RESOLUCION

DE LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO.

RESOLUCION

DE LA

CUADRATURA DEL CÍRCULO.

RESOLUCION TEÓRICA,

CON APLICACION A LA PRACTICA,

DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO,

Ó SEA,

descubrimiento del misterio de la Cuadratura.

POR

D. Francisco Antonio Mendez Novoa,

NATURAL Y VECINO

DE LA VILLA DE CACABELOS

EN LA PROVINCIA DE LEON,

Alumno interno que ha sido del Colegio militar de Santiago, los años de 1812, 13 y 14: siendo Director de aquel establecimiento D. Francisco Serrallah Coronel del Real Cuerpo de Ingenieros (hoy Mariscal de Campo). Y primer profesor y escritor de Matemáticas, D. Angel Laborde y Navarro (que en paz descanse) Capitan de Fragata de la Real Armada.

LEON:

Imprenta de Pedro Miñon. 1846.

DEDICATORIA

A S. M. LA REINA NUESTRA SEÑORA

Doña Ysabel 2.ª

Q. D. G.

Señora.

Con la mas profunda veneracion y respeto, á V. M. dirijo estas líneas, con el laudable fin de dedicar á V. R. M. un descubrimiento científico que mis desvelos me han hecho concebir; pero si el hombre en trances desventurados, necesita afluencia para implorar vuestra Real clemencia, no menos la necesita para dedicar á V. M. la resolucion de un problema matemático, que al frente de tantos sublimes talentos Europeos, y contando cuarenta y cinco años del siglo diez y nueve, *ninguno ha resuelto hasta ahora; mas mi limitado talento no me permite espresarme cual mi mente concibe, y con la mayor satisfaccion hiciera, si tuviese la dicha de estar adornado del don de sabiduría; pero ya que esta gracia me falta, y que tengo que acomodarme al incultivado entendimiento con que la naturaleza me dotó: en mi lenguaje comun (aunque respetuoso), espreso mi concepto, manifestando á V. M., que la consideracion de todo lo que llevo referido, me hace temblar mi tosca pluma ¡un síntoma convulsivo se apodera de mi brazo, reflexionando si será algun efecto de demencia mi resolucion! Empero: por otra parte Señora, reconociendo que es un cálculo matemático, sugeto á demostraciones positivas, se tranquiliza mi espíritu, y me hace atrever á dedicar á V. R. M. el fruto de mis desvelos: que consiste en la* Resolucion teórica, con aplicacion á la práctica, de la cuadratura del círculo: ó sea, descubrimiento del misterio de la cuadratura.

Señora: asi el título del folleto, como su contenido, hará mucho eco en las Academias á primera vista; porque como su escritor es persona invisible, se resentirá el amor propio de algunos profesores por la oposicion que hago al método adoptado por los autores, *para buscar la relacion del diámetro con la circunferencia; y mucho mas, porque mis cálculos para resolver todos los casos del círculo, son diametralmente opuestos á los que ellos establecieron. Pero si este eco á primera vista puede refluir hácia mis cálculos, no será asi despues de que se fije toda la consideracion necesaria para examinarlos; pues estoy convencido hasta la evidencia de su exactitud, y me persuado que tendrán la mayor aceptacion pública, tan luego como sean escrupulosamente examinados; y para que no haya duda alguna de la conviccion que tengo de que son exactísimos: desde luego si necesario fuese, mi cabeza los garantiza. Bajo de esta síncera garantía, y mediante á que es un escrito que solo versa sobre un problema matemático, que nada toca á la religion ni á la política; y que en su publicacion lejos de ser pernicioso á la humanidad, se prodigará inmensos beneficios, imploro la Soberana proteccion de V. M. para que se digne concederme la propiedad del folleto de que soy autor: y la libre impresion y despacho de él en el reino y en el estrangero, sin la menor restriccion, hasta que la censura Europea lo califique de inexacto; en este caso, que se me exija la responsabilidad personal* *que corresponda á mi atrevimiento, emanado del anhelo que siempre he tenido y tengo de ser útil á mis semejantes; pero si lo calificase de exacto, y manifestase que es un descubrimiento útil, como asi lo considero, que se me premien mis desvelos: dignándose V. M. interponer vuestra Soberana mediacion con los Soberanos estrangeros, para que se me condecore y premie por sus gobiernos.*

Señora: si esta dedicatoria fuese de vuestro Real agrado, y la resolucion del complicado problema, llenase plenamente los deseos de las Academias, se verian cumplidos en toda la estension de la palabra, los de vuestro fiel y humilde súbdito, que con tan plausible motivo tiene el alto honor de ponerse á los Reales pies de V. M.

Francisco Antonio
Mendez Novoa.

PROLOGO.

Respetables y amados lectores: para dar á luz el luminoso pensamiento que comprende el título de este folleto, he pasado muchos disgustos, he sufrido muchas privaciones, y muchos quebrantamientos de cabeza me atormentaron para llegar á concebir la resolucion de tan remarcado problema; porque ademas de ser muy difícil de atinar su solucion, por la diversidad y complicacion de cálculos en que está envuelto: al considerar me iba á poner al frente de ilustres é innumerables profesores, me trastornaba mi imaginacion, y suspendia mis tareas, reflexionando que sería un delirio mio el tal pensamiento, y que no era posible estuviese reservado para mí este descubrimiento; mas por otra parte, bien penetrado de algunas reglas matemáticas, y de que ha sido corto el número de profesores que ha fijado la atencion en esta cuestion: animado al mismo tiempo de los mejores sentimientos, y deseoso de satisfacer esta ansiedad pública, no perdoné medio alguno de llevarlo á cabo. Mi ánimo en un principio, habia sido presentar la misma cuadratura; pero esto me era muy costoso, y muy difícil de conseguir en el pais que habito, porque no hay artistas de pericia á quien encomendar ninguna obra delicada, como las que hay que hacer para esta resolucion. En este concepto, y á fin de que el público no carezca por mas tiempo de los datos, que en esta cuestion matemática, mis desvelos me han hecho concebir, he determinado darlos á la luz pública, bajo el título de: *Resolucion teórica, con aplicacion á la práctica, de la cuadratura del círculo: ó sea, descubrimiento del misterio de la cuadratura*; porque efectivamente la resuelvo de una manera indudable, y tiene aplicacion á la práctica, que no la tienen otros cálculos, como en el discurso del folleto demuestro evidentemente; en cuya resolucion está comprendido el descubrimiento del misterio de la cuadratura.

La obra pues contenida en este folleto, consta de dos partes; la primera que comprende hasta el artículo 19 inclusive, trata de la imposibilidad de la medida material de la circunferencia del círculo: de la difinicion del polígono regular, y el modo de hallar su área ó superficie: de la perfeccion é imperfeccion del polígono de muchos lados: de la observacion importante acerca de si los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo de igual número de lados, que se inscriben y circunscriben de duplo número de lados, se acercan á un mismo tiempo á la circunferencia: de la unidad, y que tiene sus límites como todas las cosas, y que los cálculos que se estralimitan de ella son erróneos; y últimamente, que la diezmilésima que tiene de falta la circunferencia en la razon geométrica 1: 3' 14159 hallada por la operacion gráfica de Vallejo, y calculada por la unidad simple, es causa de grandes errores.

La segunda parte comienza en el artículo 20: comprende el objeto que se llevaron los autores en la indagacion de la razon geométrica del diámetro con la circunferencia: la superficie del círculo por el método establecido hasta aqui: la solidez del cilindro recto por dos métodos; y los cálculos matemáticos evidentemente demostrados que comprenden la resolucion de la cuadratura y su complemento, con todas las precauciones que son consiguientes para su buen éxito; y las observaciones de comprobacion de mis cálculos, con que doy fin á la obra. Todo vá fundado y arreglado, con insercion de párrafos de autores clásicos de la facultad, observando el órden adoptado para los tratados de Matemáticas, á escepcion de las láminas porque no las considero necesarias: tanto porque hablo con profesores: cuanto porque aunque algunos de mis amados lectores no lo sean, (como las Matemáticas están tan propagadas) serán muy pocos los que ignoren la definicion de las voces técnicas, de que hago uso en la resolucion y demostraciones que comprende esta corta obra.

ADVERTENCIA ARITMETICA.

Sin embargo de que, por la razon que espreso en el prólogo, no hago esplicacion de las voces técnicas que juegan en esta obra; no obstante, me persuado debo de esplicar el preliminar aritmético siguiente.

Los números de muchas cifras, que se hallan en el discurso de esta corta obra (á escepcion de los decimales), van divididos de derecha á izquierda, en secciones de tres en tres cifras; cuya division la figura una coma puesta entre cada seccion, á la parte inferior del número; y en la parte superior, sobre la segunda coma, colocado un punto; sobre la cuarta dos puntos; sobre la sesta tres puntos &c. Las comas que se hallan solas, marcan los millares; un punto sobre una coma, los millones; dos puntos, los billones ó bicuentos; tres puntos, los trillones ó tricuentos &c.

Esta es la regla adoptada por Laborde para pronunciar un número escrito; cuyo método lo esplica bien en su tratado de Aritmética, dispuesto para el Colegio militar de Santiago: método seguramente apreciable; pues sin confundirse estos signos, con ninguno de la Aritmética, equivale á la acentuacion que se usa en la escritura para pronunciar con el verdadero sentido cualesquiera palabra escrita, sin necesidad de concluir oracion para conocerlo, ó interpretarlo. Asi pues dividido un número en los términos propuestos, por muchas é infinitas cifras que tenga, se lee con toda precision; porque á primera vista se conoce el lugar que ocupa cada una: y sin desvanecerse la cabeza llevándolo en la memoria, se les dá á todos el valor que tienen, sin esponerse á equivocaciones que acontecen muchas veces por no observar este método. Por esa razon lo observo yo para que no ofrezca duda, ni sirvan de obstáculo en la lectura de los números, los signos, que sin disputa facilitan su pronta y exacta pronunciacion.

OTRA DE LA MEDIDA LINEAL.

Para las medidas lineales, se usa de la vara de Burgos, que se divide en tres pies: el pie, en doce pulgadas: la pulgada, en doce líneas: y la linea, en doce puntos.

Seis pies de París ó de rey, hacen siete de Burgos ó castellanos; y en la misma proporcion están las pulgadas, las líneas, y los puntos lineales, entre sí.

RESOLUCION TEORICA,

CON APLICACION A LA PRACTICA,

DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO:

ó sea,

DESCUBRIMIENTO DEL MISTERIO DE LA CUADRATURA.

PRIMERA PARTE.

Artículo 1.° La resolucion de la cuadratura del círculo, no es ninguna paradoja: los datos que voy á presentar son fundados, y tan esplícitos y concisos, que de su exactitud no quedará duda alguna á los sublimes censores; pero antes de manifestarlos, me parece conveniente dar una idea de ciertos principios sentados por célebres autores matemáticos, para demostrar que mi pensamiento no es ninguna ilusion, sino una realidad matemática.

Art. 2.° La cuadratura del círculo segun la esplican los autores, consiste en hallar la razon exacta entre el diámetro, y la circunferencia; y el grande obstáculo que ha habido y hay para ello es, que no se ha conocido el verdadero medio de medir la línea curva hasta ahora; pues si se hubiese averiguado, no habria esa dificultad tan grande para encontrarla, ni habria tampoco la discordia que hay entre los mismos autores acerca de esta cuestion, como lo voy á poner de manifiesto insertando varios artículos alusivos al caso, de autores clásicos: tanto para que me sirvan de apoyo á mis argumentos, cuanto para que mis amados lectores aunque no tengan las obras á la vista, puedan calificarlos de buenos ó de malos, dándome la razon, ó negándomela (1).

Art. 3.º En la tercera edicion del compendio de Matemáticas puras y mistas de D. José Mariano Vallejo, hablando de la relacion que tiene el diámetro con la circunferencia, dice así en el artículo »347. Pero Arquimédes halló que dicha relacion del diámetro á la circunferencia era la de 7:22; Pedro Mecio halló la de 113:355; y la que nosotros hemos »calculado por procedimientos geométricos en »nuestro tratado elemental (tomo 1.º §. 505) »es la de 1, á 3,14159265358979324; y por

---

(1). La cuadratura del círculo segun la han concebido hasta aqui, es un misterio que descubriré de una manera indudable.

»las séries (tomo 11 del mismo tratado ha»ciendo uso de la fórmula del §. 647) hemos »hallado que la espresada relacion es la de »1, á 3,1415926535897932384626433832795028; (*).“ Y concluye formando la proporcion tomando por diámetro la unidad, y por la circunferencia 3'14159 &c. En la llamada que hace al final de las treinta y cuatro cifras decimales dice que »En un manuscrito que se halla en la bi»blioteca de Ratelis en Oxfor hay una relacion »del diámetro á la circunferencia con 155 gua»rismos decimales.“

Art. 4.° En el 2.° tomo de la quinta impresion del tratado de elementos de Aritmética, Algebra, y Geometría de D. Juan Justo García, Catedrático de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, y Diputado á Córtes en los años de 20 y 21, hablando tambien de la relacion del diámetro á la circunferencia, en el artículo 167, su párrafo 2.° dice asi: »Pero hasta ahora está por averiguar la cir»cunferencia ó proporcion de línea recta que »exactamente corresponde á cierto diámetro, »ó la razon del diámetro á la circunferencia; »teniéndose ya cuasi por imposible averiguar »la que se llama (180) cuadratura del círculo. »Sin embargo, son suficientísimas para la prác»tica las razones 7 : 22 que tiene el diámetro

»á la circunferencia segun Arquimédes en la »que sale un solo pie de menos en un círculo »de 800 pies; 113 : 355 que halló Mecio, y »que da un pie de falta en una circunferencia »de 1.000000, y 1 : 3,1415926535897932 &c. »hasta ciento veinte y siete notas decimales.“

Art. 5.° En los elementos de Matemáticas de D. Benito Bails Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando, en el primer tomo de la 2.ª edicion corregida y añadida, esplicando tambien las proporciones de los diámetros á las circunferencias, en el artículo 504, 2.° párrafo, dice asi: »No se co»noce cabalmente la razon del diámetro á la »circunferencia; pero se conoce un valor tan »aproximado, que una razon mas cabal puede »considerarse como de todo punto inútil en la »práctica.=Pedro Mecio halló, que la razon »del diámetro á la circunferencia es la de »113: 355. Pero nosotros probaremos á su »tiempo que el rádio es á la semicircunferen»cia, y por consiguiente el diámetro á la cir»cunferencia :: 1 : 3, 1415926535897932, cu»ya aproximacion han continuado algunos hasta »ciento veinte y siete decimales.=Muchos si»glos antes ya habia hallado Arquimédes, que »un círculo cuyo diámetro fuese de 7 pies, »tendria 22 de circunferencia con muy poca

»diferencia.“ Y sigue entablando la proporcion de 7 : 22 : : &c.

Art. 6.° Por el contenido de los artículos 3, 4, y 5, se vé, que los ilustres profesores Vallejo, García y Bails, convienen en dos cosas esenciales, que son: la una en que aun no se ha averiguado la razon geométrica entre el diámetro y la circunferencia: y la otra, en que todos están conformes en la discordia que todos ellos han tenido en la indagacion de esa decantada razon. Luego: es preciso se me conceda, que esa conviccion y esa divergencia, dimana de no haberse averiguado el modo de hallarla; ó lo que es lo mismo el modo de medir la circunferencia; pues si se supiese con toda certeza, no habria esa diferencia de unos á otros, y aun en unos mismos (Art. 3.); todos obtendrian el mismo resultado, ya constase de unidades enteras ó no, el valor de la circunferencia. Me fundo para espresarme en estos términos, en que, una suma, una resta, una multiplicacion, ó una particion, sea de números enteros, ó de enteros y quebrados, la consiguen lo mismo unos aritméticos que otros; presentando todos ellos igual resultado de cada operacion respectiva. Y si á estos mismos se les dan tres términos de una proporcion geométrica, buscan y hallan el cuarto término, totalmente igual unos que otros, porque está sugeto á reglas fijas.

Si á los geómetras se les manda hallar la superficie de un cuadrilátero, sea trapecio, cuadrado, paralelógramo &c.: todos dan por resultado el mismo número de unidades cuadradas que contiene el espacio de cada respectiva figura. Y si igualmente se les encomienda la averiguacion de la solidez de un prisma, sea paralelepípedo, ó cubo: todos encuentran el mismo volúmen; esto es, el mismo número de unidades cúbicas que contienen aquellos cuerpos.

Si á los trigonómetras, se les encarga la resolucion de un triángulo rectilíneo; lo resuelven igualmente unos que otros, ya sea en el valor de sus ángulos, ya en el de sus lados.

Los geógrafos, al construir una carta: sitúan en ella los lugares, á los mismos grados de latitud y longitud, que lo están en el globo terráqueo; y trazan en ella los meridianos y paralelos que comprende dicha carta, lo mismo unos que otros.

Todo cuanto dejo espresado en estos cuatro párrafos, se ejecuta por los facultativos con aquella exactitud que permiten las reglas matemáticas de sus respectivos tratados, porque hay bases conocidas para ello; y esto es lo que me hace persuadir mas y mas, de lo que manifiesto en este artículo; esto es, de que aun no se ha descubierto el verdadero medio de medir la circunferencia: lo que los mismos autores que cito, y otros que citan ellos, confiesan con su discordia: conformándose con decir que sus cálculos son aproximados, no exactos.

Art. 7.º Espero de la noble consideracion del público ilustrado, me dispensará mis impertinencias; pues todas cuantas reflexiones haga para demostrar ciertos errores padecidos hasta aqui, todas serán pocas; porque al fin me pongo, no solo al frente de aquellos ilustres profesores que dejo mencionados; sino que, me espongo á la censura de la ilustracion Europea. Y en este concepto llamo la atencion de mis amados lectores, acerca de lo que el autor García (Art. 4) manifiesta; dice que la razon 7:22, que tiene el diámetro y la circunferencia segun Arquimédes, sale un solo pie de menos en un círculo de 800 pies; y refiriéndose á la razon 113:355 de Pedro Mecio, dice que dá un pie de falta en la circunferencia de 1000000. Yo respeto su carácter, ciencia y opinion; pero no puedo menos de preguntarle ¿cómo averiguó ese círculo de 800 pies, para conocer esa diferencia? Y ¿cómo averiguó tambien la circunferencia del 1000000 para conocer esa falta? esto no puedo comprenderlo, y por eso me atrevo á preguntarlo; porque si efectivamente halló el valor exacto de un círculo de 800 pies, y el valor de la circunferencia de un millon, habia logrado cuanto podia apetecer en este caso. Yo me persuado, y todos convendrán conmigo, que la diferencia de unas razones á otras, sea por defecto, ó por esceso, puede conocerse comparándolas entre sí; mas no puede conocerse la diferencia que hay entre estas razones, y la verdadera, porque aun no se conoce, ni se sabe como hallarla. Sin embargo, el público mirará esta observacion con la meditacion debida, y la juzgará con la rectitud que exigen las reglas matemáticas.

No se crea que el esforzar este fundado comentario, es con objeto de ofender á los sublimes talentos, escritores matemáticos, no: respeto las cenizas de los que en paz descansan, y las venerables canas, ciencia y opinion de los que existen. Mi objeto no es otro que revelar un secreto matemático que hasta aqui ha sido desconocido; pero como está envuelto en diferentes cálculos, me es forzoso fundar con datos positivos las razones que tenga, para demostrarlo con la evidencia necesaria para convencimiento del público; y para demostrar la razon en que me fundo para haber hecho la observacion que hice con referencia al autor García, voy á sentar el teorema siguiente, sin perjuicio de otros varios.

Art. 8º Teorema. *La circunferencia del círculo, no puede medirse materialmente como las líneas rectas; cálculos matemáticos la determinarán.*

1.ª Demostracion. Para medir ó hallar el valor de la circunferencia en unidades liniales, forzoso es, (ademas de otros datos que manifestaré), conocer el diámetro del círculo; pues como línea recta se puede medir exactamente, lo que no puede verificarse con la circunferencia, no valiéndose de consecuencias exactas, como las que nos ofrece la observacion de los ángulos de un triángulo (1), y otros casos semejantes; porque como la circunferencia tiene aquella direccion circular, no es posible hallar el valor de su longitud, no siendo por medio de cálculos matemáticos. Esto se funda: en que para medirla con compás, ú otro instrumento matemático, es preciso dividirla en pequeñas porciones, que cada una

(1). Los tres ángulos de un triángulo valen juntos 180º; por consiguiente conociendo dos de ellos, se halla el valor del tercero, restando del valor de los tres, el valor de los dos observados.

de ellas es un arco; y por consiguiente, la medida hecha de esta manera, seria la de otras tantas cuerdas, como arcos formasen las divisiones de aquellas dimensiones en que fuese dividida: y nunca resultaria la mensura de la circunferencia; porque como todo arco, es mayor que la cuerda que le subtende: y la medida hecha no es de los arcos, sino de las cuerdas de que están subtendidos: porque ni la cadena tirante, ni el compás se amoldan á su curvidad, es evidente que no podrá resultar la medida de la circunferencia compuesta de la suma de todos aquellos arcos en que fue subdividida. Luego en este primer caso, ya no es practicable la mensura material de la circunferencia.

2.ª Demostracion. Si con una abertura de compás perceptible, resulta el error conocido, que queda esplicado en la demostracion anterior, siendo demasiado diminuta ó imperceptible, es mucho mas impracticable: porque las mismas puntas del compás por finas que estén, absorverán parte de la longitud de la circunferencia, ó la aumentarán; porque por delicada que sea la línea que la marque, y por perspicaz que sea la vista, es muy difícil fijar el compás donde corresponde, para obtener un resultado exacto en operacion tan espuesta: lo cual se concebirá mejor con la esplicacion que sigue.

Las líneas geométricas, solo constan de longitud: carecen de latitud y de espesor, ya su direccion sea recta, ya sea curva; que es decir, que las líneas geométricas aunque perfectas, son invisibles (1); pero las trazadas sobre un papel ú otro plano, por finas que sean, se les percibe alguna latitud, que es lo que las hace visibles; y este es otro fuerte obstáculo que tiene la medida material de la circunferencia; pues si las puntas del compás marchan la una por su convexidad, y la otra por su concavidad, forzoso es el aumento de su longitud: porque en su aplicacion forman una línea angulosa, que es mayor que la circunferencia, aunque á la simple vista sea imperceptible. Si las puntas del compás marchan ambas por su concavidad, absorven parte de su longitud, y su medida resultará escasa. Y si marchasen por su convexidad, ademas de estar este caso comprendido en la 1.ª demostrácion, podria resultar mayor; porque no puede dirigirse

---

(1). Sin embargo de que ningun autor califica de invisibles las líneas geométricas, me atrevo yo á calificarlas; porque lo que no tiene espacio, carece de color, y lo que no tiene color no es visible. Las líneas geométricas son imaginadas.

una visual, como puede dirigirse en las líneas rectas; y es totalmente imposible que en una línea curva, la vista sola sin auxilio alguno, lleve las puntas del compás al lugar que les corresponde para obtener un resultado tan exacto como se exige. Luego en este segundo caso tampoco es practicable la mensura material de la circunferencia.

3.ª Demostracion. Para mayor corroboracion de cuanto llevo demostrado, manifestaré las circunstancias que concurren á la recta para su exacta medida, y las que concurren á la curva para su imposibilidad. Las líneas geométricas ya he dicho en la demostracion anterior, que aunque perfectas, son invisibles; y aunque las rectas trazadas se hacen visibles, se pueden medir con toda exactitud, porque hay la ventaja de que el compás ó la cadena pueden marchar por el medio de la línea material, que es donde está la línea geométrica. Digo esto con toda seguridad; porque si se opera en el papel, cualesquiera recta se puede medir con una sola abertura de compás, fijando las dos puntas en las estremidades de ella, que es donde residen los puntos geométricos (1); y

(1). El punto geométrico, no tiene longitud, latitud, ni espesor: es la estremidad de la línea geométrica.

en el terreno, con el auxilio de piquetes, jalones, y banderolas, se traza una línea recta material, en el medio de la cual está la geométrica; por consiguiente su medida puede ser exactísima; mas no sucede asi con la curva: pues si la circunferencia como línea geométrica, es invisible, y su configuracion no permite dirigir la visual, de que es susceptible la recta ¿cómo es posible sin direccion marcada, aplicarle la medida con exactitud? no es fácil: y no solamente es difícil, sino que es totalmente imposible; cuya verdad ninguno podrá negarme.

4.ª Demostracion. Podrá arguírseme de que solo hablo de las circunferencias de los círculos trazados en planos, y que no hago mérito de otras circunferencias, como son la de las bases de los cilindros rectos, las cuales pueden medirse de otro modo. Efectivamente pueden medirse de otra manera que las señaladas en las demostraciones anteriores; porque como la circunferencia del círculo, es el perímetro de él: ó lo que es lo mismo, es la estremidad en derredor del mismo círculo; en la base de un cilindro recto, esa estremidad, ese perímetro, esa circunferencia, está en la convexidad del mismo cilindro; de consiguiente haciendo girar al cilindro sobre su eje horizontal, se puede marcar direccion á la circunferencia de un círculo: mas no puede medirse exactamente porque no lo permite su configuracion; pues aunque puede llevarse el compás en aquella direccion, y puede ceñirse la cadena á su curvidad, no por eso se crea puede hallarse la longitud de la circunferencia por este medio, ni aun con mediana exactitud; porque esta medida está sugeta á errores semejantes á los que dejo demostrados: los cuales voy á esplicar. Si estando el cilindro recto con su eje horizontal, se pretendiese medir con compás la circunferencia del círculo de su base, su medida entiéndase que es inexacta, porque la abertura del mismo compás absorve la convexidad de la circunferencia, y de consiguiente queda parte de su longitud oculta en el ángulo del instrumento: cuya verdad es fácil concebirla. Si se hace uso de la cadena, esta debe ser de eslabones de corta longitud, para lograr se ciña á la convexidad del cilindro; y aun siendo pequeños, hay el inconveniente de que ceñida la cadena á la convexidad del cilindro, la parte convexa de la cadena se estira estraordinariamente, en cuanto la parte cóncava, se encoge para amoldarse á aquella curvidad. La parte cóncava de la cadena, es la que está ceñida á la convexidad del cilindro, que es la que hace la medida de la circunferencia; mas ahora pregunto: ¿La cadena por delgada y fina que sea, no tiene espesor? se me concederá que si, que lo tiene: luego cuando está ceñida al cilindro, forma una corona, y por consiguiente dos circunferencias desiguales: la mayor por la convexidad, y la menor por su concavidad: luego ¿cómo se ha de conciliar esa exactitud en la medida, cuando estando ceñida al cilindro, presenta dos circunferencias desiguales, y estando estendida, presenta una sola línea recta material de igual longitud? no es fácil conciliar las cosas cuando son inasequibles. Si con la cadena acontece ese error: con un hilo fino, ó con un cabello, acontecerá otro mayor: ya por lo demostrado con referencia á la cadena: ya por su flexibilidad: ya porque estan sugetos á las alteraciones de la temperatura en un solo instante; y ya porque por estas razones poderosas, el hombre no es capaz de calcular exactamente el grado de tirantez del hilo ó cabello cuando están ceñidos á la convexidad del cilindro, para en aquel mismo grado de longitud aplicarlos á la medida; por consiguiente ofrece las mismas inexactitudes. Luego: ni haciendo uso de circunferencias de círculos trazados en planos: ni de las de círculos de bases de cilindros rectos, es practicable la medida material de la circunferencia: luego, creo haber demostrado evidentemente la imposibilidad de la medida material de la circunferencia, que es el testo del teorema sentado, que era lo que pretendia demostrar. (1)

Art. 9.° En el artículo 8, y demostraciones que le siguen, patentizo la imposibilidad de la medida material de la circunferencia del círculo; fundados en esta imposibilidad los matemáticos, se valieron de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, para aproximarse á la circunferencia: acerca de lo cual tengo que hacer muchas observaciones de grande importancia; pero antes de hacerlas, voy á insertar algunos párrafos del tratado elemental de Vallejo, á fin de que sirvan de apoyo á mis razones, si son como considero demostrativas.

Art. 10. En el tomo 1.° parte segunda, tercera edicion del tratado elemental de Matemáticas de Don José Mariano Vallejo, en la página 162, hablando de la inscricion y circunscricion de los polígonos de igual número de lados dice asi el artículo »503. Teorema. »Si en un círculo se inscribe y circunscribe

---

(1). Por este método práctico, el autor Garcia no pudo averiguar el círculo de 800 pies, ni la circunferencia del millon; *véase el artículo* 7.

»un polígono de un mismo número de lados, »y despues se inscriben y circunscriben otros »de duplo número de lados, y asi sucesiva- »mente, la diferencia entre el perímetro del »circunscrito y el del inscrito, llegará á ser »menor que cualesquier cantidad dada por pe- »queña que sea.=Dem. Por ser semejantes los »polígonos regulares de un mismo número de »lados (481), sus perímetros serán proporcio- »nales (496 Cor.) con sus rádios rectos; luego »si al perímetro del circunscrito le llamamos »P; R á su rádio recto, que es el rádio del »círculo, al perímetro del inscrito p; y r á su »rádio recto, tendremos P : p :: R : r, de don- »de sale $P-p=\frac{P\,(R-r)}{R}$; pero R—r, que entra »como factor en el valor de P—p, es la sági- »ta (469) del polígono inscrito, la cual va »siendo mas de dos veces menor al paso que se »inscriben polígonos de duplo número de lados »(502); luego el producto en que entra (325 »Cor. 3.°), y por consiguiente la diferencia »P—p de los perímetros, llegará á ser menor »que cualesquier cantidad dada por pequeña »que sea. L. Q. D. D.=Cor. De aqui se infie- »re que si la diferencia entre el perímetro del »polígono circunscrito y el del inscrito, puede »ser menor que cualesquier cantidad dada, con

»mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un »polígono al círculo en que la diferencia entre »el perímetro de uno ú otro y la circunferencia, »sea menor que cualesquier cantidad dada por »pequeña que sea; pues como la circunferencia »(459) es mayor que el perímetro del polígo- »no inscrito, y menor que el del circunscrito, »al acercarse estos perímetros el uno al otro, »se acercarán con mas razon á la circunferen- »cia; y si la diferencia entre dichos perímetros »podia ser menor que cualquier cantidad da- »da, con mas razon la diferencia entre el pe- »rímetro de uno de los polígonos y la circun- »ferencia llegará á ser menor que cualquier »cantidad dada por pequeña que sea.“ Aqui concluye el artículo 503, y sigue el 504 que comprende el teorema: »Las circunferencias de »los círculos son entre sí como sus rádios ó »diámetros.“ Sigue la demostracion de dicho teorema, y concluyendo con un corolario; en la página 164, artículo 505 presenta el problema del modo de »Hallar la relacion aproxi- »mada del diámetro á la circunferencia“ (1).

(1). Llamo la atencion de mis amados lectores, á fin de que no se olviden de que los autores estaban bien penetrados de que no era posible hallar exactamente la relacion del diámetro con la circunferencia por ese método, por cuanto dicen »Hallar la relacion aproximada.“ *Véase art.* 58.

El cual resuelve con el exágono inscrito, y exágono circunscrito figurados en su mente, inscribiendo y circunscribiendo polígonos de duplo número de lados de igual especie que aquellos.

Art. 11. Manifestado en el artículo anterior, el medio de que se han valido los autores para hallar el valor aproximado de la circunferencia; me hallo en el caso de esplicar y definir lo que es un polígono regular, para manifestar las observaciones que ofrecí en mi artículo 9; y en seguida demostrar todo lo que es del caso, para el objeto que me propongo.

Definicion del polígono regular.

Art. 12. Por polígono regular se entiende una figura de lados totalmente iguales, equidistantes en sus estremidades, del centro del círculo que puede circunscribirse á él, que es el centro del mismo polígono: se compone pues el polígono regular (á escepcion del exágono) de un número de triángulos isósceles (1), igual al número de lados de dicho polígono; pero estos triángulos que son formados por los lados del polígono y los rádios del cír-

(1) Los triángulos del exágono, son equiláteros.

culo circunscrito que tocan en las estremidades de dichos lados, son perfectos, y totalmente iguales: todos tocan con el vértice del ángulo agudo en el centro del círculo inscrito ó circunscrito, ó sea del mismo polígono; si tienen alguna imperfeccion en cualesquiera de sus lados, ó de sus ángulos, ó carecen de alguna de las circunstancias espresadas, ya dejan de ser perfectos: por consiguiente, no siendo perfectos los triángulos y totalmente iguales, no puede ser regular el polígono; lo cual está al alcance de todos.

De la superficie del polígono regular.

Art. 13. La superficie del polígono regular, se halla multiplicando su perímetro por la mitad de la apotéma; porque como el polígono regular, se compone de tantos triángulos isósceles (Art. 12) como lados tiene el polígono: y las apotémas son totalmente iguales en todos los triángulos: es igual hallar la superficie de cada triángulo por separado, y luego sumar la de todos ellos, que hallarla de una vez con sola una operacion numérica. En este principio, tenemos que asentir á lo demostrado por los autores, porque seguramente es un procedimiento exactísimo, sugeto á reglas positivas; pero no por eso nos hemos de obcecar tanto, que confundamos los polígonos imperfectos con los perfectos; pues si bien la circunferencia (1) se puede considerar como el perímetro de un polígono de infinitos lados; estos deben de ser de una estension determinada: pues de lo contrario, resulta un grande error como demostraré en los artículos de esta primera parte.

En el artículo 12, he esplicado las circunstancias que deben concurrir al polígono, para que merezca la cualidad de regular; ahora voy á demostrar que un polígono de infinito número de lados, puede ser perfecto, y puede ser imperfecto: en el primer caso será regular; pero en el segundo, no podrá serlo de ninguna manera.

De los lados que los autores dieron al polígono para aproximarse á la circunferencia.

Art. 14. En el mismo tratado elemental de Matemáticas de Vallejo, de que hago méri-

---

(1). Los autores consideran á la circunferencia del círculo, como el perímetro de un polígono de infinito número de lados; y por eso establecieron que el producto de la circunferencia por la mitad del rádio, es la superficie del círculo.

to en el artículo 10; en el tomo 1.º parte 2.ª artículo 505, se halla una tabla de fórmulas que versan sobre la razon geométrica del diámetro á la circunferencia, buscada por medio de la unidad simple, con un epígrafe que dice asi »Párrafo 505.“ En dicha tabla le dá su autor al polígono »3221225472 lados“ (1) lo cual transcribo aqui á fin de tener este dato mas á la vista para la demostracion del teorema siguiente ofrecido en el artículo 13; y para los casos que sea necesario.

Art. 15. Teorema. El polígono de infinito número de lados, puede ser perfecto, ó imperfecto: y será regular en el primer caso, é irregular en el segundo.

Demostracion 1.ª Para convencimiento de que el polígono de infinitos lados, puede ser perfecto ó imperfecto: fígese la consideracion en que los círculos no son iguales, esto es, que son de muchos tamaños: unos pequeños, otros medianos, otros grandes, y otros de un espacio inmenso; y fígese tambien (Art. 14) en los millones de lados que Vallejo y otros autores le han dado al polígono para toda clase de círculos; pues no hacen distincion alguna, y

(1) Estos lados, aunque los autores no hacen mérito de su estension; son menores que cualesquiera cantidad dada. *Véase art. 15, advertencia esencial.*

establecen ese método como regla general para todos. Que las circunferencias de los círculos estén en relacion con sus diámetros, ó estos con aquellas, no tiene cuenta con los lados del polígono; pues los lados es una cosa, y la circunferencia es otra, muy distintas una de otra. Los círculos pueden presentarse de un espacio pequeño, como dejo dicho: y pueden presentarse de un espacio inmensísimo: si en alguno de esta grande magnitud, se inscribiese ó circunscribiese el polígono de 3221225472 lados (Art. 14); el polígono sería perfecto, y por consiguiente regular, porque reuniria todas las circunstancias que debe tener (Art. 12) para serlo; pero en este caso, ya no se confunde su perímetro con la circunferencia, ni la apotéma con el rádio; y no puede regir el método de hallar la superficie del círculo, multiplicando su circunferencia por la mitad del rádio: el producto del perímetro por la mitad de la apotéma, será la superficie del polígono; y para obtener la del círculo, habría que añadir la de todos los segmentos correspondientes al número de lados del polígono inscrito: lo que sin infraccion de las reglas matemáticas no podrá negárseme. Tengo pues demostrado el caso en que puede ser perfecto y regular, el polígono de infinito número de lados; ahora me resta demostrar cuando es imperfecto, y por consecuencia irregular.

Demostracion 2.ª El grande objeto que se llevaron los autores matemáticos, en buscar un polígono de tan infinito número de lados (Art. 14), ha sido el que cuanto mayor fuese el número de lados, menor tenia que ser la estension de cada uno (Art. 10); y cuanto mas pequeños fuesen, mas fácilmente se confundiría su perímetro con la circunferencia. Es una verdad innegable, que cuanto mas pequeños sean los lados de un polígono, mas se aproximan á la circunferencia; pero tan diminutos los quisieron hacer, que los han hecho insignificantes; pues los hicieron mas pequeños que cualesquiera cantidad dada por pequeña que sea (Art. 10) (1); y siendo mas pequeños que cualesquiera cantidad dada: el polígono de tantos millones de lados (Art. 14), no puede acomodarse á todos los círculos con el mismo éxito. Lo primero, porque ya en la demostracion anterior hago ver, que siendo tan crecido el número de lados, pueden ser estos de grande longitud; y de consiguiente cuanto mayores,

(1). Llamo la atencion de las Academias en este particular, porque si bien los autores no hicieron mérito de su estension, el resultado es que los hicieron insignificantes. *Véase la advertencia esencial de este artículo.*

mas se separan de la circunferencia del círculo. Y lo segundo, porque si haciendo uso de círculos de inmenso espacio, no rige esa regla, tampoco puede regir en círculos infinitamente mas pequeños que aquellos, por razones opuestas; pues asi como en círculos de grande espacio, se puede inscribir y circunscribir el polígono de tantos millones de lados, y quedar perfecto, y por esta razon regular; en un círculo pequeño, no puede inscribirse ni circunscribirse ese polígono (Art. 14), sin que sea una confusion; y por esta confusion, imperfecto é irregular: tal es el círculo de que voy á tratar.

Partiendo del principio sentado por los autores (Art. 10) de que inscribiendo y circunscribiendo polígonos de duplo número de lados, la diferencia entre estos y la circunferencia llegará á ser menor que cualesquiera cantidad dada (1): debo de suponer que el punto lineal será demasiado grande para un lado del polígono propuesto (Art. 14); mas sin embargo, como el punto lineal, es la medida mas pequeña que conocemos para las longitudes, voy á hacer uso de ella en esta ocasion porque es la

---

(1). Véase la advertencia esencial, que está al fin de este artículo.

mas á propósito para amoldarse á la curvidad de la circunferencia; cualesquiera otra que sea mayor, se opondrá á lo demostrado (Art. 8. Demostraciones 1.ª, 2.ª, 3.ª, y 4.ª). Luego si los 3221225472 lados (Art. 14) que dan al polígono, los consideramos de la estension de un punto lineal cada uno; podremos asegurar, que ese número de lados nominales es la misma circunferencia del círculo; pues no creo se pueda presentar polígono de lados mas á propósito para que su perímetro se confunda con la circunferencia, sin oponerme en cosa alguna á lo que acerca del particular dicen los autores (Art. 10): antes todo lo contrario; doy al lado del polígono, una estension material conocida, mayor que la que ellos le dan, que no le dan ninguna. Teniendo pues ese dilatado número de lados del polígono, por la verdadera circunferencia; haciendo uso de la razon geométrica 7:22 de Arquimédes, corresponderá á un diámetro de 1,024,935,377 puntos lineales $\frac{5}{11}$ de otro (1). Ahora bien: en el mismo plano que consideramos el círculo anterior (que denominaremos 1.º ó mayor), imagine-

(1). Téngase presente la advertencia aritmética que está á continuacion del Prólogo, á fin de no incurrir en algun error en la lectura de los números enteros de muchas cifras.

mos otro círculo concéntrico á él, de la mitad de su diámetro; y en este concepto le corresponderá 512,467,688 puntos lineales $\frac{8}{11}$ de otro: y de circunferencia tendrá 1,610,612,736 puntos; que es decir mitad de la circunferencia del círculo 1.º ó mayor; por lo que, los dos rádios que con el lado del polígono forman el triángulo, pasan por el espacio de medio punto en la circunferencia de este segundo círculo; y aunque las líneas geométricas (Art. 8. Dem. 2.ª punto 2.º) no ocupan ni latitud, ni espesor; no obstante, al espacio del ángulo, le pertenece latitud; y siendo como es medio punto lineal una estension insignificante, irrealizable su medida materialmente, podremos decir que allí se encuentran las líneas, esto es los rádios que forman los ángulos agudos de los triángulos: y en lugar de llegar al centro, vemos se desvian de él los vértices de muchos ángulos; de lo que emana la imperfeccion de los triángulos (Art. 12) y no puede ser regular el polígono. Si imaginamos otro tercer círculo concéntrico á los dos anteriores, de la mitad del rádio que el segundo, le corresponderá 256,233,844 puntos lineales $\frac{4}{11}$ de otro, de diámetro: y de circunferencia 805,306,368 puntos; que es la cuarta parte de los lados del polígono en la circunferencia del círculo mayor ó primero; que es decir, que por un punto de la circunferencia del tercer círculo, tienen que pasar cuatro puntos, ó lados del polígono de la circunferencia del primero: ó lo que es lo mismo, que por la cuarta parte de un punto tiene que pasar un punto entero. Si imaginamos otro cuarto círculo concéntrico á los tres primeros, de la mitad del diámetro que el tercero, le corresponderá 128,116,922 puntos lineales $\frac{2}{11}$ de otro: y de circunferencia 402,653,184 puntos, que es la octava parte de la circunferencia del círculo mayor: de consiguiente á cada punto de la circunferencia de este cuarto círculo, corresponden ocho puntos de la del primero ó mayor; por lo que, ó pasan ocho lados del polígono por un punto en la circunferencia de este cuarto círculo, ó pasa un lado, ó lo que es lo mismo un punto, por la octava parte de un punto en dicha circunferencia. Si imaginamos el quinto círculo, concéntrico á los cuatro anteriores, y de la mitad del rádio que el cuarto le corresponderá de diámetro 64,058,461 puntos lineales $\frac{1}{11}$ de otro: y de circunferencia 201,326,592 puntos; que es lo mismo que la diez y seis ava parte de la circunferencia del primer círculo, donde se imaginó el polígono: ahora bien, por cada punto de la circunferencia de este quinto círculo, tienen que pasar diez y seis del polígono: ó viceversa, un lado del polígono pasa por la diez y seis ava parte de un punto en la circunferencia de este quinto círculo. Si imaginamos otro sesto círculo, concéntrico á los cinco anteriores, y de la mitad del diámetro del quinto, le corresponderá 32,029,230 puntos lineales $\frac{6}{11}$ de otro: y de circunferencia 100,663,296 puntos; que es decir la treinta y dos ava parte de la circunferencia del primer círculo: por consiguiente, por cada punto de la circunferencia del sesto círculo, tienen que pasar treinta y dos puntos ó lados del polígono; ó lo que es lo mismo, un lado ó un punto del primer círculo, tiene que pasar por la treinta y dos ava parte de otro punto en la circunferencia del espresado sesto círculo. Si imaginamos otro séptimo círculo, concéntrico á los seis anteriores, y de la mitad del rádio que el sesto, tendrá de diámetro 16,014,615 puntos lineales $\frac{3}{11}$ de otro: y de circunferencia 50,331,648 puntos; que es decir la sesenta y cuatro ava parte de la circunferencia del círculo mayor; luego, por un punto de la circunferencia de este séptimo círculo, tienen que pasar sesenta y cuatro puntos, ó lados del polígono imaginado en el círculo mayor. Y últimamente: si imaginamos el octavo círculo concéntrico á los siete anteriores, y de la mitad del diámetro del séptimo, le corresponderá 8,007,307 puntos lineales $\frac{7}{11}$ de otro: y de circunferencia 25,165,824 puntos; que es decir, la ciento veinte y ocho ava parte de la circunferencia del círculo mayor considerada como el perímetro del polígono de 3221225472 lados; por lo que ciento veinte y ocho lados del polígono, pasan en la circunferencia del octavo círculo, por un solo punto, ó estension de un lado del polígono; ó viceversa un lado del polígono, que es de la longitud de un punto lineal, tiene que pasar por la ciento veinte y ocho ava parte de otro, en la circunferencia de este octavo círculo; lo que es materia imposible. Luego: si al pasar los rádios por la circunferencia del segundo círculo marchando hácia el centro, se encuentran en dicha curva porque solo tiene medio punto el espacio por donde pasa el ángulo ¿cómo podrán pasar por la cuarta parte en la del tercer círculo? Y teniendo ese obstáculo en las circunferencias del segundo y tercer círculo ¿cómo podrán pasar por la octava parte, en la del cuarto? ¿por la diez y seis ava parte, en la del quinto? ¿por la treinta y dos ava parte, en la del sesto? ¿por la sesenta y cuatro ava parte, en la del séptimo? Y ¿por la ciento veinte y ocho ava parte, en la circunferencia del octavo círculo? no es posible. Los rádios oblicuos del polígono que con sus lados forman los triángulos, marchando desde su perímetro hácia el centro, se encuentran en la circunferencia del segundo círculo, y se confunden; y si en esta línea del segundo no se confundiesen exactamente, se confundirán por necesidad en la circunferencia del tercero, ó en todo caso en la del cuarto: marchando desde esta última curva cada dos ó tres rádios convertidos en una sola línea geométrica que no ocupa mas que longitud; y á medida que se aproximan al centro, se encuentran y confunden muchos mas rádios segun lo manifiestan los círculos imaginados concéntricos é interiores, hasta el estremo de confundirse 128 ángulos en un solo punto lineal de la circunferencia del octavo círculo; mediando aun grande espacio desde alli al centro; por lo que pueden imaginarse otros varios círculos concéntricos á los ocho anteriores: confundiéndose en el noveno, 256 ángulos: en el décimo, 512 ángulos; y en el undécimo, 1024 ángulos. Luego: desde la circunferencia del cuarto círculo marchando hácia el centro, se repite una superficie que no existe haciendo uso del método establecido para hallar la superficie del círculo, considerando la circunferencia como el perímetro de un polígono de infinito número de lados: luego, hay imperfeccion en los triángulos, y por consiguiente en el polígono (Art. 12): luego no puede ser regular en este caso el polígono de tantos millones de lados: luego, puede ser perfecto (Art. 15, Dem. 1.ª), y puede ser imperfecto, que era lo que pretendia demostrar.

Corolario 1.° De lo dicho en la demostracion anterior se infiere, que si bien cuanto mas pequeños sean los lados de un polígono, mas fácilmente se aproxima su perímetro á la circunferencia; vemos tambien, que los vértices de los ángulos agudos de los triángulos, que deben tocar en el centro, se desvian de él en grande número, y no hay aquella perfeccion que corresponde al polígono regular (Art. 12). Luego, los lados del polígono deben de tener estension determinada, para que su perímetro pueda aproximarse á la circunferencia del círculo.

Corolario 2.° Luego: de lo demostrado,

y esplicado en el corolario 1.°, se deduce exactamente, que el círculo no puede confundirse con el polígono inscrito ó circunscrito de tantos millones de lados para hallar su superficie, mientras no se conozca el valor de la circunferencia del círculo.

Advertencia esencial.

No dejará de haber algunos que digan, que la estension que doy al lado del polígono (Art. 15, Demostracion 2.ª) para probar su imperfeccion, que es demasiado corta: convengo que es bastante limitada; pero para desvanecer esa ilusion á los que tengan esa indiscreccion, les ruego se sirvan manifestar ¿Qué longitud es, la que los autores han dado al lado del polígono de 3221225472 lados, habiendo tomado por rádio un mónstruo matemático? (1). Cuando á esta pregunta me satisfagan, será admisible su ojeccion; pero en cuanto, será inadmisible: tanto por lo demostrado, cuanto por lo que voy á demostrar.

Vallejo dice (Art. 10): »Que inscribiendo y circunscribiendo polígonos de duplo número de

---

(1). Llamo mónstruo matemático á la unidad simple, porque no es otra cosa en el cálculo de la circunferencia.

lados, se acercan tanto los perímetros el uno al otro, que la diferencia entre ellos, es menor que cualesquiera cantidad dada; y que si al acercarse los perímetros el uno al otro, la diferencia es menor que cualesquiera cantidad dada: que con mayor razon la diferencia entre los perímetros y la circunferencia, será menor que cualesquiera cantidad dada por pequeña que sea.“ Es una verdad, que acercándose cual se persuade el autor, asi los perímetros el uno al otro, como estos con la circunferencia, la diferencia debe ser muy insignificante; pero este caso es muy dudoso (1), y aunque no lo fuera, entiéndase que esa diferencia no es esclusiva para los perímetros: pues tiene alusion y exacta aplicacion á los lados del polígono que se imagina refundido en la circunferencia; porque como los lados del inscrito, son cuerdas que son mas pequeñas que los arcos á que corresponden, y los lados del circunscrito son mayores que dichos arcos: es claro y terminante, que para acercarse los perímetros el uno al otro, y coincidir con la circunferencia, tienen que ser insignificantes los lados del polígono refundido; porque siendo los lados del inscrito mas cortos que los arcos, y los lados del

(1). Véase art. 16. Observacion.

circunscrito mayores que dichos arcos (1): es indisputable que para acercarse y ajustarse á ellos, en fuerza de inscriciones y circunscriciones, tiene que reducirse á la menor espresion el valor de cada uno de los lados: porque tienen por necesidad que destruirse los de un polígono con los del otro de tal manera, que desaparecen totalmente; ó de lo contrario no podrian coincidir con la circunferencia; esto es, no podrian los perímetros transformarse y convertirse en una circunferencia perfecta, como especiosamente se nos dice (2). Luego, si la diferencia entre los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito al círculo, y la circunferencia, es menor que cualesquiera cantidad dada por pequeña que sea: la diferencia entre los lados de un polígono y los lados del otro, será mucho menor que la de los perímetros y la circunferencia; porque esa misma diferencia que consideran menor que cualesquiera cantidad dada, es el verdadero valor de cada lado

---

(1). Siendo la circunferencia mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el perímetro del polígono circunscrito: es claro que los lados del circunscrito son mayores que los arcos de cuya suma se compone la circunferencia.

(2). Digo especiosamente porque fue un cálculo ilusorio: *Véanse los artículos 16, 17, 18 y 19, y sus observaciones y demostraciones.*

del polígono refundido: ya porque con las inscriciones y circunscriciones se destruyen totalmente los de un polígono con los del otro: y ya porque no conociéndole longitud al rádio, mal se puede trazar ó imaginar trazado un círculo, y peor se podrán inscribir y circunscribir polígonos en un círculo de tal naturaleza. Luego, han hecho insignificantes los lados del polígono de 3221225472 lados: luego, el punto lineal es mayor que la estension que los autores dieron á cada uno de sus lados, que era lo que en obsequio de la demostracion 2.ª del artículo 15 pretendia demostrar.

Art. 16. Ademas de lo demostrado en el artículo 15, con referencia á la perfeccion é imperfeccion del polígono de infinito número de lados, cuyo valor lineal se desconoce; ampliando las observaciones que indiqué en mi artículo 9, tengo que manifestar aqui una de mucha consideracion acerca de la aproximacion á la circunferencia por medio de los exágonos inscrito y circunscrito, y la inscricion y circunscricion de polígonos de duplo número de lados: que es la siguiente.

Observacion importante.

Los autores se han valido del auxilio del exágono inscrito y exágono circunscrito al círculo, para aproximarse á la circunferencia; fundáronse para ello en que, inscribiendo y circunscribiendo polígonos de duplo número de lados (Art. 10) llegarian á ser tan infinitamente pequeños, y se acercarian tanto á la circunferencia sus perímetros, que si la diferencia entre uno y otro, sería menor que cualesquiera cantidad dada; la diferencia entre ellos y la circunferencia, sería tambien menor que cualesquiera cantidad dada por pequeña que fuera; y que por esta razon que se confundirian con ella. Grandioso discurso ha sido, el haber tomado por base los exágonos inscrito y circunscrito al círculo, para calcular la circunferencia; mas no obstante esto, y sin embargo de lo demostrado artículo 15, advertencia esencial, dispensándome mi atrevimiento, quisiera se me satisfaciese á la siguiente pregunta. ¿Los perímetros de los polígonos de igual número de lados inscritos y circunscritos al círculo, que se inscriben y circunscriben de duplo número de lados, se acercan á un mismo tiempo á la circunferencia? Esta es mi pregunta, que exige una respuesta categórica y satisfactoria; pues tengo cierta duda que deseára salir de ella: porque si el uno de ellos se acerca mas pronto que el otro, ya no llevan la marcha uniforme que debieran llevar en la inscricion y circunscricion sucesiva, para el buen éxito del cálculo. El polígono inscrito tiene la propiedad de aumentar el valor de su perímetro, al mismo tiempo que aumenta el número de lados; y viceversa, el circunscrito, al mismo tiempo que aumenta el número de lados, disminuye el valor de su perímetro: circunstancias esenciales para acercarse los perímetros de ambos polígonos á la circunferencia; mas no obstante esta propiedad recomendable que tienen los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos, la poderosa razon de ser cuerdas ó subtensas, los lados del inscrito y tangentes los del circunscrito, me han hecho dudar de su aproximacion á un mismo tiempo á la circunferencia; y habiendo fijado mi atencion en el particular, he llegado á conocer lo que voy á esplicar para la correccion del cálculo, ó hacerlo bajo otras bases. Como que los lados del exágono inscrito son cuerdas, su perímetro toca tan solamente á la circunferencia en seis puntos geométricos (Art. 8. Demostracion 3.ª (1)); pero el circunscrito, pone en contacto sus seis lados con la misma circunferencia. Si duplamos estos polígonos, se convertirán en dodecágonos: tocará el inscrito en doce puntos geométritos á la circunferencia, y el circunscrito pondrá en contacto con ella sus doce lados, en toda la estension de que es susceptible la curva con la recta. Si en este estado los volvemos á duplar, serán polígonos de veinte y cuatro lados, el inscrito tocará en veinte y cuatro puntos, y el circunscrito pondrá en contacto sus veinte y cuatro lados con la circunferencia. Si duplamos otra vez estos polígonos, se harán de cuarenta y ocho lados: el inscrito tocará en cuarenta y ocho puntos á la circunferencia, y el circunscrito pondrá sus cuarenta y ocho lados en contacto con ella; esta es la marcha uniforme y constante que llevarán los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, hasta el infinito: tocando el inscrito á la circunferencia en tantos puntos geométricos, como el circunscrito en tantos lados; porque como los lados del inscrito son cuerdas que subtenden los arcos á que corresponden, las cuales son mas pequeñas que dichos arcos, siempre serán dichos lados de menor estension que los arcos subtendidos, y jamas podrán llegar á la circunferencia por esta razon; pero los lados del polígono circunscrito varian de posicion: cuanto mas pequeños se hagan, mas se ajustan á la configuracion de la circunferencia; porque cuanto mas cortos sean, corresponde mayor número de ellos, y por consiguiente pone en contacto mayor parte de su perímetro, y puede por esta circunstancia confundirse mas pronto con ella; de consiguiente, es muy verosimil, se acerque primero á la circunferencia el perímetro del polígono circunscrito, que el del inscrito, no obstante de ser este mas pequeño que aquel. Si el perímetro del polígono circunscrito, se acerca primero á la circunferencia, que el del inscrito por las razones espresadas, resultará el error que indica mi duda; pues como ese cálculo se hizo tomando por rádio la unidad simple (1), se repitió numéricamente una operacion que no tiene aplicacion á la práctica; porque si efectivamente se confunde ó coincide con la circunferencia, primero el perímetro del polígono circunscrito, que el del inscrito, resulta repetida una circunscricion que no existe, en cuanto la inscricion es necesaria para que su perímetro se acerque á la circunferencia; porque como el polígono circunscrito, á medida que aumenta sus lados, disminuye el valor de su perímetro: es claro que repitiendo mas circunscriciones que las debidas, llegará á ser dicho perímetro menor que

---

(1). Véase el siguiente artículo, que trata de la unidad simple y compuesta ó clasificada.

la circunferencia; esto es muy terminante, y emana de no haber tomado por rádio unidad de conocido valor lineal. Y aun suponiendo que los dos perímetros se acerquen á un mismo tiempo á la circunferencia, estamos en el mismo caso con respecto á la unidad simple; porque como no se conoce su valor lineal, se inscribieron y circunscribieron polígonos cuyo número de lados no cabe en la circunferencia por sugetarse á los efectos decimales de un número astracto, que puede prolongarse hasta el sol (1), sin la menor ventaja. Si para el espresado cálculo, se hubiese tomado por rádio unidad de conocido valor lineal, no podrian inscribirse ni circunscribirse polígonos de mayor número de lados, que los que cupiesen en la longitud de la circunferencia; ofreciendo ademas la ventaja de averiguar si se acercaban sus perímetros á la circunferencia, en una misma inscricion: lo que se conoceria cuando el valor lineal de los perímetros igualase totalmente el uno con el otro; y no verificándose esto como no se verifica, con el valor puramente numérico que se les ha dado á los lados de los polígonos, se puede asegurar que sus

---

(1). Laborde, en su tratado elemental de Geografía matemática, dice: que la distancia media del sol, á la tierra, consta de 27537480 leguas de 20 en grado.

perímetros no se aproximan á un mismo tiempo á la circunferencia (1); y hé aqui donde emana el grande error. Esta es la observacion importante, que anuncié al principio del artículo 16, y que voy á ampliar en el artículo que sigue con referencia á la unidad.

De la unidad.

Art. 17. La unidad en la ciencia Matemática, es la primera denominacion de la numeracion: es el primer lugar de la derecha de un número, y es el cimiento del órden numérico por el cual se conocen los lugares y valores de todas las cifras. La unidad, sirve de término de comparacion para dar idea de las demas cantidades de su especie: en todos los cálculos juega la primera, trátese de cantidades de metálico, de medidas de áridos, líquidos, lineales, cuadradas, cúbicas &c.; en fin la unidad es la base fundamental de la cantidad, sea de la especie y condicion que quiera; sin la cual nin-

(1). Yo convengo en que la superficie del circulo, se halle multiplicando la circunferencia por la mitad del rádio; pero no puedo convenir en que la circunferencia se halle con el auxilio de los polígonos inscritos y circunscritos al circulo, tomando por rádio la unidad simple. *Véanse artículos* 47, 48.

guna regla matemática podria ordenarse, porque es la guia de todas ellas. Empero: la unidad tiene sus límites, como lo tienen todas las cosas, y no puede abusarse de su bondad; hay unidad simple, y la hay compuesta (1) ó clasificada; esto es sin valor material, y con valor material; la simple puede considerarse dividida numéricamente, en milésimas, millonésimas, diezmillonésimas partes &c. &c.; porque como es una division puramente numérica, numéricamente se divide, y numéricamente se demuestra la exactitud ó inexactitud de aquella division, y de todas las demas operaciones aritméticas y algebráicas que de la misma naturaleza se presenten. Mas la unidad compuesta (2), esto es, la que se le da valor no está en igual caso: pues si bien cuando no tiene cómoda division reduciéndola á especie de menor denominacion, queda numéricamente figurada, como cuando no tiene valor conocido; teniendo particion cómoda, hay que sugetarse á ella en todos casos; mayormente cuando tiene aplicacion á la práctica. Esta verdad es fácil concebirla, sin otra esplicacion; mas no obstante,

---

(1). Llámo unidad compuesta, á la que tiene valor conocido, porque se compone de otras unidades de especie de menor denominacion. Y simple á la que no tiene valor.

(2). Véase la esplicacion de la llamada anterior.

voy á poner dos ejemplos, porque me interesan mucho para el objeto que me propongo.

EJEMPLO 1.° Cuando la unidad tiene conocido valor, no es posible realizar su division material en muchos casos: supongamos, si la unidad fuese un real de vellon, y se dividiese numéricamente en millonésimas, porque fuese un millon de acreedores á él, el resultado sería saber por la operacion numérica que á cada uno le correspondia 0'000001 del real de vellon; mas sería un delirio pretender que en moneda ni de manera alguna, se les hiciese efectiva entrega de aquella cantidad, porque no hay monedas tan pequeñas, ni de plata ni de cobre; luego es una division imaginada y figurada numéricamente con toda exactitud; pero es imaginaria en cuanto á hacer de ella aplicacion á la práctica.

EJEMPLO 2.° Sea la unidad una legua lineal de ocho mil varas: esta unidad como compuesta de una infinidad de unidades de especie menor, es susceptible de muchas divisiones y subdivisiones; pero podrán ser tan numerosas, y de tal naturaleza, que tampoco sea realizable á la práctica, como asi sucede. A esta línea de una legua, son acreedores 48000 hombres, que distribuida entre todos ellos les corresponde á cada uno un sesto de vara, ó sea medio pie; mas no es esa sola la cuestion: se pretende que ese número de hombres se coloque en ella, en una sola fila en ala, dando frente á la batalla: pregunto pues ahora ¿podrán colocarse 48000 hombres en esa corta línea en los términos que dejo espresados? se me concederá que no es posible; porque en medio pie no cabe el soldado; y por consiguiente que no es realizable la colocacion de tantos miles de hombres en la espresada posicion, en tan pequeña estension. Luego: tanto por el ejemplo anterior, cuanto por este, se puede venir en conocimiento de que la unidad tiene sus límites, y que hay que ceñirse á ellos; y en este concepto, cualesquiera cálculo que se estralimite de la unidad, no tiene aplicacion á la práctica; por consiguiente estoy autorizado para decir con algun fundamento; que los cálculos teóricos que no tienen exacta aplicacion en la práctica, son erróneos; y solo permanecen con visos de verosímiles, en cuanto no se desvanecen con demostraciones evidentes.

Art. 18. Demostrado en el artículo 17, que la unidad tiene sus límites, voy á demostrar tambien, que el haber tomado por rádio la unidad simple para la indagacion de la circunferencia, no es un cálculo exacto; porque como la unidad simple no tiene valor conocido, se ignora cuando se estralimita de ellos, repitiendo operaciones que no tienen lugar en el cálculo: esto es, que no tienen aplicacion en la práctica (Art. 17, ejemplos 1.° y 2.°): resultando de este error, que las cantidades que se consideran positivas en la teoría numérica, se convierten en negativas en la práctica; y hé aqui la confusion y trastorno de muchos cálculos.

1.ª DEMOSTRACION. Habiendo tomado por rádio la unidad simple, para la averiguacion de la longitud de la circunferencia, convirtieron las cantidades que consideraron positivas, en cantidades negativas. Esto se funda en lo demostrado (Art. 17, ejemplos 1.° y 2.°), y en las razones siguientes: pregunto pues ¿la unidad es elástica? no señor. Luego, no siendo elástica la unidad ¿cómo han de inscribirse y circunscribirse polígonos de tantos millones de lados (Art. 14) en círculos de rádios determinados? no es posible; porque siendo mayor el número de lados (1), que la longitud de las circunferencias á que corresponden, no hay

(1). A los lados de un polígono, se les considera alguna longitud, porque de lo contrario dejarian de serlo; y teniéndola, siendo mayor la del perímetro del polígono, que la de la circunferencia, no cabe la de aquel en la que comprende esta.

donde colocarlos (Art. 17, ejemplo 2.º). Ademas de esto: si concebimos que el perímetro del polígono circunscrito, debe confundirse (Art. 16, observacion) con la circunferencia, primero que el perímetro del polígono inscrito ¿cómo se han de circunscribir tantos polígonos, como inscritos son necesarios para que su perímetro llegue á confundirse con la circunferencia? no puede ser; porque no tienen sobre que circunscribirse. Luego, es una circunscricion imaginaria; porque desde el momento que el perímetro del circunscrito se confunde con la circunferencia, alli queda varado sin accion material alguna; mas por esa teoría de la unidad simple, reducida á decimales, imaginaron una inscricion y circunscricion de poligonos que no existen, traspasando los límites de la unidad; y hé aqui como convirtieron las cantidades que creyeron positivas, en cantidades negativas, que era lo que pretendia demostrar.

2.ª Demostracion. La unidad ya vemos que no es elástica: luego, no siendo elástica la unidad ¿cómo han inscrito y circunscrito polígonos de tantos millones de lados (Art. 14) en un círculo cuyo rádio es la unidad? no es comprensible; porque la unidad es un número astracto, que por sí solo no tiene dimension alguna: y los lados del polígono tienen longitud, como queda demostrado en la demostracion anterior. Ademas: si á esa simple unidad la damos un valor lineal como debe dársele, y la consideramos de un pie: usando la razon geométrica de Arquimédes 7:22, el diámetro de dos pies corresponde á una circunferencia de 10861 puntos lineales $\frac{5}{7}$ de otro, en la cual no pueden inscribirse ni circunscribirse polígonos de mas lados que el número de puntos lineales de que consta. Si la unidad la consideramos de una vara, siendo esta el rádio, el diámetro son dos varas, que corresponden á una circunferencia de 32585 puntos lineales $\frac{1}{7}$ de otro, en donde tampoco cabe inscricion y circunscricion mayor que la del número de puntos lineales que comprende. Si la unidad la consideramos de cincuenta varas, siendo este número el rádio, el diámetro serán cien varas, que corresponden á una circunferencia de 1629257 puntos lineales $\frac{1}{7}$ de otro: donde tampoco puede caber inscricion y circunscricion de polígonos de mayor número de lados, que el número de puntos lineales que comprende. Y en fin, si la unidad la consideramos de una legua de 8000 varas: siendo esta el rádio, el diámetro son dos leguas que corresponde á una circunferencia de 260681142 puntos lineales $\frac{6}{7}$ de otro; que tampoco puede inscribirse ni circunscribirse en dicho círculo, polígono de mayor número de lados, que el número de puntos lineales que comprende (1). Luego ¿qué clase de unidad es la que han usado los autores para imaginar el círculo, donde han inscrito y circunscrito polígonos de 3221225472 lados? (Art. 14). Si á un círculo le basta un polígono de 10000 lados ¿cómo se le han de inscribir y circunscribir de 20000? Y si le sobran de 20000 ¿por qué y cómo se le han de inscribir de 40000: ó de 80000, ó de 160000, ó de 320000 &c. &c. &c.? Esto no lo comprendo; pero conozco que guiados de los efectos decimales de la unidad seguida de ceros, se enagenaron y pretendieron hacer la parte mayor que el todo: es decir, un quebrado decimal mayor que la misma circunferencia; dimanado todo de haber tomado por rádio la unidad simple, en lugar de haberla tomado de conocido valor lineal, y de no precaver la posicion de

(1). En vista de esta demostracion, me persuado, que no se estrañará la corta estension que di al lado del polígono, para probar su imperfeccion. (Art. 15, advertencia esencial).

los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo. (Art. 16, observacion).

3.ª Demostracion. El lado del exágono, es igual al rádio; por consiguiente el perímetro del exágono inscrito, es igual á seis rádios, ó lo que es lo mismo, á tres diámetros. El lado del cuadrado circunscrito, es igual al diámetro; de consiguiente su perímetro es igual á cuatro diámetros. Luego, la circunferencia del círculo, es mayor que tres diámetros, y menor que cuatro diámetros, esto es evidente: y hé aqui el porque habiendo tomado por rádio la unidad simple, tenia que resultar forzosamente la razon geométrica que los autores han hallado (Art.os 3, 4, y 5): *una es á tres y una fraccion de otra unidad;* es decir un diámetro, es á tres y una fraccion de otro; y como la unidad simple no tiene valor material, por eso es tan complicado el quebrado decimal: y mucho mas porque se ignora cuanto mayor es que tres, ó cuanto menor que cuatro diámetros. Si al rádio se le diese un valor lineal determinado, la circunferencia siempre seria mayor que tres y menor que cuatro diámetros, segun dejo dicho; y aunque el resultado jamas podria ser exacto, al menos seria mas aproximado, y sin tanta confusion de cifras decimales; porque la circunferencia, no solo es mayor que el perímetro del exágono inscrito, y menor que el perímetro del cuadrado circunscrito, sino, que tambien es mayor que el perímetro del exágono inscrito, y menor que el perímetro del pentágono circunscrito; mayor que el perímetro del exágono inscrito, y menor que el del ectágono circunscrito; mayor que el perímetro del exágono inscrito y menor que el perímetro del octágono circunscrito: mayor que el perímetro del exágono inscrito, y menor que el perímetro del octágono circunscrito &c. &c.: siguiendo siempre el orden de: mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el perímetro del polígono circunscrito. Es asi, que los polígonos circunscritos, á medida que aumentan su número de lados, disminuyen el valor de sus perímetros: y los inscritos, á medida que aumentan su número de lados, aumentan tambien el valor de sus perímetros (Art. 16, observacion): luego, conociendo el valor material de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, la diferencia nunca puede ser tan grande, como la que resulta tomando por base la unidad simple, pues una cosa que es mayor que tres, y menor que cuatro: puede ser tambien mayor que veinte y uno, y menor que veinte y dos: mayor que veinte y dos: y menor que veinte y tres: mayor que veinte y tres: y menor que veinte y cuatro: mayor que veinte y cuatro: y menor que veinte y cinco &c. &c. &c.; y cuanto mayor sea el número de unidades, y cuanto menores sean estas, menor tiene que ser forzosamente la diferencia entre los perímetros de los polígonos, y la circunferencia; por consiguiente, si el resultado no nos diese unidades enteras sin quebrado alguno: la fraccion que hubiese seria infinitamente mas pequeña; porque la diferencia entre tres leguas, y cuatro leguas: tiene que ser mucho mayor que la que resultará entre 24000 varas (1), y 25000; y mucho mayor que la que puede haber entre 72000 pies (2), y 73000; esto es muy conciso y terminante; porque como se conoce el valor lineal del diámetro, se pueden reducir sus unidades á otras de menor denominacion, y cualesquiera quebrado que resultase, seria de menor entidad, y no estaria el cálculo sujeto á un efecto decimal tan estremado como está, el que resulta por haber tomado la unidad simple, para la

(1). 24000 varas, son tres leguas; pero las 25000 pasan de las tres, y no llegan á las cuatro: le faltan 7000 varas.

(2). 72000 pies, son tres leguas; pero las 73000, aunque pasan de las tres leguas, le faltan 23000 pies para las cuatro leguas.

indagacion de la circunferencia; ni ofreceria tantos errores como ofrece por no haberle dado estension al lado del polígono (1).

4.ª DEMOSTRACION. Tomando la unidad simple por rádio, imaginaron un círculo, é inscribieron numéricamente en él un polígono (Art. 14) de 3221225472 lados: quisiera saber ¿qué longitud es la de esa unidad, y cuál la de los lados del polígono inscrito? Este es un argumento del caso para manifestar el error; porque un círculo se puede trazar ó imaginar trazado, bajo cualesquiera rádio; pero un polígono ya sea inscrito ó circunscrito, no está en ese caso: porque tiene que sujetarse á la longitud de la circunferencia del círculo. Y hé aqui como venimos á recaer en las demostraciones 1.ª y 2.ª de este artículo; porque no siendo elástica la unidad, como no lo es, no es posible inscribir y circunscribir polígonos de tantos millones de lados, en la circunferencia de un círculo imaginado por la unidad simple, porque como los lados del polígono tienen longitud (Art. 18, Demostracion 1.ª), y al rádio no se le dá: no pueden caber tantos millones de lados en una longitud de una circunferencia que no existe; y hé aqui porque el valor nu-

(1). Véase el artículo 19, y todos sus párrafos.

mérico que los autores dan al lado del polígono, es nominal, y no tiene aplicacion á la práctica (Art. 17, ejemplo 1.°). Y aun poniéndonos en el caso que cupiesen, está demostrado evidentemente (Art. 15), que el polígono de muchos lados puede ser perfecto ó imperfecto; luego, ese número de lados imaginados numéricamente por la unidad simple, cuya longitud se desconoce, son imaginarios (Art. 15, advertencia esencial); y dado caso que no lo fuesen, no son proporcionales para todos los círculos, porque si bien el valor de los perímetros, podrá tener relacion con las circunferencias de los círculos á que están inscritos y circunscritos los polígonos: el número de lados, no es proporcional en ningun concepto (1); y no siendo proporcionales esa infinidad de lados imaginados sin base determinada, no pueden servir de regla general ni para la indagacion de la circunferencia, ni para hallar la superficie del círculo, que era lo que pretendia demostrar.

5.ª Demostracion. Para mayor corrobo-

---

(1). Digo que no es proporcional ese número de lados; porque para serlo era preciso que correspondiese lo mismo á los círculos pequeños, que á los medianos, que á los de inmenso espacio; y vemos que no corresponde (Art. 15, demostraciones 1.ª y 2.ª): luego no son proporcionales.

racion y comprobacion de cuanto queda esplicado en las demostraciones anteriores, fígese la consideracion en la posicion de la circunferencia, y la de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, y entonces se vendrá en conocimiento de que cuanto dejo demostrado es exacto; y si no respondáseme: ¿Los autores matemáticos, no nos demuestran, que la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el perímetro del polígono circunscrito? se me responderá que sí, que lo demuestran todos á la una; y yo lo manifiesto tambien en la observacion importante del artículo 16, y en la tercera demostracion de este artículo. Luego ¿cómo es posible concebir que por medio de polígonos inscritos y circunscritos al círculo, se halle la circunferencia? no es dable concebirlo, y menos realizarlo. Porque siendo como es la circunferencia, mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el perímetro del polígono circunscrito: por muchas é infinitas inscriciones y circunscriciones que se hagan, la posicion de la circunferencia, y la de los perímetros de los polígonos, siempre es la misma, en nada varía, y por consiguiente; siempre será mayor la circunferencia, que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el perímetro del circunscrito, sea cual fuere el número de lados que se les dé á los polígonos (1). Luego es un procedimiento inexacto en toda la estension de la palabra, pretender que varien de posicion los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, y su circunferencia, por medio de inscriciones y circunscriciones que no tienen límites, ni se alcanza adonde pueden terminar; porque como por este cálculo egecutado con la unidad simple, no se le dá estension al lado del polígono: á medida que se aumentan las inscriciones y circunscriciones, tiene que acrecentarse la unidad para que ese numeroso é infinito número de lados, quepa en la circunferencia del círculo imaginado imaginariamente; ó de lo contrario, hacer tan diminutos los lados de los polígonos, que destruyéndose los del inscrito con los del circunscrito (Art. 15, advertencia esencial), desaparezcan y queden sin valor lineal: esto es nominales; y en ambos casos es un absurdo remarcable; porque ni el rádio debe acrecentar, ni los lados de los polígonos pueden ser imaginarios. El rádio de un círculo, tanta estension debe tener en la primera ins-

(1). Reflexionése en lo que son las líneas geométricas (Art. 8, Dem. 2.ª); y lo que son los puntos geométricos (Art. 8, Dem. 5.ª (1).

cricion y circunscricion, como en la última; y en el método adoptado para la indagacion de la circunferencia por medio de polígonos inscritos y circunscritos, y la unidad simple, vemos todo lo contrario (1). Los lados de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, si bien cuantas mas inscriciones y circunscriciones se hagan, tienen que ser de menor estension, no por eso han de desaparecer; esto es, no por eso se han de hacer nominales: tienen que tener longitud como líneas geométricas, y de lo contrario seria una confusion, como la es en realidad. Y hé aqui como venimos á recaer en las demostraciones anteriores, y en particular en la 2.ª y 4.ª; en la 2.ª porque no caben los lados del polígono de 3221225472 lados en muchos círculos; y en la 4.ª porque ese número de lados, no está por esa razon, en proporcion geométrica con todos los círculos, como debiera de estar para que fuese exacto el cálculo. Esta exactitud no la hay bajo ningun concepto, como lo tengo esplicado y patentizado evidentemente: luego creo haber demostrado positivamente la imposibilidad de hallar el valor de la circunferencia por medio de po-

---

(1). Fíjese la consideracion en todas las demostraciones, y en particular en la 6.ª con referencia al particular que abraza la llamada.

lígonos y la unidad simple, que era lo que pretendia demostrar.

6.ª DEMOSTRACION. Para la indagacion de la circunferencia con el auxilio de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo, tomando por rádio la unidad simple, y comenzando por el exágono, imaginaron los autores, y figuraron numéricamente treinta inscriciones y circunscriciones; con las que espresan en número el polígono de 3221225472 lados (Art. 14). Ahora bien: á la primera inscricion tiene el polígono tan solamente seis lados; á la décima inscricion; consta ya de 3072 lados; á la vigésima inscricion, consta de 3145728 lados; y á la trigésima inscricion, asciende á los 3221225472 lados. Sabedores del número de lados que tienen los polígonos en las espresadas inscriciones, debiamos de saber tambien su estension, para conocer si caben ó no en el círculo, y si el perímetro del polígono de la trigésima inscricion se confunde con la circunferencia; pues de lo contrario no podemos asegurar su aproximacion. ¿Y cómo se sabe la estension de los lados de los polígonos en todas las inscriciones? sabiendo la estension que tiene la unidad, que tomaron por rádio para figurar numéricamente las treinta inscriciones y circunscriciones; porque de otro modo es totalmente imposible averiguarlo. ¿Y quién determina esta estension de la unidad, despues de hechas las inscriciones y circunscriciones numéricas? nadie puede determinarla, sin arriesgarse á cometer un absurdo remarcable; porque como es un cálculo que no tiene límites, por carecer de datos positivos: si en las treinta inscriciones, se le dá á la unidad una estension susceptible de que el perímetro del polígono de la trigésima inscricion, se confunda con la circunferencia de un círculo: resultaria, que si se continuasen las inscriciones, sería una estension demasiado corta; y lejos de aparecer los lados de los polígonos como líneas geométricas, quedarian imaginarios, como quedan por haber tomado por rádio un mónstruo matemático (Art. 15, advertencia esencial), que no tiene principio ni fin en las longitudes, si no se le dá estension. Se me argüirá el por que se han de continuar las inscriciones: contestaré oportunamente diciendo, que hay una obligacion de continuarlas hasta el punto en que la unidad seguida de ceros, termine sus efectos decimales; y como estos efectos decimales son interminables en este caso, porque es un número irracional, como asi nos lo dicen los autores: por eso se ignora hasta que punto puede llegar el número de las inscriciones. Luego cualesquiera estension que se le dé á la unidad en las treinta inscriciones primeras, no rige ni puede regir para las que sucesivamente se hagan, porque se ignora el número de las que pueden hacerse en este cálculo paradógico; y hé aqui porque á medida que se aumentan las inscriciones, se acrecenta la estension de la unidad que tomaron por rádio, que es lo que se opone á las reglas geométricas. Luego si absurdo seria arriesgarse á marcar longitud á la unidad que los autores tomaron por rádio para las treinta inscriciones: error remarcable es, buscar la circunferencia por un medio tan desproporcional, y tan ilusorio: que era lo que pretendia demostrar.

7.ª DEMOSTRACION. Para complemento de las demostraciones anteriores, y para demostrar con la mayor evidencia, que mis cálculos los fundo en principios geométricos, voy á preguntar. ¿Se pueden confundir las líneas geométricas, con los puntos geométricos? se me concederá que de manera alguna pueden confundirse, porque son cosas distintas, y esencialmente necesarias una y otra en las matemáticas. ¿Y en qué está esa distincion? se me concederá, que está en que las líneas geométricas son longitudinales, sin otra dimension alguna; y los puntos geométricos carecen de toda dimension; porque ni tienen latitud, longitud, ni espesor. Luego, si nos convencemos de esta verdad tan patente, de que no pueden confundirse las líneas geométricas, con los puntos geométricos ¿cómo es posible confundir un número astracto, con las líneas geométricas? no está en la posibilidad matemática el confundirlo. Porque un número astracto como es la unidad simple, está en el mismo paralelo con las líneas geométricas, que lo están estas con el punto geométrico; pues si este no tiene dimension alguna, tampoco las tiene la unidad simple. Luego, no teniendo longitud la unidad simple ¿cómo es posible confundirla con el rádio, que es una línea geométrica? ¿cómo es posible confundirla con la circunferencia, que es otra línea geométrica? Y ¿cómo es concebible confundirla con los lados de los polígonos, que tambien son líneas geométricas? No es posible ni dable confundirlas, ni aun equivocarlas; pues las líneas geométricas todas tienen longitud, y si no la tuviesen no lo serian; es asi que la unidad simple ni tiene latitud, longitud, ni grueso alguno: luego ¿se podrá considerar como línea geométrica? me persuado que todos convendrán conmigo de que es totalmente imposible confundir la luz del dia, con las tinieblas de la noche; y por consiguiente que es una verdadera paradoja, el pretender aproximarse á la circunferencia por medio de polígonos (Art. 10) tomando la unidad simple por rádio, que era lo que pretendia demostrar.

8.ª Demostracion. Hablando de las diferentes razones geométricas, en que los autores han puesto al diámetro con la circunferencia, dice Vallejo (Art. 3); »Pero Arquimédes »halló la de 7:22; Pedro Mecio la de 113:355; »y la que nosotros hemos calculado por proce»dimientos geométricos en nuestro tratado ele»mental &c. &c." Espresa las razones como se vé en el citado artículo. Ahora bien: Vallejo dice, que la que ellos han calculado por procedimientos geométricos; ¿y qué practicaron los autores para calcular esa razon geométrica? practicaron lo siguiente. Imaginando un círculo trazado con la unidad seguida de ceros: figuraron numéricamente la inscricion y circunscricion de polígonos, que inscribieron y circunscribieron de duplo número de lados, hasta la trigésima inscricion: en la cual contando al polígono 3221225472 lados (Art. 14), no se les conoce otra estension mas, que una fraccion decimal complicadísima de aquella unidad seguida de ceros, que tomaron por rádio para este cálculo. Esto es lo que practicaron los autores para indagar la razon geométrica del diámetro y la circunferencia; ¿y son procedimientos geométricos los cálculos que se hacen con la unidad seguida de ceros? no señor: nunca lo fueron ni lo serán jamas, como lo voy á patentizar; y en este concepto voy á preguntar ¿qué se entiende por procedimientos geométricos? Yo me persuado y todos convendrán conmigo, que los procedimientos geométricos serán aquellos que comprende y prescribe el tratado de Geometría. ¿Y qué es Geometría? la ciencia que trata de la estension y espacio. Luego los cálculos donde no haya estension ó espacio, no son geométricos; esto no tiene réplica. Pregunto pues ahora ¿se conoce alguna estension ó espacio á la unidad que tomaron por rádio los autores para ese cálculo? no señor; la unidad seguida de ceros, que es lo mismo que decir la unidad simple, no tiene dimension alguna; la unidad simple, no es otra cosa aritméticamente hablando, que el cimiento del órden numérico, por el cual se conocen los lugares y valores de todas las cifras de un número (Art. 17.) Luego, no conociéndole estension ni espacio á la unidad simple ¿cómo es posible llamarles procedimientos geométricos á los cálculos que se hacen con ella? ¿á los cálculos que se hacen con la primera denominacion de la numeracion? ¿á los cálculos que se hacen con el primer lugar de la derecha de un número? ¿á los cálculos que son puramente aritméticos? y en dos palabras ¿á los cálculos que considerándolos imaginados, son imaginarios? no es posible ni dable darles esa denominacion, porque sería confundir lo blanco con lo negro. La Aritmética, si bien es necesaria para la Geometría, son ciencias distintas; y no pueden bajo ningun aspecto, confundirse los procedimientos de la una con los procedimientos de la otra. Es asi que para calcular la circunferencia, no le dieron estension á la unidad; luego el cálculo no es, ni puede ser geométrico; y no siendo geométrico, es un absurdo, es un error remarcable alucinar al hombre con una ilusion que aprendió el primero que fijó su atencion en la indagacion de la circunferencia por ese medio; pues todos los demas que le sucedieron, no hicieron otra cosa que adherirse á la opinion de aquel, sin poner nada de su ingenio; esto es, sin reconocer si el cálculo era ó no verdaderamente geométrico, como debe de serlo la resolucion de la cuadratura del círculo, porque es un problema esclusivo de la Geometría. Es asi, que el cálculo para la indagacion de la circunferencia, por medio de polígonos imaginados con la unidad simple, es puramente aritmético: luego ni puede llamarse geométrico al procedimiento, ni puede ser exacto el cálculo; que era lo que pretendia demostrar en obsequio y corroboracion de todas las demostraciones precedentes.

Corolario 1.° De lo demostrado en las ocho demostraciones que preceden se infiere exactamente, que siendo imposible el hallar la circunferencia con el débil auxilio de polígonos figurados numéricamente con la unidad seguida de ceros; es terminante é incontrastable, que el cálculo no es matemático.

Corolario 2.° Luego si el cálculo que hicieron los autores para la indagacion de la circunferencia, no es matemático: es fácil concebir, que en él estaba encerrado el misterio de la cuadratura del círculo (Art. 2).

Corolario 3.° Luego si la cuadratura del círculo segun la habian concebido los autores, era un misterio como lo dejo demostrado; es claro y terminante, que está descubierto con demostrar el error que han padecido en el cálculo que sentaron para resolverla, como queda plenamente probado.

Corolario 4.° Luego si nos convencemos de que, cuanto he demostrado es exacto; nos convenceremos tambien de que mis cálculos son fundados en principios geométricos.

Corolario 5.° Luego si fundado en principios geométricos, he demostrado el misterio de la cuadratura: esto es el error en que estaban los autores para la resolucion de tan decantado problema; es evidente, que si mi solucion la fundo en los mismos principios geométricos, tendrá la aceptacion pública que merece un verdadero descubrimiento.

Corolario 6.° Luego si yo he tenido la dicha de atinar la resolucion de tan complicado problema; es terminante que para mí estaba reservado este descubrimiento: ya fuese en Cacabelos, ya en las montañas mas ásperas y mas remotas del mundo. (1).

Art. 19. Con el laudable objeto, de que no haya interpretaciones en lo que dejo demostrado en el artículo 18, acerca de las inexactitudes que ofrece la unidad simple, en el cálculo de la longitud de la circunferencia; y prescindiendo de que se me conceda ó no, la imposibilidad de hallar la circunferencia por medio de polígonos y la unidad simple, voy á insertar otros párrafos del Tratado elemental de Matemáticas de Vallejo, muy alusivos á es-

---

(1). Este Corolario, no solo es consecuencia de las demostraciones anteriores: sino de lo que se dejaron decir algunos periódicos, cuando en el *Tiempo* vieron mi carta de 18 de Mayo en que anunciaba el descubrimiento de la cuadratura.

ta cuestion; á fin de que haciendo las observaciones que mi limitada penetracion ha alcanzado, no quede duda alguna de los muchos errores que trae tras sí, la unidad simple, en la indagacion de la circunferencia.

1.° En la página 168 del primer tomo del Tratado elemental de Matemáticas de D. José Mariano Vallejo, esplicando el número de lados de los polígonos, y espresando por decimales el valor de los rádios de los círculos inscritos y circunscritos, dice: »Los dos últimos »rádios solo se diferencian en una diezmillo»nésima, y se puede considerar este rádio co»mo el del círculo, cuya circunferencia es »igual á seis.“ Y continúa una fórmula del párrafo 504, que concluida sigue otro párrafo que á la letra dice así.=»En el §. 349 del tí»tulo 1.° de mi Compendio de Matemáticas se »halla por una construccion gráfica la circun»ferencia ó semicircunferencia de un círculo, »dado que sea su diámetro, con menos de »una diezmilésima de diferencia.“ Esta operacion gráfica que cita su autor, la he visto en el espresado Compendio, y es demostrada imaginando tambien el diámetro como si fuese la unidad simple; y espresa la razon del diámetro con la circunferencia con estas cifras; 1 : 3‘14159. Resulta pues, que bien sea la diezmillonésima que dice hay de diferencia en los rádios: bien la diezmilésima, que hay en la circunferencia, por la operacion gráfica que cita: lo cierto es, que si bien á primera vista parecen insignificantes esas fracciones, no lo son; pues son de mucha consideracion como lo voy á demostrar de una manera mas concisa, que tal vez lo he hecho en las demostraciones anteriores.

2.° La razon geométrica: una, es á tres y una fraccion de otra unidad, que hallaron los autores (Art.^os 3, 4, y 5); es lo mismo que decir: un diámetro, es á tres, y una fraccion de otro (Art. 18, demostracion 3.ª); esto no tiene la menor duda, porque en este caso la unidad representa un diámetro. Ahora bien: si nos penetramos de esta verdad, de que la unidad representa un diámetro: un diámetro equivale á una unidad, y una unidad á un diámetro, esto es claro; luego, esa fraccion que resulta mas de las tres unidades en la longitud que dieron á la circunferencia, es una parte de otra unidad, ó lo que es lo mismo una parte de un diámetro; de consiguiente, esa diezmillonésima que resulta de diferencia en los rádios (Art. 19, párrafo 1.°), ó la diezmilésima que resulta por la operacion gráfica: es una parte del diámetro; esto es evidente. En este supuesto, y en el caso de que los perímetros de los polígonos se aproximen á un mismo tiempo á la circunferencia (Art. 16, observacion), y de que no haya habido estralimitacion de la unidad (Art. 18, demostraciones 1.ª, 2.ª, 3ª, 4.ª, 5.ª, 6.ª, 7.ª, 8.ª); cuando operásemos sobre círculos pequeños, la diferencia, aunque siempre sería sensible, no sería tan remarcable; porque una diezmillonésima (1), y aun una diezmilésima de una estension corta, poco error puede causar; pero si operamos sobre círculos de grande magnitud, el error es de alta consideracion. Por ejemplo: si pretendemos averiguar la circunferencia de un círculo máximo del Sol, para hallar su volúmen: como que su diámetro consta de tantos miles de leguas; es considerable el error, porque si en la unidad, hay una diezmilésima de diferencia: en la aplicacion á la práctica, cuanto menor ó mayor sea la unidad, menor ó mayor será el valor de la diezmilésima parte de aquella unidad; esto es tan claro como el agua, cuando está cristalina y clara (Art. 18, demostracion 3.ª). Una diezmilésima de una unidad ó diáme-

---

(1). La diezmillonésima que resulta de diferencia en el rádio, equivale á dos diezmillonésimas en el diámetro; y por consiguiente, á mas de seis diezmillonésimas en la circunferencia.

tro de una vara, ó de ciento, á poco asciende; pero una diezmilésima de una unidad que consta de 255451 leguas que tiene de diámetro el Sol (1): ya se hace de mucha consideracion; pues consta de 25'5451 leguas: esto es 25 leguas 5451 diezmilésima de legua, que son mas de veinte y cinco leguas y media. Luego sobre resultar esta diferencia en la circunferencia del círculo máximo del Sol: cuantas operaciones y cálculos se hagan sobre este error para la indagacion de su volúmen, lo acrecentará estraordinariamente, y lo hará de mayor consideracion, como lo demostraré numéricamente en los siguientes párrafos.

3.° Yo quisiera espresarme de tal manera, que todos me comprendieran; y por esa razon me veo en el caso de esforzar mis razones, repitiendo algunos ejemplos aunque algo variados, con el fin de que se hieran todas las dificultades, y que no quede duda alguna de cuanto demuestro, con referencia á la unidad simple; y en este concepto voy á poner un ejemplo mas esplícito.

Ejemplo. Representemos la unidad por una legua, y tendremos, que la razon geomé-

---

(1). Laborde, en su Tratado elemental de Geografía matemática, dice: que el diámetro del Sol, consta de 255454 leguas de veinte en grado trica 1:3‘14159 en que está el diámetro con la circunferencia, será: una legua, es á tres leguas $\frac{14159}{100000}$ de legua; en esta razon geométrica nos dicen los autores, que hay una diezmilésima de diferencia (1) esto es de falta; cuya diezmilésima, es una fraccion de la legua que le sirve de unidad, ó diámetro; luego, si á esta razon 1 (legua) : 3‘14159, hay una diezmilésima de legua de diferencia; en la razon 100 (leguas) :314‘15900 habrá cien diezmilésimas de legua; porque la diezmilésima de cien leguas, que es la unidad ó diámetro, equivale á cien diezmilésimas de legua; en la razon 1000 (leguas) : 3141‘59000, habrá mil diezmilésimas de legua de diferencia, porque la diezmilésima de 1000 leguas, es igual á mil diezmilésimas de legua; y en la razon 10000 (leguas) : 31415‘90000, habrá diez mil diezmilésimas de legua de falta, que ya componen una legua entera: porque una diezmilésima de diez mil leguas de que consta el diámetro, ó sea la

(1). Vallejo dice con menos de una diezmilésima de diferencia; pero como no sabemos ese menos: uso la diezmilésima.

unidad en esta razon, es una legua; por lo que si en cada diez mil leguas, hay una legua de diferencia en cien mil habrá diez leguas: en doscientas mil, habrá veinte: y en doscientas cincuenta y cinco mil cuatrocientas cincuenta y una leguas que tiene de estension el diámetro del Sol, (Art. 19, párrafo 2.°, llamada 2.ª), habrá veinte y cinco leguas $\frac{5451}{10000}$ de otra, como queda dicho; cuya cantidad, es la diezmilésima parte del diámetro del Sol, esplicada en el párrafo 2.° de este artículo; y con ella y sin ella, hallaremos la superficie del círculo máximo del Sol, y haremos los demas cálculos necesarios para obtener su volúmen; y haciendo las debidas comparaciones, conoceremos lo que dá de sí, la diferencia de una diezmilésima de la unidad simple, despreciada por los autores como insignificante.

4.° Operando pues con la razon geométrica 1:3'14159, en que está el diámetro con la circunferencia segun la operacion gráfica de Vallejo (Art. 19, párrafo 1.°): el diámetro del círculo máximo del Sol, que consta de doscientas cincuenta y cinco mil cuatrocientas cincuenta y una leguas, corresponderá á una circunferencia de 802522'30709 leguas; esto es, ochocientas dos mil quinientas veinte y dos leguas $\frac{50709}{100000}$ de legua, con la falta de la diezmilésima del diámetro que representa la unidad simple: que ya queda espresado consta de veinte y cinco leguas $\frac{5451}{10000}$ de otra. Hallemos pues la superficie del círculo máximo de que tratamos, con la falta de la diezmilésima; y despues de averiguada de este modo, hallémosla tambien con el aumento del valor de la diezmilésima, en la circunferencia de dicho círculo, y observaremos la mayor diferencia que hay en la superficie. Con efecto, la superficie del círculo máximo del Sol, por el método hasta aqui observado, con la falta de la diezmilésima segun queda esplicado, asciende á 51,251,281,467 leguas cuadradas $\frac{44759}{400000}$ de otra; y con el aumento á su circunferencia de las veinte y cinco leguas $\frac{5451}{10000}$ á que asciende la diezmilésima de esta unidad espresada en leguas (1), asciende á 51,252,912,847 leguas cuadradas $\frac{178769}{400000}$ de otra; cuya diferencia de superficies, consta

(1). La unidad espresada en leguas de que se trata en este cálculo comparativo, es el diámetro del Sol, que está dicho consta de 255451 leguas.

de 1,631,380 leguas cuadradas $\frac{134010}{400000}$ de otra; que es decir: que con la falta de la diezmilésima, disminuye la superficie del círculo de que se trata, un millon seiscientas treinta y un mil trescientas ochenta leguas cuadradas, y una fraccion de otra; y con el aumento de la diezmilésima espresada en leguas, aumenta esa cantidad de leguas cuadradas. Por manera, que siendo necesaria la superficie de cuatro círculos máximos de una esfera, para obtener la superficie de ella, segun nos lo esplican los autores; tendremos, que la superficie del Sol, con la falta de la diezmilésima en la circunferencia del círculo máximo, será: 205,005,125,868 leguas cuadradas $\frac{179040}{400000}$ de otra; y con el aumento de la diezmilésima será 205,011,651,389 leguas cuadradas $\frac{513076}{400000}$ de otra; cuya diferencia de una superficie á la otra, es de 6,525,521 leguas cuadradas $\frac{136040}{400000}$ de otra. El volúmen pues del Sol, con la falta de la diezmilésima, asciende á 8,728,127,402,370,134 leguas cúbicas $\frac{151309}{600000}$ de otra; es decir: ocho mil setecientos veinte y ocho bicuentos, ciento veinte y siete mil cuatrocientos dos millones, trescientos setenta mil ciento treinta y cuatro leguas cúbicas $\frac{451309}{600000}$ de otra legua cúbica. Y el espresado volúmen con el aumento de la diezmilésima, asciende á 8,728,405,226,528,775 leguas cúbicas $\frac{549819}{600000}$ de otra; esto es, ocho mil setecientos veinte y ocho bicuentos, cuatrocientos cinco mil doscientos veinte y seis millones, quinientos veinte y ocho mil setecientos setenta y cinco leguas cúbicas $\frac{549819}{600000}$ de otra. Resulta pues de una solidez á la otra, la diferencia de 277,824,158,641 leguas cúbicas $\frac{588510}{600000}$ de otra; que es lo que hace disminuir al volúmen del Sol, la insignificante diferencia de la diezmilésima de la unidad; luego queda probado plenamente el error que ofrece la unidad simple para la indagacion de la circunferencia, aun suponiendo que los perímetros de los polígonos se acercasen á ella á un mismo tiempo (Art. 16, observacion); ó no hubiese estralimitacion de la unidad (Art. 18 y sus demostraciones); y aunque no tuviese obstáculos tan insuperables: la sola consideracion de que una diezmilésima despreciada, disminuye el volúmen del Sol, nada menos que doscientas setenta y siete mil ochocientos veinte y cuatro millones, ciento cincuenta y ocho mil seiscientas cuarenta y una leguas cúbicas, y una fraccion de otra: será mas que suficiente para convencerse de que es un cálculo equivocado; pues esa diferencia equivale á mas de cuarenta y cuatro veces la solidez del globo terráqueo; luego no es tan insignificante esa diezmilésima; luego mis argumentos no son sofísticos, ni ilusorios: son muy sólidos, y necesarios para desvanecer los errores padecidos hasta aqui, referentes á la relacion del diámetro á la circunferencia, buscada por medio de la unidad simple, que era lo que pretendia demostrar.

Corolario. De lo demostrado en el artículo 19 y sus párrafos, se deduce; que todos los casos que he presentado y demostrado con referencia á la unidad simple, son casos de absoluta necesidad para probar y corregir los errores desconocidos hasta ahora, en la indagacion de la circunferencia, por medio de polígonos tomando por rádio la unidad simple.

Observacion concluyente.

Para dar el debido realce á mis argumentos, voy á hacer una manifestacion acerca de la razon geométrica 1 : 3'14159 en que por la construccion gráfica de Vallejo, consideran al diámetro con la circunferencia, con sola la diferencia de una diezmilésima, como he esplicado en los párrafos 3.° y 4.° de este artículo: y es la siguiente. Laborde en su Tratado de Geometría página 123, artículo 190 dice: que tomando las tres primeras cifras, esto es, 3'14: se obtendrán los resultados con menos de un milésimo de error; y que haciendo uso de las cinco primeras cifras, en estos términos 3'1416, que se obtendrán con menos de tres millonésimos de error. Lo que dejo demostrado acerca de la diezmilésima, y lo que me ofrece la divergencia de todos los autores, garantiza mis observaciones, y la resolucion del problema en cuestion como lo patentizaré en la segunda parte de esta obra. Porque sea la diezmillonésima que dice Vallejo hay de diferencia en los rádios, ó la diezmilésima que hay en la circunferencia (Art. 19, párrafo 1.°), y de que yo hago referencia en los párrafos 2.°, 3.° y 4.°; ó sea el milésimo que dice Laborde en los resultados, tomando las tres primeras cifras: ó los tres millonésimos tomando las cinco primeras; lo cierto es, que es una confusion y una série de inexactitudes; pues con la falta de cualesquiera fraccion de las que se hace mérito, resulta un error de millares de leguas cúbicas en el volúmen del Sol; porque como esas fracciones, son fracciones de la unidad que representa ó equivale al diámetro (Art. 18, demostracion 3.ª), tiene que repetirse por el número de miles de leguas de que consta el diámetro de la esfera, para hallar la superficie de ella; y este producto tiene que repetirse tambien por el número de miles de leguas que contenga la tercera parte del rádio, para obtener su solidez; de consiguiente se debe venir en conocimiento de que por pequeña que sea la fraccion que se suprima, rebaja considerable número de miles de leguas cúbicas al volúmen de una esfera de grande magnitud. Y no se crea que con el aumento de la diezmilésima espresada en leguas, se aproxima el volúmen del Sol; á la solidez que resulta operando con la razon geométrica 7 : 22 de Arquimédes: no señor; hay una diferencia muy notable, la cual voy á manifestar. Usando la razon geométrica de Arquimédes, la circunferencia del círculo máximo del Sol, operando con el mismo diámetro (Art. 19, párrafo 2.º): asciende á 802846 leguas; la superficie de la esfera á que corresponde, á 205,087,813,546 leguas cuadradas; y su volúmen á 8,731,647,843,023,207 leguas cúbicas $\frac{2}{5}$ de otra; cuyo número, escede al volúmen hallado con la razon 1 : 3'14159 con el aumento de la diezmilésima espresada en leguas, en 3,242,616,494,531 leguas cúbicas $\frac{480181}{600000}$ de otra; que es decir: tres bicuentos, doscientos cuarenta y dos mil seiscientos diez y seis millones, cuatrocientos noventa y cuatro mil, quinientas treinta y una leguas cúbicas, y la fraccion de otra; pero esto no es esceso de consideracion, ni para la teoría numérica, ni para la práctica; porque una cantidad de mas de tres millones de millones de leguas cúbicas, caben bien en la teoría, aunque no quepan en la práctica. Pero escusamos de hacer comparacion alguna con los cálculos hechos con la razon geométrica de Arquimédes; porque con los de la unidad simple, tenemos bastantes para egercitar nuestra reflexion; pues los resultados obtenidos con una cifra mas, ó tres ó cuatro menos en la fraccion decimal, presentan una diferencia de alta consideracion, digna de llamar muy particularmente la atencion de mis respetables y amados lectores, como lo voy á espresar.

Volúmen del Sol espresado en leguas cúbicas, operando en su cálculo con las razones que se dirán espresadas por la unidad simple.

RAZONES GEOMETRICAS.	VOLUMEN DEL SOL. LEGUAS CUBICAS.
Con la razon, 1:3'14159, resulta.	8,728,127,402,370,134
Con la misma razon 1:3'14159 aumentándole la diezmilésima espresada en leguas, á la circunferencia del círculo máximo..	8,728,405,226,528,775
Con la razon 1:3'141592 resulta.	8,728,132,957,873,307
Tomando 17 cifras decimales en esta razon, resulta.	8,728,134,773,710,186
Y tomando las 54 cifras que espresa Vallejo (Art 3) resulta.	8,728,134,780,235,708

Todas estas solideces halladas con las diferentes razones que se espresan (1), tienen una fraccion de legua; pero como es un quebrado decimal tan dilatado, lo omito para no confundir mi esplicacion. Ahora bien: comparemos el valor de estos volúmenes unos con otros, y observaremos que aun el hallado operando

(1). Entiéndase que el diámetro del Sol es el mismo, que antes de ahora queda espresado de 255451 leguas.

con las treinta y cuatro cifras decimales, le faltan para llegar al obtenido con la razon 1:3'14159 auméntandole la diezmilésima, doscientos setenta mil cuatrocientos cuarenta y seis millones, doscientos noventa y tres mil sesenta y siete leguas cúbicas; cuyo hueco no se llena aunque se opere con las ciento veinte y siete cifras decimales; luego creo que nos convenceremos del error y de la confusion que ofrece el tal cálculo sin ventaja alguna en ningun concepto. Bajo estas reflexivas observaciones, y en conclusion de esta primera parte de mi obra, debo recordar todo cuanto dejo demostrado en ella: sin olvidarse de los artículos 6.° y 7.°, en que apoyo, el que hasta ahora no se ha averiguado el modo de medir la circunferencia, ó de hallar su longitud; pues respetándose los autores mútuamente, manifiestan las razones geométricas, que en este problema unos y otros han hallado, sin que ninguno se atreva á demostrar lo contrario; porque (perdóneseme sea tan claro) no llegaron á penetrar razones fundamentales para ello; y lo prueba plenamente el que todos dicen, (hablando de la relacion del diámetro á la circunferencia), que aun no se ha hallado la cuadratura del círculo; pero que para la práctica, basta saber la razon geométrica 7:22 de Arquimédes; la de 113:355 hallada por Mecio; y la de 1:3'141592 &c. por Vallejo, Bails, y otros autores; que la prolongan hasta 17, 34, 127, y aun hasta 155 cifras decimales segun dice Vallejo (Art. 3); que todo es una confusion de confusiones como evidentemente llevo demostrado, y comprobaré en la segunda parte de esta obra, con la resolucion de la cuadratura y su complemento, y las observaciones de comprobacion de mis cálculos, que hago en el artículo 38 con que finalizo la obra.

SEGUNDA PARTE

QUE TRATA

DE LOS CALCULOS Y RESOLUCION

DE LA

CUADRATURA DEL CIRCULO.

Art. 20. Convencidos por lo demostrado (Art. 8), de la imposibilidad de la medida material de la circunferencia; y de que, el polígono de infinito número de lados, (Art. 15) habiendo tomado por rádio la unidad simple, (Art.^{os} 17 y 18), no es un dato positivo para determinar la longitud de la circunferencia, ni la superficie del círculo, por los errores demostrados (Art. 19): forzoso es apelar á otros cálculos mas positivos, que nos den resultados mas exactos; cuyos datos ofrecí en el artículo primero, los cuales manifestaré por su órden en términos esplícitos y concisos; pero antes, y á fin, de que mis cálculos se reconozcan como fundados y positivos: haré una reseña del objeto que los autores se propusieron conseguir, con la indagacion de la razon geométrica en que está el diámetro con la circunferencia del círculo.

1.° El objeto que los autores se han propuesto lograr, con tantas investigaciones en averiguacion de la razon geométrica en que está el diámetro con la circunferencia: fue el siguiente. 1.° Conocer el verdadero valor de la longitud de la circunferencia. 2.° Poder hallar exactamente el valor de una de las dos líneas de otro círculo: dado que fuese el valor de una de ellas. 3.° Hallar por este medio la superficie del círculo, con toda exactitud. 4.° Con el auxilio de la superficie del círculo, hallar la superficie de la esfera. 5.° Con el mismo auxilio de la superficie del círculo, obtener la solidez del cilindro recto, y de la esfera. Este es el objeto que se habian propuesto conseguir; pero como no tuvieron la dicha de hallar la relacion exacta del diámetro y la circunferencia: no solamente no consiguieron lo que tanto deseaban: sino que, persuadidos de que en esa razon, estaba encerrado el secreto para la solucion de todos los casos que se espresan, y de que no habia otro medio de hallarla, que el que ellos adoptaron, la denominaron cuadratura del círculo. Ahora bien: si el objeto de los autores en buscar la relacion del diámetro con la circunferencia, ha sido el poder conocer la longitud de la circunferencia, y poder obtener la superficie del círculo, para con su auxilio obtener tambien la solidez del cilindro recto, y de la esfera; si por medio del cilindro y de la esfera, esto es, si por medio de datos que nos suministren estos mismos cuerpos, podemos conseguir su volúmen, circunferencia, y superficie del círculo: los cálculos serán exactos; esto es constante; porque en otro caso serian inexactas las reglas concernientes á las solideces de los cuerpos. Bajo estos principios incontrastables, resuelvo los casos que comprende la cuadratura del círculo; y por esta razon le doy á la obra el título de: *Resolucion teórica, con aplicacion á la práctica, de la cuadratura del círculo: ó sea descubrimiento del misterio de la cuadratura;* porque efectivamente en la misma resolucion está comprendido ese gran misterio ó secreto matemático.

2.° Esplicado el objeto que los matemáticos se propusieron conseguir, con la razon geométrica del diámetro y la circunferencia; ya me atrevo con mas libertad á revelar los cálculos en que fundo la resolucion del grande problema; de otra manera no solo no me atrevia, sino que por mucho que me esforzase en mis demostraciones, seria un esfuerzo en vano; porque unos no penetrarian lo que yo querria decir, y otros aunque lo penetrasen, dirian que era un absurdo el que por medio de cuerpos sólidos, se pudiesen medir líneas curvas, superficies planas, superficies curvas, y en fin el volúmen de los mismos cuerpos de que yo hago uso en mis cálculos para la resolucion y descubrimiento de la cuadratura del círculo, que son los que comprenden todos los casos del círculo, que los autores creyeron resolver, con sola la razon inexacta del diámetro y la circunferencia.

3.° Vistos pues los insuperables obstáculos que ha habido para medir la circunferencia del círculo, y para hallar su superficie; y esplicado el objeto de la indagacion de la razon geométrica del diámetro y la circunferencia; me persuado que á mis cálculos se les dará el asenso que merecen; y espero se sacará de ellos el fruto que les ofrezco, observando y practicando cuanto acerca del particular demuestre y esplique en el discurso de esta segunda parte, sin olvidarse de cuanto queda esplicado y demostrado en la primera.

De la superficie del círculo, por el método establecido hasta aqui.

Art. 21. La superficie del círculo, segun lo han establecido algunos autores (1), se halla multiplicando la circunferencia, por la mitad del rádio: considerándola como el perímetro de un polígono de infinito número de lados; lo cual ya espliqué en los artículos 13 y 15. Mas ahora me conviene repetir esto mismo aqui, para decir: que si multiplicando la circunferencia por la mitad del rádio, se obtiene la superficie del círculo; partiendo la superficie del círculo por la mitad del rádio, se obtendrá la circunferencia del círculo; esto no tiene réplica: siendo exacto el primer resultado, lo debe ser el segundo; porque la prueba de la multiplicacion, está en la particion; y la de esta en aquella. Resta pues indagar la superficie del círculo, sin hacer uso de la circunferencia porque no la conocemos, á fin de averiguarla con mas exactitud que hasta aqui.

---

(1). Digo establecido por algunos autores, porque fueron pocos los profesores que se ocuparon en esta indagacion; el mayor número, no ha hecho otra cosa mas, que asentir á lo que aquellos establecieron.

De la solidez del cilindro recto.

Art. 22. La solidez del cilindro recto, se halla multiplicando la superficie de su base, por la altura; asi lo demuestran todos los autores; de cuya verdad no hay la menor duda; pero hay otra solucion, que es la siguiente.

De la solidez del cilindro recto empleando un nuevo método.

Art. 23. La solidez de un cilindro recto, no solo se halla multiplicando la superficie de su base por la altura (Art. 22); sino que se halla tambien con igual exactitud, multiplicando la superficie lateral ó convexa del cilindro, por la mitad del rádio del círculo de su base. Esto se funda, en que: considerando dividido el cilindro en prismas triangulares por medio de rádios imaginados en sus bases: las aristas que forman los planos en los ángulos agudos de dichos prismas, tocan en el eje del cilindro; por consiguiente la altura de estos prismas triangulares, es el mismo rádio; pero como los prismas triangulares, son semi paralelepípedos, hay que multiplicar sus bases por la mitad de la altura; y como la base de estos prismas triangulares, está en la superficie convexa del cilindro: multiplicando esta superficie, por la mitad del rádio, que es la altura comun á todos los prismas en que se imagina dividido el cilindro, se obtiene su solidez lo mismo que si se multiplicase la superficie de su base por la altura; que era lo que pretendia demostrar.

RESOLUCION

DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO.

Cálculo matemático para hallar la superficie del círculo, sin hacer uso de la circunferencia.

Art. 24. Para averiguar la solidez de un cilindro recto, necesitamos saber (Art. 22) la superficie de su base, y multiplicarla por la altura: cuyo producto es el volúmen del cilindro. Para hallar pues la superficie del círculo, (Art. 21), que le sirve de base al cilindro, hay que multiplicar la circunferencia, por la mitad del rádio: el producto es la superficie que se busca; y esta superficie es la que se multiplica por la altura, para obtener su solidez (Art. 22). Ahora bien: en las longitudes, todas las unidades son lineales; por consiguiente, la circunferencia se compone de unidades lineales: el diámetro se compone de unidades lineales: y la altura se compone de unidades lineales. Hablando pues de las solideces de los cuerpos, sentaremos: que, la multiplicacion de unidades lineales, por unidades lineales, produce unidades cuadradas; y la multiplicacion de unidades cuadradas, por unidades lineales, produce unidades cúbicas. Las unidades lineales, cuadradas, y cúbicas: todas son unidades distintas, no pueden reducirse á especie de mayor ó menor denominacion; pero asi como de las unidades lineales, formamos unidades cuadradas y cúbicas, con el auxilio de la multiplicacion: con la misma razon podremos descomponer las unidades cúbicas, en unidades cuadradas y lineales, con el auxilio de la particion. Luego: si para hallar el número de unidades cúbicas que contiene un cilindro: hay que multiplicar las unidades cuadradas de su base, por las unidades lineales de su altura; partiendo el número de unidades cúbicas de un cilindro, por las unidades lineales de su altura: el cociente será el número de unidades cuadradas que contenga la superficie del círculo de su base; esto es evidente é incontrastable; y hé aqui el medio de hallar la superficie de un círculo, sin hacer uso de la circunferencia: que era lo que pretendia demostrar.

Corolario. De lo dicho en el artículo anterior se infiere: que obtenida la superficie del círculo exactamente por el método espresado; partiendo dicha superficie por la mitad del rádio, se obtendrá el valor de la circunferencia con mayor exactitud que cuantas se han hallado hasta ahora: salvo que no sea exacto, el que multiplicando la circunferencia por la mitad del rádio, se obtiene la superficie del círculo.

Advertencia. Sin embargo de que tenemos el auxilio del círculo, para indagar la circunferencia; estableceremos otro método para hallar la circunferencia, sin hacer uso del círculo, á fin de manifestar, que para hallar la superficie del círculo, no necesitamos de la circunferencia; y para hallar la circunferencia, tampoco necesitamos de la superficie del círculo.

Del modo de hallar naturalmente la longitud de la circunferencia.

Art. 25. Para averiguar la superficie lateral ó convexa de un cilindro recto, hay que multiplicar la circunferencia del círculo de su base, por su altura; y para hallar la solidez del cilindro por el nuevo método (Art. 23), hay que multiplicar la superficie lateral ó convexa del cilindro, por la mitad del rádio del círculo de su base. Ahora bien: si multiplicando la circunferencia del círculo de la base del cilindro, por su altura, se obtiene su superficie lateral: y multiplicando ésta superficie por la mitad del rádio, se obtiene su solidez; aprovechándonos de lo esplicado y demostrado (Art. 24): partiendo la solidez, esto es, las unidades cúbicas que contiene el cilindro, por la mitad del rádio: el cociente será la superficie lateral ó convexa del espresado cilindro; y si esta superficie lateral, la dividimos por la altura del cilindro: el cociente será la circunferencia del círculo de su base; que era lo que pretendia demostrar, en obsequio de la advertencia del artículo veinte y cuatro.

Corolario. De lo demostrado en los artículos veinte y cuatro y veinte y cinco, se deduce exactamente, que la superficie del círculo se puede hallar sin hacer uso de la circunferencia; y viceversa, la circunferencia se puede hallar tambien, sin necesidad de la superficie del círculo (Art. 21).

Complemento de las demostraciones anteriores.

Art. 26. Para complemento de cuanto he demostrado (Art.es 24 y 25), solo resta saber el medio de averiguar la solidez de un cilindro recto, del que tenemos precision de conocer el diámetro de su base y altura. Para esto constrúyase un cubo ó exáedro regular, completamente perfecto en todos sentidos, de un material sólido; cuyo tamaño se concede sea arbitrario, pero no grande porque sería muy costoso, y dificil de arreglar. De la misma pasta ó metal que se construya el cubo (1), constrúyase tambien un cilindro recto, de altura y diámetro totalmente iguales al lado del cuadrado del cubo. Acabados estos dos cuerpos sólidos con la perfeccion que se requiere, tanto en sus figuras, como en la igualdad de dimensiones: bien pulimentados, sin barnizarlos, platearlos, ni dorarlos &c.: pésense cada uno por separado, con la mayor escrupulosidad; cuyo peso (2) hasta por granos y fracciones de gra-

(1). Véase: precauciones para la construccion de estos sólidos (Art. 51).

(2). El peso de que se haga uso, debe ser muy examinado: *véase el artículo 53.*

nos debe de anotarse para el uso, que de uno y otro hay que hacer, segun lo voy á esplicar en los siguientes párrafos.

1.° Hecho puntual y exactamente todo cuanto dejo prevenido: imagínese dividido el lado del cuadrado del cubo en ocho partes iguales, sin trazar línea alguna en las aristas y planos que le forman. Imaginada esta division en el lado del cuadrado del cubo: como el diámetro de la base del cilindro y su altura, son iguales á él: consideramos imaginada la misma division, en ambas dimensiones del cilindro.

2.° El cubo de ocho, es 512: que es decir; que el cubo construido, consta de quinientas doce unidades cúbicas de cierto tamaño, bajo el concepto de la imaginada division (Art. 26, párrafo 1.°). Luego: ya tenemos en el cubo, dos datos conocidos: el uno el número de unidades cúbicas que contiene; y el otro, lo que pesan todas estas unidades, contenidas en dicho cubo. En el cilindro solo conocemos un dato, el cual es el peso, que es lo suficiente para el fin que me propongo.

3.° Las unidades cúbicas de una misma especie, es decir de un mismo tamaño, y de un mismo material, son proporcionales entre sí: tanto en la cabida, cuanto en el peso; porque si veinte unidades cúbicas en vacío, contienen cuarenta cuartillos de agua, ó vino: cuarenta unidades cúbicas de la misma especie, contendrán ochenta cuartillos. Y si veinte unidades cúbicas de plomo, pesan veinte y cinco libras: cuarenta unidades cúbicas de igual tamaño, y del mismo plomo, pesarán cincuenta libras. E invirtiendo el orden de las razones, podremos decir tambien; que si cincuenta libras de plomo, corresponden á cuarenta unidades cúbicas: veinte y cinco libras del mismo plomo, corresponderán á veinte unidades cúbicas, totalmente iguales á los de la primera razon. Luego: penetrados de esta verdad, por medio del peso del cilindro (Art. 26, párrafos 1.° y 2.°), y el auxilio del cubo construidos al intento, podremos obtener la solidez del espresado cilindro: esto es, del número de unidades cúbicas que contiene, estableciendo la proporcion geométrica siguiente. El peso del cubo, es á su volúmen: como el peso del cilindro, es tambien á su volúmen ó solidez; el cuarto término de esta proporcion, será el número de unidades cúbicas que contiene el cilindro construido: iguales en un todo á las unidades cúbicas del cubo, porque su diámetro y altura son totalmente iguales, al lado del cuadrado del cubo (Art. 26): la division imaginada es tambien totalmente igual, y son construidos de un mismo material; circunstancias que era preciso concurriesen, como concurren en estos dos cuerpos para lograr el objeto.

4.° Teniendo averiguado el número de unidades cúbicas del cilindro, del modo establecido en el párrafo anterior, al que se le conoce el diámetro de su base, y altura: solo nos resta hacer la division de ellas, por el número de unidades lineales de su altura: el cociente será el número de unidades cuadradas que contenga exactamente la superficie del círculo de su base, segun lo he demostrado en el artículo veinte y cuatro. Y aprovechándonos de lo demostrado (Art. 25): partiendo las unidades cúbicas del cilindro, por la mitad del rádio: el cociente será la superficie lateral ó convexa de dicho cilindro; cuya superficie partida por la altura, dará de cociente la longitud de la circunferencia. Y hé aqui la resolucion teórica de la cuadratura del círculo aplicada á la práctica, de una manera indudable; salvo que falten las reglas matemáticas, de que he hecho uso para la resolucion de mis cálculos; y que haya que desterrar de las matemáticas las proporciones geométricas.

Del modo de hacer uso de la superficie del círculo, y su diámetro: sin necesidad de la circunferencia.

Art. 27. Averiguada la superficie del círculo, sin haber echado mano de la circunferencia, como queda demostrado en el artículo anterior, forzoso es demostrar tambien, el modo de operar con ella y el diámetro, como hasta aqui se hacía con el diámetro y la circunferencia; aunque no con tan buen éxito como ofrece este método. Para ello esplicaremos la relacion en que está el diámetro con la superficie del círculo.

De la relacion del diámetro con el círculo.

Art. 28. Los cuadrados de los diámetros, son proporcionales á las superficies de sus respectivos círculos. Para convencerse de esta verdad: constrúyase otro cubo de la misma pasta y con las mismas precauciones que el mandado construir (Art. 26); pero de doble lado en su cuadrado que el de aquel. Construido este cubo tal cual se previene, constrúyase tambien un cilindro de igual diámetro y altura que el lado del cuadrado de este cubo mayor; resultando por este medio que el diámetro y altura de este cilindro, son tambien de doble estension, que el diámetro y altura del cilindro primero. Acabados estos dos cuerpos (1) con la perfeccion necesaria, y con las dimensiones exactamente dobles á los sólidos que marca el artículo 26, practíquese lo siguiente.

1.° Se tendrá presente la division imaginada que se haya hecho en aquellos sólidos (Art. 26, párrafo 1.°); y como se imaginó de ocho partes iguales: en estos tiene que imaginarse de diez y seis, porque sus dimensiones son de doble estension; pues de lo contrario las unidades no podrian ser totalmente iguales, como es de absoluta necesidad lo sean aqui para que guarden todas las proporciones necesarias para evitar errores. Hecho esto pésense cada uno de por sí, y anótese su peso y division como el de los anteriores, para el uso que conviene.

2.° Practicado con toda escrupulosidad lo que se previene en el párrafo anterior, tenemos en estos dos últimos sólidos tres datos conocidos, á saber: el peso del cubo, y su volúmen por la division imaginada; y el peso del

(1). Ya de antemano está prevenido que estos dos cuerpos mayores, han de ser de igual pasta ó metal que los primeros.

cilindro. Con estos tres datos, buscaremos el volúmen del cilindro del modo establecido (Art. 26, párrafo 3.º) entablando la proporcion geométrica siguiente; *El peso del cubo, es á su volúmen: que consta de* 4096 *unidades cúbicas; como el peso del cilindro, es tambien á su volúmen, ó solidez;* el cuarto término de esta proporcion será el volúmen del cilindro propuesto, espresado en unidades cúbicas totalmente iguales á las unidades cúbicas del cubo, y de los sólidos construidos (Art. 26). Averiguado el volúmen de este último cilindro, se partirá por las unidades lineales de su altura (Art. 24), que son 16; y el cociente será la superficie del círculo de su base, espresada en unidades cuadradas totalmente iguales á las de la superficie del círculo de la base del cilindro primero (Art. 26).

3.º Conocida pues la superficie del círculo de la base de este cilindro mayor, tenemos los suficientes datos para persuadirnos por nosotros mismos, de si es ó no exacto, que los cuadrados de los diámetros, son proporcionales á las superficies de sus círculos. Para esto no hay mas que hacer, que entablar la proporcion que sigue: *el cuadrado del diámetro del cilindro menor, es á la superficie del círculo de su base; como el cuadrado del diámetro* *del cilindro mayor, es tambien á la superficie del círculo de su base.* El cuarto término de la proporcion precedente, es efectivamente la superficie del círculo de la base del cilindro mayor; de consiguiente, si esta superficie hallada por la proporcion que antecede, conviene como debe convenir exactamente, con la hallada partiendo el volúmen del cilindro por su altura: es claro y evidente, que los cuadrados de los diámetros están en razon geométrica, con las unidades cuadradas de las superficies de sus respectivos círculos, que era lo que pretendia demostrar.

4.º Las operaciones que comprenden los párrafos anteriores, no solo sirven para el convencimiento de que los cuadrados de los diámetros, son proporcionales á las superficies de sus respectivos círculos; sino que, sirven tambien para comprobar el primer cubo y el primer cilindro, para asegurarse en la relacion que está el cuadrado del diámetro con la superficie de su círculo; por lo que si no están construidos con pericia, y pesados con toda escrupulosidad (1): es de necesidad que resulte diferencia en estos cálculos; en este caso es preciso examinar de nuevo uno y otro cubo,

---

(1). Véanse los artículos 51 y 53.

y uno y otro cilindro, y corregir cualesquiera falta ó defecto que tengan, bien sea en su construccion, bien sea en su peso, ó bien en las divisiones imaginadas (1).

5.° Convencidos de que los cuadrados de los diámetros, son proporcionales á las superficies de sus respectivos círculos; si por el método establecido (Art.os 24, 26, y sus párrafos) logramos averiguar exactamente la superficie del círculo de la base de un cilindro recto, no tenemos que hacer mas, que cuadrar el diámetro, y establecer esta razon: *el cuadrado del diámetro, es á la superficie de su respectivo círculo.* Luego: teniendo conocidos el diámetro y superficie de un círculo, si se nos diese otro diámetro para indagar la superficie del círculo á que corresponde: se entablaría la proporcion geométrica siguiente. *El cuadrado del diámetro conocido, es á la superficie de su círculo; como el cuadrado del diámetro dado, es á la superficie de su círculo respectivo;* el cuarto término será la superficie del círculo correspondiente al diámetro dado. Esta es una regla general para todos los círculos sean grandes ó pequeños, que dimana de datos positivos y proporcionales; de cuya proporcion

(1). Véase el artículo 32.

carece la indagacion de la circunferencia, por medio de polígonos inscritos y circunscritos al círculo de igual número de lados, tomando por rádio la unidad simple; por lo que para hallar la superficie de todos los círculos que se presenten, usando este método exacto, para nada necesitamos la circunferencia, mas que para las longitudes de los arcos; *y hé aqui la verdadera cuadratura del círculo* (1); esto es, la que con mayor propiedad se puede llamar asi; porque el cuadrado del diámetro, es proporcional á las unidades cuadradas de su respectivo círculo; lo que no dice tan bien á una simple razon de unidades lineales, llamarse cuadratura, como se llama á la razon del diámetro á la circunferencia (Art.os 2, 3, 4 y 5).

6.° Si se nos diese la superficie de un círculo, y quisieramos averiguar su diámetro, entablaremos la proporcion geométrica invirtiendo el orden de las razones; esto es, *la superficie del círculo conocido, es al cuadrado de su diámetro; como la superficie del círculo dado, es al cuadrado del diámetro que le corresponde.* Averiguado este cuarto término, se estrae la raiz cuadrada, y esta será el diá-

(1). Véase el artículo 38.

metro del círculo dado. En esto tengo que hacer la advertencia siguiente.

ADVERTENCIA. Como son pocos los números que tienen raiz cuadrada exacta, se debe mas bien hacer uso de la razon: *el cuadrado del diámetro, es á la superficie del círculo;* que no: *la superficie del círculo, es al cuadrado de su diámetro;* porque ademas de ser muy pocos los números que tienen raiz cuadrada, es preferible el primer método al segundo, porque no ofrece tanta complicacion; y porque no puede darse superficie de círculo alguno que no sea por mero capricho; á menos que un profesor la indague por el método establecido en los artículos 24, 26, 28 y sus párrafos (1), y despues de indagada proponga ese problema á sus discípulos ú á otros. Esto es muy aplicable á lo que sucedia con la circunferencia, que ignorándose su verdadera longitud, sin embargo, se daban circunferencias para hallar diámetros, como si fuese tan fácil medir aquellas, como medir estos.

Art. 29. Averiguada la superficie del círculo por el método establecido (Art.os 24 y 26); y comprobada su exactitud, por lo esplicado,

(1). Hago esta llamada, á fin de que mis amados lectores fijen su consideracion en lo que dice un autor (Art. 4), y los cargos que yo le hago (Art. 7).

establecido y demostrado (Art. 28, párrafos 1.°, 2.°, 3°, y 4°); é instruidos en el modo de manejarse con el diámetro y el círculo, sin necesidad de la circunferencia (Art. 28, párrafos 5.° y 6.°); atendiendo tambien á lo demostrado (Art. 15, demostraciones 1.ª y 2.ª): mi sentir salvo el de las Academias, es: que no se haga uso de la circunferencia (hallada que sea Art. 25), no siendo para las longitudes de los arcos, (1).

Art. 30. Si determinada la superficie del círculo, tuviesemos necesidad de saber la del semicírculo, cuarto de círculo, ó la de cualesquiera sector; se procederá del modo siguiente. Si conocida la superficie del círculo, se pidiese la del semicírculo; se tomará la mitad de la del círculo, y esa mitad será la superficie pedida. Si se desea la de un cuarto de círculo, se tomará la cuarta parte de la del círculo, ó la mitad de la del semicírculo; y esa cuarta parte del primero, ó la mitad del segundo, será la superficie deseada. Si se apetece la superficie de un sector: si este corresponde á un polígono regular, se dividirá la superficie del círculo por el número de sectores que comprenda el círculo, que se-

(1). Digo que no se haga uso de la circunferencia mas que para las longitudes de los arcos; porque no la necesitamos para nada mas que para eso.

rán tantos, cuantos lados tenga el polígono: el cociente será el número de unidades cuadradas que correspondan á cada uno de los sectores; de consiguiente se sabe la superficie del sector dado. Si el sector correspondiese á un arco, que no pueda acomodarse á polígono regular, entonces hay que proceder del modo siguiente.

1.° La division de los 360 grados en que se ha dividido la circunferencia, corresponde tambien á la superficie del círculo; de consiguiente averiguada la superficie de éste, si se pidiese la de un sector de 21 grados (1), se entablará la proporcion geométrica siguiente; 360.° que comprende la circunferencia del círculo, es á la superficie de dicho círculo, como 21° del arco del sector dado, es á la superficie de dicho sector; el cuarto término será la superficie exacta del sector en cuestion. Y lo mismo se hallará la de otro cualesquiera sector, sea de veinte, treinta, cuarenta ó de los grados que quiera: averiguando primero la superficie del círculo á que corresponda el sector, si no está conocida de antemano.

2° Si en lugar de pedirse la superficie de un sector, se pidiese la superficie de un seg-

---

(1). Supongamos de veinte y un grados el arco del sector dado.

mento; si este corresponde á un sector, cuyo arco correspondiese al triángulo de polígono regular (Art. 12); averiguada la superficie del círculo, se averigua tambien la del polígono (Art. 13): y restando esta de la del círculo, el residuo será la superficie de todos los segmentos del círculo, que serán tantos, cuantos lados tenga el polígono; por lo que partiendo dicho residuo, por el número de lados del polígono, el cociente será la superficie de cada uno de los segmentos: con lo que, se consigue lo que se desea; pero si el segmento corresponde á un sector, que no pueda acomodarse á polígono regular, se practicará lo siguiente: 1º se obtendrá la superficie del sector por el método establecido en el párrafo anterior: 2º se buscará igualmente la del triángulo que queda, segregando el segmento del sector; y 3º se restará la superficie del triángulo, de la superficie del sector, y el residuo será la superficie del segmento cuya área se apetecia.

Precauciones que deben observarse para la construccion de los cuerpos sólidos.

Art. 31. Sirva de regla general, que para la construccion del cubo y del cilindro que previene el artículo 26; y para el cubo y el cilindro que previene el artículo 28; que si se construyen de madera, ha de ser muy seca, y han de hacerse de una misma pieza ó palo; porque si fuese uno de los cuerpos sólidos, de una madera, y los otros de otra; resultaría que la una sería mas pesada que la otra, y no podria tener el buen éxito que las reglas matemáticas demuestran. Si se hace uso de metales, hay que tener el mayor cuidado en que todos los cuerpos sean de uno mismo, y ademas perfectamente purificado: esto es, que no tenga ninguna impuridad ni mezcla alguna de otro metal; porque si estuviesen incorporados diferentes metales, como oro, plata, y cobre, sería mas inexacto, por la escesiva diferencia del peso de cada uno y cualidades que tienen respectivamente; pues el oro como al fundirlo se precipita al fondo del crisol como mas pesado que los demas: la plata queda sobre el oro, y el cobre sobre la plata: resultaría, que en el cuerpo sólido que le tocase mas porcion de oro, pesaría muchísimo mas que lo que le correspondia, en proporcion á los que solo llevasen plata y cobre; y sería una confusion para el que se dedicase ó encargase de esta delicada operacion. En este supuesto, es de necesidad absoluta, que haya mucha pericia en el que se ocupe de la construccion de dichos sólidos: tanto para la eleccion del metal, y su purificacion: cuanto para acabarlos con toda exactitud, sin la mas leve imperfeccion en ningun sentido; advirtiendo tambien, que deben hacerse todos de una vez por medio de fundicion, sin que el martillo trabaje cosa alguna.

Observaciones sobre la division imaginada.

Art. 32. En el artículo 26, párrafo 1.º, he dicho que el lado del cuadrado del cubo, se considere dividido en ocho partes iguales; y por consiguiente queda imaginada la misma division en el diámetro de la base y altura del cilindro, porque está encargado (Art. 26) sean totalmente iguales dichas dimensiones del cilindro y del cubo. Esta division la imaginé para poner el ejemplo que en dicho artículo y sus párrafos he puesto; mas sin embargo advierto se puede considerar arbitraria; pues los mismos efectos surte, imaginando una division que otra, siendo iguales en las dimensiones de los dos sólidos espresados; que es decir, que si se imagina la division de diez en el lado del cuadrado del cubo, hay que imaginar la misma en el cilindro; si de doce, de doce: si de veinte, de veinte &c.; hay que tener el mayor cuidado de operar bajo una misma division en ambos cuerpos; porque en otro caso, sería un absurdo. Y tanto porque puede variarse de division imaginada, cuanto porque no se rebajase la menor cantidad en el peso, he prevenido se imaginase la division sin trazar línea alguna en las aristas y planos que forman el cubo; asi como tampoco en la altura y diámetro del cilindro. Por igual razon, y otras muchas que manifestaré, conviene sean ambos sólidos de dimensiones iguales; si uno las tuviese mayores que el otro, era muy dificil que las unidades cúbicas de ambos cuerpos fuesen totalmente iguales, como es de necesidad que lo sean; porque de no serlo, resultarían errores remarcables. Un cuerpo sólido regular, puede acabarse con toda perfeccion, habiendo pericia en el encargado de construirlo; y acabados los dos de que tratamos, con la misma: las divisiones que se imaginan en ellos, son exactísimas; lo primero porque son imaginadas en líneas rectas, como son diámetro y altura del cilindro, y lado del cuadrado del cubo; y lo segundo, porque emanando la division imaginada de cuerpos perfectos, el resultado tiene que ser exactísimo: porque las líneas imaginadas no aumentan ni disminuyen el volúmen y peso de los cuerpos en que se imaginan; lo que no sucede asi con las líneas materiales, que por finas que se tracen, son susceptibles de aumento ó disminucion en ambos conceptos.

La misma precaucion hay que tener con el cubo y el cilindro que previene el artículo 28: observando la division imaginada que en dicho artículo se prefija, pues está encargado sean de doble dimension estos cuerpos, que los mandados construir en el artículo 26, á fin de lograr que las unidades cúbicas sean totalmente iguales en todos cuatro sólidos.

Precauciones para el peso de los sólidos.

Art. 33. Para pesar los cuerpos sólidos de que tenemos precision de hacer uso (Art.os 26 y 28), para averiguar la superficie del círculo y su circunferencia: no basta pesarlos escrupulosamente por cualesquiera peso, aunque sea por los que llaman pesos de oro (1); es preciso é indispensable arreglar uno á propósito para que no resulte ningun error; pues sino estuviesen arreglados en debida forma, no podrá lograrse el objeto que se desea. En fin debe tenerse entendido, que cualesquiera falta que se cometa por leve que sea: tanto para la

(1). Digo que no basta pesar los sólidos por cualesquiera peso; porque aun esos que llaman de oro, no están exactos algunos.

construccion de los sólidos (Art. 31), é igualdad de dimensiones respectivamente: cuanto en las divisiones imaginadas (Art. 32), ó en su peso, en vano será molestarse; porque no puede obtenerse el exacto resultado que se apetece y prometen mis cálculos, si todo se egecuta como encargo y corresponde á una operacion delicada, que exige inteligencia, y no admite falta alguna en ningun sentido.

Complemento de la cuadratura del círculo.

Art. 34. Esplicado y demostrado teórica y prácticamente, el modo de hallar la superficie del círculo sin hacer uso de la circunferencia, y de hallar esta sin hacerlo de la superficie del círculo; dejaría imperfecta la obra sino esplicase tambien, el medio de indagar la solidez y superficie de la esfera, sin necesidad de la superficie del círculo, ni de su circunferencia; porque aunque ofrece considerables ventajas el conocer la verdadera superficie del círculo, no obstante, este solo descubrimiento no llenaba nuestros deseos con respecto á la esfera, como en el discurso de este cálculo esplicaré. Para que no adolezca pues de esa imperfeccion mi obra, y sea completa la resolucion de la cuadratura del círculo, resolveré este cálculo en los artículos siguientes.

De la solidez de la esfera por el mètodo hasta aqui observado.

Art. 35. La solidez de la esfera segun lo establecido hasta ahora, se halla multiplicando su superficie (1), por el tercio del rádio; pero como este método estaba sugeto á muchos errores: ya por ignorarse la verdadera superficie del círculo: y ya porque por esta poderosa circunstancia, no hay una razon convincente para persuadirse que la superficie de la esfera, sea exactamente igual á la de cuatro círculos máximos (2) de ella; me ha hecho fijar la atencion en este cálculo, y he llegado á concebir el medio único de resolverlo exactamente: que es análogo al de la superficie del cír-

(1). La superficie de la esfera, dicen los autores que es igual á la superficie de cuatro círculos máximos de la misma esfera.

(2). Respetando la dignidad y opinion de los autores, se me dispensará diga, que la superficie de la esfera no se conoce; pues no conociéndose aun el verdadero valor de la circunferencia, tampoco se puede conocer la superficie del circulo; é ignorando la superficie de éste, mal se puede asegurar, que la superficie de cuatro círculos máximos, es igual á la de la esfera; esto creo no ofrezca duda alguna.

culo (Art.^{os} 24 y 26); el cual voy á manifestar en el artículo que sigue.

De la solidez exacta de la esfera.

Art. 36. La misma propiedad que tiene el cuadrado del diámetro, con la superficie del círculo: la misma tiene el cubo del diámetro, con la solidez de la esfera; pues si el cuadrado del diámetro, es proporcional con las unidades cuadradas de la superficie de su respectivo círculo (Art. 28), el cubo del diámetro, es proporcional tambien con las unidades cúbicas de su esfera. El cubo del diámetro, es totalmente igual, al cubo que materialmente se puede circunscribir á la esfera engendrada con dicho diámetro; y por consiguiente la esfera, es totalmente igual, á la que materialmente se puede inscribir á dicho cubo; luego, el cubo es proporcional con la esfera inscrita; luego las unidades cúbicas que contiene el cubo ó exaedro regular, están en razon geométrica, con las unidades cúbicas que puede contener la esfera inscrita á dicho cubo; esto es claro. Para convencernos de esta verdad, é indagar el volúmen exacto de la esfera, se egecutará lo siguiente.

1.° Constrúyase un cubo ó exaedro regular, con las mismas precauciones, y la misma exactitud que se previene (Art. 26) para la construccion de aquel cubo y del cilindro; y constrúyase asimismo una esfera de igual diámetro que el lado del cuadrado del cubo propuesto. Construidos estos sólidos del modo que se espresa, es facil comprender, que la esfera aunque está independiente del cubo, es totalmente igual á la que se considera inscrita en dicho cubo: ó viceversa, que el cubo es totalmente igual, al que puede circunscribírsele á la esfera; luego, estos cuerpos aunque independientes el uno del otro, nos pueden suministrar los datos necesarios para obtener la solidez de la esfera inscrita, con mas exactitud, que si materialmente se le sobrepusiesen los ocho ángulos sólidos que le faltan para formar el cubo. Penetrados de esta verdad, y acabados estos cuerpos segun dejo espresado, pésense ambos sólidos escrupulosamente, y anótese el peso de cada uno para el uso conveniente.

2.° Egecutado con todo esmero, lo que se previene en el párrafo anterior; imagínese dividido el lado del cuadrado del cubo, en diez partes iguales (1); y para lo que convenga,

(1). Esta division imaginada, es arbitraria; se puede imaginar dividido en las partes que se quiera, como queda esplicado (Art. 52.)

como que el diámetro de la esfera inscrita, es totalmente igual al lado del cuadrado del cubo, tambien se considerará imaginada en él la misma division. Imaginada esta division en el cubo y diámetro de la esfera inscrita: tenemos conocidos en estos dos cuerpos, tres datos que nos suministrarán los auxilios necesarios para averiguar el volúmen de la esfera inscrita; pues aunque en la esfera, no concurren las cualidades que en el cilindro recto (Art. 24), por la incertidumbre de los cálculos de multiplicacion para obtener su solidez; tenemos la ventaja de la proporcion geométrica en que están las solideces de estos cuerpos, que es la que garantiza mi cálculo. En este concepto pues, conociendo en el cubo el peso y su volúmen por la division imaginada: y conociendo tambien el peso de la esfera inscrita; para obtener la solidez de esta, no hay otra cosa que hacer que entablar la proporcion siguiente: *El peso del cubo, es á su volúmen que consta de* 1000 *unidades cúbicas; como el peso de la esfera inscrita, es á su solidez ó volúmen;* el cuarto término de esta proporcion, será indisputablemente el volúmen de la esfera inscrita de que se trata; y hé aqui el medio mas exacto de indagar la solidez de la esfera, sin esponerse á los errores remarcables que ofrece el método observado hasta el presente. Para convencerse de la exactitud de este cálculo: véase el artículo 26, y sus párrafos, donde hago las esplicaciones y demostraciones convenientes, para venir en conocimiento de que las unidades cúbicas de la misma especie, son proporcionales entre sí: ya sean en vacío: ya sean en su peso; por consiguiente omito repetir aqui las mismas demostraciones.

3.° Averiguada la solidez de la esfera inscrita al cubo, por el método establecido en el párrafo anterior: ya conocemos la relacion exacta, en que está el uno con la otra, ó esta con aquel; por consiguiente tenemos logrado cuanto podia apetecerse en el decantado problema de la cuadratura del círculo: asegurando está resuelta totalmente de una manera positiva é incontrastable; no falta mas que ejecutar cuanto dejo prescrito y prescribiré en el resto de la obra, para que tenga el feliz éxito que me prometo, como en diferentes artículos he manifestado, con referencia á la superficie del círculo. Conocida la relacion en que está el cubo con la esfera inscrita, espresada en unidades cúbicas: si se nos diese otro cubo para hallar la solidez de la esfera inscrita que le corresponde, se entablará la proporcion geométrica que sigue; *el volúmen del cubo cono-*

cido, es al volúmen de su esfera inscrita; como el volúmen del cubo dado, es al volúmen de su esfera inscrita; el cuarto término de esta proporcion, será el número de unidades cúbicas que contendrá ó podrá contener la esfera inscrita al cubo dado.

4.° Si en lugar de darnos el cubo para hallar la solidez de la esfera inscrita, se nos diese el diámetro de la esfera cuyo volúmen se desea: se elevará al cubo el diámetro dado, y se entablará la proporcion siguiente; *el volúmen del cubo conocido, es al volúmen de su esfera inscrita; como el cubo del diámetro dado, es al volúmen de la esfera de dicho diámetro;* el cuarto término, será el volúmen de la esfera cuyo diámetro fué dado.

5.° Si averiguada la relacion en que estan el cubo y la esfera inscrita: se nos diese la circunferencia del círculo máximo de otra esfera para hallar el volúmen de ella; en este caso, se averiguará á que diámetro corresponde la circunferencia dada (1); y averiguado que sea, se eleva al cubo, y se entabla la proporcion como en el párrafo anterior; esto

---

(1). Esta averiguacion se hará entablando la proporcion: La circunferencia exacta (Art. 25) es al diámetro; como la circunferencia del círculo máximo dado, es al diámetro que le corresponde.

es: *el cubo conocido, es á su esfera inscrita; como el cubo del diámetro correspondiente á la circunferencia dada, es al volúmen de la esfera de la cual se dió la circunferencia de un círculo máximo de ella;* el cuarto término será la solidez de la esfera cuya circunferencia del círculo máximo se ha dado.

6.° Creo haber esplicado lo concerniente á la solidez de la esfera; ahora me resta esplicar el modo de hallar la superficie de ella. Para esto fígese la consideracion en que siendo exacto que multiplicando la superficie de la esfera, por el tercio del rádio, produce el volúmen de la esfera; partiendo el volúmen de la esfera, esto es las unidades cúbicas que contiene, por el tercio del rádio: dará de cociente la superficie de la esfera; esto es evidente. Luego, si por el método establecido en este artículo, párrafos 1.° y 2.°, conocemos el verdadero volúmen de la esfera: partiéndolo por el tercio del rádio, obtendremos la superficie de la esfera, con mas exactitud que de ninguna otra manera, que pueda imaginarse; por consiguiente nada mas hay que desear en esta cuestion. Y hé aqui descubierto totalmente el misterio, y resuelta teórica y prácticamente la cuadratura del círculo de una manera positiva é indudable, con toda la exactitud que la misma ciencia nos enseña, y la razon natural nos dicta; pues sin esponernos á las inexactitudes que ofrece la razon geométrica, del diámetro con la circunferencia buscada por polígonos y la unidad simple, buscamos la superficie del círculo exactamente (Art.os 24 y 26): y hacemos todo el uso necesario con el diámetro y el círculo (Art. 28), sin necesidad de la circunferencia; y con mas feliz éxito, que el que nos ofrecía un cálculo equivocado. Y asi mismo, averiguamos la solidez de la esfera, y su superficie, sin echar mano de la superficie del círculo; luego creo haber llenado el hueco de mi deber segun mi programa, y satisfecho la ansiedad pública en toda la estension de la palabra; persuadiéndome que no podrá exigirse de mi, ni de otros, mayor exactitud en la resolucion de la cuadratura del círculo, que la que ofrecen mis cálculos, porque no lo permiten las reglas matemáticas. Fígese la atencion en el artículo 20.

7.° Para probar evidentemente cuanto he sentado en el párrafo 2.° de este artículo: constrúyase otro cubo de la misma pasta que el mandado hacer (Art. 36, párrafo 1.°), y de doble lado en su cuadrado, que el de aquel; igualmente constrúyase una esfera de igual diámetro que el lado del cuadrado de este último cubo. Hechos estos dos cuerpos de doble dimension en su lado y en su diámetro, que la de aquellos: es fácil concebir que las unidades cúbicas de estos cuerpos, serán totalmente iguales en unos sólidos, que en los otros, observando la misma division; esto es, dividiendo en veinte partes iguales el lado de este cubo, porque es de doble lado que el primero, y que está dividido ó imaginado dividido en diez partes; en este supuesto, y considerado dividido en las veinte partes iguales el lado del cuadrado de este nuevo cubo, constará este de 8000 unidades cúbicas iguales en un todo á las del primero; por consiguiente las que resulten en la esfera inscrita, gozarán de la misma igualdad. Seguros de esta verdad, pésense estos cuerpos cada uno por sí solo como los anteriores, y anótese su peso para operar con ellos de la manera que convenga al objeto propuesto. Hecho esto con toda precision, se entablarán las dos proporciones geométricas siguientes; primera; *el volúmen del primer cubo (Art. 36, párrafo 2.°), es al volúmen de su esfera inscrita; como el volúmen de este nuevo cubo, es al volúmen de su esfera inscrita;* el cuarto término de esta proporcion, será la solidez de la esfera inscrita del cubo mayor. Resuelta esta primera proporcion, entáblese la segunda en estos términos: *el peso de la primera esfera* (1), *es al volúmen de dicha esfera; como el peso de la segunda esfera, es á su volúmen.* El cuarto término de esta segunda proporcion, será tambien el volúmen ó solidez de la esfera inscrita al cubo mayor; por consiguiente, si el cuarto término de la primera proporcion, conviene como debe convenir exactamente, con el cuarto término de la segunda; me persuado que será indisputable la exactitud de este cálculo (2). Conseguido esto por medio de las reglas prescritas en este artículo y sus párrafos, y las que se previenen en los artículos que se citan, está logrado todo cuanto puede desearse en el particular; lisongeándome haber sido yo el autor de este descubrimiento, tan ansiado ha muchos siglos.

Art. 37. El título de este folleto es: *resolucion teórica, con aplicacion á la práctica, de la cuadratura del círculo:* ó sea *descubrimiento del misterio de la cuadratura.* Esto creo haberlo resuelto y demostrado evidente-

(1). Entiéndase por primera esfera, la mas pequeña; y por 2.ª la mayor.

(2). Si no resultasen iguales el cuarto término de la primera proporcion, y el cuarto término de la 2.ª, se reconocerán los cuerpos de nuevo á fin de examinar si tienen alguna falta, para corregírsela. *Véase art. 28, párrafo 4.°*

mente, patentizando los errores padecidos hasta aqui, y valiéndome de dos cuerpos regulares, (Art. 26) para que con el auxilio de el uno, se consiguiese la superficie de la base del otro, y la circunferencia del círculo; y de otros dos sólidos tambien regulares (Art. 36) para indagar la solidez de la esfera, y su superficie, de una manera indudable; evitando la confusion é inexactitud que ofrece el método hasta aqui observado, por haber bautizado mal la cuadratura del círculo (1). Y me persuado, que ó han de fallar las reglas concernientes á las solideces de los cuerpos: ó de no fallar (como de ello estoy persuadido) tampoco pueden fallar mis cálculos, fundados en datos positivos como digo en mi artículo primero; y si alguno dudase aun de esta verdad, la voy á patentizar con la mayor evidencia y claridad por conclu-

(1). Digo por haber bautizado mal la cuadratura del circulo; porque el haber dado esa denominacion á la relacion del diámetro con la circunferencia, ha sido: no solo porque se persuadieron los autores, que de su exactitud pendia la de la superficie del circulo, y la de la esfera, su solidez y la de otros cuerpos; sino porque, se persuadieron tambien de que la indagacion de la circunferencia no tenia otra solucion, que la que ellos propusieron é investigaron por medio de poligonos inscritos y circunscritos al circulo, tomando por rádio la unidad simple. Figese la atencion en todo lo que comprende la primera parte de esta obra, y en el articulo 20 y sus párrafos.

sion de esta pequeña obra, de la manera siguiente.

Observaciones de comprobacion de mis cálculos.

Art. 38. Como que yo no tengo el carácter de profesor, ni director de Universidad ni de Academia alguna; ni me asiste otro dictado ni otra recomendacion, que el haber sido alumno de un colegio militar que desapareció como el humo (1): me faltará aquel prestigio que debe tener todo escritor para ser aceptas sus tareas; y por consiguiente es fácil, que haciendo eco mis argumentos de la primera parte de esta obra, se impugnen mis demostraciones, y se niegue la exactitud de los cálculos que comprende la segunda. Por esta razon, y para que no sea mirada con indiferencia una cosa que es de la mayor importancia, voy á llamar la atencion de mis amados lectores, con las observaciones que siguen.

1.ª Podrá negarse la exactitud de mis cálculos, arguyendo (aunque sin razon), que los

(1). Esta desaparicion, es la que me ha impelido á hacer conmemoracion de aquel brillante establecimiento, y de sus dignos director y primer profesor de matemáticas, á fin dar al público un verdadero testimonio de mi gratitud.

cuerpos sólidos no son suficientes datos para determinar la superficie del círculo, y su circunferencia, y menos la solidez de la esfera; porque como cuerpos materiales, tambien deben serlo las operaciones ó cálculos que con ellos se hagan; todo lo que se opone á la teoría numérica. A esto respondo yo preguntando. ¿Y de qué datos se han valido los autores? se me concederá que se valieron de figuras, pues bien, si ellos se valieron de figuras cuyos perímetros son inconexos con la circunferencia (1): yo me he valido de cuerpos regulares, engendrado el uno de ellos sobre la figura mas principal, cual es el mismo círculo, y ademas de la esfera misma. Si ellos se han valido de cálculos teóricos, que no tienen aplicacion á la práctica: yo me he valido de cálculos teóricos que tienen exacta aplicacion á ella, como lo dejo plenamente demostrado en los artículos que comprende la resolucion de la cuadratura. Si ellos se han valido de la unidad simple para que les sirviese de rádio: yo no eché mano de ella: tanto por la perfeccion é imperfeccion del

---

(1). Digo que sus perímetros, son inconexos con la circunferencia; porque si bien los polígonos de igual número de lados, son semejantes entre si; ninguna semejanza tienen los perímetros con la línea curva; ademas de que los polígonos de que se trata, son imaginarios. *Véase artículo* 18.

polígono de muchos lados (Art. 15): cuanto por las dificultades que ofrece la aproximacion de los perímetros á un mismo tiempo á la circunferencia (Art. 16, observacion): y cuanto porque la unidad simple ofrece los errores que dejo demostrados (Art.os 17, 18, y 19); ya porque no se conoce la longitud de los lados de los polígonos, y por esta razon se ignora cuando se estralimita de la unidad; y ya porque como la unidad representa un diámetro (Art. 18, demostracion 3.a), y la circunferencia es mayor que tres diámetros y menor que cuatro, (sin saberse cuanto es mayor que los tres y menor que los cuatro diámetros), la fraccion que resulta mas de los tres, forzosamente tiene que ser complicadísima, y ofrece confusiones que deben evitarse; tanto porque las matemáticas no admiten argumentos sofísticos, cuanto porque no es justo que los hombres se dementen pretendiendo llegar á la circunferencia, marchando por el rumbo aparente que les marcaba la brújula (1), esto es una ilusion mate-

(1). Para transferirse de un punto á otro, no puede marcharse por el rumbo aparente de la aguja: es preciso reducir este rumbo aparente, á verdadero ó del mundo; de lo contrario jamas se llegaria al punto deseado. En este paralelo, está la circunferencia; pues no puede arribarse á ella por el rumbo aparente de los polígonos y la unidad simple.

mática. Y últimamente, si los autores que se ocuparon en la resolucion de este problema, tomaron por cuadratura del círculo, la razon geométrica en que están ó pueden estar, el diámetro y la circunferencia, cuyas líneas ninguna relacion tienen con el cuadrado: yo tomo por cuadratura, la razon geométrica en que está el cuadrado del diámetro, con las unidades cuadradas que contiene la superficie del círculo (Art. 28); y por complemento de la cuadratura, la relacion geométrica en que está el cubo ó exáedro regular con la esfera inscrita, que todo ofrece la exactitud y ventajas que pueden apetecerse; eludiendo por este medio único y exacto, la confusion que ofrece la trasformacion de la circunferencia en el perímetro de un polígono de muchos lados, en que se confunde al rádio con la apotema, sin lograr la menor ventaja en cálculo de tanta importancia. Esta es una observacion que debe llamar muy particularmente la atencion de las Academias, y examinar cual de los métodos es el mas exacto, para observarlo puntualmente (1).

2.ª La razon geométrica 7:22 hallada por Arquimédes, escede á la de 113:355 hallada

---

(1). Tengo la satisfaccion que adoptarán el que yo propongo, por estar exento de los errores á que está sugeto el observado hasta aqui.

por Mecio, en $\frac{1}{113}$; y á la 1:3'141592 &c. hallada por Vallejo, Bails y otros autores, (tomando las seis primeras cifras decimales) en 0'008856. Ahora bien: ya vemos que difieren unas razones de las otras; por consiguiente, ó todas tres son inexactas, ó de no serlo alguna de ellas ¿qué prueba se hace para averiguarlo? este es un argumento, tan poderoso como necesario para descubrir la verdad; pues las reglas aritméticas (base fundamental de las matemáticas) si bien todas ellas tienen sus respectivas demostraciones para egecutarlas por principios teórico numéricos: traen consigo ademas, la prueba mas evidente, cual es, la exacta aplicacion á la práctica; como que si esta les faltase, serian inexactas aquellas, é ilusorias estas; pero como dichas reglas numéricas, convienen exactamente con las operaciones prácticas que se hacen respectivamente con cantidades de metálico, ó cantidades de otra especie: por eso estamos convencidos hasta la evidencia de su exactitud. Y la misma exigencia que tienen dichas reglas aritméticas para llamarlas (como se llaman con toda propiedad) positivas: la misma les corresponde á todos los cálculos que se consideran geométricos: ó de lo contrario dejarán de serlo. Es asi, que las razones geométricas (Art.os 3, 4, y 5) en que nos ponen al diámetro con la circunferencia, carecen de esta exigencia (1): luego no podemos asegurar cual de las tres es la mas exacta, ó la mas inexacta, hasta no hacer la prueba con ellas. ¿Y cómo se hace esta prueba? Yo me persuado atento á los principios sentados, y á lo demostrado en los artículos 8, 15, 17, 18, y 19, que la única prueba que tiene este cálculo, y la mas evidente es, la comparacion con el cilindro recto; esto es, hallar la solidez del cilindro bajo las tres razones, y comparar cada una de las solideces, con la que real y verdaderamente tiene el cilindro; de ese modo podremos indagar la exactitud de la razon que la tenga, ó la inexactitud de todas. ¿Y cómo se obtiene la solidez de un cilindro recto, si dudamos cual de las tres razones debemos usar para hallar la superficie del círculo de su base? esa es la mia; no solamente se duda de la razon que debe usarse, sino de la exactitud de la superficie del círculo, hallada por cualesquiera

(1). Digo, que las razones geométricas en que nos ponen los autores al diámetro con la circunferencia, carecen de la exigencia, que las reglas aritméticas; porque sino careciesen, una sola razon regiria; y no se mandaría hacer uso indistintamente de cualesquiera de las tres, como suficiente cualesquiera de ellas para la práctica; ¡cómo si la práctica no exigiese tanta ó mas exactitud, que la teoria!

de las razones propuestas (Art.os 3, 4, y 5), por lo demostrado en los artículos 15, 17, 18, y 19. Luego ¿de qué modo se puede obtener? se obtendrá observando puntualmente lo establecido en los artículos 24, y 26, que es el único auxilio de prueba que tenemos para este caso; pero positivo é indudable, como en dichos artículos he demostrado; sin el cual, ninguno podrá probar cual de las tres razones geométricas es la mas exacta; porque la solidez de un cilindro recto, no puede averiguarse con exactitud, sino se conoce exactamente la superficie del círculo de su base; ¿y cómo se conoce esta superficie? no tenemos otro recurso para conocerla, que el auxilio del volúmen y peso del mismo cilindro; porque la solidez de un cilindro sin este auxilio, es materia imposible hallarla porque ignoramos la superficie del círculo de su base; y sino digáseme ¿de qué otro modo se puede conocer la verdadera superficie del círculo? en vano será discurrirlo, porque no lo hay ni puede haberlo (1). Luego,

---

(1). Digo, que no hay otro recurso para conocer la superficie del círculo, que el auxilio del cilindro; porque la geometría no presenta reglas mas concisas ni mas positivas, que las que nos suministra ese cuerpo, como lo dejo esplicado y demostrado en su lugar. Se dirá que es dificil arreglar los sólidos de que hago uso (Artículos 26 y 56), para resolver el problema; pero si bien convengo en que hay difisi hallamos la superficie del círculo de la base del cilindro, haciendo uso de las tres razones, y cada una de ellas la multiplicamos por la altura del cilindro: si alguno de estos productos, conviene con la solidez hallada por medio del peso y las divisiones imaginadas (Art. 26): la razon á que corresponda el producto que iguale con la verdadera solidez del cilindro, aquella será la exacta; y si ningun producto iguala, ninguna razon es exacta. Esto es fácil concebirlo, fijando la consideracion en que, la altura del cilindro es la misma para hallar su solidez, sea con la superficie de su base obtenida con la razon $\frac{A}{}$, con la razon $\frac{B}{}$, ó con la razon $\frac{C}{}$; de consiguiente, en la altura no está el error, que está en la superficie del círculo de su base; esto es muy claro. Luego si nos convencemos de esta verdad, es fácil convencerse tambien del medio de hallar la circunferencia del círculo por cálculos semejantes (Art.os 24, 25, y 26), como tambien de la exactitud de la solidez de la esfera indagada por la relacion geométrica en que está el cubo ó exáedro re-

---

cultad para construirlos con toda exactitud: no será un imposible esta obra para un hombre de pericia, como indisputablemente lo es, el cálculo hecho con los polígonos figurados numéricamente con la unidad simple. *Véanse los artículos* 15, 16, 17, 18, *y* 19.

gular, con la esfera inscrita (Art. 36); razon por la que es preciso concederme, que mis cálculos hechos con el auxilio de los cuerpos sólidos, son mas exactos que los hechos con figuras, que era lo que pretendia demostrar en comprobacion de la resolucion ofrecida y demostrada.

Atento á lo cual: respetables é ilustres profesores, que consagrasteis vuestras tareas á la indagacion de la razon geométrica en que está el diámetro con la circunferencia; y que por no haberla hallado exactamente, la bautizasteis de cuadratura del círculo; no os desdeñeis de que yo sin tener el dictado de profesor, haya fijado mi limitada penetracion en este problema, y haya descubierto el grande arcano matemático que tantos desvelos os ha causado: no; no os desdeñeis vuelvo á decir; porque si los primeros hombres del mundo lo hubiesen penetrado y sabido todo, todo lo hubiesen escrito, y nada tendriais que escribir vosotros ni vuestros sucesores; pero un misterio que no está á nuestro alcance, de mayor importancia que el que encerraba la cuadratura del círculo, lo permite así: para que el hombre en todas épocas tenga ocupaciones en que egercitar su entendimiento, y ocasiones de admirar el poder y sabiduría del Autor de la naturaleza. En los primeros siglos de nuestra era, Toloméo hacia mover los planetas á su albedrío; pues considerando inmóvil la tierra, los hacia girar todos en su derredor, como si el globo terráqueo fuese el centro de la grande bóveda celeste. Al sistema de Toloméo, siguió el de Tico Brahe, que haciendo una particular combinacion del movimiento de los astros: á unos los contemplaba girando en derredor de la tierra, y á otros en derredor del Sol. Mas sin embargo de que para el Hacedor del mundo, nada era imposible, y que de cualquiera manera que el hombre imaginase el movimiento de los astros, de aquel podian tenerlo; no obstante, como el Ser Supremo, no podia hacer ninguna cosa anómala; posterior á Toloméo, y Tico Brahe: el célebre Copérnico, fijó su ilustrada consideracion en ese portentoso misterio; y reflexionando que si el Sol diese vuelta diurna en derredor de la tierra, quedaban otros muchos cuerpos opacos de los situados en el grande espacio, privados de los inmensos beneficios que diariamente prodiga al que nosotros habitamos: demostró todo lo contrario de lo que aquellos célebres astrónomos habian demostrado; pues haciendo centro al Sol, como cuerpo mayor y necesario para todos los demas, hizo ver con demostraciones evidentes, que estos giran sobre su eje al frente del astro luminoso; y los satélites, en frente y derredor de sus planetas. Este sistema del mundo demostrado por Copérnico, ofreció muchas dificultades el admitirlo: ya por lo demostrado por Toloméo, y Tico Brahe: y ya porque parece habia testos sagrados que estaban en contradicion de sus sábias demostraciones; pero sin embargo de tanta oposicion: fuese porque se interpretasen mejor los sagrados testos; ó fuese por eso y otras muchas observaciones astronómicas: lo cierto es, que está admitido y es el que se observa. Ahora bien: si el sistema Copernicano en medio de tantos obstáculos que tuvo para su admision, fue admitido y observado ¿habrá alguna dificultad en admitir la resolucion de la cuadratura del círculo, que nada tiene de divina, mas que lo que la toque por ser invencion humana? Si el sistema de Copérnico cuyas demostraciones no estan al alcance de todos: fue admitido y observado ¿dejará de serlo la resolucion de la cuadratura del círculo, que está al alcance de todos los que conocen las solideces de los cuerpos? ¡Há! yo me persuado que en vista de mis fundadas objeciones para descubrir el misterio de la cuadratura; y de las demostraciones tan patentes que comprende mi resolucion, no habrá duda en su admision; porque si hombre soy, hombres fueron tambien los que denominaron cuadratura del círculo, á la razon geométrica en que pueden estar dos líneas, que sobre no tener ninguna analogía con el cuadrado, una de ellas se desconocia, y no podia dar los buenos resultados que se prometieron. Por consiguiente, fundado en razones fundamentales, he resuelto todos los casos, que comprende el misterio de la cuadratura del círculo; cuyo descubrimiento doy á la luz pública, para que de ello se haga el uso que convenga á la ilustracion matemática; en obsequio de lo cual, suplico á los autores y esclarecidas Academias, fijen su ilustrada y noble consideracion, en todos y cada uno de los artículos que comprende mi obra; como tambien en todos y cada uno de los particulares que abraza, esencialmente necesarios para la resolucion y descubrimiento del misterio de la cuadratura; teniendo presente que en mis cálculos y demostraciones, no hay testo sagrado que esté en contradicion, como los habia contra el sistema planetario que demostró Copérnico. Aqui solo las razones fundamentales que la misma ciencia nos enseña, podrán oponerse á mis principios teórico-prácticos; si hubiese alguna que pueda contrarestar las mias. Y en apoyo de este convencimiento advierto, que los célebres autores que cito (Art.os 3, 4, 5, y 10), ya dicen que sus cálculos para averiguar la circunferencia, son aproximados; de consiguiente, ya penetraron que no eran exactos. Luego, con esta prevencion que hacen ellos, y lo que yo he esplicado y demostrado, es suficiente para convencerse de que los mios tienen toda la tendencia de exactitud, que corresponde á la verdadera solucion del problema que dejo resuelto.

Talentos sublímes: si bien el título del folleto está esplícito y conciso, su esplicacion y demostraciones no lo están menos en su exactitud, aunque no lo estén en elocuencia; porque como es un escrito de poco volúmen, que versa sobre una cosa muy ansiada, seria facil que otro se atribuyese lo que su discurso no ha alcanzado, si por corregirlo tuviese la debilidad de consultarlo. Esta sola razon amados lectores, es muy poderosa para conocer que tendrá algunos defectos; pero esa misma razon debe servirme de una recomendacion eficaz, para obtener indulgencia de todos ellos. En este sano concepto, espero de la noble consideracion y probidad de la ilustracion Europea, se digne darle la debida acogida, para no marchitar los laureles que merezcan mis tareas en descubrimiento tan importante.

FIN.

consiguiente, ya penetraron que nó eran exactos. Luego, con esta prevencion que hacen ellos, y lo que yo he esplicado y demostrado, es suficiente para convencerse de que los mios tienen toda la tendencia de exactitud, que corresponde á la verdadera solucion del problema que dejo resuelto.

Talentos sublimes: si bien el título del folleto está esplícito y conciso, su esplicacion y demostraciones no lo están menos en su exactitud, aunque no lo estén en elocuencia; porque como es un escrito de poco volúmen, que versa sobre una cosa muy ansiada, seria fácil que otro se atribuyese su discurso no ha alcanzado; si [illegible] corregirlo [illegible]iese la debilidad de consu[illegible]. [illegible] la razon amados lectores; es mu[illegible]dero [illegible]er que tendrá algunos [illegible]; [illegible] misma razon debe servirle de una recomendacion eficaz, para obtener [illegible] de todos ellos. En este sano concepto, [illegible] de la noble consideracion y proteccion de la ilustracion Europea, se digne darle su debida acogida, para no marchitar los laureles que merezcan mis tareas en descubrimiento tan importante.

ERRATAS.

DEDICATORIA.

PAG.	LINEA.	DICE.	LEASE.
3.ª	20	se pro-	le pro-

RESOLUCION TEORICA.

PAG.	LINEA.	DICE.	LEASE.
31	7	ectágono	exágono
Id.	9	del octá-	del ectá-
76	1.ª	doscientas	doscientos
95	12	á los	á las
Id.	17	del número	el número

ERRATAS.

DEDICATORIA.

Pág.	Línea.	Dice.	Léase.
3.ª	20	se pro-	la pro-

RESOLUCION TEORICA.

Pág.	Línea.	Dice.	Léase.
31	7	octágeno	exágono
Id.	9	del octá-	del ectá-
76	1.ª	doscientas	doscientos
95	12	á los	á las
Id.	17	del número	el número

RESOL

DE LA

UADR

DEL

ÍRCUL