ACADEMIA DE ARTILLERÍA.

CURSO

DE

MECÁNICA APLICADA Á LAS MÁQUINAS.

1.ª PARTE.

LECCIONES ORALES PROFESADAS

POR

D. ARTEMIO PEREZ,

CORONEL GRADUADO TENIENTE CORONEL DE ARTILLERÍA.

SEGOVIA:

IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, NÚMS. 40 Y 42.

1876.

ACADEMIA DE ARTILLERÍA.

CURSO

DE

MECÁNICA APLICADA Á LAS MÁQUINAS.

1.ª PARTE.

LECCIONES ORALES PROFESADAS

POR

D. ARTEMIO PEREZ,

CORONEL GRADUADO TENIENTE CORONEL DE ARTILLERÍA.

SEGOVIA:

IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, NÚMS. 40 Y 42.

1876.

AL SEÑOR

DON TOMÁS DE REYNA Y REYNA

BRIGADIER DE ARTILLERÍA,

como débil testimonio de respetuoso cariño y distinguida consideracion, ruégale con el mayor encarecimiento, acepte este modesto trabajo, su apasionado amigo y subordinado

ARTEMIO PEREZ.

CURSO

DE

MECÁNICA APLICADA

Á LAS MÁQUINAS.

ESTE CURSO COMPRENDE:

1.° *Una parte preliminar que constituyen algunas definiciones y la descripcion de aparatos dinamométricos; la teoría general de las máquinas en movimiento, y las resistencias pasivas en los cuerpos sólidos.*

2.° *Breves nociones de Cinemática aplicada y ligero estudio de algunas máquinas.*

3.° *Clasificacion de los motores industriales.—Motores animados.—Motores hidráulicos.*

4.° *Máquinas de vapor.*

5.° *Teoría de la resistencia de materiales.*

LECCION 1.ª

SUMARIO.

1.º Carácter distintivo de la Mecánica aplicada.—2.º Constitucion de las máquinas. Partes principales que hay que distinguir en ellas.—3.º Fuerzas que hay que considerar en toda máquina —4.º Clasificacion de las máquinas. —5.º Cuestiones que se presentan en el estudio de las máquinas.—6.º Unidad para valorar la fuerza de las máquinas..—7.º Reduccion de una unidad á otra. —8.º Sobre el trabajo de las fuerzas.—9.º Valor medio de una fuerza variable. —10. Aparatos dinamométricos.—11. Dinamómetros de punzones ó estilos y tira de papel.—12. Dinamómetros totalizadores.—13. Dinamómetros de rotacion.—14. Dinamómetros de rotacion, de punzones y tira de papel.—15. Dinamómetro de rotacion totalizador.—16. Dinamómetros de motor cronométrico. —17. Dinamómetro de rotacion de Mr. Taurines.

§ **1. Carácter distintivo de la Mecánica aplicada**.-*La Mecánica racional ó general* que hemos definido en el último curso diciendo que era la ciencia de las fuerzas y del movimiento, es la base de la *Mecánica aplicada á las máquinas*, objeto de las presentes lecciones.

La primera, fundada sobre reducido número de principios, estudia las cuestiones bajo un punto de vista meramente especulativo. La segunda, haciéndolo en las condiciones ordinarias de la práctica, necesita establecer ciertas hipótesis con las que se facilita la aplicacion del cálculo, y se deducen leyes que concuerdan sensiblemente con los resultados de la observacion y la esperiencia. En aquella, todas las verdades presentan un carácter de exactitud matemática; en la última, el de aproximacion únicamente.

§ 2. **Constitucion de las máquinas.—Partes principales que hay que distinguir en ellas.**- Las *máquinas* se pueden considerar constituidas en último análisis por varios cuerpos sólidos ó piezas materiales comunicándose unas con otras, cuyo número, forma y disposicion dependen principalmente del objeto especial á que se las destina y tambien, respecto de las usadas en la industria, á las que nos referimos siempre, de circunstancias que con oportunidad iremos señalando.

En toda *máquina* hay que distinguir:

1.° *El órgano ó miembro receptor*, así llamado por recibir directamente la accion de la fuerza motriz.

2.° *El útil, herramienta ú órgano operador*, que ha de ejecutar la *obra ó trabajo industrial.*

3.° Los *órganos* llamados de *trasmision y trasformacion* mediante los que y partiendo de un movimiento dado del órgano receptor, el útil toma, en cuanto á direccion y velocidad, el más conveniente al trabajo industrial que deba hacer.

§ 3. **Fuerzas que hay que considerar en toda máquina.**-Las distintas fuerzas que obran en una máquina en actividad reciben por lo comun estas denominaciones: *fuerzas motrices, motoras ó movientes* las que obrando directamente sobre el receptor lo ponen en movimiento, en cuyo número hay que considerar la *gravedad* ó *peso del agua, la elasticidad del vapor, la fuerza muscular de los animales, la impulsiva del viento* etc; *fuerzas resistentes útiles* ó *resistencias útiles* las que proceden de la *manobra,* ó sea de la materia que se *trabaja,* ó con más generalidad, las que nacen del efecto mismo que se busca y para el que se ha construido la máquina; *fuerzas resistentes nocivas ó resistencias pasivas* ó *nocivas* las que se originan en diversos puntos de las máquinas cuando estas se hallan en movimiento, á cuya clase pertenecen los *rozamientos, los choques, las vibraciones* etc.

A la clasificacion anterior de las fuerzas, corresponde otra análoga de los trabajos que producen, llamados respectivamente *trabajo motor, trabajo útil* y *trabajo nocivo*; el primero es considerado como positivo y los dos últimos como negativos.

§ 4. **Clasificacion de las máquinas**.-Industrialmente hablando, las máquinas con relacion al objeto que se las destina se dividen en *máquinas motoras ó motrices* y *máquinas útiles* ú *operadoras*. Entran en la primera categoría todas aquellas que como las ruedas hidráulicas, máquinas de vapor, etc., reciben la accion directa del verdadero motor para trasmitirla á las segundas, cuya denominacion toman por el útil ó herramienta que llevan adecuado á la *obra ó trabajo industrial* que deben ejecutar. Pertenecen á estas últimas, las máquinas *de tornear, de aplanar ó cepillar, de taladrar*, etc.

Necesitando toda máquina operadora de una motriz que ponga en juego al útil encargado de la obra para que aquella haya sido construida, cabe—miradas las cosas con cierta latitud—considerar como formando una sola máquina el conjunto de motriz y operadora.

Bueno será que desde ahora indiquemos que en lenguaje industrial se llaman tambien *motores* á los órganos que, siendo de cierta importancia, reciben directamente la accion de la fuerza motriz, y así el que sea muy comun comprender bajo aquel nombre genérico las *ruedas hidráulicas, máquinas de vapor* etc., que se distinguen entre si mediante este ó aquel calificativo. Nosotros, para evitar confusiones, reservaremos la palabra motor mientras otra cosa no advirtamos, á todo aquello en que resida y por lo que se manifieste una fuerza motriz.

§ 5. **Cuestiones que se presentan en el estudio de las máquinas.**—Prescindiendo de las circunstancias por lo regular de carácter local y económico que en determinados casos pueden dar la preferencia á las de un sistema sobre las de otro, en el estudio de toda máquina se presentan principalmente tres cuestiones: una de *Cinemática*—que entraña siempre otra geométrica—cuya solucion debe dar respecto del últil operador la direccion y velocidad más convenientes al trabajo industrial que haya de ejecutar la màquina; otra de *Estática* por la que se determinan las dimensiones de las diferentes partes de ella de modo que tengan la necesaria resistencia con el *mínimum* posible de material, y últimamente una *dinámica* que tiene por objeto calcular la *fuerza de la máquina*, ó en otros términos, averiguar la cantidad de trabajo industrial que podrá hacer en un tiempo dado, conocido el trabajo motor y el que absorben las resistencias pasivas. Desde luego se comprenderá que esta última cuestion en cierto modo, sintetiza ó dá unidad á las dos primeras por ser la única que puede indicarnos el grado de bondad de una máquina, en cuanto á sus efectos, señalar los vicios que existen en ella y los medios de evitarlos ó de atenuarlos cuando ménos.

§ 6. **Unidad para valorar la fuerza de las máquinas.**—La fuerza ó potencia de una máquina—aceptando esta manera de hablar consagrada por el uso—se valúa frecuentemente por la cantidad de *obra hecha ó trabajo industrial producido* (*)en un tiempo dado. Segun esto, una máquina de *aplanar* ó *cepillar metales*, será de tanta mayor fuerza cuanto mayor sea la extension de la capa ó lámina de metal cortada por el *buril* en la unidad de tiempo, suponiendo por de contado que sea uniforme el espesor de ella y el mismo en todos los casos; análogamente la fuerza de un *molino harinero* se estimará por el número de fanegas de trigo, cebada etc. que muela ó pueda moler durante una hora ó un dia por ejemplo.

(*) Para evitar confusiones debemos advertir que usaremos como sinónimas las frases *obra hecha ó producida, trabajo industrial producido, y efecto mecánico ó dinámico de una máquina.*

Este modo natural de valorar, aceptable y hasta muy usado hablando de máquinas que hagan la misma clase de trabajo, no permite conocer la fuerza mayor ó menor que tendrán, una respecto de otra, dos cualesquiera cuando no concurra dicha circunstancia, en cuyo caso es preciso elegir un trabajo industrial que sirviendo de tipo de referencia á todos los demas, haga posible la comparacion entre sí de las diferentes clases de máquinas.

Si paramos nuestra atencion en una cualquiera que esté *trabajando* observaremos:

1.° Un útil sometido á la accion de una fuerza.

2.° Un camino recorrido por el útil.

3.° Que en circunstancias iguales, la cantidad de *obra hecha* en un tiempo dado, crece con la intensidad de la fuerza y con la longitud del camino.

Lo de circunstancias iguales se refiere principalmente en una máquina determinada, á la materia y forma del útil y modo de trabajar este.

Como aclaracion á lo que acamos de decir y con el objeto tambien de que se comprendan mejor algunos razonamientos, consideremos una máquina de aplanar metales, que en principio se compone, fig. 1.ª (lám. 1.ª) de una mesa ó tablero horizontal *M*, que mediante un mecanismo á propósito, recibe de un motor cualquiera movimiento rectilíneo de vaiven en la direccion *d d'* y de un útil *u* que permanece fijo, mientras corta la materia de la placa *p*, ó de otra pieza que se quiera cepillar.

Algunas máquinas de esta clase—y así supondremos que sea la representada en la fig. 1.ª (lám. 1.ª)—se hallan dispuestas de modo que el útil pueda cortar á la ida y á la vuelta de la mesa. Si admitimos, pues á nada esencial se opone, que el tablero sea fijo y móvil el buril, aparece desde luego evidente.

1.° Que sobre el último—supuesto uniforme el movimiento y con el mismo grado de uniformidad durante los viajes de ida y vuelta—podemos considerar que obra una fuerza constante F igual á la resistencia, constante tambien, debida á la cohesion del metal.

2.° Que el útil para aplanar la placa tiene que ir avanzando, camine en uno ú otro sentido de los dos en que puede marchar, á medida que se renueven las resistencias que sucesivamente vaya venciendo.

3.° Que si la seccion de la viruta es rectangular y se prescinde de la resistencia que lateralmente presente la materia, la estension de placa cepillada, ó en términos más generales la cantidad de *obra hecha* en una hora por ejemplo, será proporcional á la intensidad de F y á la longitud en direccion de ella del camino recorrido por el útil en dicho tiempo y consiguientemente proporcional tambien al trabajo representado por el producto de estos dos elementos.

Ahora bien, si damos al útil *u* el ancho de la placa *p* y á la fuerza F el valor necesario para vencer la mayor resistencia que habrá en este caso, no será ménos evidente que de un solo viaje podrá quedar terminado el aplanamiento de aquella. En este supuesto—con el que nada se altera el fondo de las cosas—si quitada la pieza ó placa *p* atamos al útil el cordon *c*, del que pende el peso P cuya magnitud sea tal que el primero recorra bajo la influencia de F el camino e en iguales condiciones que al cepillar la pieza, será indudable que el efecto representado por la elevacion de dicho peso á la altura $h=e$ equivaldrá para definir ó dar á conocer la fuerza de la máquina de que se trata, *al aplanamiento de la placa en* cuestion.

Estas consideraciones estensivas á todas las máquinas, nos autorizan á establecer que una cantidad dada de cualquier trabajo industrial, tiene su equivalente en el que consiste en elevar pesos por la vertical, y por tanto, que este ú otro cualquiera puede tomarse como tipo al cual se refieran todos los demás. Fácil sería probar directamente ambos extremos por esperiencias encaminadas á este fin.

Comprendido esto, preséntase la cuestion de si es ó no indiferente tomar este ó aquel trabajo para tipo de comparacion ó de referencia, y con tal motivo trataremos de hacer ver que de entre todos ellos ninguno es tan aceptable por su simplicidad, pronta, fácil é invariable medida como el de elevar pesos verticalmente. En efecto, para ejecutar un trabajo industrial cualquiera, es preciso como lo hemos indicado ya, vencer ó destruir en una estension dada las resistencias inherentes á él, resistencias que no sólo varían con la obra que se quiera hacer, sino tambien con la manera de llevarla á cabo, y de aquí el que sea mayor en unos casos que en otros el trabajo *desarrollado* por los esfuerzos que las hayan de destruir.

Aclaremos esto con un ejemplo.

Para cepillar una placa de hierro p fig. 1.ª (lámina 1.ª) ó en otro lenguaje, para separar de ella una capa i es necesario vencer con un esfuerzo determinado la resistencia debida á la cohesion del metal en la extension *b b*.

Entendemos en el presente caso por quedar vencida la resistencia el que sea anulada la accion recíproca que existe entre la parte que se quiere separar y el resto de la placa.

Esto sentado, como no sería posible obtener dos piezas exactamente del mismo hierro, como la materia y forma del útil habrian más ó menos, de cambiar tambien dentro de ciertos límites, se comprende por esto solo, y sin tomar ya en cuenta las diferencias entre las máquinas y las que hubiere en el modo de ejecutar la obra que al trabajo industrial de que se trata, le falta para que pueda ser adoptado como *tipo de comparacion* el carácter más esencial, el de la *invariabilidad*.

Si en vez del ejemplo anterior hubiéramos puesto el de un molino harinero, el de una máquina de taladrar, de tornear etc., las consideraciones hubieran sido parecidas y la consecuencia la misma. Pero si nos fijamos en el sencillo hecho mecánico, que consiste en elevar un cuerpo por la vertical, inmediatamente veremos: que solo depende de *una fuerza*, igual en intensidad al peso del cuerpo que se quiera elevar y de *un espacio lineal* ó sea el *camino* que recorra en direccion de ella su punto de aplicacion, igual en estension á la altura á que fuere aquel elevado. Y como ninguna otra circunstancia interviene en él, y puede por tanto ser reproducido en todas ocasiones con una exactitud y precision casi matemáticas, es indudable que la elevacion de pesos verticalmente reune las condiciones necesarias para ser tomado como tipo, mediante el cual se facilitará la comparacion de las máquinas entre sí, por diferentes que sean unos de otros, los trabajos industriales que ejecuten.

Desde luego se habrá comprendido por lo que llevamos dicho, que mirada la cuestion que nos ocupa bajo un punto de vista algo especulativo, cualquier trabajo industrial podría en rigor reemplazar al anterior, pues de ser dable prescindir de las circunstancias variables, solo quedarían, como esenciales en todos los casos, una *resistencia* que vencer y un *camino* que recorrer.

Conocido ya el trabajo tipo, réstanos para terminar esta parte, valorarlo en números, cosa sencillísima si se toma para la unidad de medida el efecto parcial que consiste en elevar á la unidad de altura la unidad de peso, pues á todas luces aparece evidente que elevar un peso P á la altura h, equivale á repetir el efecto unidad, tantas veces cuantas resulten de multiplicar entre sí el número de unidades longitudinales y de peso que respectivamente contengan h y P; por manera que el producto $P \times h$ espresará la medida del efecto total, ó en otros términos, de la *obra hecha*.

La unidad más admitida y que adoptaremos, es la llamada kilográmetro. Representa la elevacion de un kilógramo á un metro de altura, y se indica de este modo $1^{k \times m}$, $1^{k\,m}$ ó 1^{km}.

Para valuar la fuerza de los motores y en general de toda máquina cuya marcha por largo tiempo sea siempre la misma, existe otra unidad denominada *caballo de vapor*, equivalente á 75 kilográmetros producidos en un segundo.

La introduccion del tiempo ofrece la ventaja de evitar los números de muchas cifras de uso siempre molesto.

El caballo de vapor se suele expresar así: $75^{km''}$ ó 75^{km} y tambien de este otro modo 1^{cab} ó 1^{c}.

Si en vez de tomar la unidad 1'', hubiéramos referido aquel á 1', se expresaría de esta manera $4500^{km'}$, que es el resultado que se obtiene de multiplicar 75 por 60, número de segundos que contiene el minuto.

De un modo análogo procederíamos si considerásemos otro cualquier intérvalo de tiempo.

Si en lugar del kilógramo y el metro hubiéramos adoptado la libra y el pie, la arroba y la vara etc. las unidades de trabajo serían respectivamente 1^{lp} y 1^{ar}, expresándolas de una manera semejante á la indicada para el kilográmetro.

§ 7. **Reduccion de una unidad á otra.**—Respecto de la sencilla cuestion *dado un trabajo en tal ó cual unidad, expresarlo en otra distinta,* nos concretaremos á presentar estos dos casos generales.

1.° Siendo dado el trabajo N^{ph} referido á la unidad 1^{ph} en la que p representa la de peso y h la lineal, supongamos que se quiera espresar su valor en la unidad $1^{p'h'}$ en la que p' y h' tienen análoga significacion que p y h. Para esto, conocidas las relaciones

$$\frac{p}{p'} = \text{K} \quad \text{y} \quad \frac{h}{h'} = \text{K}'$$

no hay mas que poner por p y h sus valores K p', K' h' y se tendrá:

$$N^{ph} = N^{kp' \times k'h'} = \bar{N}^{p'h'}$$

que dá resuelta la cuestion.

2.° Una máquina hace en cada n horas un trabajo N^{ph} y se quiere averiguar el número de caballos que tiene.

Suponiendo que en tiempos iguales desarrolle trabajos iguales, el correspondiente á 1″ será

$\dfrac{N^{ph}}{n \times 3600}$; en kilográmetros N'^{km} y en caballos

$$\frac{N'^{km}}{75^{km}} = \bar{N}'^{cab}$$

§ 8. **Sobre el trabajo de las fuerzas.**—Hasta ahora, cuando hemos tenido que hablar del efecto mecánico de las fuerzas, hemos supuesto tácita ó expresamente que fuesen constantes y en direccion de ellas los caminos respectivos que sus puntos de aplicacion recorrían; pero como quiera que esto no siempre se verifica, convendrá recordemos, aunque muy ligeramente, la manera de valorar el trabajo de una fuerza en todos los casos que pueden presentarse en la práctica.

1.° *Fuerza constante en intensidad y en direccion.*

El trabajo es dado por la conocida fórmula:

$$T = F \times e$$

y gráficamente por la superficie de un rectángulo cuyos lados sean la fuerza F y el camino e.

2.° *Fuerza constante en direccion y variable en intensidad.*

La fórmula

$$F = \int F \times d.\, e.$$

integrando el segundo miembro, si esto es posible, entre límites convenientes, dará el trabajo en el presente caso. Y sino se pudiera integrar por no conocer la relacion que exista entre F y e, se recurrirá á los métodos de cuadratura aproximados, de entre los que merece particular mencion el del geómetra Thomas Simpson (*); gráficamente estará representado aquel por la superficie com-

(*) Aunque no sea nueva para los que lean estas lecciones la fórmula de T. Simpson

$$S = \frac{1}{3} h \left\{ y_0 + y_{2n} + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right) \right\}$$

que sirve para valorar con gran aproximacion toda superficie cuya ley geométrica sea desconocida, su importancia exige que espongamos brevemente una de las demostraciones más sencillas que de ella se han dado, debida al ilustre Poncelet.

Sea $a\,a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'\,g\,a$ fig. 2.ª (lam. 1.ª) el área que se trata de medir. Dividida ag en $2n$ partes iguales entre sí, fijémonos por el pronto en una porcion cualquiera $a\,a'\,c'\,c\,a$, limitada lateralmente por dos ordenadas consecutivas de órden ímpar.

Si dividimos la extension ac en tres partes iguales $am = mn = nc$, levantamos las perpendiculares mm', nn' y tiramos las cuerdas $a'm'$, $m'n'$, $n'c'$, la suma de las áreas de los tres trapecios formados será, representándola por S,

$$S = \frac{1}{3} ab \ (aa' + 4\,bi + cc')$$

teniendo en cuenta que $2bi = mm' + nn'$.

prendida entre una recta—eje de abscisas sobre el que se toman los caminos recorridos—, una curva cuyas ordenadas indican los valores variables del esfuerzo y dos de estas ordenadas, las correspondientes á las posiciones inicial y final del esfuerzo.

3.° *Fuerza variable en intensidad y direccion.*

El trabajo debido en este caso á la componente tangencial, llamada por algunos *fuerza efectiva*, será dado por la fórmula

$$T = \int F.\ cos.\ a \times d.e$$

en la que a expresa el ángulo variable que forma F con $d.e$

En cuanto á la representacion gráfica, el 2.° caso indica la que corresponde á este último, en el que evidentetemente se hallan comprendidos los dos anteriores.

Como de admitir este valor para la superficie $a\ a'\ b'\ c'\ c\ a$ se cometería en el presente caso un error por defecto, y por exceso si la parte de curva $a'\ b'c'$ fuese convexa hácia la línea de órigen ó eje de abscisas, se procura establecer y de hecho se consigue casi siempre una compensacion más ó ménos aproximada, poniendo en lugar de $b\ i$ la ordenada $b\ b'$. Hecha pues la sustitucion, resultará:

$$S = \frac{1}{3}\ ab\,(aa' + 4bb' + cc') = \frac{1}{3}\ h\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Razonando de un modo análogo respecto de las demas porciones $c\ c\ e'\ e\ c$,.....obtendremos diferentes valores parciales, cuya suma nos conducirá sin dificultad á la fórmula en cuestion aplicable tambien á los casos en que fuere nula alguna de las ordenadas Si la superficie estuviese limitada por una curva (fig. 3.ª) se descompondria en otras dos por medio de una recta, procurando que su direccion sea tal, que las ordenadas no formen con aquella ángulos muy agudos.

Cuanto más accidentada fuere la curva, más pronunciada su curvatura y mayor aproximacion se desee, tanto mayor debe ser el número de partes en que se divida la línea $a\ g$.

OBSERVACIONES. 1.ª—Para que una fuerza produzca trabajo no sólo es preciso que su punto de aplicacion recorra en direccion de ella un espacio lineal más ó menos grande sinó tambien, que este espacio ó camino sea resultado de la accion de la fuerza.

2.ª El trabajo, y por tanto el efecto industrial de una fuerza, será nulo, cuando lo sea uno de los factores que lo constituyen.

3.ª El *máximum* de trabajo depende en cada caso de los *máximos valores* que simultáneamente puedan recibir el *esfuerzo y camino recorrido.*

§ 9. **Valor medio de una fuerza variable.**—En determinadas circunstancias es muy útil y aun necesario conocer este valor, que es el correspondiente al esfuerzo constante capaz de producir igual trabajo que la fuerza dada, despues de haber recorrido el mismo camino su punto de aplicacion.

Si representamos por

X........ { el esfuerzo que se busca dirigido segun el camino $d.e.$

$e'e''$..... { los valores correspondientes á las posiciones extremas de X y de la fuerza F, que suponemos variable solo en intensidad para no tener que descomponerla y considerar su componente tangencial,

tendremos: $X(e''-e')=\int_{e''}^{e'} F\times d.e$ de donde

$$X=\frac{\int_{e''}^{e'} F\times d.e}{e''-e'}$$

§ 10. **Aparatos dinamométricos.**—Bajo esta denominacion comprendemos todos aquellos que sirven, ó para medir simplemente la intensidad de una fuerza cualquiera, ó para medir el trabajo desarrollado por ellas.

Respecto de los primeros, nos ceñiremos á indicar que en principio se reducen á un muelle en espiral, recto, curvo ó angular de buen acero, al que vá anexa una parte dividida de antemano por experiencia directa, y sobre la que un índice señala el grado de tension ó compresion que sufre aquel por efecto del esfuerzo que se quiere valorar.

Además de los representados en las fig.ˢ 4.ª, 5.ª, 6.ª, 7.ª (lám.ª 1.ª) que son los más comunes y cuya sola inspeccion basta para comprender su manejo y uso, existen otros de forma y disposicion muy varias, dependientes siempre del objeto especial á que se los destina.

Aunque la parte principal de estos dinamómetros sea tambien por lo regular un muelle de acero, cuyas flexiones corresponden á esfuerzos conocidos, no estará demás el indicar que Mr. Wertheim ha ideado uno que se funda en un principio muy diferente, cual es la alteracion que experimenta la luz cuando atraviesa un cuerpo que siendo trasparente y homogéneo se halle estirado ó comprimido en una direccion dada.

A pesar del grado de exactitud de que es susceptible en sus apreciaciones omitimos su descripcion por no considerarlo suficientemente práctico.

Los dinamómetros que tienen por objeto valorar el trabajo de las fuerzas, aunque de formas tambien muy varias por haber de subordinarlos á tales ó cuales circunstancias, están basados por lo general en uno de estos dos hechos de experiencia: *«cuando un prisma descansando libremente sobre dos apoyos, fig. 8.ª (lám. 1.ª) ó empotrado por uno de sus estremos, fig. 9.ª se somete á la accion de un peso P, obrando respectivamente en medio ó en el estremo libre, las ságitas* f *son proporcionales á P, mientras este no traspase cierto límite dependiente en cada caso de la materia y dimensiones de los prismas.»*

§ 11. **Dinamómetros de punzones ó estilos y tira de papel.**—Describiremos el usado por el General Morin para medir el trabajo de los motores animados tirando de un carruaje. Consta fig. 10 (lam. 1.ª)

1.º Del muelle ó resorte R destinado á medir el esfuerzo del motor.

2.º De los cilindros *a*, *b*, *c*, *d*, *e* montados en soportes que afectan la forma de pequeñas gualderas *f*, *g* y de la banda ó tira de papel *t*, sobre la que ha de ir trazando el lápiz, punzon ó estilo *l*, la línea cuyas ordenadas representan los valores sucesivos del esfuerzo. Los soportes, y consiguientemente los ejes matemáticos de los cilindros, conservan siempre respecto del carruaje la misma posicion.

3.º Del mecanismo necesario para hacer mover perpendicularmente á la direccion del esfuerzo la tira de papel *t*.

El muelle ó resorte R, en lugar de estar formado por una sola hoja ó lámina de acero, se compone de dos, unidas por sus estremos, mediante las planchuelas *h* y pasadores *i*, disposicion que tiene por objeto darle mayor sensibilidad.

Obedeciendo á esta misma idea, el General Morin ha hecho parabólica la cara exterior de dichas láminas logrando de esta suerte, sin disminuir su resistencia, obtener flexiones dobles de las que con esfuerzos iguales se producirían en muelles compuestos de hojas de espesor constante é igual al mayor de las parabólicas, suponiendo por de contado que en lo demás no difieran. Ya veremos el fundamento de esto en *la teoría de la Resistencia de materiales.* La hoja posterior *k* está sujeta por el medio á la pieza P, fija al carruaje y la *k'* á la P' que lleva el argollon A en el que vá enganchada la bolea B sobre la que ejerce su accion el motor. En la pieza P hay dos lápices ó punzones *l' l''*, cuya situacion respecto del carruaje es invariable y en la P' el ya mencionado *l* que sigue naturalmente las oscilaciones del muelle.

Mientras el aparato no funciona, los tres punzones se hallan situados en un mismo plano vertical, paralelo á la longitud del muelle, y la línea que imagináramos trazada por ellos en esta posicion, representa la de orígen de los esfuerzos. En cuanto á los cilindros *a, b, c, d, e* y tira de papel *t*, réstanos decir que antes de comenzar una experiencia, se enrolla aquella en el cilindro de la izquierda, pegando al de la derecha con cola de boca el extremo libre, despues de hacerlo pasar por encima de los *b c d*, que solo tienen por objeto sostener el papel é impedir que los lápices lo rompan.

Un ligero exámen de la figura basta para comprender el mecanismo, que imprime al cilindro receptor *e* un movimiento de rotacion y obliga á que la tira de papel se vaya enrollando en él, á medida que la deja libre el cilindro *a*.

Se reduce á una correa sin fin *m*, que del cubo de una de las ruedas del carruaje pasa á la polea O, en cuyo árbol se halla montado el husillo *p*, el cual engranando con el piñon *q* pone en movimiento al tambor T, que mediante un cordon fino de seda *s*, lo trasmite á T' y este al cilindro *e*.

El tambor T' se hace tronco-cónico, para que la longitud de tira que se enrolle en *e*,—no obstante el aumento progresivo que recibe su diámetro por efecto del espesor del papel, y consiguientemente la que pase por debajo de los lápices—sea siempre la misma por cada vuelta de la rueda. Esta condicion, indispensable para el buen éxito de la experiencia, requiere que sean iguales entre sí las relaciones

$$\frac{D}{d} \quad y \quad \frac{D'}{d'} \quad \text{en las que}$$

D, *d*..... { representan los diámetros de las bases del tambor tronco-cónico.

D', *d'*... { los del cilindro receptor; el D' con todo el papel y el *d'* sin papel.

Para concluir esta ligera descripcion añadiremos que si bien los dos punzones *l' l''*, como ha debido comprenderse por lo que llevamos dicho, ambos pueden trazar una línea recta en la tira de papel, sólo uno de ellos lo hace, pues el otro—mantenido á cierta distancia de ella por un pequeño resorte en espiral—se reserva para cuando en el curso de la esperiencia se presente alguna particularidad sobre la que se quiera llamar la atencion. Llegado este caso, se oprime ligeramente con el dedo para ponerlo en contacto con el papel.

En lugar de los lápices destinados á funcionar durante todo el trayecto que recorra el motor, se pueden usar tambien pinceles cuya alimentacion contínua y regular no frece dificultad alguna.

Ultimamente, aunque inútil parezca esta advertencia, ántes de usar el instrumento que acabamos de describir y cualquier otro, cuyas apreciaciones dependan de la bondad y graduacion de un muelle, conviene rectificarlos procurando no someterlos nunca á esfuerzos capaces de alterar su elasticidad. Por esto el que en algunos se hallen dispuestas las cosas para que las ságitas no puedan traspasar el límite fijado de antemano.

Este es el objeto de los topes $x\,x$ que se ven en la figura, fijos al soporte f.

Ahora bien, si se ha comprendido este dinanómetro aparecerá evidente que pasando la tira de papel por debajo de los lápices con una velocidad cuya relacion con la de la rueda es constante y siendo las ordenadas de la curva trazada por el lapiz l contadas desde la línea orígen, proporcionales á los esfuerzos del motor, aparecerá evidente repetimos, que la superficie comprendida por aquella línea curva, la de orígen y dos ordenadas cualesquiera, representará el trabajo hecho por el motor durante el trayecto correspondiente á la distancia que media entre dichas ordenadas.

En este concepto, y suponiendo que *abc* sea la línea trazada sobre el papel, fig. 11 (lám. 1.ª), pasemos á indicar los principales métodos que podemos seguir para valuar la superficie *a b c d e a*.

El que primero se ocurre, redúcese à descomponerla en figuras geométricas de fácil cuadratura, multiplicando su número cuanto sea posible para disminuir el error, ó bien sustituyendo, cuando se haya llegado á cierto límite, las pequeñas superficies que quedan al rededor de la curva por otras, que, además de ser á la simple vista equivalentes á ellas, se puedan valorar por las sencillas fórmulas de la Geometría elemental.

Si se tiene á mano papel cuadriculado, tambien se puede hacer uso de él para medir el área en cuestion.

La fórmula de T. Simpson es otro de los procedimientos indicados.

Pero cuando las curvas tienen excesiva longitud, como sucede en el presente caso, estos métodos son poco aceptables y debe emplearse en su lugar el conocido por *método de las pesadas*, tan recomendable por su brevedad y sencillez.

Supuesto el papel homogéneo y de espesor constante, en lo que no se comete gran error por ser del llamado *contínuo*, se pesa primero toda la tira ABCD, y enseguida la parte *abcde*, despues de cortar el sobrante. Hecho esto y representando por

P y *p*.. los resultados de ambas pesadas.

S y *s*.. las superficies ABCDA y *abcde*.

E .... espesor del papel.

δ......... peso de la unidad de volúmen.

$$\text{tendremos } \frac{P}{p} = \frac{S \times E \times \delta}{s \times E \times \delta} = \frac{S}{s} \text{ y por tanto}$$

$$s = \frac{p}{P} \times S = \frac{p}{P} \times L^m \times h^k$$

será el valor que se busca expresado en unidades de trabajo.

Tambien existen instrumentos llamados *planímetros* con los que sin cálculos y con suma prontitud se puede encontrar la cuadratura de cualquier superficie plana. El principio que les sirve de base es análogo al en que se fundan los *dinamómetros totalizadores* de que nos vamos á ocupar.

§ 12. **Dinamómetros totalizadores.**—El que acabamos de describir, y en general, todos los comprendidos bajo la denominacion poco precisa de *dinamómetros de punzones y tira de papel*, presentan la preciosa ventaja de dar á conocer las variaciones del esfuerzo producido por el motor, pues del exámen de la curva obtenida se deduce en qué momentos ha sido constante, en cuáles otros un máximum etc.; pero cuando hay que prolongar las experiencias más allá de los 800 á 1000 metros, que es el mayor trayecto, que por lo regular permite la longitud de la tira, ó bien cuando solo se desee obtener la cantidad total de trabajo que requiere una obra determinada, se hace uso de los *dinamómetros totalizadores*, llamados tambien *de contador*, ó *dinamómetros contadores*.

El representado en la fig. 12 (lám. 1.ª) se compone:

1.º Del muelle *m*, semejante al del dinamómetro ya descrito.

2.º Del contador C, al que hace funcionar la ruedecita *a*.

3.º Del mecanismo destinado á poner en movimiento esta última.

La hoja posterior del muelle atraviesa y está unida á la pieza *p*, fija invariablemente al carruaje, y la anterior, asegurada de un modo análogo á la *p'*, lleva el argollon A donde se engancha la bolea B.

En el brazo horizontal de la varilla recodada *bcd*, sujeta á la pieza *p'* se halla montada la ruedecita *a*, que obligada á seguir el movimiento del muelle al doblarse, se separa del eje E tanto mas cuanto mayor es el esfuerzo.

Como dicha rueda *a* se halla por su canto en contacto con el plato P, al girar este, gira ella tambien por efecto del rozamiento. Su velocidad de rotacion crecerá con la del plato y con la distancia á que se encuentre del eje E.

El plato P y polea P' se hallan montados en el mismo árbol *g* que pasa libremente á través de la pieza *p*.

La polea recibe el movimiento del cubo de una de las ruedas, mediante la correa sin fin *f*.

El contador, como indica su nombre, sirve para contar el número de revoluciones que dé un árbol de rotacion, y en el presente caso el de la ruedecita *a*.

En el representado en la fig.ª 12 la rueda A, fija al árbol M, tiene cien dientes y la B, que es de las llamadas *locas*, solo noventa y nueve.

Por esta breve descripcion, compréndese desde luego que siendo el número de vueltas que dé la rueda *a* en la unidad de tiempo, proporcional á la velocidad de rotacion del plato P y á la distancia á que se halle separada del eje E, tambien habrá de serlo al esfuerzo y al camino recorrido por el punto de aplicacion de este. Y aunque esto bastaria para establecer que el movimiento de dicha rueda puede servir para valuar el trabajo *desarrollado* por un motor, vamos á probarlo haciendo uso del cálculo. A este fin representemos por

R, R', r, r'...los rádios respectivos de las ruedas del carruaje, del cubo, polea P′ y rueda *a*.

δ.......la distancia variable á que esta última se halla del eje E y que dá la medida de la flexion del muelle.

F.......el esfuerzo en direccion paralela al movimiento de traslacion, que obliga á la rueda *a*, á separarse del eje E.

$K = \frac{F}{\delta}$... la relacion constante entre los esfuerzos y las flexiones correspondientes.

e.......camino recorrido en direccion del esfuerzo, durante un tiempo infinitamente pequeño ó durante 1″ segun sea ó no variable.

$n = \frac{e}{2\pi R}$.....número de vueltas de las ruedas del carruaje correspondiente al camino *e*.

n'.......número de vueltas de la polea P′ y plato P, correspondiente al n de la rueda.

N.........número de vueltas de la rueda a cuando se halla á la distancia δ del eje E y en el supuesto de dar n' el plato P en el mismo tiempo.

Las ecuaciones $F=K\delta$ y $e=n\times 2\pi R$

nos darán multiplicándolas ordenadamente:

$$Fe=K\delta\times n\,2\pi R,$$

y poniendo en lugar de δ y n sus valores, sacados de

$$2\pi n'\delta=2\pi N r' \quad \text{y} \quad nR'=n'r, \qquad \text{tendremos}$$

$$T.^{o}=F\times e=\bar{K}N; \quad \text{y como} \quad \bar{K}=2\pi K\times\frac{Rrr'}{R'}$$

es constante, queda probado lo que nos proponíamos, es á saber: que de cualquier modo que varíe el esfuerzo del motor, el trabajo de este será dado por un cierto número de vueltas de la rueda a.

El dinamómetro cuya descripcion se acaba de hacer, tiene el defecto de poder resbalar la rueda a, tangencialmente á las circunferencias que describen los distintos puntos del plato P, y no dar en este caso el número de vueltas que debiera.

§ 13. **Dinamómetros de rotacion.**—Estos sirven para medir el trabajo trasmitido por un árbol de rotacion á una máquina cualquiera, así como los dos anteriores para valorar el *desarrollado* por los motores cuya accion se ejerza en línea recta (un caballo tirando de un carruaje) ó circularmente (un caballo enganchado á un malacate).

De dos clases son los dinamómetros de rotacion usados :

por el general Morin: los unos de punzones y tira de papel; los otros de contador ó totalizadores.

§ 14. **Dinamómetros de rotacion, de punzones y tira de papel.**—El representado en la fig.ª 13 (lám. 1.ª), se compone:

1.º De las tres poleas P, P', P'', montadas en el árbol A, que descansa en dos soportes SS'.

2.º Del muelle recto *m* formado de una sola hoja y que fijo en el árbol A, normalmente á este y en direccion de uno de sus rádios, sirve para medir los esfuerzos trasmitidos á la máquina.

3.º De los cilindros *a*, *b*, *c*, que llevan la tira de papel sobre la que han de trazar respectivamente una curva y una recta los punzones ó lápices *l*, *l'*.

4.º Del mecanismo destinado á poner en movimiento la tira de papel.

La polea P es de las llamadas *fijas* por estar unida invariablemente al árbol A; la P' por no estarlo pertenece al número de las conocidas por *locas*, y la P'' participa entre ciertos límites, de una y otra condicion.

La máquina cuyo trabajo se trate de valorar con el dinamómetro que estamos describiendo, en lugar de recibir el movimiento como de ordinario, directamente del árbol general G, lo toma de este por intermedio del A, para lo cual, por las poleas P, *p* y las P'' *p'* pasan respectivamente las correas sin fin *f*, *f'*. Cuando se quiere suspender el movimiento de la máquina, se traslada la correa *f* de la polea P á la P'.

Cerca de la corona de la polea P'' y formando cuerpo con ella hay una parte saliente q sobre la cual obra el extremo del muelle m y en la que se encuentra el lapiz destinado á trazar la curva de las flexiones.

En el soporte Q, que afecta la forma de un doble bastidor, y en el que se vé el punzon l', están montados los cilindros a, b, c con la tira de papel; los dos tambores e, d, por los que pasa el cordon s; el husillo sin fin f, y los piñones g, g'.

Engranando con el último de estos hay un anillo dentado D, fijo invariablemente al soporte S' y por el que pasa con rozamiento suave el árbol A.

Conocidas las partes principales, de este dinamómetro, sin dificultad se ha de ver á poco que nos fijemos en la figura.

1.° Que al iniciarse el movimiento del árbol A, el muelle m se ha de encorvar y que tan pronto como su tension logre vencer la resistencia que oponga la máquina, comenzará á girar la polea P''.

2.° Que la flexion del muelle m producida por que el extremo libre apoyándose sobre el piton q, no puede seguir en su movimiento á la parte encastrada en el árbol A, será tanto mayor, cuanto mas grande la resistencia que oponga la máquina.

3.° Que al girar el doble bastidor Q con el eje A, el piñon g' habrá de ir rodando sobre el anillo D, y que este movimiento trasmitido por el husillo sin fin f á los tambores d, e, obligará á pasar la tira de papel del cilindro a al c.

4.° y último. Que siendo constante la relacion entre la velocidad del piñon g' y la de la máquina, las curvas obtenidas con este dinamómetro nos permitirán conocer las particularidades que se presenten durante la ejecucion de una obra industrial y cantidad de trabajo necesaria para hacerla.

Cuando la máquina no funciona ó el esfuerzo es nulo, los ejes de los punzones l, l' se hallan en un mismo plano, el cual divide longitudinalmente la tira de papel en dos partes, para que sea cualquiera el sentido en que aquel se ejerza, quede suficiente campo para el trazado de la curva de las flexiones.

Algunos dinamómetros suelen tener—lo que no es realmente necesario—dos muelles colocados el uno en prolongacion del otro, ó bien uno solo de doble longitud, sujeto al eje por su parte media.

Para impedir que el muelle esperimente esfuerzos superiores á los que en buenas condiciones deba resistir, existe en el árbol A un tope destinado á limitar el movimiento de la polea y por consiguiente la flexion de aquel.

§ 15. **Dinamómetro de rotacion totalizador.** —Despues de lo que dejamos dicho en el § 12, creemos innecesario detenernos en recordar el objeto de esta clase de dinamómetros y en describir circunstanciadamente el representado en la fig.ª 14 (lám. 2.ª), cuya sola inspeccion y algunas indicaciones bastarán para formarse idea clara de la manera como se relaciona el movimiento del contador C con el del árbol A y el esfuerzo necesario para hacer funcionar la máquina.

El muelle m, anillo dentado D, piñon g' y husillo f, tienen una disposicion semejante á la de estas mismas partes en el dinamómetro anterior fig.ª 13, con la diferencia de que el pequeño árbol *b* está prolongado hasta cerca de la corona de la polea P''.

El husillo *f* (*) engranando en el piñon *g*, dá movimiento al plato *d* sobre el cual descansa por el canto la ruedecita *a*, como en el dinamómetro fig.ª 12 (lám. **1.ª**)

La pieza enhorquillada *q*, que soporta al eje en que están montados el piñon y plato mencionados, hállase invariablemente unida á los árboles **A** y *b* como á la polea P'' el contador C, y por consiguiente la ruedecita *a* se separará tanto mas del centro del plato *d* y tendrá movimiento mas vivo, cuanto mayor sea la flexion del muelle ó en otros términos, cuanto mayor sea la resistencia que haya de vencer.

Como la velocidad de la ruedecita *a* tambien está en una relacion invariable con la del útil operador, evidentemente el número de vueltas de ellas será proporcional á la intensidad del esfuerzo y á la longitud del camino recorrido por aquel.

§ 16. **Dinamómetros de motor cronométrico.** —En aquellos casos en que es imposible ó muy difícil hacer que la tira de papel vaya pasando por debajo de los punzones con una velocidad proporcional al camino que recorre el punto de aplicacion del esfuerzo, como sucede en los barcos llevados á la sirga, ó bien cuando el camino

---

(*) Consúltese la figura 15, en la que se indican algunos detalles suprimidos de propósito en la 14 para mayor claridad.

es nulo, como acontece en algunas experiencias con los cohetes, se recurre á dar á la tira movimiento uniforme, por medio de un motor cronométrico.

Las abscisas de los diferentes puntos de la curva obtenida de este modo indican tiempos, y el área comprendida entre ella y la línea de orígen no es como anteriormente

$$\int \mathrm{F} \times d.e, \quad \text{sinó} \int \mathrm{F} \times d.t,$$

expresion que nos permite conocer la cantidad de movimiento producida en el tiempo que se considere, pues como sabemos

$$\int \mathrm{F}\, d\, t = \int m\, d\, v.$$

Ahora bien, si se divide $\int \mathrm{F} dt$ por el tiempo total deducido de la longitud de tira que haya pasado durante la experiencia por debajo de los punzones, tendremos el esfuerzo medio del motor. Los valores máximo y mínimo se conocerán midiendo sobre el papel las ordenadas correspondientes.

A los dinamómetros de punzones y tira de papel, se les puede unir un aparato cronométrico, dispuesto de manera que un punzon especial vaya marcando sobre aquella los segundos de tiempo, durante el cual se realiza el trabajo. Esta combinacion permitiria conocer si la tira se desenvolvia ó nó con regularidad.

§ 17. **Dinamómetro de rotacion de Mr. Taurines.**—La ingeniosa y sencilla disposicion de este dinamómetro, que por la solidez de todas sus partes, es susceptible de gran exactitud en los resultados, aun aplicado á máquinas muy potentes, nos inclinan á dar una ligera idea de los principales elementos que lo constituyen.

En principio se compone fig.ª 16 (lám. 2 ª)

1.° Del árbol A, en el que están las poleas P, P' fija y loca respectivamente.

2.° Del manguito M por el que pasa con rozamiento suave el árbol A, y con el que forma cuerpo la polea P''.

3.° De los brazos curvos *a*, *b* fijos en el manguito M por uno de sus estremos, y de los rectos *c*, *d* que lo están de un modo análogo en el árbol A.

4.° De los tres muelles *m*, *m'*, *m''* que unen entre sí, el *m* los extremos libres de los brazos *a*, *c*; el *m'* los de los *b*, *d*, y el *m''* los muelles *m*, *m'*, por su parte média.

En el muelle *m''* y formando cuerpo con él, hay un pequeño vástago *v*, cuyo eje es prolongacion del del arbol A y manguito M.

Comprendido esto, tratemos de ver la posibilidad de valorar con este aparato el trabajo que es necesario para hacer una obra cualquiera, por ejemplo para aplanar una placa de hierro

G....... representa el árbol general.

Q....... la máquina de aplanar, cuyo movimiento recibe de G, por medio de correas *c c'*.

Ahora bien, al girar el árbol A los brazos *c*, *d* unidos á él invariablemente habrán de acompañarle en su rotacion, pero solidarios tambien, aunque sólo en cierto grado, de la polea P'', es evidente que ni esta ni la *p* iniciarán su movimiento, en tanto los muelles *m*, *m'* no logren vencer la resistencia del útil operador.

El efecto inmediato que, debido á esta última esperimentarán los muelles, será: los m, m', una disminucion de curvatura y un aumento el m'', y como resultado final que el pequeño vástago v —cuya velocidad de rotacion, igual á la de la polea P'' nos permitirá conocer el camino recorrido por el útil— avance mas ó menos en direccion del eje del árbol A, segun sea mayor ó menor la resistencia que haya que vencer. Por manera que solo restará disponer las cosas para obtener una curva análoga á la trazada en los dinamómetros anteriores, por la que se pueda valuar el trabajo consumido, cuyos dos elementos ó factores podremos conocer por el movimiento del mencionado vástago (1).

§ 18. **Freno dinamométrico de Prony.**— Con este sencillo cuanto ingenioso aparato se puede calcular fácilmente, ya la fuerza de una máquina motriz, ya el trabajo consumido por una ó mas operadoras en actividad.

Para la mejor inteligencia de nuestra esplicacion, supongamos que se trata de valuar el trabajo que en conjunto absorben las máquinas M, M'..... fig.ª 17, (lám. 2.ª) activadas por la rueda hidráulica H, en cuyo caso el freno de Prony se colocará en el árbol A.

Si nos fijamos en la fig.ª 18 (lám. 2.ª), veremos que este aparato se compone:

1.º De las dos piezas de madera q, q'—conocidas por

(1) Por via de ejercicio deberán ocuparse los alumnos en resolver este problema, que en principio no ofrece la menor dificultad.

quijadas del freno—que afectando la forma de coginetes, se adaptan al árbol A y lo oprimen mediante los pernos p, p' y las tuercas t, t'.

2.° De la palanca S que lleva suspendido en el extremo mas apartado del árbol un platillo en que se colocan los pesos que cada experiencia requiere.

La pieza q forma cuerpo con la palanca.

Los dos topes $m\,m'$ se oponen á que esta última en sus oscilaciones se separe mucho de la posicion horizontal que debe tener.

Cuando el árbol en que se haya de poner el freno no sea cilíndrico, ó sea de poco diámetro, las cosas se disponen como indica la fig.ª 19, en la que a representa un anillo ó manguito de hierro colado regularmente formado de dos mitades; t, t'..... los tornillos que sirven para centrarlo, es decir, para que todos los puntos de la superficie esterior equidisten del eje de rotacion; y 0, 0'..... unas partes salientes fundidas con el anillo en las que están abiertas las tuercas de aquellos.

Las piezas de madera $c\,c'$..... de forma de cuña, contribuyen á dar mayor trabazon al sistema.

La fig.ª 20 demuestra la modificacion,—que como la del anillo se atribuye al ingeniero aleman M. Egen,—de sustituir la quijada inferior por una cadena articulada.

Pasando ya á esponer la teoría del freno de Prony y modo de operar con él, se principiará antes de colocarlo en el árbol A, refiriéndonos á las figs. 17 y 18, por quitar el agua á la rueda y por interrumpir su comunicacion con las máquinas M, M'....; seguidamente se vá levantando la compuerta C poco á poco, á la vez que se aprietan los tornillos t, t' y se ponen en el platillo los pesos necesarios para que la palanca se mantenga horizontal, y así que la cantidad de agua puesta en libertad sea la misma que cuando las máquinas M, M'..... trabajaban, y por otra parte el árbol A se mueva con la velocidad que tenia entonces, es indudable que en este estado las cosas, el trabajo absorbido por el rozamiento de los coginetes contra dicho árbol, será equivalente al que consuman las máquinas M, M'.....

Admitido esto, representemos por

R el rádio del árbol A,
F el rozamiento, ó sea la fuerza que tangente á la superficie cilíndrica del árbol se opone á su rotacion,
P los pesos colocados en el platillo,
$\overline{P}$ peso del freno completo,
p peso que actuando en el platillo, produzca el mismo efecto que el $\overline{P}$ obrando en el centro de gravedad,
L brazo de palanca correspondiente á P,
l id. » » » $\overline{P}$,
n número de vueltas que en la unidad de tiempo dá el árbol A,
T trabajo absorbido por el rozamiento en la unidad de tiempo,

y la ecuacion

$$T=F\times n.\,2\pi R=P\times n.\,2\pi L+\overline{P}\times n.\,2\pi l; \quad \text{ó bien}$$

$$T=n(P+p)\,2\pi L, \quad \text{puesto que } \overline{P}\times l=pL$$

nos hará conocer lo que nos proponíamos.

Para que las superficies frotantes conserven siempre la misma temperatura, se las humedece con agua, en la que generalmente se echa un poco de jabon con el objeto de suavizar las pequeñas asperezas que pudiera haber. Del depósito D que contiene dicho líquido parte un tubo que lo conduce al embudo E. La palanca y coginete susperior están agujereados, teniendo además el último abiertas longitudinalmente algunas canales, para que el agua se reparta por igual.

De las experiencias de Morin se desprenden los siguientes datos·

Cuando la fuerza de la máquina que se trata de medir sea próximamente de	Y la velocidad de	Conviene que el diámetro del árbol ó del anillo sea de
Caballos.	*Vueltas por minuto.*	*Centímetros.*
6 á 8	20 á 30	16 á 20
15 á 25	15 á 30	30 á 40
40 á 70	15 á 30	60 á 80

Los anteriores aparatos dinamométricos y los que demos á conocer en lugar oportuno, bastarán generalmente á nuestras necesidades prácticas, por cuya razon omitimos el describir otros, algunos de ellos muy ingeniosos en verdad, tales como el de Bourdon y el de White.

LECCION 2.ª

SUMARIO.

§ 19.—Objeto y definicion de las máquinas.—20.—Algunos principios de Mecánica.—21.—Ecuacion de fuerzas vivas en el caso mas general de una máquina ó sistema material en movimiento.—22.—Ecuacion de fuerzas vivas correspondientes á cada uno de los principales períodos que abraza el movimiento de las máquinas.—23.—Cálculo del efecto útil y discusion de los términos que contiene la ecuacion de fuerzas vivas.—24.—Sobre los términos $F \times e$ y $Q \times q$ —25.—Resúmen de las ventajas y contras que respectivamente ofrecen el movimiento uniforme y el periódicamente variado.—26.—Rendimiento de las máquinas.—27.—Volantes.—28.—Reguladores y moderadores.—29.—Regulador de fuerza centrífuga ó péndulo cónico.—30.—Teoría dinámica del regulador de fuerza centrífuga.—31.—Regulador Farcot.—32.—Regulador Poncelet.—33.—Regulador Molinié.—34.—Frenos.—35.—Manivelas —36.—Manivela simple á simple efecto.—37.—Manivela simple á doble efecto.—38.—Manivela doble á doble efecto.

§ 19. **Objeto y definicion de las máquinas.**—Ya hemos indicado que consideradas las máquinas bajo un punto de vista industrial, tenian por objeto ejecutar ciertas operaciones, como cepillar ó tornear metales, laminarlos etc., en las que siempre aparecia —tal es el carácter esencial y comun á todas— una *resistencia* que inherente á la materia trabajada, es sin cesar destruida á lo largo de un *camino* recorrido en direccion de ella por su punto de aplicacion.

Para que el órgano operador de una máquina pueda ir venciendo dicha resistencia y hacer caminar su punto de aplicacion en sentido contrario al de su accion, preciso es que haya una fuerza motriz y las cosas se hallen dispuestas para que del trabajo *desarrollado* por esta última llegue á aquel por el intermedio del receptor y demás órganos, la cantidad necesaria á producir el efecto que se desea.

El trabajo correspondiente á la fuerza motriz, conocido por trabajo motor, habrá de ser positivo; una parte de él, que se ha de procurar sea la menor posible, se invierte en contrarrestar el debido á las resistencias pasivas.

En vista de todo esto, podremos definir las máquinas diciendo que son sistemas de sólidos naturales, ligados entre sí y dispuestos para trasmitir el trabajo de las fuerzas, variando convenientemente sus dos factores, con el fin de ejecutar operaciones industriales.

Esta definicion nos permite comprender desde ahora que una máquina será tanto mejor, á igualdad de circunstancias, cuanto mayor sea su efecto mecánico, ó en otros términos equivalentes, cuanto mayor sea la parte de trabajo motor utilizada por el órgano operador.

En este concepto, la principal cuestion dinámica que se ha de resolver en toda máquina en actividad, podrá ser planteada directamente por medio del conocido teorema de fuerzas vivas, sin necesidad de recurrir al método general, largo y penoso, de establecer las ecuaciones de movimiento del sistema.

Tal es la reconocida ventaja comun á ciertos teoremas estudiados en el curso de mecánica racional que expresando bajo una forma sencilla determinadas propiedades del movimiento de los cuerpos facilitan la resolucion de las cuestiones á que inmediatamente se pueden aplicar.

La importancia que tiene en el presente curso el de las fuerzas vivas, ó sea la ecuacion de este mismo nombre, por hallarse como condensada en ella toda la teoría dinámica de las máquinas, y ser la mas propia para señalarnos ias ventajas y contras que respectivamente presenten, nos obliga á demostrarlo con la brevedad posible, precediéndolo de ciertas verdades y principios que juzgamos muy del caso recordar.

§ 20. **Algunos principios de Mecánica.**—Si en la relacion fundamental.... $F = mj$, (**1**) que nos dá la medida de una fuerza, ponemos en vez de j, que representa la aceleracion total, su valor, cuando es rectilíneo el movimiento que describe el punto material de masa m, se tendrá:

$$F = m\frac{d.v}{d.t} \ (2) \text{, de donde } F \times d.t = m \times d\,v,$$

é integrando ambos miembros entre los límites respectivos o, t, y v_0, v, resultará esta otra:

$$\int_o^t F \times d.t = mv - mv_0 \ldots\ldots\ldots \ (3)$$

que nos dice que la impulsion total de la fuerza F durante el tiempo t es igual á la variacion que esperimenta la cantidad de movimiento.

F dt.... es lo que se conoce por impulsion elemental de una fuerza.

Si el movimiento es curvilíneo, como la fuerza tangencial que representaremos por F, es la única que produce los cambios de velocidad del móvil sobre su trayectoria, y el valor de la componente tangencial de la aceleracion es $\frac{d.v}{d.t}$ tendremos;

$$F=m\frac{d.v}{d.t} \text{ y por tanto } \int_{o}^{t} F\times d.t=mv-mv_0$$

resultado análogo al anterior.

Si observamos que $\frac{d\ v}{d\ t}$ es una velocidad finita —como que la aceleracion no es otra cosa que una extension lineal—que podemos representar por v', la ecuacion (2) tomará esta fórma,

$$F=mv' \ldots\ldots \quad (4);$$

y por tanto cabe decir tambien que la intensidad en un momento dado de una fuerza que solicite á un punto material de masa m, haciéndole describir una trayectoria rectilínea, puede valorarse por la cantidad de movimiento que le comunicaría durante 1″ por ejemplo, en el supuesto de no variar aquella, á contar desde el instante considerado como punto de orígen de la unidad de tiempo.

Si en la relacion (3) suponemos F constante y $v_0=0$. tendremos

$$F.t=mv \ldots\ldots \quad (5),$$

que en la hipótesis $t=1$, se convierte en

$$F=m\,v,$$

La relacion (5) hace ver que las fuerzas no pueden producir nunca cantidades de movimiento finitas en un tiempo infinitamente pequeño, como admitieron los antiguos geómetras respecto de las llamadas *fuerzas instantáneas ó de percusion.*

En el supuesto de ejercer su accion sobre un punto material de masa m, estas últimas fuerzas se miden por la cantidad de movimiento que le imprimen en el breve período de tiempo que dure aquella.

Tomemos nuevamente el valor formular

$$F=m\,\frac{dv}{dt}.$$

Multiplicando ambos miembros por $d\,e$, camino recorrido por el punto de aplicacion de F, durante el tiempo $d.t$, se tendrá;

$$F\times de=m\frac{d\,v}{d\,t}\,de, \text{ ó bien } F\times de=mv\times dv,$$

por ser $de=v\times dt$, é integrando entre los limites correspondientes á dos posiciones del móvil

$$\int_{e_0}^{e} F\times de=\frac{1}{2}(mv^2-mv_0^2);\ldots.(6)$$

notable relacion llamada *ecuacion de fuerzas vivas*, y que traducida al lenguaje comun, nos dará el conocido teorema del mismo nombre, para el caso de ser la direccion de la fuerza en cada momento la de la tangente á la trayectoria descrita por el punto material solicitado por ella.

Si la fuerza tiene en cada instante una direccion cualquiera—que es el caso más general—F, representará en la ecuacion (6) la componente tangencial, ó bien, si se toma íntegra la fuerza dada, *d e* será la proyeccion sobre ella del camino recorrido por su punto de aplicacion.

Si suponemos que el móvil gira al rededor de un eje—caso muy frecuente en las máquinas—y representamos por

r..... el rádio de la circunferencia que describe,

w..... velocidad angular,

tendremos para el valor de la componente tangencial de la fuerza motriz

$$F = m\frac{r\, d.w}{d.\, t}, \text{ y por tanto}$$

$$F \times de = m\frac{r\, dw}{dt} \times d.e, \text{ ó bien}$$

$$F \times d.e = mr^2 w d.w, \quad \text{por ser } d.e = rw \times d.t;$$

é integrando entre los límites convenientes,

$$\int_{e_0}^{e} F \times d.e = \frac{1}{2}(mr^2w^2 - mr^2w_0^2) = \frac{1}{2} Y (w^2 - w^2_0); \ldots (7)$$

ecuacion en la que Y expresa el momento de inercia del punto material respecto del eje al rededor del cual suponemos que gira.

Aunque numéricamente considerádos, los *trabajos y las* *fuerzas vivas* sean cantidades del mismo órden y tengan la misma medida, no hemos de olvidar que las últimas son el resultado de la accion de las fuerzas, el *efecto dinámico* que producen al combatir la inercia de la materia, efecto que en otros casos, como cuando se barrena ó tornea una pieza, se muele grano, etc., tiene una manifestacion muy distinta.

Antes de pasar más adelante, recordemos que las leyes que á la ligera hemos apuntado son igualmente aplicables asi á los casos en que las fuerzas aceleran el movimiento, como á aquellos en que lo retardan, si bien se ha de tener presente que en los primeros, la inercia presenta el carácter de una verdadera resistencia, y en los segundos el de potencia ó fuerza motriz.

La fuerza de *inercia*, ó de *reaccion* segun otros la llaman, fuerza que nace cuando un cuerpo pasa del estado de reposo al de movimiento, ó cuando puesto en movimiento se acelera ó se retrasa este, se mide —como consecuencia de un principio bien conocido— cual otra cualquiera, por el producto de la masa por la aceleracion, siendo siempre de signo contrario al de la fuerza que modifique el estado del cuerpo.

Así pues, cuando un punto se halle sometido á la accion de una ó mas fuerzas, en cada instante del movimiento existirá siempre equilíbrio entre ellas y la resistencia debida á la inercia de aquel. No á otra cosa se reduce el *principio de d'Alembert* aplicado á un punto material, principio que con el de *las velocidades virtuales* nos hubiera conducido al teorema de fuerzas vivas.

§ 21. **Ecuacion de fuerzas vivas en el caso mas general de una máquina ó sistema material en movimiento.**—Hemos dicho que las máquinas estaban compuestas de cuerpos sólidos en comunicacion entre sí, cuerpos que pueden ser considerados como sistemas de puntos materiales. En tal concepto, es indudable que, ó bien apoyándonos en los dos principios últimamente citados —haciéndolos extensivos al caso en cuestion— ó bien aplicando á las fuerzas que obran sobre cada punto el teorema de fuerzas vivas y sumando ordenadamente las ecuaciones que resulten, llegaremos á obtener una final que comprenderá todas las partes constitutivas de la máquina.

Siguiendo este último procedimiento, representemos por

m, m'......... las masas de los distintos puntos materiales de un sistema cualquiera,

f, f'........
$\bar{f}$, $\bar{f}'$........ las fuerzas que respectivamente ejerzan su accion sobre los puntos cuyas masas son m, m'....,
$\vdots$ $\vdots$

F, F'......... las resultantes de las fuerzas que actúan sobre cada punto:
F la correspondiente á f, f'.....,
F′ la de $\bar{f}$, $\bar{f}'$..... etc.

v_0, v
v'_0, v' las velocidades que al principio y al fin del período de tiempo que se considere, tengan respectivamente las masas m, m'.....
$\vdots$ $\vdots$

y tendremos:

$$\text{para el punto } m\ldots\ \frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\mathrm{T.^o}\,f+\mathrm{T.^o}\,f'+\ldots\ldots$$

$$\text{para}\ldots\ldots\ldots\ m'\ldots\ \frac{1}{2}m'v'^2-\frac{1}{2}m'v'_0{}^2=\mathrm{T.^o}\,\bar{f}+\mathrm{T.^o}\bar{f}'+\ldots$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

ó bien

$$\text{para el punto } m\ldots\ \frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\mathrm{T.^o}\,\mathrm{F}\ldots\ldots\quad(8)$$

$$\text{para}\ldots\ldots\ldots\ m'\ldots\ \frac{1}{2}m'v'^2-\frac{1}{2}m'v'_0{}^2=\mathrm{T.^o}\,\mathrm{F}'\ldots\ldots\quad(9)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

si se tiene presente que el trabajo de la resultante de dos ó más fuerzas, es igual á la suma de los trabajos de estas.

Ahora bien, si sumamos ordenadamente las ecuaciones (8), (9)..... tendremos la ecuacion final que buscábamos.

$$\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m'v'^2+\ldots\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}m'v'_0{}^2\ldots\right)=$$

$$=\mathrm{T.^o}\,\mathrm{F}+\mathrm{T.^o}\,\mathrm{F}'+\ldots\ldots$$

$$\text{ó bien } \Sigma\frac{1}{2}mv^2-\Sigma\frac{1}{2}mv_0{}^2=\Sigma\,\mathrm{T.^o}\,\mathrm{F},\ldots\ldots\quad(10)$$

cuyo primer miembro expresa la mitad del incremento total de fuerza viva, adquirido por el sistema durante el periodo de tiempo considerado; y el segundo, el trabajo total en igual tiempo de las fuerzas que, tanto interiores como exteriores obran sobre aquel.

Al aplicar la ecuacion (10) á las máquinas en movimiento, solo hay que tomar en consideracion el trabajo de las fuerzas exteriores, pues siendo las interiores iguales de dos en dos y directamente opuestas, y pudiendo mirar como invariable la distancia entre cada dos puntos contiguos—no solo por la naturaleza de los materiales con que se construyen aquellas, sinó tambien por las dimensiones que se dan á sus diferentes partes—es evidente que el trabajo debido á dichas fuerzas interiores habrá de ser nulo. (*)

Para dar á la ecuacion de fuerzas vivas la forma más conveniente á su discusion, clasificaremos las fuerzas exteriores de de este modo:

F............ Fuerza motriz.

Q............ Resistencia útil.

R............ Resistencias pasivas.

P............ Pesos de aquellas partes ú órganos cuyo centro de gravedad cambia de posicion verticalmente,

y sus trabajos respectivos se expresarán asi:

el de F.....$F \times e$ ó T_m ... trabajo motor

(*) En el caso de que algunas partes de la máquina reciban uno ó mas choques durante el periodo de tiempo que se considere y resulten deformaciones permanentes, no cabe prescindir de los trabajos de las fuerzas interiores, causa de la pérdida de fuerza viva que esperimentaría el sistema por efecto de aquellos.

el de Q...$Q\times q$ ó Q_q... $\left\{\begin{array}{l}\text{trabajo resistente útil ó trabajo}\\ \text{útil,}\end{array}\right.$

» R....,$R\times r$ ó R_r... $\left\{\begin{array}{l}\text{trabajo resistente nocivo ó trabajo}\\ \text{nocivo,}\end{array}\right.$

» P....$P\times h$ ó P_h... $\left\{\begin{array}{l}\text{trabajo debido al peso de las pie-}\\ \text{zas que oscilan verticalmente.}\end{array}\right.$

Con arreglo á esto, la ecuacion (10) despues de integrados exacta ó aproximadamente, si no es posible con exactitud, todos los términos comprendidos en Σ T.° F tomará esta forma;

$$F\times e-Q\times q-R\times r\pm P\times h=\Sigma\frac{1}{2}m\,(v^2-v^2_0)...\;(11)$$

ó bien $T_m-T_u-T_r\pm P_h=\Sigma\frac{1}{2}\;m(v^2-v^2_0)$.

§ 22. **Ecuacion de fuerzas vivas correspondiente á cada uno de los principales periodos que abraza el movimiento de las máquinas.**— Cuando el teorema de fuerzas vivas, que como ya digimos encierra toda la teoria dinámica de las máquinas, tiene por objeto el estudio de estas, es más generalmente conocido por *principio de la trasmision del trabajo.*

Las diferentes faces del movimiento de una máquina, por numerosas y variadas que sean, y por rápido ó lento el tránsito de unas á otras, desde que se inicia hasta que aquella alcanza su régimen, ó sea su marcha regular y normal, y desde este instante hasta que se para y cesa de trabajar, todas ellas distínguense entre sí, quedando caracterizadas y definidas por la ecuacion de fuerzas vivas.

Supongamos que se trata de poner en movimiento una máquina cualquiera. Desde luego se nos presenta como evidente:

1.° Que aquel no se iniciará en tanto el trabajo motor no supere al de todas las resistencias.

2.° Que el exceso del trabajo motor sobre el resistente quedará trasformado en fuerza viva.

Y por consecuencia que mientras vaya en aumento la velocidad de la máquina, la ecuacion que le corresponda durante este primer período, será, prescindiendo por el pronto del términо $\pm$ P h, lo que en nada influye sobre lo que vamos á decir,

$$T_m - T_u - T_r = \Sigma \frac{1}{2} mv^2 \dots (12)$$

Como el crecimiento de fuerza viva no puede ser ilimitado, pues para que lo fuese debiera haber ilimitacion tambien, ó en el crecimiento del trabajo motor ó en el decrecimiento del resistente, ambas cosas inadmisibles, forzoso es suponer haya de llegar un instante en que la velocidad alcance un valor máximo, valor que puede ó no permanecer constante. Si lo primero, será uniforme el movimiento, y

$$T_m - T_u - T_r = \Sigma \frac{1}{2} m(v^2 - v^2) \text{ ó bien}$$

$$T_m = T_u + T_r \dots\dots\dots \quad (13)$$

la ecuacion que caracterice esta marcha particular de la máquina; si lo segundo, es decir si la velocidad, despues de alcanzar un máximo valor, v por ejemplo, disminuye hasta cierto punto, para desde este volver á crecer y alcanzar dicho valor v, y tales crecimientos y decrecimientos se suceden sin cesar, la ecuacion que comprenda un número cualquiera de estos períodos, en los que la velocidad al principio y al fin de cada uno sea la misma, tendrá igual forma que la (13)

$$T_m = T_u + T_r$$

En uno y otro caso dícese que la máquina tiene su régimen.

Asi las cosas, si la velocidad en vez de permanecer constante ó con las alternativas anteriores de aumento y disminucion, va decreciendo más y más hasta anularse, la ecuacion comprensiva de todo este período, será:

$$T_m - T_u - T_r = \Sigma \frac{1}{2} m(o - v^2) \text{ ó bien}$$

$$T_m + \Sigma \frac{1}{2} mv^2 = T_u + T_r;$$

y durante él, restituirá la máquina todo el trabajo que habia obsorbido en el primero y que, como en depósito, guardaba trasformado en fuerza viva.

Si quisiéramos encontrar ahora la ecuacion que abrace el tiempo total desde que se principia á mover la máquina hasta que se para, no habria más que sumar las pertenecientes á los tres períodos de que nos acabamos de ocupar, ó bien establecerla directamente, teniendo en cuenta que la velocidad es nula, y por tanto la misma al principio y al fin de dicho tiempo, con arreglo á lo cual tendremos;

$$T_m = T_u + T_r$$

§ 23. **Cálculo del efecto útil y discusion de los términos que contiene la ecuacion de fuerzas vivas.**—La ecuacion (11) § 20, da lugar á multitud de cuestiones entre las que aparecen en primer término; el cálculo del efecto útil de que es susceptible una máquina, el del trabajo motor necesario para hacer una obra determinada y el de las resistencias pasivas.

Dicha ecuacion es aplicable, asi á la totalidad de una máquina—comprendiendo la motora, operadoras activadas por ella y órganos de trasmision—como á una parte cualquiera del conjunto, si bien se ha de tener presente que en este último caso, ciertas fuerzas miradas como interiores en el más general, pasan á tomar el carácter de exteriores.

Concretándonos á la primera cuestion de las tres indicadas, despejemos el término $Q \times q$ correspondiente al efecto útil, y se tendrá:

$$Q \times q = F \times e - R \times r \pm P \times h - \Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

Para que el valor del primer miembro sea teóricamente el mayor posible, ó en otros términos, sea un *máximum absoluto*, preciso es que se verifique

$$R \times r = 0, \quad \pm P \times h = 0, \quad \Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = 0.$$

$R \times r = 0$.... Esta condicion exige que no haya resistencias pasivas.

En la imposibilidad de realizar esto en la práctica, todas las tentativas se han de dirigir á debilitar su influencia, ya dando á las piezas que resbalan unas sobre otras las dimensiones solo necesarias para resistir los esfuerzos á que estén sometidas, ya lubrificando las superficies frotantes, ya evitando en lo posible piezas en las que se altere bruscamente el sentido de su movimiento.

$\pm P \times h = 0$.... Aunque este término no afecta de una manera directa al valor de $Q \times q$, por cuanto pertenece al trabajo debido al peso de las piezas oscilantes, cuyo centro de gravedad recorre verticalmente igual camino al subir que al bajar dentro del período que se considera —pues de no ser así, lo hubiéramos comprendido en $F \times e$ ó $R \times r$, segun fuera positivo ó negativo—sin embargo, se ha de evitar siempre que sea dable la presencia de dichas piezas. Ellas, no solo originan choques y vibraciones que absorben parte del trabajo motor, sinó que exigen ademas un aumento de seccion en los órganos de las máquinas, aumento que se traduce en otro del término $R \times r$. Tales inconvenientes se aminoran centrando perfectamente las poleas, ruedas y cuantas piezas se muevan con movimiento de rotacion, y con el uso de materias amortiguadoras, siempre que haya cambios bruscos de movimiento.

$\Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = 0$....Condicion que en lenguaje comun nos dice que la mitad de la diferencia entre las fuerzas vivas al principio y al fin del intérvalo de tiempo considerado sea nula.

Para que se cumpla es necesario que se verifique $v=v_0$, esto es, que el movimiento sea *uniforme ó periódicamente variado.*

Lo primero excluye la existencia de piezas oscilantes, y por tanto habrán de ser nulos los términos que análogos al $\pm Ph$ hubiera en la ecuacion (11). Haciendo pues en esta, $v=v_0$ y $P\times h=0$, tendremos

$$Q\times q=F\times e-R\times r\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

en la que si introducimos la hipótesis esencialmente teórica $R\times r=0$, la nueva igualdad

$$Q\times q=F\times e\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

nos hace ver que, ni aun en semejante supuesto, el trabajo útil no puede nunca superar al trabajo motor y por tanto que habrán de ser infructuosos cuantos esfuerzos se dirijan á hallar una solucion al quimérico problema del *movimiento contínuo*.

De la igualdad (13), puesta bajo la forma

$$\frac{F}{Q}=\frac{q}{e}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

se desprende la conocida máxima—que sólo aproximadamente se realiza en la práctica—*que tanto cuanto se gana en fuerza, se pierde en camino recorrido, ó bien, cuanto se pierde en fuerza, se gana en camino recorrido.*

Cuando el movimiento sea periódicamente variado, que es el caso más frecuente en las máquinas—pues la uniformidad absoluta, aun en las circunstancias más favorables no es posible obtenerla—se procurará que los límites en que oscile la velocidad, difieran entre sí lo ménos posible, por las razones expuestas al ocuparnos del término $\pm Ph$.

Si en lugar del efecto útil, nos propusiéramos conocer el trabajo motor mínimo necesario para hacer una obra determinada, despejaríamos el término $\mathbf{F}\,e$, y la discusion nos llevaría á conclusiones análogas á las anteriores.

§ 24. **Sobre los términos** $F \times e$ y $Q \times q$.—Conviene hacer notar desde ahora que el efecto dinámico de un motor ó fuerza motriz, no solo varía con su naturaleza, sinó tambien con la disposicion del órgano que ha de recibir y trasmitir su accion. Así acontece que siempre existe un esfuerzo máximo correspondiente á una velocidad nula, y una velocidad máxima para un esfuerzo nulo, siendo en ambos casos nulo tambien el trabajo. Entre estos límites hay que buscar pues, los valores que hagan máximo el producto $F \times e$, de donde nuevamente se desprende la conveniencia de que las máquinas marchen con movimiento uniforme.

Análogas consideraciones son aplicables tambien al trabajo resistente $Q \times q$, respecto del cual compréndese *á priori* que, dado el útil operador con que se haya de hacer tal ó cual obra, debe existir una velocidad que sea la mas conveniente para obtener, con el menor deterioro de él, la mayor cantidad de producto y el trabajo mas acabado.

§ 25. **Resúmen de las ventajas y contras**

que respectivamente ofrecen el movimiento uniforme y el periódicamente variado.—El primero, como acabamos de ver, permite á la vez que el útil trabaje en las mejores condiciones, que la accion de la fuerza motriz sea la más favorable. Con él, se consigue tambien que las resistencias nocivas absorban el menor trabajo posible, no solo porque no existiendo piezas cuyo movimiento cambie bruscamente no habrá choques, sinó tambien por las menores dimensiones que tendrán las diferentes partes ú órganos de las máquinas. Por todo esto se recomienda, que se centren las ruedas, poleas etc., como se ha dicho ya, se eviten las intermitencias en la accion de las distintas fuerzas que obran en aquellas, accion que se ha de procurar sea lo mas igual posible en todos los momentos, y se empleen órganos de trasmision de movimiento contínuo.

Los inconvenientes del movimiento variado se deducen fácilmente de las ventajas que respecto del movimiento uniforme se acaban de señalar.

§ 26. **Rendimiento de las máquinas**.—La relacion entre el trabajo útil y el motor, es lo que se llama *rendimiento ó coeficiente del efecto útil.* Por manera que refiriéndonos á la ecuacion

$$T_m = T_u + T_r \text{ , tendremos;}$$

$$\text{Rendimiento} = \frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_r}{T_m},$$

valor que nos hace ver que nunca el rendimiento puede llegar al **100** p.%. En la práctica oscila desde el **80** al

90 p.%, hasta el 20 y 30 p.%. Cualquier máquina que dé del 40 al 60 p.%, se puede ya reputar como buena.

§ 27. **Volantes.**—Cuando por las circunstancias especiales de una máquina no es dable —y esto es lo más general— hacer que se mueva con movimiento uniforme, todos los esfuerzos deben dirigirse á regularizar su marcha en el sentido de que se separe de la uniformidad lo ménos posible.

Entre los varios medios que coadyuvan á este fin, aparece como muy eficaz el que consiste en montar sobre uno de los árboles de trasmision una rueda más ó ménos grande, de cerco pesado, á la que se da el nombre de *volante*.

Supongamos, para facilitar la inteligencia de lo que se va á decir, que toda la masa del sistema gira al rededor de un eje, de manera que la máquina quede reducida, fig.ª 20 (lám. 2.ª) al árbol A, que descansa en dos coginetes, y á la rueda B. La ecuacion de fuerzas vivas para este caso será evidentemente

$$\mathrm{F}\times e-\mathrm{Q}\times q-\mathrm{R}\times r=\frac{1}{2}(w^2-w_0^2)\int r^2dm=\frac{1}{2}(w+w_0)\times$$

$$\times(w-w_0)\times\int r^2dm,\ \text{ó bien}$$

$$\mathrm{F}\times e-\mathrm{Q}\times q-\mathrm{R}\times r=\Omega(w-w_0)\int r^2dm\ldots.\quad(15)$$

suponiendo—en lo que no se padece notable error—que la velocidad media de la máquina, representada por Ω, sea igual á la semisuma $\frac{w+w_0}{2}$.

En el momento de inercia $\int r^2 dm$ solo tomamos en cuenta la masa del volante, y para ajustarnos á la práctica admitida, la del cerco únicamente, prescindiendo en el caso presente de las de los rayos, cubo y árbol A.

El valor $w-w_0=\frac{F\times e-Q\times q-R\times r}{\Omega\int r^2\,dm}$, sacado de la ecuacion (15) y correspondiente al cambio de velocidad angular que esperimenta la máquina, nos demuestra: que para una variacion dada, simultánea ó nó, de los términos $F\times e$, $Q\times q$, $R\times r$,—única causa del retardo ó aceleracion del movimiento,—será tanto menor la diferencia $w-w_0$, cuanto mayor fuere la velocidad del árbol en que esté montado el volante y más grande el momento de inercia de este último.

Ahora bien, si se quiere que la variacion $w-w_0$ sea á lo más igual á la fraccion $\frac{1}{n}$ de la velocidad media Ω, tendremos:

$w-w_0=\frac{\Omega}{n}$, y por consiguiente el valor

$$\int r^2\,dm=\frac{(F\times e-Q\times q-R\times r)\,n}{\Omega^2}$$

deducido de la ecuacion (15) nos dará á conocer las dimensiones del volante, que por su inercia se opondria á que se acelerase ó retardase el movimiento más de lo que permite aquella condicion.

El valor de Ω generalmente dado á priori, se deduce del número N de vueltas que la máquina dé en la unidad de tiempo, que por lo regular es el minuto.

Segun esto,

$$\Omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30},$$

y por tanto,

$$\int r^2\, d\, m = \frac{900}{\pi^2 N^2}(F \times e - Q \times q - R \times r)\, n.$$

La seccion correspondiente al cerco de los volantes, suele ser por lo comun *rectangular*, *elíptica* ó *circular*.

El coeficiente de regularidad n varía con las distintas clases de trabajo que deban ejecutar las máquinas, para cuya acertada eleccion, ya sean operadoras ó motoras, se ha de tener esto muy presente.

Los siguientes valores pueden servir de norma en la mayor parte de los casos que se presentan en la práctica.

n=de 40 á 60.....	Para las máquinas de tegidos ó hilados que son entre todas, las que por principio general reclaman mayor regularidad.
n=32..............	Para las máquinas útiles y cuantas no requieran una gran regularidad.

:

n = de 15 á 25..... Para las máquinas soplantes, sierras etc. y en general para las que ejecutan trabajos poco delicados.

Como en la práctica no se presentan las cosas con la sencillez que se observa en la fig.ª 16 (lám. 2.ª) que sólo nos ha servido para fijar las ideas en la anterior exposicion, se suele hacer uso muy frecuentemente de fórmulas empíricas para eludir los casi siempre prolijos cálculos que exige la determinacion de las dimensiones de los volantes.

Las más admitidas son las siguientes, tomadas de la mecánica práctica de Morin.

Máquinas de vapor sin espansion y con ó sin condensacion.

$$P = 5600 \times \frac{nC}{Nv^2} \ldots\ldots \quad (*) \quad \text{en la que}$$

P....representa el peso del volante, ó más bien el de su cerco ó corona.

v....velocidad referida á 1'', de la superficie cilíndrica media del cerco, entendiéndose que es la media con relacion á las que lo limitan interior y esteriormente.

C....fuerza nominal en caballos de vapor.

n....coeficiente de regularidad.

N....número de vueltas que dé en 1' el árbol en que se ha de montar el volante.

(*) El coeficiente 5600 es en números redondos el admitido por Morin para las máquinas sin balanzadera, y algo mayor que el término medio de los que asigna á las de balanzadera, en los tres casos que toma en consideracion.

Máquinas de vapor con espansion y con ó sin condensacion.

$$P = K \frac{nC}{N v^3}.$$

Las letras tienen igual significacion que en la fórmula anterior.

Los valores del coeficiente K, varian con el grado de espansion.

Si esta principia en el momento despues de haber recorrido el piston la mitad de la altura del cilindro........................ $K = 7080$

Si cuando ha recorrido la tercera parte................................ $K = 8166$

Y si la cuarta parte..................... $K = 9218$

Martillos de forja frontales.

De 3000 á 3500 kg. de peso y dando de 70 á 80 golpes por minuto.............. $P = \frac{20000}{R^2}$

De 4000 á 4900 kg. y dando igual número de golpes...................... $P = \frac{30000}{R^2}$

Martillos de forja á la alemana.

De 600 á 800 kg. de peso, comprendido el del mango, y dando de 100 á 110 golpes por minuto.......................... $P = \frac{15000}{R^2}$

Martillos de forja basculares, llamados martinetes.

De 500 kg. de peso y dando de 150 á 200 golpes por minuto........................ $P=\frac{9000}{R^2}$

De 360 kg. y dando igual número de golpes.............................. $P=\frac{6000}{R^2}$

En todas estas fórmulas R representa el rádio del volante.

Sierras circulares de gran diámetro.

$$P=\frac{30000}{v^2}$$

v....representa la velocidad de la circunferencia mayor de la sierra.

Laminadores.

$$P=K\frac{130000.C}{Nv^2}$$

Para máquinas		de 80 á 100	caballos....	K=20
»	»	de 60	»	K=25
»	»	de 30 á 40	»	K=80

Conocido el peso del volante, las dimensiones de su seccion se deducirian de la fórmula,

$$P=\text{vol.}\times\text{peso específico.}$$

Si suponemos, por ejemplo, que sea rectangular, se tendrá:

$$\text{Vol.}=\pi(R^2-r^2)\,h=\pi(R+r)(R-r)\,h=2\pi\,\overline{R}\,he$$

$\overline{R}$....representa el rádio medio de la corona.
h.... ».... la altura en direccion del eje.
e.... ».... el espesor en direccion de un rádio.

Cuando esta última dimension es muy pequeña con relacion á R, se puede hacer $\overline{R}=R$, lo que simplifica algo los cálculos.

Hemos dicho que el volante debe colocarse en el árbol cuya velocidad sea mayor, y ahora añadiremos que además conviene esté muy cerca del órgano en que las variaciones sean más ostensibles, con lo que se conseguirá una menor alteracion en el movimiento de las demás partes de la máquina, y como consecuencia de esto el que se les pueda dar menores dimensiones.

Lo más comun es montar el volante cerca del órgano motor, ó del útil operador.

Si el trabajo motor y el de las resistencias útiles fueren simultáneamente muy variables, se podrán poner en la máquina hasta dos volantes, de no hallar otro medio mas ventajoso de regularizar el movimiento, pues no debemos olvidar que, como pieza muy pesada y de grandes dimensiones, consume inútilmente parte del trabajo desarrollado por la fuerza motriz.

§ 28. **Reguladores ó moderadores.**—Si hemos comprendido el objeto y modo de funcionar los volantes hemos debido comprender tambien que, si por su gran fuerza viva se oponen durante las ligeras variaciones de movimiento á que la velocidad pueda cambiar brusca y repentinamente, son ineficaces sin embargo para impedir que esta última, aunque poco á poco, vaya creciendo hasta llegar á alcanzar un valor inconveniente, ó vaya, por el contrario, disminuyendo hasta pararse la máquina, cuando las tales variaciones, en vez de ser momentáneas ó de corta duracion, sean de carácter permanente, ya en uno, ya en otro de los dos sentidos en que pueden presentarse.

Insuficientes los volantes en semejantes casos, hay que recurrir á los aparatos conocidos por *reguladores ó moderadores*—nombres con que por algunos se designan tambien aquellos—mediante los cuales se consigue siempre, que el valor medio del trabajo motor sea igual al del trabajo resistente, durante ciertos períodos de tiempo.

§ 29. **Regulador de fuerza centrífuga ó péndulo cónico.**—El más generalizado consta figura 21 (lám.ª 2.ª) de un árbol vertical A, en el que están articuladas dos varillas O a, O b, de cuyos extremos libres penden las masas m, m', por lo regular de forma esférica. En los puntos c, d equidistantes de O, se hallan articuladas otras dos varillas iguales entre sí, que van á unirse por articulacion tambien al manguito q. Y como ordinariamente se hace en la práctica O $c = c\,f$, la figura O $c\,f\,d$ viene á ser próximamente la de un rombo.

De los dos extremos de la palanca angular $f\,i\,k$, giratoria en i, el uno, de propósito enhorquillado, abraza al manguito q, que á la vez que gira con el árbol A puede tambien resbalar á lo largo de él, y el otro está fijo con articulacion al órgano ó pieza que ha de regular la accion del motor.

Los órganos *l*, *l'*, *l''*... tienen por único objeto indicar que el árbol A ha de recibir su movimiento de rotacion de uno de los de la máquina, procurando en lo posible que lo tome del más ocasionado á variaciones.

Conocido en principio el aparato de que se trata, veamos como funciona. A este fin, supóngase para fijar las ideas que por el tubo *u* viene el motor, (vapor en el presente caso) que al obrar sobre el órgano receptor (el émbolo E) pone á este en movimiento y consiguientemente á las demás partes del sistema dependientes de él.

Supongamos tambien que cuando la máquina tenga su régimen, el órgano (válvula *n*) que ha de dar paso por el tubo al vapor, ocupe la posicion media que indica la figura.

Esto sentado, imaginemos que por aumento de potencia (mayor tension del vapor en la caldera) ó por disminucion de resistencia (por ejemplo, parada de una ó más máquinas operadoras de las activadas por la motriz) principia á acelerarse el movimiento, de cuya aceleracion participará el árbol A. Es indudable que cuando tal suceda, las masas *m*, *m'* se separarán por efecto de la fuerza centrífuga, no sin obligar á que el manguito ó virola *q*, camine hácia el vértice *o*, resbalando por el árbol A, y como consecuencia de este movimiento ascensional no será ménos cierto el que la palanca *fik* haga girar á la válvula *n*, estrechando el paso del vapor y dando por resultado inmediato el que la máquina tienda á tomar la velocidad correspondiente á su régimen.

Si por el contrario esta última disminuyese, fácil sería ver tambien que las bolas ó esferas m, m' descenderian en este caso y con ellas la virola q, y que al obrar esta sobre el extremo enhorquillado de la palanca $f\,i\,k$, la válvula n habria de girar proporcionando mayor paso al vapor, consiguiéndose de esta suerte que la velocidad, lejos de continuar decreciendo, aumente con tendencia á recuperar la de la máquina en su marcha normal y ordinaria.

§ 30. **Teoría dinámica del regulador de fuerza centrífuga.**—Si prescindimos, como se hace generalmente, del peso de las varillas y virola, y de los rozamientos en todas las articulaciones, y suponemos además que cuando sea w la velocidad del árbol A, el extremo enhorquillado de la palanca que mueve la válvula, no ejerce sobre aquella accion alguna, es evidente que las únicas fuerzas que hay que tener en cuenta son fig. 21 (lám. 2.ª),

el peso $2\,P = 2\,M\,g$ de las bolas,

la fuerza centrífuga $2\,M\,w^2 r$ de las mismas,

y las tensiones $t = t'$ de las varillas $O\,a$, $O\,b$.

Las ecuaciones de equilibrio dinámico correspondientes á estas fuerzas, quedan visiblemente reducidas á la de momentos de las mismas, tomados con relacion al punto O. En su consecuencia, y despues de observar que es nulo el momento de t,

$$2\,\frac{P}{g}\,w^2 r \times h - 2\,P \times r = 0,$$

y simplificando

$$g = w^2 \times h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Si representamos por T el tiempo en segundos que tarden las bolas en dar una revolucion completa tendremos;

$$Tw=2\pi, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

y poniendo por w en la ecuacion (16) su valor $\frac{2\pi}{T}$ sacado de la última, y despejando

T resulta ...... $T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ .... (18)

esto es, que el tiempo empleado por el péndulo cónico en dar una revolucion completa, es doble del que invierte en una oscilacion el péndulo circular simple, de longitud h, lo cual basta á algunos constructores para determinar las dimensiones del regulador que nos ocupa. Pero fácil es comprender que aunque la distancia h aumente ó disminuya, segun sea mayor ó menor la velocidad w, y de aqui se infiera la posibilidad de utilizar el movimiento oscilatorio del manguito para cerrar y abrir la válvula, como quiera que el valor de h es independiente de la resistencia que se opone al movimiento vertical del manguito, resistencia que debe ser vencida por la fuerza centrífuga de las bolas, nada de estraño tiene el haber de recurrir á inseguros tanteos y el que los aparatos en cuestion no respondan muchas veces á los deseos de los constructores, cuando para determinar sus dimensiones sólo se tenga en cuenta la ecuacion (18).

Para obviar en parte tales inconvenientes, preciso es hallar una relacion entre el peso de las bolas, la resistencia que se oponga al movimiento vertical del manguito y los límites de la velocidad dentro de los cuales ha de funcionar el regulador, ó en otros términos, dentro de los cuales ha de moverse aquel, y consiguientemente la palanca $f\,i\,k$.

Supongamos que cuando la velocidad llegue á ser

$$w' = w + \frac{1}{n}\,w = w\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

las bolas principian á elevarse y el manguito á obrar sobre la palanca.

En este supuesto hay que tomar en consideracion las siguientes fuerzas,

Q.................. resistencia que se opone al movimiento ascendente del manguito,

$\bar{t} = \bar{t}'$.......... tensiones de las varillas cf, df, procedentes de la resistencia Q,

$t = t'$.............. tensiones de las O b, O a, cuyo momento respecto del punto O es nulo,

P.................. peso de cada una de las bolas,

$2\,\frac{\mathrm{P}}{g}\,w'^2 r$........ fuerza centrífuga de estas.

La ecuacion de equilibrio dinámico, será evidentemente:

$$2\,\mathrm{P}\,r + 2\,\bar{t} \times l = 2\,\frac{\mathrm{P}}{g}\,w'^2\,r \times h, \quad \text{de donde}$$

$\mathrm{P} = \dfrac{\bar{t}\,l\,g}{w'^2\,r\,h - g\,r}$ y poniendo por $\bar{t}, l$ y w'^2, los valores

$$\left.\begin{array}{l}\bar{l}=\dfrac{Q}{2\cos.\alpha}\\ l=H\,\text{sen.}\,\alpha\end{array}\right\}\bar{l}\,l=\frac{Q\,H}{2}\,\text{tang.}\,\alpha=\frac{Q\,H}{2}\times\frac{r}{h},$$

$$w'^2=w^2\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)=\frac{g}{h}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right),$$

ó bien aproximadamente, despreciando el término $\frac{1}{n^2}$, siempre de escasa importancia,

$$w'^2=\frac{g}{h}\left(1+\frac{2}{n}\right),$$

se tendrá, despues de las consiguientes reducciones

$$P=\frac{n\,Q\,H}{4\,h}\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(19)$$

En el caso de disminuir la velocidad, supóngase tambien que el manguito ejerza accion sobre la palanca cuando aquella llegue á ser

$$w'=w-\frac{1}{n}\,w=w\left(1-\frac{1}{n}\right);$$

el valor que se obtenga para P será el mismo que se acaba de hallar, pues n y Q, ambos entrarian afectados de signo negativo, con lo que se evidencia que las bolas no esperimentan más dificultad para subir que para bajar.

El valor formular (19) nos demuestra que el peso P es proporcional á la resistencia Q, y al coeficiente de sensibilidad n.

Para que no quede la mas ligera duda sobre la marcha que conviene seguir en el establecimiento de esta clase de reguladores, haremos una aplicacion.

A este fin supongamos,

$$\left.\begin{array}{l} n=25 \\ Q=2 \text{ kg.}^s \\ H=0,\ 75 \text{ met.}^s \\ h=0,\ 50 \text{ met.}^s \end{array}\right\}$$

Con estos datos, el peso de las bolas sería

$$P=\frac{25\times 2\times 0,75}{4\times 0,50}=18,75 \text{ kg.}^s$$

Conocida la altura h, la determinacion de la velocidad angular del aparato no debe ofrecer dificultad alguna. En efecto, representemos por N el número de oscilaciones que en el tiempo T haga un péndulo circular simple, de longitud l; y por N' T l' cantidades análogas correspondientes á otro péndulo. Los tiempos empleados en una oscilacion serán respectivamente:

$$\frac{T}{N}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{y} \quad \frac{T}{N'}=\pi\sqrt{\frac{l'}{g}},$$

de donde se deduce

$$\frac{N}{N'}=\frac{\sqrt{l'}}{\sqrt{l}};$$

y por tanto

$$N'=N\sqrt{\frac{l}{l'}}.$$

Para el péndulo que bata segundos se tiene:

$N=60$ por minuto.

$l=0^m,99384$,

en su consecuencia $N' = \frac{60\sqrt{0,99384}}{\sqrt{l}} = \frac{59,814}{\sqrt{l}}$;

y para el péndulo cónico, cuya altura fuera $l=h$,

$$\bar{N} = \frac{59,814}{2\sqrt{l}} = \frac{29,907}{\sqrt{l}}; \text{ en números redondos,}$$

$$\bar{N} = \frac{30}{\sqrt{l}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20);$$

y como en el ejemplo propuesto se ha supuesto $l=h=0^m,50$ resultará para el número de vueltas que aproximadamente debe dar el regulador en 1'

$$\bar{N}=43;$$

por manera que para la resolucion del problema, hay que hacer uso de las fórmulas (19) y (20). Conviene advertir sin embargo, que no siendo fácil determinar con exactitud el valor de Q, y prescindiéndose casi siempre del peso de las varillas y de otras pequeñas causas que más ó ménos afectan el valor de P, es práctica admitida el hacer huecas las bolas, y el ir echando plomo derretido en ellas hasta conseguir la sensibilidad apetecida.

Si observamos que para $Q=2$ kg. y con los valores asignados á las demas cantidades ha resultado para el peso de cada bola $18^k,75$, se comprenderá sin dificultad cuanto mayores deben ser cuando dicha resistencia alcance un valor algo considerable, como sucede por ejemplo en las ruedas hidráulicas cuyas compuertas son muy pesadas. En semejantes casos es indispensable valerse de aparatos intermedios que faciliten el movimiento de las piezas destinadas á regularizar la entrada del motor.

§ 31. **Regulador-Farcot**.—El moderador de fuerza centrífuga y la mayor parte de los que tienen por fundamento el mismo principio que él, ofrecen principalmente dos inconvenientes, debidos ambos á no haber mas que una sola posicion de equilibrio dinámico para cada velocidad de régimen. Hácese ostensible el uno, cuando por cualquier causa se quiere cambiar la marcha de la máquina aumentando ó disminuyendo aquella, y para obviarlo se procura, ó que no se altere la que tenia el péndulo por medio de un tambor cónico, ó poleas de dimensiones apropiadas puestas en el árbol sobre que resbala el manguito, ó bien se hace variar convenientemente el brazo de palanca de la válvula ó pieza que gradúa la entrada del motor; manifiéstase el otro, al querer aumentar ó disminuir el trabajo de este último, sin alterar la velocidad de régimen; más claro todavia, si v es la velocidad del motor, cuyo esfuerzo representaremos por F, y R la resistencia que ha de vencer, haciéndola recorrer en el mismo tiempo á que se refiere v, el camino r. tendremos

$$Fv=Rr.;$$

á la velocidad v de régimen corresponde para el péndulo otra que hemos designado por w, y como $h=\frac{g}{w^2}$, la posicion de la virola quedará determinada, y por tanto determinada tambien la abertura de la válvula, de manera que siendo el valor de F, dependiente siempre del de v, no es posible con el moderador de What, variar el esfuerzo sin que varíe igualmente la velocidad de régimen.

Para que esta última permanezca inalterable, aun cuando varíe aquel, preciso es que la distancia h sea siempre la misma, no obstante el movimiento de traslacion de la virola.

Si reflexionamos un poco, veremos sin dificultad, fig.ª 22 (lám.ª 2.ª) que semejante condicion quedará satisfecha, si permaneciendo las varillas a, b, siempre normales á la curva que en su movimiento oscilatorio vertical recorran los centros de las bolas, se consigue variar su longitud de tal modo que dicha curva sea una parábola que tenga por ecuacion $y=2hx$, pues sabido es que la subnormal en ella goza de la propiedad de ser constante é igual á la mitad del parámetro.

Al hábil ingeniero mecánico Mr. Farcot se debe una solucion aproximada de este problema que nada deja que desear y es generalmente la adoptada en la práctica.

Supóngase fig.ª 23 (lám.ª 2.ª) descrita la parábola C B C′ de parámetro 2 h y sean a, b los puntos correspondientes á las posiciones extremas que pueden ocupar las bolas.

Dada la corta extension que por lo regular tiene el arco parabólico $a\,b$, Mr. Farcot lo reemplaza por el circular que más se aproxima á confundirse con él.

En el centro O correspondiente á dicho arco, y en el simétrico O′, articula los extremos de las varillas A c, A c', que están unidas al manguito, como en el anterior, por otras dos más pequeñas *d*, *d'* y entre si por el arco metálico S que recorren en su movimiento vertical.

Cuando el manguito se mueve en la direccion A D, las varillas A*c*, A*c'* se abrirán ó se cerrarán y el punto A donde estas se crucen estará más arriba ó más abajo; pero cuando el camino recorrido por aquel no es muy grande, el radio O*c* en su nueva posicion, casi se confundirá con la normal á la parábola. Su proyeccion sobre el eje A D, la subnormal, no es otra cosa que la distancia *h*.

Este regulador de varillas cruzadas, conocido más generalmente por el nombre de su inventor, tiene otros detalles que todos ellos contribuyen á lo bien que funciona, aun en circunstancias de marcha muy distintas.

En apoyo de esto diremos que en el informe redactado por Mr. Tresca sobre las experiencias verificadas con este aparato, se lee: que á pesar de haber cambiado bruscamente la fuerza de la máquina en que se ensayó, desde 3 á 20 caballos de vapor, no se notó la más ligera variacion en la velocidad de régimen. El regulador Farcot no está exento sin embargo, del primer inconveniente antes señalado.

§ 32. **Regulador Poncelet.**-Cuando es algo considerable la resistencia que á moverse presentan las piezas destinadas á graduar la entrada del motor, hemos dicho que los moderadores de fuerza centrífuga—á no exagerar sus dimensiones, lo que produciria otros inconvenientes—requerian mecanismos especiales que facilitaran el movimiento de ellas.

El de Poncelet y el que lleva el nombre de Mr. Molinié, únicos de que nos ocuparemos, no necesitan de tales aditamentos; bien es verdad que están fundados en otros principios, y son muy propios para el caso en cuestion, por lo que se los aplica, particularmente el último, á hacer funcionar las compuertas de las ruedas hidráulicas, piezas de ordinario bastante pesadas.

El primero fig.ª 24 (lám.ª 2.ª) consta principalmente de dos árboles O, O′ paralelos entre si, en los que se hallan montados respectivamente los piñones A, B y las ruedas C, D; de estas dos, ambas de igual diámetro, la D es loca. El piñon B, de mayor altura que el otro, aunque del mismo diámetro, está en su árbol cual una tuerca en su tornillo, y por esto el hallarse roscado aquel en una cierta extension.

El manguito que ha de dar movimiento al extremo enhorquillado de la palanca, se ve en E formando cuerpo con el piñon B.

En el árbol O′ hay un muelle *m* que obliga, apoyándose en el piton *p* fijo en la rueda loca D, á hacer girar á esta cuando gira dicho árbol, cuyo movimiento recibe del O, que lo toma directamente de uno de los de las máquinas.

Comprendido esto, pasemos á ver la manera de funcionar tan sencillo aparato. Supongamos que la máquina tiene su volocidad de régimen. En tanto esta no varíe, es indudable que tampoco variará la flexion del muelle, y las ruedas C, D girarán con igual velocidad, como si ambas estuvieren fijas en el eje O′, siendo por otro lado iguales entre si tambien la velocidad angular que al piñon B corresponde por estar en el árbol O, y la que le trasmitiria la rueda D si no fuese loca.

Imaginemos ahora que por cualquier circunstancia varía la marcha de la máquina: si se acelera, el muelle *m* adquirirá una flexion mayor, y si se retarda una menor, respecto de la que tenia con la velocidad de régimen, y en ambos casos el piñon B, aunque en diferente sentido, caminará por el árbol O, y como consecuencia de este movimiento de traslacion, la palanca hará funcionar la compuerta, ya cerrándola si la velocidad aumenta, ó ya abriéndola en caso contrario.

§ 33. **Regulador Molinié.**—Redúcese fig.ª 25 (lám.ª 2.ª) á un fuelle cilíndrico dividido en tres partes A, B, C, por dos paredes ó diafragmas D, E; esta última, fija en las columnas H, y aquella con la necesaria libertad para resbalar por ellas, mediante la accion de dos bielas *g*, que reciben la de la máquina por intermedio de la correa sin fin F. Todo el fuelle descansa sobre el plato inmóvil K que constituye su fondo inferior.

Hay además cuatro válvulas *a*, *b*, *c*, *d*, que se abren todas ellas de abajo á arriba; un tubo flexible Y que pone en comunicacion las divisiones A, C, y dos orificios *e* en la cubierta superior con sus correspondientes tapones *t*, que permiten á voluntad estrechar más ó menos el paso que por ellos se establece.

El vástago L, fijo en el centro de la cubierta y guiado por el agujero abierto en el arco S, ejerce su accion sobre el extremo de la palanca destinada á mover la compuerta de la rueda.

El juego de este ingenioso aparato es sencillísimo. Cuando baja el diafragma D se comprime el aire contenido en A, ciérrase la válvula *a* y pasa aquel por el tubo T á la parte superior, abriendo la válvula *c* que se opone á su paso. Al mismo tiempo que esto sucede, penetra el aire exterior por *b* en el depósito parcial B, y se cierra la válvula *d*.

Por el contrario, cuando D sube, se comprime el aire que hay en B y pasa por *d* á la parte superior, siendo simultáneo este doble efecto con el de abrirse la válvula *a*, por la cual entra el aire exterior, y el de cerrarse las *b* y *c*. Por manera que el resultado de este movimiento vertical de vaiven del diafragma D, es hacer entrar en el depósito C un chorro contínuo de aire exterior que saldrá por los orificios *e*. Toda la cuestion queda reducida pues, á graduar los tapones *t* de modo que salga de C la misma cantidad de aire que entra, para que permanezca inmóvil la cubierta M, á cuyo fin aquellos están roscados y pueden aproximarse más ó ménos á los orificios.

Ahora bien, arregladas las cosas para una marcha determinada, fácil será ver lo que acontecerá si esta se acelera ó se retarda. En el primer caso, se acumulará en el depósito parcial C más aire y en el segundo ménos, respecto del que recibia con la velocidad de régimen, y como consecuencia de esto, el vástago L subirá ó bajará produciendo en la compuerta un efecto contrario, que se facilita siempre equilibrándola convenientemente.

Bueno será hacer observar que así como los volantes no bastan á impedir que la velocidad crezca ó disminuya indefinidamente, cuando la causa que lo motiva no es pasajera, con los moderadores puede acontecer que si el aumento de resistencia es considerable y permanente, se gaste toda la fuerza motriz ó mayor cantidad de la que se produzca ó que hubiere disponible, y llegue un momento en que la máquina se pare ó poco ménos. Para obviar este inconveniente no queda otro medio que ó disminuir la resistencia útil, ó dar á la máquina todo el alimento que necesite.

§ 34. **Frenos.**—Se comprenden bajo esta denominacion todas las piezas ó mecanismos cuyo especial objeto es moderar en momentos dados el movimiento de ciertas máquinas, particularmente las destinadas á elevar y bajar pesos.

La fig. 26 (lám 2.ª) indica uno de los frenos más en uso. Consiste en un fleje ó planchuela de hierro que se ciñe á voluntad más ó ménos fuertemente á la superficie cilíndrica de un tambor ó polea que participa del movimiento de la máquina.

El rozamiento que se produce, obrando como resistencia, disminuye su velocidad.

La palanca *a b* que gira al rededor del punto fijo O sirve, aplicando la mano en el extremo *a*, para producir la presion que convenga del fleje contra el tambor.

En los momentos en que no se quiera funcione el freno, aunque la máquina esté *andando*, no hay más que dejar caer por su propio peso el brazo *a o* de la palanca, y si la situacion de esta fuese muy diferente de la que demuestra la figura, todo quedaría reducido á mantener dicho brazo en una posicion tal que la planchuela no obrase sobre la polea.

Los frenos son tambien de uso muy frecuente y hasta necesarios en los carruajes que marchan por caminos ordinarios de fuertes pendientes, y en los destinados á correr por las *vias férreas*.

No nos detendremos en reseñar las principales disposiciones adoptadas para conseguir el objeto pronta y eficazmente. Casi todas ellas obedecen á la idea de producir una gran presion y por tanto un gran rozamiento sobre la llanta de las ruedas. Existen algunas que en principio se reducen á suspender todo ó parte del sistema sobre piezas determinadas que resbalan por la via, con lo que se consigue que las ruedas no se deterioren.

Estos moderadores, que hemos comprendido en la palabra genérica de *frenos* y cuantos se fundan en crear resistencias extrañas al objeto á que se destine la máquina cuyo movimiento se quiere regularizar, absorben—sin restituirlo como los volantes—una parte no despreciable del trabajo motor, lo que se ha de tener muy en cuenta cuando se trate de calcular este.

§ 35. **Manivelas**.—Como un ejemplo de la influencia que ejercen los órganos de trasmision y la falta de continuidad en la accion de la fuerza motriz en la buena marcha de una máquina, en cuanto á que la velocidad no se separe de la más conveniente al máximo y más acabado trabajo industrial que debe hacer, vamos á estudiar *las manivelas*, el más generalizado de los órganos destinados á transformar un movimiento rectilíneo de vaiven en otro circular contínuo y reciprocamente.

La fig.ª 27 (lám.ª 3.ª) representa lo que se conoce por *manivela simple.* Redúcese á un brazo *oa*, fijo normalmente por uno de sus extremos en el árbol de rotacion A, teniendo en el otro un pezon ó *boton c*, en el que se articula una larga pieza *d*, llamada *biela*, que es la que directamente recibe la accion de la fuerza motriz, en el supuesto de pasar del movimiento rectilíneo de vaiven al circular contínuo.

Si en lugar de una manivela simple, hay dos en el mismo árbol, recibiendo cada biela con independencia la una de la otra la accion del motor, las manivelas así apareadas se llaman dobles; triples cuando hay tres etc. y en general *manivelas múltiples* cuando hay mas de una. Véanse las figuras 28 y 29, (lám.ª 3.ª).

Toda manivela simple puede ser *á simple* ó *á doble efecto*, segun la accion del motor se ejerza sobre ella durante solo media revolucion ó durante la revolucion entera.

Con arreglo á esto, las manivelas dobles, triples etc. pueden clasificarse de un modo semejante, pues lo regular es que sea semejante tambien la accion que simultánea ó sucesivamente reciba del motor cada una de las manivelas simples de que se componen aquellas.

§ 36. **Manivela simple á simple efecto.** — Representemos por la línea *o a* fig.ª 30 (lám. 3.ª), la manivela en cuyo estremo *a* obra la fuerza motriz F por el intermedio de la biela *b*, y sea Q, tangente á la polea P, la resistencia útil. Hacemos abstraccion del peso de la manivela y de todas las resistencias pasivas, y además suponemos que F y Q sean ambas constantes en intensidad y direccion.

Establecido el régimen, es evidente que por ser variable el brazo de palanca de F, el movimiento de la manivela del que depende el de las demás partes, no puede ser otro que el *periódicamente uniforme*, y como consecuencia de esto aparece tambien evidente *á priori*, el que haya por lo menos dos posiciones para ella, en las que la velocidad sea máxima en la una y mínima en la otra.

En efecto, si expresamos por

w.... la velocidad angular de la manivela cuando ocupe una posicion cualquiera, *o a* por ejemplo,

w_0.... velocidad de la misma en el punto m,

e y q... espacios recorridos en direccion de F y Q por los puntos de aplicacion de estas fuerzas,

Y.... suma de los momentos de inercia respecto del eje O al rededor del cual giran manivela, árbol y polea, tendremos:

$$Fe-Qq=\frac{1}{2}Y(w^2-w_0^2)\;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\quad(21)$$

y diferenciada,

$F\,d\,e-Q\,d\,q=Y\,w\,d\,w$, ó bien, puesto que $d\,s=w\,d\,t$,

$$F\,d\,e-Q\,d\,q=Y\,\frac{d\,s}{d\,t}\,d\,w,\quad\text{de donde}$$

$$dw=\frac{F\dfrac{de}{ds}-Q\dfrac{dq}{ds}}{Y}\,d\,t=\frac{Fr\,\text{sen.}\,\alpha-Qr'}{Y}\,dt\dots\dots\;(22)\quad(*)$$

(*) La ecuacion (22) deducida de la (21) y que nos conduciría á esta otra $e=f(t)$, nos demuestra claramente, corroborando lo que ya sabíamos, que la de fuerzas vivas contiene las leyes del movimiento de todas las máquinas.

teniendo presente las relaciones

$$d.e = d.\text{S} \times \text{sen.}\ \alpha = d.s \times r\ \text{sen.}\ \alpha \quad \text{y} \quad d.q = r'\ d.s.$$

El valor de dw nos hace ver inmediatamente que el movimiento es *variado*; y como la ecuacion de trabajos durante una revolucion entera de la manivela

$$\text{F} \times 2r = \text{Q} \times 2\pi r' \quad \ldots\ldots \quad (23) \quad \text{nos dá } \text{Q}r' = \frac{\text{F}\,r}{\pi},$$

dedúcese tambien:

1.° Que á $\alpha = 0$ corresponde $dw < 0$, y por tanto que el movimiento será retardado en todos aquellos puntos en que se verifique $\text{F}\,r\ \text{sen.}\ \alpha < \text{Q}\,r'$.

2.° Que á partir del punto correspondiente al valor de α deducido de la condicion $\text{F}\,r\ \text{sen.}\ \alpha = \text{Q}\,r'$, el incremento $d\,w$ será positivo y por consiguiente acelerado el movimiento en los puntos en que se cumpla

$$\text{sen.}\ \alpha > \frac{\text{Q}\,r'}{\text{F}\,r} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

3.° Que como consecuencia de todo esto, existen para la manivela dos posiciones tales como las $o\,a$, $o\,a'$ en las que la velocidad es respectivamente máxima y mínima, quedando ambas determinadas por los valores de α deducidos de la condicion

$$\text{sen.}\ \alpha = \frac{\text{Q}\,r'}{\text{F}\,r}; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

que el trabajo motor es superior al resistente desde $o\,a$ á $o\,a'$, decreciendo desde esta última posicion hasta ser nulo en m' y durante la semi-revolucion $m'\,c\,m$; que una vez en m el boton de la manivela, vuelven á sucederse á partir de este punto las mismas variaciones de $d\,w$ en la siguiente revolucion y por lo tanto, que el movimiento de aquella es *periódicamente uniforme*.

Para hallar los dos ángulos correspondientes á las posiciones *o a*, *o a'*, ángulos que habrán de ser suplementarios entre sí, combínese la ecuacion (24) con la (23) y se obtendrá:

sen. $\alpha = \frac{1}{\pi}$, que nos dá aproximadamente $\begin{cases} \alpha = 18^{0} + 34' \\ \alpha = 161^{0} + 26' \end{cases}$

La variacion que experimenta el trabajo elemental de la fuerza motriz por consecuencia de la discontinuidad en su accion y de lo que varia su brazo de palanca, es muy sensible, como se puede observar comparando entre si los trabajos *mínimo, medio* y *máximo*, cuyos respectivos valores son:

$$0 \ldots\ldots\ldots \frac{\mathrm{F}rd.s}{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{F}rd.s$$

El trabajo *elemental medio* se puede obtener multiplicando la fuerza constante F, por un elemento de la circunferencia descrita por el brazo de palanca medio $x = \frac{r}{\pi}$, sacado de la ecuacion

$$\mathrm{F} \times 2r = \mathrm{F} \times 2\pi x.$$

Tomándolo por unidad resulta esta marcada gradacion

$$0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 3{,}1416,$$

que nos hace comprender que la *manivela simple á simple efecto* no se debe emplear en los casos en que sea necesaria una gran regularidad en el movimiento.

§ 37. **Manivela simple á doble efecto.**—Véase la misma fig.ª 30 (lám.ª 3.ª) El valor formular

$$dw = \frac{Fr \operatorname{sen} \alpha - Qr'}{Y} \times dt \qquad (*)$$

es igual al encontrado para la manivela á simple efecto, y da lugar á una discusion semejante á la del párrafo anterior, con las solas diferencias debidas á la accion no interrumpida de la fuerza motriz.

Teniendo presente que la ecuacion de trabajos durante una revolucion entera de esta manivela es

$$F \times 4r - Q \times 2\pi r' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (25)$$

será fácil demostrar:

1.° Que existen dos posiciones $o\,a'$, $o\,a'''$, en las que su velocidad es un *máximum*, y otras dos $o\,a$, $o\,a''$ en las que es un *mínimum*.

2.° Que las velocidades tanto máximas como mínimas son respectivamente iguales entre sí, y el movimiento *periódicamente uniforme*.

La posicion de los puntos a, a', a'', a''', queda determinada por la condicion

$$Fr \operatorname{sen.} \alpha = Qr',$$

que combinada con la ecuacion (25) nos dá

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{\pi}.$$

Los valores aproximados de α son:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 39^{\circ} + 32' \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha = (39^{\circ} + 32') + 180^{\circ} \ldots\ldots \end{array}\right\}$$ ángulos correspondientes á los puntos a, a'' en que la velocidad es mínima.

(*) Téngase muy presente en esta y en todas las manivelas á doble efecto, el cambio simultáneo de signo que F y sen. α experimentan en el tercer y cuarto cuadrante. El sentido del movimiento de la manivela está indicado por la flecha f, y se supone que $o\,m$ sea siempre la línea—orígen de ángulos.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=140^{\circ}+28'\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha=(140^{\circ}+28')+180^{\circ}\ldots\end{array}\right\}$$ ángulos correspondientes á los puntos a', a''' en que la velocidad es máxima.

Si referimos al trabajo elemental medio $\frac{2Frds}{\pi}$; tomado como unidad, los elementales mínimo y máximo, cuyos valores respectivos son 0, $Frds$, tendremos

$$0\ldots\ldots\ldots\ldots 1\ldots\ldots\ldots\ldots 1{,}57;$$

cifras que nos hacen ver que la manivela simple á doble efecto proporciona una marcha más regular que la simple á simple efecto, lo que era de presumir atendiendo á que el período durante el cual se cumplen todas las variaciones, comprende en aquella solo una semi-revolucion, y en la última una revolucion entera.

§ 38. **Manivela doble á doble efecto.**—Véase la fig.ª 31 (lám.ª 3.ª), en la que oa, oa', representan las dos manivelas simples que constituyen la manivela doble.

Si en el supuesto de prescindir de las resistencias pasivas y del peso de las manivelas oa, ob, y de considerar constantes en direccion é intensidad las fuerzas F y Q, establecemos la ecuacion de fuerzas vivas correspondiente á los arcos ma, $m'a'$ descritos por los respectivos botones de aquellas se tendrá:

$$Fe+Fe'-Qq=\frac{1}{2}\,Y\,(w^2-w_0^2),\ \text{de donde}$$

diferenciando y teniendo presente que

$$w=\frac{ds}{dt},$$

$$dw=\frac{F\,\frac{d.e}{ds}+F\,\frac{d.e'}{ds}-Q\,\frac{d.q}{ds}}{Y}\times dt=$$

$$=\frac{\mathrm{F}r\,\text{sen}.\alpha+\mathrm{F}r\,\text{sen}(\beta+\alpha)-\mathrm{Q}r'}{\mathrm{Y}}\times dt;$$

y como generalmente, $\beta=90^{\circ}$,

$$dw=\frac{\mathrm{F}r(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)-\mathrm{Q}r'}{\mathrm{Y}}\times dt.\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

La sola inspeccion de este valor basta para comprender, que el movimiento de esta manivela es *variado* tambien; y que siendo

$$8\,\mathrm{F}r=\mathrm{Q}\times 2\pi r'.\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

la ecuacion de trabajos durante una revolucion entera de la misma, será fácil demostrar:

1.° Que en las posiciones de la manivela doble determinadas por los valores $\alpha=0$, $\alpha=90^{\circ}, \ldots.. \alpha=n\times 90^{\circ}$ se verifica

$$dw=\frac{\mathrm{F}r-\mathrm{Q}r'}{\mathrm{Y}}\times dt<0;$$

2.° Que el máximo valor de este incremento

$$dw=\frac{\mathrm{F}r\sqrt{2}-\mathrm{Q}r'}{\mathrm{Y}}\times dt>0$$

se presenta en los puntos correspondientes á

$$\alpha=45^{\circ},\ \alpha=45^{\circ}+90^{\circ}, \ldots..\ \alpha=45+n\times 90.$$

3.° Que es nulo, es decir, $dw=0$ cuando

$$\text{sen}.\alpha=\frac{4-\sqrt{2\pi^2-16}}{2\pi}\ \text{y sen}.\alpha'=\frac{4+\sqrt{2\pi^2-16}}{2\pi}.$$

Los ángulos pertenecientes á estos, considerados en su valor absoluto, son: para el primero,

$$19^{\circ}+12'\ldots 180^{\circ}\pm(19^{\circ}+12')\ldots n\times 180^{\circ}\pm(19^{\circ}+12');$$

y para el segundo,

$$70^{\circ}+48'\ldots 180\pm(70^{\circ}+48')\ldots n\times 180^{\circ}\pm(70^{\circ}+48').$$

4.° Que en cada uno de los cuatro cuadrantes

$$m\,o\,m',\ m'\,o\,m'',\ldots..$$

existe un punto en que la velocidad es un *mínimum*, y otro en que es un *máximum*, siendo iguales entre sí respectivamente las velocidades mínimas y las velocidades máximas, y por consecuencia el movimiento *periódicamente uniforme*.

Las velocidades mínimas corresponden á los ángulos

$$19^\circ+12'\ldots..\ 180^\circ-(70^\circ+48')\ldots..\ 180^\circ+(19^\circ+12')\ldots..$$

y las máximas á

$$70^\circ+48'\ldots..\ 180^\circ-(19^\circ+12')\ldots..\ 180^\circ+(70^\circ+48')\ldots..$$

Si observamos que por ser complementarios entre sí α y α' se verifica

$$\alpha=19^\circ+12'=45^\circ-(25^\circ+48')$$
$$\alpha'=70^\circ+48'=45^\circ+(25^\circ+48')$$

los puntos en que la velocidad vá siendo máxima en unos, y en otros mínima, quedarán determinados trazando los diámetros M M', N N', perpendiculares entre sí, y tomando á partir de c, c', c'', c''', los arcos

$$c\,a,\ c\,b,\ldots\ c'a',\ c'\,b',\ldots\ c''\,a'',\ c''\,b''\ldots\ c'''\,a''',\ c'''\,b''',$$

correspondientes á un ángulo de $25^\circ+48'$.

Si referimos al trabajo elemental medio $\dfrac{4\,\mathrm{F}\,r\,d\,s}{\pi}$, los elementales mínimo y máximo, cuyos valores respectivos son:

$$\mathrm{F}\,r\,d\,s\ \text{ y }\ \mathrm{F}\,r\,d\,s\sqrt{2},\ \text{se tendrá:}$$

$$0{,}7854\ \ldots..\ 1\ \ldots..\ 1{,}2732,$$

números que nos demuestran ser la accion de la manivela de que se trata mas regular que la de las anteriores, resultado fácil de prever si se observa que los períodos durante los cuales varía la velocidad, solo abrazan un cuadrante.

Lo espuesto sobre las manivelas es suficiente al objeto que nos proponíamos y basta asi mismo para conocer la marcha que abríamos de seguir cuando aquellas fuesen más complicadas.

Algunas veces se equilibra el peso de ellas ó se les adicionan masas que obrando como verdaderos contrapesos, contribuyen á que trasmitan con más regularidad la accion que reciben.

Si quisiéramos determinar el peso del volante que, montado sobre el árbol de una manivela cualquiera, impidiese que la variacion de velocidad excediera de cierto límite fijado *á priori*, no habria mas que sustituir en la fórmula

$$\int r^2\, dm = \frac{900}{\pi N^2} (F\, e - Q\, q - R\, r)\, n \quad \S\ 26,$$

por $(Fe - Qq - Rr)$ la diferencia entre el trabajo motor y el resistente, durante aquel período en que al principio y al fin las velocidades sean respectivamente la mayor y la menor; por N y n los valores particulares que convengan al caso en cuestion, y por $\int r^2 dm$ el momento de inercia en funcion del *peso*, magnitud que en último resultado se trata de conocer.

LECCION 3.ª

SUMARIO.

§ 39.—Resistencias pasivas en los cuerpos sólidos.—40.—Rozamiento.—41.—Rozamiento de 1.ª especie—42.—Cálculo del rozamiento de 1.ª especie.—43 —Significacion geométrica de f.—44.—Rozamiento de los árboles sobre los coginetes.—45.—Rozamietno de 2.ª especie.—46.—Calculo del rozamiento de 2.ª especie.—47.—Resistencias pasivas de las cuerdas al moverse sobre una superficie cilíndrica.—48—Relacion entre la potencia y resistencia cuando las cuerdas resbalan sobre un tambor fijo.—49—Cálculo de la rigidez de las cuerdas.—50—Aplicacion.—51.—Choques y vibraciones. Resistencia del medio en que las máquinas se mueven.—52.—Valor aproximado de la expresion radical $\sqrt{a^2+b^2}$

---

§ 39. **Resistencias pasivas.**—En la leccion que antecede, hemos dejado dicho que el *rendimiento* de una máquina es tanto mayor, en igualdad de circunstancias, cuanto menor el trabajo absorbido por las resistencias pasivas, y que en la imposibilidad de hacerlas desaparecer, no quedaba otro recurso que el de debilitar su influencia; y á este fin, vamos á ocuparnos en la presente de clasificarlas y dar á conocer sus principales leyes. Bajo la genérica expresion de resistencias pasivas comprendémos el *rozamiento, la rigidez de las cuerdas, los choques y vibraciones.*

§ 40. **Rozamiento**.—La experiencia de todos los dias nos hace ver que para que un cuerpo colocado sobre un plano horizontal se pónga en movimiento, es preciso un esfuerzo determinado, y si el plano está inclinado, obsérvase tambien que en tanto la inclinacion respecto del horizonte no pase de cierto límite, el cuerpo permanece inmóvil, no obstante la componente de su peso que tiende á hacerlo descender.

Estos hechos y el no menos conocido de que un cuerpo que se mueve sobre un plano horizontal, por efecto de una impulsion, vá perdiendo poco á poco su velocidad y acaba por detenerse, demuestran la existencia entre las superficies de contacto de dos cuerpos—moviéndose el uno sobre el otro—de una fuerza que se opone al movimiento.

Esta fuerza resistente es la que se conoce por *rozamiento*. Se divide en *rozamiento de resbalar ó de primera especie*, y en *rozamiento de rodar ó de segunda especie*, segun el cuerpo que se mueve resbale ó ruede sobre el otro.

§ 41. **Rozamiento de primera especie**.—. Reconoce por principal causa, en opinion de los más, el no ser los cuerpos perfectamente duros y en las pequeñas eminencias y cavidades que siempre hay en la superficie exterior de ellos por bien pulimentada que esté. Algunos dan una gran importancia á las vibraciones ó trabajo molecular que se produce al resbalar un cuerpo sobre otro, y por ellas se explican el absorbido por el rozamiento; y otros, los menos, consideran como causa eficiente y única de esta pérdida de trabajo el calor desarrollado entre las superficies de contacto, calor que no otra cosa es—Apéndice á las lecciones sobre máquinas de vapor—que una trasformacion de trabajo mecánico.

La causa que produce el rozamiento y trabajo correspondiente al mismo, como se vé, es bastante compleja pues no parece se deba prescindir de las que se acaban de señalar; pero como quiera que las fórmulas que vamos á establecer se derivan de experiencias directas y por tanto en armonía con ellas, no hay razon para inquietarnos por no poder precisar la parte que haya de atribuirse á cada una de dichas causas parciales, cuya preponderancia respectiva variará con las circunstancias particulares que en cada caso concurran.

De las numerosas y delicadas experiencias llevadas á cabo por varios físicos, particularmente por Coulomb en el siglo pasado y por Morin en el presente, se han deducido estas tres importantísimas leyes.

El rozamiento—variable siempre con la naturaleza y estado de las superficies de contacto—es durante el movimiento de un cuerpo sobre otro:

1.º..... Proporcional á la presion normal.

2.º.... Independiente de la estension de las superficies de contacto.

3.º..... Independiente de la velocidad del movimiento, si bien algo mayor al iniciarse este.

Esperiencias posteriores han demostrado que cuando la velocidad alcanza valores algo considerables, el rozamiento disminuye al par que aquella aumenta; si bien para las que ordinariamente tienen las máquinas, se puede considerar como exacta la última ley.

Respecto de las dos primeras debemos hacer notar tambien, que á medida que las circunstancias del caso se separen más y más de las que existian en las experiencias de que se han deducido, mayor habrá de ser su falta de exactitud; mas para que tal suceda, preciso es separarse mucho de las que comunmente se presentan en la práctica.

La resistencia de que se trata es tanto mayor al iniciarse el movimiento, cuanto más fácilmente se altera la forma de los cuerpos por efecto de la presion que esperimentan.

Segun Morin, el rozamiento llega á alcanzar su máximo valor despues de haber permanecido los cuerpos un corto tiempo en reposo, pasado el cual, no ejerce en aquel ninguna influencia, el que se prolongue más ó menos el contacto antes de iniciarse el movimiento.

§ 42. **Cálculo del rozamiento de 1.ª especie.** —Si representamos por

R..... La resistencia tangente á la superficie de contacto de dos cuerpos, producida por el rozamiento, esto es, la fuerza cuyo trabajo sea equivalente al absorbido por las múltiples causas que intervienen en el fenómeno de resbalar uno sobre otro,

P..... la presion normal,

$f \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{la relacion constante entre R y P, dada siempre} \\ \text{por la esperiencia,} \end{array} \right.$

tendremos con arreglo á la primera ley:

$$\frac{R}{N} = f, \text{ ó bien } R = f\,P \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para hallar, pues, en cada caso el valor de R, bastará determinar el de P, y multiplicándolo por el camino recorrido en su direccion, se tendrá el trabajo debido al rozamiento.

La cantidad f, cuya significacion geométrica vamos á encontrar, es lo que se conoce generalmente por *coeficiente de rozamiento.*

§ 43. **Significacion geométrica de f.**—Supongamos que sobre un plano horizontal A B, fig.ª 32 (lám.ª 3.ª), (*) resbala con movimiento uniforme el cuerpo

---

(*) Esta figura dá una idea bastante aproximada del aparato de que se sirvió Morin para encontrar las leyes del rozamiento cuando un cuerpo resbala sobre otro. Aunque semejante al de Coulomb, tiene sin embargo, ciertos detalles de que carece el usado por este, y á los que se debe principalmente el sello de exactitud que llevan los resultados obtenidos en sus numerosas y variadas experiencias. Redúcese á un banco horizontal formado de dos largas y fuertes vigas, paralelas entre sí, que descansan sobre otras trasversales más pequeñas puestas sobre el suelo.

Los cuerpos, objeto de las experiencias—despues de darles forma y dimensiones convenientes—se colocan de una manera invariable el uno, sobre las vigas, y el otro, en la cara inferior de la caja C dispuesta para recibir pesos á voluntad, segun se desea aumentar ó disminuir la presion.

La cuerda *a* destinada á tirar de la caja C, por efecto de los pesos que penden de su estremo libre, está unida por el otro al muelle de un dinamómetro de punzones D que aquella lleva en su cara anterior. Este aditamento que no tenía el aparato de Coulomb, permite conocer en todos los instantes y circunstancias, la tension del ramal horizontal de la cuerda *a* que no es igual al peso P como suponía este físico.

En el eje de la polea E hay un plato de cobre cubierto de papel sobre el que

C, mediante la accion constante de la fuerza F aplicada á su centro de gravedad en direccion paralela á aquel. En tal supuesto es evidente, que la reaccion total $\overline{R}$, ó sea la resultante de las distintas reacciones parciales que el cuerpo reciba del plano, habrá de ser igual y directamente opuesta á la resultante de F y de la presion P, por consecuencia,

$$N=P \text{ y } R=F.$$

Si observamos que el rozamiento es igual á la componente horizontal ó con más generalidad á la componente tangencial de la reaccion total, la figura nos da inmediatamente,

$$R=P \text{ tang. } \alpha.$$

Comparada esta ecuacion con la (1) se tendrá para el coeficiente del rozamiento

$$f=\text{tang. } \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

---

un pincel empapado en tinta de china, y con movimiento de rotacion uniforme, traza una curva por la que se determina la ley con que se mueve la caja C. De este importantísimo detalle carecía tambien el aparato empleado por Coulomb, que se valía de un cronómetro para observar el tiempo que gastaba aquella en recorrer una parte cualquiera de su trayecto.

Cuatro pies derechos situados en los ángulos del pozo G, por donde desciende el platillo *b*, sirven para colocar entre ellos la plataforma H sobre que vá el soporte de la polea y tambien para fijar los topes *c*, *c'*.....á la altura que se quiera en los casos en que la esperiencia tenga por objeto conocer la ley del movimiento de la caja C, cuando iniciado este por efecto de un peso Q, parte de él deja de obrar á cierta altura de su trayecto, como acontece en la máquina de Atwood.

Sin entrar en los detalles de las esperiencias—cosa más propia de obras de otra índole y estension—diremos que despues de haber deducido por la ley del movimiento de la caja C que el rozamiento era una fuerza resistente constante, se varió la presion, la naturaleza y estension de las superficies frotantes, se aumentaron y disminuyeron los pesos del platillo *b* etc. quedando como reasumidos ó condensados todos los resultados en las leyes que hemos dado á conocer.

El ángulo α formado por la reaccion total y la línea normal á las superficies de contacto *aparentes*, se llama *ángulo de rozamiento*.

La verdadera superficie de contacto de dos cuerpos, de los que el uno resbale sobre el otro, difiere siempre más ó ménos de la *aparente*, que solo permaneceria inalterable si aquellos fueran perfectamente duros y pulimentados hasta el punto de que no quedase la más ligera cavidad ni eminencia, en cuyo doble supuesto $\overline{R}$ se confundiria con N, y el rozamiento sería nulo.

Si quisiéramos tener el valor de R en funcion de la reaccion total $\overline{R}=Q$, bastará para conseguirlo fijarse en que

$$R=\overline{R}\operatorname{sen}\alpha \quad y \quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{tang}.\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}.^2\alpha}}=\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}; \text{ y por tanto}$$

$$R=\overline{R}\times\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}, \text{ ó bien } R=\overline{R}\ \overline{f}, \text{ haciendo}$$

$$\overline{f}=\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Para que el cuerpo C resbale y no tienda á girar al rededor de la arista anterior-inferior, bastará, prescindiendo del rozamiento en ella, que se verifique

$$P\times l>F\times h.$$

Si en vez de haber supuesto que el cuerpo C resbalára con movimiento uniforme sobre un plano horizontal, lo hubiéramos colocado sobre uno inclinado fig.ª 33 (lam.ª 3ª), cuyo ángulo fuere tal que al aumentarlo en $d\alpha$, principiara á moverse aquel, es evidente que el cuerpo en esta posicion puede ser considerado como en equilibrio instantáneo bajo la accion del peso P y reaccion $\overline{R}$ del plano.

En este supuesto, si descomponemos ambas fuerzas como demuestra la figura, tendremos para el valor del rozamiento,

$$R = P \text{ sen. } \alpha; \quad \text{y como } N = P \cos. \alpha,$$

$$R = N \text{ tang. } \alpha = f N.$$

El plano inclinado indica pues, un procedimiento sencillo para hallar el coeficiente de rozamiento en los cuerpos sólidos al pasar del estado de reposo al de movimiento.

§ 44. **Rozamiento de los árboles sobre los coginetes.**—Las esperiencias verificadas por Coulomb y Morin respecto al rozamiento de los árboles de rotacion sobre los collares ó coginetes en que descansan, han demostrado que las leyes á que obedece son las señaladas para el caso de ser planas las superficies frotantes, no ejerciendo por tanto influencia ni el diámetro de los árboles ni la circunstancia de ser siempre la misma la superficie de contacto del cuerpo inmóvil, y variable la del que se mueve.

Aunque esto bastaria para poder aplicar desde luego al caso en cuestion las fórmulas de los dos párrafos anteriores, no será ocioso atendiendo á su importancia el hallarla directamente, y asi veremos como el rozamiento interviene en el equilibrio dinámico de un eje material sometido á la accion de un número cualquiera de fuerzas, lo que por otra parte contribuirá tambien á formarnos más clara idea de la manera de proceder en otros casos que por vía de ejercicio nos propondremos resolver más adelante.

Sea fig.ª 34, (lám.ª 3.ª), A la seccion recta de un eje material, y C la de uno de los coginetes sobre que descansa. Mientras aquel esté sometido únicamente á la accion de su peso ó á la de fuerzas cuya resultante siga la direccion de O N, el contacto con el coginete—concretándonos á uno solo—se verificará en el elemento más bajo y la reaccion habrá de ser igual y directamente opuesta á aquella. En este estado las cosas, no puede existir equilibrio dinámico entre dichas fuerzas y el rozamiento, por no haber ninguna que contrareste el efecto de este último. Es pues condicion precisa para que aquel se verifique, que la resultante de todas las fuerzas, prescindiendo del *rozamiento*, no solo pase por el elemento de contacto, sino que sea oblícua respecto de la normal á este, formando con ella un ángulo igual al *ángulo de rozamiento*. Como es fácil observar, á esta triple condicion ha tenido que obedecer tambien el equilibrio dinámico en los dos casos que anteriormente hemos estudiado, en que eran planas las superficies de contacto.

Comprendido esto, representemos por Q (fig.ª 34) la resultante de todas las fuerzas del sistema. Si su intensidad es la conveniente, el árbol rodará sobre el coginete hasta que el nuevo contacto llegue á verificarse en *a'* por ejemplo, en que suponemos uniforme el movimiento de aquel al rededor de su eje O'.

El equilibrio dinámico exige que Q y $\overline{R}$ sean iguales

y directamente opuestas, y como el *rozamiento* se halla á la vez en el plano del elemento de contacto y en uno normal al eje O′, bastará para obtener su valor en funcion de $\overline{R}=Q$, hacer la descomposicion que se indica en la figura, la cual nos dá $R = \overline{R}$ sen. α;
y como por otra parte,

$$R = f\,\overline{R}\ \text{cos.}\ \alpha,$$

se tendrá

$$\overline{R}\ \text{sen.}\ \alpha = f\ \overline{R}\ \text{cos.}\,\alpha, \quad \text{de donde}$$

$$f = \text{tang.}\ \alpha, \quad \text{y por tanto}$$

$$R = \overline{R} \times \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = \overline{R}\,\overline{f} = \overline{f}\ Q$$

Si representamos por n el número de vueltas que dé el árbol en **1′**, tendremos para el trabajo de dicha resistencia al cabo de **1″**,

$$T_R = 2\pi r \frac{n}{60} \times Q \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Si el árbol fuese vertical, como el representado en la fig.ª **35** (lám.ª **3.ª**) se descompondria cada fuerza de las que actúan sobre él en dos: una en direccion de su eje, y otra normalmente al mismo, las que darian lugar á un rozamiento en el fondo las primeras, y á uno lateral las segundas.

Prescindiendo del producido por estas últimas, por no ofrecer su determinacion dificultad alguna despues de lo que queda dicho, ocupémonos en hallar el rozamiento en el fondo y trabajo correspondiente al mismo.

A este fin, si expresamos por Q la resultante de las componentes en direccion del eje—resultante que en la mayor parte de los casos solo está formada por el peso del árbol y órganos de trasmision montados en él $-fQ$ expresará la resistencia total en el fondo de la *rangua* B debida al rozamiento, y su efecto en cuanto á oponerse más ó ménos eficazmente al movimiento del árbol, dependerá, no sólo de su valor intrínseco, sino de su punto de aplicacion ó sea de su distancia al eje.

Para determinar esta última, imaginemos dividido el círculo de contacto del *gorron* A con la rangua, en infinitas coronas circulares. Como la presion sobre la unidad de superficie es $\frac{Q}{\pi r^2}$, la que se ejerza sobre una cualquiera de aquellas, será $\frac{Q}{\pi r^2} \times 2\pi x . dx$, y la ecuacion de momentos

$fQ \times z = f \frac{Q}{\pi r^2} \times 2\pi x^2 dx$ nos dará para el *brazo de palanca medio* el valor

$$z = \frac{2}{3} r.$$

Si suponemos que el árbol da n vueltas en 1'; el trabajo absorbido por fQ será;

$$T_{fQ} = fQ \times \frac{2}{3} r \times \frac{n . 2\pi}{60} = \frac{fQ . n \pi r}{45}.$$

Hasta ahora hemos supuesto que uno de los cuerpos estaba quieto. Cuando ambos se muevan, se imaginará para hacer entrar este caso en el anterior, que se imprime á los dos un movimiento comun, igual y contrario al de uno de ellos.

El valor de f es tanto menor, á igualdad de las demás circunstancias cuanto más duros fueren los cuerpos y mas pulimentadas estén las superficies en contacto. Los metales más á propósito bajo este punto de vista son los *granulosos*.

Los *lubrificantes grasos* contribuyen tambien muy eficazmente á disminuir el rozamiento, si bien se ha de procurar siempre, que no sean demasiado viscosos para que las partículas que se desprendan de los cuerpos frotantes no se agrumen y surquen las superficies en contacto. Esta es una de las causas que obliga á renovar aquellos con alguna frecuencia, práctica que se halla justificada tambien por la observacion debida á Morin de que en los cuerpos metálicos sometidos á grandes presiones—con relacion á la magnitud de las superficies en contacto—despues de algun tiempo en reposo, son expelidos los lubrificantes, lo cual explica satisfactoriamente el mayor esfuerzo que se necesita, prescindiendo de la influencia de la inercia, para poner en movimiento las máquinas que han estado paradas durante algun tiempo, respecto al necesario para entretenerlo. No hay que olvidar que á la magnitud de dicho esfuerzo contribuye tambien el mayor valor de f al iniciarse el movimiento.

Como consecuencia de la observacion de Morin, cuanto mas fluidos sean los lubrificantes, mayor debe ser tambien la velocidad de los cuerpos que froten entre sí. Y cuando esta última fuere estremadamente grande, concíbese sin dificultad el que se puedan suprimir aquellos sin inconveniente alguno, pues la ténua capa de aire interpuesta entre las superficies en contacto hace en cierto modo las veces de lubricante.

Los mas generalmente usados son: para las grandes cargas ó presiones *el sebo* y *la manteca,* y para las pequeñas el *aceite.*

Aunque el agua se considera como un mal lubrificante, en particular para el hierro colado—y por esto el disolver en ella jabon cuando se usa para enfriar las herramientas que pueden destemplarse por el trabajo—es escelente é irreemplazable por su poco precio, cuando baña las superficies en contacto, haciéndola llegar bajo una presion considerable (*).

§ 41. **Rozamiento de segunda especie.**—Ya hemos indicado que es la resistencia que se origina en dos cuerpos en contacto, cuando se quiere hacer rodar ó rueda el uno por el otro.

Comparada con la que se acaba de estudiar es casi siempre muy pequeña, y por lo regular se prescinde de ella en los cálculos de las máquinas.

Reconoce por causa principal el no ser perfectamente duros los cuerpos y tambien las pequeñas asperezas ó resaltes que existen en la superficie de ellos.

De las pocas esperiencias ejecutadas por Coulomb con cilindros de guayaco y olmo que hacia rodar sobre vigas de roble por medio de pesos colocados en un platillo que suspendia de un hilo muy flexible préviamente enrollado y fijo en aquellos por uno de sus estremos, dedujo este físico que la fuerza necesaria para vencer la resistencia en cuestion es:

(*) Es muy probable que con arreglo á esta idea se modifique alguna de las máquinas de barrenar cañones de fusil que funcionan en la fábrica de armas de Oviedo.

1.° proporcional á la presion producida por el cilindro con su carga,
2.° inversamente proporcional al diámatro del cilindro,
3.° dependiente de un coeficiente numérico variable con la naturaleza de las superficies en contacto.

Además de estas leyes, al parecer comprobadas nuevamente por Morin, ha observado este físico que dicha resistencia crece tambien cuando disminuye el ancho de la banda ó zona de contacto con el plano, siendo el aumento tanto más pronunciado cuanto más blandas las materias.

§ 46. **Cálculo del rozamiento de segunda especie.**—Si representamos por,

F.... .... el esfuerzo en direccion vertical y tangente á un cilindro, necesario para vencer la resistencia que este último presente al hacerlo rodar sobre una superficie plana,
$D=2r$........ diámetro del cilindro,
P................ presion total de este sobre el plano,
k................ coeficiente variable con las materias en contacto,

tendremos, con arreglo á las leyes de Coulomb,

$$F=k\times\frac{P}{D};$$

fórmula empírica que nos dará en cada caso particular el valor de F, conocido que sea el de k.

El trabajo absorbido por dicha resistencia será, en 1' por ejemplo,

$$T_F=k\,\frac{P}{D}\,n\pi D=kn\pi P^{\text{kms.}};$$

suponiendo que n sea el número de veces que en dicho tiempo se desarrolle sobre el plano la superficie cilíndrica.

La siguiente tabla expresa los resultados de las experiencias de Coulomb sobre el rozamiento de 2.ª especie.

NATURALEZA de los rodillos ó cilindros.	Presion.	Resistencia para los diámetros de 6 *pulgadas*	Resistencia para los diámetros de 2 *pulgadas*	Valor del coeficiente k
	Libras.	Libras.	Libras.	
Guayaco sobre piso de tabla de roble.	100 500 1000	0,60 3,00 6,00	1,6 9,6 18,0	0,036
		Diámetros de 12 pulgs.	*Diámetros de* 6 pulgs.	
		Libras.	Libras.	
Olmo sobre piso de tabla de roble.	1000	5	10	0,06

Aunque hemos dicho que estas cifras han sido verificadas por nuevas experiencias del general Morin, no debemos pasar en silencio, que otros experimentadores dudan acerca de su exactitud. Y es lo cierto que el cálculo da la razon á los que así piensan, no quedando otro camino para poner de acuerdo ideas tan encontradas, todas muy respetables, que el de suponer hayan sido estrechos los límites dentro de los cuales Coulomb y Morin llevaron á cabo sus experiencias.

Como en la práctica el movimiento de un cilindro sobre el terreno se realiza por lo regular, mediante un esfuerzo horizontal, vamos á calcular en este supuesto el *valor teórico* de la resistencia de que se trata, con lo que fácil nos será, aplicando análogos razonamientos, obtener el correspondiente al caso considerado por Coulomb.

La fig.ª 36 (lám.ª 3.ª) representa la seccion recta de un cilindro circular descansando sobre un plano horizontal y sometido á la fuerza F, cuya intensidad suponemos sea la necesaria para que aquel esté en equilibrio instantáneo ó se mueva con movimiento uniforme.

Cualquiera que sea la causa que motive la resistencia que presente el cilindro á rodar sobre el plano, es evidente que la reaccion total $\overline{R}$ de este último habrá de ser igual y directamente opuesta á la resultante Q, de P y F. En su consecuencia se tendrá N=P y R=F, y la ecuacion de momentos respecto del punto i nos dará el valor formular teórico

$$R=F=k\frac{P}{l}=k\frac{P}{l+l'} \text{ ó bien } R=F=k\frac{P}{r+l'},$$

despues de hacer $l=r$, lo que es muy admisible en la generalidad de los casos prácticos.

Si introducimos sucesivamente las hipótesis $l'=o$ y $l'=r$ tendremos

$$R=F=2k\times\frac{P}{D} \text{ y } R=F=k\times\frac{P}{D};$$

cuyos valores corresponden á las posiciones F', F'' de la fuerza F.

Si el brazo de palanca de F fuere nulo ó muy pequeño, se comprende sin dificultad que el cilindro resbale y no ruede; y para que lo contrario suceda, será preciso que se verifique

$$R=F=k\frac{P}{L}<fP.$$

De esta condicion, en la que f tiene el significado que se le dió en el § 42, se deduce;

$$L>\frac{k}{f}=k\times\frac{1}{\text{tang.}\,\alpha}=k\cot.\,\alpha,$$

ó bien L> A O' < r, suponiendo k cot. α=A O'.

TABLA 1.ª

ROZAMIENTO DE LAS SUPERFICIES PLANAS ENTRE SÍ.

Materias en contacto.	DISPOSICION de las fibras entre sí y con relacion á la direccion del movimiento.	ESTADO de las superficies en contacto.	VALOR DE f — Al iniciarse el movimiento despues de algun tiempo en contacto(*)	VALOR DE f — Durante el movimiento.
Roble sobre roble. . . .	Paralelas.	Sin lubrificar.	0.62	0,48
	Idem. . . .	Frotadas con jabon duro	0,44	0,16
	Perpendiculares ó cruzadas	Sin lubrificar.	0,54	0,34
	Idem. . . .	Mojadas con agua. . .	0,71	0,25
	Verticales las del cuerpo que se mueve y horizontales las del otro.	Sin lubrificar. . . .	0,43	0,19
Roble sobre olmo. . . .	Paralelas.	Idem. . . .	0,38	»
Olmo sobre roble. . . .	Idem. . . .	Idem. . . .	0,69	0,43
	Idem. . . .	Frotadas con jabon duro	0,41	»
	Perpendiculares. . .	Sin lubrificar.	0,57	0,45
Fresno, abeto, haya y serbal sobre roble. . . .	Paralelas.	Idem. . . .	0,53	0,36 á 0,40
Hierro dulce sobre roble. .	Idem. . . .	Idem. . . .	0,62	0,62
		Mojadas con agua. .	0,65	0,26
		Frotadas con jabon duro	»	0,21
Hierro colado sobre roble.	Idem. . . .	Sin lubrificar.	»	0,49
		Mojadas con agua. . .	0,65	0,22
		Frotadas con jabon duro	»	0,19
Laton sobre roble. . . .	Idem. . . .	Sin lubrificar. . . .	0,62	0,62
Hierro dulce sobre olmo. .	Idem. . . .	Idem. . . .	»	0,25
Hierro colado sobre olmo. .	Idem. . . .	Idem. . . .	»	0,20
Cuero negro adobado ó correa — Sobre una superficie plana de roble	Idem. . . .	Idem. . . .	0,74	0,27
Cuero negro adobado ó correa — Sobre un tambor cilíndrico de roble.	Perpendiculares. . .	Idem. . . .	0,47	»
Cuero curtido sobre hierro colado y sobre bronce. .	De plano ó de canto. .	Idem. . . .	»	0,56
		Mojadas con agua. . .	»	0,36
		Untuosas y mojadas con agua.	»	0,23
		Lubrificadas con aceite.	»	0,15
Cuero curtido de buey sobre hierro colado. . .	Idem. . . .	Mojadas con agua. . .	0,62	»
		Lubrificadas con aceite, sebo ó manteca. . .	0,12	»
Cuero adobado negro ó correa, sobre una polea de hierro colado. . . .	El cuero de plano. .	Sin lubrificar.	0,28	»
		Mojadas con agua. . .	0,38	»

(*) Si antes de iniciarse el movimiento, experimentaren los cuerpos una ligera vibracion, el valor de f en este supuesto, disminuye notablemente. Esto que, sin dificultad alguna, comprendese á *priori*, ha sido confirmado por esperiencias de Morin.

Materias en contacto.	DISPOSICION de las fibras entre sí y con relacion á la direccion del movimiento.	ESTADO de las superficies en contacto.	VALOR DE f	
			Al iniciarse el movimiento despues de algun tiempo en contacto.	Durante el movimiento.
Cáñamo en hebra ó en cuerda sobre roble. . .	Paralelas. . . .	Sin lubrificar.. . . .	»	0,52
	Perpendiculares. . .	Mojadas con agua. . .	»	0,33
Hierro dulce sobre Hierro dulce. . .	Paralelas.	Sin lubrificar.. . . .	»	» (1)
Hierro dulce sobre Hierro colado.. .			0,19	0,18 (2)
Hierro dulce sobre Bronce.. . . .			»	0,18 (2)
Hierro colado sobre hierro colado..	»	Idem.. . . .	0,16(2)	0,15 (2)
		Mojadas con agua. . .	»	0,31
Bronce sobre Bronce.. . . .	»	Sin lubrificar.. . . .	»	0,20
Bronce sobre Hierro colado. .	»		»	0,22
Bronce sobre Hierro dulce.. .	Paralelas.		»	0,16 (2)
Roble, olmo, peral silvestre, hierro colado, hierro dulce, acero y bronce, resbalando uno cualquiera sobre otro ó sobre sí mismo.	»	Lubrificadas de cuando en cuando con aceite, sebo, manteca de puerco ó con unto del que se emplea para engrasar los ejes de los carruajes.	»	0,07 á 0,08(3)
		Ligeramente untuosas al tacto.	»	0,15
Roble, olmo, hierro dulce, hierro colado y bronce resbalando uno sobre otro ó sobre sí mismo. .	»	Lubrificadas con sebo. .	0,10(4)	»
		Lubrificadas con aceite ó manteca de puerco..	0,15(5)	»
Caliza blanda sobre caliza blanda.	»	Sin lubrificar.	0,74	0,64
		Con una ligera capa de mortero compuesto de tres partes de arena fina y una de cal hidráulica..	0,74(6)	»
Caliza dura sobre Caliza blanda.	»	Sin lubrificar.. . . .	0,75	0,67
Caliza dura sobre Caliza dura. .			0,70	0,38
Roble sobre Caliza blanda.	Las fibras de la madera perpendiculares á la cara de la piedra.	Idem.. . . .	0,63	0,38
Roble sobre Caliza dura. .			0,64	0,38
Hierro dulce. . Caliza blanda.	Paralelas.	Idem.. . . .	0,49	0,69
Hierro dulce. . Caliza dura. .		Idem.. . . .	0,42	0,24
		Mojadas con agua. . .	»	0,30

(1) Las superficies se alteraron visiblemente por no estar lubrificadas.

(2) Las superficies conservaban todavia alguna untuosidad.

(3) Cuando el lubrificante se renueva sin cesar y por igual, la relacion 0,07 á 0,08 puede disminuir hasta 0,05.

(4) El contacto no se prolongó el tiempo suficiente para ser espelido el lubrificante.

(5) El lubrificante habia sido espelido, conservando las superficies el estado untuoso.

(6) El movimiento se inició despues de (10′) á (15′) en reposo.

TABLA 2.ª

Rozamiento *de los árboles de rotacion en movimiento, sobre sus cojinetes.*

Materias en contacto.	ESTADO de las superficies en contacto.	Valor de f cuando el lubrificante es renovado como de ordinario periódicamente.	continuamente.
Muñones de hierro colado sobre cojinetes de lo mismo.	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo.	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054
	Lubrificadas con las mismas materias y mojadas con agua.	0,08	»
	Untuosas.	0,14	»
	Untuosas y mojadas con agua.	0,14	»
Muñones de hierro colado sobre cojinetes de bronce.	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo.	0,07 á 0,08	»
	Untuosas.	0,16	»
	Untuosas y mojadas con agua.	0,16	»
	Muy poco untuosas.	0,19 (1)	»
Muñones de hierro colado sobre cojinetes de guayaco.	Sin lubrificar.	0,18 (2)	»
	Lubrificadas con aceite de olivas ó manteca de puerco.	»	0,09
	Untuosas.	0,10 á 0,14	»
Muñones de h.º dulce sobre cojinetes de h.º colado	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo.	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054
Muñones de hierro dulce sobre cojinetes de bronce.	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo.	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054
	Untuosas y mojadas con agua.	0,19	»
	Muy poco untuosas.	0,25 (1)	»
Muñones de hierro dulce sobre cojinetes de guayaco.	Lubrificadas con aceite de olivo ó manteca de puerco.	0.11	»
	Untuosas.	0.19	»
Muñones de bronce sobre cojinetes de lo mismo.	Lubrificadas con aceite de olivas.	0,10	»
	Lubrificadas con manteca de puerco.	0,09	»
Muñones de bronce sobre cojinetes de h.º colado	Lubrificadas con aceite de olivas ó sebo.	»	0,030 á 0,052
Muñones de guayaco sobre cojinetes de h.º colado	Lubrificadas con manteca de puerco.	0,12	»
	Untuosas.	0,15	»
Muñones de guayaco sobre cojinetes de guayaco	Lubrificadas con manteca de puerco.	»	0,07

OBSERVACIONES.

Aunque bien miradas las cosas se hubiera podido suprimir esta tabla, teniendo á la vista la anterior, hemos creido conveniente el ponerla, no solo por lo mas detallada en los casos que generalmente se presentan en la práctica, sino porque ella justifica lo dicho al principio del § 44.

(1) Las superficies principiaron á alterarse.

(2) La madera estaba ligeramente untuosa.

Del exámen de esta tabla y la precedente se deduce:

1.º Que para la madera, hierro dulce, hierro colado y bronce, ya sean planas ó cilíndricas las superficies en contacto, pero lubrificadas con aceite de olivas, sebo ó manteca de puerco, el valor de $f=$ tang. α es 0,07 á 0,08; á cuyas cifras corresponden aproximadamente $\alpha=4^{o}$ y $\alpha=4^{o}+35'$

2.º Que cuando las superficies solo estan untuosas, resulta

$$f=\text{tang.}\alpha=0{,}15 \text{ y } \alpha=8^{o}+32'$$

3.º Que si la lubrificacion es contínua, se puede asignar á f el valor 0,05, en cuyo caso $\alpha=2^{o}+52'$

Como quiera que estas cifras responden á los casos mas frecuentes que ocurren en las aplicaciones, inútil es recomendar el que se conserven en la memoria.

§ 47. **Resistencias pasivas de las cuerdas al moverse sobre una superficie cilíndrica.**—Cuando por medio de una cuerda adaptada á la superficie de un tambor cilíndrico—que para fijar las ideas supondremos de seccion circular—se quiere levantar un peso suspendido de uno de los extremos, tirando del otro, se presentan dos hechos bien conocidos.

1.° Si el tambor no puede girar, si es fijo, el esfuerzo necesario para subir el peso, crece considerablemente con la longitud del arco abrazado por la cuerda, ó de otro modo, que con una potencia relativamente pequeña, se puede mantener en equilibrio una gran resistencia con solo enrollar la cuerda en el tambor y hacer que dé una, dos ó más vueltas.

2.° Que gire ó no gire el tambor, obsérvase tambien que al pasar un ramal cualquiera de la direccion rectilínea á la curvilínea—y no inversamente—opone cierta resistencia á ceñirse á la superficie de aquel, separándose más ó ménos de ella, y dando por resultado un aumento en el brazo de palanca de la fuerza que obra directamente sobre dicho ramal.

La razon del primer hecho hay que buscarla en el rozamiento que se opone á que las cuerdas resbalen sobre la superficie de un tambor fijo. La del segundo, en la imperfecta flexibilidad de las mismas, esto es, en la rigidez natural de ellas.

§ 48. **Relacion entre la potencia y resistencia cuando las cuerdas resbalan sobre un tambor fijo.**—Cuanto vamos á decir sobre este punto, derívase naturalmente de la teoria sobre el rozamiento de resbalar, de suerte que pudiendo en rigor omitirlo, nuestra explicacion habrá de ser muy breve.

La fig.ª 37 (lám.ª 3.ª) representa la seccion recta de un tambor, por el que pasa la cuerda ó correa A B resbalando con movimiento uniforme bajo la accion simultánea de la potencia P y resistencia Q. La línea *a b c d* indica la seccion media de la cuerda.

Si nos fijamos en el elemento *m* infinitamente delgado, veremos que las fuerzas á que se halla sometido son—prescindiendo de su peso—las tensiones t, $t+dt$ y la reaccion $\overline{R}$. Y como esta última debe ser igual y directamente opuesta á la resultante de las dos primeras, descomponiendo todas tres en direccion de los ejes rectangulares x, y podremos establecer estas dos ecuaciones:

$$R = fN = (t+dt)\cos\frac{d\beta}{2} - t\cos\frac{d\beta}{2}, \text{ ó bien}$$

$$fN = dt \ldots (3), \text{ haciendo } \cos\frac{d\beta}{2} = 1; \quad \text{y}$$

$$N = (t+dt)\,\text{sen}\frac{d\beta}{2} + t\,\text{sen}\frac{d\beta}{2} = (2t+dt)\,\text{sen}\frac{d\beta}{2}, \text{ ó bien}$$

$N = t.d\beta \ldots$ (4), tomando el arco por el seno y despreciando el término $dt \times \frac{d\beta}{2}$.

Si dividimos una por otra é integramos despues, resulta:

$L.t = f\beta + C$; y como á $\beta = 0$ corresponde $t = Q$, tendremos: $L.t - L.Q = L.\frac{t}{Q} = f\beta$, de donde

$$t = Q \times e^{f\beta};$$

valor formular de la tension de una correa ó cuerda en los diferentes puntos del arco que abraza.

Cuando $\beta = AOB$, se tiene $t = P$, y por tanto $\frac{P}{Q} = e^{f\beta}$,

ó bien $\frac{P}{Q} = e^{f\frac{s}{r}}$, representando por s el arco AB, será la relacion que nos proponíamos encontrar.

Nótese—en corroboracion de lo que se observa en la práctica—que si en esta última fórmula se dan á $\beta = \frac{s}{r}$ valores en progresion aritmética, los que se obtengan para P lo estarán en una geométrica.

La siguiente tabla formada por **Morin** contiene los valores de $e^{f\frac{s}{r}}$ para diferentes arcos, lo que permite en la mayor parte de los casos abreviar los cálculos en que se encuentre esta expresion:

TABLA 3.ª

RELACION entre el arco abrazado por la cuerda y la circunferencia correspondiente á la seccion recta del tambor sobre que se enrolla.	Valores de $\frac{P}{Q} = e^{f\frac{s}{r}}$ — *Correas* nuevas sobre tambores de madera.	*Correas en el estado ordinario* — sobre tambores de madera.	*Correas en el estado ordinario* — sobre tambores de hierro colado.	*Correas* húmedas sobre poleas de hierro colado.	*Cuerdas sobre tambores de madera* — no pulimentada.	*Cuerdas sobre tambores de madera* — pulimentada.
0,2	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,3	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,4	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,5	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,6	6,59	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,7	9,00	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,8	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,9	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,0	23,14	19,16	5,81	10,89	23,90	7,95
1,5	»	»	»	»	111,31	22,42
2,0	»	»	»	»	535,47	63,23
2,5	»	»	»	»	2574,80	178,52

§ 49. **Cálculo de la rigidez de las cuerdas.**— La fig.ª 38 (lám.ª 3.ª) representa la seccion recta de una polea sobre la que pasa la cuerda A B. De conformidad con lo indicado § 47 el ramal de que pende el peso Q que se pretende subir, no se ajusta ó no se ciñe á la porcion *a b* del contorno, por efecto de la resistencia que la cuerda opone al encorvarse.

La ecuacion de equilibrio que—prescindiendo del rozamiento en el eje—debería ser $F\left(r+\frac{d}{2}\right)=Q\left(r+\frac{d}{2}\right)$, de donde F=Q, quedará por efecto de la rigidez modificada de este modo

$$P\left(r+\frac{d}{2}\right)=(F+F')\left(r+\frac{d}{2}\right)=Q\left(r+\frac{d}{2}+\delta\right).$$

El buscar una fórmula empírica con la que se pueda calcular la diferencia $P-Q=F'$ que dá la medida de la rigidez valorada en peso ha sido objeto de numerosas experiencias. Ningunas tan completas como las de Colomb, cuyos resultados discutidos por Morin, se hallan como condensados en la expresion $R=\frac{A+BQ}{D}$, en la que

A............ representa lo que aquel físico llama *rigidez natural* por ser independiente de la tension ó carga de la cuerda,

B Q......... *la rigidez proporcional*, por ser, como en efecto es, proporcional á la tension Q,

D............ el diámetro de la polea ó tambor, aumentado con el de la cuerda que representaremos siempre por d.

Los valores de A y B correspondientes á las cuerdas sin embrear nuevas y secas, y á las embreadas, se calculan por las siguientes fórmulas empíricas, debidas al mismo Morin, en las que n representa el número de *hilos de acarreto* que tenga la cuerda (*)

(*) Las cuerdas se componen regularmente de tres cordones ó cuerdas más delgadas, y cada cordon, de cierto número *de hilos de acarreto ó bramantes*, que son á los que se refiere la 1.ª columna de la tabla 4.ª El hilo de acarreto está formado de más ó ménos hebras de la materia filamentosa de que se haga la cuerda. La relacion entre el diámetro de una cuerda y número de hilos de acarreto, es dada en los dos casos generales que comprende dicha tabla, por las siguientes fórmulas.

Cuerdas blancas, nuevas y secas. . . $d^{c/ms.}=\sqrt{0,133\times n}$. . . . . . (1)

Cuerdas embreadas. . . . . $d^{c/ms.}=\sqrt{0,186\times n}$. . . . . . (2)

Cuerdas blancas ó sin embrear nuevas y secas.. $\begin{cases} A = n(0{,}000\,2973 + 0{,}000\,245 \times n) \ldots & (5) \\ B = 0{,}000363 \times n \ldots\ldots\ldots\ldots & (6) \end{cases}$

Cuerdas embreadas................ $\begin{cases} A = n(0{,}0014575 + 0{,}000346 \times n) \ldots & (7) \\ B = 0{,}00041814 \times n \ldots\ldots\ldots\ldots & (8) \end{cases}$

Mediante estos valores generales, se ha formado la siguiente tabla.

TABLA 4.ª

RIGIDEZ DE LAS CUERDAS.

Número de hilos.	CUERDAS SIN EMBREAR. Diámetro.	Valor de A	Valor de B	CUERDAS EMBREADAS. Diámetro.	Valor de A	Valor de B
	m	k		m	k	
6	0,0089	0,0106038	0,002178	0,0105	0,021201	0,002512992
9	0,0110	0,0225207	0,003267	0,0129	0,041145	0.003769488
12	0,0127	0,0388476	0,004356	0,0149	0,067314	0,005025984
15	0,0141	0,0595845	0,005445	0,0167	0,097742	0,006282480
18	0,0155	0,0847514	0,006534	0,0183	0.138339	0,007538976
21	0,0168	0.1142883	0.007623	0,0198	0 183193	0,008795472
24	0,0179	0,1482352	0,008712	0,0211	0,234276	0·010051968
27	0,0190	0,1866321	0,009801	0,0224	0,291586	0.011308464
30	0,0200	0,2294190	0,010890	0,0236	0,355125	0,012564963
33	0,0210	0,2766159	0.011979	0,0247	0,424891	0,013821456
36	0,0220	0,3282228	0,013068	0,0258	0,500886	0,015077952
39	0,0228	0,3842397	0,014157	0,0268	0,583108	0,016334448
42	0,0237	0,4446666	0,015246	0,0279	0,671559	0,017590944
45	0,0246	0,5095035	0,016335	0,0289	0,766237	0,018847440
48	0,0254	0,5787504	0,017424	0,0298	0,867144	0,020103936
51	0,0261	0,6524073	0,018513	0,0308	0,974278	0,021360432
54	0,0268	0.7504742	0,019602	0,0316	1,087641	0,022616928
57	0.0276	0,8129511	0,020691	0,0326	1,207231	0,023873424
60	0,0283	0,8998380	0,021780	0,0334	1,333050	0,025129920

Cuando las cuerdas esten bastante usadas, calcularemos su rigidez—mientras no se verifiquen experiencias más concluyentes—como si fueran nuevas, lo cual si bien es cierto que nos habrá de dar resultados algo mayores que lo que debieran ser, en cierto modo tal diferencia por exceso es ventajosa en la práctica.

Si las cuerdas estuviesen mojadas, respecto de las que tampoco tenemos experiencias bastante completas, nos valdremos tambien de la tabla anterior con la sola variacion de tomar para A valores dobles de los consignados en ella.

§ 50. **Aplicacion.**—Calcular la rigidez de una cuerda blanca, nueva y seca de **0,03** metros de diámetro, en el supuesto de querer subir un peso de **100** kilográmos sirviéndose de una polea de **0,5** metros.

El número de hilos $n=68$ será dado por la fórmula (1) de la nota § 49. Introduciendo este valor en las (5) y (6) tendremos para A y B.

$$A=68\,(0,000\,2973+0,000\,245\times 68)=1,1530964.$$

$$B=68\times 0,000\,363=0,024684,$$

y por consiguiente:

$$R=\frac{A+BQ}{D}=\frac{1,1530964+0,024684\times 100}{0,5+0,03}=$$

$$=\frac{3,6214964}{0,53}=6^{k},833$$

Si el diámetro hubiera sido exacto ó muy aproximadamente, uno de los contenidos en la tabla, hubiésemos puesto por A y B los valores correspondientes consignados en ella.

El trabajo absorbido por la rigidez, se obtendrá multiplicando su valor en cada caso, por el camino que recorra el peso Q durante la unidad de tiempo á que se refiera aquel.

Para disminuir la *resistencia pasiva* de que se trata, y consiguientemente su trabajo, se impregnan las cuerdas de materias grasas ó se les frota con jabon, y con igual objeto se suelen hacer de seccion rectangular á manera de *pleitas*.

Nada concluyente se puede decir sobre la rigidez de las correas, si bien hay lugar á suponer que sea de poca importancia, y despreciable por consiguiente en la mayor parte de los casos. Si á pesar de esto se quisiera calcular aproximadamente dicha resistencia, se asimilarán á pleitas, fajas ó bandas formadas de cuerdas, puestas las unas al lado de las otras, y todas de un diámetro igual al espesor de la correa. En tal supuesto la fórmula

$R=\frac{A+BQ}{D}\times n$, en la que n representa el número de cuerdas que entran en el ancho de aquella, nos dará el valor de la rigidez en este caso.

A igualdad de seccion, las correas serán tanto más flexibles cuanto más anchas ó de menos espesor fueren.

La rigidez *de los cables metálicos*, que tanto se van generalizando para la trasmision de movimientos á largas distancias, es dada aproximadamente por la fórmula

$$R = 0{,}58 \times Q \frac{d^2}{D}$$

tomada de las obras de Redtenbacher (sábio mecánico aleman) y en la que d y D expresan en centímetros los diámetros respectivos del cable y polea, y Q en kilógramos el peso ó con más generalidad la resistencia que se desee vencer (*).

§ 51. **Choques y vibraciones. Resistencias del medio en que las máquinas se mueven.**— Todo choque, dados los materiales con que se construyen las máquinas, produce por lo regular deformaciones permanentes, y siempre, movimientos vibratorios más ó ménos rápidos que, como aquellas, absorben parte del trabajo motor.

Aunque en las bien establecidas, no debe haber piezas que cambien bruscamente de velocidad, causa principal de los choques y consiguientes vibraciones que se observan en ellas, como quiera que no siempre es posible disponer las cosas á este fin, aplicando el teorema de Carnot, podremos formarnos idea de la pérdida de trabajo motor que por tal motivo pudiera haber.

(*) Redtenbacher establece tambien para la rigidez de las cuerdas el siguiente valor formular

$$R = 0{,}\ 26 \times Q \frac{d^2}{D}.$$

Aunque á priori sea fácil comprender, que tan sencilla espresion no ha de abrazar la multitud de casos que pueden presentarse en la práctica respecto al estado de las cuerdas, ya mas ó menos usadas, ya embreadas ó sin embrear, ya formadas de esta ó de otra manera etc., conviene sin embargo tenerla presente, y aun servirnos de ella cuando por otro camino mas exacto no podamos determinar el valor de dicha resistencia.

La ecuacion $\frac{1}{2}\Sigma m v_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \frac{1}{2}\Sigma m v^2$

en la que

v_0.............. es la velocidad de un punto cualquiera antes del choque,

v_1.............. la que tenga el mismo punto despues del choque,

v.............. velocidad ganada ó perdida durante el choque,

formula como ya sabemos dicho teorema que traducido al lenguaje comun nos dice: que la pérdida de fuerza viva en el choque de dos sistemas materiales, es igual á la suma de la de ambos sistemas, estando animada cada masa parcial de la velocidad perdida ó ganada durante aquel.

En las máquinas destinadas á ejecutar ciertos trabajos industriales mediante la accion repetida del choque de una masa, se ha de procurar para obtener el mayor efecto útil, que la materia del cuerpo que percute sea muy rígida y elástica. En un martinete, por ejemplo, tanto la cabeza del martillo como el yunque deben hacerse de acero, materia que reune en alto grado aquellas propiedades.

Respecto de la influencia nociva del *medio resistente* en que las máquinas se mueven, suele ser de tan escasa importancia, que por lo regular se prescinde del trabajo perdido por tal concepto, al calcular el efecto útil de ellas. Solamente en ciertos órganos, en los volantes por ejemplo, en las ruedas hidráulicas algunas veces etc., conviene tomarlo en consideracion.

Esta circunstancia y la de estudiarse con alguna latitud en el curso de *Mecánica aplicada á la Artillería* cuanto se refiere á este punto, nos dispensan el hacerlo aquí, limitándonos á indicar por el momento que dicha resistencia dentro de los límites que comprenden las velocidades más usuales es, cuando el cuerpo se mueve en el aire ó en el agua, proporcional:

1.º al cuadrado de la velocidad,

2.º á la densidad del medio,

3.º á la mayor seccion del cuerpo perpendicular á la direccion del movimiento,

4.º á un coeficiente, variable principalmente, con la forma anterior y posterior del cuerpo y longitud de este.

Morin y otros fisícos admiten como resultado de sus experiencias, que en la expresion que formula la ley de la resistencia de aquellos dos fluidos debe haber además un término independiente de la velocidad, y solo proporcional á la máxima seccion del cuerpo producida por un plano perpendicular á la direccion del movimiento. Este término constante se puede despreciar casi siempre sin error sensible.

§ 52. **Valor aproximado de la expresion radical** $\sqrt{a^2+b^2}$.—En muchos casos, pero muy particularmente cuando se trata de encontrar el valor del rozamiento en las máquinas, se obtienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2+b^2}$, cuyo cálculo se facilita y abrevia mediante la siguiente tabla formada por Mr. Gosselin con arreglo á los valores generales hallados por Poncelet.

TABLA 5.ª

Valor aproximado de la expresion $\sqrt{a^2+b^2}$ (*) en funcion de las cantidades lineales a y b

$$\sqrt{a^2+b^2}=\alpha.\,a+\beta.\,b$$

Relacion entre a y b.	Valores de α.	β.	Máximo error que se comete.		
$a \gtrless b$	0,8284	0,8284	0,1716 aprox.te		$\frac{1}{6}$
$a > b$	0,96046	0,39783	0,03954	»	$\frac{1}{25}$
$a > 2b$	0,98592	0,2327	0,01408	»	$\frac{1}{71}$
$a > 3b$	0,9935	0,16123	0,0065	»	$\frac{1}{154}$
$a > 4b$	0,99625	0,1226	0,00375	»	$\frac{1}{266}$

(*) Redtenbacher, siguiendo una marcha distinta de la adoptada por Poncelet, llega á encontrar estos valores:

$$\sqrt{a^2+b^2}=k\,(a+b)\ldots\ldots\quad k=0,777\ \left\{\begin{array}{l}\text{para cuando}\\ a\gtrless b\end{array}\right.$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\alpha\,a+\beta\,b\ldots\ldots\quad \begin{array}{r}\alpha=0,393\\ \beta=0,947\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{para cuando}\\ \frac{a}{b}\begin{array}{l}>0\\<1\end{array}\end{array}\right.$$

mediante los cuales se pueden calcular sin recurrir á la tabla 5.ª, las expresiones de la forma $\sqrt{a^2+b^2}$, con una aproximacion aceptable en la mayor parte de los casos que se presenten en la práctica.

Relacion entre a y b.	Valores de α.	β.	Máximo error que se comete.	
$a > 56$	0,99757	0,09878	0,00243 aprox.te	$\frac{1}{417}$
$a > 66$	0,99826	0,08261	0,00174 »	$\frac{1}{589}$
$a > 76$	0,99875	0,07098	0,00125 »	$\frac{1}{800}$
$a > 86$	0,99905	0,0622	0,00095 »	$\frac{1}{1048}$
$a > 96$	0,9993	0,05535	0,00070 »	$\frac{1}{1428}$
$a > 106$	0,99935	0,04984	0,00065 »	$\frac{1}{1538}$

ADVERTENCIA.

Atendiendo al especial objeto de estas lecciones, solo se ha tenido presente para el trazado de las figuras, el facilitar la inteligencia de las esplicaciones que á ellas se refieren, dando una idea general del conjunto y partes principales que comprenden; así pues, no se ha de estrañar que aparatos formando parte de una máquina, aparezcan mayores que la máquina misma, como tampoco la falta de correspondencia entre proyecciones pertenecientes á una misma figura.

ÍNDICE.

Páginas comprensivas.

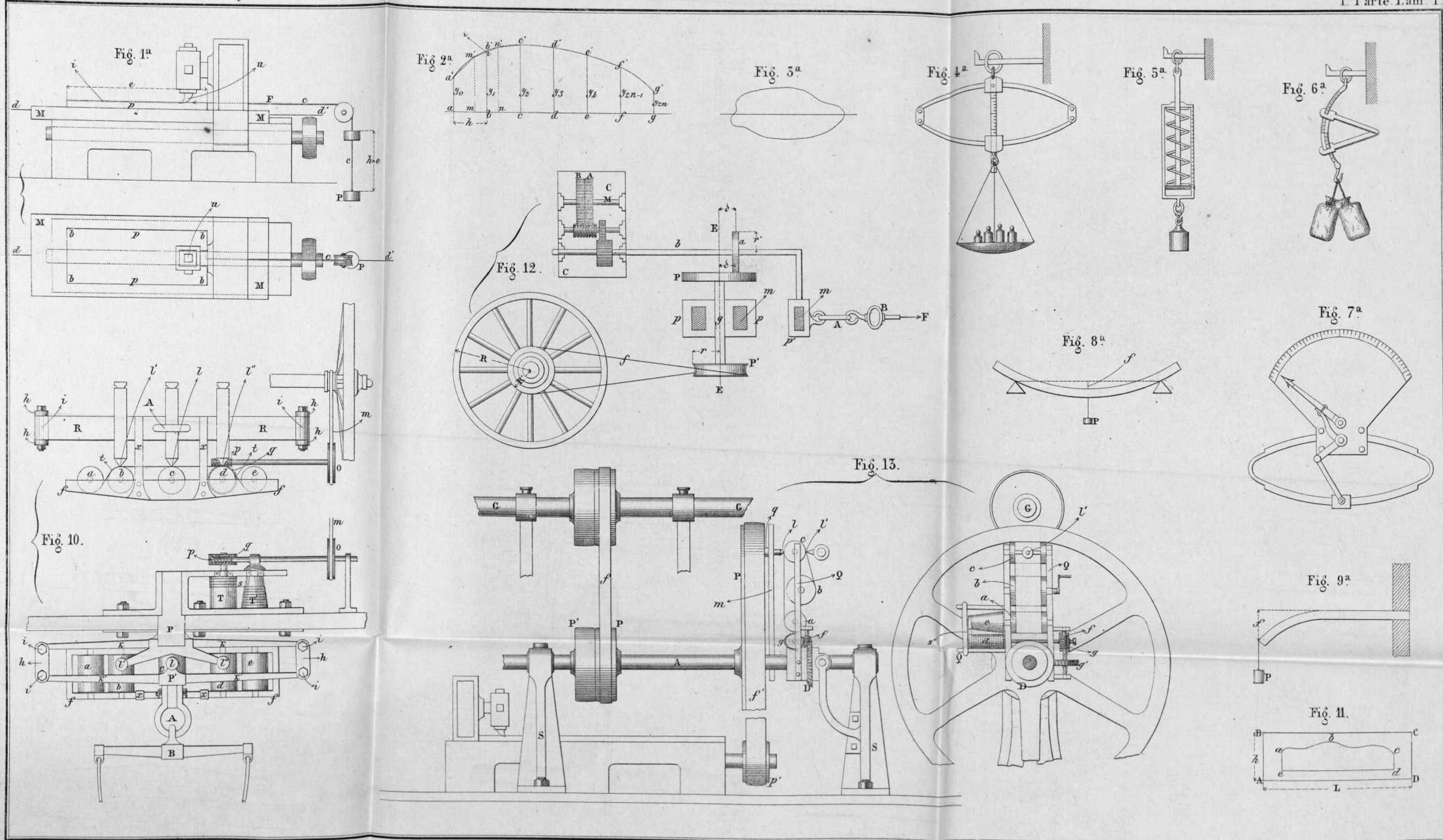


Fig. 1ª
Fig. 2ª
Fig. 3ª
Fig. 4ª
Fig. 5ª
Fig. 6ª
Fig. 7ª
Fig. 8ª
Fig. 9ª
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

Gosset gr.

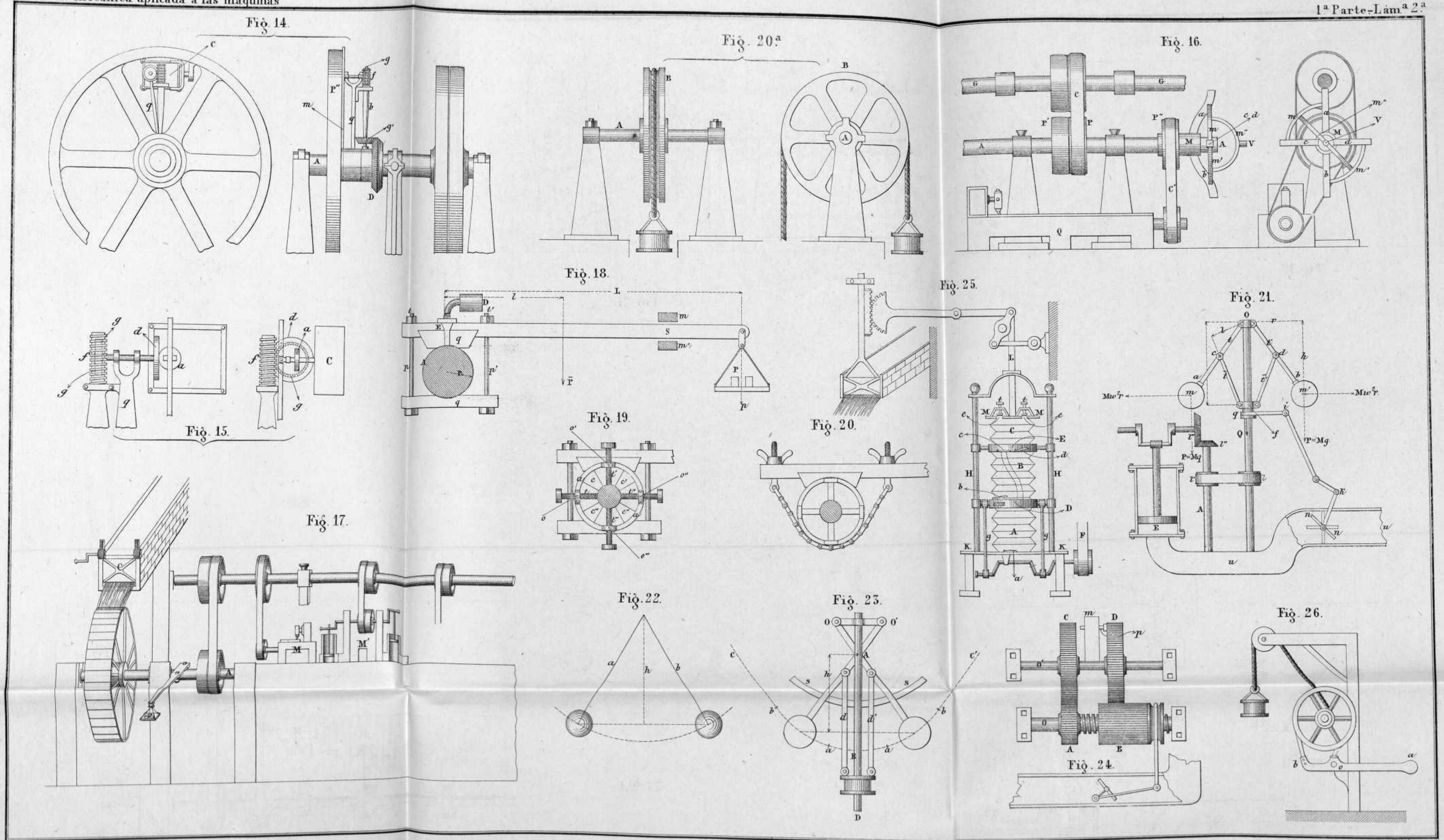
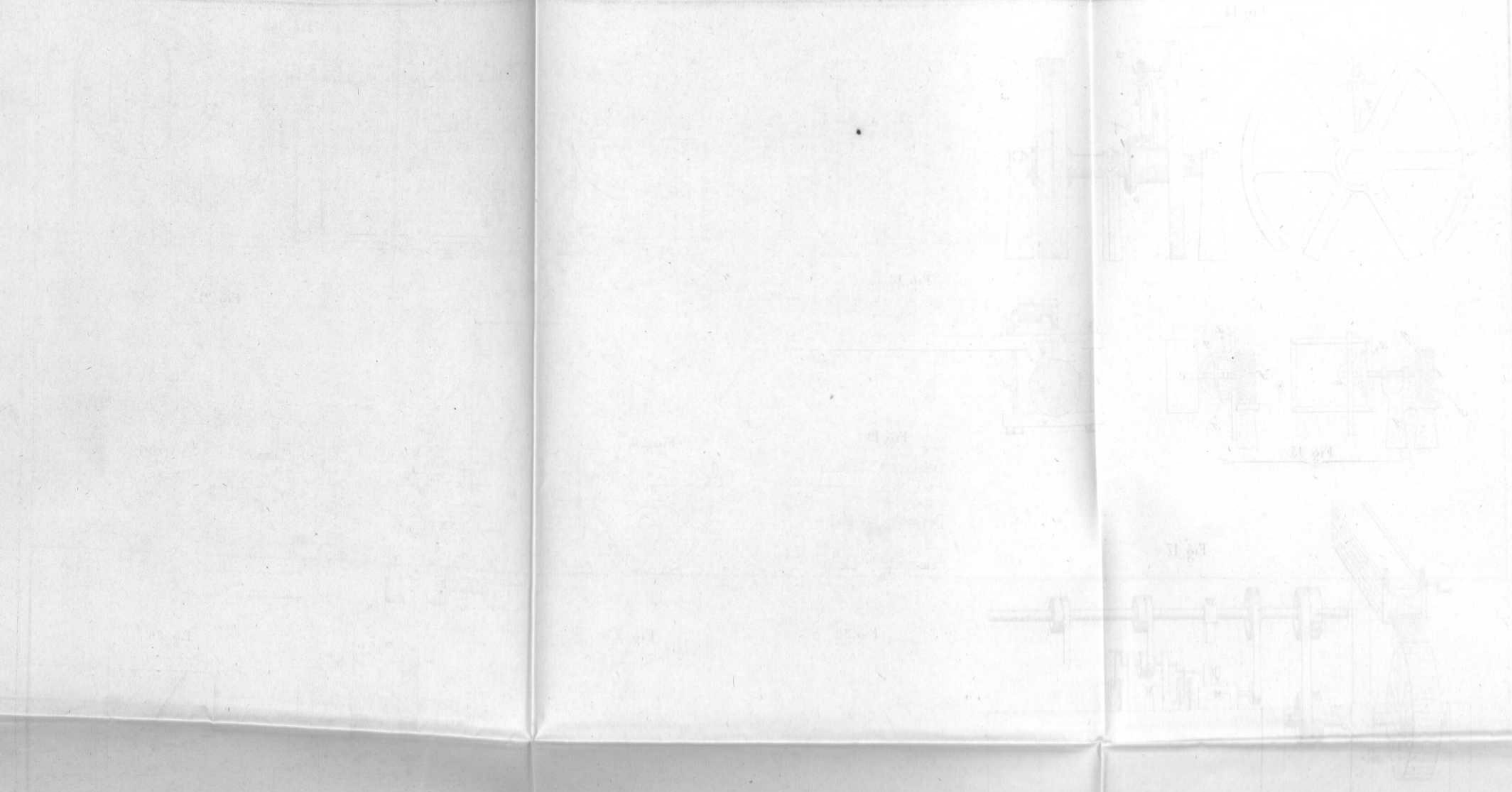


Fig. 14.
Fig. 20ª
Fig. 16.
Fig. 18.
Fig. 25.
Fig. 21.
Fig. 15.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 17.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 26.
Fig. 24.
Mw²r
P=Mg

Curso de mecanica aplicada a las maquinas



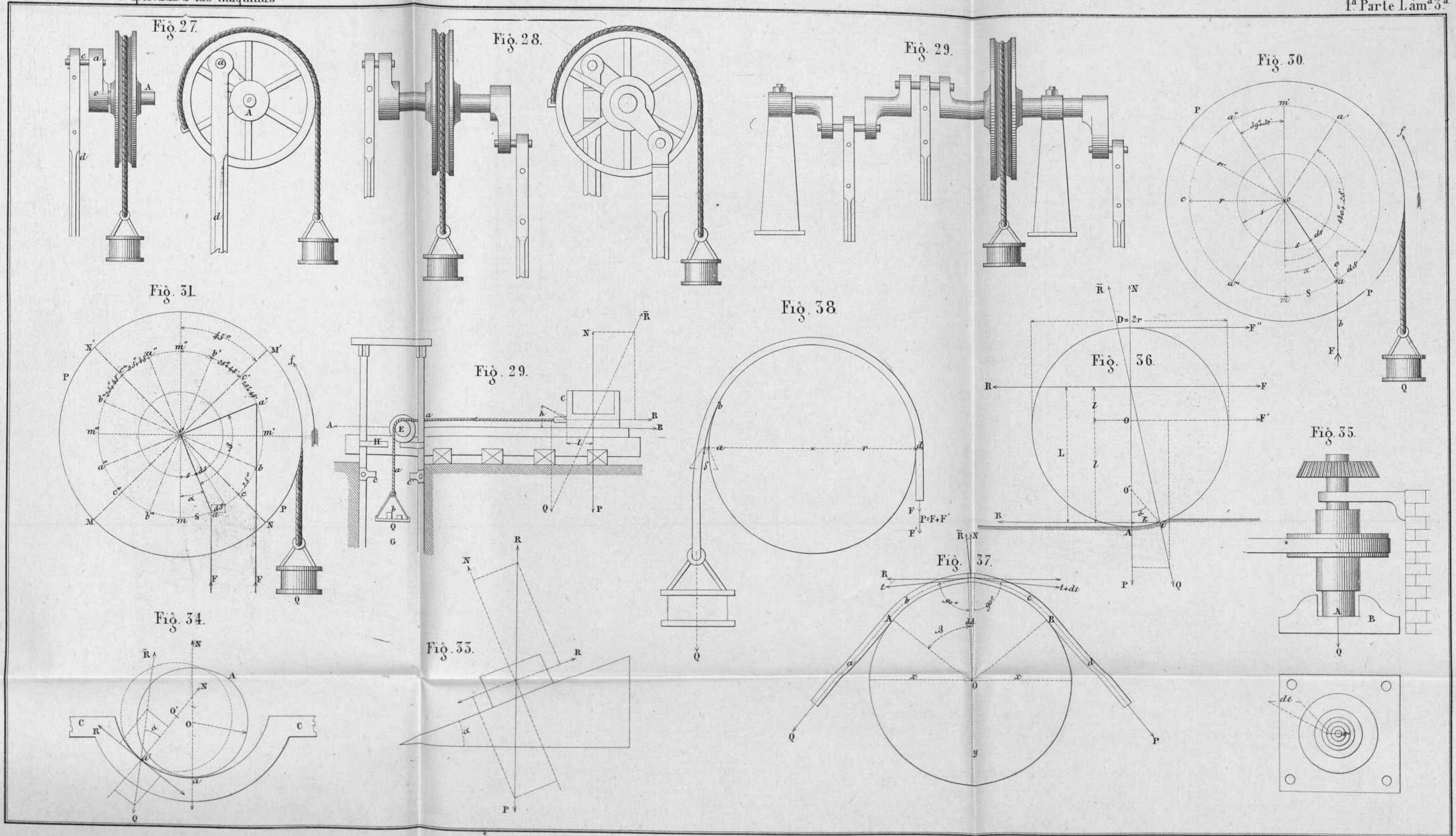


Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 38.
Fig. 29.
Fig. 36.
Fig. 35.
Fig. 37.
Fig. 34.
Fig. 33.
D = 2r
P = F + F′

A. FE

MECANICA
aplicada á
las máqui-
nas,