tres cuartos de esta mediana contando desde A.

801. *Triángulo* cuya base AB (fig. 331), está en la superficie libre del líquido y su vértice en el punto D.

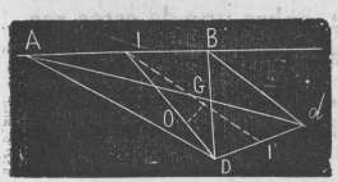

Fig. 331.

Desde este punto tracemos la perpendicular Dd al plano DAB, igual á la distancia desde el punto D á la superficie libre; el tronco de cilindro se reducirá en este caso á la pirámide triangular $ABdD$. Representando por S el área del triángulo ABD, y por h

la distancia del vértice D al nivel del líquido el volúmen de la pirámide es $\frac{1}{3}Sh$, y su peso

$$P = \frac{\rho}{3}Sh.$$

El centro de gravedad G de la pirámide está en medio de la recta II', que une los puntos medios de las aristas opuestas AB y D*d*. Proyectando sobre el plano de la pared la recta II', se obtiene la mediana ID del triángulo, y al centro de presion es su punto medio O.

Determinacion analítica del centro de presion de un área plana.

802. Sean LT (fig. 332), la interseccion del plano de la pared con la superficie libre del líquido, que se suele llamar *línea de agua*; AB el contorno de la porcion de pared dada, y G su centro de gravedad. Tracemos por este punto dos ejes rectangulares en el plano de la pared, el GX horizontal y el GY, segun la línea de máxima pendiente de este plano; sean M (x, y) un punto cualquiera de la pared, y $GY = a$ la distancia conocida del centro de gravedad á la línea de agua. Tambien conocemos la densidad ρ del líquido, y el ángulo α que mide la inclinacion del plano de la pared.

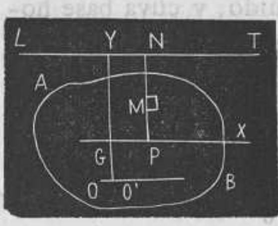

Fig. 332.

Descompongamos el área dada en rectángulos $dxdy$; la presion por unidad de superficie, sobre uno de estos rectángulos, es ρh, siendo h la distancia del punto M á la superficie libre; pero $h = \text{MN}\,\text{sen}\,\alpha$, y $\text{MN} = a - y$. Luego la presion elemental sobre el rectángulo infinitamente pequeño M es

$$\rho(a-y)\,\text{sen}\,\alpha\, dxdy.$$

Para obtener la presion total P, sumaremos las presiones sobre todos los elementos de que se compone el área;

la suma será una integral doble, que se extiende á todos los elementos de la porcion de pared dada; y tendremos

$$P = \int\int \rho \operatorname{sen}\alpha\,(a-y)\,dxdy.$$

El punto de aplicacion O, de esta resultante, lo obtendremos aplicando el teorema de los momentos con respecto á los ejes coordenados, y llamando x_1 é y_1 á las coordenadas de este punto, resultará

$$Px_1 = \int\int \rho \operatorname{sen}\alpha(a-y)\,xdxdy,$$

$$Py_1 = \int\int \rho \operatorname{sen}\alpha\,(a-y)\,y\,dxdy;$$

α es constante, lo mismo que ρ, si el líquido es homogéneo, y tendremos

$$(1)\quad \begin{cases} P = \rho \operatorname{sen}\alpha(a\int\int dxdy - \int\int ydxdy), \\ Px_1 = \rho \operatorname{sen}\alpha(a\int\int xdxdy - \int\int xydxdy), \\ Py_1 = \rho \operatorname{sen}\alpha(a\int\int ydxdy - \int\int y^2dxdy). \end{cases}$$

La integral $\int\int dxdy$ representa el área total AB, y por abreviar la representaremos por S. Las integrales $\int\int ydxdy$, $\int\int xdxdy$ son cero por ser el orígen el centro de gravedad. La integral $\int\int y^2dzdy$ puede definirse como en la Dinámica, el momento de inercia μ del área AB con respecto al eje GX; y las ecuaciones (1) se reducen á

$$(2)\quad \begin{cases} P = \rho \operatorname{sen}\alpha.\,aS \\ Px_1 = -\rho \operatorname{sen}\alpha \int\int xydxdy \\ Py_1 = -\rho \operatorname{sen}\alpha.\,\mu. \end{cases}$$

La primera de estas ecuaciones prueba que la presion media $\frac{P}{S}$, es igual á la presion por unidad de superficie en el centro de gravedad, $\rho \,.\, a \operatorname{sen} \alpha$.

La integral $\int\int xy\,dx\,dy$ es nula, cuando la superficie plana es simétrica con respecto á cualquiera de los ejes coordenados; porque entónces los elementos del área son iguales y simétricos dos á dos, y los elementos correspondientes $xy\,dx\,dy$ de la integral se destruyen, por ser los mismos los elementos $y\,dx\,dy$, siendo las x iguales y de signo contrario; ó $x\,dx\,dy$ siendo las y iguales y de signo contrario.

803. Las coordenadas x_1 é y_1 determinan un punto O, cuya posicion es independiente de los factores ρ y $\operatorname{sen}\alpha$, pues al dividir los dos sistemas de ecuaciones (2) por la primera desaparecen dichos factores. El momento de inercia μ, producto de cuatro factores puede hacerse igual á SK^2, siendo K el radio de giro de la porcion de pared con respecto al eje GX, y dividiendo la tercera ecuacion por la primera, resulta

$$y_1 = -\frac{\mu}{aS} = -\frac{K^2}{a}.$$

Por el punto O tiremos la horizontal OO'; la distancia GO' será igual á $-y_1$, por consiguiente, el producto $GO' \times GY = K^2$. Encontramos aquí la relacion que liga, en el péndulo compuesto, las distancias del eje de oscilacion y del eje de suspension al centro de gravedad (672). Si suponemos que la área AB sea pesada, y su peso distribuido en toda ella con igualdad, O'Y será la longitud del péndulo simple que oscila en el mismo tiempo que el péndulo compuesto, que se obtendria haciendo oscilar esta porcion de pared alrededor de la horizontal LT.

804. Ademas, el centro de presion O es para la área

material AB el centro de percusion conjugado de la línea de agua LT. Para probarlo, busquemos directamente el punto O en que debe aplicarse una percusion normal Q á la área material, supuesta en reposo, para que el movimiento inicial sea una rotacion alrededor de LT.

Sean x_1 é y_1 las coordenadas del punto O buscado; la velocidad de traslacion impresa al centro de gravedad, será, por ser $Q=\rho S v$, igual á $\frac{Q}{\rho S}$, siendo ρ la masa por unidad de superficie del área AB. La rotacion alrededor del centro de gravedad, debe verificarse alrededor de una recta GX paralela á LT; la velocidad angular tendrá un valor ω tal, que la recta LT permanece inmóvil en virtud de la coexistencia de los dos movimientos; para lo cual es necesario y suficiente que

$$\omega \times GY=\frac{Q}{\rho S}.$$

Por el teorema de las cantidades de movimiento tenemos

$$\omega=\frac{Q\times(-y_1)}{\mu}=-\frac{Qy_1}{SK^2};$$

poniendo este valor de ω en la ecuacion anterior, resulta $ay_1=-K^2$, que es una de las relaciones que se trata de verificar.

Para buscar el valor de x_1, apliquemos el teorema de d'Alembert extendido á las fuerzas instantáneas y expresemos que el momento de la presion Qx_1, con respecto á la recta GY, es igual á la suma de las cantidades de movimiento finales con respecto á esta recta. La cantidad de movimiento del elemento M, es

$$\rho dx\,dy \times (\omega . NM)=\rho dx\,dy . \omega(a-y);$$

su momento con respecto á GY es $\rho . \omega x(a-y)dxdy$. La suma de todos estos momentos es

$$\int\int \rho\omega x(a-y)dxdy = \rho\omega\left(\int\int axdxdy - \int\int xydxdy\right)$$
$$= -\rho\omega\int\int xydxdy,$$

suma que en virtud del teorema es igual á Qx_1; luego

$$x_1 = \frac{-\rho\omega\int\int xydxdy}{Q} = -\frac{\int\int xydxdy}{aS};$$

ecuacion que está conforme con las ecuaciones

$$Px_1 = -\rho\,\text{sen}\,\alpha\int\int xydxdy,$$
$$P = \rho\,\text{sen}\,\alpha \times aS.$$

LECCION LXV.

Sólidos sumergidos en los flúidos. Presiones sobre su superficie exterior.—Principio de Arquímedes.—Cuerpos flotantes.—Equilibrio de un prisma recto.—Estabilidad del equilibrio de los líquidos superpuestos.—Estabilidad del equilibrio de los sólidos sumergidos en los flúidos pesados.—Teoría de la estabilidad del equilibrio de los cuerpos flotantes.

Sólidos sumergidos en los flúidos. Presiones sobre su superficie exterior.

805. Un sólido sumergido en un flúido, experimenta presiones de parte de éste en todos los elementos de su superficie exterior, que satisfacen al teorema siguiente: *Las presiones ejercidas sobre la superficie exterior de un cuerpo sólido de dimensiones finitas por un flúido no pesado, en que se halla sumergido, se equilibran.*

Para demostrar este teorema tomemos en la superficie del cuerpo un elemento infinitamente pequeño $d\omega$; sean α, β, γ, los ángulos que la normal á este elemento forma con tres ejes rectangulares OX, OY, OZ. La presion $pd\omega$, que se ejerce sobre este elemento, la podemos descomponer en tres componentes paralelas á los ejes, é iguales á $pd\omega\cos\alpha, pd\omega\cos\beta, pd\omega\cos\gamma$. Proyectemos el elemento $d\omega$ sobre los planos coordenados, el cilindro proyectante, paralelo al eje OX, encontrará una segunda vez á la superficie exterior del cuerpo segun un elemento superficial $d\omega'$;

la normal á este elemento formará con OX un ángulo α', y tendremos, por ser las proyecciones de estos elementos sobre el plano YZ iguales, $d\omega \cos\alpha = d\omega' \cos\alpha'$. La componente $pd\omega \cos\alpha$ paralela al eje OX es igual y opuesta á la componente $pd\omega' \cos\alpha'$; son opuestas estas componentes porque ambas están dirigidas hácia el interior del cuerpo.

Si el cilindro proyectante encuentra á la superficie del cuerpo más de dos veces, el número de veces que la encuentre será par, y las correspondientes á la entrada podrán agruparse una á una con las de la salida, y la suma de todas las presiones paralelas al eje OX será igual cero; lo mismo será para todas las presiones paralelas á los demás ejes OY, OZ; y como el sistema de los tres ejes rectangulares puede tomar en el cuerpo una posicion cualquiera, sin que deje de ser cierto el resultado anterior, la suma de todas las presiones sobre toda la superficie exterior del sólido es cero, ó estas presiones se equilibran.

Principio de Arquímedes.

806. *Un cuerpo sólido, sumergido en un flúido pesado en equilibrio, está en equilibrio cuando su peso es igual al peso del flúido desalojado, y cuando el centro de gravedad del sólido y el de la masa flúida que desaloja están en una misma vertical.*

Tal es el enunciado del *principio de Arquímedes.* Para demostrarlo, imaginemos en el seno de un flúido en equilibrio sometido á fuerzas dadas, una superficie envolvente cerrada que rodea por todas partes una porcion de la masa flúida; estando esta masa en equilibrio, las fuerzas exteriores se equilibran con las presiones desarrolladas sobre toda la superficie de la envolvente; luego si se reemplaza la masa flúida contenida en la envolvente imaginada, por un cuerpo sólido de la misma forma, y solicitado por las mismas fuerzas, el equilibrio subsistirá.

Apliquemos el resultado que acabamos de obtener á los cuerpos sólidos sumergidos en un líquido ó en un gas pesado. En este caso las fuerzas exteriores que solicitan el flúido contenido en la envolvente se reducen á la gravedad, representada por el peso del flúido, aplicado en su centro de gravedad. Las presiones desarrolladas sobre la superficie de la envolvente tienen por consiguiente tambien una resultante vertical, igual al peso del flúido, aplicada en su centro de gravedad; pero dirigida de abajo arriba.

El cuerpo sólido sumergido en el flúido, en el que ocupa el lugar de la envolvente, está tambien sometido á dos fuerzas verticales, el peso del cuerpo, aplicado en su centro de gravedad y dirigido de arriba á abajo, y la resultante de las presiones, dirigida de abajo á arriba, igual al peso del flúido desalojado por el cuerpo y aplicada en el centro de gravedad del flúido. El cuerpo estará en equilibrio si estas dos fuerzas son iguales y directamente opuestas; lo cual demuestra el principio de Arquímedes.

Cuerpos flotantes.

807. Hemos supuesto que el sólido está enteramente sumergido en el flúido, y puede suceder que sea flotante en su superficie, es decir, que una parte del cuerpo quede fuera del flúido; entónces es necesario que el flúido bañe por todo su perímetro las secciones horizontales de la parte sumergida. Las componentes horizontales de las presiones se destruyen dos á dos, en este caso, y las componentes verticales dan lugar á una diferencia siempre dirigida de abajo á arriba, é igual al peso del líquido desalojado; y se puede enunciar el principio de Arquímides,

con más generalidad, del siguiente modo: *Todo cuerpo sólido, sumergido ó flotante en un liquido pesado en equilibrio, recibe de este líquido una presion vertical dirigida de abajo á arriba, igual al peso del líquido desalojado, y aplicada en el centro de gravedad de este líquido: esta presion de abajo á arriba suele llamarse pérdida de peso.*

Cuando las secciones horizontales de un cuerpo sólido, en parte sumergido, no son bañadas por todo su contorno, la superficie mojada del sólido viene á ser una pared lateral para el líquido, y el principio de Arquímides no es aplicable.

Equilibrio de un prisma recto.

808. Supongamos un prisma recto, homogéneo y flotante en la superficie de un líquido en equilibrio; este prisma podrá tener diferentes posiciones de equilibrio, y en todas, los centros de gravedad del cuerpo y del líquido desalojado deben estar situados en la misma vertical, y el peso del cuerpo debe ser igual al peso del líquido desalojado.

De várias maneras puede satisfacerse la primera condicion: 1.ª, colocando horizontalmente las aristas laterales del prisma y haciéndole girar hasta que los dos centros de gravedad estén en la misma vertical; posicion á que siempre llegaremos, porque la posicion horizontal de las aristas coloca al centro de gravedad de la parte sumergida en el plano medio del prisma, que contiene el centro de gravedad del cuerpo: 2.ª, colocando el prisma verticalmente; los dos centros de gravedad están entónces en la vertical que une los centros de gravedad de las bases.

Sólo nos ocuparemos de la primera solucion, pues la segunda no tiene aplicaciones. En la primera distinguiremos dos casos, segun que el prisma tenga sumergidas una ó dos aristas, los cuales conducen á la misma ecuacion.

809. 1.º Sea ABC (fig. 333), la seccion recta del prisma, que contiene su centro de gravedad, en una posicion de equilibrio; sumergido el prisma hasta la línea DE. El centro de gravedad del prisma está situado en el punto G, centro de gravedad del triángulo ABC. El centro de gravedad de la parte sumergida está situado en G_1, centro de gravedad del triángulo ADE. El equilibrio exige: 1.º, que la recta GG_1 sea vertical; 2.º, que la relacion de las secciones $\frac{ABC}{ADE}$ sea igual á la relacion inversa de las densidades $\frac{\rho'}{\rho}$ del líquido y del prisma, por ser $ABC \times \rho = ADE \times \rho'$, es decir, que

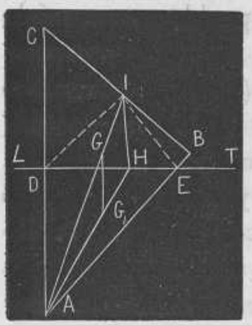

Fig. 333.

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

El triángulo ABC es conocido; designemos por b y c los lados que comprenden el ángulo A, y sea $AD = x$, $AE = y$, los lados que comprenden el mismo ángulo en el triángulo ADE; tendremos

$$(1) \qquad \frac{ABC}{ADE} = \frac{ab}{xy} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Para expresar que la recta GG_1 es vertical, expresaremos que su paralela IH lo es, es decir, que esta es perpendicular á DE; y como H es el punto medio de DE, el punto I equidista de D y de E. Sean $p = AI$, $IAC = \alpha$, $IAB = 6$; los triángulos DIA y EIA, darán las ecuaciones

$$\overline{DI}^2 = x^2 + p^2 - 2px \cos \alpha,$$
$$\overline{EI}^2 = y^2 + p^2 - 2py \cos 6;$$

y restándolas, resulta

$$(2)\quad x^2 - y^2 - 2px\cos\alpha + 2py\cos\beta = 0.$$

De las ecuaciones (1) y (2) deduciremos los valores de las incógnitas x é y.

Considerando estas incógnitas como coordenadas, las ecuaciones (1) y (2) representan dos hipérbolas, y sus intersecciones serán las soluciones del problema; que á lo más serán cuatro.

Eliminando y entre las ecuaciones (1) y (2) y reduciendo, resulta

$$(3)\quad \rho'^2x^4 - 2p\rho'^2\cos\alpha\, x^3 + 2p\rho\rho' ab\cos\beta\, x - \rho^2a^2b^2 = 0.$$

Siendo esta ecuacion de grado par, y su último término negativo, tiene por lo ménos dos raíces reales, una positiva y otra negativa. La regla de los signos de Descartes prueba que esta ecuacion puede tener á lo más tres raíces positivas y una negativa; pero puede tener dos raíces imaginarias.

Ademas es necesario que $x < b$ é $y < c$. Resumiendo, el problema puede tener tres soluciones ó una sola; y habrá á lo ménos una, siempre que $\rho' > \rho$, que es la condicion necesaria para que el prisma pueda flotar.

810. 2.° El prisma tiene dos aristas sumergidas (figura 334). Será necesario que

$$ABC \times \rho = BDEC \times \rho',$$

ó que

$$\frac{ABC}{BDEC} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \text{ó} \quad \frac{ABC}{ADE} = \frac{\rho'}{\rho' - \rho}.$$

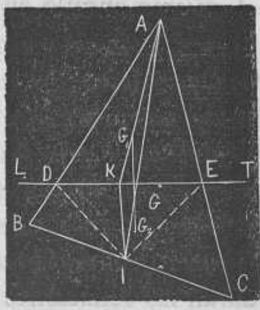

Fig. 334.

La otra condicion de equilibrio exije, que el centro de gravedad del triángulo total y el centro de gravedad del trapecio sumergido, estén situados en la misma vertical. Sea G_1 el centro de gravedad del triángulo que queda fuera del líquido; el centro de gravedad del triángulo ABC, se obtendrá componiendo los pesos del triángulo ADE y del trapecio BDEC aplicados respectivamente á los puntos G_2 y G_1, siendo G_2 el centro de gravedad del trapecio; luego el punto G_1 está situado en la vertical GG_2, y la condicion de equilibrio será tambien, que la recta GG_1 sea perpendicular á DE, ó que DI=EI.

La ecuacion (2) subsiste como en el primer caso, y en la ecuacion (1) bastará poner en vez de ρ, $\rho'-\rho$, para que tambien se verifique. Y tendremos como ántes, á lo más, tres soluciones para esta disposicion de la figura.

Un vértice sumergido, da á lo más tres soluciones, el mismo vértice fuera del líquido da á lo más otras tres; de modo que cada vértice da á lo más seis; los tres vértices darán á lo más diez y ocho posiciones de equilibrio del prisma, ó del triángulo ABC que contiene su centro de gravedad.

Estas soluciones pueden no ser todas admisibles; el mínimo del número de soluciones es seis, porque cada vértice puede estar en equilibrio lo ménos en una posicion sumergido y en otra fuera del líquido, y los tres vértices dan lo ménos seis soluciones; de estas seis posiciones, tres corresponden á un equilibrio estable, y tres á un equilibrio inestable; las cuales alternan en el órden en que se las obtiene, haciendo girar el prisma en la superficie del líquido. Porque entre dos posiciones estables consecutivas, posiciones á las cuales el prisma tiende á volver, cuando se le mueve, hay una posicion de equilibrio inestable, aquella en que el prisma tiene tendencias iguales y contrarias á volver á las posiciones estables próximas. El número de soluciones es necesariamente par, de otro modo esta alternativa llevará consigo la estabilidad y la instabilidad del equilibrio para una misma posicion, lo que indicaria un equilibrio indiferente.

Estabilidad del equilibrio de los líquidos superpuestos.

811. Ya vimos que para el equilibrio de los líquidos pesados superpuestos, es necesario que las superficies de separacion sean planos horizontales; y vamos á ver ahora, que para que este equilibrio sea estable, es necesario que los líquidos más densos estén debajo de los líquidos ménos densos.

Para probarlo turbemos un poco el equilibrio, alterando las superficies de separacion, haciendo penetrar pequeñas masas de uno de los líquidos en el espacio ocupado por el líquido próximo; supongamos para fijar las ideas, que una porcion del líquido superior viene á ocupar el espacio del líquido inferior. Si la densidad del primer líquido es menor que la del segundo, la presion de éste de abajo arriba, sobre la masa extraña que en él ha penetrado, será mayor que el peso de esta masa, y la resultante de estas dos fuerzas tenderá á hacer elevar esta masa sobre el líquido inferior, es decir, á restablecer la superposicion tal como existia al principio. Si, por el contrario, la densidad del líquido superior es mayor que la del líquido inferior, la masa del primer líquido atravesará el segundo, y el equilibrio no se restablecerá, ó lo que es lo mismo, el equilibrio será inestable. Luego para que el equilibrio sea estable, es necesario que las densidades sean decrecientes de abajo á arriba.

Estabilidad del equilibrio de los sólidos sumergidos en los líquidos pesados.

812. Si un cuerpo sólido está en equilibrio en el interior de un flúido pesado, el peso del cuerpo es igual al peso del flúido desalojado, y los centros de gravedad

del cuerpo sólido y del volúmen del flúido desalojado están situados en la misma vertical. Estas condiciones son suficientes para el equilibrio; mas para que este sea estable, es necesario ademas, que el centro de gravedad del cuerpo sólido esté más bajo que el centro de gravedad del flúido desalojado. Separemos un poco el cuerpo de su posicion de equilibrio, de manera que la recta que une los centos de gravedad se incline; la presion del líquido de abajo á arriba y el peso del cuerpo, forman un par que tenderá á volver al cuerpo á su posicion primitiva, si el punto de aplicacion de la presion está más alto que el punto de aplicacion del peso; y en el caso contrario tenderá á dar la vuelta al cuerpo y á colocar el centro de gravedad debajo del punto de aplicacion de la presion.

El equilibrio es indiferente para todo movimiento del cuerpo que no altere el paralelismo de la recta que une los centros de gravedad. Si estos centros coinciden, el equilibrio es completamente indiferente y el cuerpo sólido está en equilibrio en cualquiera posicion en el interior del líquido.

Teoría de la estabilidad del equilibrio de los cuerpos flotantes.

813. El equilibrio de un cuerpo flotante es estable ó inestable, segun que este cuerpo tiende á volver á su posicion de equilibrio, ó á alejarse de ella, cuando se le separa un poco de esta posicion.

El estudio de la estabilidad del equilibrio de los cuerpos flotantes se funda en los problemas siguientes:

1.° Determinar el trabajo de la gravedad y de las presiones, desarrollado por un sólido pesado enteramente sumergido en un líquido pesado en equilibrio, cuando se mueve el sólido, sin que deje de estar enteramente sumergido.

Sea C el cuerpo en la posicion primitiva en el interior del líquido, cuya superficie libre es LT (fig. 335); sean G el centro de gravedad del cuerpo, O el centro de gravedad del líquido desalojado, ó sea el centro de presion, que llamaremos *centro de empuje*; sea P el peso del cuerpo aplicado en G y P′ el empuje del líquido aplicado en O. Sean C′ la segunda posicion del sólido; G′ y O′ las posiciones que toman en ella los puntos G y O.

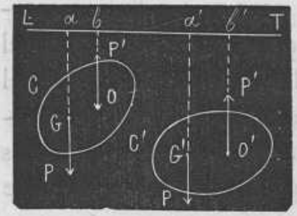

Fig. 335.

El trabajo del cuerpo estará medido por el producto del peso P por el camino vertical recorrido, descendiendo, por su centro de gravedad G; es decir

$$P\times(G'a'-Ga),$$

siendo Ga y $G'a'$ las distancias de los puntos G y G′ al plano de comparacion LT. El trabajo del empuje es asimilable al de un peso que actuará de abajo á arriba, y será igual á $-P'(O'b'-Ob)$, siendo $O'b'$ y $O'b'$ las distancias de los puntos O y O′ á la superficie libre.

El trabajo total de estas dos fuerzas es

$$P(G'a'-Ga)-P'(O'b'-Ob),$$

ó llamando V al volúmen del cuerpo y ρ al peso específico del líquido.

$$P(G'a'-Ga)-\rho V(O'b'-Ob).$$

814. 2.° Determinar el trabajo de la presion ejercida por un líquido sobre un prisma recto, que se hunde verticalmente en el líquido.

Supondremos que la seccion recta del prisma sea bastante pequeña, con respecto á la seccion del vaso que contiene el líquido, para que la superficie libre de éste permanezca á la misma altura, al hundir más ó ménos el prisma.

Sean al (fig. 336), el prisma ya hundido de la cantidad $Cl=x$, y ω su seccion recta. El empuje del líquido sobre el prisma en esta posicion será $\rho\omega x$, siendo ρ la densidad del líquido, y está dirigido de abajo á arriba. Si se hunde el prisma de la cantidad infinitamente pequeña $lb=dx$, el trabajo de la presion será

Fig. 336.

$$-\rho\omega x dx,$$

y para un hundimiento h, el trabajo buscado será

$$\int_0^h -\rho\omega x dx = -\rho\omega\frac{h^2}{2}.$$

En esta fórmula se supone que h es menor que la altura total del prisma dado al. Tambien $-\rho\omega\frac{h^2}{2}=-\rho\omega h\times\frac{h}{2}$; en cuya expresion $\rho\omega h$ es el peso del líquido desalojado, y $\frac{h}{2}$ la distancia de su centro de gravedad á la superficie libre del líquido; luego $\rho\omega h\times\frac{h}{2}$ es el momento del peso del líquido desalojado con respecto al plano LT.

Si en lugar de hundir el prisma en el líquido, se le retira enteramente, conservándole siempre vertical, el trabajo de la presion del líquido será positivo é igual $\rho\omega\frac{h^2}{2}$ siendo h la cantidad de que el prisma estaba sumergido al principio.

Esta demostracion supone que el prisma permanece vertical durante el hundimiento, pero el resultado obtenido es independiente de esta hipótesis. En efecto, el trabajo de la presion durante el hundimiento, es la suma de los trabajos desarrollados por cada elemento m infinitamente pequeño del prisma, (fig. 337), á partir de la posicion m' que este elemento ocupaba en la superficie del líquido, y cualquiera que sea el camino qp seguido por este elemento, el trabajo de la presion será el producto del peso del líquido desalojado por la distancia pr á la superficie libre. El trabajo total, es por consiguiente la suma de 0 á h, de los productos $-\rho\omega dx \times x$, siendo x la distancia pr y dx la altura del elemento m. Integrando, resultará, como ántes $-\rho\omega\frac{h^2}{2}$.

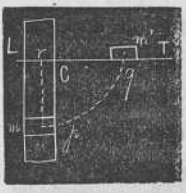

Fig. 337.

815. Estudiadas estas dos cuestiones preliminares, vamos ya á resolver la cuestion general siguiente: determinar el trabajo de la gravedad y de las presiones sobre un cuerpo flotante en la superficie del líquido, al que se imprime un movimiento infinitamente pequeño á partir de su posicion de equilibrio.

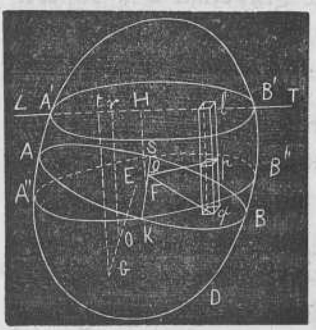

Fig. 338.

Supondremos que el cuerpo flotante AD (fig. 338), está en equilibrio, cuando está sumergido hasta la seccion AB. Demos al cuerpo un movimiento infinitamente pequeño, tal que la seccion que limita la nueva porcion sumergida sea A'B'. Para calcular los trabajos de las presiones debemos tener en cuenta el mayor hundimiento impreso á la porcion ya sumergida ADB, y del nuevo hundimiento de la capa comprendida entre las secciones AB y A'B'.

Sean G el centro de gravedad del cuerpo, O el centro de empuje, ó centro de presion. El sólido está en equilibrio por hipótesis, cuando la seccion AB está en el plano LT, la recta GO es perpendicular al plano AB. Sean GO$=a$, y θ el ángulo que mide la inclinacion de la recta GO con la vertical, que es tambien la medida de la inclinacion del plano AB con respecto al horizonte; daremos á la cantidad a el signo $+$, si el punto O está más alto que el G, y el signo ménos si está más bajo.

De los puntos O y G bajemos al plano LT las perpendiculares Or y Gt; sean G$t=z_1$ y GE$=z$; se tendrá OE$=z-a$ y O$r=z_1-a\cos\theta$. Sean F el centro de gravedad de la seccion AB, y FH$=z'$, la distancia de este punto al plano LT. El trabajo buscado podrá determinarse en funcion de θ y z'. Sea ρ la densidad del líquido y V el volúmen ADB del líquido desalojado en la posicion de equilibrio. El peso del cuerpo será igual á ρV.

El trabajo de la gravedad, correspondiente al movimiento del cuerpo, es

$$\rho V(z_1-z);$$

y el trabajo de las presiones ejercidas por el líquido sobre la carena ADB será del mismo modo

$$\begin{aligned} -\rho V(Or-OE) &= -\rho V[z_1-a\cos\theta-(z-a)], \\ &= -\rho V(z_1-z)-\rho Va(1-\cos\theta) \\ &= -\rho V(z_1-z)-2\rho Va\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

Para determinar el trabajo de las presiones sobre la porcion AB B'A' nuevamente sumergida, descompongámosla en prismas verticales ql infinitamente pequeños. Sea $d\omega$ el área de la seccion hecha en el prisma ql por el plano AB, vamos á encontrar la altura. Para lo cual por el punto F, centro de gravedad de la seccion AB, tracemos un plano A''B'' paralelo á A'B', que cortará al plano AB segun la recta KS; el cual cortará al prisma ql segun la seccion recta $p=d\omega\cos\theta$. Del punto q bajemos la perpendicular Qq á KS; la recta pQ será tambien perpendicular á KS, y el ángulo pQq será igual á θ. Hagamos Q$q=x$;

tendremos $pq = x \operatorname{sen}\theta$, y $ql = x \operatorname{sen}\theta + \mathrm{FH}$
$$= x \operatorname{sen}\theta + z'.$$

El prisma ql, estando primero fuera del líquido, se ha sumergido de la cantidad $z' + x \operatorname{sen}\theta$; el trabajo correspondiente de la presion del líquido será

$$-\rho d\omega \cos\theta \frac{(z' + x \operatorname{sen}\theta)^2}{2};$$

á cada elemento $d\omega$ de la seccion AB corresponde una expresion análoga á la anterior, y la suma de todos ellos será el trabajo total. El error que se comete sustituyendo á la capa ABB'A', el cilindro que proyecta la seccion AB sobre el plano horizontal, es infinitamente pequeño con respecto á la cantidad buscada. La suma de todos estos elementos es la integral doble

$$-\rho \int\int d\omega \cos\theta \frac{(z' + x \operatorname{sen}\theta)^2}{2} = -\frac{\rho}{2}\Big(\int\int z'^2 d\omega \cos\theta$$
$$+ 2\int\int z' x \operatorname{sen}\theta \cos\theta d\omega + \int\int x^2 d\omega \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\Big).$$

Por ser constantes z' y θ en estas integraciones salen fuera del signo integral, y tendremos el segundo miembro bajo la forma

$$-\frac{\rho}{2} z'^2 \cos\theta \int\int d\omega - \rho z' \operatorname{sen}\theta \cos\theta \int\int x d\omega$$
$$-\frac{\rho}{2} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \int\int x^2 d\omega;$$

$\int\int d\omega$ es el área de la seccion AB, que designaremos por L; $\int\int x d\omega$ es la suma de los momentos de los elementos de superficie $d\omega$ con respecto á la recta KS, que pasa por su centro de gravedad, y es nula por lo tanto; $\int\int x^2 d\omega$ es la suma de los momentos de inercia de los mismos elementos con respecto á la misma recta, y la representaremos por μ.

La suma de los trabajos de las presiones sobre la capa $ABB'A'$ es por fin

$$-\frac{\rho L}{2}z'^2\cos\theta-\frac{\rho\mu}{2}\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta,$$

y como el ángulo θ es infinitamente pequeño $\cos\theta=1$, y $\mathrm{sen}\,\theta=\theta$, sin grande error, y la suma anterior se reduce á

$$-\frac{\rho L}{2}z'^2-\frac{\rho\mu\theta^2}{2}.$$

Reuniendo las tres partes del trabajo T, que acabamos de determinar, resulta

$$T=\rho V(z_1-z)-\rho V(z_1-z)-2\rho Va\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}-\frac{\rho L}{2}z'^2-\frac{\rho\mu\theta^2}{2},$$

reduciendo y poniendo por $\mathrm{sen}^2\theta$, $\frac{\theta^2}{4}$, será

$$T=-\frac{\rho}{2}(aV+\mu)\theta^2-\frac{\rho}{2}Lz'^2.$$

Esta fórmula es general cualquiera que sea el movimiento infinitamente pequeño impreso al sólido, con tal que las secciones del cuerpo por planos verticales varíen de una manera contínua en la proximidad del plano de flotacion.

816. La estabilidad del equilibrio de un cuerpo flotante se deduce discutiendo la ecuacion de las fuerzas vivas (643). Supongamos el cuerpo en equilibrio; imprimámosle un movimiento muy pequeño. Este movimiento puede siempre reducirse á tres traslaciones y tres rotaciones simultáneas, en sentido de tres ejes rectangulares, dos de ellos horizontales, y el tercero vertical, y las rotaciones se verifican alrededor de los mismos ejes. Las traslaciones horizontales y la rotacion alrededor del eje vertical no producen ningun trabajo de las presiones del líquido sobre la parte sumergida; y sólo dan lugar á una produccion de trabajo la traslacion vertical y las rotaciones alrededor

de los ejes horizontales, que se pueden reducir á una sola rotacion alrededor de un eje horizontal.

Las cantidades z' y θ, que miden el camino recorrido á lo largo de la vertical y al ángulo descrito alrededor de la horizontal, serán las únicas que entran en la ecuacion del trabajo.

Sea $\Sigma m v_0^2$ la suma de las fuerzas vivas impresas al cuerpo en una posicion inicial, definida por los valores infinitamente pequeños z'_0 y θ_0 de las variables z' y θ; podemos suponer la $\Sigma m v_0^2$ tan pequeña como queramos; llamando $\Sigma m v^2$ á la suma de las fuerzas vivas del cuerpo en una posicion cualquiera, definida por z' y θ, la ecuacion de las fuerzas vivas será

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2(T - T_0)$$
$$= -\rho(aV + \mu)\theta^2 - \rho L z'^2 + \rho(aV + \mu)\theta_0^2 + \rho L z'^2_0;$$

luego

$$\Sigma m v^2 = C - \rho(aV + \mu)\theta^2 - \rho L z'^2,$$

siendo la constante

$$C = \Sigma m v_0^2 + \rho(aV + \mu)\theta_0^2 + \rho L z'^2_0,$$

correspondiente á las condiciones iniciales, y que es necesariamente positiva é infinitamente pequeña.

La suma $\Sigma m v^2$ es siempre positiva, luego el segundo miembro es positivo, y por consiguiente

$$\rho(aV + \mu)\theta^2 + \rho L z'^2 < C.$$

Las cantidades ρ, V, μ y L son cantidades absolutas; θ^2 y z'^2 son siempre positivas; y sólo a puede cambiar de signo en la ecuacion precedente. Si $a > 0$, ó si el punto O, centro de carena, está más alto que el punto G, centro de gravedad del sólido, el primer miembro es la suma de los dos términos positivos, y para que sea siempre menor que la constante C, que es infinitamente pequeña, es necesario que θ y z' sean infinitamente pequeñas. *Luego si el centro de carena está más alto que el centro de gravedad, el equilibrio es estable*; porque θ y z' no pueden crecer indefinidamente, y tienen por límites superiores, en valor absoluto,

$$\theta=\sqrt{\frac{C}{\rho(a V+\mu)}}, \quad z'=0,$$

y

$$z'=\sqrt{\frac{C}{\rho L}}, \quad \theta=0.$$

Si a es negativo é igual á $-a'$, la desigualdad toma la forma

$$\rho(\mu-a' V)\theta^2+\rho L z'^2<C,$$

y la conclusion que acabamos de obtener subsiste con tal que $\mu-a'V$ sea positivo, ó que $a'<\frac{\mu}{V}$. *Luego el equilibrio es tambien estable*, y los valores absolutos de θ y z' tienen límites, *cuando el centro de gravedad está más alto que el centro de presion, con tal que la distancia de estos dos puntos sea menor que el momento de inercia de la seccion de flotacion, con respecto á una recta trazada por su centro de gravedad, dividida por el volúmen de la carena.*

Si $a'>\frac{\mu}{V}$, el signo del primer miembro de la desigualdad no estará determinado, y se podrá satisfacer á la desigualdad por valores de las cantidades θ y z'. *El equilibrio será entónces inestable.*

La condicion $a'<\frac{\mu}{V}$ debe ser satisfecha para todos los valores del momento de inercia μ, que varía con la posicion de la recta KS, que es el eje de este momento. Luego es necesario que sea satisfecha para el menor valor de este momento de inercia.

Esta teoría de la estabilidad, que reemplaza la antigua teoría del *metacentro*, no es tampoco completa, porque prescinde de las *acciones dinámicas* del flúido, es decir, los excesos de presion debidos al movimiento relativo del sólido. Estas acciones dinámicas contribuyen á aumentar la estabilidad cuando proviene del movimiento del sólido en el líquido en reposo; y pueden, al contrario, comprometer la estabilidad del cuerpo flotante, cuando son debidas á un movimiento propio del flúido. La experiencia de la navegacion marítima ha hecho conocer, desde hace mucho tiempo, las formas que aseguran la estabilidad de los cuerpos flotantes, y verifica la regla deducida de la teoría que acabamos de exponer.

Metacentro.

817. En los primeros estudios sobre la estabilidad de los cuerpos flotantes, se daba mucha importancia al punto particular llamado *metacentro*, sobre el cual vamos á decir cuatro palabras, porque aunque la teoría anterior es independiente de este punto, tiene siempre un interes histórico, y aun hay algunos autores que usan la teoría del metacentro para establecer á las condiciones de estabilidad de los cuerpos flotantes.

Si un cuerpo flotante, simétrico con respecto á un plano vertical, se separa un poco de su posicion de equilibrio, estará solicitado por su peso, aplicado en su centro de gravedad, y por la presion del líquido desalojado, aplicada en su centro de presion. La recta que señala la direccion de la normal del centro de gravedad á la superficie libre del líquido en la posicion de equilibrio, toma una posicion inclinada en la nueva posicion, y el punto de encuentro de esta recta inclinada con la vertical del centro de presion, en la nueva posicion del cuerpo flotante, es el *metacentro*. Es claro, que si el metacentro está más alto que el centro de gravedad, el equilibrio será estable, y el cuerpo tenderá por sí mismo á la posicion de equilibrio; y si el metacentro está más bajo que el centro de gravedad, el equilibrio será inestable y la presion del líquido y el peso del cuerpo, tenderán las dos á separarle de su primitiva posicion y á que, dando una vuelta, venga á colocarse el centro de gravedad más bajo que el centro de presion, y el cuerpo se coloque en una posicion de equilibrio estable.

El metacentro se determina suponiendo, que el volúmen del flúido desalojado en la segunda posicion del cuerpo flotante, es equivalente al que desaloja en la posicion de equilibrio, ó por lo ménos, que el incremento de volúmen es infinitamente pequeño y puede despreciarse sin gran error sobre la posicion del metacentro. Esta hipótesis no es admisible, porque aunque el volúmen infinitamente pequeño que se desprecia, hace variar muy poco el centro de presion del líquido, hace sin embargo variar en una cantidad finita la posicion del punto de encuentro de las rectas, que llamamos metacentro. Por consiguiente, la teoría de la estabilidad de los cuerpos flotantes, fundada en el metacentro, es defectuosa, y para poderla aplicar, habria que seguir las diferentes posiciones del metacentro en el movimiento del cuerpo, lo que no es posible sin conocer de antemano las posiciones de equilibrio del cuerpo flotante; y entónces no presenta utilidad alguna dicha teoría. Ademas, como ántes hemos visto, puede ser el equilibrio estable aunque el centro de presion esté más bajo que el centro de gravedad, y entónces el metacentro puede estar más bajo ó más alto que el centro de gravedad, sin que deje de ser estable el equilibrio.

liquido y el peso del cuerpo, tenderán las dos á separarle de su primitiva posicion y á que, dando una vuelta, venga á colocarse el centro de gravedad más bajo que el centro de presion, y el cuerpo se coloque en una posicion de equilibrio estable.

El metacentro se determina suponiendo que el volúmen del flúido desalojado en la segunda posicion del cuerpo flotante, es equivalente al que desaloja en la posicion de equilibrio, ó por lo ménos, que el incremento de volúmen es infinitamente pequeño y puede despreciarse sin gran error sobre la posicion del metacentro. Esta hipótesis no es admisible, porque aunque el volúmen infinitamente pequeño que se desprecia, hace variar muy poco el centro de presion del líquido, hace sin embargo variar en una cantidad finita la posicion del punto de encuentro de las rectas, que llamamos metacentro. Por consiguiente, la teoría de la estabilidad de los cuerpos flotantes, fundada en el metacentro, es defectuosa; y para poderla aplicar, habria que seguir las diferentes posiciones del metacentro en el movimiento del cuerpo, lo que no es posible sin conocer de antemano las posiciones de equilibrio del cuerpo flotante, y entónces no presenta utilidad alguna dicha teoría. Además, como ántes hemos visto, puede ser el equilibrio estable aunque el centro de presion esté más bajo que el centro de gravedad, y entónces el metacentro puede estar más bajo ó más alto que el centro de gravedad, sin que deje de ser estable el equilibrio.

HIDRODINÁMICA

LECCION LXVI.

Hidrodinámica. Ecuaciones generales del movimiento de los flúidos.—Simplificacion de estas ecuaciones en varios casos particulares.—Pequeñas oscilaciones de un flúido.—Integracion de la ecuacion $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$.—Régimen permanente. Teorema de Daniel Bernoulli.—Demostracion directa del teorema Bernoulli.

Hidrodinámica. Ecuaciones generales del movimiento de los flúidos.

818. La Hidrodinámica es la parte de la Mecánica que trata del movimiento de los flúidos. Esta parte de la ciencia está poco adelantada, por ser muy complicado el estudio del movimiento de los flúidos.

Las condiciones de equilibrio de los flúidos se fundan en el principio de igualdad de presion, en virtud del cual, una presion ejercida sobre la superficie de un flúido, se trasmite íntegra en todas direcciones; y sobre cada elemento de superficie, tomada alrededor de un punto cualquiera de su masa, se ejerce una presion igual en todos sentidos, y normal al elemento de superficie que se considera. Este principio se funda esencialmente en la hipótesis de la fluidez perfecta, hipótesis que no puede admitirse en absoluto, cuando se trata del movimiento de un flúido; porque la experiencia enseña, que se desarrolla la resistencia que hemos llamado rozamiento, al resbalar unas sobre otras las moléculas del flúido; y este rozamiento es tanto mayor, cuanto mayor es la velocidad de resbalamiento. Sin embargo, cuando el movimiento no es muy rápido, puede suponerse que los flúidos continúan sujetos al principio de igualdad de presion; y la experiencia demuestra, que los resultados obtenidos, se aproximan mucho á los que se deducen de esta hipótesis.

El problema del movimiento de los flúidos es mucho más complicado que el del equilibrio, porque en éste la ecuacion de la Hidrostática da la presion del flúido para cualquiera de sus puntos, en funcion de las coordenadas de este punto; pero cuando se trata del movimiento es preciso determinar para cada valor del tiempo t, y para cada punto (x, y, z) del espacio ocupado por el flúido; no sólo la presion p, sino tambien la magnitud y direccion de la velocidad del punto material flúido, que ocupa este lugar del espacio, y ademas la densidad ρ de este punto material. La velocidad será conocida cuando se conozcan sus componentes, u, u_1, u_2 paralelas á los ejes OX, OY, OZ. De modo, que el problema se reduce á determinar las cinco funciones

$$\rho, p, u, u_1\ u_2,$$

en valores de las cuatro variables independientes t, x, y, z.

Supongamos al problema resuelto; para encontrar la trayectoria de un punto material, basta observar que udt, u_1dt, u_2dt son los incrementos de las coordenadas x, y, z en el tiempo dt; de suerte, que las ecuaciones del movimiento considerado resultarán de la integracion de las ecuaciones diferenciales

$$(1)\quad \begin{cases} dx = udt, \\ dy = u_1dt, \\ dz = u_2dt. \end{cases}$$

Vamos á buscar la densidad ρ y la presion p del mismo punto material. Sea $f(x, y, z, t)$ una cierta funcion para el punto (x, y, z) y un valor determinado del tiempo t; si las variables x, y, z, t, reciben los incrementos dx, dy, dz, dt, el incremento de la funcion será en general

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt.$$

Pero si en lugar de tomar arbitrariamente dx, dy, dz, los tomamos á lo largo de la trayectoria del punto material M, cuando pasa de M á M′, en el tiempo dt, se verificarán las ecuaciones (1), y la ecuacion anterior será

$$df = \left(\frac{df}{dx}u + \frac{df}{dy}u_1 + \frac{df}{dz}u_2 + \frac{df}{dt}\right)dt.$$

Esta fórmula es aplicable á toda funcion de las variables x, y, z, t, y por consiguiente á las funciones u, u_1, u_2, ρ, p, que queremos determinar; tendremos, pues

$$\begin{aligned}
du &= \left(\frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}u_1 + \frac{du}{dz}u_2 + \frac{du}{dt}\right)dt,\\
du_1 &= \left(\frac{du_1}{dx}u + \frac{du_1}{dy}u_1 + \frac{du_1}{dz}u_2 + \frac{du_1}{dt}\right)dt,\\
du_2 &= \left(\frac{du_2}{dx}u + \frac{du_2}{dy}u_1 + \frac{du_2}{dz}u_2 + \frac{du_2}{dt}\right)dt,\\
d\rho &= \left(\frac{d\rho}{dx}u + \frac{d\rho}{dy}u_1 + \frac{d\rho}{dz}u_2 + \frac{d\rho}{dt}\right)dt,\\
dp &= \left(\frac{dp}{dx}u + \frac{dp}{dy}u_1 + \frac{dp}{dz}u_2 + \frac{dp}{dt}\right)dt.
\end{aligned}$$

Las relaciones $\frac{du}{dt}$, $\frac{du_1}{dt}$, y $\frac{du_2}{dt}$ son las proyecciones de la aceleracion del punto M, sobre los ejes de las x, de las y y de las z.

819. El teorema de d'Alembert nos da tres ecuaciones, de las cinco que resuelven el problema de la Hidrodinámica. Las ecuaciones del equilibrio de una molé-

cula flúida son (770)

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = \rho X, \\ \frac{dp}{dy} = \rho Y, \\ \frac{dp}{dz} = \rho Z; \end{cases}$$

que se pueden poner bajo la forma

$$(2) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0, \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = 0, \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = 0; \end{cases}$$

en las cuales X, Y, Z, son las componentes de la fuerza referida á la unidad de masa, ó sea las componentes de la aceleracion. Vemos en las ecuaciones (2), que las presiones desarrolladas alrededor de la molécula equivalen, bajo el punto de vista del equilibrio, á las componentes $-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$, $-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$, $-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}$ paralelas á los ejes, y aplicadas á la unidad de masa, supuesta libre.

Por el teorema de d'Alembert, los primeros miembros de las ecuaciones (2) son iguales á las aceleraciones proyectadas sobre los mismos ejes, y resultarán las siguientes ecuaciones

$$(3) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}u_1 + \frac{du}{dz}u_2 + \frac{du}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{du_1}{dx}u + \frac{du_1}{dy}u_1 + \frac{du_1}{dz}u_2 + \frac{du_1}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{du_2}{dx}u + \frac{du_2}{dy}u_1 + \frac{du_2}{dz}u_2 + \frac{du_2}{dt}. \end{cases}$$

Se tiene otra ecuacion, expresando que el lugar que abandona por el movimiento una porcion del flúido, es inmediatamente ocupado por otra porcion igual, sin que quede entre ellas ningun espacio vacío; esta ecuacion se llama *ecuacion de continuidad*. A *priori* nada indica esta continuidad en el movimiento de la masa flúida, pero la experiencia la confirma contínuamente.

Concibamos en el espacio ocupado por el flúido, el pequeño paralelepípedo ABCDEFGH (fig. 340); en cada instante una parte del flúido sale de este volúmen, y otra igual entra; la velocidad u paralela á OX es constante para toda la cara ADEF y perpendicular á ella. La masa flúida contenida en el paralelepípedo es $\rho dxdydz$ al fin del tiempo t, y se convierte en $\left(\rho+\frac{d\rho}{dt}\right)dxdydz$ al fin del tiempo $t+dt$; y el incremento de la masa en este tiempo es $\frac{d\rho}{dt}dxdydz$. En virtud de la velocidad u, pasa por la cara $dydz$ perpendicular á OX, en el tiempo dt, una masa flúida $\rho udtdydz$; mas en el mismo tiempo sale por la cara opuesta una masa flúida igual á la masa $\rho udtdydz$, aumentada en su diferencial, es decir, una masa $\left(\rho u+\frac{d\rho u}{dx}dx\right)dtdydz$. El exceso de la cantidad que entra, sobre la que sale, es

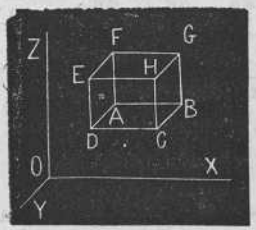

Fig. 340.

$$\frac{-d.\rho u}{dx}\,dxdydz\,dt.$$

En virtud de las velocidades u_1 y u_2 los aumentos de masa del paralelepípedo, son

$$\frac{-d.\rho u_1}{dy}\,dxdydzdt$$
$$\frac{-d.\rho u_2}{dz}\,dxdydzdt.$$

La suma de estos tres incrementos es igual al incremento total de la masa durante el tiempo dt; la variacion de la densidad es $\frac{d\rho}{dt}\,dt$, y multiplicándola por el volúmen, tendremos la variacion total de masa, $\frac{d\rho}{dt}dxdydzdt$; luego igualando y dividiendo por $dxdydzdt$, resulta la ecuacion de continuidad

$$(4) \quad \frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho u_1}{dy}+\frac{d.\rho u_2}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0,$$

y efectuando las diferenciaciones indicadas

$$(5) \quad \left(u\frac{d\rho}{dx}+u_1\frac{d\rho}{dy}+u_2\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}\right)+\rho\left(\frac{du}{dx}+\frac{du_1}{dy}+\frac{du_2}{dz}\right)=0.$$

El primer paréntesis es igual á $\frac{1}{dt}d\rho$, y la ecuacion (4) toma la forma

$$(6) \quad d\rho+\rho dt\left(\frac{du}{dx}+\frac{du_1}{dy}+\frac{du_2}{dz}\right)=0.$$

820. Si el flúido es un líquido homogéneo, ó una mezcla de líquidos, ρ es constante, y $d\rho=0$, porque una molécula líquida no cambia de densidad á lo largo de su trayectoria, y la ecuacion (5) se divide en las dos siguientes

$$(7) \quad \begin{cases} u\frac{d\rho}{dx}+u_1\frac{dx}{dy}+u_2\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0, \\ \frac{du}{dx}+\frac{du_1}{dy}+\frac{du_2}{dt}=0, \end{cases}$$

que con las ecuaciones (3) resuelven el problema.

Si se trata de un gas, á temperatura constante, tendremos entre p y ρ la relacion

$$(8) \quad p=k\rho,$$

que con las ecuaciones (4) y (3) resuelven el problema.

Las ecuaciones (3) y (7), ó las (3), (4) y (8), son, como ha dicho Lagrange, tan rebeldes á la integracion, que no han podido lograrla los esfuerzos de los más célebres analistas; y se ha renunciado á buscar sus integrales generales, que acaso no puedan expresarse por los signos del análisis; y sin embargo, se ha logrado deducir algunos resultados útiles restringiendo la generalidad de aquellas ecuaciones.

Simplificacion de las ecuaciones en varios casos particulares.

821. Para conseguir la simplificacion, supongamos

que $Xdx+Ydy+Zdz$, es la diferencial exacta de una funcion T de las coordenadas x,y,z; es decir, que

$$Xdx+Ydy+Zdz=dT.$$

Tambien supondremos que al fin de un cierto tiempo t la funcion $udx+u_1dy+u_2dz$, sea la diferencial exacta, con respecto á x, y, z de una funcion φ' de las cuatro variables x, y, z, t. Vamos á ver que, si esto se verifica, la funcion $udx+u_1dy+u_2dz$, es una diferencial exacta en todo tiempo, ó para cualquier valor de t.

En efecto, sea para un valor t' del tiempo

$$udx+u_1dy+u_2dz=d\varphi',$$

siendo φ' una funcion de x, y, z, t; y $d\varphi'$ la diferencial total de esta funcion, en la que t se ha considerado como constante, ó se ha hecho $t=t'$.

Entónces tendremos

$$u=\frac{d\varphi'}{dx},\ u_1=\frac{d\varphi'}{dy},\ u_2=\frac{d\varphi'}{dz},$$

y para el tiempo $t'+\theta$, siendo θ infinitamente pequeño,

$$u=\frac{d\varphi'}{dx}+\theta\frac{du}{dt},\ u_1=\frac{d\varphi'}{dt}+\theta\frac{du_1}{dy},\ u_2=\frac{d\varphi'}{dz}+\theta\frac{du_2}{dt};$$

siendo $\frac{du}{dt}$, $\frac{du_1}{dt}$, $\frac{du_2}{dt}$, las derivadas parciales de u, u_1, u_2, con respecto á t.

La suma $udx+u_1dy+u_2dz$, se convierte, al cabo del tiempo θ, en

$$\left(\frac{d\varphi'}{dx}dx+\frac{d\varphi'}{dy}dy+\frac{d\varphi'}{dz}dz\right)+\theta\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{du_1}{dt}dy+\frac{du_2}{dt}\quad\right),$$

ó lo que es lo mismo

$$d\varphi'+\theta\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{du_1}{dt}dy+\frac{du_2}{dt}dz\right).$$

Este nuevo valor de la funcion es, por consiguiente, una diferencial exacta con respecto á las variables x, y, z, si el paréntesis es una diferencial exacta con respecto á estas mismas variables.

Sustituyamos los valores de u, u_1, u_2 en las ecuaciones

(3), las cuales al fin del tiempo t' serán

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=\frac{d\varphi'}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d\varphi'}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dydz}+\frac{d\varphi'}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dzdx}+\frac{du}{dt},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=\frac{d\varphi'}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dydx}+\frac{d\varphi'}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dz^2}+\frac{d\varphi'}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dzdy}+\frac{du_1}{dt},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=\frac{d\varphi'}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dxdz}+\frac{d\varphi'}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dydz}+\frac{d\varphi'}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dz^2}+\frac{du_2'}{dt};$$

multipliquemos la primera por dx, la segunda por dy, la tercera por dz, y sumemos; resultará haciendo las reducciones convenientes

$$dT-\frac{1}{\rho}dp=\tfrac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi'}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi'}{dz}\right)^2\right]+$$
$$+\left(\frac{du}{dt}dx+\frac{du_1}{dt}dy+\frac{du_2}{dt}dz\right),$$

tomando las diferenciales sin hacer variar al tiempo.

El primer miembro de esta ecuacion es una diferencial exacta, si ρ es constante, lo cual se verifica si el flúido es un líquido homogéneo, ó si ρ es funcion de p, lo que tiene lugar para un gas á temperatura constante. El primer término del segundo miembro, es tambien una diferencial exacta; luego, el segundo término lo es igualmente, y por consiguiente, $udx+u_1dy+u_2dz$ es una diferencial exacta al fin del tiempo $t'+\theta$, si lo es al tiempo t'; luego lo es para un valor cualquiera del tiempo.

Por ejemplo, si el flúido parte del reposo, se tiene en esta época $u=0$, $u_1=0$, $u_2=0$, valores que hacen á $udx+u_1dy+u_2dz$ diferencial exacta; y estamos seguros entónces, de que la condicion se verifica durante todo el movimiento.

822. Luego si tenemos á la vez

$$Xdx+Ydy+Zdz=dF,$$
$$udx+u_1dy+u_2dz=d\varphi;$$

se deduce de la segunda

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad u_1=\frac{d\varphi}{dy},\quad u_2=\frac{d\varphi}{dz},$$

y la ecuacion de continuidad (4) toma la forma

$$(9)\quad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}=0;$$

y la trasformacion del párrafo anterior nos da para cualquier época

$$d\mathrm{T}-\frac{1}{\rho}\,dp=\tfrac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+d\frac{\varphi}{dt},$$

estando tomadas las diferenciales solamente con relacion á x, y, z, sin hacer variar el tiempo. Integrando bajo el mismo supuesto, resulta

$$(10)\quad \mathrm{T}-\int\frac{dp}{\rho}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+\frac{d\varphi}{dt}.$$

Si ρ es constante ó funcion de p, puede integrarse $\int\frac{dp}{\rho}$, y tambien si ρ es funcion del tiempo t, puesto que el tiempo, en todos estos cálculos, se considera como constante.

La ecuacion (10) podria completarse con una funcion arbitraria del tiempo t; pero esta funcion puede suponerse comprendida en la funcion φ, que está solo definida por su diferencial $d\varphi$, relativa á x, y, z, sin tener en cuenta el tiempo t.

823. En el caso de los líquidos homogéneos, ρ es constante y la ecuacion (9) se reduce á

$$(11)\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0,$$

y la ecuacion (10) á

$$(12)\quad \mathrm{T}-\frac{p}{\rho}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+\frac{d\varphi}{dt}.$$

La resolucion analítica del problema se reduce á integrar la ecuacion con diferenciales parciales (11); despues de haber encontrado la expresion más general de φ, en funcion de x, y, z y t, la ecuacion (12) nos dará p. Despues las ecuaciones

$$u = \frac{d\varphi}{dx},\ u_1 = \frac{d\varphi}{dy},\ u_2 = \frac{d\varphi}{dz},$$

darán u, u_1, u_2.

Pequeñas oscilaciones de un flúido.

824. Cuando un flúido está animado de un movimiento oscilatorio muy pequeño, las ecuaciones del movimiento se simplifican considerablemente. Se pueden despreciar desde lúego los productos $u\,\frac{du}{dx}$, $u_1\frac{du}{dy}$, $u_2\frac{du}{dz}$, cuyos valores son muy pequeños en las ecuaciones (3); que se reducen aproximadamente á la forma,

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt},$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{du_1}{dt},$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{du_2}{dt};$$

multiplicando la primera por dx, la segunda por dy, la tercera por dz y sumando, resulta

$$dT - \frac{1}{\rho}\,dp = \frac{du}{dt}dx + \frac{du_1}{dy}dy + \frac{du_2}{dz}dz.$$

Luego $udx + u_1dy + u_2dz$, es una diferencial exacta con respecto á x, y, z; porque la ecuacion anterior puede escribirse como sigue,

$$dT - \frac{1}{\rho}dp = \frac{d}{dt}(udx + u_1dy + u_2dz),$$

y por consiguiente, $udx + u_1dy + u_2\,dz$ es la integral de $\left(dT - \frac{dp}{\rho}\right)dt$, tomada con respecto á t sola, ó lo que es lo mismo, la diferencial con respecto á x, y, z de la funcion $\int T dt - \int dt \int \frac{dp}{\rho}$. Hagamos $udx + u_1dy + u_2dz = d\varphi$;

resultará $dT-\frac{dp}{\rho}=\frac{d}{dt}(d\varphi)=d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$;

tomando las diferenciales indicadas, solamente con respecto á x, y, z.

Integrando la anterior, será

$$(13)\quad T-\int\frac{dp}{\rho}=\frac{d\varphi}{dt},$$

ecuacion que debemos unir á la ecuacion (8), si se trata de un gas á temperatura constante, en cuyo caso $\int\frac{dp}{\rho}=\int\frac{kdp}{p}=kl.p$; por ser $\rho=\frac{p}{k}$. Si se trata de un líquido homogéneo $\int\frac{dp}{\rho}=\frac{p}{\rho}$, y debemos unir la ecuacion (13) á la ecuacion (11).

Integracion de la ecuacion $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$.

825. Esta ecuacion, que es la (11), tiene una forma lineal, y si se tienen várias soluciones, $\varphi=a, \varphi=b, \varphi=c.....$, se tendrá otra poniendo $\varphi=a+b+c+.....$, y tambien igualando φ á la suma de los productos de cada solucion por las constantes arbitrarias A, B, C.....; y tendremos

$$\varphi=Aa+Bb+Cc+.....$$

Vamos á encontrar las soluciones particulares; sea A (fig. 341), un punto cuyas coordenadas son x, y, z; y M un punto arbitrario cuyas cordenadas sean x', y', z', y al cual supondremos una masa m cualquiera.

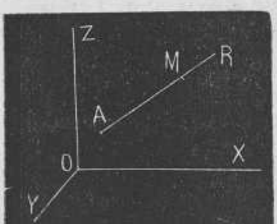

Fig. 341.

Siendo la distancia $AM=\Delta$, es $\Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$.

La funcion $\frac{m}{\Delta}$, considerando en ella á x, y, z, como variables, satisface á la ecuacion propuesta (11).

En efecto, se deduce tomando la derivada parcial con respecto á x,

$$\frac{d\frac{m}{\Delta}}{dx} = -\frac{m}{\Delta^2} \cdot \frac{d\Delta}{dx} = -\frac{m}{\Delta^2} \cdot \frac{x-x'}{\Delta};$$

y tambien

$$\frac{d\frac{m}{\Delta}}{dy} = -\frac{m}{\Delta^2} \cdot \frac{y-y'}{\Delta},$$

$$d\frac{m}{\Delta} = -\frac{m}{\Delta^2} \cdot \frac{z-z'}{\Delta}.$$

Las cantidades $\frac{x-x'}{\Delta}$, $\frac{y-y'}{\Delta}$, $\frac{z-z'}{\Delta}$ son los cosenos de los ángulos que la recta AM forma con los ejes coordenados; $\frac{m}{\Delta^2}$ es proporcional á la atraccion que el punto A ejerce sobre la masa m colocada en M, segun la ley de la gravitacion universal. Luego la funcion $\frac{m}{\Delta}$ tiene la propiedad de que sus derivadas parciales, con respecto á x, y, z, dan respectivamente las componentes de la atraccion que el punto A ejerce sobre el M.

Las segundas derivadas,

$$\frac{d^2\frac{m}{\Delta}}{dx^2} = \frac{3m(x-x')^2}{\Delta^5} - \frac{m}{\Delta^3},$$

$$\frac{d^2\frac{m}{\Delta}}{dy^2} = \frac{3m(y-y')}{\Delta^5} - \frac{m}{\Delta^3},$$

$$\frac{d^2\frac{m}{\Delta}}{dz^2} = \frac{3m(z-z')}{\Delta^5} - \frac{m}{\Delta^3};$$

sumadas, darán

$$\frac{d^2\frac{m}{\Delta}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{m}{\Delta}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{m}{\Delta}}{dz^2} = \frac{3m[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}{\Delta^5} - \frac{3m}{\Delta^3} = 0,$$

y por consiguiente $\frac{m}{\Delta}$ es una solucion de la ecuacion (11). Del mismo modo se obtendrán tantas como se quieran.

Luego considerando varios puntos M, de masa distinta, quedará satisfecha la ecuacion (11) poniendo

$$\varphi = \Sigma \frac{m}{\Delta}.$$

Podemos suponer que los puntos M se tocan y constituyen un medio atractivo, cuya densidad ó masa específica ρ', es funcion de las coordenadas x', y', z', de cada punto; la masa elemental será entónces $\rho' dx' dy' dz'$ y el símbolo Σ se convertirá en una integral triple

$$\varphi = \int\int\int \frac{\rho' dx' dy' dz'}{\Delta},$$

La funcion φ es entónces la funcion potencial (167) del sistema, con respecto al punto cuyas coordenadas son x, y, z; la propiedad fundamental de la funcion potencial es que sus derivadas parciales con respecto á x, y, z, son las componentes de la atraccion ejercida por el punto (x, y, z), sobre el sistema (x', y', z') segun la ley de Newton.

En el problema especial que consideramos, x', y', z', pueden suponerse funciones de t; y ρ' es una funcion arbitraria de las variables x', y', z', t; los límites de la integracion son funciones enteramente arbitrarias de las variables x', y', z'. Solo faltará en cada caso particular, determinar estas arbitrarias cuya determinacion constituye un problema muy difícil de análisis.

Régimen permanente. Teorema de Daniel Bernoulli.

826. Se dice que un flúido que se mueve está en *régimen permanente*, cuando por cada punto, pasa en cada instante una molécula de la misma densidad, sometida á la misma presion, y animada de la misma velocidad. Analíticamente está definido el régimen permanente por la condicion de que las cinco variables u, u_1, u_2, p, ρ sean indepen-

dientes del tiempo; el movimiento del sistema reproduce en cada instante el estado que existia en el instante anterior, lo que constituye una especie de equilibrio móvil. Una corriente de agua, en la cual una porcion del líquido que pasa, es inmediatamente reemplazada por otra porcion idéntica, y animada del mismo movimiento, ofrece una imágen del régimen permanente.

En el caso actual, se tiene

$$\frac{du}{dt}=0,\ \frac{du_1}{dt}=0,\ \frac{du_2}{dt}=0,\ \frac{dp}{dt}=0,\ \frac{d\rho}{dt}=0;$$

y las ecuaciones (3) se reducen á las siguientes;

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=u\frac{du}{dx}+u_1\frac{du}{dy}+u_2\frac{du}{dz}=u',$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=u\frac{du_1}{dx}+u_1\frac{du_1}{dy}+u_2\frac{du_1}{dz}=u'_1,$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=u\frac{du_2}{dx}+u_1\frac{du_2}{dy}+u_2\frac{du_2}{dz}=u'_2,$$

llamando u', u'_1, u'_2 á las proyecciones de las aceleraciones sobre los ejes coordenados. Porque en general (819)

$$u'=\frac{1}{dt}\,du=u\frac{du}{dx}+u_1\frac{du}{dy}+u_2\frac{du}{dz},$$

por ser $\frac{du}{dt}=0$, y reducirse el valor de u' á sus tres primeros términos.

Multiplicando estas ecuaciones por dx, dy, dz respectivamente, sumando, y recordando que $Xdx+Ydy+Zdz=dT$, resulta

$$(14)\quad dT-\frac{1}{\rho}dp=u'dx+u'_1dy+u'_2dz.$$

Sabemos que $dx=udt$, $dy=u_1dt$, $dz=u_2dt$; sustituyendo en el segundo miembro, se reduce á

$$u'udt+u'_1u_1dt+u_2u'_2dt=udu+u_1du_1+u_2du_2$$

puesto que $u'dt=\frac{du}{dt}dt=du$, y lo mismo los demas. Y la ecuacion (14) puede ponerse bajo la forma

$$dT-\frac{1}{\rho}dp=udu+u_1du_1+u_2du_2=\tfrac{1}{2}d(u^2+u_1^2+u_2^2);$$

pero $u^2+u_1^2+u_2^2=v^2$, cuadrado de la velocidad de la molécula que pasa por el punto (x,y,z); luego será

$$dT-\frac{1}{\rho}dp=\tfrac{1}{2}d(v^2).$$

Integrando se tiene

$$(15)\quad T-\int\frac{dp}{\rho}-\frac{v^2}{2}=\text{cons.}^{te}$$

En el caso de los líquidos homogéneos, será $\int\frac{dp}{\rho}=\frac{p}{\rho}$;

en el caso de un gas á temperatura constante $\int\frac{dp}{\rho}=kl.p$,

por ser $\rho=\frac{p}{k}$.

827. El teorema de Daniel Bernoulli que es el fundamento de la *Hidráulica*, es una consecuencia de la ecuacion (15), aplicada á los líquidos homogéneos pesados. En estos flúidos la única fuerza que actúa sobre ellos es la gravedad, y tendremos

$$X=0,\ Y=0,\ Z=-g;$$

luego

$$dT=-gdz,$$

$$T=-gz.$$

La ecuacion (15) se reduce cambiando los signos, á la siguiente:

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{cons.}^{te}$$

y determinando la constante

$$(16)\quad z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=z_0+\frac{p}{\rho g}+\frac{v_0^2}{2g}=H.$$

Siendo H una altura constante, z_0 la altura de un punto del líquido sobre el plano horizontal de comparacion; la relacion $\frac{p}{\rho g}$, de la presion á ρg es la altura que representa la presion; v_0 es la velocidad de las moléculas que pasan por este punto, y $\frac{v_0^2}{2g}$, es la altura debida á esta velocidad.

Sumando estas tres alturas en todo punto de un mismo filete líquido, sometido al régimen permanente, se obtiene un nivel constante, que se llama en Hidráulica, *plano de carga.*

Esto, supuesto, el enunciado del teorema de Daniel Bernoulli es: *que en todos los puntos de un filete líquido pesado, que satisface á las condiciones de la permanencia del régimen, la altura del plano de carga es constante.*

Esta conclusion supone que el líquido es perfecto, ó que no tiene viscosidad, de lo contrario la presion alrededor de un punto, no será la misma en todas direcciones; las ecuaciones generales del movimiento deberán modificarse, y resultarán, de un punto á otro del mismo filete, diferencias de nivel para el plano de carga, debidas al trabajo de los rozamientos interiores. Estas diferencias se llaman en Hidráulica pérdidas de carga.

Demostracion directa del teorema de Bernoulli.

828. Este teorema puede demostrarse directamente, sin el auxilio de las ecuaciones generales de la Hidrodinámica, aplicando al filete líquido pesado el teorema de las fuerzas vivas.

Sea AB (fig. 342), el filete considerado, animado de un movimiento permanente en virtud del cual, un pequeño volúmen del líquido se mueve ocupando su lugar el volúmen igual siguiente. Tomemos dos puntos A y B sobre este filete; en el punto A sean ω la seccion, p la presion, v la velocidad, y Z la altura Aa, sobre un plano horizontal P; en el punto B sean ω' la seccion, p' la presion, v' la velocidad y Z' la altura BO sobre el mismo plano.

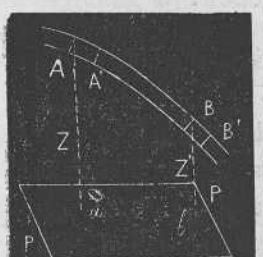

Fig. 342.

Los productos ωv, $\omega' v'$, representarán cada uno el *gasto* del filete, es decir, el volúmen que pasa en la unidad de tiempo por las secciones A y B. Este volúmen es el mismo en estos dos puntos, á causa de la incompresibilidad del líquido y de la permanencia del régimen; representémosle por Q, el volúmen que pasa durante el tiempo dt será igual á Qdt, en cualquier punto del filete AB.

Al filete AB, que pasa de la posicion AB á la posicion A'B', durante el tiempo dt, apliquémosle el teorema de las fuerzas vivas entre estas dos posiciones. La porcion A'B comun á estas dos posiciones, está ocupada en las dos épocas por moléculas de la misma masa, y animadas de la misma velocidad; luego las fuerzas vivas correspondientes, son iguales en estas dos épocas y se destruyen en la diferencia. Veamos la diferencia entre la fuerza viva de la masa BB' y la fuerza viva de la masa AA'; el volúmen comun ocupado por estas masas es Qdt, llamando ρ al peso específico del líquido, $\frac{\rho Qdt}{g}$ es la masa, y $\frac{\rho Qdt}{g}(v'^2-v^2)$, es el incremento de la fuerza viva del sistema, al pasar de la posicion AB á la posicion A'B'; y este incremento de la fuerza viva es igual al duplo del trabajo de las fuerzas que son aquí la gravedad y las presiones.

Para calcular el trabajo de la gravedad, supondremos como en Hidrostática (768), que el peso AA' pasa á la posicion BB', permaneciendo la parte A'B inmóvil, el trabajo buscado será $\rho Qdt(z-z')$.

Las presiones laterales al filite producen un trabajo nulo, porque son normales á las trayectorias de sus puntos de aplicacion. Basta considerar la presion en A y la presion en B, en sentido del filete; la primera es igual á $p\omega$, y el camino descrito por su punto de aplicacion en la direccion misma de la fuerza es $AA'=vdt$; luego su trabajo es $p\omega vdt=pQdt$. El trabajo de presion en B es negativo é igual á $-p'Qdt$. Reuniendo todos estos trabajos, tendremos por el teorema de las fuerzas vivas

$$\frac{Qdt}{2g}(v'^2-v^2)=\rho Qdt(z-z')+pQdt-p'Qdt,$$

suprimiendo el factor comun ρQdt y trasformando, resulta

$$z+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2g}=z'+\frac{p'}{\rho}+\frac{v'^2}{2g},$$

que es la ecuacion (16), que ántes hemos obtenido y que da el teorema de Daniel Bernoulli.

LECCION LXVII.

Salida de un líquido pesado por un orificio horizontal.—Nivel constante.—Nivel variable—Aplicacion del teorema de Bernoulli á la salida del líquido por orificio practicado en pared delgada.—Paso de un líquido en filetes rectilíneos paralelos por un canal ó por un tubo.—Aplicacion del teorema de las fuerzas vivas á las máquinas hidráulicas.—Fórmula de Gérardin.

Salida de un líquido pesado por un orificio horizontal.

829. En la leccion anterior hemos establecido las ecuaciones generales que rigen el movimiento de los flúidos, ecuaciones muy complicadas, que sólo pueden integrarse en casos particulares; allí hemos examinado algunos de estos casos, y vamos en esta leccion á examinar algunos otros.

Cuando un líquido pesado, homogéneo, contenido en un vaso, sale por un orificio horizontal practicado en el fondo del vaso, la experiencia enseña que las moléculas situadas en una misma capa horizontal en un cierto instante, siguen en esta capa hasta que están próximas al orificio; de manera que las capas horizontales infinitamente delgadas se reemplazan sucesivamente unas á otras, permaneciendo paralelas entre sí. Se pueden despreciar las velocidades horizontales, cuando las secciones varían poco en toda la extension del vaso, y sus dimensiones son muy pequeñas con respecto á la altura. Entónces sólo hay dos incógnitas en el problema, la velocidad vertical de una capa, y la presion, las cuales vamos á determinar, en funcion de la distancia de la capa á un plano horizontal, y del tiempo.

Tomemos el eje de las z vertical y de arriba á abajo; tendremos

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=g,$$

y la última de las ecuaciones (3) n.° 819,

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=\frac{du_2}{dx}u+\frac{du_2}{dy}u_1+\frac{du_2}{dz}u_2+\frac{du_2}{dt},$$

se convierte en la siguiente

$$(1)\quad \frac{dp}{dz}=\rho\left(g-\frac{du_2}{dt}-u_2\frac{du_2}{dz}\right),$$

por ser $u=0$, $u_1=0$. Las otras dos ecuaciones se reducen á

$$\frac{dp}{dx}=0,\quad \frac{dp}{dy}=0.$$

830. Expresaremos fácilmente la hipótesis del paralelismo de las capas, igualando la cantidad de líquido que pasa por una seccion horizontal cualquiera del vaso, á la que sale por el orificio durante el tiempo dt; sea ω el área de la seccion, cuya altura es z, S el área del orificio y v la velocidad de las moléculas en este orificio. Las cantidades de líquido que pasan por las áreas ω y S, en el tiempo dt, son $\omega u_2 dt$ y $Svdt$,
luego

$$\omega u_2 dt=Svdt,$$

de donde

$$(2)\quad u_2=\frac{Sv}{\omega}.$$

Las velocidades u_2 y v dependen del tiempo t; v es funcion solamente de t, y u_2 es funcion de z y de t. Eliminemos u_2 entre las ecuaciones (1) y (2), tendremos

$$(3)\quad \frac{dp}{dz}=\rho\left(g-\frac{S}{\omega}\frac{dv}{dt}+\frac{S^2v^2}{\omega^3}.\frac{d\omega}{dz}\right),$$

integrando esta ecuacion con respecto á z, resulta

$$(4)\quad p = C + g\rho z - \rho S\frac{dv}{dt}\int\frac{dz}{\omega} - \rho\frac{S^2v^2}{2\omega^2};$$

la constante C es independiente de z, pero puede ser funcion de t.

Sean P la presion constante ejercida sobre la superficie superior del líquido y P′ la presion en el orificio, se tendrá P=P′, si todo el aparato está en el mismo medio, por ejemplo, en el aire, ó en el agua. Sean h la distancia de la superficie libre del líquido al plano xy, l la distancia de dicha superficie al orificio; tendremos $p=P$, para $z=h$, y la ecuacion (4) nos dará

$$C = P - g\rho h + \rho\frac{S^2v^2}{2O^2},$$

representando por O el área de la seccion del vaso en la superficie libre del líquido; por consiguiente

$$(5)\quad p = P + g\rho(z-h) - \rho S\frac{dv}{dt}\int\frac{dz}{\omega} - \rho\frac{S^2v^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Par $z=h+l$, se tiene $P'=p$, $\omega=S$, y por consiguiente, si hacemos

$$\int_h^{h+l}\frac{dz}{\omega} = m,\quad P - P' = g\rho\delta,$$

resulta

$$(6)\quad g(l+\delta) = mS\frac{dv}{dt} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{S^2}{O^2}\right)v^2.$$

Ahora conviene distinguir dos casos, segun que el nivel del líquido sea constante ó variable.

Nivel constante.

831. En este caso, despejando dt en la ecuacion (6), resulta

$$(7)\quad dt = \frac{2mS\,dv}{k^2 - \alpha^2v^2}.$$

Poniendo para abreviar $1-\frac{S^2}{O^2}=\alpha^2$, $2g(l+\delta)=k^2$.

Integrando la ecuacion (7), resulta

$$t=\frac{mS}{k\alpha}l.\frac{1}{c}\left(\frac{k+\alpha v}{k-\alpha v}\right).$$

Suponiendo las velocidades nulas para $t=0$, y la constante $c=1$; y resolviendo la ecuacion con respecto v, será

$$(8)\quad v=\frac{k}{\alpha}\frac{1-e^{-\frac{\alpha kt}{mS}}}{1+e^{-\frac{\alpha kt}{mS}}}.$$

Conocida v, la ecuacion (2) dará u_2, y la ecuacion (5) dará p.

En la expresion del valor de v vemos, que al cabo de un cierto tiempo, tanto más pequeño cuanto menor sea S, v será constante é igual á $\frac{k}{\alpha}=\sqrt{\frac{2g(l+\delta)}{1-\frac{S^2}{O^2}}}$; y los valores de u_2 y p convergen hácia los límites correspondientes.

Si despreciamos el cuadrado de $\frac{S}{O}$, el límite de v será $\sqrt{2g(l+\delta)}$. ó cuando $\delta=0$, $v=\sqrt{2gl}$; es decir, cuando la presion exterior es la misma en el orificio y sobre la superficie libre del líquido. Luego esta velocidad es la misma que la que adquiriria un cuerpo pesado cayendo en el vacío de una altura igual á la del líquido en el vaso. El resultado que expresa la fórmula $v=\sqrt{2gl}$, es lo que se llama *teorema de Torricelli.*

832. Cuando la velocidad v llega á ser constante, $\frac{dv}{dt}=0$, y la ecuacion (5) se reduce á

$$p=P+g\rho(z-h)-\rho\frac{S^2v^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{O^2}\right);$$

pero en el caso de equilibrio, la presion es igual á

$$P+\rho g(z-h),$$

por ser $v=0$, la cual es menor, en el estado de movimiento, para las secciones en que se tenga $\omega<O$; es decir, para aquellas cuya área es menor que la superficie libre del líquido; por el contrario, es mayor para las secciones cuyas áreas son mayores que O.

El volúmen V del líquido, que sale de la vasija al cabo de un tiempo t, se obtiene integrando $Svdt$ entre los límites 0 y t, despues de poner por v su valor (8); se tendrá

$$V=\int_0^t Svdt=\frac{2m}{\frac{1}{S^2}-\frac{1}{O^2}}\,l.\frac{e^{\frac{\alpha kt}{2mS}}+e^{-\frac{\alpha kt}{2mS}}}{2}.$$

Al cabo de cierto tiempo se podrá despreciar la segunda esponencial y se tendrá aproximadamente, poniendo por h su valor $\sqrt{2g(l+\delta)}$,

$$V=\frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{S^2}-\frac{1}{O^2}}}t-\frac{2ml.2}{\frac{1}{S^2}-\frac{1}{O^2}},$$

El primer término del segundo miembro es el volúmen que hubiera salido, si la velocidad hubiera sido desde el principio igual á su límite.

Nivel variable.

833. En este caso m y O son funciones conocidas de h, por la ecuacion

$$h+l=a,$$

siendo a la distancia constante del orificio al orígen de las z. Será necesario expresar que el líquido, que sale en un intervalo de tiempo dt, es igual al volúmen comprendido entre los dos niveles correspondientes al principio y al fin de este intervalo. De este modo obtendremos, $Odh=Svdt$, ó

$$(9)\qquad \frac{dh}{dt}=\frac{Sv}{O}.$$

La ecuacion (6) se reduce á

$$(10) \quad g(a+\delta-h)=m\,S\frac{dv}{dt}+\tfrac{1}{2}S^2v^2\Big(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{O^2}\Big).$$

Eliminando dt entre las ecuaciones (9) y (10) y poniendo $v^2=2gz$, resulta

$$\frac{dz}{dh}+\frac{O}{m}\Big(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{O^2}\Big)z+\frac{O}{mS^2}(h-a-\delta)=0,$$

ecuacion lineal que podemos integrar. Cuando z sea conocido en funcion de p, se conocerá v en funcion de t. La cantidad de líquido, que ha salido del vaso, se determinará calculando el volúmen del vaso comprendido entre el nivel inicial y el nivel variable.

Si el área S del orificio es muy pequeña, la ecuacion 6) se reduce á

$$v^2=2g(l+\delta),$$

lo que da para v la velocidad límite que hemos obtenido para $t=\infty$. La velocidad que da la experiencia, es menor que la teórica calculada por esta fórmula, en la relacion casi constante de 0,62 á 1.

Aplicacion del teorema de Bernou lli á la salida del líquido por orificio practicado en pared delgada.

834. El teorema de Bernoulli permite tambien determinar de un modo muy sencillo, la velocidad v de un punto de un filete líquido, animado de un movimiento permanente, cuando es conocida la presion en este punto. Sea PQRT (fig. 343), un vaso de forma cualquiera en el cual el líquido conserva un nivel constante LT; en cuya pared, que supondremos delgada, se practica un orificio

CD por donde sale el líquido; al cabo de un tiempo muy corto, se establece el régimen permanente. Se pide la velocidad v en la seccion *as*, donde la salida se verifica por filetes paralelos, y que se llama *seccion contraida* de la vena líquida; esta seccion está muy próxima al orificio CD cuando la pared es suficientemente delgada.

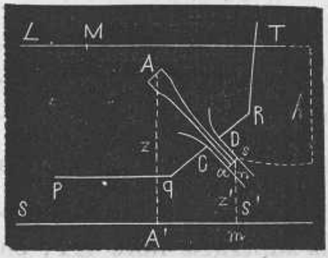

Fig. 343.

La presion en todos los puntos de la seccion *as* es igual á la presion atmosférica; porque si no lo fuera, la vena líquida tenderia á contraerse ó á dilatarse, por la presion atmosférica que se ejerce á su alrededor. Consideremos en particular el filete que pasa por un punto n de esta seccion; sea An la traza del filete en el interior del vaso, que supondremos prolongado hasta una porcion del líquido en que la velocidad es muy pequeña. La ecuacion del gasto

$$Q = \omega v = \omega' v'$$

prueba que las velocidades v y v' varían en razon inversa de las áreas de las secciones ω, ω'. Siendo la seccion del vaso mucho mayor que la seccion de la vena en *as*, las velocidades en el interior del vaso son necesariamente mucho menores que la velocidad á la salida; de modo que podemos suponer que la velocidad en el punto A se puede despreciar sin error sensible.

Sean $z = AA'$ la altura del punto A sobre un plan horizontal SS', p la presion en el punto A; llamemos v á la velocidad en el punto n, $z' = nm$, á la altura de n sobre el mismo plano, y p_0 á la presion en n, igual como sabemos á la presion atmosférica. Aplicando la ecuacion de

Bernoulli, tendremos

$$z+\frac{p}{\rho}=\frac{v^2}{2g}+\frac{p_0}{\rho}+z'.$$

Son desconocidos z y p; mas como en el punto A la velocidad es casi nula, la distribucion de las presiones difiere muy poco de la presion de un líquido pesado en equilibrio, que es segun la Hidrostática $z+\frac{p}{\rho}$. Esta funcion es entónces independiente de la posicion del punto A; tomémosla para un punto M de la superficie libre LT; en este punto, la presion es igual á la presion atmosférica ó á p_0, si el vaso está abierto al aire libre, y los niveles LT y *as* no distan mucho uno de otro; sea Z la altura de la superficie libre del líquido LT sobre el plano de comparacion SS'; tendremos

$$z+\frac{p}{\rho}=Z+\frac{p_0}{\rho},$$

y la ecuacion anterior se convierte en

$$Z+\frac{p_0}{\rho}=\frac{v^2}{2g}+\frac{p_0}{\rho}+z',$$

de la que se deduce

$$v=\sqrt{2g(Z-z')}=\sqrt{2gh},$$

llamando h á la altura vertical desde LT á la seccion contraida. Volvemos á encontrar el teorema de Torricelli.

El *gasto* Q es $v\omega$, siendo ω el área de la seccion contraida, y v la velocidad del líquido en dicha seccion, y será

$$Q=\omega\sqrt{2gh}.$$

Por la experiencia se ha determinado la relacion $\frac{\omega}{S}$ del área de la seccion contraida al área del orificio, esta relacion que se llama *coeficiente de contraccion*, es $\frac{\omega}{S}=0,62$, y la expresion del gasto toma la forma

$$Q=0,62\,S\sqrt{2gh}.$$

Paso de un líquido en filetes rectilíneos paralelos, por un canal ó por un tubo.

835. Cuando un líquido, animado de un movimiento que satisface á las condiciones de permanencia, corre por un canal ó por un tubo, en filetes sensibles rectilíneos y paralelos, las presiones se distribuyen en una misma seccion trasversal segun las leyes de la Hidrostática, es decir, como si el líquido estuviera en equilibrio en el vaso que lo contiene.

Para demostrarlo, tomemos las ecuaciones del movimiento de un líquido homogéneo

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = u'$$
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = u'_1$$
$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = u'_2$$

y la ecuacion de continuidad

$$\frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dz} = 0.$$

Las cantidades u', u'_1, u'_2 representan las proyecciones de la aceleracion sobre los ejes. Supongamos que el eje de las x es paralelo á la direccion de los filetes; las velocidades u_1 y u_2 son cero, lo mismo que las aceleraciones u'_1 y u'_2. Luego $\frac{du_1}{dy}=0$, $\frac{du_2}{dy}=0$, y la ecuacion de continuidad se reduce á $\frac{du}{dx}=0$; y como siempre

$$u' = u\frac{du}{dx} + u_1\frac{du}{dy} + u_2\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt},$$

en la cual $\frac{du}{dt}=0$, por ser el régimen permanente; tambien $\frac{du}{dx}=0$, $u_1=0$ y $u_2=0$, luego $u'=0$, y la velocidad

u es constante para un mismo filete, y el movimiento es uniforme.

Las tres ecuaciones del movimiento se reducen á las siguientes:

$$\frac{dp}{dx}=\rho X,$$
$$\frac{dp}{dy}=\rho Y,$$
$$\frac{dp}{dz}=\rho Z,$$

es decir, á las ecuaciones del equilibrio, ó de la Hidrostática, y las presiones se distribuyen en el interior de la masa líquida como si estuviera en equilibrio. Esta consecuencia sólo se verifica para una longitud infinitamente pequeña de la corriente, si se trata de un líquido natural; pues para mayor extension deberíamos tener en cuenta la viscosidad. Por fin, esta proposicion sólo se verifica para la distribucion de las presiones en una misma seccion trasversal.

836. Apliquemos este teorema á la salida de un líquido por un orificio que lleva un tubo adicional. Por el orificio CD (figura 344), sale un líquido contenido en el vaso LCD, mantenido á un nivel constante LT; el líquido corre en filetes paralelos por un canal, cuyo fondo está representado en la figura por HD.

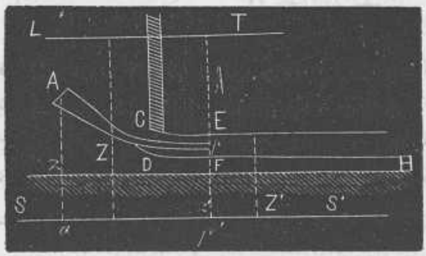

Fig. 344.

Sea EF la seccion más aproximada al orificio, en donde la corriente por filetes paralelos se establece; designemos por v la velocidad del filete líquido que atraviesa dicha seccion en el punto p; sea p' la presion en este punto y z'

la altura pp' sobre el plano de comparacion SS'; z y p las cantidades análogas en otro punto A del mismo filete, tomado en el vaso bastante léjos del orificio para que la velocidad sea sensiblemente nula. Por el teorema de Bernoulli, tendremos

$$z+\frac{p}{\rho}=\frac{v^2}{2g}+\frac{p'}{\rho}+z'.$$

Sabemos que $z+\frac{p}{\rho}=Z+\frac{p_0}{\rho}$ siendo Z la altura del nivel libre del líquido LT, y p_0 la presion atnosférica. Tambien el paso por la seccion EF se verifica por filetes paralelos, y las presiones en esta seccion están distribuidas como si el líquido estuviera en reposo. Luego $z'+\frac{p'}{\rho}=Z'+\frac{p_0}{\rho}$, siendo Z' la altura de la superficie libre en el tubo adicional, y la fórmula se reduce á

$$Z+\frac{p_0}{\rho}=Z'+\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2g},$$

de donde se deduce

$$v=\sqrt{2g(Z-Z')}=\sqrt{2gh},$$

siendo h la diferencia de nivel entre la superficie libre del líquido en el vaso y la superficie libre en el canal de salida. Todos los filetes líquidos que atraviesan la seccion EF, están animados de la misma velocidad.

Del mismo modo probaríamos, que cuando un líquido pesado sale por un orificio sumergido, es decir, cuando la vena líquida penetra en un líquido en equilibrio, la velocidad de salida es igual á la velocidad debida á la diferencia de altura comprendida entre el nivel del líquido en el depósito superior y el nivel del líquido en el deposito inferior.

Aplicacion del teorema de las fuerzas vivas á las máquinas hidráulicas.

837. Las máquinas hidráulicas se ponen en movimiento por la fuerza del agua. Sea para fijar las ideas C una rueda hidráulica de paletas curvas (fig. 345), en la cual el agua obra sobre las paletas, pasando del depósito superior al depósito inferior; el movimiento del líquido es sensiblemente permanente, el sistema móvil se volverá á encontrar en una situacion exactamente semejante á la que tenía; al cabo de un tiempo muy corto, que la paleta *ab* invierte en pasar al lugar de la paleta siguiente *a'b'*. Sea θ este tiempo, y apliquemos el teorema de las fuerzas vivas á la masa líquida durante este intervalo de tiempo. Consideremos dos secciones trasversales, una FF' en el depósito superior, y otra GH en el inferior.

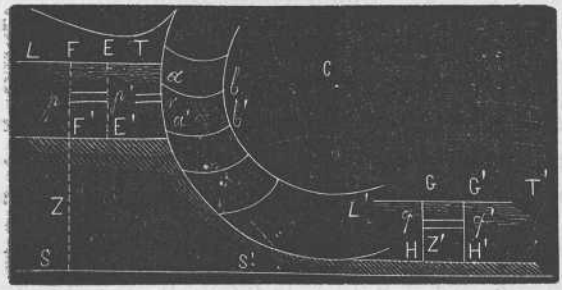

Fig. 345.

Todo filete líquido que atraviesa la primera en un punto *p* se encontrará en la segunda en un cierto punto *q*; sea ω el área de la seccion del filete y v la velocidad del líquido en el punto *p*.

El volúmen que ha pasado durante el tiempo θ por una seccion de este filete será $\omega v\theta$; el volúmen que pasa por la seccion total en el mismo tiempo, será $\Sigma\omega v\theta = \theta\Sigma\omega v = Q\theta$, llamando Q al gasto total de la corriente de agua en una unidad de tiempo. En el tiempo θ la seccion FF', pasa á ocupar la posicion EE', y si admitimos que la velocidad v sea comun á todos los filetes, el camino recorrido es igual á $ds = v\theta$. Designemos por v', ω' las cantidades análogas relativas al filete q en la seccion GH; el volúmen gastado en el tiempo θ será tambien $Q\theta$, y la seccion GH ocupará la posicion G'H', recorriendo el camino $v'\theta$.

La parte del sistema líquido comprendido entre las secciones FF' y GH se compone en las dos épocas de las mismas moléculas animadas de las mismas velocidades; el incremento de la fuerza viva entre las dos épocas es, por consiguiente, la diferencia entre la fuerza viva de la masa GHH'G', y la fuerza viva de la masa FF'EE', es decir,

$$\frac{\rho}{g} Q\theta(v'^2 - v^2);$$

esta diferencia será igual al duplo de la suma algébrica de los trabajos desarrollados por el sistema. Ahora las fuerzas que solicitan al sistema son la gravedad, la presion atmosférica, las presiones propias del líquido, la resistencia opuesta por la rueda, y ciertas resistencias accesorias, análogas á las resistencias pasivas.

El trabajo de la gravedad es igual al que desarrolla la masa FF'EE' al pasar á la posicion GHH'G'; el peso de esta masa es $\rho Q\theta$. Sean h y h' las profundidades de la corriente de agua en las secciones FF', GH; Z y Z' las alturas de los niveles LT y L'T' sobre un plano horizontal SS'; el centro de la masa superior será la cota $Z - \frac{h}{2}$, y el de la masa inferior la cota $Z' - \frac{h'}{2}$, supuestas las secciones rectangulares. Luego el trabajo de la gravedad es

$$\rho Q\theta\left(Z - \frac{h}{2} - Z' + \frac{h'}{2}\right).$$

La presion atmosférica puede considerarse como actuando sobre todo el volúmen líquido, porque se ejerce en la seccion superior, en la inferior y en las paredes laterales. Su trabajo es nulo, puesto que el líquido no cambia de volúmen.

Las presiones laterales no desarrollan ningun trabajo, suponiéndolas normales á los caminos recorridos por sus puntos de aplicacion; no hay, pues, que tener en cuenta más que las presiones de arriba y de abajo en las secciones FF′ y GH, haciendo abstraccion de la presion atmosférica, las cuales se distribuyen segun la ley de la Hidrostática (766). La presion media en la seccion FF′ es igual á la presion sobre el centro de gravedad, ó á $\rho\frac{h}{2}$; y está aplicada á toda la seccion F′F, su trabajo se obtendrá multiplicando $\rho\frac{h}{2}$ por el área de la seccion FF′, y por el camino descrito $v\theta$, lo que equivale á multiplicar $\rho\frac{h}{2}$ por $Q\theta$; luego el trabajo de la presion de arriba es igual á $+\rho\frac{h}{2}Q\theta$; del mismo modo el trabajo de la presion de abajo, que es resistente, es $-\rho\frac{h'}{2}Q\theta$.

El trabajo de la resistencia de la rueda es igual y contrario al trabajo de las *acciones normales* ejercidas por el agua sobre la rueda, ó al trabajo motor trasmitido al aparato; designemos por $T_m\theta$ este trabajo, llamando T_m el trabajo trasmitido á la rueda en la unidad de tiempo.

Por fin, designemos por $-T_j$ la suma de los trabajos resistentes accesorios, referidos á la unidad de tiempo.

El teorema de las fuerzas vivas, da la ecuacion

$$\frac{\rho}{2g}Q\theta(v'^2-v^2)=\rho Q\theta\left(Z-\frac{h}{2}-Z'+\frac{h'}{2}\right)+\rho\frac{h}{2}Q\theta-\rho\frac{h'}{2}Q\theta$$
$$-T_m\theta-T_j\theta,$$

y reduciendo

$$T_m=\rho Q\left(Z-Z'+\frac{v^2}{2g}\right)-\rho Q\frac{v'^2}{2g}-T_j.$$

Tal es la ecuacion de las fuerzas vivas para una máquina hidráulica. En ella $\rho Q \frac{v^2}{2g}$ es la mitad de la fuerza viva gastada en la unidad de tiempo por el canal de llegada; $(Z—Z') \times \rho Q$ es el trabajo debido al salto; es decir, el peso del agua por la altura $Z—Z'$; $\rho Q \frac{v'^2}{2g}$ es la mitad de la fuerza viva conservada por el agua cuando deja la rueda, y T_j es el trabajo debido á la viscosidad, á los rozamientos del líquido con el lecho del canal, con la rueda y consigo mismo.

El trabajo utilizado por la rueda aumenta con la altura del salto $Z—Z'$; y tambien aumenta cuando la velocidad v' y el término T_j disminuyen. Así, el mejor receptor hidráulico será aquel en que el agua entre sin choque, y salga sin velocidad.

Si entra sin choque, el término T_j es sensiblemente nulo; si sale sin velocidad $v'=0$. Pero es imposible satisfacer completamente á estas condiciones.

El término $\rho Q\left(Z - Z' + \frac{v^2}{2g}\right)$ representa la fuerza absoluta del salto, y el trabajo utilizado por el receptor no es más que una fraccion del trabajo desarrollado por esta fuerza. Esta fraccion es la medida del rendimiento de la máquina.

Fórmula de Gérardin.

838. La nueva fórmula de los motores hidráulicos de M. H. Gérardin, dada en su teoría de los motores hidráulicos, está fundada en el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento, aplicado á la masa flúida, con respecto al eje de rotacion del receptor; este método tiene la ventaja de eliminar las fuerzas interiores.

Consideremos en el instante t una porcion del líquido actuando sobre la rueda y comprendido entre una seccion del canal de arriba y una seccion del canal de abajo.

Sean m la masa de una molécula, v su velocidad, r su distancia al eje del receptor, α el ángulo que forma la velocidad v con el arco infinitamente pequeño que describiria en el tiempo dt el punto geométrico ocupado por la molécula m, si fuera arrastrado por la rueda, y ω la velocidad angular, constante ó variable, de la rueda.

El producto $mvr\cos\alpha$ será el momento de la cantidad de movimiento de la masa m con respecto al eje; $\Sigma mvr\cos\alpha$ representará la suma de los momentos de todas las moléculas comprendidas entre los límites indicados. Llamemos M á la suma de los momentos, con respecto al eje de la rueda, de las fuerzas exteriores que solicitan la masa flúida, prescindiendo de las reacciones ejercidas por la rueda sobre las moléculas que la tocan; las fuerzas comprendidas en la suma M son por consiguiente la gravedad, las presiones del flúido que rodea á la máquina, las presiones normales de las paredes fijas, la resistencia del aire y los rozamientos de las paredes.

Sea μ la suma de los momentos con respecto al mismo eje de las acciones ejercidas por la rueda sobre la masa flúida; $-\mu$ será la suma de los momentos de las reacciones del flúido sobre la rueda.

Aplicando el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento á la masa flúida, durante un intervalo de tiempo dt, tendremos

$$d.(\Sigma mvr\cos\alpha)=(\mathrm{M}-\mu)dt,$$

ó

$$\mu=\mathrm{M}-\frac{d}{dt}\Sigma mvr\cos\alpha;$$

multipliquemos por ωdt, ángulo descrito por la rueda en el tiempo dt; el producto $\mu.\omega dt$ será el trabajo elemental $d\mathrm{T}$ trasmitido á la rueda, y tendremos

$$d\mathrm{T}=\mathrm{M}\omega dt-\omega d.(\Sigma mvr\cos\alpha),$$

fórmula muy notable, que no se funda en ninguna hipótesis, y que no supone ninguna permanencia de régimen, ni de continuidad de la masa flúida en movimiento.

El trabajo trasmitido dT no es tampoco utilizado enteramente por la rueda; el mejor aprovechamiento corresponde al caso en que la velocidad angular ω es constante; de otro modo, una porcion del trabajo motriz se consume en pura pérdida, para producir las variaciones de velocidad del cuerpo que gira.

LECCION LXVIII.

Vibraciones de los gases en tubos cilíndricos. Ecuacion del movimiento.—Integracion y discusion de esta ecuacion.—Tubo cerrado por un extremo é indefinido por el otro.—Tubo indefinido en un sentido y abierto en un medio gaseoso de densidad constante.—Tubo cerrado por sus dos extremos.—Tubo limitado abierto por sus dos extremos.—Tubo limitado abierto por un extremo y cerrado por el otro.—Velocidad del sonido en los gases.

Vibraciones de los gases en tubos cilíndricos. Ecuacion del movimiento.

839. Para estudiar el movimiento vibratorio de los gases en tubos cilíndricos sea PQ (fig. 346), un tubo cilíndrico lleno de aire á presion y temperatura constantes y cuya seccion recta es arbitraria; tomemos el eje del

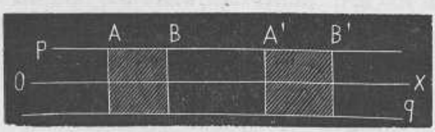

Fig. 346.

cilindro OX por eje de las x, y por orígen el punto O de esta recta. Supondremos que en el movimiento del gas en el interior del tubo, las moléculas situadas al principio del movimiento en una seccion trasversal se trasladan todas juntamente, de manera que en cada instante se encuentran en un plano normal al eje OX. Esta condicion puede satisfacerse al principio del movimiento, y el cálculo que vamos á verificar prueba que puede admitirse durante todo el movimiento.

Sea en el orígen del movimiento, ó para $t=0$, A una capa trasversal cuya abscisa es x; al fin del tiempo t, esta capa se encuentra en A′ sin dejar de ser normal á OX y su abscisa es $x+u$; consideremos al principio del movimiento una segunda capa B cuya abscisa será $x+dx$, al fin de tiempo t, se habrá trasladado á B′, y su abscisa será $x+dx+u+\frac{du}{dx}dx$. Establezcamos la ecuacion del movimiento de la masa gaseosa comprendida, al fin del tiempo t, entre las capas A y B, y al fin del tiempo t' entre las capas A′ y B′.

Para no tener en cuenta el peso del aire, supongamos el tubo horizontal; la pequeña densidad de los gases nos permitirá despreciar la gravedad con respecto á las presiones, y tambien despreciar las variaciones de presion y de densidad que resultarán en el estado de equilibrio, para una inclinacion dada del tubo, y los resultados que obtengamos serán generales. El movimiento de la capa gaseosa estará definido por el valor de u en funcion de t; y la aceleracion será igual á $\frac{d^2u}{dt^2}$. Sea m la masa de la cantidad de aire comprendida entre los planos A y B al fin de tiempo t, ó entre los planos A′ y B′, y p, p' las presiones por unidad de superficie en los planos A′ y B′, la ecuacion del movimiento representando por ω el área de la seccion será

$$(1)\quad m\frac{d^2u}{dt^2}=\omega(p-p').$$

840. Sea ρ la densidad del gas en el estado de reposo, y á la temperatura que posee al principio del movimiento, será $m=\rho\omega dx$. Para determinar completamente la ecuacion (1), debemos expresar p y p' en funcion de las variables u y x; lo cual conseguiremos por medio de las leyes

de Mariotte y Gay-Lussac. Sean al efecto p_0 la presion del gas al estado de reposo en la seccion A, θ_0 su temperatura, α su coeficiente de dilatacion, θ su temperatura al estado de movimiento al fin del tiempo t, en el intervalo A'B' y p la presion en la seccion A'. Entre las presiones p y p_0 existe, segun las leyes de Mariotte y Gay-Lussac, la relacion

$$(2)\quad \frac{p}{p_0}=\frac{\text{vol. AB}\times(1+\alpha\theta)}{\text{vol. A'B'}\times(1+\alpha\theta_0)}=\frac{dx}{dx+\frac{du}{dx}dx}\times\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\theta_0};$$

α y $\frac{du}{dx}$ son cantidades muy pequeñas, y desarrollando $\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha\theta_0}$ por la division, podemos poner en su lugar los dos primeros términos del cociente, $1+\alpha(\theta-\theta_0)$; y del mismo modo, en vez de $\frac{1}{1+\frac{du}{dx}}$, $1-\frac{du}{dx}$; resulta

$$(3)\quad p'=p_0(1+\alpha(\theta-\theta_0))\left(1-\frac{du}{dx}\right)=p_0\left[1-\frac{du}{dx}+\alpha(\theta-\theta_0)\right],$$

despreciando el término $\frac{du}{dx}\alpha(\theta_0-\theta)$, que es muy pequeño.

La diferencia de las presiones $p-p'$, es la diferencial parcial de p, tomada con relacion á la variable x, y con signo contrario; bastará, pues, para obtener $p-p'$, diferenciar con respecto á x la ecuacion (3), y cambiar el signo al resultado. Pero ántes de diferenciar conviene expresar la diferencia $\theta-\theta_0$ en funcion de las variables x y u.

841. La temperatura de una capa gaseosa crece con la presion que experimenta esta capa, y se encuentra la relacion que existe entre estas dos cantidades, por medio de las siguientes consideraciones de Termodinámica.

Se sabe que el calor produce trabajo, y el trabajo mecánico produce calor; y bajo este punto de vista el calor es análogo á la fuerza viva, porque el movimiento de todo sistema material presenta una serie de cambios entre la fuerza viva y el trabajo de las fuerzas interiores y exteriores.

El calor latente de fusion de los sólidos, y el calor latente de vaporizacion de los líquidos no son sensibles al termómetro, ó no producen aumento alguno en la temperatura de estos cuerpos. La cantidad de calor que reciben estos cuerpos verifica un cierto trabajo, que consiste en la disgregacion de las moléculas, que de sólidas se convierten en líquidas ó gaseosas, y este trabajo equivale al calor empleado en producirlo. Cuando se calienta un gas en vasija cerrada, sucede una cosa análoga; si no se le permite ocupar un volúmen mayor, su temperatura se eleva de un cierto número de grados, para una cantidad determinada de calor que se le comunica, y al mismo tiempo su presion aumenta. Si se calienta del mismo número de grados, dejando que aumente su volúmen, de manera que su presion permanezca constante, se observa que es preciso comunicarle una cantidad de calor mayor que en el caso de ser su volúmen constante. En el primer caso, el calor sólo ha producido el efecto de calentar el gas; en el segundo, una parte ha producido el caldeamiento, y la otra se ha trasformado en el trabajo molecular de la expansion del gas.

La cantidad de calor contenida en un cuerpo, se mide por la suma de las fuerzas vivas de las moléculas, correspondientes á sus pequeños movimientos vibratorios. De suerte, que la fuerza viva total de un sistema material consta de tres partes: la fuerza viva debida á la traslacion del sistema, suponiéndole concentrado en su centro de gravedad; la fuerza viva en el movimiento con relacion á ejes de direccion constante, trazados por su centro de gravedad; y la fuerza viva debida á las pequeñas vibraciones de las moléculas materiales alrededor de sus posiciones medias, que mide como hemos dicho, la cantidad de calor contenida en el sistema en el instante considerado.

842. La unidad usada para medir las cantidades de calor se llama *caloria*, que es la cantidad de calor necesaria para elevar de cero á un grado centígrado la temperatura de un kilógramo de agua líquida.

Se llama calor específico de un cuerpo el número de calorias que hay que emplear para elevar la temperatura de un kilógramo de este cuerpo, de cero á un grado centígrado. Como al calentarse el cuerpo, se dilata y verifica un cierto trabajo, la cantidad de calor necesaria para elevar de un grado su temperatura es superior á la que produciria el mismo efecto, si el volúmen del cuerpo permaneciera constante. Hay, por consiguiente, para un mismo cuerpo dos calores específicos, el uno á *volúmen constante*, y el otro á *presion constante*; estas cantidades son diferentes para todos los cuerpos; pero la diferencia es muy pequeña para los sólidos y los líquidos, que son muy poco dilatables, y es muy considerable para los gases, que son muy dilatables. Para encontrar con exactitud la relacion del trabajo al calor que lo produce, conviene escoger, como ejemplos, cuerpos cuyas dilataciones no den lugar á ningun trabajo interior; los gases son los que mejor satisfacen á esta condicion, porque sus moléculas son más independientes y tienen ménos viscosidad.

843. Sea V un cierto volúmen de gas, á la temperatura cero, bajo la presion p, sea P el peso específico de este gas á esta temperatura y á esta presion. Designemos por c su calor específico á presion constante, por c_1 su calor específico á volúmen constante, siendo α su coeficiente de dilatacion.

Si elevamos la temperatura del gas á t grados, la cantidad de calor que habrá que comunicarle, para este efecto, será, $PV \times c_1 t$, cuando su volúmen permanezca constante.

Cuando el volúmen aumenta y la presion es constante, el aumento de volúmen está representado por $V\times\alpha t$, y el trabajo producido por la dilatacion es $pV\times\alpha t$. La cantidad de calor empleada en producir este resultado es $PV\times ct$. De esta cantidad, la parte $PV\times c_1 t$ se emplea en calentar el gas; el resto $PV(c-c_1)t$, se trasforma en trabajo, y la relacion del trabajo producido al calor correspondiente, es

$$\frac{pV\alpha t}{PV(c-c_1)t}=\frac{p\alpha}{P(c-c_1)}.$$

Este número es independiente del volúmen V considerado, y de la temperatura t á que se ha llevado el gas. La ecuacion de Mariotte y Gay-Lussac (759)

$$\frac{p}{P}=K(1+\alpha t),$$

haciendo en ella $t=0$, es

$$\frac{p}{P}=K,\ \text{ó}\ \frac{p\alpha}{P}=K\alpha=R;$$

y la fórmula de Mariotte y Gay-Lussac puede pasarse bajo la forma

$$\frac{p}{P}=R\left(\frac{1}{\alpha}+t\right),$$

que es muy cómoda, y conduce á expresar la temperatura por el número $\frac{1}{\alpha}+t$, en vez del número t. Esto equivale á bajar el cero de la graduacion centígrada á $\frac{1}{\alpha}$, ó á 273° bajo cero. Este nuevo cero se llama *cero absoluto*; si la temperatura del gas pudiera descender á este grado del termómetro ordinario, su fuerza elástica vendria á ser rigurosamente nula.

Sea θ la temperatura contada á partir del cero absoluto, ó la que se llama la temperatura absoluta, se tendrá la sencilla ecuacion:

$$\frac{p}{P}=R\theta,$$

para enlazar la presion, el peso específico y la temperatura de una masa gaseosa. La relacion del trabajo producido al calor empleado en producirlo es por consiguiente

$$\frac{p\alpha}{P(c-c_1)}=\frac{R}{c-c_1}.$$

Esta relacion se llama *equivalente mecánico del calor*, y su recíproca $\frac{c-c_1}{R}$, es el equivalente *calorífico del trabajo*. Estos números, como los acabamos de definir, pueden considerarse como constantes específicas, que varían con el cuerpo que se considera. A pesar de esta restriccion, se demuestra en Termodinámica que el equivalente mecánico del calor es absolutamente constante, cualquiera que sea el cuerpo sometido á la experiencia.

844. Esto supuesto, el volúmen de gas ωdx, tomado á la presion p_0, experimenta una dilatacion que aumenta su volúmen, en la relacion de 1, á $1+\frac{du}{dx}$; luego la variacion relativa de volúmen está medida por la expresion $\frac{du}{dx}$. Supongamos que esta relacion sea bastante pequeña en valor absoluto, para que la presion p_0 no varíe sensiblemente á causa de la dilatacion del gas. El trabajo desarrollado por este volúmen de gas es

$$p_0\times\omega dx\times\frac{du}{dx}.$$

Admitiremos que este trabajo es enteramente producido á expensas de la cantidad de calor interno del gas, y que corresponde á un descenso de temperatura $\theta_0-\theta$; esta hipótesis equivale á despreciar la cantidad de calor producida ó absorbida por el tubo. La cantidad de calor, perdida por unidad de peso, es $c_1(\theta_0-\theta)$, la que pierde el peso considerado es

$$c_1(\theta_0-\theta)\times\rho g\,\omega\,dx.$$

Designando por C el equivalente mecánico del calor, tendremos

$$C c_1(\theta_0-\theta)\rho g\omega dx = p_0\omega dx\,\frac{du}{dx};$$

pero $C=\frac{R}{c-c_1}$, siendo R la constante de la ecuacion de los gases, $\frac{p}{P}=R\left(\frac{1}{\alpha}+\theta\right)$; y despejando en la ecuacion anterior $\theta-\theta_0$, será

$$\theta_0-\theta=\frac{p_0}{\rho g R}\,\frac{c-c_1}{c_1}\,\frac{du}{dx};$$

ecuacion que se simplifica observando que

$$\frac{p_0}{\rho g}=R\left(\frac{1}{\alpha}+\theta_0\right),$$

y resulta

$$\theta_0-\theta=\left(\frac{1}{\alpha}+\theta_0\right)\frac{c-c_1}{c_1}\,\frac{du}{dx},$$

y por fin

$$(4)\quad \alpha(\theta_0-\theta)=\left(1+\alpha\theta_0\right)\frac{c-c_1}{c_1}\,\frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo en la (3), será

$$p=p_0\left[1-\frac{du}{dx}-(1+\alpha\theta_0)\frac{c-c_1}{c_1}\,\frac{du}{dx}\right]$$
$$=p_0-p_0\frac{du}{dx}\left(1+\frac{c-c_1}{c_1}+\alpha\theta_0\frac{c-c_1}{c_1}\right);$$

y despreciando el término que contiene α, por ser muy pequeño, tendremos

$$(5)\quad p=p_0-p_0\frac{du}{dx}\cdot\frac{c}{c_1}.$$

Hay que tener en cuenta la variacion de la temperatura de las capas sucesivas, segun su grado de rarefaccion ó de condensacion; porque los cambios de presion son bastante rápidos, para que no haya tiempo de establecerse una temperatura uniforme en toda la masa gaseosa en movimiento, en virtud de la conductibilidad y de la radiacion del calor. Ademas el factor $\frac{c}{c_1}$ es muy superior á la unidad.

Diferenciando la ecuacion (5), sólo con relacion á x, obtendremos

$$(6)\quad p'-p=\frac{dp}{dx}dx=-p_0\frac{d^2u}{dx^2}dx\times\frac{c}{c_1};$$

y sustituyendo en la ecuacion (1) por m y $p-p'$ sus valores, la ecuacion del movimiento se convertirá en la

$$(7)\quad \rho\frac{d^2u}{dt^2}=p_0\frac{c}{c_1}\frac{d^2u}{dx^2};$$

haciendo $a=\sqrt{\frac{p_0}{\rho}\times\frac{c}{c_1}}$, se reduce á la forma

$$(8)\quad \frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{du^2}{dx^2}.$$

Integracion y discusion de esta ecuacion.

845. La integral general de esta ecuacion, con dos funciones arbitrarias, es

$$(9)\quad u=\varphi(x-at)+\psi(x+at).$$

Las funciones φ é ψ se determinan por medio de los valores iniciales, para $t=0$, de u y $\frac{du}{dx}$ que son funciones dadas de x. En vez del valor inicial de u, supondremos conocido el valor de la dilatacion $\frac{du}{dx}$, para $t=0$; de suerte, que debemos conocer, para $t=0$, las cantidades

$$\frac{du}{dx}=f(x),\quad \frac{du}{dt}=f_1(x).$$

De la fórmula (9) se deduce

$$(10)\quad \begin{cases}\frac{du}{dx}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at),\\ \frac{du}{dt}=a[-\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)].\end{cases}$$

Haciendo $t=0$ en estas ecuaciones, obtendremos

$$\psi'(x)+\varphi'(x)=f(x),$$
$$\psi'(x)-\varphi'(x)=\frac{1}{a}f_1(x),$$

que dan los siguientes valores de $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$,

$$(11)\quad \begin{cases} \varphi'(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-\frac{1}{a}f_1(x)\right) \\ \psi'(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{a}f_1(x)\right). \end{cases}$$

846. Supongamos que la parte puesta primitivamente en movimiento se extiende sólo desde $x=0$, á $x=l$. Entónces las funciones $f(x)$ y $f_1(x)$; y las $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ que dependen de ellas, son cero para todos los valores de x no comprendidos entre 0 y l.

Tomemos en un punto situado á la derecha, y más allá de la conmocion inicial OL (fig. 347); siendo su abscisa x mayor que l, $x+at$ será mayor que l, siendo $t>0$, y tendremos por consiguiente en las ecuaciones (10)

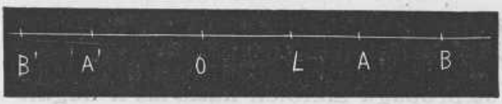

Fig. 347.

$$\psi'(x+at)=0,$$

$$\frac{du}{dx}=\varphi'(x-at),\quad \frac{du}{dt}=-a\varphi'(x-at);$$

y para que estos valores de $\frac{du}{dx}$ y $\frac{du}{dt}$ no sean cero, es necesario que $x-at$ esté comprendido entre 0 y l, ó que $x>at$ y $x<at+l$; es decir, que al cabo del tiempo t no haya movimiento más allá de OL, más que en una porcion AB$=l$ del tubo. Esta porcion, que se llama *onda*, está constituida de una manera invariable que sólo depende de la funcion φ', y se aleja indefinidamente de OL con una velocidad constante a; este movimiento de la onda no debe confundirse con el movimiento de una molécula del gas, que sólo dura el tiempo $\frac{l}{a}$; porque de $x-at>0$ y $<l$, resulta que una molécula no principia á moverse, sino despues de un tiempo igual á $\frac{x-l}{a}$, y no

vuelve al reposo sino al cabo de un tiempo igual á $\frac{x}{a}$.

Para una capa cualquiera de la onda existe una relacion constante $-a$ entre la velocidad $\frac{du}{dt}$ y la dilatacion, porque

$$\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{du}{dx}}=-a \quad \text{ó} \quad \frac{du}{dt}=-a\frac{du}{dx}.$$

847. Para los puntos situados en la parte de las x negativas, se tiene

$$\varphi'(x-at)=0,$$

y $$\frac{du}{dx}=\psi'(x+at),\quad \frac{du}{dt}=a\psi'(x+at);$$

y tambien $\psi'(x+at)$ es cero cuando x no está comprendida entre $-at$, y $-at+l$.

El movimiento se propaga tambien hácia las x negativas, por una onda A'B', cuya naturaleza depende de la funcion ψ' y que se mueve á la izquierda del orígen O, con una velocidad constante a.

Una molécula del gas está en movimiento durante un intervalo de tiempo igual á $\frac{l}{a}$, desde $t>\frac{-x}{a}$ hasta $t<\frac{l-x}{a}$. En cada capa se verifica la relacion

$$\frac{du}{dt}=a\frac{du}{dx}.$$

848. Con respecto á los puntos situados entre O y L, $\frac{du}{dx}$ y $\frac{du}{dt}$ dependen de las dos funciones $\varphi'(x-at)$, y $\varphi'(x+at)$. Estas dos funciones se anulan, desde que t excede á $\frac{l}{a}$, de suerte, que trascurrido este tiempo, toda la parte OL queda en reposo, y hay dos ondas que se alejan á derecha y á izquierda, como acabamos de ver.

El movimiento se propagaria por una sola de estas dos ondas, si la conmocion inicial fuera tal, que se verificara, en la parte OL $\varphi'(x)=0$, ó $\psi'(x)=0$, lo que segun las fórmulas (11), equivale á suponer

$$\frac{du}{dt}=-a\frac{du}{dx}, \text{ ó } \frac{du}{dt}=a\frac{du}{dx}, \text{ para } t=0.$$

Si la conmocion inicial tiene lugar en várias partes del tubo, separadas por intervalos en reposo, bastará suponer las funciones $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$ nulas en estos intervalos, para que esté comprendido este caso en el que precede de una conmocion limitada; cada porcion conmovida debe producir las ondas que se propagan á derecha é izquierda con la velocidad constante a.

Tubo cerrado por un extremo é indefinido por el otro.

849. Tomando por orígen de las x el extremo cerrado del tubo, se tendrá la condicion $\frac{du}{dt}=0$, para $x=0$, cualquiera que sea el valor de t; las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sólo serán dadas para valores positivos de x.

La condicion $\frac{du}{dt}=0$, para $x=0$, dará, cualquiera que sea el valor de t, positivo ó negativo, segun la segunda ecuacion (10).

$$\psi'(at)-\varphi'(-at)=0;$$

y representando por una nueva variable y positiva ó negativa, la cantidad at, tendremos

$$(12)\quad \psi'(y)=\varphi'(-y).$$

Esta ecuacion determina las funciones ψ' y φ' para los valores negativos de la variable, siendo estas funciones conocidas para los valores positivos.

Los valores de $\frac{du}{dx}$ y de $\frac{du}{dt}$, que dan las fórmulas (10), así determinados para valores cualesquiera de x y dt son los mismos que si el tubo no estuviera cerrado en su orígen O, y se extendiera indefinidamente en los dos sentidos, escogiendo el estado inicial del tubo del lado hácia el cual se prolonga el tubo como acabamos de indicar.

En esta hipótesis, cambiando x en $-x$ en las fórmulas (10), se tendrá, para la dilatacion y la velocidad de la capa correspondiente á la abscisa $-x$, teniendo en cuenta la ecuacion (12),

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x}=\varphi'(-x-at)+\psi'(-x+at)$$
$$=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)=\left(\frac{du}{dx}\right)_x$$
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x}=a\left[-\varphi'(-x-at)+\psi'(-x+at)\right]$$
$$=a\left[-\varphi'(x-at)-\psi'(x+at)\right]=-\left(\frac{du}{dx}\right)_x.$$

Así en las dos secciones equidistantes del orígen O, la dilatacion es igual, y las velocidades son iguales y de signo contrario.

Basta que esta propiedad se verifique cuando principia á contarse el tiempo, para que tenga lugar en una época cualquiera, porque para que se verifique cuando $t=0$, se vuelve á encontrar la condicion que expresa la ecuacion (12).

850. Si la conmocion inicial está contenida en un espacio limitado AB, entre las abscisas h y $h+l$, producirá dos ondas animadas de velocidades a y $-a$; y segun lo que precede, habrá dos ondas simétricas de éstas, separándose á derecha y á izquierda del intervalo A'B', simétrico de AB. Las que se alejan del orígen O, no experimentan ninguna alteracion; y las otras dos, llegan al mismo tiempo al punto O, y continuando su camino, se componen penetrándose, de suerte, que los valores de $\frac{du}{dx}$ y $\frac{du}{dt}$ en un mismo punto, comun á las dos ondas, serán las sumas de los valores que tienen en cada onda; estas dos ondas, des-

pues de haberse atravesado, se separan y continúan su marcha sin alteracion.

Resulta, segun la simetría de las ondas, que el efecto producido en el tubo es el mismo que si las diversas capas de la onda, que se aproxima al plano fijo O, se replegan sobre sí mismas conservando la misma densidad y tomando una velocidad igual y contraria á la que ántes tenian. Despues que todas las capas hayan llegado al punto O, se tendrá una onda que marcha en sentido de las x positivas, y que no será más que la primera invertida. En esto consiste la reflexion del movimiento sobre un plano fijo.

Tubo indefinido en un sentido y abierto en un medio gaseoso de densidad constante.

851. En este caso se admite que la fuerza elástica del gas en la abertura O del tubo, es la misma que la del gas exterior en reposo, y por consiguiente la dilatacion $\frac{du}{dx}=0$, para $x=0$, por ser $p=p_0\left(1-\frac{du}{dx}\right)$.

Cualquiera que sea t, la primera de las ecuaciones (10) da con estos supuestos

$$\psi'(at)+\varphi'(-at)=0,$$

ó haciendo $y=at$.

$$\psi'(y)=-\varphi'(-y). \tag{13}$$

Suponiendo el tubo y el flúido prolongados indefinidamente á la izquierda del punto O, se tendrá, teniendo en cuenta las fórmulas (12) y (13), para la capa cuya abscisa es $-x$,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x}=\psi'(-x+at)+\varphi'(-x-at)$$

$$=-\varphi'(x-at)-\psi'(x+at)=-\left(\frac{du}{dx}\right)_x,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x}=a\left[\psi'(-x+at)-\varphi'(-x-at)\right]$$
$$=a\left[-\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)\right]=\left(\frac{du}{dx}\right)_x$$

De manera, que en dos secciones equidistantes del orígen, las velocidades son iguales y del mismo signo, y las dilataciones iguales y de signo contrario.

Se deduce de aquí, que si la conmocion inicial no tiene lugar más que en una extension limitada, habrá en el tubo real una onda que se alejará indefinidamente del orígen, y en el tubo prolongado indefinidamente otras dos ondas marchando hácia el orígen, penetrándose y atravesándose sin alterarse; de suerte, que en el tubo real, en un instante cualquiera, se encontrará la onda que se dirigia primero hácia el orígen, y que se refleja despues para formar una nueva onda dirigida en sentido contrario; las velocidades en las diferentes secciones son las mismas y del mismo sentido que cuando la onda se aproxima al orígen, miéntras que la dilatacion cambia de signo.

En esto consiste la reflexion del movimiento sobre un medio de densidad constante.

Tubo cerrado por sus dos extremos.

852. El estado del gas en este tubo cerrado está siempre representado por las ecuaciones (10), suponiendo el tubo y el flúido prolongados indefinidamente en ambos sentidos. Pero en este caso es necesario determinar, para valores cualesquiera de la variable x, las dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, que no son conocidas más que para los valores de x comprendidos entre 0 y l, siendo l la longitud del tubo cerrado.

Expresando en las ecuaciones (10), que la velocidad

$\frac{dx}{dt}$ es nula para $x=0$, y para $x=l$, cualquiera que sea t, obtendremos, haciendo $at=y$,

$$\psi'(y)=\varphi'(-y), \quad \psi'(l+y)=\varphi'(l-y).$$

Se conoce $\varphi'(l-y)$, estando y comprendida entre 0 y l; luego se conocerá tambien $\psi'(l+y)$. Y $\psi(y)$ será conocida para los valores de y menores que $2l$. Cambiando y en $l+y$ en la segunda de estas ecuaciones, resulta

$$\psi'(2l+y)=\varphi'(-y);$$

de esta y de la primera de las anteriores, se deduce

$$\psi'(y)=\psi'(2l+y);$$

luego la funcion $\psi'(y)$ toma el mismo valor cuando la variable y aumenta en la cantidad $2l$. Lo mismo sucede á la funcion $\varphi'(y)$, porque la fórmula $\psi'(y)=\varphi'(-y)$, da

$$\varphi'(-y-2l)=\psi'(y+2l)=\psi'(y)=\varphi'(-y).$$

Resulta de la periodicidad de las funciones φ' y ψ', que la dilatacion y la velocidad vuelven á ser las mismas en un punto dado del tubo, en épocas distantes unas de otras, de un intervalo $t=\frac{2l}{a}$.

Puede establecerse este hecho observando que la conmocion inicial da orígen á dos ondas, que marchan en sentido inverso y van sucesivamente á reflejarse á los extremos del tubo, segun las leyes que acabamos de indicar. Despues de haber sufrido dos reflexiones, y recorrido caminos iguales á dos veces la longitud del tubo, vuelven, al cabo de un intervalo de tiempo igual á $\frac{2l}{a}$, á reproducir, componiéndose, el estado inicial; y este efecto se repite de nuevo indefinidamente.

Tubo limitado abierto en sus dos extremos.

853. Para $x=0$, y $x=l$, debe ser en este caso $\frac{du}{dx}=0$, cualquiera que sea t, y tendremos, siendo cualquiera el valor de y,

$$\psi'(y)+\varphi'(-y)=0,\quad \psi'(l+y)+\varphi'(l-y)=0.$$

Para valores de y comprendidos entre 0 y l, $\psi'(y)$ y $\varphi'(y)$ son conocidos; luego $\psi'(l+y)$ es conocida para estos mismos valores, por la segunda de las condiciones anteriores, y por consecuencia $\psi'(y)$ es conocida desde $y=0$ hasta $y=2l$. Cambiando y en $y+l$, esta segunda ecuacion da

$$\psi'(2l+y)+\varphi'(-y)=0,$$

y como $\psi'(y)+\varphi'(-y)=0$, resulta

$$\psi'(y)=\psi'(2l-y);$$

y del mismo modo

$$\varphi'(-y)=\varphi'(2l+y).$$

Luego el estado del tubo es tambien periódico, y vuelve á ser el mismo al cabo de cada intervalo de tiempo igual á $\frac{2l}{a}$, consecuencia que tambien podíamos haber obtenido de la reflexion de las ondas.

Tubo limitado abierto por un extremo y cerrado por otro.

854. En este caso, cualquiera que sea t, debe ser $\frac{du}{dt}=0$, para $x=0$, y $\frac{dx}{dt}=0$, para $x=l$; de lo cual resulta

$$\psi'(y)+\varphi'(-y)=0,\quad \psi'(l+y)-\varphi'(l-y)=0,$$

cualquiera que sea y. Estas ecuaciones dan los valores de $\varphi'(y)$ y $\psi'(y)$ para todos los valores positivos ó negativos de y, cuando son conocidos para valores positivos menores que l.

De la segunda ecuacion se deduce

$$\psi'(2l+y)=\varphi'(-y);$$

que teniendo en cuenta la primera se convierte en

$$\psi'(2l+y)=-\psi'(y);$$

de modo que la funcion $\psi'(y)$ cambia de signo cuando la variable aumenta de $2l$; por consiguiente, sí aumenta de $4l$; la funcion volverá á tomar su primitivo valor, porque

$$\psi'(4l+y)=-\psi'(2l+y)=\psi'(y).$$

La funcion $\varphi'(y)$ tiene el mismo período $4l$, por ser $\psi'(y)=-\varphi'(-y)$.

Por consiguiente, el estado del tubo no vuelve á ser el mismo, sino despues de un intervalo de tiempo igual á $\frac{4l}{a}$.

Llegaremos á la misma conclusion, considerando el movimiento de las dos ondas que provienen de la conmocion inicial, sus reflexiones sucesivas en los dos extremos del tubo, y su vuelta á las partes primitivamente conmovidas, despues de haber reccorrido un camino $4l$, en un tiempo igual á $\frac{4l}{a}$.

Velocidad del sonido de los gases.

855. Hemos visto en toda la discusion anteriòr, que a representa la velocidad constante de propagacion del movimiento vibratorio del gas en el tubo, y es por consiguiente la *velocidad del sonido* en el tubo. Vamos á ver cómo se determina esta velocidad.

Hemos visto (844), que

$$(14)\quad a=\sqrt{\frac{p}{\rho}\times\frac{c}{c_1}},$$

ecuacion que da la velocidad del sonido en un gas, á la presion p, y cuya masa específica es ρ. Esta velocidad es el producto de dos factores, el uno $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, es la velocidad del sonido segun la teoría de Newton; y el otro $\sqrt{\frac{c}{c_1}}$, introducido por Laplace, representa el efecto de las variaciones de temperatura debidas á las condensaciones y rarificaciones alternativas de las capas gaseosas. El valor de este último que viene á ser un coeficiente de correccion, es próximamente $\sqrt{\frac{c}{c_1}}=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt{1,41}=1,28$. Newton suponia que este coeficiente era igual á la unidad.

La masa específica ρ es igual al peso específico P dividido por g, y la fórmula (14) toma la forma, poniendo $\rho=\frac{P}{g}$,

$$(15)\quad a=\sqrt{g\frac{p}{P}\times\frac{c}{c_1}}.$$

Pero, $\frac{p}{P}=R\left(\frac{1}{\alpha}+\theta\right)$, siendo θ la temperatura del gas; sustituyendo en la (15), resulta

$$(16)\quad a=\sqrt{\frac{gR}{\alpha}(1+\alpha\theta)\frac{c}{c_1}},$$

que da la velocidad del sonido en un gas en funcion de su temperatura.

Para el aire atmosférico, por ejemplo, á la temperatura 0° centígrado, y bajo la presion normal de $0^m,760$, se tiene

$$\frac{p}{P}=\frac{R}{\alpha}=\frac{10340}{1,299}=7960;$$

luego á 0 grados,

$$a=\sqrt{g\ 7960 . 1,41}=346.^m,$$

y á θ grados $\qquad a=346.^m\times\sqrt{1+\alpha\theta}$;

fórmula que dará la velocidad aproximada del sonido en el aire, cuando se conozca la temperatura y cuando la dilatacion de las capas gaseosas $\frac{du}{dx}$ es infinitamente pequeña.

APÉNDICE.

DE LAS MÁQUINAS.

TEORÍA DEL TRABAJO DE LAS MÁQUINAS.

Definicion de las máquinas. Máquinas simples y compuestas.—Palanca. Sus condiciones de equilibrio.—Balanza. Teoría de la balanza.—Romana —Poleas. Polea fija y polea móvil. Ley de equilibrio de la polea. —Rigidez de las cuerdas.— Equilibrio de la polea teniendo en cuenta el rozamiento y la rigidez de la cuerda.—Torno. Ley de equilibrio en el torno.—Equilibrio del torno teniendo en cuenta el rozamiento.—Equilibrio de un sistema de palancas.— Equilibrio de un sistema de tornos.—Equilibrio de un sistema de ruedas dentadas.—Plano inclinado y su ley de equilibrio.—Plano inclinado teniendo en cuenta el rozamiento.— Rosca ó tornillo. Su ley de equilibrio.— Equilibrio de la rosca teniendo en cuenta el rozamiento.—Teoría del trabajo de las máquinas. Trasmision del trabajo en las máquinas.

Definicion de las máquinas. Máquinas simples y compuestas.

856. Las *máquinas* son instrumentos destinados á trasmitir la accion de las fuerzas. Bajo este punto de vista general, todo cuerpo ó conjunto de cuerpos que sirva para trasmitir la fuerza de que se dispone, llamada *potencia*, á la *resistencia* ó fuerza que se trata de vencer, es una máquina.

Por medio de las máquinas se modifica la accion de las fuerzas de una manera conveniente al objeto que nos proponemos. Estas modificaciones se verifican por medio de obstáculos que sujetan los movimientos y no permiten que se verifiquen más que en ciertos sentidos y dentro de ciertos límites.

Las máquinas son simples ó compuestas. Las primeras constan de un sólo cuerpo ordinariamente, y las segundas se componen de combinaciones muy variadas de las primeras.

Las máquinas simples, segun el obstáculo que se opone á que se muevan en todas direcciones, pueden reducirse á tres, *la palanca, el torno* y *el plano inclinado*. En la primera el obstáculo es un punto fijo, alrededor del cual puede girar libremente el cuerpo en todos sentidos; en la segunda el obstáculo es una recta fija, alrededor de la cual puede girar el cuerpo; en la tercera el obstáculo es un plano fijo, contra el cual se apoya el cuerpo, y sobre el cual puede deslizarse ó rodar libremente.

Al estudio de estas tres máquinas debemos agregar el de la cuerda ó máquina funicular, que sirve en muchas ocasiones para aplicar las fuerzas, y que hemos estudiado en la segunda parte de la Estática; y las combinaciones más sencillas de ellas, tales como la polea, el tornillo, las combinaciones de palancas, de tornos y de ruedas dentadas, y la rosca.

Palanca. Sus condiciones de equilibrio.

857. La *palanca* es una barra sólida, recta, curva ó angular AB (fig. 348), sujeta á girar alrededor de un punto fijo O. Se aplica una fuerza P, llamada potencia, á uno de los extremos B de la barra, y otra fuerza R, llamada resistencia, al otro extremo A. El punto O se llama punto de apoyo, y divide á la palanca en dos partes, que se llaman brazos de palanca, el OB

correspondiente á la potencia, y el O A á la resistencia.

Descrita la palanca, vamos á ver las condiciones de equilibrio de esta máquina. Ya vimos (538), que para el equilibrio de un sólido invariable que tenga un punto fijo, las condiciones de equilibrio son, que la suma algébrica de los momentos de las fuerzas P y R, con respecto á tres ejes coordenados rectangulares trazados por el punto fijo O, sea nula; y la carga de este punto es la resultante de las fuerzas P y R, trasladadas á él paralelamente á sí mismas.

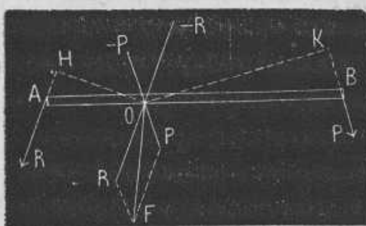

Fig. 348.

Pueden tambien establecerse las condiciones de equilibrio de la palanca directamente. Para ello apliquemos en el punto O dos fuerzas, P y — P paralelas é iguales á P; y dos fuerzas R y —R, iguales y paralelas á R; con lo cual no se altera el equilibrio. Las fuerzas OR y OP dan una resultante OF, que es destruida por la resistencia del punto O y que mide la presion ó carga que sufre el punto de apoyo. Quedan los dos pares (R,—R) (P,—P), que deben equilibrarse; los ejes de estos pares, el primero perpendicular al plano OAR, y el segundo al plano OBP, son proporcionales á sus momentos $R \times OH$ y $P \times OK$, los cuales se componen como las fuerzas; y para que haya equilibrio es necesario y suficiente que estos ejes sean iguales, y que estén dirigidos uno en la prolongacion del otro.

Luego las condiciones de equilibrio de la palanca son: 1.ª, *que las fuerzas P y R que la solicitan, estén en un mismo plano que pase por el punto de apoyo*; 2.ª, *que sus momentos con respecto á este punto, sean iguales*; *y* 3.ª, *que tiendan á hacer girar la palanca en sentidos contrarios.*

La condicion $P\times OK=R\times OH$, ó $\frac{P}{R}=\frac{OH}{OK}$, se enuncia diciendo, *que la potencia y la resistencia están en razon inversa de sus brazos de palanca.*

La palanca puede ser de *primero*, *segundo* y *tercer género*; segun que el punto de apoyo esté situado entre la potencia y la resistencia; la resistencia esté entre la potencia y el punto de apoyo, y la potencia esté entre el punto de apoyo y la resistencia. Las condiciones de equilibrio en todas ellas son las que acabamos de deducir para la palanca en general.

Balanza. Teoría de la balanza.

858. La balanza comun se compone de una palanca de primer género de brazos iguales, que se llama *fiel*, en cuyos extremos lleva dos platillos, destinados á recibir los cuerpos que se quieren pesar. Se dispone ordinariamente esta máquina de manera, que su centro de gravedad esté situado en la vertical trazada por su punto de apoyo, y que los brazos de palanca sean iguales en todas las posiciones que tome el fiel, oscilando á uno y otro lado de su posicion de equilibrio: entónces estamos seguros de que dos cuerpos pesados, que se equilibran en los platillos, tienen pesos iguales, y por consiguiente, contienen masas iguales. De modo, que tomando por unidad de masa la de un cuerpo que tenga un peso determinado, peso que tomaremos por unidad de peso, se determinarán las masas respectivas de diferentes cuerpos, buscando el número de unidades de peso que se equilibran con ellos.

859. Si los pesos colocados en los platillos son desiguales, el equilibrio no puede subsistir en la posicion horizontal del fiel, porque la resultante de dos fuerzas

paralelas desiguales no pasa por el punto medio de la recta que une sus puntos de aplicacion. Para buscar en este caso la posicion de equilibrio del fiel, sea H K esta posicion, E el eje de suspension, G el centro de gravedad; representemos por α el ángulo que la recta HK forma con la horizontal, ó el ángulo GEg de la recta GE con la vertical; y sea Q el peso de cada uno de los platillos comprendidas en él las cadenas y el gancho de suspension, siendo q el peso del fiel. El centro de gravedad G ha salido del plano vertical ZZ que pasa por el eje de suspension E. Supongamos que se pone un peso P+p en el platillo de la izquierda y un peso P en el de la derecha; las fuerzas que actúan sobre el aparato son, $Q+P+p$ en el punto H, $Q+P$ en el punto K; el peso q del fiel aplicado en el punto G, y la reaccion que obra sobre el eje de suspension, que es igual á la suma de todas las demas $2Q+2P+p+q$.

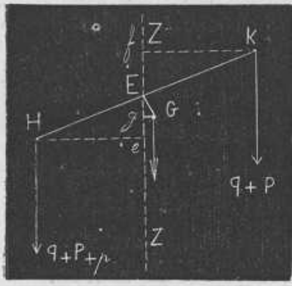

Fig. 349.

Todas estas fuerzas se equilibran sobre el aparato, y para encontrar la condicion de equilibrio que determina la posicion del fiel, tomemos los momentos con respecto al eje que se proyecta en E; tendremos, trazando las perpendiculares He y Kf á la vertical ZZ,

(1) $(Q+P+p)\times He=q\times Gg+(Q+P)\times Kf$;

pero $He=Kf$, luego

$$p\times He=q\times Gg.$$

Pero $He=HE\cos\alpha$, y $Gg=EG\,\text{sen}\,\alpha$; sustituyendo estos valores en la relacion anterior y despejando, resulta

$$tg\alpha=\frac{p.HE}{q.GE},$$

que determina la inclinacion del fiel.

El ángulo α crece, cuando la distancia EG disminuye; luego la inclinacion que toma el fiel es tanto mayor, para la misma diferencia de pesos colocados en los platillos, cuanto más cerca está el centro de gravedad del fiel, del eje alrededor del cual oscila, y la sensibilidad de la balanza crece á medida que esta distancia disminuye, porque la diferencia de los pesos se manifiesta por la inclinacion más ó ménos grande que toma el fiel. Así, para hacer variar á voluntad la sensibilidad de una balanza, suele colocarse sobre el fiel, encima del eje de suspension, un tornillo, sobre el cual suele hacerse mover una tuerca pesada, cuyo peso se agrega al peso q. Haciendo subir esta tuerca, se aproxima al eje el centro de gravedad G del sistema, y se le aleja haciendo descender la tuerca.

360. Mas al aumentar la sensibilidad de la balanza, disminuyendo la distancia EG, hay que tener presente que no es conveniente que esta distancia sea nula, porque si lo fuera, $tg\,\alpha = \infty$, y el fiel HK tomaria una posicion vertical, es decir, que *caeria* por una diferencia de peso p tan pequeña como se quiera. La sensibilidad del aparato sería infinita, pero el aparato no serviria para nada, por ser la variacion de la inclinacion del fiel la que indica el exceso de los pesos colocados en los platillos. El fiel, suspendido por su centro de gravedad, formaria un sistema en equilibrio indiferente bajo la accion de pesos iguales en ambos platillos, el centro de gravedad estaria inmóvil en todas las posiciones sucesivas del aparato; luego es necesario, para que la balanza pueda utilizarse, que el centro de gravedad G esté más bajo que el centro de oscilacion del fiel, en una cantidad arreglada al grado de exactitud que se quiere obtener en las pesadas.

Si el centro de gravedad estuviera más alto que el eje de suspension, el fiel estará en equilibrio inestable; porque el peso q contribuiria á aumentar, y no á limitar la inclinacion que tiende á tomar bajo la accion del exceso de peso p. En este caso se dice que la balanza es *loca*.

En esta discusion hemos supuesto que los tres puntos H, E, K, están en línea recta y que E es el punto medio del fiel para establecer la ecuacion de equilibrio de la balanza.

861. Segun esta discusion, para que una balanza sea exacta, debe satisfacer á las condiciones siguientes:

1.ª Los dos brazos del fiel, ó sean las distancias del punto de apoyo E á los puntos de suspension de los platillos, deben ser rigurosamente iguales; esta es la condicion más importante.

Para reconocer si se verifica, no hay más que colocar pesos en los dos platillos, de manera que se equilibren; se cambian despues los pesos de platillo, llevando al de la de la derecha los pesos que estaban en el de la izquierda, y al contrario; el equilibrio subsistirá si los brazos son iguales, y si no el fiel se inclinará del lado del brazo más largo.

2.ª El centro de gravedad de la balanza debe estar situado en la vertical que pasa por el punto de apoyo, y un poco más bajo que este punto.

Se ve inmediatamente si se verifica esta condicion examinando si la balanza está en equilibrio por sí misma, es decir, cuando los platillos están vacíos; cuando no se verifica, se rectifica fácilmente la balanza, agregando un peso conveniente al brazo de palanca que se eleve, de modo que el fiel venga á quedar horizontal.

3.ª La balanza debe ser suficientemente sensible, es decir, oscilar por pequeñas diferencias de peso en los platillos, lo que exige que el fiel sea muy movible. Para conseguirlo, ademas de dar al centro de gravedad la posicion conveniente, segun acabamos de indicar, se procura por diferentes medios disminuir el rozamiento en el punto de apoyo. Uno de ellos consiste en fijar, trasversalmente en el medio del fiel, un cuchillo de acero, cuya arista no cortante está vuelta hácia abajo, y por la cual descansa sobre dos pequeños planos de acero ó de ágata, dispuestos horizontalmente.

La disposicion de la balanza de precision está fundada en los mismos principios que la balanza comun, pero su construccion es mucho más esmerada y tiene diferentes accesorios, que segun la teoría expuesta, permiten aumentar su sensibilidad, para que se puedan apreciar con ella diferencias de pesos sumamente pequeñas.

862. Se puede determinar el verdadero peso de un cuerpo, aunque la balanza sea inexacta. Sea para ello P el peso desconocido del cuerpo, x é y, las longitudes de los dos brazos de la balanza, y supongamos el peso P colocado en el platillo correspondiente al brazo x, que se equilibra con pesos conocidos A, colocados en el otro platillo; tendremos

$$Px = Ay.$$

Pongamos el peso P en el otro platillo; se equilibrará con otros pesos conocidos B, y tendremos

$$Py = Bx.$$

Multiplicando estas ecuaciones, resulta

$$P^2 = AB, \quad \text{ó} \quad P = \sqrt{AB};$$

es decir, que el peso del cuerpo es medio proporcional entre los pesos con que se ha equilibrado en los dos platillos de la balanza.

Puede tambien resolverse este problema por el *método de las dobles pesadas*. Este método, debido á Bordá, da el medio para determinar el verdadero peso de un cuerpo, con una balanza inexacta. Para lo cual se coloca el cuerpo cuyo peso se quiere conocer en uno de los platillos, y en el otro se colocan perdigones ó arena hasta que se establezca el equilibrio; despues se quita del primer platillo el cuerpo cuyo peso se busca, y se ponen en su lugar pesos conocidos, kilógramos, gramos, etc., hasta que se restablezca el equilibrio. Estos pesos conocidos son exactamente el peso del cuerpo; porque en esta doble pesada, el cuerpo y los pesos conocidos han obrado sucesivamente sobre el mismo brazo del fiel de la balanza y en las mismas condiciones, para equilibrar la misma resistencia; luego los dos pesos son iguales, ó el peso del cuerpo está expresado por los kilógramos, gramos, etc., que se han colocado en su lugar.

Romana.

863. La romana es una palanca recta de primer género, de brazos desiguales, OA, OB (fig. 350), que permite pesar los cuerpos con un peso único P, móvil á lo largo del brazo graduado OB. La romana es muy cómoda, porque con un solo contrapeso pueden determinarse los pesos de muchos cuerpos.

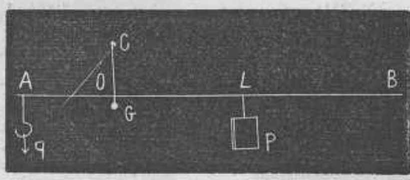

Fig. 350.

La barra AB es móvil alrededor de un eje O que se tiene en la mano ó se suspende de un punto fijo C. Del lado A lleva un gancho destinado á suspender el cuerpo, cuyo peso Q se quiere hallar; del otro B un peso P enganchado á un anillo, que puede deslizarse á lo largo de la barra graduada OB. El centro de gravedad del aparato con todos sus accesorios, cuando la barra AB está horizontal, se encuentra en la vertical que pasa por el punto O y debajo de este punto.

Cuando se ha obtenido el equilibrio, la barra AB es horizontal, los pesos P y Q y el peso q de la barra se equilibran con la resistencia del punto fijo, el cual sufre una carga igual á la suma $P + Q + q$ de todos estos pesos; y por el teorema de los momentos tenemos

$$(1)\quad P \times OL = Q \times OA;$$

de donde
$$Q = OL \times \frac{P}{OA}.$$

El peso P y la longitud OA no varían, luego el peso Q es proporcional á la distancia variable OL. Trazando sobre la barra OB una graduacion conveniente, se podrá *leer* el peso buscado sobre la barra graduada. Para graduar la barra OB se pondrá el cero de la escala en el punto O; despues se hará $Q = 1^{kg}$, por ejemplo, y la ecuacion (1), dado P, dará el valor correspondiente de OL, ó sea la relacion de OL á OA. Cuando no es conocido el peso P, se busca empíricamente la posicion que conviene darle para equilibrar un peso conocido de un kilógramo. Conocidos dos puntos de la escala, se continúa la graduacion con facilidad.

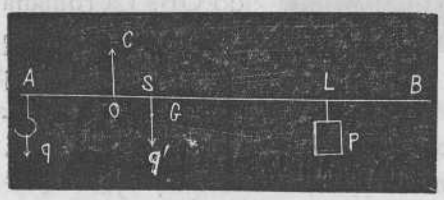

Fig. 351.

864. Si el centro de gravedad G de la barra no se encuentra en la vertical del punto O, es necesario introducir un nuevo término en la ecuacion (1), para tener en cuenta el momento del peso q que obra segun SQ′ (fig. 351). El teorema de los momentos, nos dará en este caso

$$Q \times OA = q \times OS + P \times OL;$$

y por consiguiente

$$Q = q \times \frac{OS}{OA} + OL \times \frac{P}{OA}.$$

El término $q \times \frac{OS}{OA}$ no varía de valor; el segundo término $OL \times \frac{P}{OA}$ es proporcional á OL, como hemos visto en el caso anterior. El peso buscado Q depende de la distancia OL; la graduacion de la barra se hará como en el caso anterior, pero el cero de la escala no se encontrará en el punto O. Cuanto más cerca esté el punto G de la vertical que pasa por el punto O, tanto más sensible será el aparato y más estable será el equilibrio, estando siempre el centro de gravedad G más bajo que el punto O.

Poleas. Polea fija y polea móvil. Ley de equilibrio en la polea.

865. La polea es una rueda ó cilindro de poca altura, sujeta á girar alrededor de un eje A (fig. 352), sostenido por unas armaduras OA, y que lleva en la superficie convexa un carril ó garganta por donde pasa un cordon que la rodea segun un arco más ó ménos grande; la potencia P y la resistencia R están aplicadas á los extremos del cordon.

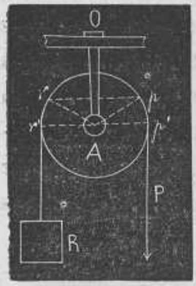

Fig. 352.

La polea puede ser fija ó móvil. La polea *fija* es la que está suspendida de un punto fijo O, en la cual el eje de rotacion A permanece fijo (fig. 352). La polea *móvil* es la que tiene fijo un extremo del cordon, y en la que el eje A se mueve (fig. 353).

866. La *ley de equilibrio* de la polea se refiere naturalmente á la ley de equilibrio de la palanca. En la polea fija si trazamos los radios Ar y Ap, á los puntos extremos de contacto del cordon, se pueden considerar las fuerzas P y R como aplicadas á los extremos de la palanca angular pAr, cuyos brazos de palanca son perfecta-

mente iguales; y por consiguiente, es necesario para el equilibrio, que la potencia P y al resistencia R sean iguales.

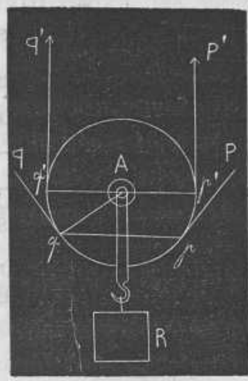

Fig. 153.

Para calcular la carga sobre el eje A de la polea, trasladaremos las fuerzas P y R paralelamente á sí mismas al centro de la polea, y si son paralelas, la carga será igual á la suma de la potencia y la resistencia, y si no son paralelas, construiremos sobre ellas un paralelógramo, y su diagonal expresará la carga del eje A. Los pares que nacen de la traslacion de las fuerzas P y R, son iguales y de sentidos contrarios, y no producen efecto alguno.

En la polea móvil el extremo Q del cordon está fijo, y si el cordon tiene la posicion QqpP, es decir, que las dos porciones del cordon no son paralelas, tendremos trazando el radio $Aq = r$, que podemos considerar la potencia P y la resistencia R como aplicadas en los puntos p y A de la palanca angular Aqp, cuyo punto de apoyo es q; la ley de equibrio será por la teoría de la palanca, llamando α al ángulo $p\,A\,q$,

$$\frac{R}{P} = \frac{qp}{Aq} = \frac{2\,r \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{r} = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha$$

que expresa, *que la resistencia* R *es á la potencia* P, *como la cuerda que abraza el cordon es al radio de la polea.*

Cuando el arco es igual á la sexta parte de la circunferencia, su cuerda es igual al radio, y la potencia es igual á la resistencia.

Si Q y P son paralelas, $\alpha = 180°$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = 1$, y $R = 2\,P$; es decir, que cuando las dos partes del cordon son paralelas, ó cuando tienen la posicion $Q'q'P'p'$, el cordon abraza media circunferencia y la cuerda es su diámetro $q'p'$; la potencia, en este caso, es la mitad de la resistencia. Caso el más favorable á la potencia porque el diámetro es la mayor de las cuerdas.

Si llamamos Q á la resistencia del punto fijo á que está sujeto el cordon, la carga sobre el eje será la suma P+Q, y como son iguales, esta carga es R=2P, ó sea el duplo de la potencia, en el caso de ser paralelas las dos partes del cordon. Si no son paralelas, la carga será la resultante de P y Q, y se obtendrá por la regla del paralelógramo de las fuerzas.

Rigidez de las cuerdas.

867. Las fuerzas se aplican á las máquinas en muchos casos por medio de cuerdas, que se suponen perfectamente flexibles; tales las hemos considerado al tratar de las poleas; pero las cuerdas oponen siempre cierta resistencia al ser arrolladas, análoga á la que oponen á la flexion las varillas sólidas, y esta resistencia proviene de la *rigidez de las cuerdas*, que conviene tener en cuenta en el estudio de las máquinas.

Para ello supongamos que una cuerda SL se arrolla sobre un cilindro C, (fig. 354), al cual hace rodar en el sentido de la flecha *f*. El cabo LB, rectilíneo hasta llegar al cilindro, no se aplicará exactamente en el punto B sobre el cilindro, y la rigidez de la cuerda obligará á ésta, á separarse un poco del centro C, extendiéndose la variacion de curvatura sobre una cierta longitud de ella; del mismo modo, el cabo AS no pierde bruscamente en el punto A la curvatura que ha

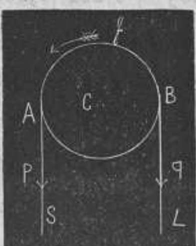

Fig. 354.

tomado sobre el cilindro, y la rigidez lo aproxima al punto C. De aquí resulta que el equilibrio de la potencia P y de la resistencia Q lleva consigo la desigualdad $P > Q$.

Coulomb ha sido el primero que ha determinado por la experiencia la diferencia $P-Q$, y ha encontrado que es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro D del cilindro, directamente proporcional al cuadrado del diámetro de la cuerda, y que crece con la resistencia Q.

Estas leyes no son aún perfectamente conocidas, y se calcula la rigidez R de las cuerdas, ó la diferencia $P-Q$, por la siguiente fórmula empírica

$$R = P - Q = \frac{A + BQ}{D},$$

en la que A y B son dos constantes determinadas por la experiencia, y que dependen de la naturaleza, de la estructura y del diámetro de la cuerda. La siguiente tabla contiene algunos valores de estas constantes:

	Diámetro de la cuerda. — *Milímetros.*	Peso de la cuerda por metro. — *Kilógramos*	A.	B.
Cuerda blanca de 30 cabos...	20	0,283	0,222	0,0097
„ „ de 15........	15	0,145	0,064	0,0055
„ „ de 6........	9	0,052	0,011	0,0024
Cuerda embreada de 30 cabos.	24	0,333	0,350	0,0126
„ „ de 15......	17	0,163	0,106	0,0061
„ „ de 6......	10	0,069	0,021	0,0026

Para aplicar la fórmula anterior, P, Q y R deben estar expresados en kilógramos, y el diámetro D en metros.

Equilibrio de la polea teniendo en cuenta el rozamiento y la rigidez de la cuerda.

868. Sea C (fig. 355) el centro, y AB la circunferencia de una polea sobre la cual pasa la cuerda SS′, en cuyos extremos actúan la potencia P y la resistencia Q. Podemos considerar la fuerza P como tangente á la polea en el punto A, y la fuerza Q á una distancia CB, un poco mayor que el radio CA de la polea, á causa de la rigidez de la cuerda; sean $CA = r$, y $CB = r'$.

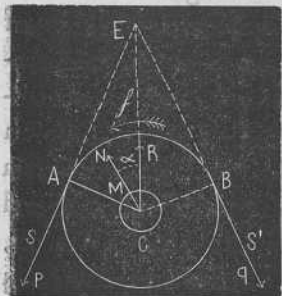

Fig. 355.

El eje de la polea puede estar invariablemente unido, formando cuerpo con ella, y girar sobre dos cojinetes, ó puede permanecer fijo desarrollándose el rozamiento entre el ojo de la polea y el eje alrededor del cual gira; supondremos este último caso, y que el movimiento se va á producir en el sentido de la flecha *f*.

Sea M la generatriz de contacto del eje y del ojo; la reaccion total del eje sobre la polea será una fuerza R, que forma con la normal CN, en sentido contrario á la rotacion, un ángulo α igual al ángulo de rozamiento. Esta fuerza R, equilibrándose con las P y Q pasa por el punto E de encuentro de estas fuerzas, y forma un ángulo α con la normal MN, trazada por el punto de contacto M; sea ρ el radio CM del árbol fijo. Del punto C como centro y con un radio igual á ρ sen α describamos una circunferencia; la direccion de la fuerza R será tangente á esta circunferencia. La solucion consiste, por lo tanto, en trazar por el punto E una tangente EK al círculo descrito del punto C como centro con un radio $\rho \operatorname{sen} \alpha$. Conociendo la magnitud de la fuerza Q, bastará descomponerla, segun las direcciones EK, EP, para tener los valores de las fuerzas P y R.

Del punto E se pueden tirar dos tangentes EK y EK′ al círculo CK (fig. 356); una de estas tangentes EK corresponde al caso en que la polea gira en el sentido de la flecha *f*. El contacto tiene lugar entónces en el punto M, si la polea gira sola sobre un eje fijo, y en el punto M_1 si la polea forma cuerpo con el eje girando en el gorron. La segunda tangente EK′, corresponde al caso en que la polea gire en sentido contrario; el contacto se verifica entónces en M′ y en M'_1, segun que el eje es fijo ó móvil con la polea.

Fig. 356.

Se puede obtener por el cálculo la relacion entre la potencia P y la resistencia Q. El rozamiento de la polea sobre el eje es igual al producto $R\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, y la ecuacion de los momentos dará

$$(1) \quad Pr = Qr' + R\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\rho = Qr' + Rf_1\rho,$$

haciendo $f_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$.

869. El valor numérico de r' se deduce de la fórmula que da la rigidez de las cuerdas, del siguiente modo.

Sea F la porcion de la potencia P capaz de equilibrar la resistencia Q, en el supuesto que no hay más resistencia pasiva que la rigidez de la cuerda; la ecuacion que da esta rigidez (867) es

$$F - Q = \frac{A+BQ}{2r}, \text{ ó } Fr = Qr + \frac{A+BQ}{2}.$$

Mas Fr es igual al producto Qr', porque por el aumento del brazo de palanca de la fuerza Q apreciamos la rigidez de la cuerda, á su paso por la polea; luego

$$Qr' = Qr + \frac{A+BQ}{2}, \quad \text{ó} \quad r' = r + \frac{A}{2Q} + \frac{B}{2}.$$

Sustituyamos este valor en la ecuacion (1), será

$$Pr = Qr + \tfrac{1}{2}(A+BQ) + Rf_1\rho;$$

el valor de R, resultante de las dos fuerzas P y Q, es

$$R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos PEQ},$$

y sustituyendo en la anterior, tendremos la ecuacion

$$Pr = Qr + \tfrac{1}{2}(A+BQ) + f_1\rho\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos PEQ}.$$

Si eliminamos el radical obtendremos una ecuacion de segundo grado que dará la potencia P en funcion de la resistencia Q.

Cuando las fuerzas P y Q son paralelas, el valor del radical es P+Q, y resultará

$$P(r - f_1\rho) = Qr + \tfrac{1}{2}(A+BQ) + f_1\rho Q,$$

que da entre P y Q una relacion de la forma

$$P = a + bQ,$$

que puede servir para establecer la ley de equilibrio en los polipastros.

Torno. Ley de equilibrio en el torno.

870. El *torno* es un cilindro terminado en sus dos extremos por otros dos cilindros de menor diámetro, pero del mismo eje, llamados gorrones, móvil alrededor del eje comun de estos cilindros; una cuerda parcialmente arrollada en la superficie de este cilindro, lleva un peso en su extremidad libre. Para equilibrar este peso, se aplica una fuerza tangencialmente á una rueda cuyo centro está en el eje del cilindro, y montada perpendicularmente á este eje.

Sean O′,O, (fig. 357) los gorrones, BD el cilindro, AA′ el plano de la rueda, que supondremos proyectada en su verdadera magnitud, á la derecha de la máquina en Oaa′; BC la porcion libre de la cuerda que lleva en el punto C el peso R, y que se prolonga de B hácia E, y más allá, dando vueltas al cilindro. Supondremos que la porcion BC de la cuerda coincide con la seccion recta del cilindro en el punto B, y que el diámetro de la cuerda es muy pequeño con respecto al del cilindro, cuando da várias vueltas alrededor de éste; cada espira viene á colocarse al lado de la espira próxima, de suerte, que el eje de la cuerda dibuja sobre la superficie del cilindro una hélice de pequeño peso. Prescindiremos de la rigidez de la cuerda, y la supondremos aplicada sobre el cilindro, segun el arco de círculo que tiene por tangente la vertical BC.

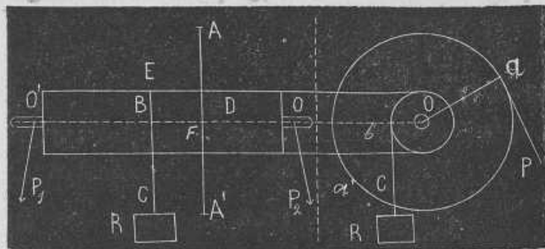

Fig. 357.

En la proyeccion lateral del aparato la cuerda se proyecta segun *b*C, la resistencia R obra en el punto *b*, y la potencia P, aplicada en el punto *a* de la rueda, actúa tangencialmente á su circunferencia; el pequeño círculo O representa la proyeccion de los gorrones, y las rectas O*a* y O*b* son los rádios de la rueda y del cilindro.

871. Para hallar la *ley de equilibrio del torno*, tenemos en la proyeccion, que la potencia P y la resistencia R actúan en los extremos de la palanca angular *a*O*b*, cuyo punto de apoyo es el punto O, y los brazos de palanca son

los radios Oa y Ob de la rueda y del cilindro. Por consiguiente, la ley de equilibrio de la palanca nos dará la proporcion

$$\frac{P}{R}=\frac{Ob}{Oa},$$

es decir, que la potencia y la resistencia son proporcionales á los radios del cilindro y de la rueda.

Así, por ejemplo, si $Ob=\frac{1}{10}Oa$, $P=\frac{1}{10}R$. La potencia estará tanto más favorecida, cuanto menor sea el radio del cilindro y mayor el radio de la rueda.

872. Calculemos ya las presiones ejercidas sobre los apoyos.

Estando el sistema en equilibrio, podemos sin alterarlo, considerar la porcion BE de la cuerda como fija invariablemente á la superficie del cilindro; la tension de la cuerda BC, es igual al peso R; y podemos considerar la fuerza R como aplicada en B al sistema invariable formado por el torno. En el plano normal al eje OO′, trazado por la recta BC, apliquemos al eje dos fuerzas paralelas, contrarias é iguales á R; y sin alterar el equilibrio podremos reemplazar la fuerza R aplicada en B por la fuerza R aplicada al eje y el par (R,—R), cuyo momento es $R\times Ob$.

Tambien en el plano de la rueda, llevamos la fuerza P paralelamente á sí misma, y tendremos en vez de la fuerza P aplicada en a, la fuerza P, aplicada en un punto del eje, y el par (P,—P); cuyo momento es $P\times Oa$. Los dos pares se equilibran, y sólo tenemos que considerar las fuerzas que se equilibran con las reacciones de los gorrones O, O′.

Para encontrar estas reacciones, descompongamos la fuerza R en dos fuerzas R′ y R″ paralelas, aplicadas al centro de las secciones medias de los gorrones O y O′. La fuerza R', aplicada en O, es $R'=R\frac{O'B}{OO'}$; y la aplicada en O', $R''=R\times\frac{OB}{OO'}$. Del mismo modo reemplazaremos la fuerza P, aplicada al eje en el plano de la rueda, por dos fuerzas paralelas P' y P'', aplicadas en O y O' é iguales,

$$P'=P\times\frac{OF}{OO'},\ P''=P\times\frac{O'F}{OO'}.$$

Componiendo las fuerzas R' y P' obtendremos por resultante la presion P_1, ejercida por el gorron O sobre su cojinete, y la composicion de las fuerzas R'' y P'' aplicadas en O', nos dará la presion P_2, ejercida sobre el cojinete O'. Las fuerzas P_1 y P_2 no son paralelas, pero son las dos perpendiculares al eje del cilindro.

Equilibrio del torno teniendo en cuenta el rozamiento.

873. Para el equilibrio del torno, teniendo en cuenta el rozamiento de los gorrones sobre los cojinetes, basta que la resultante de las fuerzas que comprimen el gorron sobre la superficie del cojinete, forme con la normal á esta superficie un ángulo menor que el ángulo de rozamiento (562). Entónces la solucion del problema está dado por una desigualdad, y pueden hacerse variar las fuerzas exteriores, dentro de ciertos límites, sin que se altere el equilibrio. Puede hacerse el problema determinado, suponiendo que el torno está á punto de ponerse en movimiento, por la accion de las fuerzas que lo solicitan, lo cual equivale á suponer que la resultante de estas fuerzas forma con la superficie del cojinete un ángulo igual al ángulo de rozamiento, al empezar el movimiento. Se puede suponer tambien que el torno está animado alrededor de su eje de un movimiento uniforme; en este

caso las fuerzas exteriores se equilibran, como si la máquina no se moviera, y ademas el rozamiento es igual á su límite, puesto que el resbalamiento de las superficies en contacto se verifica; la resultante de las fuerzas exteriores forma por consiguiente, con la normal á las superficies en contacto, un ángulo igual al ángulo de rozamiento durante el movimiento. No se puede asegurar *á priori*, que el estado de movimiento no altera las reacciones de los puntos fijos, y habrá necesidad de conocer estas reacciones, para deducir los rozamientos que deben introducirse en las ecuaciones del equilibrio. Veamos sólo el caso en que el movimiento está á punto de empezar en un sentido determinado.

874. Sean OA y OB los radios de la rueda y del cilindro (fig. 358), P y Q la potencia y la resistencia, OC el radio del gorron, que toca en C al cojinete LS. El movimiento de la máquina se verifica en el sentido de la potencia y gira la rueda en el sentido de la flecha; el rozamiento que experimenta el torno está dirigido en sentido contrario, y podemos representarlo por una fuerza F aplicada en el punto C, tangencialmente á la circunferencia del gorron. Ademas de esta accion tangencial, la superficie de apoyo LS ejerce sobre el gorron una accion N; y por la hipótesis en que procedemos, se tendrá la relacion $F = Nf$, siendo f el coeficiente de rozamiento.

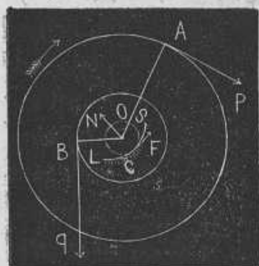

Fig. 358.

Sobre el otro gorron se ejercerá tambien un rozamiento $F' = N'f$, y una reaccion normal N'.

El equilibrio de la máquina exije que las fuerzas P, Q, N, N′, F y F′ se equilibren sobre ella. Tomando los momentos de todas estas fuerzas, con relacion al eje que se proyecta en O, obtendremos la ecuacion de equilibrio

$$(1)\quad P.OA = Q.OB + (F+F').OC = Q.OB + (N+N').f.OC,$$

ecuacion que contiene la suma desconocida $N+N'$, y en la cual podrá despejarse.

875. Para determinar separadamente N y N', trasladaremos las fuerzas P y Q á los puntos del eje O, situados en los planos medios de cada uno de los gorrones; y resultarán los pares correspondientes á estas traslacionss y las fuerzas P', P'', y Q', Q''; tambien trasladaremos las fuerzas F y F' á los mismos puntos, y resultarán otros dos pares y otras dos fuerzas.

Los cuatro pares están situados en planos paralelos, y sus momentos son $P\times OA$, $Q\times OB$, $F\times OC$ y $F'\times OC$. El momento del par resultante, que es igual á su suma, debe ser cero para el equilibrio; y en efecto, lo es en virtud de la ecuacion (1); en el centro del primer gorron están aplicadas las cuatro fuerzas P', Q', N y F; y en el centro del segundo las P'', Q'', N' y F'; estas ocho fuerzas deben equilibrarse tambien para que la máquina esté en equilibrio, segun las condiciones establecidas (70), para el equilibrio de un sólido invariable.

Tambien cada uno de estos grupos de cuatro fuerzas, considerado por separado, está en equilibrio; porque si las fuerzas P', Q', N y F, aplicadas en un punto del eje O, tuvieran una resultante, ésta deberia equilibrarse con la restante de las otras cuatro fuerzas P'', Q'', N' y F', aplicadas en otro punto del eje, lo cual es imposible, porque son dos fuerzas situadas en los planos medios de los gorrones, normales al eje O y paralelas entre sí, que no pueden ser iguales y opuestas, como debian serlo para el equilibrio. Luego la resultante de N y F debe ser igual y opuesta á la resultante de las fuerzas P' y Q'; y del mismo modo la resultante de las fuerzas N′ y F′ debe ser igual y opuesta á la resultante de las fuerzas P″ y Q″.

La resultante de la fuerza normal N y de la tangencial F, que son perpendiculares, es $\sqrt{N^2+F^2}=N\sqrt{1+f^2}$; del mismo modo la de N′ y F′ es $N'\sqrt{1+f^2}$. De estas expresiones y de las que representan las resultantes de P′ y Q′, de P″ y Q″, resultan las ecuaciones

$$N\sqrt{1+f^2}=\sqrt{P'^2+Q'^2+2P'Q'\cos(P'',Q'')},$$
$$N'\sqrt{1+f^2}=\sqrt{P''^2+Q''^2+2P''Q''\cos(P'',Q'')}.$$

Sustituyendo en la ecuacion (1) los valores de N y N′, deducidos de estas ecuaciones, resulta

$$(2)\quad P.OA=QOB+OC.\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\Big[\sqrt{P'^2+Q'^2+2P'Q'\cos(P,Q)}$$
$$+\sqrt{P''^2+Q''^2+2P''Q''\cos(P'',Q'')}\Big].$$

876. En esta ecuacion OA, OB, OC, son conocidos; la fuerza Q es conocida en magnitud y direccion y podremos deducir Q′ y Q″. La potencia P es desconocida en magnitud, y conocida en direccion, y actúa en el plano de la rueda del torno; y descomponiéndola en dos componentes, P′ y P″, situadas en los planos medios de los gorrones, se conocerán las relaciones de estas componentes con la fuerza; y podremos expresarlas por las igualdades $P'=KP$ y $P''=K'P$, siendo los factores K y K′ conocidos, pues se conocen las dimensiones de la máquina. Los ángulos (P′, Q′) y (P″, Q″), son tambien conocidos y la ecuacion (2) no contendrá más incógnita que la potencia P, cuyo valor podrá determinarse por ella.

Para obtenerlo, lo mejor es proceder por aproximaciones sucesivas; se desprecia primero el término que contiene los radicales, que está multiplicado por el coeficiente de rozamiento *f*, que es siempre muy pequeño, si la máquina está en buen estado. Con esta hipótesis resulta

$P = Q\frac{OB}{OA}$, que es el valor que obtuvimos prescindiendo del rozamiento. Con este valor de P se calculan los valores de P′ y P″, que sustituidos en los radicales, dan un primer valor aproximado. Con este valor, la ecuacion (2) da un segundo valor de P, más aproximado, que sirve luégo para calcular un tercero, y así sucesivamente; pudiéndose obtener por aproximaciones sucesivas un valor de P, tan aproximado como se quiera.

Equilibrio de un sistema de palancas.

877. Las palancas pueden combinarse de muchas maneras, y producir los efectos más variados; estas combinaciones se llaman sistemas de palancas. En general, para hallar la ley de equilibrio de un sistema de palancas, se establece la ley de equilibrio en la primera palanca, sobre la cual obra la potencia que se aplica á todo el sistema; la resistencia en la primera palanca obra como potencia en la segunda; la resistencia de ésta obra como potencia en la tercera, y así sucesivamente. Se escriben las igualdades que expresan las leyes de equilibrio en todas las palancas del sistema; se multiplican ordenadamente todas estas igualdades, y suprimiendo factores comunes, la igualdad que resulte expresará la relacion entre la potencia y la resistencia del sistema, ó sea la ley de equilibrio del sistema de palancas. Es cuanto puede decirse de una manera general sobre los sistemas de palancas.

Equilibrio de un sistema de tornos.

878. Un sistema de tornos A, A′, A″, (fig. 359), que reaccionan unos sobre otros, se dispone de suerte, que la

resistencia del primero sea la potencia del segundo, la resistencia de éste sea la potencia del tercero, y así sucesivamente; el último eleva el peso R, que es la resistencia de la combinacion. La cuerda aplicada tangencialmente al primer cilindro, lleva un peso R, y la cuerda aplicada á la rueda está atada al cilindro del segundo torno A′; la rueda de éste está tirada por una cuerda que se plega sobre el cilindro del tercer torno A″, y así sucesivamente hasta el último, que es tirado por la potencia P.

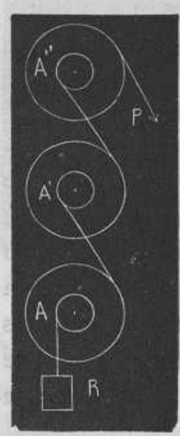

Fig. 359.

Para establecer la ley de equilibrio del sistema, sean l, l', l'', los radios de los cilindros, y L, L′, L″ los radios de las ruedas. Si el sistema está en equilibrio, cada torno lo estará tambien en virtud de las tensiones de las cuerdas que solicitan el cilindro y la rueda. Sea T la tension de la cuerda que va del torno A′ al A″, tendremos, para expresar el equilibrio de este torno, la proporcion

$$\frac{P}{T}=\frac{l''}{L''};$$

llamando T′ á la tension de la cuerda siguiente, se tendrá

$$\frac{T}{T'}=\frac{l'}{L'},$$

y para el tercero

$$\frac{T'}{R}=\frac{l}{L};$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta

$$\frac{P}{R}=\frac{l\times l'\times l''}{L\times L'\times L''};$$

es decir, potencia es á resistencia como el producto de los radios de los cilindros es al producto de los radios de las ruedas.

Equilibrio de un sistema de ruedas dentadas.

879. Si aproximamos unos á otros los tornos del sistema anterior, de manera que la rueda del primero sea tangente al cilindro del segundo, y que la rueda de éste sea tangente al cilindro del tercero, y así sucesivamente; suponiendo ademas, que cada rueda se adhiere al cilindro contíguo, de suerte que no pueda girar sin hacer girar á este cilindro y recíprocamente, se podrán suprimir las cuerdas que ligan todos estos tornos y se tendrá siempre la misma ley de equilibrio, ó la misma relacion entre la potencia y la resistencia.

Para adherir sólidamente cada rueda con el cilindro del torno siguiente, se ponen *dientes* igualmente distribuidos que los unos engranen con los otros, de manera que cada rueda, que se llama entónces *rueda dentada*, no pueda girar sobre su eje, sin que el cilindro con quien engrana, que se llama *piñon*, gire sobre el suyo en sentido contrario.

La ley de equilibrio en un sistema de ruedas dentadas es, que la potencia es á la resistencia como el producto de los radios de los piñones es al producto de los radios de las ruedas.

Plano inclinado. Su ley de equilibrio.

880. Ya sabemos que plano inclinado es el que forma con el plano horizontal un ángulo menor que un ángulo recto. Vamos á ver cuál es la ley de equilibrio de un cuerpo pesado colocado sobre un plano inclinado, prescindiendo del rozamiento.

Sea AB (fig. 360), la línea de máxima pendiente del plano, que forma con la horizontal AL un ángulo dado BAL$=\alpha$. El cuerpo C descansa sobre el plano por una cara plana, y tiene un peso P aplicado en su centro de gravedad G; y se pide la fuerza que se debe aplicar para que esté en equilibrio.

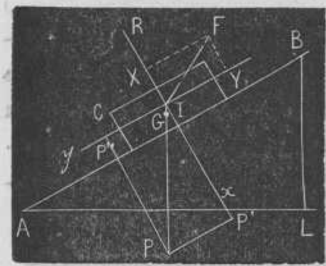

Fig. 360.

La resultante de las acciones ejercidas por el plano sobre el cuerpo es una fuerza R, normal al plano, puesto que suponemos que el rozamiento es nulo; esta fuerza R encuentra á la vertical PG en un punto I, en el que podemos suponer aplicadas las fuerzas P y R; la fuerza P es conocida en magnitud y direccion, y la fuerza R sólo en direccion, siendo desconocida su intensidad; el plano RIP coincide con el plano del bibujo.

881. Para que exista el equilibrio debemos aplicar una fuerza F en el punto I, cuya direccion y magnitud son desconocidas. Para determinarlas, por el punto I tracemos en el plano de la figura dos ejes rectangulares Ix, Iy, el primero normal al plano y el segundo paralelo á él. Descompongamos, segun estos ejes, la fuerza F, y sean X é Y sus componentes, y la P en dos P′ y P″.

Las tres fuerzas F, P, R, se equilibran, la suma algébrica de sus proyecciones sobre los ejes es nula, luego

$$\left\{\begin{array}{l} Y-P''=0 \\ X+R-P'=0 \end{array}\right. \quad ó \quad \left\{\begin{array}{l} Y=P'' \\ X+R=P'; \end{array}\right.$$

la primera de estas ecuaciones determina la componente Y; y la segunda la suma de las incógnitas X+R, quedando una de ellas arbitraria.

Si queremos hallar el menor valor posible de la fuerza F, hay que hacer X=0; porque la ecuacion $F^2=X^2+Y^2$, en la cual $Y=P''$, exije, que para que F sea mínima, que sea $X=0$. En este caso $R=P'$.

Luego se equilibrará el peso P con una fuerza F, paralela al plano inclinado, y dirigida de abajo á arriba, segun la línea de máxima pendiente; esta fuerza será igual á la proyeccion IP″ del peso P sobre la línea de máxima pendiente. Siendo los triángulos IPP″, ABL semejantes, tendremos

$$\frac{Y}{P}=\frac{BL}{AB};$$

BL es la *altura* del plano, y AB su *longitud*, y la proporcion anterior se enuncia diciendo, potencia es á resistencia como la altura es á la longitud. Enunciado que supone, que Y es la potencia que eleva el peso R, que viene á ser la resistencia.

Tambien tenemos que $Y=P\cos\alpha$, y la presion sobre el plano es $R=P\operatorname{sen}\alpha$.

Plano inclinado teniendo en cuenta el rozamiento.

882. Para que la ley de equilibrio en el plano inclinado, contando con el rozamiento, sea determinada, es preciso suponer que el resbalamiento del cuerpo sobre el plano está á punto de empezar, en un sentido definido, ó que se produce realmente, estando animado el cuerpo de un movimiento uniforme á lo largo de la línea de máxima pendiente AL del plano (fig. 361).

Supongamos que el cuerpo resbala ó va á resbalar del punto L al punto A, es decir, subiendo. El rozamiento que se desarrolla al contacto del cuerpo y el plano es una fuerza F paralela al plano y dirigida en el sentido AL. La resultante de las acciones del plano sobre el cuerpo está dirigida segun una recta IR, que forma con la normal IS, en el plano de la figura, un ángulo RIS igual al ángulo de rozamiento. Esta reaccion total R se descompone en dos fuerzas, una normal S, y una fuerza F, que es el rozamiento. Tracemos los ejes IX é IY, y llamemos á las componentes

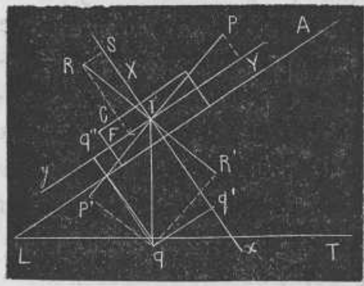

Fig. 361.

del peso Q del cuerpo, segun estos ejes, Q′ y Q″, y sean tambien las componentes de la potencia desconocida P, segun los mismos ejes, X é Y. Tendremos las ecuaciones del equilibrio

$$\left\{\begin{array}{l} Y-F-Q''=0, \\ X+S-Q'=0, \end{array}\right. \text{ ó } (1) \left\{\begin{array}{l} Y=F+Q'', \\ X=Q'-S; \end{array}\right.$$

y ademas la ecuacion del rozamiento, siendo f su coeficiente;

$$(2) \quad F=Sf.$$

Tenemos las tres ecuaciones (1) y (2) para determinar las cuatro incógnitas X, Y, S y F. Luego una de estas cuatro incógnitas es arbitraria, y puede servir para que el problema satisfaga á alguna nueva condicion. Supongamos que ésta sea, que la potencia P sea un mínimo.

883. El problema puede resolverse geométrica y analíticamente. Para resolverlo geométricamente, tenemos, que el peso Q y las fuerzas P y R, se equilibran en el punto I; Q es la resultante de IP′ é IR′ iguales y contrarias á P y R, luego la recta IQ es la diagonal del paralelógramo IR′QP′, construido sobre ellas. En este paralelógramo, el lado IR′ tiene una direccion conocida, la fuerza P está representada en magnitud por la recta QR′, que une el punto Q al punto R′,

extremo de la recta IR'. El mínimo de la fuerza P corresponde al mínimo de QR', ó á la perpendicular bajada del punto Q sobre la recta IR'; es decir, obtendremos el mínimo buscado cuando la potencia P sea perpendicular á la recta IR, ó cuando tenga una direccion que forme con la línea de máxima pendiente del plano un ángulo PIY igual al ángulo de rozamiento.

884. Se obtendrá la solucion algébrica del problema estableciendo la ecuacion

$$(3)\quad X=fY;$$

de las ecuaciones (1), (2) y (3), se deducen los valores siguientes de las cuatro incógnitas del problema,

$$S=\frac{Q'-Q''f}{1+f^2},\qquad Y=\frac{Q''+Q'f}{1+f^2},$$

$$F=f.\frac{Q'-Q''f}{1+f^2},\qquad X=f.\frac{Q''+Q'f}{1+f^2}.$$

Representando por i la inclinacion ALT del plano sobre el horizonte y por α el ángulo de rozamiento, tendremos

$$Q'=Q\cos i,\quad Q''=Q\,\mathrm{sen}\,i,\quad f=\mathrm{tg}\,\alpha;$$

y sustituyendo en las anteriores, serán

$$(4)\left\{\begin{array}{l} S=Q.\dfrac{\cos i-\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=Q\cos(i+\alpha)\cos\alpha,\\ F=Q\cos(i+\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha,\\ Y=Q.\dfrac{\mathrm{sen}\,i+\cos i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=Q\,\mathrm{sen}(i+\alpha)\cos\alpha,\\ X=Q\,\mathrm{sen}(i+\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha. \end{array}\right.$$

Hemos supuesto que el cuerpo resbala subiendo; si resbalára descendiendo, las fórmulas anteriores, cambiando en ellas el signo de F, y α en $-\alpha$, resuelven el problema, teniendo cuidado, ademas, de dar á las fuerzas F, X é Y los signos convenientes.

En todos los casos las fórmulas (4) resuelven el problema, dando á las fuerzas y al ángulo α los signos correspondientes.

Rosca ó tornillo. Su ley de equilibrio.

885. La rosca es una máquina que se refiere á la vez á la palanca y al plano inclinado, porque en ella se considera en general el equilibrio de un cuerpo, que se encuentra al mismo tiempo sujeto á girar alrededor de un eje fijo, y á descender uniformemente á lo largo de este eje, apoyándose sobre una superficie inclinada.

La rosca se compone de un cilindro recto A (fig. 362), rodeado de un filete saliente, engendrado por el plano de un triángulo ó de un paralelógramo, que apoyándose por su base sobre una generatriz, gira alrededor del eje del cilindro, descendiendo á lo largo de una hélice trazada sobre su superficie. Paso de la hélice es la porcion de una generatriz del cilindro comprendida entre dos espiras consecutivas. Todos los puntos, que componen el filete del tornillo, pueden considerarse como perteneciendo á hélices descritas sobre cilindros del mismo eje, pero de radios diferentes; mas todas estas hélices tienen el mismo paso, que es el que se llama *paso* de la rosca.

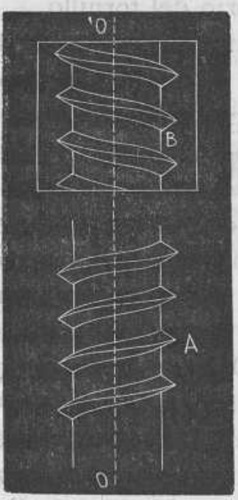

Fig. 362.

La rosca penetra en una pieza hueca B, llamada *tuerca*, horadada interiormente de manera, que presente en hueco la misma forma que el filete de la rosca. La generacion de la tuerca es idéntica á la de la rosca. Concibamos que el triángulo ó paralelógramo generador, que produce sobre el cilindro el filete de la rosca, penetra en el cilindro; producirá en el interior de él un carril hueco, perfectamente igual al filete, y que éste llenará exactamente; esta segunda pieza, que puede ser considerada como el molde de la primera, forma la tuerca de la rosca.

Ahora, es claro, si una de estas piezas es fija, que la otra estará sujeta de manera que no tendrá más que la libertad de girar alrededor del eje del cilindro y de descender ó ascender al mismo tiempo sobre la segunda, como sobre una superficie inclinada; luego existen entre las fuerzas que se equilibran sobre la pieza móvil, relaciones que dependen de su union á la otra, y estas relaciones constituyen las condiciones de equilibrio del tornillo.

886. Para encontrarlas, supongamos que la tuerca sea fija (fig. 363), y que se aplica un par (P, —P) en un plano perpendicular al eje OO′ de la rosca, en los extremos de una barra MN que atraviesa la cabeza de la rosca y es perpendicular á su eje, sea R el esfuerzo resultante desarrollado contra un obstáculo, en el sentido del eje OO′; el par (P, —P), la R tomada en sentido contrario y las reacciones desarrolladas entre la rosca y su tuerca, deben equilibrarse, y se podrá por consiguiente determinar el valor de la fuerza R. Prescindamos por de pronto del rozamiento, y apliquemos el teorema del trabajo vertical. Un pequeño movimiento angular θ, de la rosca, producirá un pequeño movimiento longitudinal e. Los trabajos verticales de las fuerzas P, —P, que corresponden á la rotacion θ de la rosca, son iguales á los productos de los momentos de estas fuerzas por el ángulo θ; luego si suponemos las fuerzas P y —P, aplicadas á distancias iguales OM, ON del eje de la rosca, y representamos estas distancias por b, la suma de los trabajos de las fuerzas será $2Pb\theta$, el trabajo de

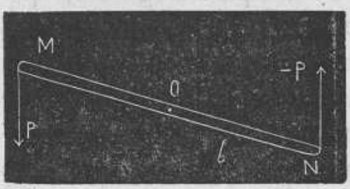

Fig. 363.

la resistencia R, es negativo é igual á $-Re$; la ecuacion del teorema del trabajo vertical es

$$2Pb\theta - Re = 0,$$

de la que se deduce

$$R = 2Pb\frac{\theta}{e}.$$

Si llamamos h al paso de la rosca, para una vuelta entera de ésta la traslacion es h, y tendremos la proporcion

$$\frac{\theta}{e} = \frac{2\pi}{h};$$

y sustituyendo, tendremos la siguiente ecuacion del equilibrio de la rosca

$$R = 2Pb\frac{2\pi}{h}.$$

La resistencia R, vencida por la máquina, está en razon inversa del paso de la rosca h; y tomando este paso suficientemente pequeño, se podrá ejercer un esfuerzo tan grande como se quiera, con un par $2Pb$, de intensidad dada. Este resultado manifiesta la conveniencia de reducir cuanto se pueda en esta máquina el paso de la rosca; pero es imposible en la práctica llevar esta reduccion más allá de un cierto límite. Se obtiene una disposicion ventajosa de la máquina, colocando sobre un mismo cilindro dos filetes de rosca, de pasos diferentes h y h', y haciendo pasar el primero por una tuerca fija y el segundo por una tuerca que puede moverse longitudinalmente; la rosca, al girar, producirá una traslacion de la tuerca móvil; esta tuerca avanzará de la diferencia $h-h'$ de los dos pasos, por una vuelta 2π de la rosca. El esfuerzo desarrollado contra un obstáculo por la tuerca móvil, será

$$R = 2Pb\frac{2\pi}{h-h'},$$

que podrá hacerse tan grande como se quiera, haciendo la diferencia $h-h'$ tan pequeña como exija el caso.

Equilibrio de la rosca, teniendo en cuenta el rozamiento.

887. Vamos á encontrar ya esta ley de equilibrio, es decir, la relacion entre la resistencia R y el momento del par motor $2Pb$, teniendo en cuenta el rozamiento desarrollado por el contacto del filete de la rosca con la superficie interna de la tuerca, y suponiendo que la rosca recibe un movimiento ascendente.

Para simplificar la cuestion, admitiremos que el contacto de estas dos piezas está concentrado á lo largo de una hélice media, trazada, por ejemplo, á igual distancia entre el cilindro sobre que se arrolla el filete, y el cilindro tangente exteriormente al filete. Sea $OM=r$ (fig. 364), el radio de esta hélice media, que representaremos por la curva AB; en un punto M de esta hélice, tracemos para mayor sencillez una normal á la superficie helizoidal, y supongamos que el filete de la rosca es cuadrado, entónces la normal

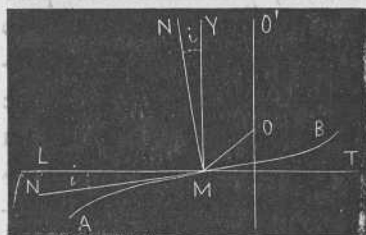

Fig. 364.

MN estará contenida en un plano NMY, tangente al cilindro sobre el que está trazada la hélice AB; tracemos tambien la tangente á la hélice en el punto M. En el momento en que va á empezar el movimiento, la reaccion total, ejercida sobre el punto M por la tuerca, se descompone en una componente normal N, y una componente tangencial, que es el rozamiento fN; estas dos componentes forman el mismo ángulo i con las rectas MY, ML, trazadas por el punto M en el plano tangente al cilindro que contiene la hélice AB, una paralela al eje OO′, y la otra perpendicular á ésta.

Podemos descomponerlas segun estas direcciones; las componentes de la fuerza N son $N\cos i$, segun MY, y $N\,\text{sen}\,i$, segun ML; las componentes de fN son, $fN\,\text{sen}\,i$ y $fN\cos i$. Tendremos, segun MY una fuerza $N\cos i—fN\,\text{sen}\,i$, y segun ML una fuerza $N\,\text{sen}\,i+fN\cos i$.

En todos los puntos de la hélice AB podemos hacer la misma descomposicion; en cada uno encontraremos la fuerza $N(\cos i—f\,\text{sen}\,i)$ paralela al eje OO′, y $N(\text{sen}\,i+f\cos i)$ perpendicular á dicho eje, y cuyo momento, con relacion á él, es $Nr(\text{sen}\,i+f\cos i)$. La suma de las componentes paralelas á OO′ es $(\cos i—f\,\text{sen}\,i)\Sigma N$; y la suma de los momentos con respecto al mismo eje es $r(\text{sen}\,i+f\cos i)\Sigma N$. El signo Σ se extiende á todos los puntos de la porcion de la hélice AB, comprendida dentro de la tuerca.

Las seis ecuaciones del equilibrio de un sólido invariable se reducen en este caso, á las dos siguientes

$$R=(\cos i—f\,\text{sen}\,i)\Sigma N,$$
$$2Pb=r(\text{sen}\,i+f\cos i)\Sigma N;$$

que son las ecuaciones del equilibrio de la rosca; las otras cuatro se verifican por sí mismas en virtud de los supuestos establecidos.

Podemos eliminar ΣN en estas ecuaciones dividiéndolas una por otra, y resulta

$$\frac{Rr}{2Pb}=\frac{\cos i-f\,\text{sen}\,i}{\text{sen}\,i+f\cos i};$$

y como $f=\text{tg}\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, sustituyendo y reduciendo será

$$\frac{Rr}{2Pb}=\frac{\cos(i+\alpha)}{\text{sen}\,(i+\alpha)}=\cot(i+\alpha).$$

Siendo las fuerzas P y R positivas, $\cot(i+\alpha)$ es positiva, lo cual exije que $i+\alpha<\frac{\pi}{2}$; luego $i<\frac{\pi}{2}-\alpha$.

La fórmula obtenida está conforme con la obtenida para el plano inclinado (881), cuando se emplea una fuerza horizontal $2Pb$ para hacer elevar un peso Rr á lo largo de la línea de máxima pendiente.

888. Supongamos que el movimiento de la rosca se produce en sentido contrario, es decir, descendente, y que por la accion del par $2Pb$, la rosca desciende en su tuerca bajo una presion R, ejercida de abajo á arriba en su extremo. Para pasar del caso anterior á este, basta cambiar α en $-\alpha$, porque el rozamiento cambia de sentido; luego la fórmula para este caso será

$$\frac{2Pb}{Rr} = \operatorname{tg}(i-\alpha);$$

y para que las fuerzas P y R continúen positivas, es necesario que $i > \alpha$.

Para que los dos movimientos sean igualmente posibles, es necesario que $\alpha < i < \frac{\pi}{2} - \alpha$, para lo cual, debe ser $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

Teoría del trabajo de las máquinas.

889. El objeto de las máquinas en general es no sólo equilibrar las fuerzas, sino vencerlas, es decir, hacer mover sus puntos de aplicacion en un sentido opuesto al sentido de las acciones de estas fuerzas. Así, cuando se emplea una máquina para elevar un peso, nos proponemos hacer reccorrer á este peso un camino vertical de abajo á arriba, es decir, en sentido contrario al sentido en que tiende á llevarlo la gravedad. La máquina no es más que un cuerpo intermedio entre la potencia que se emplea y la resistencia que se trata de vencer. La potencia se llama tambien fuerza motriz y la resistencia fuerza esistente. Cuando una máquina está en movimiento, la potencia hace mover su punto de aplicacion, segun su direccion y en su propio sentido, miéntras que el punto de

aplicacion de la resistencia se mueve segun su direccion y en sentido contrario al suyo; ó lo que es lo msimo, una fuerza motriz produce un trabajo positivo, y una fuerza resistente produce un trabajo negativo.

En el estado de equilibrio, cuando la máquina está en reposo, no hay más trabajos que considerar, que los trabajos virtuales correspondientes á los movimientos virtuales; y entónces la distincion entre la potencia y la resistencia no es necesaria. En el caso de la palanca podríamos llamar R á la potencia, y P á la resistencia, sin ningun inconveniente; porque un movimiento angular de sentido contrario al que se trata de producir, justificaria estas denominaciones, haciendo positivo el trabajo de la resistencia, y negativo el de la potencia.

Ordinariamente una máquina está destinada á vencer una resistencia bien definida, de consiguiente, no hay ninguna ambigüedad entre las fuerzas motrices y las fuerzas resistentes. Ademas, el equilibrio entre estas fuerzas puede tener lugar estando en marcha la máquina, lo mismo que estando parada, y siempre existe en el primer caso, cuando la máquina posee un movimiento uniforme; de consiguiente, el estudio de las condiciones de equilibrio de las máquinas debe hacerse, considerándolas al estado de equilibrio, ó al estado de movimiento.

890. Vamos á demostrar que se pueden aplicar las ecuaciones del equilibrio á una máquina al estado de movimiento uniforme, como si esta máquina estuviera en reposo, haciendo uso del teorema de las fuerzas vivas, que define en general su movimiento. Sea T el trabajo total de las fuerzas, tanto motrices como resistentes; tendremos la ecuacion

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\mathrm{T};$$

diferenciando esta ecuacion, resulta

$$\Sigma mvdv = d\mathrm{T}.$$

Si entre las velocidades v de los diferentes puntos, existen relaciones constantes, como acontece en la mayor parte de las máquinas, entre sus diferenciales existirán las mismas relaciones, y por consiguiente, se reducirán á cero todas á la vez; luego las velocidades de todos sus puntos pasan á la vez por sus máximos y mínimos valores. Si $dv=0$, será al mismo tiempo $d\mathrm{T}=0$ en la ecuacion anterior; pero $d\mathrm{T}$ es la suma de los trabajos elementales de las fuerzas, y la relacion $d\mathrm{T}=0$, indica que por medio de las ligaduras, las fuerzas se equilibran; luego el máximo y el mínimo de las velocidades de los diferentes puntos móviles, tiene lugar cuando la máquina pasa por una posicion de equilibrio.

Si el trabajo T es constantemente cero, $d\mathrm{T}$ es tambien constantemente cero, y se verifica en cada instante $\Sigma m v^2 = \Sigma m v_0^2$; luego la fuerza viva de la máquina es constante, cuando las fuerzas se equilibran constantemente. La recíproca es cierta, por consiguiente, si se tiene $v=v_0$, es decir, si el movimiento de cada punto es uniforme sobre su trayectoria, las fuerzas que actúan sobre la máquina se equilibran constantemente; luego las leyes de equilibrio de las máquinas son aplicables cuando el movimiento de que van animadas es uniforme. Esta extension de las ecuaciones del equilibrio, sólo se aplica rigurosamente á las que expresan las condiciones de equilibrio, y no es aplicable á las ecuaciones que conducen á la determinacion de las reacciones de los puntos fijos, y de las tensiones de las ligaduras, las cuales pueden ser muy diferentes al estado de movimiento, que al estado de reposo de la máquina.

891. Todas las máquinas que se emplean en la industria pueden reducirse á dos clases muy diferentes: unas que sirven para vencer resistencias más ó ménos considerables, tales como las que sirven para elevar far-

dos, comprimir ó pulverizar los cuerpos, tornear, cortar ó taladrar maderas, metales y sus análogas; y otras destinadas á producir obras que exijen más delicadeza que fuerza, como las que sirven para hilar y tejer las materias textiles, fabricar encajes, abanicos y otras obras delicadas.

Las máquinas de la primera clase, cuando están en movimiento, vencen las resistencias á que se aplican, y hacen recorrer á los puntos de aplicacion de estas resistencias un cierto camino en sentido contrario de la accion, como ántes hemos dicho. El trabajo desarrollado por la resistencia, es como sabemos, igual al producto de la resistencia por el camino que recorre su punto de aplicacion, estimado en la direccion de esta resistencia. Mas para que una máquina pueda vencer una resistencia, y hacer marchar su punto de aplicacion en sentido contrario de su accion, es necesario que le esté aplicada una fuerza motriz ó una potencia, y que el punto de la máquina, sobre el que obra la potencia, marche en sentido de su accion; es, pues, necesario que la potencia desarrolle tambien un cierto trabajo. Este trabajo desenvuelto por la potencia hace funcionar la máquina, y se puede decir que la máquina está destinada á trasmitir el trabajo de la potencia al punto de aplicacion de la resistencia.

Las máquinas de la segunda clase no están destinadas á vencer directamente resistencias, pero la obra que ejecutan, hace que se desarrollen rozamientos y otras resistencias accesorias, y exije para sostener el movimiento la accion de la potencia correspondiente.

Podemos, pues, decir en general, que las máquinas son aparatos destinados á trasmitir el trabajo de las fuerzas, y vamos á ver cómo se verifica esta trasmision.

Trasmision del trabajo en las máquinas.

892. Ordinariamente una máquina no puede tomar más que dos movimientos, opuestos uno á otro, en los cuales el movimiento de un sólo punto determina el de todos los demas; de consiguiente, una sola ecuacion basta para determinar la ley de este movimiento, una vez conocido el sentido en que se verifica; esta ecuacion es la del teorema de las fuerzas vivas,

$$(1) \quad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\Sigma\int(Xdx + Ydy + Zdz) = 2T,$$

como dijimos en su lugar. Para aplicar esta ecuacion y ver cómo se trasmite el trabajo en una máquina, observaremos que las fuerzas que obran sobre la máquina son de dos clases; fuerzas motrices y fuerzas resistentes, ó sean fuerzas cuyo trabajo es positivo, y fuerzas cuyo trabajo es negativo; las primeras, cuyas direcciones forman en todos los casos ángulos agudos con los caminos elementales que recorren sus puntos de aplicacion, y las segundas forman ángulos obtusos con los caminos recorridos por sus puntos de aplicacion; el trabajo de una fuerza motriz se llama *trabajo motor*; el de una fuerza resistente, considerado en su valor absoluto, se llama *trabajo resistente*; la suma de todos los trabajos desarrollados durante un tiempo cualquiera por las fuerzas motrices que obran sobre una máquina, constituye lo que se llama el *trabajo motor total*, ó simplemente el *trabajo motor* correspondiente á este tiempo; del mismo modo se da el nombre de *trabajo resistente total*, ó *trabajo resistente*, á la suma de los valores absolutos de los trabajos debidos á las fuerzas resistentes durante el mismo tiempo.

893. Establecidas estas definiciones, si consideramos el movimiento de una máquina durante un intervalo de

tiempo cualquiera, y designamos por T_m el trabajo motor total desarrollado durante este tiempo, y por T_r el resistente total correspondiente; $T = T_m - T_r$ será el valor de la suma de los trabajos de todas las fuerzas que obran sobre la máquina, durante el tiempo de que se trata; y la ecuacion de las fuerzas vivas tomará la forma

$$(2) \quad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\left[T_m - T_r\right];$$

la cual expresa, que el incremento total de la fuerza viva de la máquina durante el tiempo que se considera, es igual al duplo del exceso del trabajo motor sobre el resistente, durante el mismo tiempo. Esta ecuacion encierra toda la teoría de la trasmision del trabajo en las máquinas.

Supongamos en primer lugar que el movimiento de la máquina es uniforme, ó que la velocidad de cada uno de sus puntos es constante; el primer miembro de la ecuacion (2) es nulo, cualquiera que sea el tiempo que se considere; luego $T_m = T_r$, el trabajo motor es constantemente igual al trabajo resistente; por consiguiente, la máquina trasmite el trabajo desarrollado por las fuerzas motrices á los puntos en que obran las fuerzas resistentes sin modificar su valor. En el caso de que no actúen sobre la máquina más que una sola potencia y una sola resistencia, la uniformidad del movimiento exije que el trabajo de la potencia sea igual al de la resistencia; ó que la potencia y la resistencia estén en razon inversa de los caminos recorridos, en el mismo tiempo, por sus puntos de aplicacion, y segun sus direcciones respectivas. De aquí resulta el conocido principio de que, *lo que se gana en fuerza se pierde en velocidad*, que es muy importante en la teoría de las máquinas.

894. Si el movimiento de la máquina no es uniforme, el trabajo motor y el trabajo resistente no son iguales en

un tiempo cualquiera; pero en este caso el movimiento de la máquina es generalmente periódico, es decir, que las velocidades de los diferentes puntos de la máquina que aumentan ó disminuyen alternativamente, y vuelven á tener valores iguales á los primitivos, al cabo de un cierto tiempo llamado *período*. Al fin de uno de estos períodos, el primer miembro de la ecuacion (2) es cero, por consiguiente, el segundo lo es tambien, y el trabajo motor T_m, desarrollado durante este tiempo, es igual al trabajo resistente T_r durante el mismo período. Y aunque T_m y T_r no son iguales en cada elemento del tiempo, puede considerarse que por término medio, existe la igualdad durante toda la marcha periódica de la máquina; puesto que se verifica para cada uno de los períodos del movimiento, y por consiguiente, para un número cualquiera de períodos.

Aplicando la ecuacion (2) á todo el tiempo que dura el movimiento de la máquina, ó sea al tiempo trascurrido desde que empieza á moverse hasta que se pára, el primer miembro de la ecuacion es cero; luego durante todo el tiempo del movimiento será $T_m = T_r$, de modo, que cualesquiera que sean las variaciones del movimiento de la máquina, el trabajo motor desarrollado por las fuerzas motrices es igual al trabajo resistente desarrollado por las fuerzas resistentes.

Tambien vemos en la ecuacion (2), que si la fuerza viva $\Sigma m v^2$ de la máquina, al fin de un intervalo de tiempo, es mayor que la $\Sigma m v_0^2$, correspondiente al principio del mismo intervalo de tiempo, T_m es mayor que T_r; y si $\Sigma m v^2 < \Sigma m v_0^2, T_m < T_r$.

895. De aquí se deduce el modo de variar el movimiento de la máquina, segun que el trabajo motor es mayor ó menor que el trabajo resistente: si $T_m = T_r$ la fuerza viva es constante; si $T_m > T_r$, el movimiento de

la máquina se acelera; y si $T_m < T_r$, el movimiento se retarda, y su fuerza viva disminuye en el duplo del exceso de T_r sobre T_m. Segun esto, cuanto $T_m > T_r$, el trabajo motor T_m se descompone en dos partes T_r y $T_m - T_r$; la primera de estas dos partes del trabajo motor se emplea en ejecutar el trabajo T_r, correspondiente á las resistencias que obran sobre ella, y la segunda produce el aumento de la fuerza viva de la máquina; cuando, por el contrario, $T_r > T_m$, el trabajo motor T_m no puede producir más que una parte del trabajo resistente que es igual á T_m; la otra parte $T_r - T_m$ del trabajo resistente se produce á expensas de la fuerza viva de la máquina, que disminuye en la cantidad correspondiente.

Todo se verifica como si en el primer caso el exceso del trabajo motor sobre el resistente se acumulase en la masa total de la máquina, bajo la forma de fuerza viva, y si en el segundo caso, el exceso del trabajo motor así acumulado anteriormente, se restituyese para producir una cantidad de trabajo resistente, precisamente igual á la que el exceso de trabajo motor habria producido directamente. Se deduce de aquí el porqué no es necesario que el movimiento de la máquina sea uniforme, para que trasmita el trabajo sin cambiar su valor total.

Al empezar el movimiento de una máquina, durante el tiempo comprendido entre el instante en que parte del reposo, y aquel en que llega al estado de movimiento regular, que debe conservar, el trabajo motor T_m excede al resistente, en una cantidad igual á la mitad de la fuerza viva que posee la máquina al fin de este tiempo; desde este instante, y durante todo el tiempo que la máquina conserva su movimiento regular ó periódico, los trabajos motor y resistente son iguales, como hemos dicho; pero al fin, cuando la máquina parte de su movimimiento regular, para volver al estado de reposo, T_r excedeá T_m, en una cantidad igual á la mitad de la fuerza viva que pierde la máquina. La parte de trabajo motor que se habia empleado al principio, para poner la máquina en su estado de movimiento regular, y que estaba en ella bajo la forma de fuerza viva, reaparece y produce una cantidad de trabajo resistente.

896. Segun lo que acabamos de exponer, en todos los casos una máquina trasmite todo el trabajo que se le aplica, sin alterar su valor. Si esta trasmision íntegra del trabajo por medio de la máquina, no se efectúa completamente en cada uno de los elementos del tiempo total que dura su movimiento, se verifican en los diversos elementos compensaciones tales, que en último resultado no se pierde parte alguna del trabajo motor, aplicado á la máquina; pero es preciso, para llegar á este resultado, que se tengan en cuenta todas las fuerzas aplicadas á la máquina, sin excepcion alguna; y sabemos que para esto se deben considerar lo mismo las fuerzas exteriores que las interiores. Entre las fuerzas resistentes las hay de dos clases: primera, las que están precisamente aplicadas á la máquina, segun el objeto á que se la destina, ó sea las que corresponden al trabajo que produce la máquina; segunda, las que se desarrollan en las diversas partes de la máquina, á causa de su movimiento, como los rozamientos entre las piezas sólidas de que está formada, y que son independientes del trabajo para que se destina la máquina. Las fuerzas resistentes de la primera clase se llaman *resistencias útiles*, y las segundas se llaman *resistencias pasivas*. El trabajo producido por las primeras se llama trabajo útil.

Designemos el trabajo útil por T_u, y por T_p el trabajo debido á las resistencias pasivas, que se llama *trabajo perdido*, tendremos

$$T_u = T_r - T_p.$$

Hemos visto que si se considera el movimiento de una máquina en conjunto, $T_r = T_m$, y la igualdad anterior será

$$T_u = T_m - T_p,$$

que nos dice, que siempre el trabajo útil T_u es menor que el trabajo motor T_m, en la cantidad T_p, que representa el trabajo perdido; de modo, que se puede decir que las máquinas trasmiten todo el trabajo motor sin que se pierda cantidad alguna; pero se pierde una parte del trabajo T_p, que se llama trabajo perdido. La relacion

$$\frac{T_u}{T_m},$$

del trabajo útil al trabajo motor, se llama *rendimiento* de la máquina; esta relacion es siempre menor que la unidad, y la máquina es tanto más perfecta, cuanto más se aproxima su rendimiento á la unidad. Se considera excelente una máquina en la industria, cuando su rendimiento es 0,75, ó mayor.

897. En toda máquina deben evitarse en cuanto sea posible las pérdidas de fuerza viva, porque toda pérdida de fuerza viva equivale á una pérdida de trabajo motor. Si las moléculas de algunas piezas de la máquina adquieren un movimiento vibratorio, ademas del movimiento general de la máquina, este movimiento se trasmite á los cuerpos próximos por medio de los soportes y del medio que rodea la máquina, tal como el aire ó el agua, concluyendo por perderse en la masa total de la Tierra, sin producir ningun trabajo útil. Por consiguiente, debe procurarse que no se produzcan movimientos vibratorios en las moléculas de la máquina. Ya hemos visto en el teorema de Carnot (734), que en el choque de los cuerpos naturales hay siempre pérdida de fuerza viva; pérdida que en una máquina es debida á la comunicacion del mo-

vimiento de las piezas de la máquina á los soportes y al medio en que se mueve.

Las principales causas de pérdida de fuerza viva en las máquinas, provienen de los movimientos vibratorios de sus moléculas, de los choques de unas piezas con otras, y del rozamiento que constantemente se desarrolla, al resbalar ó rodar unas piezas sobre otras.

898. Al proyectar una máquina, se procura siempre, que el trabajo perdido T_p sea muy pequeño, con relacion al trabajo útil T_u. Se disminuye el rozamiento pulimentando ó engrasando las superficies de los cuerpos, que deben resbalar unos sobre otros, procurando que sean muy duros, y haciendo que la velocidad del resbalamiento sea pequeña; pero de cualquiera manera que se construya la máquina, nunca puede conseguirse que el trabajo útil T_u, sea igual ó mayor que el trabajo motor T_m, siempre hay una porcion de trabajo perdido T_p, que no puede ser nunca cero.

Resulta de aquí, que los que buscan el llamado vulgarmente *movimiento contínuo*, y que en rigor debia llamarse *movimiento perpétuo*, buscan una cosa imposible; porque el objeto que se proponen estos investigadores, es construir una máquina que produzca trabajo útil sin gasto de trabajo motor, ó al ménos que el trabajo útil producido sea igual ó mayor que el trabajo motor emplado, problema evidentemente absurdo, segun lo que acabamos de decir.

INDICE ALFABÉTICO [a]

A.

B.

(a) Las citas que llevan I se refieren al tomo primero, y las que no llevan nada al segundo.

C.

N.

O.

T. Ariño

LECCIONES DE MECÁNICA RACIONAL

2.