

CURSO DE TOPOGRAFÍA
Y
ELEMENTOS DE GEODÉSIA

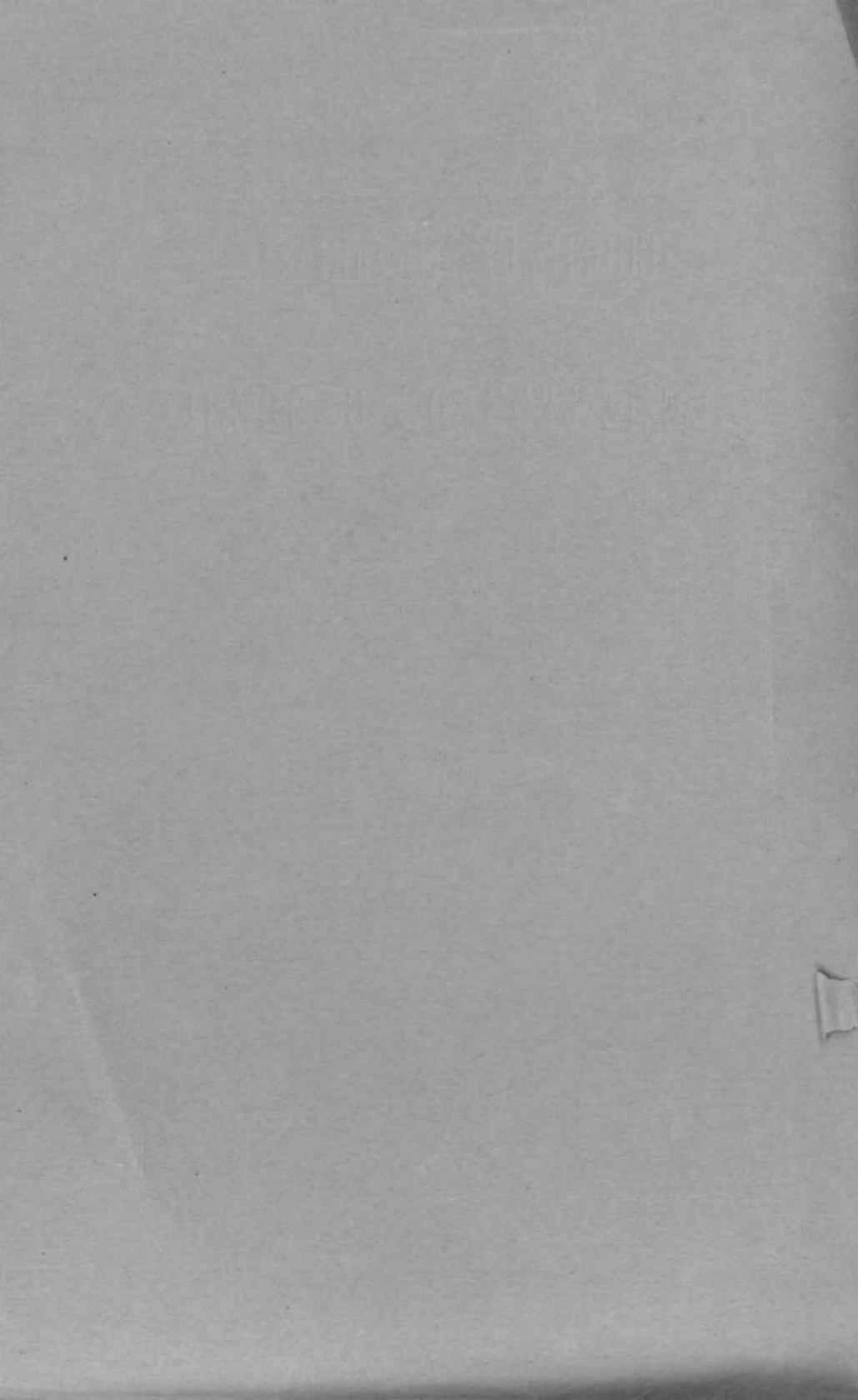
por
D. EUSEBIO SANZ,

COMANDANTE DE EJÉRCITO Y CAPITAN DE ARTILLERÍA.



SEGOVIA:
IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.

1872.



D G
A

(V. 21)

C. 1139089

E. 112194

CURSO DE TOPOGRAFÍA
Y
ELEMENTOS DE GEODÉSIA

por

D. EUSEBIO SANZ,

COMANDANTE DE EJÉRCITO Y CAPITAN DE ARTILLERÍA.

**TOMO 2.º—NIVELACION.—TOPOGRAFÍA IRREGULAR
Y GEODÉSIA.**



SEGOVIA:
IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.

1872.

FUNDO DE TOPOGRAFIA

ELEMENTOS DE GEODÉSIA

D. EUSEBIO SANZ

Tomos I y II. — Geometría plana y esférica y geodesia.



R. 88100

1.º de Itine del 38

NIVELACION.

LECCION 21.

MÉTODOS GENERALES DE MEDICION DE LOS ÁNGULOS VERTICALES.

Indicamos en las primeras páginas de estas lecciones la necesidad de encontrar las tres coordenadas de cada punto, para que su posición estuviese bien determinada con relación al sistema que se elegia, quedando también con dicha condición perfectamente establecido en el papel en que el levantamiento se representaba.

Las lecciones anteriores se han dedicado á la investigación de las dos coordenadas contenidas en el plano del levantamiento ó en otro paralelo á él, tocándonos ahora el explicar los medios de conocer el valor de la tercera.

Vamos á entrar, pues, de lleno en la parte de la Topografía que se ha designado con el nombre de *nivelacion*.

Así como en planimetría elegimos y marcamos los

ejes convenientes para el sistema coordinado á que los puntos se referian, así tambien ahora tomamos un plano al cual llamamos de *origen ó referencia*, desde el cual se cuentan las alturas á que los distintos puntos del terreno se encuentran con respecto á él, cuyas alturas toman el nombre de *cotas absolutas*.

El plano de comparacion puede ser de posicion diversa para cada levantamiento, siendo unas veces la superficie del mar prolongada, aunque muchas otras se toma la de un lago, etc., á un plano paralelo á las citadas, que pase por el punto mas alto del terreno, por el mas bajo ó por un punto intermedio.

En planimetría marcamos un corto número de puntos que nos tenian que servir para la comprobacion de los demás, á los cuales se les llamó trigonométricos de primer orden, haciéndoles ser vértices del poligono fundamental que se formó; alrededor de estos puntos y con relacion á ellos agrupamos todos los detalles del levantamiento.

El mismo procedimiento se sigue en nivelacion. El determinar con exactitud suma las alturas ó cotas absolutas de todos los puntos, aun de los de menos importancia, sería una operacion interminable é innecesaria, para evitar lo cual se dividen las operaciones en dos períodos. En el primero, se encuentran las alturas absolutas de un corto número de puntos notables, y en el segundo se determinan las relativas de los detalles agrupados alrededor de aquellos.

Para conocer dichas alturas, tanto absolutas como re-

lativas, es de necesidad tener determinada la distancia horizontal que media desde el punto cuya altura se va á encontrar, al otro de altura ya conocida, y además el ángulo que la direccion de la visual que de aquél á este se dirija, forma con la vertical de la estacion.

Esto es lo que nos hace patente la conveniencia de elegir para puntos fundamentales de la nivelacion los vértices mismos del cánevas fundamental planimétrico. En efecto, las distancias horizontales que entre dichos vértices existan, se han medido ya con toda exactitud, y como hemos hecho estacion en ellos para medir ángulos horizontales, cuesta muy poco trabajo levantar al mismo tiempo los verticales, (si el aparato se presta á ello, como les sucede á la generalidad), sin contar que la manera como dichos puntos han sido elegidos es una garantía de la facilidad que para observarlos existe, desde todos los alrededores.

Adoptados ya como puntos fundamentales de la nivelacion los vértices del polígono que llamamos principal, resta explicar el método que seguirse debe para encontrar las diferencias de sus alturas, supuesta la absoluta de uno de ellos conocida.

Para ello debemos elegir uno por estacion, colocar en él un instrumento de los que luego explicaremos, y dirigir por este una visual á la señal colocada en el otro. Sea en la fig. 9.^a (lám. 12) \bar{A} el punto de estacion, B aquel que se observa, y como quiera que la altura del instrumento puede ser variable, lo mismo que la señal que puede estar situada sobre una torre, edificio, etc.,

tomaremos á las dos como cantidades cuyos valores figuran en la cuestion, llamando á la primera i y s á la segunda. Llamando tambien A y A' á las alturas absolutas de los puntos A y B respectivamente, sobre el plano de referencia ab tendremos:

$A + i = A' + s - B'' N = A' + s - D \text{ tang. } (90^\circ - \delta)$ de modo que la diferencia de altura vendria á expresarse por la igualdad $A - A' = s - i - D \text{ tang. } (90^\circ - \delta)$.

Considerando ahora que esté mas alto el punto de estacion que el observado, como indica la figura 10 (lámina 12), y haciendo las mismas suposiciones y consideraciones podemos deducir

$A + i = A' + s + NB' = A' + s + D \text{ tang. } (\delta - 90^\circ)$, pero como $\delta - 90^\circ = -(90^\circ - \delta)$; se tiene que

$D \text{ tang. } (\delta - 90^\circ) = -D \text{ tang. } (90^\circ - \delta)$; viniéndose en consecuencia á reducir las dos expresiones á la que desde ahora es general $A - A' = s - i - D \text{ tang. } (90^\circ - \delta)$, cuya diferencia de alturas será positiva ó negativa, segun se nivele subiendo ó se nivele bajando.

Esta expresion general es simplificable en el caso de que estén á muy corta distancia los puntos de estacion y observado, y puedan situarse tanto el instrumento como la mira-señal apoyados por sus piés en el mismo terreno. Cumpliéndose estas condiciones, se hace antes de empezar á operar que la tablilla de la mira esté exactamente á la misma altura que el objetivo del aparato. De esta manera la visual dirigida á la mira es paralela á la que une los dos puntos del terreno, pudiendo en consecuencia, como nos indica la fig. 11 (lám. 12), encontrar la dife-

rencia de altura por la relacion $A - A' = -D \text{ tang. } z$ cuyo valor nos resulta igual si en la fórmula general encontrada hacemos $s = i$; y en vez de $\text{tang. } (90^\circ - \delta)$ sustituimos su igual $\text{tang. } z$.

Debemos advertir antes de continuar, que las diferencias de alturas encontradas por el indicado procedimiento, son distancias comprendidas entre los planos horizontales trazados por los dos puntos, por lo cual solo se puede emplear dicho procedimiento en los levantamientos topográficos para los cuales la esfericidad de la tierra no es sensible. Para las operaciones geodésicas, la diferencia de altura será la parte de radio interceptada entre dos superficies esféricas, concéntricas con la de la tierra, y que pase cada una de ellas por uno de los puntos.

En este estado, debemos indicar el modo como se efectúa la nivelacion del cánevas trigonométrico.

Sea este el polígono ABCDE, fig. 12 (lám. 12) en el cual debe ser conocida con antelacion la altura de uno de los vértices, que supongamos sea el A.

Se hace estacion primeramente en dicho punto, y como por las condiciones con que los trigonométricos se eligieron, deben distinguirse desde él por lo menos los B, E y O, se determinan por los procedimientos y fórmulas indicados las cotas ó alturas de estos puntos.

Se pone en seguida el aparato en estacion en B y desde él se encuentran las cotas de los A, O, y C. Las dos primeras sirven de comprobacion á los valores ántes encontrados. La tercera estacion es en el punto C, deter-

minándose desde él las alturas de los B, D, y O, en que la primera y última sirve también para comprobar.

Así se sigue hasta la estación E, en la cual es preciso que la altura para A encontrada sea la misma que sirvió de origen, para que el polígono cierre, lo que sucederá generalmente, porque cada valor de los vértices tiene su comprobación, y el punto central tantas comprobaciones como vértices existan.

Vamos ahora á tratar de la medición de los ángulos verticales, elemento esencial para la nivelación.

Pueden ser los ángulos verticales de dos clases. Llámense: *ángulo de altura* de un punto cualquiera el que forma la línea que une la estación á dicho punto, con la horizontal trazada por la misma estación, y *distancia zenital* al ángulo formado por la misma línea que une el punto y la estación, con la vertical elevada en esta.

Compréndese por estas definiciones que entre el ángulo de altura y la distancia zenital, existirán siempre relaciones de complementarismo, siendo muy fácil determinar uno de dichos ángulos conocido que fuera el otro, pero para evitar el relacionarlos, hay procedimientos directos para encontrar independientemente los valores de cada uno de ellos, los cuales vamos á explicar.

Llámense, como ya sabemos *eclímetros* los aparatos destinados á la medición de los ángulos verticales; siendo el más sencillo de ellos el de *perpendicular* ó *nivel de albañil*, sobre el cual basaremos nuestra teoría.

Consiste el eclímetro nivel de perpendicular fig. 13 (lámina 12) en dos brazos de madera AB y AD de igual

longitud, reunidos en unos de sus extremos A formando un ángulo de abertura variable. A igual distancia del punto A se apoyan en los brazos los puntos C y C' extremos de una regla, ó de un arco que tenga su centro en el punto A. De este sale un hilo que por su parte inferior lleva un peso M, destinado á mantener dicho hilo en direccion vertical.

El arco CC' lleva una graduacion que tiene su cero en uno de los brazos, y continúa hácia el otro efectuada con mas ó menos esmero segun sea la precision que se desee.

Este es el aparato que primeramente vamos á usar para medir los ángulos de altura.

Pueden emplearse tres medios para la medicion. 1.º Haciendo dos observaciones. 2.º Por una sola observacion, corrigiendo la lectura que se obtenga del valor que tenga otra lectura constante, que se toma como de origen; y 3.º Corrigiendo la posicion del cero.

1.º Sea BD la recta cuyo ángulo de altura se quiere medir, fig. 14 (lám. 12). Pongamos apoyado en ella por los extremos de sus brazos y bien vertical el nivel de perpendicular, cuya plomada tomará la direccion Az, marcando un número de grados α en el arco graduado, cuyo cero suponemos está en O. Si en esta disposicion damos un giro al aparato alrededor de la perpendicular á la BD trazada desde el punto A, este giro se habrá efectuado manteniéndose fija la bisectriz Am por ser isósceles el triángulo ABD. Ahora bien, por efecto de este giro el grado α se habrá trasladado á α_1 , el cero á O', y la

::

línea Az supuesta material se habrá colocado en Az_1 , siendo los ángulos αAm y $\alpha_1 Am$ iguales por ser uno mismo en distinta posición. Como el punto A ha permanecido fijo en el giro, la plomada marcará la misma vertical Az , pero corresponderá en el arco á un número de grados que podemos representar por ϵ .

El ángulo αAm es igual al a de altura, por tener sus lados perpendiculares, verificándose además

$$2a = \epsilon - \alpha; \text{ de donde } a = \frac{\epsilon - \alpha}{2}.$$

2.º Observando la misma figura se nota, que si á la primera lectura α observada se le añade el valor de a , se obtiene la correspondiente al punto m perteneciente á la bisectriz. La misma se obtendría restando de la ϵ el valor de a ; de manera que tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + a &= \frac{\epsilon - \alpha}{2} + \alpha = \frac{\epsilon + \alpha}{2} \\ \epsilon - a &= \epsilon - \frac{\epsilon - \alpha}{2} = \frac{\epsilon + \alpha}{2} \end{aligned} \right\} \text{ para el grado correspon-}$$

diente al punto m . Esta determinación se puede efectuar en el gabinete y se apunta el valor correspondiente á m en un registro, y en el campo no se hace ya en cada medición sino una observación sola. En efecto, si el valor que nos resulta al hacer la lectura es mayor del encontrado para $\frac{\epsilon + \alpha}{2}$, restaremos de aquel este, lo cual queda comprobado en la misma figura, pues $\epsilon - m = a$, y en el caso en que el valor nos resulte más pequeño

que $\frac{\epsilon + \alpha}{2}$, restaremos de este aquel, puesto que la

figura nos demuestra tambien que si de la lectura correspondiente á la bisectriz, restamos la efectuada, la diferencia es el ángulo de altura de la línea sobre la cual el aparato está apoyado.

3.º Si en vez de la lectura $\frac{\epsilon + \alpha}{2}$ que nos resulta

para el punto m , ponemos cero, y hacemos partir á derecha y á izquierda graduaciones crecientes hácia los dos brazos, se concibe que la posicion que tome la plomada nos indicará desde luego el valor del ángulo de altura. De esta manera están graduadas las escuadras de los morteros, que dan desde luego dichos ángulos.

Del sencillo procedimiento acabado de explicar se deduce, que el mismo se puede aplicar á otro eclímetro cualquiera, con tal que tenga un limbo de cuyo centro se suspenda una plomada. En efecto, ninguna consideracion nos impide suponer que el centro del limbo es tambien el vértice de un nivel de perpendicular, uno de cuyos brazos debia pasar por el cero.

Admitida tal consideracion, el procedimiento sería idéntico si pudiésemos imprimir al eclímetro el giro alrededor de la perpendicular á la línea en que se apoya. En la generalidad de los eclímetros no es posible ni cómodo imprimir tal movimiento, de una sola vez, pero se puede sustituir por dos, uno de ellos de giro alrededor de un eje vertical, y otro alrededor de uno horizontal.

Cualquiera que sea el eclímetro que usemos por el método expresado, el hilo de la plomada, cubriendo por fino que sea algunas de las divisiones del limbo, da inexactitud en las lecturas, por lo cual ha habido necesidad de variar algo, para las observaciones que exigen mayor precision, el procedimiento antes seguido.

Supongamos primeramente que se va á medir el ángulo de altura por doble observacion.

Sea AB, fig. 43 (lám. 12) la línea cuyo ángulo de altura se desea determinar. Coloquemos sobre ella los sostenes C de un eclímetro en su forma mas general, que consiste en un limbo vertical, y un anteojo ó una alidada, que suelen llevar nonios en sus extremos, que pueden girar alrededor de un eje horizontal, pasando por el centro de dicho limbo.

Dirijamos con el anteojo una visual á el punto correspondiente á la señal de B, procurando obtener el paralelismo del anteojo con la línea AB. En este estado el nonio del ocular marcará un número de grados α en el limbo, cuyo cero suponemos esté en o , y el sentido de su graduacion sea de izquierda á derecha por abajo. Demos ahora á todo el sistema alrededor de su eje vertical un giro de 180° . Entonces el ocular que estaba en 1 se habrá trasladado á 2 acompañado del grado α del limbo que se habrá colocado en α_1 , y el cero que estaba en o habrá pasado á o' . Con el objeto de volver ahora el ocular á su primitiva posicion, siguiendo paso á paso los procedimientos indicados en el nivel de albañil, debemos volver el anteojo solo de tal manera que su ocular

tome la posición 3, y de aquí imprimirle otro movimiento de rotación que le lleve solo también á la posición 4. En este caso el cero del nonio correspondiente al ocular, marca ahora un número de grados ϵ . Pero al pasar el ocular de la posición 3 á la 4, ha recorrido un ángulo doble del de altura siendo por consecuencia $2a = 180^\circ - \alpha_1 \epsilon$.

El ángulo medido por el arco $\alpha_1 \epsilon$, es la diferencia entre los dos $o' \epsilon$ y $o' \alpha_1$, ó lo que es lo mismo, entre las lecturas ϵ y α de la graduación, resultándonos

$$2a = 180^\circ - (\epsilon - \alpha) \text{ y } a = 90^\circ - \frac{\epsilon - \alpha}{2}; \text{ lo que nos dice}$$

que en un eclímetro cualquiera, se hacen las dos lecturas de la manera que hemos indicado, y restando su semidiferencia de 90° se tiene el ángulo de altura.

Antes de citar los otros métodos de medición, vamos á repetir los ángulos observados. Notemos, que al hacer la primera observación, ninguna limitación se impuso al valor de α , y en consecuencia, lo mismo que desde dicho valor se empezó la operación se puede empezar ahora por ϵ , posición que al fin ocupa el ocular. Resultará así otro valor para el ángulo $a = 90^\circ - \frac{\gamma - \epsilon}{2}$. Empezando otra desde γ , podremos obtener $a = 90^\circ - \frac{\delta - \gamma}{2}$,

y así sucesivamente, siendo fácil así formar la tabla de valores en número n

$$\left. \begin{aligned}
 a &= 90^\circ - \frac{\epsilon - \alpha}{2} \\
 a &= 90^\circ - \frac{\gamma - \epsilon}{2} \\
 a &= 90^\circ - \frac{\delta - \gamma}{2} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a &= 90^\circ - \frac{\varphi - \Sigma}{2}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\text{los cuales sumados, d\u00e1n} \\
 n a &= n \cdot 90^\circ - \frac{\varphi - \alpha}{2} \text{ y } a = 90^\circ - \frac{\varphi - \alpha}{2n} :
 \end{aligned}$$

Cuyo valor de a encontrado reúne las probabilidades de mayor exactitud, inherente al método de repetición por el cual se ha obtenido.

Encontremos ahora el citado ángulo por una sola observación, corrigiendo de la constante origen.

Consideremos la misma fig. 45. Si tomando el ocular desde dicha posición 4 en que como consecuencia del método anterior lo hemos dejado, le hacemos recorrer subiendo un ángulo igual al de altura que hemos encontrado, quedará el ocular por resultado de dicho movimiento en el punto M, extremo del diámetro horizontal. El número que nos indique esta posición en la graduación del limbo será sin duda

$\epsilon + a = \epsilon + 90^\circ - \frac{\epsilon - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\epsilon + \alpha}{2}$. Pues si ahora partiendo de la graduación correspondiente á M vamos bajando el ocular en sentido contrario á la graduación total del limbo, iremos quitando tantos grados á M, como

contenga la separacion que existe entre él, y la posicion del ocular cuando por el anteojo se vea el objeto cuyo ángulo de altura se desea encontrar, y siendo dicha separacion este mismo ángulo de altura, se deduce que $a = M - \epsilon$, suponiendo que sea ϵ el grado del limbo que nos indique el ocular en su última posicion, por lo cual podemos decir:

Que para medir un ángulo de altura por una sola observacion, pero corrigiendo de un valor constante tomado como origen, se encuentra este valor en el gabinete, empezando á determinar el valor de un ángulo cualquiera por el método anterior. Se suma al número de grados que en el limbo indican la última posicion del cero del nonio que se mueve con el ocular, con el valor de a obtenido, apuntando la suma en el registro que se lleve, y viendo á que graduacion del limbo corresponde el hilo de la plomada. En el campo ya no hay mas que colocar el aparato de modo que la plomada esté en la misma disposicion, y dirigiendo por el anteojo la visual al punto, y restando del valor constante inscrito en el registro el que nos resulte ahora correspondiendo al cero del nonio, la resta será el valor del ángulo de altura.

Este método es mucho más breve en su práctica que el anterior, presentando como único inconveniente la imposibilidad de la repeticion de los ángulos.

Fáltanos solo ocuparnos de la medicion, cuando esta se efectúe variando en el limbo la posicion del cero.

Si en vez de partir para las observaciones de la

coincidencia 0 del nonio, con M grados del limbo, suponiésemos el cero de este colocado en M , las observaciones quedaban reducidas á dirigir la visual al punto, y leer el grado que coincidiese con la posición del cero del nonio correspondiente, siendo el valor leído el del ángulo de altura. Este medio, el más sencillo de todos, presenta el mismo inconveniente que el del caso anterior.

En los tres se ha visto que la plomada no nos servía para hacer observación alguna, y sí solo para comprobar la posición, con relación á la horizontal de las diversas partes del limbo, por lo cual venimos á concluir que no es necesario que la plomada esté suspendida del centro, sino que puede estarlo de un punto cualquiera del limbo, pues también así su hilo cortará á aquel en algún punto de su graduación, bastando al hacer las distintas observaciones llevar por los convenientes movimientos del aparato el hilo á la misma posición.

Medición de distancias zenitales.—Los mismos tres medios de medición que existen para los ángulos de altura, pueden aplicarse á la de las distancias zenitales.

Debemos sin embargo advertir que estas pueden deducirse de aquellos, por las relaciones que entre ambos existen.

Consideremos un eclímetro en general, figura 46 (lámina 42) para explicar en él los medios enunciados. Empecemos por el de doble observación. Dirijamos la visual al punto, con el ocular en la posición 1; demos

un giro al instrumento de 180° alrededor de su eje vertical, y entonces el ocular 1 y su grado correspondiente del limbo α pasarán á colocarse en 2 y α_1 . El eje del anteojo habrá descrito en el giro un cono recto, y por consecuencia el ángulo formado con el eje de sustentacion por él, habrá permanecido constante. Ahora bien, este ángulo es la distancia zenital buscada, de modo que si hacemos recorrer al ocular desde su posicion 2, el ángulo inferior marcado de trazos en la figura, hasta que se coloque en la posicion 3, en donde marca una graduacion ε , tendremos que 2δ será la parte recorrida, con la cual y los arcos de ε° y de α° se verifica

$2\delta = \varepsilon - \alpha$, y $\delta = \frac{\varepsilon - \alpha}{2}$; lo que nos indica, que despues

de dirigida la primera visual y hecha la primera lectura, se dá á todo el sistema un giro de 180° sobre un eje vertical, y haciendo marchar al anteojo solo de modo que su ocular recorra la parte inferior del limbo hasta tanto que se vea otra vez el punto, obtendremos una segunda lectura de la cual restada la primera, y dividida la resta por dos, obtendremos como resultado la distancia zenital pedida.

Fácil es la repeticion de los ángulos en este caso. Ningun límite hemos marcado al valor de α correspondiente á la primera visual, por lo que, lo mismo podemos empezar de ε para hacer una nueva medicion, resultándonos de este modo una reunion de valores.

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\epsilon - \alpha}{2} \\ \delta &= \frac{\gamma - \epsilon}{2} \\ \delta &= \frac{\delta - \gamma}{2} \\ &\vdots \\ \delta &= \frac{\Sigma - \varphi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ Los cuales sumados y divididos por } n \text{ nos dan el valor medio } \delta = \frac{\Sigma - \alpha}{2n}.$$

Si desde la posición en que ha quedado el anteojo como resultado del método anterior, le hacemos recorrer á su ocular la parte ϵM del limbo, el número de grados que á M corresponderá será $\epsilon - \delta$, ó lo que es lo mismo, $\epsilon - \frac{\epsilon - \alpha}{2} = \frac{\epsilon + \alpha}{2}$, cuyo valor también encontraríamos añadiendo δ á α . Si apuntamos en el registro este valor correspondiente al punto M , y consideramos la posición de la plomada sujeta en un punto cualquiera del limbo, para que nos dé la invariabilidad de posición del aparato con respecto á la horizontal en todas las estaciones, podemos dispensarnos ya sobre el terreno de hacer más de una sola observación. En efecto, la figura nos indica que en una posición cualquiera del anteojo, cuando este dirija al punto marcado la primera visual, se obtendrá la distancia zenital correspondiente á él, restando del número de grados del limbo que el cero de su nonio indique, el valor constante inscrito en el registro, correspondiente á la graduación del punto M . En el caso en que se opere por este medio, es imposible la repetición.

Por último, para observar las distancias zenitales corrigiendo la posición del cero, no hay más que colocar dicho cero en el punto M, y ver entonces qué grado marca la plomada. Cuidando en el terreno que siempre marque el mismo, estaremos en la seguridad de que M es el extremo del diámetro vertical, y para medir la distancia zenital, no habrá, como también se ve en la figura, sino hacer una observación y una lectura, dándonos esta el valor deseado.

En todos los medios que acabamos de explicar hemos usado la plomada, para comprobar la posición del eclímetro, y no puede ocultarse la poca exactitud que esto produce, por efecto de los inconvenientes que en esta misma lección hemos expresado; por este motivo se ha sustituido la plomada por un nivel de aire.

Las nociones dadas para conocer este instrumento son más que suficientes para apreciar sus ventajas. En efecto, las leyes de la pesantez se cumplen tanto para los cuerpos más ligeros que el aire como para los más pesados, pues si un cuerpo pesado abandonado á sí mismo marca su línea de descenso en dirección del centro de la tierra, también marca su línea de ascensión en la dirección misma un cuerpo ligero que se eleva en el espacio, abstracción hecha en los dos casos por supuesto, de las circunstancias extrañas que pueden modificar dichas direcciones.

De modo que lo mismo nos puede marcar la dirección de la vertical un cuerpo pesado sostenido por un hilo, que un globo lleno de un gas más ligero que el

aire mantenido á cierta distancia por medio de otro hilo, siempre que se puedan evitar las desviaciones de la posición natural, producidas por el viento etc., cuyas acciones se hacen mas sensibles en el segundo caso que en el primero.

El nivel de aire, conteniendo en un tubo encorvado una pequeña burbuja de este fluido, situada en la parte superior del agua que concluye de llenar dicho tubo, y obligada á no salir de él recorriendo su parte superior, no tiene otro movimiento que el que poseería un globo mas ligero que el aire, sostenido por una cuerda fija en el centro de curvatura de la expresada parte superior del tubo.

Decir pues, que la burbuja está entre las graduaciones 2 y 3 de sus referencias, es lo mismo que decir que el hilo de la plomada inversa, corta al limbo en la división 2—3 de su graduacion.

Usando la plomada, poníamos el eclímetro en igual disposición en las diversas estaciones, cerciorándonos de que su hilo cortaba siempre al limbo en el grado en que lo efectuó en la operacion preliminar, y ahora usando el nivel, en virtud de lo anteriormente dicho, pondremos en cada estacion la burbuja comprendida en las mismas divisiones, en que se observó se colocaba en la primera operacion.

Escasos son los eclímetros que tienen plomada, y muchos los que tienen nivel. Cuando se hayan estudiado con toda detencion las propiedades de este, se comprenderán las grandes ventajas que le hacen preferible á aquella.

LECCION 22.

ALGUNOS APARATOS DESTINADOS Á LA MEDICION DE LOS
ÁNGULOS VERTICALES Y CORRECCIONES GENERALES EXIGI-
DAS POR ESTA MEDICION.

Con el objeto de que la operacion general indicada en la anterior leccion se pueda apreciar por su aplicacion en algunos aparatos, vamos á indicar como ejemplos los teodolitos de Lenoir y de Brunner que en este caso tendrán que funcionar como eclímetros.

En la teoría general hemos supuesto un limbo vertical, y una alidada de anteojo que giraba en su centro, describiendo al eje óptico de dicho anteojo un plano paralelo al del limbo, y un nivel de aire ó una plomada, cuyo destino era conseguir la igual colocacion del dicho aparato en todas las estaciones.

A cumplir con estas solas condiciones están destinados todos los eclímetros, y en la mayor ó menor facilidad que para hacerlo tengan, consiste la ventaja de su uso.

Teodolito de Lenoir.—Para poner dicho aparato

en la disposicion necesaria para medir ángulos verticales, se suelta el tornillo F que sujeta el arco fijo á la pieza E y se deja girar esta pieza y toda la parte superior alrededor del eje D, fig. 10 (lám. 5.^a) hasta que los limbos tengan una verticalidad aproximada. Seguidamente, y con objeto de equilibrar las distintas partes del aparato, se introduce en un rebajo practicado en el extremo E un contrapeso cilíndrico de la forma indicada en la fig. 17 (lám. 12), que se aprieta por medio de un tornillo. Excusado es decir que con anterioridad se ha quitado el nivel superior, y se han apretado las sobremañoneras de los soportes del anteojo, sujetando además este y el limbo por medio de la barreta de este y el pasador de aquel.

Ya en esta disposicion es necesario:

1.^o *Colocar el nivel Q' perpendicular al eje de la columna.*—Está dispuesta de tal modo la graduacion, que cuando el cero del nonio coincida con la division 4 del limbo, el nivel Q' está en direccion de dos tornillos del pié. Se coloca el aparato cumpliendo con esta condicion, y la verificacion y correccion se efectúa como lo hemos indicado en general para todos los niveles.

2.^o *Que dicho eje sea vertical.*—Nos basta para ello conseguir que sea perpendicular á otra horizontal que se corte con la antes determinada por el nivel, sin variar la posicion de esta en absoluto y con respecto al eje, para lo cual determinaremos la horizontalidad de una perpendicular á la primitiva y al eje, no teniendo para conseguirlo mas que dar un giro de 90°, á partir de la

posicion en que el aparato quedó por la rectificacion anterior, y llevar la burbuja á sus referencias por el tercer tornillo del pié, lo mismo que en otros lugares hemos explicado.

3.º *Los limbos deben quedar verticales.*—Usanse para esta rectificacion unas pinzas que lleva el aparato, en su caja como accesorios, de la forma indicada en la figura 18 (lám. 12).

Hay dos de ellas, y se colocan en los extremos del mismo diámetro fijas por su tornillo *m*, y se les dá vuelta á los limbos hasta que dicho diámetro sea el vertical, ó más próximo á dicha posicion. La colocacion de las pinzas debe ser tal, que el extremo de sus salientes *a*, estén á la misma distancia del plano de los limbos. En esta disposicion, se adapta el hilo de una plomada al saliente de la pinza superior, y es necesario que dicho hilo pase rozando suavemente el de la inferior. Si así no sucede se afloja el tornillo *F* y se dá un movimiento á los limbos hasta que se consiga la expresada coincidencia del hilo de la plomada, en cuyo caso se aprieta otra vez el tornillo sobre el arco.

4.º *El eje óptico del antejo superior debe ser paralelo á los limbos.*—Se dirige para ello el antejo á un objeto lejano, haciendo que coincida perfectamente con dicho objeto el punto de cruce de las cerdas. Partiendo de esta posicion se imprime un giro de 180 grados á todo el sistema alrededor de su eje vertical, y cambiando el antejo en sus collares, el punto antes observado se debe encontrar en el cabeceo del antejo, pues-

to que las visuales deben ser paralelas, y alejadas solo por el doble de la distancia horizontal que separa al eje óptico del de giro, y como esta distancia es muy pequeña con relacion á la que media al objeto observado, se pueden considerar como confundidas. Si el paralelismo entre el eje óptico y los limbos no se verificase, despues del giro no se encontraría el objeto, formando la primera y la segunda posicion del anteojo un ángulo cuya bisectriz será la direccion verdadera del eje óptico. Se hará la correccion eligiendo un punto de cada visual, próximamente á la misma distancia, poniendo un jalon en el punto medio de la línea que los une, y llevando por los tornillos de la retícula el punto de cruce de las cerdas á dicho jalon.

5.º *Uno de los hilos de la retícula debe ser horizontal.*—Se dirige para comprobarlo, una visual á un punto lejano, y dando movimiento á todo el sistema alrededor del eje vertical, es necesario que no se salga el punto observado de la cerda. En caso de que se salga, se dá un pequeño giro al tubo donde se encuentra la retícula hasta que se consiga lo que se desea.

Estando ya colocado el aparato del modo conveniente, no hay mas que seguir el método general indicado, utilizando los diversos tornillos de presion y coincidencia para el mejor resultado de las operaciones.

Teodolito de Brunner.—fig. 45 (lám. 5.ª). Su forma especial y la disposicion de sus diversos órganos, hace que rectificado el aparato para la medicion de los ángulos horizontales lo esté tambien para los verticales

como demuestra la simple inspeccion del aparato.

El método de medicion es, sin variacion alguna el indicado en general, por lo que nos limitamos á recomendar la inspeccion del aparato que desvanecerá las dudas que en su uso pudieran ocurrir.

Hemos dado estas ligeras nociones, para indicar en cada caso el camino que hay que seguir, para poner los aparatos en condiciones de eclímetros, sin introducir en su uso repeticiones enojosas, que fatigan al que estudia y son opuestas á la índole y objeto de nuestro trabajo.

Correcciones.—Los instrumentos no alcanzan nunca el límite de la perfeccion, siendo tambien imperfectos los medios que empleamos en el momento de su uso, para efectuar la observacion del modo conveniente. Debemos ocuparnos por lo tanto en remediar por métodos teóricos, la falta de exactitud en los procedimientos prácticos.

Dejando á un lado los errores que del observador dependan, y que solo él mismo puede evitar con gran cuidado y práctica adquirida, vamos á mencionar los que dependen del instrumento y de su precisa colocacion.

1.º Error debido á la falta de verticalidad del limbo.—Para conseguir dicha verticalidad hacemos uso de la plomada, y tenemos ya muy conocida la imperfeccion del medio, por lo cual la mayor parte de las veces, los limbos no quedan en la indicada disposicion, resultando falsos los ángulos verticales que se miden.

Limitándonos á las distancias zenitales, puesto que los ángulos de altura se deducen de ellas, y resultarán

con el error que de la igualdad se deduzca, vamos á encontrar la diferencia entre el valor medido y el verdadero, para que aumentando ó quitando al primero aquella, se corrija el expresado error, fig. 19 (lám. 12).

Sea AB la posicion del limbo si estuviese perfectamente vertical, y A'B' la que actualmente ocupa. Sea tambien MN la posicion del diámetro horizontal y PQ el vertical, estando el limbo en esta situacion, y RS la del diámetro del limbo A'B' perpendicular á MN, que no coincidiendo con la vertical forma el ángulo α con PQ, medida del diedro formado por los planos de los limbos en sus dos posiciones. Supongamos sea H el punto que se observa, llamando Δ á la distancia KP verdadera, y δ á la KR, complemento del ángulo de elevacion de dicho punto H, cuya cantidad δ dá el instrumento.

Consideremos desde el centro trazado el arco PR con el mismo radio de los limbos, teniendo así formado un triángulo esférico PRK. Pero por ser la línea MN perpendicular á las PQ y RS, lo es al plano RP que determinan, siéndolo este á su vez al RS que pasa por dicha recta MN en su actual posicion, lo que hace que el triángulo PRK sea rectángulo en R, verificándose entonces que

$$\cos. \Delta = \cos. \delta \cos. \alpha = \cos. \delta \left(1 - 2 \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha \right) =$$

$$= \cos. \delta - 2 \cos. \delta \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha;$$

$$\text{y } \cos. \delta - \cos. \Delta = 2 \cos. \delta \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha:$$

Consideremos á $\Delta = a + b$ y $\delta = a - b$; obtendremos para a y b los valores $a = \frac{\Delta + \delta}{2}$ y $b = \frac{\Delta - \delta}{2}$:

Tenemos al mismo tiempo

$$\cos. (a + b) = \cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{ sen. } b$$

$$\text{y } \cos. (a - b) = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b,$$

restando las cuales resulta

$$\cos. (a - b) - \cos. (a + b) = \cos. \delta - \cos. \Delta =$$

$$= 2 \text{ sen. } a \text{ sen. } b = 2 \text{ sen. } \frac{\Delta + \delta}{2} \text{ sen. } \frac{\Delta - \delta}{2}; \text{ de donde}$$

$$2 \text{ sen. } \frac{\Delta - \delta}{2} \text{ sen. } \frac{\Delta + \delta}{2} = 2 \cos. \delta \text{ sen. }^2 \frac{1}{2} \alpha \text{ por la li-}$$

gazon de dos cantidades iguales á $\cos. \Delta - \cos. \delta$. y de aquí: $\text{sen. } \frac{\Delta - \delta}{2} = \frac{\cos. \delta}{\text{sen. } \frac{\Delta + \delta}{2}} \cdot \text{sen. }^2 \frac{1}{2} \alpha$. Como nunca

es grande la diferencia que entre Δ y δ existe, se puede suponer en el denominador sin mucho error

$$\text{sen. } \frac{\Delta + \delta}{2} = \text{sen. } \delta, \text{ con lo cual se convierte la anterior}$$

$$\text{igualdad en } \text{sen. } \frac{(\Delta - \delta)}{2} = \cot. \delta \cdot \text{sen. }^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Fácil es conocer que este valor $\text{sen. } \frac{\Delta - \delta}{2}$ es muy pequeño, puesto que de sus dos factores, el $\cot. \delta$ lo es por acercarse el de δ á 90° , y el seno del ángulo α es tambien de escaso valor, que aun disminuye al elevarse al cuadrado.

Podemos encontrar para cada caso la inclinacion α que se puede tolerar en el limbo del aparato, para que los errores resultantes no sean sensibles. Despejemos para ello el valor de $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha$, y hagamos homogénea la fórmula restituyendo el radio R con lo cual resultará

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{\text{sen.} (\Delta - \delta)}{\cot. \delta} R^2, \text{ y tomando los logaritmos:}$$

$$2 \log. \text{sen.} \frac{1}{2} \alpha = \log. \text{sen.} \frac{\Delta - \delta}{2} + 2 \log. R - \log. \cot. \delta.$$

Supóngase ahora como ejemplo, que se está operando con el teodolito de Lenoir que aprecia de 10 en 40". Este será el error que podremos tolerar, de manera que en el límite $\Delta - \delta = 40''$. Medimos el valor de δ directamente, y al encontrado que suponemos sea 76°, menor que el verdadero Δ , le disminuimos aun algunos grados para colocarnos en caso mas desfavorable, poniendo 73, y deduciremos el valor de α por la igualdad

$$2 \log. \text{sen.} \frac{1}{2} \alpha = \log. \text{sen.} 5'' + 20 - \log. \cot. 73^\circ.$$

Reduccion al centro de estacion en sentido horizontal.—En la generalidad de los instrumentos que sirven de eclímetros, los limbos están algo separados de la direccion del eje y como en la vertical de este está el punto de estacion, resulta que los ángulos por estos aparatos determinados no son los verdaderos, adoleciendo de un error de excentricidad. Otras veces las

señales están colocadas en posiciones tales que por su naturaleza no pueden servir de estación, teniendo que elegirla en un punto próximo, estando los ángulos que así se midan en las mismas circunstancias que en el caso anterior.

En uno y otro, es necesario que se deduzca el valor del error que se comete, para que si es considerable se añada ó quite al encontrado, deduciendo así el verdadero, y si es insignificante se desprece.

Tómese en consideracion la fig. 20 (lám. 12) en la cual A es el punto que se observa, C la verdadera estación, y C' la próxima que se ha elegido, ó ha resultado por excentricidad del instrumento, A' es la proyeccion de A sobre el plano horizontal que pasa por C y C', Δ es el ángulo que se debió medir, y δ' el erróneo medido.

Hagamos girar al plano zCA' sobre su línea AA' hasta tanto que el punto C venga á colocarse en otro tal como C'' de la línea A'C', y la línea Cz quede en C''z''. Unamos el punto C'' con A y tendremos formado el

triángulo AC'C'', en el cual se verifica $\frac{AC''}{C'C''} = \frac{\text{sen.}AC'C''}{\text{sen.}A}$,

pero como el ángulo AC'C'' difiere de δ' en 90° , y el A es

igual á $\Delta - \delta'$ resultará $\frac{AC''}{A'C'' - A'C'} = \frac{\text{cos.} \delta'}{\text{sen.}(\Delta - \delta')}$. La

diferencia entre el ángulo verdadero y el encontrado es siempre pequeño, y se puede establecer

$$\frac{\Delta - \delta'}{1''} = \frac{\text{sen.}(\Delta - \delta')}{\text{sen.}1''}, \text{ de donde } \frac{AC''}{A'C'' - A'C'} = \frac{\text{cos.} \delta'}{(\Delta - \delta') \text{sen.}1''}$$

y despejando $\Delta - \delta'$, será este igual á

$$\frac{\cos. \delta'}{\text{sen. } 1''} \times \frac{A' C'' - A' C'}{A C''}.$$

Observando la expresion

$$\Delta - \delta' = \frac{\cos. \delta'}{\text{sen. } 1''} \times \frac{A' C'' - A' C'}{A C''}$$

se nota, que el valor

del error crece con los factores $\cos. \delta'$ y $A' C'' - A' C'$ al paso que disminuye con el crecimiento de $A C''$, puesto que $\text{sen. } 1''$ es constante. El ángulo δ' es muy próximo á 90° , por consiguiente $\cos. \delta'$ es muy pequeño, y se vá acercando á 0 conforme se acerca δ' á ser recto; $A' C'' - A' C'$ es una cantidad de corto valor, pues siempre se elige la estacion auxiliar muy cerca de la verdadera, y el valor $A C''$ aumenta con la distancia, de todo lo cual se deduce, que el error será tanto menor, cuanto mayor sea la zenital que se mida y esté mas lejano el punto que se observa.

Muy pocas veces se toma este error en consideracion.

Reduccion al centro de estacion en sentido vertical.—La necesidad de dominar en el momento de hacer la observacion, los puntos del contorno desde aquel en que el instrumento esté colocado, hace que algunas veces se eleve dicho instrumento sobre apoyos de cierta altura. Aunque no esté sostenido mas que por su trípode apoyado directamente en el suelo, siempre se halla el centro del eclímetro elevado sobre el punto de estacion.

Fácil es conocer que las distancias zenitales así me-

didadas resultarán falsas, pues en vez de tener su vértice en el punto del terreno, lo tienen en el centro del eclímetro que por lo antes expresado está separado de aquel.

Es de absoluta precision como en los casos anteriores hallar el valor del error, para lo cual debemos recurrir á la fig. 21 (lám. 12) en la que H es el punto observado, C la verdadera estacion desde la que se encontraría el valor Δ de la distancia zenital exacta, y C' el centro del eclímetro, en donde se ha obtenido la δ falsa.

El triángulo HCC' nos dá

$$\frac{HC}{CC'} = \frac{\text{sen. HC'C}}{\text{sen. H}} = \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } (\delta - \Delta)} = \frac{\text{sen. } \delta}{(\delta - \Delta) \text{ sen. } 1''};$$

de donde $\delta - \Delta = \frac{CC'}{HC} \times \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } 1''}$, en donde observa-

mos que el error disminuye con la distancia de la estacion al centro del eclímetro, y con el aumento de la que media al punto, pero que tiene algun valor por la gran magnitud de δ , que proporciona á su seno uno muy próximo al radio.

LECCION 23.

BRÚJULA NIVELANTE Y SU EMPLEO.

Es la *brújula nivelante* el aparato en el cual con mas rapidez y bastante perfeccion, se pueden efectuar los levantamientos, por tener la inmensa ventaja de servir simultáneamente para la parte planimétrica, y para la de nivelacion.

Consiste la mas conocida, en una caja rectangular AB que contiene una brújula ordinaria CD, fig. 4.^a (lám. 43). En uno de los lados de esta caja, y perpendicular á su superficie superior por construccion, existe un limbo ó semilimbo L que sirve de eclímetro, y que puede girar alrededor del eje *h* que hay en una de sus uniones con la caja.

Generalmente en uno y otro caso hay dos graduaciones cuyos ceros están en los extremos opuestos de un mismo diámetro, y sus numeraciones en contrario sentido.

Produce el giro alrededor de *h* un tornillo *k*, que teniendo la tuerca en una aleta ó saliente del limbo, apoya

::

su punta en una pequeña placa metálica fija en la caja. Claro es, que al tomar el limbo este pequeño movimiento arrastrará todos los órganos á él fijos. En esta situación se encuentra una alidada de anteojo, giratoria alrededor del centro, con su nonio correspondiente, soliendo tener para regularizar sus movimientos, pequeños tornillos de presión y coincidencia.

El limbo está dividido de 30 en 30 minutos, y el nonio contiene 29 de estos y está repartido en 30, apreciando por consecuencia de 1 en 1'. En la cara posterior del limbo hay un nivel de aire mn , que teniendo una charnela n , puede ser obligado á girar alrededor de ella por un tornillo, cuya tuerca está en el saliente del nivel m y tiene su punta apoyada en una pieza p unida al limbo, poseyendo de este modo un movimiento completamente independiente del total del sistema, del que también participa. Perpendicularmente al fondo de la caja AB en su parte céntrica hay un eje sostenido por una rodilla de nuez ó plataforma de cuatro ó tres tornillos verticales que se une al trípode.

Algo variada en la forma, pero igual en la esencia es otra brújula nivelante también de las más usadas. La caja AB , fig. 2.^a (lám. 13) en vez de ser rectangular como la anterior y de madera, es metálica y cilíndrica, conteniendo también la correspondiente brújula, cuyo limbo está mejor graduado. Perpendicularmente á la dirección de uno de los radios de la caja, se encuentra colocado el limbo-eclímetro MN que en este caso no es más que un cuadrante, cuyo radio medio corresponde á la hori-

zonal de la parte superior de la caja, donde se encuentra el cero, y de él parten las dos graduaciones de 15 en 15' en sentidos opuestos, destinadas cada cual á la medicion de los ángulos de altura por ascension ó por depresion.

Con el objeto de que las dimensiones de las indicadas divisiones sean perfectamente visibles, se ha tratado de hacer el arco mas grande, y para conseguirlo se ha situado el centro en uno de los extremos de la caja, tomando como radio el diámetro de esta. Como en la anteriormente descrita, el arco es giratorio alrededor de su union con la caja, poniéndose en movimiento por medio de un tornillo análogo al que allí se explicó. Lleva tambien su alidada de anteojo con nonio que comprende 29 divisiones repartidas en 30, por lo cual aprecia de 30 en 30". Para regularizar los movimientos de la alidada, hay un tornillo de presion *s* y otro de coincidencia *r*. Del fondo de la caja sale un eje *H* perpendicular á ella, que termina en una pequeña plataforma *K*. El eje *H* está hueco, y en él se introduce el pivote que está sostenido por la union de los tres brazos *t*, *t'* y *t''*, atravesado cada uno de ellos por un tornillo.

Para poder dar alrededor de este eje-pivote, movimientos rápidos y lentos á la parte superior del aparato, existe el tornillo de presion *P*, que sujeta por medio de una pinza la plataforma *K* á un saliente de la parte superior de los apoyos, y el de coincidencia *P'*, cuya tuerca está en dicha pinza y su esferilla en el saliente expresado. Además de un nivel de aire *R'* fijo á la parte poste-

rior del limbo, y dotado de movimiento propio por el tornillo y charnela que en el otro modelo explicamos, lleva otro nivel R fijo á la misma caja en direccion perpendicular al plano del eclímetro, destinado á facilitar la rectificacion.

Conocida ya la forma mas general de las brújulas nivelantes, debemos ahora hablar del modo de colocarlas para que las mediciones con ellas efectuadas tengan la mayor exactitud posible. La primera condicion que se debe cumplir es que el *limbo del eclímetro sea vertical*, y como por construccion es perpendicular á la caja, poniendo esta horizontal, quedará aquella condicion cumplida. El nivel colocado detras del limbo en la primera de las brújulas mencionadas, y los dos que contiene la segunda, sirven para conseguir la posicion deseada, por los medios que se emplearon respectivamente en los teodolitos de Lenoir y Troughton.

Puede empero suceder que las uniones del limbo con la caja, se hayan falseado, en cuyo caso la horizontalidad de esta no produce la verticalidad de aquel. Como quiera que se ha demostrado en la anterior leccion la poca influencia que dicha falta de verticalidad, (no siendo muy notable) produce en los valores de los ángulos, no hay necesidad de hacer correccion alguna por esta causa.

Para que el instrumento que nos ocupa, presente sus indudables ventajas en la nivelacion, es indispensable que *al coincidir el cero del limbo con el del nonio de la alidada, el eje óptico del anteojo sea paralelo á la línea de*

nivel, es decir, que si por movimientos de la plataforma llevamos la burbuja entre sus referencias, dicho eje óptico debe ser horizontal.

Esta condicion no se cumple en la mayor parte de los casos, lo cual ha hecho que se coloque en el aparato el tornillo de rectificacion que como hemos dicho mueve al limbo-eclímetro y á todos los órganos á él fijos.

Debemos advertir que estos tornillos, tanto el de todo el sistema como el del nivel, no tienen cabeza propia, para evitar los movimientos que por equivocacion se pudiera comunicar, sino que un mismo boton-llave sirve para los dos, quitándose despues de su empleo.

En vez de indicar directamente el medio de hacer la verificacion y correccion oportuna, pasaremos á manifestar los que de medir ángulos de altura proporciona este eclímetro, aun sin corregir, y de ellos que son, con ligeras modificaciones los en general explicados, deduciremos el modo de hacer dichas verificacion y correccion.

1.º *Medir los ángulos de altura por una doble observacion.*—Fijémonos solo en el eclímetro y su alidada que supondremos cumplen con todas las condiciones de buena disposicion, exceptuando solamente la de paralelismo del eje óptico y la línea de nivel cuando los ceros coincidan.

Sea fig. 3.ª (lám. 13) ABC el limbo del eclímetro, y supongamos que al coincidir los ceros, la línea de nivel forme con el eje óptico un ángulo α . Supongamos tambien que sea H el punto cuyo ángulo de altura α se desea

encontrar. El anteojo se dirige á H, y se obtiene una lectura falsa i en vez de obtener la verdadera x á causa de estar el cero en C, debiendo estar sobre la horizontal en el punto C'. Existe entre las cantidades α , x é i la relacion $x = i - \alpha$. Demos al eclímetro una semirevolucion alrededor de su eje vertical, quedando por consecuencia de este giro en la posicion indicada en la fig. 4.^a Entonces, estando el cero elevado sobre la horizontal del centro, se hará otra lectura i' menor que la verdadera, y entre ella y los valores de α y x que son los mismos del caso anterior, se verificará $x = i' + \alpha$, deduciendo de esta igualdad y de la anteriormente establecida

$$x = \frac{i + i'}{2} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{i - i'}{2},$$
 por lo cual conocemos el

deseado ángulo de altura y el valor del error de colimacion vertical.

Si en la segunda posicion, la visual al punto H cayese dentro del ángulo α , todo se reduciria á asignar á las cantidades que en la suma algébrica figuran, los signos que les correspondan.

Estraña á primera vista la diferencia de forma del valor acabado de encontrar, y el que se obtuvo general para todos los eclímetros, pero es fácil demostrar que esto es efecto del modo especial con que en este caso se han hecho las lecturas.

En efecto, las dos se han verificado en distinta graduacion, estando en un caso el cero en A y en otro en C, y como en los eclímetros que considerabamos en general no existia sinó una graduacion, reduciendo aquel caso

á este y estableciendo las mismas notaciones tenemos; $i = \alpha'$, $i' = 180^\circ - \epsilon$ y $x = a$, lo cual sustituido en la expresion del valor de x nos dá $a = 90^\circ - \frac{\epsilon - \alpha'}{2}$: igual que el determinado con anterioridad.

2.º *Medir los ángulos por una sola observacion, corrigiendo de un valor constante que sirve de origen.*—Si hecha por primera vez la operacion que se acaba de explicar en el gabinete, y partiendo de la posicion en que el anteojo ha quedado, le hacemos recorrer acercándose á la horizontal el ángulo $x = \frac{i + i'}{2}$ deducido, al con-

cluir su movimiento la horizontalidad será perfecta. Suponiendo como en el caso anterior que existe error de colimacion vertical, pueden ocurrir dos casos: ó que el cero del nonio correspondiente al objetivo marque sobre el limbo un cierto número de grados γ , ó que saliéndose ya dicho nonio del semilimbo marque el cero del otro extremo de la alidada, en la otra graduacion el valor γ . En los dos casos se apunta este valor, que en el primero se debe restar siempre de las lecturas que en el campo se hagan, y en el segundo añadirlo á las mismas lecturas, dándonos por resultado estas restas ó sumas, los valores de los ángulos de altura que estamos determinando.

3.º *Medir los ángulos de altura por una sola observacion, corrigiendo con anterioridad el eclímetro.*—La posicion horizontal en que se colocaba el anteojo en el caso anterior despues de hacerle girar el ángulo de altura,

correspondia á una coincidencia del cero de su nonio con un grado γ del limbo. Fácil es comprender que este número γ no es otra cosa que el ángulo de error

$\alpha = \frac{i-i'}{2}$ encontrado por el cálculo. Pues si tenemos

medios para mover el limbo hasta que se coloque el 0 de su graduacion en el punto ocupado ahora por el número

$\frac{i-i'}{2}$, estará el aparato corregido de su error

de colimacion vertical, puesto que los ceros de nonio y limbo estarán confundidos y en la horizontal del centro, bastando entonces una sola lectura, sin correccion alguna para encontrar los ángulos.

Para conseguir dicha posicion, no hay mas, que una vez colocado el anteojo en la horizontal, es decir corres-

pondiendo su cero al número $\frac{i-i'}{2}$ del limbo, dirigir

por él una visual, y fija esta, sosteniendo con la mano el anteojo, se imprime al limbo, por medio de su tornillo un movimiento de rotacion hasta que su cero coincida con el cero del nonio, y en este estado, se está ya en disposicion de medir con gran ventaja con el eclímetro corregido, y por una observacion sola.

Hay que advertir que en este como en todos los casos y métodos de medicion, una vez hecha en la primera estacion, ó en el gabinete la rectificacion concerniente á la verticalidad del eje, debe tenerse sumo cuidado en no tocar en mucho tiempo el tornillo del nivel, consiguien-

do la necesaria posición por la del trípode y tornillos de la rodilla, en las estaciones sucesivas.

Existe otro medio de corrección de la colimación vertical sin necesidad de hacer ninguna lectura.

Estando la brújula nivelante colocada sobre su trípode, con el eclímetro á la derecha del observador, se imprime un movimiento al anteojo, solo con su alidada, hasta que el cero del nonio coincida con el del limbo, en cuya posición se sujeta por medio del correspondiente tornillo de presión.

Conseguido esto, por los movimientos de los tornillos de la plataforma se pone la burbuja entre sus referencias.

Suponiendo como al principio un error de colimación vertical α por debajo de la horizontal, y dirigiendo por el anteojo una visual $o M'$ fig. 5.^a (lám. 13) á una mira lejana, se corre la tablilla hasta que la línea divisoria de sus colores contenga al punto M' , en cuyo caso el porta-mira anota la altura á que este corresponde. Se dá en seguida un giro de 180° , quedando el error α por encima de la horizontal, y al dirigir otra visual vendrá á cortar á la mira en el punto M á donde también se corre la tablilla, haciendo la lectura correspondiente el porta-mira. Este en vista de dichas dos lecturas efectuadas, lleva la tablilla hasta el punto N , mitad del intervalo MM' .

Se dá entonces movimiento á todo el limbo por medio del correspondiente tornillo hasta que por el anteojo se vea la línea divisoria de los colores, en cuyo caso el anteojo es horizontal. Dejando al limbo fijo en esta posi-
..

cion se dá movimiento al tornillo del nivel hasta que este quede entre sus referencias, lo que nos indica que está ya conseguido el paralelismo deseado al efectuarse la coincidencia de los ceros.

Si se carece de mira graduada, ó se necesita menos precision en las observaciones, se pueden dirigir las visuales á otro cualquier objeto que se distinga bien como edificios etc. y despues de observar con cuidado los puntos en que estas visuales cortan á dicho objeto, se mueve el limbo hasta tanto que el cruce de las cerdas del anteojo divida en dos partes iguales el intervalo comprendido entre ellos, siguiéndose ya la operacion como en el caso anterior.

Cuando el aparato esté de tal manera dispuesto que no sea posible el giro del anteojo en un ángulo de 180° , ó cuando alguna de las visuales dirigidas choque en un punto del terreno, no se pueden efectuar las operaciones como acabamos de expresar.

Entonces fig. 6.^a, (lám. 13), despues de dirigida la primera visual ac sobre la mira cd , se miden con cuidado las longitudes ab y cd . Se cambian de lugar la mira y el aparato, dando á este la altura cd , y marcando en aquella el punto correspondiente al extremo de una longitud ab empezada á contar desde el suelo, y dirigiendo en esta disposicion la visual cf , y moviendo el anteojo y limbo, hasta que se dirija al punto g , medio de af , podemos ya continuar la rectificacion como en los casos anteriores.

Modo de operar con la brújula nivelante.—
Tenemos ya en el terreno nivelados los puntos trigono-

métricos, y por medio del instrumento que se acaba de explicar, debemos hacer la nivelacion del cánevas topográfico. Como regularmente los puntos notables son los mismos, las líneas poligonales que en proyeccion horizontal se determinaron pasando por ellos nos tienen que servir ahora de directrices para la obtencion de la diferencia que entre las alturas de sus vértices existe; pero con el objeto de hacer notar mas y mas la inapreciable ventaja que posee el aparato, de determinar á la vez la proyeccion horizontal y las alturas de los distintos puntos, supondremos que empezamos en su origen el levantamiento de las líneas poligonales que hagamos pasar por los del terreno que por su importancia lo requieran.

Es necesario que empecemos la operacion desde un punto de altura conocida, y que concluyamos en otro que cumpla con la misma circunstancia, y que nos sirve de comprobacion de las operaciones efectuadas.

Supongamos fig. 7.^a (lám. 13) que hay que representar la línea poligonal *AabcB* empezada y terminada en los puntos trigonométricos *A* y *B*, que como ya sabemos son de cota conocida. Debemos establecer la distincion entre *cotas absolutas* de los puntos, que son sus respectivas distancias al plano de comparacion ó referencia, y *diferencias de nivel* ó *cotas relativas* que son las que existen entre las cotas absolutas de ellos.

Colocando la brújula en estacion en *A* y haciendo por los tornillos de la plataforma que la burbuja del nivel quede entre sus referencias, la aguja nos indicará el ángulo que la direccion del lado *Aa* forma con la meri-



diana magnética, y la cadena metálica ú otro aparato medidor de distancias la longitud de dicho lado en proyeccion horizontal.

Dirigido el anteojo al punto *a* y por las operaciones que hemos indicado, se mide el ángulo de altura que puede ser de ascension ó de depresion, y por la fórmula $h = D \text{ tang. } a$ en que *h* es la diferencia de nivel, *D* la distancia horizontal recientemente medida y *a* el ángulo de altura, se determina dicha diferencia de nivel, la cual se debe aumentar ó disminuir á la cota del punto *A* segun haya sido el ángulo de ascension ó de depresion, para obtener la del *a*. Se hace estacion luego en el punto *a* y mirado á *b* se hace el mismo número de operaciones que en el caso anterior, siguiendo así hasta llegar á la estacion *c*, la que nos tiene que dar para *B* igual valor que en la nivelacion fundamental se encontró, y en caso contrario, no terminando la línea poligonal del modo conveniente, nos indica que las operaciones están mal efectuadas.

El registro, que es indispensable para los procedimientos que acabamos de indicar, es como sigue:

Estaciones.	Puntos observados.	Ángulos Meridianos.	Lados.	Ángulos de altura.		Diferencias de nivel.	Cotas absolutas.	Observaciones.
				+	-			
<i>A</i>	<i>a</i>	α	<i>Aa</i>	de ascension.	<i>s</i>	<i>m + s</i>	
<i>a</i>	<i>b</i>	ϵ	<i>ab</i>	de depresion.	<i>s'</i>	<i>m + s - s'</i>	
.....

y se acompaña un croquis detallado como puede repre-

sentar la misma fig. 7.^a, yendo indicados en él por arcos los ángulos meridianos, y por sus números las magnitudes de los lados y las cotas de cada vértice.

Por lo que acabamos de decir se nota que la nivelacion propiamente dicha, bajo el aspecto que hasta aquí la hemos considerado, de los puntos notables del terreno, no consiste mas que en la aplicacion sucesiva de la fórmula $h = D \text{ tang. } a$ y el encontrar en cada caso el valor de h puede ser operacion fatigosa, existiendo unas tablas destinadas á facilitarla, llamadas *de Maissiat* del nombre de su inventor.

Esta tabla no es mas que la de las tangentes naturales de los diversos ángulos de tres en tres minutos, y las de los múltiplos de estas tangentes por los números dígitos.

En la columna vertical de la izquierda están unos debajo de otros los valores de los ángulos, y en las casillas de la primera línea horizontal, á contar de la segunda de dichas casillas, se encuentran los números 1, 2.....9.

En la columna vertical correspondiente al 1, se encuentran las tangentes naturales, pertenecientes á los ángulos que cada uno tiene á su izquierda en la misma línea; en la perteneciente al 2, están los productos por este número de los de la columna anterior, en la perteneciente al 3 los productos por tres de las tangentes, y así sucesivamente.

Conocida esta tabla, un solo ejemplo puede bastar para indicarnos las grandes ventajas que proporciona.

Supongamos que al nivelar nos haya resultado $D = 397^m$ y $a = 26^{\circ}.12'$ de donde $h = 397^m \text{ tang. } 26^{\circ}12'$

El valor de h se puede poner bajo la forma
$$h=300 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'+90 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'+7 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'$$
$$=3 \operatorname{tang.}(26^{\circ}.12') \times 100+10 \times 9 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'+7 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'$$
y como quiera que las tablas nos dan los valores de $3 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'$, $9 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'$ y $7 \operatorname{tang.} 26^{\circ}.12'$, no tendremos mas que sumar el último con el penúltimo, corriendo la coma un puesto á la derecha, y con el primero corriendo á aquella dos lugares para tener el verdadero valor de h .

vencida ya su adherencia, se escaparán en virtud de su menor densidad por la parte abierta.

Como veremos despues, para que el aparato dé visuales horizontales contenidas en un mismo plano en cada estacion, es de absoluta necesidad que la rama intermedia sea horizontal y el eje de simetria vertical, de lo cual se asegura el observador haciendo dar al aparato alrededor de dicho eje un giro completo, en el cual no tiene que variar la altura del líquido en las ramas extremas.

Conocido es el fenómeno de capilaridad producido por el contacto de los sólidos y líquidos, y la propiedad de manifestarse aquel mas notable, cuando el líquido está contenido en tubos de pequeño diámetro.

No siendo muy grande el del nivel, se manifiestan los meniscos cóncavos en ambas ramas. El no ser muy perceptibles las partes líquidas que forman estos, cuando se las observa á pequeña distancia, ha hecho que se recomiende para hacer la observacion, un alejamiento de 1^m del aparato, pues desde esta posicion, aparecen los meniscos bajo forma de líneas negruzcas, á las cuales se pueden dirigir las tangentes comunes á ambas ramas por las partes exteriores de los tubos, cuyas tangentes serán las líneas de nivel deseadas.

Con el objeto de hacer aun mas perceptible el limite superior del líquido, se le suele colorear con un poco de carmin, presentando este medio el inconveniente de que se ensucian las paredes del tubo, y no se pueden efectuar las operaciones con exactitud.

Para remediar este defecto se ha ideado la introduc-

cion en ambas ramas de pequeñas láminas de metal ennegrecidas, que reflejadas por el agua, daban á esta un color gris, que hacía muy perceptible su superficie superior. Otras veces se introducen tambien trozos de papel rojo, para conseguir el mismo objeto.

Antes de hablar de las modificaciones de forma, que este nivel ha tenido, nos ocuparemos de los defectos que con respecto á aquella ó á su colocacion pueda tener el aparato, y de los errores que dichos defectos producen en las observaciones.

Error producido por la inclinacion de la parte media del tubo.—Sea ABCD, fig. 17 (lám. 13) la posicion del nivel cuando su rama BC sea horizontal. Entonces su línea de nivel será la $\alpha\alpha'$. Supongamos que por cualquier accidente ó por mala colocacion se ha inclinado el aparato, tomando la rama media la posicion B'C', y todo él la A'B'C'D'. Considerando por un momento el agua solidificada tomaría la línea $\alpha\alpha'$ la posicion $\bar{\alpha}\bar{\alpha}'$, cuyo punto medio sería el o' . Al recobrar el agua su habitual fluidez, tenderian á colocarse todos los puntos de su superficie libre en un mismo plano horizontal, y trazando la del punto o' que es mn , el volúmen de agua $\bar{\alpha}mp$ se emplearía en llenar el igual $n\bar{\alpha}'h$, quedando como línea de nivel nueva la mn .

La condicion con que tienen que cumplir los niveles para operar con ellos sin error, es, como hemos dicho, que determinen líneas contenidas todas en el mismo plano horizontal para cada estacion, y no cumpliendo con estas condiciones las $\alpha\alpha'$ y mn , claro está

que el nivel inclinado es erróneo, debiendo procurar en todos los casos dar á la rama media ántes de la observacion la horizontalidad debida.

Error debido á la diferencia de diámetro de las dos ramas extremas.—Una de las causas que en este caso lo producen, es el fenómeno de capilaridad, pues no siendo iguales los diámetros de los dos tubos, tampoco lo son las alturas de los meniscos, y la visual será inclinada y no horizontal. Otra de las causas es la variacion de altura que resulta para las distintas visuales de la misma estacion como vamos á demostrarlo.

Sea ABCD fig. 18 (lám. 13) la posicion primera que ocupa el aparato, teniendo sus dos ramas de desigual sección. La línea de nivel determinada por la tangente dirigida exteriormente á los tubos á la altura de su superficie libre es mn . Demos un giro de 180° al aparato alrededor de una perpendicular trazada á la recta GG' en su punto medio, quedando despues de él, colocado el nivel en la posicion $A'B'C'D'$. Considerando por un momento solidificada el agua, la línea de nivel mn habria tomado la posicion $m'n'$, y al volver á recobrar su fluidez el volúmen de agua $rszt$ se empleará en llenar su igual $r's'z't'$, empleándose el sobrante $n'rtm$ en elevar la altura de nivel hasta una línea tal como pq .

Error de observacion y determinacion de las distancias á que puede emplearse el nivel.

—El menisco formado en ambos tubos por la accion capilar, y la determinacion no segura de las visuales á causa de la falta de color del agua, hacen cometer

errores en la observacion. Las experiencias muchas veces repetidas han hecho notar que una separacion de 0^m,0005 entre los puntos de paso de la visual verdadera y de la falsa por la segunda rama no se puede ya apreciar, debiendo ahora encontrarse las diferencias que esto produce en los valores encontrados en la observacion á distintas distancias.

En el nivel AB de la fig. 49 (lám. 43) *mH* es la verdadera visual y *mn'H* la falsa, terminadas ambas en la misma mira *HH'*. Llamemos *d* á la distancia que media entre las dos ramas verticales, y *D* á la que hay desde el observador á la mira, pudiéndose establecer la rela-

cion $\frac{HH'}{mH} = \frac{nn'}{nm}$ ó $\frac{HH'}{D} = \frac{nn'}{d}$; de modo que

el error $HH' = \frac{nn'}{mn} \cdot mH = \frac{nn'}{d} D$, y como la can-

tidad $\frac{nn'}{d}$ es constante para el mismo instrumento,

podremos con mucha facilidad encontrar el error correspondiente á cada distancia.

La distancia *d* suele ser igual á 1^m y como además *nn'* es de 0^m,0005, la expresion anterior se trasforma en

$$HH' = \frac{0^m,0005}{1} \times D = 0^m,0005 D.$$

Fácil es ya en cada plano conocer la distancia á que se puede operar, pues para ello no hay mas que sustituir á *HH'* por el equivalente en el terreno de 0^m,0005 en el

papel, y determinar en consecuencia el valor de D.

Supongamos el caso de que se opere á una distancia de 40^m; el error que en este caso se cometerá es $HH' = 0^m,0003 \times 40 = 0^m,02$, y como los centímetros es ya una magnitud algo considerable con relacion á la pequeña distancia de 40^m, deducimos que el nivel de agua es un instrumento de poca precision, por lo cual no se le emplea mas que para los levantamientos de longitud menor de 40^m en cada operacion parcial.

La facilidad de cometer con este aparato errores accidentales que se acumulan á los irremediables que en sí tiene, hacen adoptar algunas precauciones en su uso.

Las visuales deben dirigirse, colocándose el observador á la distancia aproximada de un metro del aparato, por lo que antes se indicó.

El tubo intermedio se debe colocar siempre perfectamente horizontal.

El observador debe ser el mismo para la misma estacion, para que la costumbre le haga dirigir la visual por los mismos puntos.

Al pasar de una estacion á otra es necesario tapar los tubos para que no se vierta el agua, pero antes de llegar á la estacion nueva se deben destapar para que obre en los dos igual presion.

En una misma estacion se debe tambien cuidar de que el agua no se vierta, pues si así sucediese bajaría la línea de nivel.

Además de estas advertencias de todo punto indispensables en el uso de este aparato, debemos hacer algunas referentes á su buena construccion.

Los tubos verticales deben ser del mismo diámetro, y su superficie interior debe tener el mismo eje que la exterior para evitar en la entrada y salida de los rayos luminosos, los errores debidos á los cambios de direccion de aquellos por causa de la refraccion.

Grandes son las ventajas del uso del nivel de agua, siendo tal vez mayores aun sus inconvenientes.

Consisten las primeras en su poco coste, fácil transporte y rápida instalacion, y los segundos en la imposibilidad de operar á largas distancias, en los continuos movimientos producidos por el viento en la superficie líquida, que hace tambien imposibles las operaciones cuando la atmósfera no está en completa calma, y la incomodidad que al observador produce la reflexion de los rayos luminosos sobre el cristal.

Modificaciones de forma introducidas en los niveles de agua.—Nivel de dos ampollas.— Consiste este en un tubo metálico AB fig. 20 (lám. 13) que se puede dividir en varias partes para mayor facilidad en el transporte. En sus extremos, las esferillas A y B tienen unas tuercas en su parte superior, donde se introducen los casquillos metálicos trabajados á tornillo, que están adosados á la parte externa é inferior de dos frascos ó ampollas de cristal M y M' completamente iguales. Une al aparato con sus piés una rodilla de nuez, y para evitar la rotura de las ampollas en los transportes, se

cubren con unas fundas cilíndricas de latón N, que entran á rozamiento sobre aquellas.

Nivel de doble tubo.—Es igual al anterior con la única diferencia que las dos fundas N, están unidas por una varilla de latón de igual longitud que la AB, lo cual en los transportes dá mayor seguridad al sistema.

Nivel de tubo flexible.—Consiste fig. 21 (lám. 13) en dos reglas de madera AB de 2^m de altura, que en sentido de su longitud y en la mitad de su ancho, llevan unos rebajos semicilíndricos, en los cuales introducen la mitad de su volúmen los tubos de cristal MN terminados en su parte superior por grandes embudos C de 0^m,15 de altura.

La parte inferior de dichos tubos N está cerrada, pero lleva lateralmente un orificio P, en el cual entra la pieza extrema de otro tubo RS, generalmente metálico, y de dirección perpendicular al primitivo. Lleva el RS una llave H, que según su posición permite ó impide el paso del agua de uno de sus lados al otro, teniendo además dicho tubo su extremo roscado exteriormente con el objeto de que se pueda fijar á él por medio de ligaduras el tubo flexible DE de 50^m de longitud. Forman á este una primera envuelta de lona que se suele embrear, un forro interior de caoutchouc para completar la impermeabilidad, y una hélice de alambre fuerte que mantiene en el tubo la conveniente redondez, impidiendo los dobleces. Al lado de los tubos MN sobre la superficie de la regla, existe una división en metros y sus submúltiplos teniendo su cero en la parte inferior. La disposición ge-

neral del aparato está indicada en K de la misma figura. Todo él con su funda, no pesa mas que 20^{ks} y su manejo exige cuatro hombres, dos para las reglas y los otros dos para llevar el tubo de caoutchouc. Cuando se llena el nivel debe cuidarse que este tubo se eleve ligeramente hácia el embudo por donde el agua se introduce.

El uso del aparato es sencillísimo, no habiendo mas que poner en cada uno de los puntos cuya diferencia de nivel se quiere encontrar una de las reglas, apoyadas verticalmente en el suelo, dejando que el tubo flexible se apoye en el terreno en cualquier direccion, ó se eleve sobre él sin tocarlo, pues su posicion en nada influye en el resultado de las operaciones.

Despues de un pequeño número de oscilaciones el agua se detendrá, observando entonces en las dos reglas á qué graduacion corresponde su nivel, y la diferencia entre las dos graduaciones, será la de altura que entre los puntos existe.

Las ventajas que resultan del uso de este aparato son muy notables. La sensibilidad es grande, como se puede notar dando una pequeña elevacion á uno de los tubos, cuyo efecto se comunica instantáneamente al otro, por las oscilaciones del agua que contiene. La perfeccion de las observaciones, no depende como en los niveles de agua ordinarios del buen golpe de vista del observador, ó de su práctica en marcar las visuales. Se puede nivelar de noche, ó con niebla, no influyendo tampoco en la altura del líquido en las dos ramas la mayor ó menor fuerza del viento.

Los embudos evitan que se vierta el agua por una oscilacion brusca del aparato, siendo verdaderos tubos de seguridad. En los bosques ó terrenos muy accidentados se puede nivelar sin allanar el camino que se sigue pues el tubo flexible puede adaptarse á todas las sinuosidades horizontales; y finalmente, en los asuntos judiciales sirve de comprobante, para operaciones ya efectuadas, y sobre cuya exactitud no se tenga la completa certeza.

Práctica de la nivelacion.—Toma el nombre de *nivelacion simple* la que se puede efectuar desde una sola estacion, y *nivelacion compuesta* la que exige varias, existiendo además la *nivelacion en contorno*, que permite desde una sola estacion hecha en un punto bien determinado, por medio de una vuelta de horizonte, encontrar las alturas de todos los de detalle que á su alrededor se agrupan.

Para la primera, fijémonos en la fig. 22 (lám. 13), siendo en ella AB la línea del terreno, y A y B los puntos cuya diferencia de altura se quiere encontrar. El aparato se coloca en estacion en un punto tal como M situado próximamente á la mitad de la distancia que entre B y A existe. En A se coloca una mira, y se dirige á ella por el nivel la correspondiente visual, subiendo ó bajando la tablilla de la mira hasta que su línea media corte á dicha visual. La lectura *a* que entonces se efectúe será la elevacion sobre el terreno de la tablilla.

Se traslada la mira al punto B, observándola con el nivel hasta que su tablilla esté con la visual en análoga disposicion que en el caso anterior. Se hace entonces la

lectura a' , siendo esta la altura de la tablilla sobre el punto B, y es indudable que la diferencia $a' - a$ nos indica la de nivel entre los dos puntos. Representando por A la altura ó cota absoluta del punto A, si queremos encontrar la A' correspondiente á B tendremos $A' = A + a - a'$, cuya fórmula es la general de la nivelacion simple.

Quando las visuales dirigidas pasen por encima de las mayores longitudes de la mira colocada en un punto extremo, ó antes de llegar á él corte al terreno, aunque se podía emplear un sistema de inversion de las miras, ó se podian encontrar las diferencias de nivel por la de longitudes de los hilos de dos plomadas cuyos pesos tocasen en el suelo teniendo fijos los otros extremos en grandes pértigas, se emplea la *nivelacion compuesta* como mas fácil de ejecutar que dichos procedimientos, y menos expuesta á errores.

Se quiere encontrar la diferencia de nivel que existe entre los puntos A y B de la fig. 23 (lám. 13) para lo cual no basta una sola estacion. Se divide el espacio comprendido entre A y B, marcando puntos intermedios m y n , con la separacion conveniente atendida la naturaleza del terreno para que entre cada dos inmediatos se pueda efectuar la nivelacion simple. Se elige un punto p , próximamente á la mitad de la distancia entre A y m , y colocándose en él en estacion con el nivel, se hace la lectura a correspondiente á A y la a' correspondiente á m . La diferencia de nivel entre los dos será $a' - a$ y la cota \bar{A} absoluta del punto m , $\bar{A} = A + a - a'$.

Cuando los puntos estén á mayor distancia hay que efectuar la nivelacion por una sucesion de operaciones, eligiendo puntos intermedios.

Se quiere encontrar la diferencia de nivel entre los A y B de la fig. 2.^a (lám. 14).

Se eligen puntos en m, n, \dots , con la condicion de que las distancias horizontales de cada uno á los inmediatos sean menores que la longitud de la regla donde el nivel deba apoyar, haciendo en seguida entre cada dos puntos la misma operacion del caso anterior, como indica la figura, siendo la diferencia de nivel, la suma de las cantidades mm', nn' y BB' .

Si la pendiente cambia de sentido, es decir, si se convierte de ascendente en descendente ó vice versa, el punto donde el cambio se efectúe debe ser uno de los intermedios elegidos, y las alturas de reglas de uno y otro lado de él, deben entrar en la suma con signos contrarios.

Si sobre el terreno se quieren determinar puntos que tengan igual cota que otro dado, se apoya en este el extremo de la regla, y en ella el nivel, recorriendo por la pendiente con el otro extremo hasta que dicho nivel nos marque la horizontalidad, en cuyo caso los apoyos de los extremos tienen la misma cota.

El defecto mayor del nivel de perpendicular es la pequeña distancia á que con él se puede nivelar, y para evitarlo se han dado otras disposiciones al aparato, apoyando sus extremos de una manera invariable sobre la regla de una alidada de pínulas ó de antejojo, la cual

por medio de una rodilla, se ha unido á un trípode. En estas disposiciones que indican las figuras 3 y 4 de la lámina 14 se pueden dirigir visuales horizontales á bastante distancia, siendo el modo de hacer la nivelacion con ellos, igual por completo al empleado con el nivel de agua.

Tambien como este produce el aparato de que nos estamos ocupando su error de observacion. En efecto, el hilo de la plomada cubre la línea de fé cuando la horizontalidad de la línea apoyo de los extremos se produce, pero la poca perfeccion de nuestra vista nos impide conocer $0^m,0005$ de separacion, que pertenecerá á un ángulo tanto menor cuanto mayor sea el radio con que esté el arco trazado.

La fig. 5.^a (lám. 14) nos indica que $\frac{co'}{oo'} = \frac{mn}{pn}$, en que $R=co'$ es el radio del arco del nivel, oo' es el error de $0^m,0005$ que se puede cometer sin ser notado, pn es el error que el anterior produce en el terreno y mn la distancia á que se encuentra el punto observado, pudiendo surgir de la igualdad establecida las mismas cuestiones de que se habló en el nivel de agua.

Tómase luego como estación el punto p' , intermedio á m y n , y colocando en estos sucesivamente la mira, y haciendo las lecturas b y b' , su diferencia de nivel estará representada por $b'-b$, y la cota absoluta del punto n será $\bar{A} = \bar{a} + b - b' = A + a + b - a' - b'$. En consecuencia la diferencia de nivel entre A y n será $a' + b' - a - b$.

Finalmente estacionando en p'' , se hacen las lecturas c y c' correspondientes á los puntos n y B , encontrando para diferencia de nivel entre ellos $c' - c$, y para cota absoluta del punto B :

$$A' = \bar{a} + c - c' = A + a + b + c - a' - b' - c',$$

siendo la diferencia de nivel que entre A y B existe

$$a' + b' + c' - a - b - c.$$

A las lecturas efectuadas por visuales que se dirigen en el mismo sentido en que se marcha se las llama *niveladas de frente*, y á las que se efectúan en sentido contrario, *niveladas de espalda*; de modo que adoptando esta nomenclatura podemos ya decir: *que la diferencia de nivel es igual á la suma de las niveladas de frente, disminuida en la de las niveladas de espalda; y que la cota absoluta de un punto, es igual á la de otro ya determinado, aumentado en las niveladas de espalda y disminuida en las niveladas de frente que entre uno y otro punto se hayan determinado.*

Es ocioso hacer notar que las niveladas de frente serán mayores que las de espalda si se descende, y menores si se sube, resultando segun los casos sus diferencias positivas ó negativas.

Si la nivelacion que se efectuase fuese la de los lados

∴

de un polígono cerrado, ó de una línea poligonal de extremos acotados, tendríamos una comprobación para los procedimientos seguidos, pues en el primer caso la cota final debía ser igual á la inicial, ó iguales también las respectivas sumas de las niveladas de espaldas y de frente; y en el segundo, nos debe resultar como cota final la del punto extremo, debiendo la diferencia entre las sumas de las niveladas de espaldas y de frente, ser igual á la que exista entre las dos cotas con anterioridad conocidas.

El registro para la operación que acabamos de explicar, puede llevarse del modo siguiente.

Cota del punto A.....	A
Nivelada de espalda.....	+ a
Cota del plano de nivel del instrumento	A + a
Nivelada de frente.....	— a'
Cota del punto m.....	A + a — a'
Nivelada de espaldas.....	+ b
Cota de nivel del instrumento.....	A + a + b — a'
Nivelada de frente.....	— b'
Cota del punto n.....	A + a + b — a' — b'
.....	
.....	

En el cual el procedimiento es homogéneo, sin tener necesidad de fijarse en la magnitud relativa de las niveladas de frente y de espalda en la misma estación.

Si en la nivelacion de una línea cualquiera se desea comprobar los resultados, no existe otro recurso que repetir todas las operaciones en sentido opuesto.

Despues de efectuada la nivelacion del modo que hemos expresado, puede suceder que existan en el terreno puntos de escasa importancia, cuyo levantamiento se efectúa tomando como estacion un punto de cota conocida, y haciendo girar al aparato alrededor de su eje vertical, se recorre todo el plano de horizonte encontrando las diferencias de nivel que existen entre el punto de estacion y los ya citados.

La manera general de nivelar que hemos explicado y la idea que sobre el trazado y desarrollo de perfiles dimos en la leccion 24, nos dispensan de hablar mas de la nivelacion de los expresados perfiles.

Nivel de perpendicular.—Se indicó ya el principio en que está fundado, habiéndose tambien indicado su forma al usarle como eclímetro.

Para servir de nivel, no tiene necesidad de graduacion en su regla ó arco intermedio, llevando tan solo un trazo que marque la mitad exacta de dicha regla ó arco, que toma el nombre de *línea de fé*.

En el momento en que el hilo de la plomada pase por la línea de fé, la recta en que apoyan los extremos de los brazos iguales del nivel es horizontal en virtud de las propiedades del triángulo isósceles. La única verificacion á que hay que sujetar este sencillo aparato, es la destinada á comprobar el exacto trazado de la línea de fé.

Si dispusiésemos de una regla perfectamente hori-

zontal, no habría mas que apoyar en ella los extremos del nivel y ver si en esta situacion el hilo de la plomada coincidía con dicha línea, y si esto no sucediese se trazaría por el paso del expresado hilo, la nueva y exacta traza de fé.

Si no se dispone de línea horizontal como en muchos casos sucede, se apoyan los extremos, sobre una cualquiera MN inclinada fig. 24 (lám. 13) y se marca en la regla ó arco AB, el punto a de paso del hilo de la plomada. Se dá al aparato un giro de 180° de modo que se cambien los puntos de apoyo de los extremos y entonces el punto a habrá pasado á a' , poniéndose en contacto con el hilo de la plomada otro a , perteneciente á la otra mitad de la regla en donde tambien se marca otro trazo. La mitad de la distancia que entre los dos marcados media debe ser la posicion de la línea de fé. Caso de que no cumpla la que el nivel contiene con dicha condicion, se marca una nueva que la satisfaga.

El modo de operar es tan sencillo como el aparato. Supongamos que se desea encontrar la diferencia de nivel de los puntos A y B (fig. 1.^a (lám. 14) situados á pequeña distancia uno de otro. Se apoya una regla en A por uno de sus extremos, y se hace que el otro cambie de posicion resbalando sobre otra regla vertical graduada fija en el punto B, hasta que adquiera la primera una posición tal como AB', en la que el nivel M apoyado en ella por sus extremos marque la horizontalidad. La magnitud BB' cuya lectura se haga en B' será la diferencia de nivel buscada.

vencida ya su adherencia, se escapan en virtud de su menor densidad por la parte abierta.

Como veremos despues, para que el aparato dé visuales horizontales contenidas en un mismo plano en cada estacion, es de absoluta necesidad que la rama intermedia sea horizontal y el eje de simetria vertical, de lo cual se asegura el observador haciendo dar al aparato alrededor de dicho eje un giro completo, en el cual no tiene que variar la altura del líquido en las ramas estremas.

Conocido es el fenómeno de capilaridad producido por el contacto de los sólidos y líquidos, y la propiedad de manifestarse aquel mas notable, cuando el líquido está contenido en tubos de pequeño diámetro.

No siendo muy grande el del nivel, se manifiestan los meniscos cóncavos en ambas ramas. El no ser muy perceptibles las partes líquidas que forman estos, cuando se las observa á pequeña distancia, ha hecho que se recomiende para hacer la observacion, un alejamiento de 1^m del aparato, pues desde esta posicion, aparecen los meniscos bajo forma de líneas negruzcas, á las cuales se pueden dirigir las tangentes comunes á ambas ramas por las partes exteriores de los tubos, cuyas tangentes serán las líneas de nivel deseadas.

Con el objeto de hacer aun mas perceptible el límite superior del líquido, se le suele colorear con un poco de carmin, presentando este medio el inconveniente de que se ensucian las paredes del tubo, y no se pueden efectuar las operaciones con exactitud.

Para remediar este defecto se ha ideado la introduc-

cion en ambas ramas de pequeñas láminas de metal ennegrecidas, que reflejadas por el agua, daban á esta un color gris, que hacía muy perceptible su superficie superior. Otras veces se introducen tambien trozos de papel rojo, para conseguir el mismo objeto.

Antes de hablar de las modificaciones de forma, que este nivel ha tenido, nos ocuparemos de los defectos que con respecto á aquella ó á su colocacion pueda tener el aparato, y de los errores que dichos defectos producen en las observaciones.

Error producido por la inclinacion de la parte media del tubo.—Sea ABCD, fig. 47 (lám. 13) la posicion del nivel cuando su rama BC sea horizontal. Entonces su línea de nivel será la $\alpha\alpha'$. Supongamos que por cualquier accidente ó por mala colocacion se ha inclinado el aparato, tomando la rama media la posicion B'C', y todo él la A'B'C'D'. Considerando por un momento el agua solidificada tomaría la línea $\alpha\alpha'$ la posicion $\bar{\alpha}\bar{\alpha}'$, cuyo punto medio sería el o' . Al recobrar el agua su habitual fluidez, tenderian á colocarse todos los puntos de su superficie libre en un mismo plano horizontal, y trazando la del punto o' que es mn , el volumen de agua $\bar{\alpha}mp$ se emplearía en llenar el igual $n\bar{\alpha}'h$, quedando como línea de nivel nueva la mn .

La condicion con que tienen que cumplir los niveles para operar con ellos sin error, es, como hemos dicho, que determinen líneas contenidas todas en el mismo plano horizontal para cada estacion, y no cumpliendo con estas condiciones las $\alpha\alpha'$ y mn , claro está

que el nivel inclinado es erróneo, debiendo procurar en todos los casos dar á la rama media ántes de la observacion la horizontalidad debida.

Error debido á la diferencia de diámetro de las dos ramas extremas.—Una de las causas que en este caso lo producen, es el fenómeno de capilaridad, pues no siendo iguales los diámetros de los dos tubos, tampoco lo son las alturas de los meniscos, y la visual será inclinada y no horizontal. Otra de las causas es la variacion de altura que resulta para las distintas visuales de la misma estacion como vamos á demostrarlo.

Sea ABCD fig. 18 (lám. 13) la posicion primera que ocupa el aparato, teniendo sus dos ramas de desigual seccion. La línea de nivel determinada por la tangente dirigida exteriormente á los tubos á la altura de su superficie libre es mn . Demos un giro de 180° al aparato alrededor de una perpendicular trazada á la recta GG' en su punto medio, quedando despues de él, colocado el nivel en la posicion $A'B'C'D'$. Considerando por un momento solidificada el agua, la línea de nivel mn habria tomado la posicion $m'n'$, y al volver á recobrar su fluidez el volúmen de agua $rszt$ se empleará en llenar su igual $r's'z't'$, empleándose el sobrante $n'rtm$ en elevar la altura de nivel hasta una línea tal como pq .

Error de observacion y determinacion de las distancias á que puede emplearse el nivel.

—El menisco formado en ambos tubos por la accion capilar, y la determinacion no segura de las visuales á causa de la falta de color del agua, hacen cometer

errores en la observacion. Las experiencias muchas veces repetidas han hecho notar que una separacion de $0^m,0005$ entre los puntos de paso de la visual verdadera y de la falsa por la segunda rama no se puede ya apreciar, debiendo ahora encontrarse las diferencias que esto produce en los valores encontrados en la observacion á distintas distancias.

En el nivel AB de la fig. 49 (lám. 13) mH es la verdadera visual y $mn'H$ la falsa, terminadas ambas en la misma mira HH' . Llamemos d á la distancia que media entre las dos ramas verticales, y D á la que hay desde el observador á la mira, pudiéndose establecer la rela-

cion $\frac{HH'}{mH} = \frac{nn'}{nm}$ ó $\frac{HH'}{D} = \frac{nn'}{d}$; de modo que

el error $HH' = \frac{nn'}{mn} \cdot mH = \frac{nn'}{d} D$, y como la can-

tidad $\frac{nn'}{d}$ es constante para el mismo instrumento,

podremos con mucha facilidad encontrar el error correspondiente á cada distancia.

La distancia d suele ser igual á 4^m y como además nn' es de $0^m,0005$, la expresion anterior se trasforma en

$$HH' = \frac{0^m,0005}{4} \times D = 0^m,0005 D.$$

Fácil es ya en cada plano conocer la distancia á que se puede operar, pues para ello no hay mas que sustituir á HH' por el equivalente en el terreno de $0^m,0005$ en el

papel, y determinar en consecuencia el valor de D.

Supongamos el caso de que se opere á una distancia de 40^m; el error que en este caso se cometerá es $HH' = 0^m,0005 \times 40 = 0^m,02$, y como los centímetros es ya una magnitud algo considerable con relacion á la pequeña distancia de 40^m, deducimos que el nivel de agua es un instrumento de poca precision, por lo cual no se le emplea mas que para los levantamientos de longitud menor de 40^m en cada operacion parcial.

La facilidad de cometer con este aparato errores accidentales que se acumulan á los irremediables que en sí tiene, hacen adoptar algunas precauciones en su uso.

Las visuales deben dirigirse, colocándose el observador á la distancia aproximada de un metro del aparato, por lo que antes se indicó.

El tubo intermedio se debe colocar siempre perfectamente horizontal.

El observador debe ser el mismo para la misma estacion, para que la costumbre le haga dirigir la visual por los mismos puntos.

Al pasar de una estacion á otra es necesario tapar los tubos para que no se vierta el agua, pero antes de llegar á la estacion nueva se deben destapar para que obre en los dos igual presion.

En una misma estacion se debe tambien cuidar de que el agua no se vierta, pues si así sucediese bajaría la línea de nivel.

Además de estas advertencias de todo punto indispensables en el uso de este aparato, debemos hacer algunas referentes á su buena construccion.

Los tubos verticales deben ser del mismo diámetro, y su superficie interior debe tener el mismo eje que la exterior para evitar en la entrada y salida de los rayos luminosos, los errores debidos á los cambios de direccion de aquellos por causa de la refraccion.

Grandes son las ventajas del uso del nivel de agua, siendo tal vez mayores aun sus inconvenientes.

Consisten las primeras en su poco coste, fácil transporte y rápida instalacion, y los segundos en la imposibilidad de operar á largas distancias, en los continuos movimientos producidos por el viento en la superficie líquida, que hace tambien imposibles las operaciones cuando la atmósfera no está en completa calma, y la incomodidad que al observador produce la reflexion de los rayos luminosos sobre el cristal.

Modificaciones de forma introducidas en los niveles de agua.—Nivel de dos ampolletas.—

Consiste este en un tubo metálico AB fig. 20 (lám. 13) que se puede dividir en varias partes para mayor facilidad en el trasporte. En sus extremos, las esferillas A y B tienen unas tuercas en su parte superior, donde se introducen los casquillos metálicos trabajados á tornillo, que están adosados á la parte externa é inferior de dos frascos ó ampolletas de cristal M y M' completamente iguales. Une al aparato con sus piés una rodilla de nuez, y para evitar la rotura de las ampolletas en los transportes, se

cubren con unas fundas cilíndricas de latón N, que entran á rozamiento sobre aquellas.

Nivel de doble tubo.—Es igual al anterior con la única diferencia que las dos fundas N, están unidas por una varilla de latón de igual longitud que la AB, lo cual en los transportes dá mayor seguridad al sistema.

Nivel de tubo flexible.—Consiste fig. 21 (lám. 13) en dos reglas de madera AB de 2^m de altura, que en sentido de su longitud y en la mitad de su ancho, llevan unos rebajos semicilíndricos, en los cuales introducen la mitad de su volúmen los tubos de cristal MN terminados en su parte superior por grandes embudos C de 0^m,15 de altura.

La parte inferior de dichos tubos N está cerrada, pero lleva lateralmente un orificio P, en el cual entra la pieza extrema de otro tubo RS, generalmente metálico, y de dirección perpendicular al primitivo. Lleva el RS una llave H, que según su posición permite ó impide el paso del agua de uno de sus lados al otro, teniendo además dicho tubo su extremo roscado exteriormente con el objeto de que se pueda fijar á él por medio de ligaduras el tubo flexible DE de 50^m de longitud. Forman á este una primera envuelta de lona que se suele embrear, un forro interior de caoutchouc para completar la impermeabilidad, y una hélice de alambre fuerte que mantiene en el tubo la conveniente redondez, impidiendo los dobles. Al lado de los tubos MN sobre la superficie de la regla, existe una división en metros y sus submúltiplos teniendo su cero en la parte inferior. La disposición ge-

neral del aparato está indicada en K de la misma figura. Todo él con su funda, no pesa mas que 20^{ks} y su manejo exige cuatro hombres, dos para las reglas y los otros dos para llevar el tubo de caoutchouc. Cuando se llena el nivel debe cuidarse que este tubo se eleve ligeramente hácia el embudo por donde el agua se introduce.

El uso del aparato es sencillísimo, no habiendo mas que poner en cada uno de los puntos cuya diferencia de nivel se quiere encontrar una de las reglas, apoyadas verticalmente en el suelo, dejando que el tubo flexible se apoye en el terreno en cualquier direccion, ó se eleve sobre él sin tocarlo, pues su posicion en nada influye en el resultado de las operaciones.

Despues de un pequeño número de oscilaciones el agua se detendrá, observando entonces en las dos reglas á qué graduacion corresponde su nivel, y la diferencia entre las dos graduaciones, será la de altura que entre los puntos existe.

Las ventajas que resultan del uso de este aparato son muy notables. La sensibilidad es grande, como se puede notar dando una pequeña elevacion á uno de los tubos, cuyo efecto se comunica instantáneamente al otro, por las oscilaciones del agua que contiene. La perfeccion de las observaciones, no depende como en los niveles de agua ordinarios del buen golpe de vista del observador, ó de su práctica en marcar las visuales. Se puede nivelar de noche, ó con niebla, no influyendo tampoco en la altura del líquido en las dos ramas la mayor ó menor fuerza del viento.

Los embudos evitan que se vierta el agua por una oscilacion brusca del aparato, siendo verdaderos tubos de seguridad. En los bosques ó terrenos muy accidentados se puede nivelar sin allanar el camino que se sigue pues el tubo flexible puede adaptarse á todas las sinuosidades horizontales; y finalmente, en los asuntos judiciales sirve de comprobante, para operaciones ya efectuadas, y sobre cuya exactitud no se tenga la completa certeza.

Práctica de la nivelacion.—Toma el nombre de *nivelacion simple* la que se puede efectuar desde una sola estacion, y *nivelacion compuesta* la que exige varias, existiendo además la *nivelacion en contorno*, que permite desde una sola estacion hecha en un punto bien determinado, por medio de una vuelta de horizonte, encontrar las alturas de todos los de detalle que á su alrededor se agrupan.

Para la primera, fijémonos en la fig. 22 (lám. 13), siendo en ella AB la línea del terreno, y A y B los puntos cuya diferencia de altura se quiere encontrar. El aparato se coloca en estacion en un punto tal como M situado próximamente á la mitad de la distancia que entre B y A existe. En A se coloca una mira, y se dirige á ella por el nivel la correspondiente visual, subiendo ó bajando la tablilla de la mira hasta que su línea media corte á dicha visual. La lectura a que entonces se efectúe será la elevacion sobre el terreno de la tablilla.

Se traslada la mira al punto B, observándola con el nivel hasta que su tablilla esté con la visual en análoga disposicion que en el caso anterior. Se hace entonces la

lectura a' , siendo esta la altura de la tablilla sobre el punto B, y es indudable que la diferencia $a' - a$ nos indica la de nivel entre los dos puntos. Representando por A la altura ó cota absoluta del punto A, si queremos encontrar la A' correspondiente á B tendremos $A' = A + a - a'$, cuya fórmula es la general de la nivelacion simple.

Cuando las visuales dirigidas pasen por encima de las mayores longitudes de la mira colocada en un punto extremo, ó antes de llegar á él corte al terreno, aunque se podia emplear un sistema de inversion de las miras, ó se podian encontrar las diferencias de nivel por la de longitudes de los hilos de dos plomadas cuyos pesos tocasen en el suelo teniendo fijos los otros extremos en grandes pértigas, se emplea la *nivelacion compuesta* como mas fácil de ejecutar que dichos procedimientos, y menos expuesta á errores.

Se quiere encontrar la diferencia de nivel que existe entre los puntos A y B de la fig. 23 (lám. 13) para lo cual no basta una sola estacion. Se divide el espacio comprendido entre A y B, marcando puntos intermedios m y n , con la separacion conveniente atendida la naturaleza del terreno para que entre cada dos inmediatos se pueda efectuar la nivelacion simple. Se elige un punto p , próximamente á la mitad de la distancia entre A y m , y colocándose en él en estacion con el nivel, se hace la lectura a correspondiente á A y la a' correspondiente á m . La diferencia de nivel entre los dos será $a' - a$ y la cota \bar{a} absoluta del punto m , $\bar{a} = A + a - a'$.

Tómase luego como estacion el punto p' , intermedio á m y n , y colocando en estos sucesivamente la mira, y haciendo las lecturas b y b' , su diferencia de nivel estará representada por $b' - b$, y la cota absoluta del punto n será $\bar{A} = \bar{a} + b - b' = A + a + b - a' - b'$. En consecuencia la diferencia de nivel entre A y n será $a' + b' - a - b$.

Finalmente estacionando en p'' , se hacen las lecturas c y c' correspondientes á los puntos n y B , encontrando para diferencia de nivel entre ellos $c' - c$, y para cota absoluta del punto B :

$$A' = \bar{A} + c - c' = A + a + b + c - a' - b' - c',$$

siendo la diferencia de nivel que entre A y B existe

$$a' + b' + c' - a - b - c.$$

A las lecturas efectuadas por visuales que se dirigen en el mismo sentido en que se marcha se las llama *niveladas de frente*, y á las que se efectúan en sentido contrario, *niveladas de espalda*; de modo que adoptando esta nomenclatura podemos ya decir: *que la diferencia de nivel es igual á la suma de las niveladas de frente, disminuida en la de las niveladas de espalda; y que la cota absoluta de un punto, es igual á la de otro ya determinado, aumentado en las niveladas de espalda y disminuida en las niveladas de frente que entre uno y otro punto se hayan determinado.*

Es ocioso hacer notar que las niveladas de frente serán mayores que las de espalda si se descende, y menores si se sube, resultando segun los casos sus diferencias positivas ó negativas.

Si la nivelacion que se efectuase fuese la de los lados

de un polígono cerrado, ó de una línea poligonal de extremos acotados, tendríamos una comprobación para los procedimientos seguidos, pues en el primer caso la cota final debía ser igual á la inicial, ó iguales también las respectivas sumas de las niveladas de espaldas y de frente; y en el segundo, nos debe resultar como cota final la del punto extremo, debiendo la diferencia entre las sumas de las niveladas de espaldas y de frente, ser igual á la que exista entre las dos cotas con anterioridad conocidas.

El registro para la operación que acabamos de explicar, puede llevarse del modo siguiente.

Cota del punto A.....	A
Nivelada de espalda.....	+ a
<hr style="width: 50%; margin-left: auto;"/>	
Cota del plano de nivel del instrumento.....	A + a
Nivelada de frente.....	— a'
<hr style="width: 50%; margin-left: auto;"/>	
Cota del punto m.....	A + a — a'
Nivelada de espaldas.....	+ b
<hr style="width: 50%; margin-left: auto;"/>	
Cota de nivel del instrumento.....	A + a + b — a'
Nivelada de frente.....	— b'
<hr style="width: 50%; margin-left: auto;"/>	
Cota del punto n.....	A + a + b — a' — b'
.....	
.....	

En el cual el procedimiento es homogéneo, sin tener necesidad de fijarse en la magnitud relativa de las niveladas de frente y de espalda en la misma estación.

Si en la nivelacion de una línea cualquiera se desea comprobar los resultados, no existe otro recurso que repetir todas las operaciones en sentido opuesto.

Despues de efectuada la nivelacion del modo que hemos expresado, puede suceder que existan en el terreno puntos de escasa importancia, cuyo levantamiento se efectúa tomando como estacion un punto de cota conocida, y haciendo girar al aparato alrededor de su eje vertical, se recorre todo el plano de horizonte encontrando las diferencias de nivel que existen entre el punto de estacion y los ya citados.

La manera general de nivelar que hemos explicado y la idea que sobre el trazado y desarrollo de perfiles dimos en la leccion 24, nos dispensan de hablar mas de la nivelacion de los expresados perfiles.

Nivel de perpendicular.—Se indicó ya el principio en que está fundado, habiéndose tambien indicado su forma al usarle como eclímetro.

Para servir de nivel, no tiene necesidad de graduacion en su regla ó arco intermedio, llevando tan solo un trazo que marque la mitad exacta de dicha regla ó arco, que toma el nombre de *línea de fé*.

En el momento en que el hilo de la plomada pase por la línea de fé, la recta en que apoyan los extremos de los brazos iguales del nivel es horizontal en virtud de las propiedades del triángulo isósceles. La única verificacion á que hay que sujetar este sencillo aparato, es la destinada á comprobar el exacto trazado de la línea de fé.

Si dispusiésemos de una regla perfectamente hori-

zontal, no habria mas que apoyar en ella los extremos del nivel y ver si en esta situacion el hilo de la plomada coincidia con dicha línea, y si esto no sucediese se trazaria por el paso del expresado hilo, la nueva y exacta traza de fé.

Si no se dispone de línea horizontal como en muchos casos sucede, se apoyan los extremos, sobre una cualquiera MN inclinada fig. 24 (lám. 13) y se marca en la regla ó arco AB, el punto *a* de paso del hilo de la plomada. Se dá al aparato un giro de 180° de modo que se cambien los puntos de apoyo de los extremos y entonces el punto *a* habrá pasado á *a'*, poniéndose en contacto con el hilo de la plomada otro *a*, perteneciente á la otra mitad de la regla en donde tambien se marca otro trazo. La mitad de la distancia que entre los dos marcados media debe ser la posicion de la línea de fé. Caso de que no cumpla la que el nivel contiene con dicha condicion, se marca una nueva que la satisfaga.

El modo de operar es tan sencillo como el aparato. Supongamos que se desea encontrar la diferencia de nivel de los puntos A y B (fig. 1.^a (lám. 14) situados á pequeña distancia uno de otro. Se apoya una regla en A por uno de sus extremos, y se hace que el otro cambie de posicion resbalando sobre otra regla vertical graduada fija en el punto B, hasta que adquiera la primera una posicion tal como AB', en la que el nivel M apoyado en ella por sus extremos marque la horizontalidad. La magnitud BB' cuya lectura se haga en B' será la diferencia de nivel buscada.

Cuando los puntos estén á mayor distancia hay que efectuar la nivelacion por una sucesion de operaciones, eligiendo puntos intermedios.

Se quiere encontrar la diferencia de nivel entre los A y B de la fig. 2.^a (lám. 44).

Se eligen puntos en m, n, \dots , con la condicion de que las distancias horizontales de cada uno á los inmediatos sean menores que la longitud de la regla donde el nivel deba apoyar, haciendo en seguida entre cada dos puntos la misma operacion del caso anterior, como indica la figura, siendo la diferencia de nivel, la suma de las cantidades mm', nn' y BB' .

Si la pendiente cambia de sentido, es decir, si se convierte de ascendente en descendente ó vice versa, el punto donde el cambio se efectúe debe ser uno de los intermedios elegidos, y las alturas de reglas de uno y otro lado de él, deben entrar en la suma con signos contrarios.

Si sobre el terreno se quieren determinar puntos que tengan igual cota que otro dado, se apoya en este el extremo de la regla, y en ella el nivel, recorriendo por la pendiente con el otro extremo hasta que dicho nivel nos marque la horizontalidad, en cuyo caso los apoyos de los extremos tienen la misma cota.

El defecto mayor del nivel de perpendicular es la pequeña distancia á que con él se puede nivelar, y para evitarlo se han dado otras disposiciones al aparato, apoyando sus extremos de una manera invariable sobre la regla de una alidada de pínulas ó de anteojo, la cual

por medio de una rodilla, se ha unido á un trípode. En estas disposiciones que indican las figuras 3 y 4 de la lámina 14 se pueden dirigir visuales horizontales á bastante distancia, siendo el modo de hacer la nivelacion con ellos, igual por completo al empleado con el nivel de agua.

Tambien como este produce el aparato de que nos estamos ocupando su error de observacion. En efecto, el hilo de la plomada cubre la línea de fé cuando la horizontalidad de la línea apoyo de los extremos se produce, pero la poca perfeccion de nuestra vista nos impide conocer $0^m,0005$ de separacion, que pertenecerá á un ángulo tanto menor cuanto mayor sea el radio con que esté el arco trazado.

La fig. 5.^a (lám. 14) nos indica que $\frac{co'}{oo'} = \frac{mn}{pn}$, en que $R=co'$ es el radio del arco del nivel, oo' es el error de $0^m,0005$ que se puede cometer sin ser notado, pn es el error que el anterior produce en el terreno y mn la distancia á que se encuentra el punto observado, pudiendo surgir de la igualdad establecida las mismas cuestiones de que se habló en el nivel de agua.

LECCION 26.

NIVEL DE AIRE Y SU EMPLEO.—SONDEO.

Constituye el nivel de aire un tubo cilindrico, lleno casi por completo de un líquido y cerrado por sus dos extremos, en el cual solo se ha dejado un pequeño espacio, destinado á ser ocupado por el aire ó por el vapor del líquido que en el tubo se produzca.

La necesidad de que la burbuja gaseosa, no tenga una movilidad tan grande, que haga imposible el uso del aparato en la nivelacion, hizo se idease primeramente dar una ligera curvatura á la pared superior é interior del tubo con lo cual dicha burbuja tenia mas lento su movimiento para una misma inclinacion.

Para formarse idea de lo que ha conducido á esta modificacion, basta considerar, que si puesto el nivel cilindrico horizontal, ocupa la burbuja toda la longitud de una generatriz, la mas pequeña inclinacion dada al aparato basta para que sea su punto mas alto uno de los extremos, á donde se precipita la burbuja en virtud de su menor densidad; mientras que si dicha burbuja ocupa

en el momento de la horizontalidad el punto culminante y céntrico de un casquete esférico, la inclinacion antes comunicada no produciendo otro efecto que la conversion en punto mas alto de otro muy inmediato al que antes lo era, no ocasionará á la burbuja mas que un pequeño cambio de posicion.

Los inconvenientes materiales de la construccion de un tubo que cumpliese con la condicion indicada, han hecho adoptar otra modificacion, siendo igual en todas sus partes el espesor de las paredes del tubo, y encorvando todo este, que al fin ha quedado en la forma indicada en la fig. 6.^a (lám. 14).

Las necesidades de buena colocacion y de duracion del aparato ha hecho que se le encierre, como digimos en la leccion 5.^a, en una caja cilíndrica de laton, con una abertura en la parte superior, por la cual se perciben todos los movimientos de la burbuja.

Los niveles ordinarios tienen en la parte media de los bordes del estuche cilíndrico, marcados dos trazos destinados á ser los límites de la burbuja cuando la posicion de esta indique la horizontalidad del nivel, pero como quiera que aquella puede cambiar de dimensiones aumentando ó disminuyendo con las contracciones ó dilataciones del líquido por efecto del frio ó del calor, llegará seguramente el caso en que la burbuja ó no toque á ninguno de los trazos marcados, que se llaman *referencias*, ó pase de los dos, y para evitar este defecto se marcan en el cristal mismo del tubo, dos graduaciones en sentido inverso, que teniendo su cero en los puntos

extremos van hácia el centro. Las lecturas iguales en ambas graduaciones constituyen referencias de espacio variable susceptibles de mayor precision que las primitivas.

En direccion del eje del cilindro estuche existen dos muñones, uno de los cuales está atravesado por un tornillo de rectificacion destinado á variar la altura del extremo correspondiente del nivel sobre la recta que le sirve de apoyo, terminando al otro muñon una charnela que la une al otro soporte, y que permite al nivel girar, cuando es obligado á ello por los movimientos del tornillo del opuesto extremo.

Correspondia á este lugar explicar la verificacion y correccion del nivel de aire, y la manera de poner por medio de él horizontal una recta ó un plano, pero el mucho uso de este aparato nos obligó á anticipar el darle á conocer y explicar algunos de sus empleos, como se puede ver en la mencionada leccion 5.^a

Los tubos que para construir los niveles ordinarios se emplean, son tambien ordinarios, teniendo solo el cuidado de elegirlos entre los mas rectos de los que salen de la fábrica. Con esta sola condicion es muy fácil que no satisfagan á las de *constante seccion interior*, y de *simetria de forma*, ambas indispensables en un buen nivel.

El que no cumpla con ellas, tendrá el gran inconveniente de dejar salir la burbuja de sus referencias sin perder la horizontalidad, por que al efectuar su aumento de magnitud por causa de la contraccion del líquido, efecto de capilaridad y la mala forma, harán que se es-

tienda mas por un lado que por otro, lo cual puede producir errores de consideracion.

Chezy ha perfeccionado estos tubos, llegando á obtenerlos de forma perfecta que se emplean en la construccion de los niveles muy exactos.

Necesario es ahora elegir el líquido de que el tubo se debe llenar; el agua podia servirnos para el objeto si no se congelase á una temperatura relativamente elevada, lo cual impediria el uso del nivel á las bajo cero. El alcohol y el éter que por el contrario tienen la propiedad de difícil solidificacion son los generalmente usados, pues su gran movilidad les hace tambien muy apropiado para el objeto.

La burbuja debe tener á lo menos de longitud $0^m,02$ en el verano cuando está expuesta á los rayos del sol, pues si fuese mas pequeña, haria por sus insignificantes movimientos perezoso al aparato. Esta falta de movilidad sería producida por la adherencia entre el gas y las paredes del tubo, efecto que tiene su comprobacion en las pequeñas burbujas que quedan unidas al cristal de las botellas de bebidas gaseosas.

Una gran magnitud en la burbuja haria tambien que no fuesen muy notables sus movimientos, por lo cual se debe procurar acercarse siempre á la magnitud marcada. Pero si la cantidad de líquido es grande, grandes serán tambien sus dilataciones y contracciones y considerables las variaciones de magnitud de la burbuja, para evitar lo cual se usan tubos cortos, siendo su diámetro de seccion de unos $0^m,012$.

Cuando por cualquier causa se haya tenido que adoptar un tubo grande para el nivel, existe un medio para mantener constante la magnitud de su burbuja.

Suponiendo que en el representado en la fig. 7.^a (lámina 14) sea aquella de excesiva magnitud se puede remediar el inconveniente, si dicho tubo tiene sujeto á su pared superior una pantalla *m*, provista de un solo orificio inmediato á la inferior.

Para disminuir la longitud de la burbuja, no hay mas que dar vuelta al nivel de modo que vuelva su convexidad hácia el suelo, en cuyo caso la burbuja por su menor densidad, pasará á la parte cóncava, y dando pequeñas inclinaciones se consigue que quede dividida por la direccion de la pantalla. Si entonces se dá rapidamente la vuelta, parte de la burbuja pasará á ocupar su natural posicion, y la otra quedará adosada á la pantalla como indica la figura, sin influir para nada en los demás elementos. Dos ó tres tanteos bastarán para dar la dimension conveniente á la porcion principal.

Debemos ahora hacer notar que el nivel de aire no es si no uno de perpendicular invertido, para lo cual consideremos prolongado el de esta clase de la fig. 8.^a (lámina 14), hácia la parte superior. Supongamos tambien que el hilo se ha sustituido por una varilla rígida que se prolonga mas arriba de su punto *o* de giro y que tiene un peso *P* en su extremo inferior. En todas las inclinaciones que se dén al nivel, la misma graduacion marcará el extremo *P* en el arco *AB* que el *P'* en el arco *A'B'*.

Ahora bien, como ya en otro lugar indicamos, las

leyes de la pesantez, que obligan á caer á un cuerpo mas pesado que el aire en direccion del centro de la tierra, marcan la línea ascendente de otro mas ligero en la misma direccion, por lo cual la verticalidad de la oP' conseguida por la rigidez de la varilla PP' se puede conseguir por medio de un hilo oP' , fijo en el punto o , y llevando en su otro extremo un globo lleno de hidrógeno ú otro gas mas ligero que el aire.

En estas condiciones el nivel superior que hemos imaginado, no es mas que un nivel de aire.

En efecto, el globo de gas mas ligero que el aire, está sustituido por la burbuja de este fluido tambien mas ligero que el líquido, medio en el cual se encuentra. La fuerza que se ejerce sobre el hilo por el globo que tiende á elevarse, está sustituida por la que ejerce el vidrio sobre la burbuja, y la posicion precisa del globo sobre el arco que determina la longitud de dicho hilo, está sustituida tambien por la precision de recorrer la burbuja la parte convexa del tubo, lo cual se puede considerar producido por un hilo inestensible que sujeto á dicha burbuja tuviese su otro extremo fijo en el centro de curvatura de la parte superior del tubo ya citado.

Cuando hablamos del nivel de perpendicular se vió que la relacion que ligaba al error E que en el terreno se pudiese cometer, con la distancia á que la observacion se habia efectuado, y con el rádio con que el arco del ni-

vel fué trazado, era $\frac{R}{0^m,0005} = \frac{D}{E}$; ó lo que es lo

mismo $E = \frac{D \times 0^m,0005}{R}$, por lo que vemos que cuanto

mayor sea el radio, menor será el error.

En el nivel de perpendicular no se puede hacer que el radio tenga un gran valor, porque haría inmanejable el aparato, no sucediendo lo mismo en el de aire en que podemos dar al tubo tan pequeña curvatura como queramos, lo que equivale á aumentar su radio que en muchos casos es hasta de 500 á 700^m.

Deducimos de aquí que los niveles de aire son mas sensibles que los de perpendicular, y que lo son tanto mas, cuanto menor es la curvatura de su tubo.

Apreciemos ahora esta sensibilidad.

Consideremos el representado en la fig. 9.^a (lám. 14), en que sea mn la posicion que la burbuja ocupa al marcar la horizontalidad. La tangente á esta burbuja en su parte superior, será tambien horizontal. Demos ahora al nivel una inclinacion α'' , la burbuja ocupará la posicion $m'n'$, y el ángulo α'' formado por los radios de curvatura en los puntos céntricos de las dos posiciones, será igual al formado por las tangentes por tener sus lados perpendiculares, y como en un mismo círculo los ángulos del centro son como sus arcos, se tendrá

$$\frac{oo'}{\alpha''} = \frac{2\pi R}{360^\circ \text{ reducido á segundos}} = \frac{\pi R}{648000} = 0,000004848 R.$$

Pero como $oo' = nn'$, y á esta última variacion de posicion del extremo de la burbuja, se la puede repre-

sentar por δ resultará $\frac{\delta}{\alpha''} = 0,000004848 R$, y haciendo $\alpha = 1''$, tendremos relacionada por la ecuacion $\delta = 0,000004848 R$, la variacion de la burbuja por cada segundo de inclinacion en los diferentes radios.

Cuando mayor sea R , mayor será la variacion δ , lo que comprueba lo que anteriormente hemos expresado.

De las cuestiones que de las igualdades y procedimientos anteriores pueden derivarse, la única que suele ocurrir es *determinar la sensibilidad de un nivel ya construido*, ó lo que es lo mismo, conocer el ángulo de inclinacion que necesita, para que la burbuja adelante una de las divisiones de su tubo.

En la fig. 10 (lám. 44) sean a, b, c, \dots , los puntos de division de él, y d la magnitud de una de estas divisiones. Llamemos α'' á la inclinacion que hay que dar al nivel para que la burbuja recorra una division, es decir, para que pase de a á c , y supongamos que para una inclinacion de $1''$ pasa solamente la burbuja del punto a al n . Trazandò los radios correspondientes á estas posiciones

se tiene $\frac{an}{1''} = \frac{ac}{\alpha''}$: de donde $\alpha'' = \frac{ac}{an} = \frac{d}{\delta}$, y

como d es conocido y δ se puede determinar por la expresion $\delta = 0,000004848 R$. tendremos conocido α'' y resuelta la cuestion.

Nivel de aire con pinulas, ó de anteojo.—Figura 11 (lám. 44). El inconveniente que presenta el nivel de aire de no poder dirigir visuales á larga distancia, ha

hecho que se adopte para él la modificación que se introdujo en el de perpendicular, de elevar en los dos extremos de la regla sosten del nivel, pínulas, en que cada una tenga su ocular, consistente en un orificio tronco-cónico, y su objetivo, que es una ventanilla rectangular, cruzada por dos cerdas, que tengan su punto de unión á la misma altura de la regla AB, que el ocular de la pínula opuesta.

La regla AB vá unida á otra CD por medio de una charnela y un tornillo, por el cual se acercan ó separan la una de la otra. Por este medio se consigue la horizontalidad del nivel, de la regla AB que le debe ser paralela y de la visual que por las pínulas se dirija.

Para comprobar el paralelismo del nivel con la regla AB, se separa esta por completo de la CD y de la parte inferior del aparato, y se opera como con un nivel ordinario. Están sustituidas algunas veces las pínulas por un anteojo, siendo esta la única diferencia que les separa del representado en la figura.

Nivel de Chezy.—Una de las disposiciones que se dá al nivel de aire, es la indicada en la fig. 42 (lám. 44,) cuyo objeto es dar mayor facilidad al observador para efectuar las verificaciones y correcciones, que en los acabados de explicar son muy dificultosas. Consiste en el anteojo A sujeto por los collares B y C perfectamente calibrados y sujetos á la parte superior de los soportes G, que descansan en los extremos de la recta E, donde tambien terminan los del nivel. Tanto este como el anteojo tienen uno de sus apoyos rectificable por medio de

los respectivos tornillos Y y L. De la parte media de la regla E, sale una espiga vertical, que se introduce en una plataforma de charnelas que une el aparato al trípode.

Con esta disposicion son ya muy sencillas las rectificaciones. Consisten estas, 1.^a En poner el eje del aparato perfectamente vertical. 2.^a Hacer coincidir el eje óptico del anteojo con su eje de figura. 3.^a Poner este eje óptico perpendicular al de rotacion del aparato, y 4.^a Uno de los hilos del reticulo debe colocarse horizontal.

Habiendo hecho en general, y varias veces en aparatos análogos las mismas rectificaciones, escusamos el repetir las, con lo cual tambien se conseguirá ejercitar en ellas al que estudie.

Varias son las modificaciones que en el aparato de Chezy se han introducido, pero dejando para la siguiente leccion el ocuparnos de algunas de ellas, pasaremos ahora á esplicar las correcciones que en los datos por la nivelacion obtenidos, se deben introducir.

En el momento de hacer la nivelacion topográfica, no tomamos en cuenta la forma esférica de la tierra, en lo que se cometen errores, los que no por ser pequeños dejan de hacerse notar algunas veces en la representacion del conjunto, por lo cual es de todo punto necesario encontrar el valor de la correccion que en cada caso debemos introducir en los valores hallados para obtener los verdaderos.

Error debido á la esfericidad, ó diferencia entre el nivel aparente y el verdadero.—Sean A y B, fig. 43 (lám. 44) dos puntos de nivel, y suponga-

mos que desde A, se disponga de una visual horizontal AB', que corte en B' á la vertical BB' del punto B. Trace-mos los radios correspondientes á los puntos A y B, y llamando l á la longitud AB' y R al radio de la tierra, nos resultará

$$l^2 = (2OB + BB')BB', \text{ ó } BB' = \frac{l^2}{2R + BB'} = \frac{\frac{l^2}{2R}}{1 + \frac{BB'}{2R}}$$

pero como BB' es una cantidad insignificante con relación al diámetro de la tierra, podemos admitir sin error sensible que la diferencia BB' entre el nivel aparente y

el verdadero está expresado por $BB' = \frac{l^2}{2R}$. El valor de

R que en esta expresion se debe introducir es 6366198^m que es próximamente el medio aritmético del radio ecuatorial y del polar.

Designando por c el valor BB' del error cometido, y por c' el DD' que se cometiese al nivelar entre A y D,

tendriamos las dos igualdades $c = \frac{l^2}{2R}$; $c' = \frac{l'^2}{2R}$, ha-

biendo llamado l' á la longitud AD. Relacionando las dos

igualdades resulta $\frac{c}{c'} = \frac{l^2}{l'^2}$; de donde $c' = l'^2 \frac{c}{l^2}$ ó

bien $\log. c' = 2 \log. l' + \log. c - 2 \log. l$, cuya expresion nos puede servir para determinar con mucha facilidad la correccion que en un caso cualquiera se debe hacer,

∴

conocida que sea la distancia que media entre el punto de estacion y el observado, siempre que se haya hecho sobre otro punto situado á distancia tambien conocida una observacion preliminar. De la misma igualdad se ha partido para formar una tabla de correcciones correspondientes á diferentes distancias.

Si consideramos ahora que A y B fig. 14 (lám. 14) son dos puntos cuya diferencia de nivel se quiere encontrar y estacionamos en el punto M, medio de su distancia, las diferencias de nivel aparente y verdadero serán iguales á uno y otro lado por verificarse la igualdad $MA' = MB'$ y ser el mismo el radio R. De modo que las alturas de mira observadas desde M serán $BB' = B\bar{B} + \bar{B}B'$ y $AA' = A\bar{A} + \bar{A}A'$, cuya diferencia será la de nivel, representada por $BB' - AA' = (B\bar{B} + \bar{B}B') - (A\bar{A} + \bar{A}A') = B\bar{B} + \frac{l^2}{2R} - A\bar{A} - \frac{l^2}{2R} = B\bar{B} - A\bar{A}$, lo que nos dice que la diferencia que obtendremos restando las lecturas correspondientes al nivel verdadero, será la misma que se obtenga restando las observadas, ó lo que es lo mismo: *que estacionando en un punto intermedio y equidistante á otros dos cuya diferencia de nivel se quiere encontrar, no hay que tomar en cuenta la correccion de que nos estamos ocupando.*

Error debido á la refraccion atmosférica.—

Es sabido que los rayos luminosos, al atravesar medios de diferente densidad sufren una desviacion de su direccion primitiva lo que constituye el fenómeno de la refraccion.

Tambien quedó consignado en el estudio de la Física, que las capas inferiores de la atmósfera, en las circunstancias ordinarias, son mas densas que las superiores, por efecto de lo cual no vemos á los puntos en direccion de la línea recta que los une al ojo, si no segun la tangente al último elemento de la curva en que por la refraccion se ha transformado el rayo luminoso. Como todas estas curvas presentan su concavidad hácia el centro de la tierra, todos los puntos se verán mas altos de lo que en realidad deben estar.

Este efecto se producirá tambien en las nivelaciones, pues la division de mira que leamos coincidiendo con la visual horizontal, no será lo que á esta posicion corresponde, si no una mas baja, que por un efecto de refraccion, se habrá elevado hasta la altura de dicha horizontal.

Se hace pues necesario que midamos para cada caso el espacio que los puntos se han elevado, para añadirlo á la altura observada.

En la fig. 15 (lám. 14), nivelando desde A á B teniamos que distinguir el punto B', de la vertical elevada en B, correspondiente á la horizontal del punto A. Pero el punto que se distingue es el C, mas bajo, cuyo rayo luminoso, describiendo la trayectoria curva CA, viene á colocar su último elemento en la direccion AB'. El error por defecto que en la lectura de la mira BB' cometemos y debemos medir es el CB' y este está ligado con las otras cantidades por la relacion:

$B'C = BB' - BC$, en que BB' es la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero que se ha encontrado ser

igual á $\frac{l^2}{2R}$, y BC es la lectura que en la mira se hace, puesto que el número C se ha elevado hasta B', por lo que tenemos para cada observacion conocido el valor del error. Esperiencias repetidas, han dado á conocer que el valor de B'C es igual á 0,16 BB'.

Consideremos por último el caso de tener que encontrar la diferencia de nivel absoluta entre A y B figura 16 (lámina 14) cuando haya esfericidad y refraccion.

Tendremos entonces, que la magnitud $B\bar{E}$, verdadera diferencia de nivel, estará expresada por la relacion:

$$B\bar{E} = BC - C\bar{E} = BC - (\bar{E}B' - CB') = BC - \bar{E}B' + CB' =$$

lectura efectuada en la mira $-\frac{l^2}{2R} + 0,16 \frac{l^2}{2R}$.

Para facilitar el cálculo de estas diferencias de nivel, se han formado tablas, en cuya columna de la izquierda están las distancias á que está el punto estacion del observado de 20 en 20^m hasta los 2000, y de aquí de 100 en 100 hasta 10000^m. En la inmediata están los valores de $\frac{l^2}{2R}$ correspondientes á estas distancias, en la tercera

los valores de $0,16 \frac{l^2}{2R}$, y aun algunas contienen otra columna destinada á la diferencia

$$\frac{l^2}{2R} - 0,16 \frac{l^2}{2R} = 0,84 \frac{l^2}{2R}$$

cuya forma á continuacion indicamos.

Distancias en metros	ALTURA DEL		Diferencia entre los datos de las ante- riores columnas.
	Nivel aparente sobre el verdadero.	Punto de mira por consecuencia de la refraccion.	
0			
20	$\frac{l^2}{2R}$	0,46 $\frac{l^2}{2R}$	0,84 $\frac{l^2}{2R}$
40			
⋮			
2000			
2100			

Sondeo.—Terminaremos las nociones que hemos dado pertenecientes á la nivelacion, determinando las cotas del terreno en los puntos cubiertos por las aguas. Usase para esto la sonda, que es un peso formado por plomo, y sujeto á una cuerda de bastante longitud. Lleva el plomo en su parte inferior una cavidad que se llena en parte de sebo, destinado á recoger del fondo algunas partículas que nos den indicios de su naturaleza.

Para encontrar la cota de los distintos puntos, el sondeador, embarcado en una lancha, vá recorriendo las aguas, y en el momento de echar la sonda, levanta una banderola. Dos observadores, provistos cada cual de una plancheta y situados en estacion en los extremos de una base trazada en la orilla, que han ido siguiendo con sus alidadas los movimientos de la lancha, marcan las direcciones de las visuales, las cuales se numeran con la cifra 4, y el sondeador que ha dejado correr la cuerda hasta que el peso haya llegado al fondo, mide la longitud que

se ha sumergido, y la apunta en un registro, indicándola también con el número 1. Pasa la lancha á otro punto, y se practica otro sondeo, cuyas visuales y resultado se indican con el número 2, yendo así encontrándose los distintos puntos.

Concluida la operacion se marcan en el extremo de la base de una de las planchetas los ángulos formados á la otra, resultándonos cada punto por la interseccion de dos rectas de la misma numeracion.

Puede también hacerse el sondeo, dirigiendo el mismo que lo efectúa ú otro colocado en la misma lancha, visuales á tres puntos marcados en tierra, encontrando por un goniómetro de fácil manejo los ángulos que entre sí formaban las visuales dirigidas y encontrar luego en el papel la posicion de los puntos de sondeo, construyendo sobre las líneas que unen los puntos que se eligieron segmentos capaces de los ángulos medidos. Es aun mas fácil trazar estos con comun vértice en un papel trasparente, y hacer por movimientos de este papel que sus lados vayan á terminar en los puntos representacion de los del terreno, en cuyo caso se marca con una aguja ó un punzon la posicion del vértice, que es el punto deseado.

Cuando se carezca de toda clase de instrumentos, se podia hacer la operacion sin mas que alineaciones.

La fig. 17 (lám. 14) indica un procedimiento de esta clase. Se marca una alineacion en cada orilla, solamente por tres banderolas cada una, y en el momento de estacionarse la lancha en el punto O para sondear, se re-

corre la recta AB hasta que se llegue á un punto N' que esté en la línea recta de O y de la banderola M' , midiéndose en seguida la distancia AN' . Otro observador ha recorrido al mismo tiempo la CD , hasta llegar á un punto N en línea recta con O y la banderola M , midiéndose también la CN , y colocados en el papel todos estos puntos, queda por la intersección de las MN , $M'N'$ determinado el punto O .

Otro ejemplo que se puede presentar es el de tener boyas colocadas en el mar en determinados parajes que estén ya indicados en la carta, ó puntas ó cabos muy introducidos en las aguas. Entonces marcando en el terreno una sola alineación se puede conocer la posición del punto sondeado, como indica la fig. 18 (lám. 14).

Puede ocurrir la operación del sondeo, al oficial encargado de la defensa de una costa, para facilitar el paso y aproximación de las naves propias, y dificultar el de las enemigas; al que realice el reconocimiento anterior á un desembarco; al que tenga que efectuar el de un vado; al comisionado para la construcción de un puente etc.

Escusado parece advertir que cuando se trata de una porción vadeable lo que se hace es introducir una regla graduada, y por la parte de esta que queda mojada se conoce la altura.

Antes de concluir esta lección debemos recordar que en el curso de Física se mencionaron otros dos medios de medir alturas, uno valiéndose del barómetro, y otro del termómetro hipsométrico de Regnault por la temperatura de ebullición del agua.

LECCION 27.

NIVELES DE ERTEL Y DE WATKING:—USO COMO NIVEL DEL
TEODOLITO DE TROUGHTON, Y NIVEL DE REFLEXION.

Muchas son las modificaciones que se han introducido en la disposicion del nivel de agua para hacerle mas propio para sus usos, dando dichas modificaciones origen á otros tantos aparatos, cuya descripcion seria casi imposible y sobre todo nos haría salir de los límites que en este tratado nos hemos impuesto.

Nos ceñiremos pues á explicar algunos, cuyos modelos hemos usado y tenemos á la vista, dejando al buen juicio del que tenga que operar con otro diferente, el conocer á simple vista las variaciones de construccion y uso.

Nivel eclimetro de Ertel.—Es el representado en la fig. 19 (lám. 14). Está sostenido por tres piés *a*, atravesado cada uno de ellos en su extremo por un tornillo *t*. En la parte central é inferior á la pequeña plataforma *H* que por su reunion forman los tres brazos existe una argolla *b*, destinada á unir al trípode el aparato por medio de un gancho *c* que entra en ella, y que es el estre-

::

mo de una varilla cd , solicitada hácia la parte inferior por un muelle en espiral que está contenido en un cilindro, apoyando en el extremo el saliente d . Debajo de este hay un boton f que lleva en su parte inferior un gancho, destinado á sostener el hilo de la plomada g que sirve para verificar el punto de estacion. Para que las puntas de los tornillos t , no deformen la madera de la plataforma del trípode, hay tres tejuelos n de metal en donde apoyan las expresadas puntas.

Del centro de la plataforma H se eleva un pivote que sirve de eje de giro á toda la parte superior del aparato. Un collar s' rodea al eje, apoyando sobre él la punta de un tornillo de presion s' que sirve para detener los movimientos rápidos de todo el aparato. Despues de apretado el s' se pueden comunicar movimientos lentos, por medio del tornillo de coincidencia p que tiene su tuerca en una orejeta del collar s' , y apoya su punta en un saliente qr , proveniente del collar m , cuyo saliente qr es empujado en opuesta direccion por una barreta apretada por un muelle en espiral contenido dentro de un cilindro m' .

Al collar m está invariablemente unido el sosten s , en cuya parte superior hay una pieza ahorquillada G , que lleva los coginetes en donde giran los muñones o de una media caña α destinada á recibir el anteojo astronómico Y . Sujetan á este anteojo sobre la media caña, unas sobre-muñoneras α cuya mitad superior, giratoria alrededor de unas charnelas, se sujeta por medio de clavijas, teniendo las indicadas muñoneras un pequeño rebajo en donde se introducen, quedando sujetos, los salientes

de los apoyos de un nivel ϵ , que se coloca en la parte superior del anteojo. Este nivel es rectificable por un tornillo γ que tiene en uno de sus extremos. Los collares de la media caña que sostienen el anteojo, y sus sobre-muñoneras, están perfectamente dispuestos para que abracen la superficie exterior del tubo permitiéndole girar sobre su eje de figura.

Con el objeto de que el nivel pueda también servir de eclímetro, lleva el aparato montado en el extremo de su eje o de rotación de la media caña, un sector metálico **AB**, cuyo arco, cubierto de cinta de plata contiene dos graduaciones en sentido inverso, partiendo de un cero colocado en la parte media. Para aumentar la apreciación existe un nonio **R** fijo al sosten s , que hemos representado en la parte adicional de la figura, y con el objeto de volverle á su posición, cuando por cualquier causa se hubiese separado de ella, posee pequeños movimientos laterales, comunicados por los pequeños tornillos de rectificación **T**.

En el extremo del otro muñon vá sujeta al eje una barreta **FE**. Para proporcionar al arco eclímetro movimientos rápidos y lentos, existen un tornillo de presión z , que aprieta contra el eje un collar, aumentando de este modo el rozamiento, y el de coincidencia h que empuja á la barreta **FE** fija al eje, siendo apretada dicha barreta en opuesto sentido por medio de una varilla de muelle k de forma igual á la colocada en m .

Antes de usar este aparato, debemos someterle á las siguientes verificaciones:

1.^a *Coincidencia del eje óptico con el de figura.*—Se hace como varias veces hemos dicho, observando un punto lejano, y dando vuelta al anteojo dentro de sus collares hasta que cada punto haya girado 180° , debiendo entonces estar la visual dirigida tambien al punto observado. Caso de no ser así, se marcan los dos puntos en una mira, y colocando despues la tablilla en el intermedio de los dos, se lleva á este la visual por los tornillos de la retícula.

2.^a *Ya colocado el eje óptico en su verdadera posicion por la correccion anterior, tiene que ser paralelo al nivel.*— Como este apoya en el anteojo, en direccion de una de sus generatrices, se efectuará la verificacion como en los niveles ordinarios por giros de 180° , y la correccion mitad por el tornillo γ de rectificacion del nivel, y mitad por el de coincidencia h de la barreta.

3.^a *Verticalidad del eje del instrumento.*—Conseguida la horizontalidad de una línea por la rectificacion anterior, que determina con el eje un plano vertical, se obtiene otra por un giro de 90° , llevando la burbuja á sus referencias por el tercer tornillo del pié, quedando así determinado por ella y el eje otro plano vertical, y en esta disposicion dicho eje por ser interseccion de dos planos verticales.

4.^a *Vertical ya el eje, y puesta la burbuja entre sus referencias, los ceros de nonio y limbo deben coincidir.*— Si esto no se efectúa, se obliga al cero del nonio á buscar el del limbo, por medio de sus tornillos de rectificacion T.

5.^a *Una cerda de la retícula debe ser horizontal.*— Suele estar esta retícula formada por cuatro hilos, como indica la fig. 20 (lám. 14), uno de ellos en dirección de un diámetro, y los otros tres perpendiculares á él, dividiéndole en cuatro partes iguales. Para colocar una de ellas horizontal, supuestas hechas las anteriores verificaciones, no hay mas que observar un objeto lejano, y ver si en un giro horizontal se sale del hilo dicho punto, y si así no sucede, una pequeña rotacion del tubo que contiene la retícula bastará para conseguirlo.

Colocado el nivel con su burbuja horizontal, sirve como el ordinario de aire para dirigir visuales horizontales, proporcionando además el eclímetro la apreciación de ángulos de altura, sin que haya necesidad de fijarse para el modo de medirlos en distinguir á los de ascension de los de depresion, pues solo se diferenciarán los resultados, por el lado del cero de la graduacion en que se cuenten.

La facilidad del giro alrededor del eje vertical hace que sea muy apropósito este aparato para la nivelacion en contorno, y tanto para esta como para la ordinaria es de suma utilidad la colocacion horizontal de una cerda.

El limbo está graduado de 30' en 30' y su nonio comprende 29 divisiones de las citadas, las que se reparten en 30 apreciando por consiguiente el aparato de 1 en 1'.

Nivel y eclímetro del teodolito de Troughton.

—Para medir ángulos de altura y nivelar con este aparato, que dejamos descrito en la leccion 7.^a, además de

las verificaciones y correcciones que habia que efectuar para la medida de los ángulos horizontales, debemos hacer las siguientes:

1.^a *Paralelismo entre el anteojo y el nivel á él unido.*—Como los soportes de este nivel apoyan en una de las generatrices del cilindro que forma la superficie exterior del anteojo, y el eje óptico de este coincide con el de figura, estamos en el caso de la 2.^a verificación del nivel de Ertel que acabamos de explicar, debiendo seguir ahora igual procedimiento.

2.^a *Los ceros del limbo eclímetro y del nonio deben coincidir, cuando el nivel unido al anteojo marque la horizontalidad.*—Concluida la corrección anterior debe quedar la burbuja del nivel entre sus referencias, y efectuada dicha coincidencia de ceros. Si así no sucede, como el nonio no tiene corrección, habrá que restar de los valores que se encuentren al medir los ángulos de altura, el del ángulo origen, que nos será indicado por el cero de dicho nonio al marcar el nivel la horizontalidad.

Como el plano del limbo eclímetro es perpendicular por construcción á su eje de rotación, y este es paralelo á los limbos horizontales, si estando rectificado el teodolito conseguimos esta horizontalidad por medio de los tornillos del pié, quedará ya aquel limbo vertical y en disposición de medir los ángulos de igual posición.

El uso de este aparato como nivel no puede ofrecer dificultad, desde el momento que el anteojo proporciona una visual horizontal.

Por medio de este aparato pueden obtenerse las dis-

tancias reducidas al horizonte, observando las graduaciones de la parte posterior del limbo zenital.

Digimos en el lugar correspondiente, que en dicha graduacion estaban indicadas las diferencias entre distancias de 100^m y su proyeccion, estando las distancias medidas formando con la horizontal los ángulos indicados por las divisiones que correspondian en la cara anterior del limbo.

Supóngase que queremos encontrar el valor de la proyeccion horizontal de la línea AB, cuya longitud es de 27^m, y su inclinacion sobre el horizonte 20° figura 21 (lámina 14). Consideremos que se ha prolongado la AB hasta un punto C en donde se verifique AC=100^m, resultándonos por los triángulos rectángulos semejantes

$$ABB' \text{ y } ACC', \frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'} \text{ y de aquí}$$

$$\frac{AC}{AC - AC'} = \frac{AB}{AB - AB'}$$

El valor de AC y el de AB son conocidos, y la cara posterior del limbo en el punto correspondiente al grado 20 de la anterior, lleva el número *n* correspondiente á la diferencia AC-AC', deduciéndose de todo:

$$27^m - AB' = \frac{27^m \times n}{100}; \text{ y } AB' = 27^m - \frac{27^m \times n}{100}, \text{ cuyo}$$

valor no es muy exacto por carecer de nonio la graduacion posterior.

Nivel de Watking.—Sostiene al aparato que va-

mos á describir un trípode inglés, en cuya meseta *mm* figura 22 (lámina 14) apoyan los conos extremos de los tornillos *t* de la plataforma *ab*, introduciéndose en los rebajos que aquella tiene, y quedando sujetos por la plancha metálica susceptible de pequeño giro, del mismo modo que se describió en el teodolito de Troughton. Del centro de la plataforma se eleva un pivote de acero que sirve de eje de giro á toda la parte superior del aparato, y que se introduce en el hueco de la pieza F. Está esta rebajada por su parte inferior para que pueda abrazarla un collar *e*. Con el objeto de poder dar al aparato movimientos rápidos y lentos existen el tornillo D de presión, que oprimiendo las orejetas del collar *e*, lo une invariablemente á la pieza F, y el de coincidencia *c*, que teniendo su esferilla en uno de los pies de la plataforma, tiene su tuerca en el mismo collar *e*. Apretado el D, y dando vueltas al *c*, es arrastrado lentamente en uno ú otro sentido el *e* y con él todo lo restante del aparato. Perpendicularmente á la dirección del eje de la pieza F por construcción, existe una regla GH de bastante ancho, en cuya parte central, y en un rebajo practicado en su masa, hay una brújula de declinación N. Apoyan también en la GH y en sus dos extremos, los soportes *h, h*, terminados en su parte superior por unos coginetes con sus correspondientes sobremuñoneras giratorias á charnela, destinados á contener y sujetar un anteojo astronómico S, cuya superficie exterior queda exactamente ajustada á los citados collares, pudiendo sin embargo girar dentro de ellos, alrededor de su eje de figura. Am-

Los soportes *h*, pueden variar su altura en pequeñas cantidades, por medio de los tornillos de rectificacion *y*. Siempre apoyando sus soportes sobre la regla *H G*, y teniendo uno de ellos *L* rectificable, existe un nivel de aire *M*. Lleva el anteojo dos botones *R*, *R'* destinados á poner en movimiento el ocular y el objetivo respectivamente, y su retícula que tiene la forma indicada en la figura 23 (lámina 14), es rectificable por medio de los tornillos *z*.

Deben hacerse en este aparato las rectificaciones expresadas á continuacion:

1.^a *Correccion del nivel y verticalidad del eje*: cuya verificacion y correccion se efectúa como tantas veces hemos explicado.

2.^a *El eje óptico debe coincidir con el de figura del anteojo*.—Se hace por observacion de un punto lejano y giro sobre los coginetes como se ha explicado tambien, teniendo solo presente que ahora se dirigen las visuales por el punto medio de la parte de cerda vertical comprendida entre las dos horizontales; la correccion se hace por los tornillos de la retícula.

3.^a *Igualdad de los soportes del anteojo*.—Conocido es tambien el modo de hacer esta verificacion, que se reduce á la observacion de un punto lejano, hacer girar á todo el sistema 180°, y volver el anteojo en sus collares, debiendo resultar en la visual el punto antes observado. Si no sucede esto, se hace la correccion fijando los puntos extremos de cada visual á la misma distancia, marcando por un jalón el punto medio de la línea que

los une, y por movimientos de los tornillos de rectificacion de los soportes se conduce la visual á este punto.

Y 4.^a *Horizontalidad de las dos cerdas que sirven para las lecturas.*—Se hace esta verificacion, como en otros aparatos queda expresado, observando por cada una de ellas un punto lejano, y dando giros á todo el sistema, habiendo ya efectuado las rectificaciones anteriores, alrededor de su eje vertical, no debiendo salirse los puntos observados de las cerdas, en todo el movimiento; si así no sucediese se llevarian las cerdas á la deseada posicion, por medio de una pequeña rotacion del tubo que contiene la retícula.

Ofrece ventaja el uso de este aparato, primeramente como nivel de aire de anteojo, para lo cual reúne la sencillez á la perfeccion, permitiéndole además su brújula medir ángulos horizontales como se dijo en la nivelante, sirviendo tambien para la nivelacion en contorno.

La simple inspeccion de los tres aparatos que se acaban de describir, bastan en nuestro concepto para fijar las ideas sobre las modificaciones, adiciones y mejoras que el nivel de aire ha podido experimentar. Cuando se trate de usar uno desconocido, lo que debe hacerse es observar la naturaleza de sus apoyos, movimientos de que es susceptible, partes rectificables, y verificaciones que en él se deban hacer, toda vez que el uso de todos es igual, difiriendo solo en los resultados, segun la rapidez con que se obtengan, su exactitud, y la distancia mayor ó menor á que puede operarse.

Nivel de reflexion de Burel.—Como ya dijimos, está fundado en que un objeto y su imagen producida por reflexion en un espejo plano, están en una misma perpendicular á la superficie de este espejo.

Todo medio de suspension que coloque al espejo vertical lo convertirá en un nivel, pues pondrá á disposicion del observador una visual horizontal, que es la línea antes mencionada.

El primer nivel de reflexion es debido á *Burel*. Se compone de un espejo plano *ab* fig. 24 (lám. 14) sostenido en un pequeño marco *cd*. Este tiene en su parte superior una pequeña varilla *r* terminada en un gancho, que se introduce en una anilla fija en la base superior de la envuelta cilíndrica *EF* que rodea todo el aparato, hallándose suprimida la mitad de la superficie lateral á la altura del espejo para permitir la observacion.

Esta envuelta, está destinada á evitar al marco las oscilaciones que el viento le pudiera imprimir. El peso de este marco por sí solo, coloca al espejo vertical, existiendo para el caso en que esto no sucediese un tornillo de rectificacion *n* que cambia su posicion relativa sobre dicho marco.

El espejo no está azogado en toda la extension de una sola cara, sinó que esta está dividido en sentido de su altura en dos partes iguales, una sola de las cuales es brillante, sucediendo lo mismo en la cara posterior, de modo que á cada mitad brillante, corresponde una oscura en la cara opuesta. El marco y el espejo pueden tener un giro de 180° alrededor de su eje de figura vertical,

producido y limitado por la forma de la envuelta. Las mitades no brillantes están pintadas una de cada color, para facilitar su distincion.

La parte inferior del aparato la constituye un mango hueco G, que se introduce en el pivote de un chuzo el cual en el momento de la observacion se coloca próximamente vertical.

Para nivelar con este aparato se sostiene con la mano ó se introduce en el chuzo que se fija en el terreno, y una vez en reposo el espejo, se mira en él la imágen del ojo, que se procura venga á parar á la mitad del borde vertical, y directamente la *mira* colocada en el punto del terreno que se quiere nivelar, siendo la division que coincide con la imágen del ojo, la correspondiente á la lectura, por estar aquel, su imágen y dicha division en una misma línea horizontal. En algunos de estos niveles, estaba marcada por un trazo la mitad del borde vertical, y aunque es verdad que así se fijan mas las visuales, no es de necesidad absoluta, pues las pequeñas dimensiones del aparato al par que dejan conocer con bastante exactitud dicho punto medio, hacen insignificantes las diferencias de altura á que las visuales horizontales, verdadera y falsa se pudiesen encontrar.

Verificacion y correccion.—Se coloca el aparato delante de una pared bien alisada AB, ó de una regla de graduacion clara y bien hecha, y se dirige por el espejo la visual.

Suponamos fig. 25 (lám. 14) que este espejo esté

inclinado, como indica la posición MN. La visual que se dirija cortará á la AB en un punto tal como \bar{m} . Imprimamos el giro de 180° de que el marco es susceptible, y entonces, quedando el espejo en la posición M'N' la nueva visual irá á parar á \bar{m}' , formando las dos un ángulo $\bar{m}c\bar{m}'$ doble del de error. Luego, si marcamos el punto medio o de la distancia $\bar{m}\bar{m}'$, y por movimientos del tornillo de rectificación del marco llevamos la visual á este punto, el nivel quedará colocado según $\bar{M}\bar{N}$, en disposición exactamente vertical. Si después del giro se viese el mismo punto que se observó antes de él, no sería la corrección necesaria.

Modificación de Leblanc.—Mr. Leblanc, ha introducido algunas variaciones en la forma del aparato de Burel, con el objeto de hacer más fácil la consecución de la verticalidad del espejo. Este está fijo invariablemente á su marco, sin tener ningún tornillo de rectificación fig. 26 (lám. 14). De la base inferior de dicho marco y perpendicularmente á su dirección, sale una varilla cilíndrica, que sirve de eje de rotación á un cilindro r , truncado por su parte superior. Si damos á este cilindro un giro, el centro de gravedad del sistema variará de lugar, y el espejo de inclinación, con lo cual podremos siempre conseguir la conveniente. Atraviesa el cilindro r un tornillo s , que le sujeta á la varilla, cuando se ha colocado el espejo vertical. En vez de estar sujeto el marco de este en la base superior de la envuelta, gira alrededor de un eje C, perpendicular á la hk , que tiene sus coginetes en la misma envuelta, que rodea todo el aparato.

El pequeño volúmen de este y el no necesitar sosten fijo, le hace muy á propósito para los reconocimientos militares.

LECCION 28.

CLISIMETROS.

Indicamos en una de las lecciones anteriores, que se podia encontrar la diferencia de nivel que entre dos puntos existia, por medio de aparatos llamados *clisímetros*, que proporcionaban visuales de inclinacion conocida sobre la horizontal.

Estos aparatos llamados tambien *niveles de pendientes*, porque están destinados á medirlas, ván á ser objeto de esta leccion.

Llámase *pendiente por méetro* á la tangente al ángulo de su inclinacion en el círculo de radio unidad, y toma el nombre de *pendiente absoluta*, la tangente al mismo ángulo, pero tomada en el círculo cuyo radio es la distancia horizontal que media entre la estacion y el punto observado.

La relacion que existe entre la pendiente absoluta y la pendiente por metro es dicha distancia horizontal.

La absoluta no es mas que la diferencia de nivel.

El aparato tipo de los clisímetros, es el llamado *nivel de pendientes de Chezy*, de cuya descripción y empleo nos vamos á ocupar.

Se compone de una regla CD fig. 1.^a (lám. 45) sobre la que está apoyado un nivel α con sus dos sostenes rectificables por medio de los tornillos *t, t*. En los extremos de dicha regla, se elevan las dos pínulas AD y BC de desigual altura.

La mayor BC es un marco BC', interiormente al cual resbala á corredera una pieza rectangular H. Se comunican á esta movimientos rápidos, por medio del boton *h* situado en su parte posterior. Cuando se quiera que los tenga lentos, se aprieta por medio del tornillo F una brida que estando unida á la pieza, abraza un cilindro G, en cuyo interior existe la tuerca del tornillo sin fin α ϵ , que tiene sus extremos fijos en los lados menores del marco, en donde hay unos coginetes sobre los cuales únicamente puede girar. Apretado el tornillo F, forma cuerpo la pieza H con el cilindro G, y aquella participa del movimiento lento de este, producido por el boton E de la parte inferior de la pínula. En la pieza H ván practicados un orificio tronco-cónico que sirve de ocular, y otro mayor rectangular, cuyo punto medio está marcado por el cruce de dos cerdas, que tiene que servir de objetivo. Este punto de encuentro de las cerdas, debe hallarse á la misma altura sobre la regla DC que el orificio tronco-cónico.

La pínula menor, se compone tambien de un marco AD, por cuyos lados verticales puede resbalar la pieza

rectangular K , pero á causa de la pequeñez del marco, el movimiento es de poca amplitud.

Se ve obligada á tomarle la pieza K , cuando se aprieta el tornillo de rectificacion s , habiendo además un muelle r , que hace emprender el de contrario sentido, en cuanto el citado tornillo se afloja.

Lleva la pieza de que nos ocupamos, orificios análogos á los de la otra pínula, correspondiendo el cónico de esta al rectangular de aquella y vice versa.

Este aparato que como por su descripción se vé no es otra cosa que un nivel de aire con pínulas, con la modificación necesaria para poder inclinar mas ó menos el rayo visual, suele estar montado en una plataforma de tres tornillos verticales, poseyendo giro alrededor del eje también vertical, que se detiene á voluntad por el tornillo de presión colocado en z .

Uno de los lados mayores del marco de la pínula grande, está dividido; y un estilete ó un trazo colocado ó marcado sobre la pieza móvil, hace conocer la inclinación del rayo visual. Para efectuar la división, se hace que el $o\gamma$ dirigido desde la abertura cónica de una pínula al punto donde se cruzan las cerdas de la otra, sea horizontal cuando la burbuja esté entre sus referencias, en cuyo caso el estilete ó trazo debe marcar cero en la graduación del marco. Si se desea que la visual indique sobre el horizonte, una inclinación ó pendiente i por metro, la cantidad que habrá que elevar el punto de cruce de las cerdas de H , se obtendrá multiplicando la pendiente por metro dada i , por la distancia que entre las dos

::

pínulas media, en virtud de la propiedad del triángulo rectángulo y por lo que sobre la relacion entre pendientes absolutas y por metro tenemos espresado.

Siendo por ejemplo $0\gamma=0^m,3$ é $i=0^m,20$, el producto de estos números es $0^m,06$, que corresponde á la distancia γ T elevada desde el cero al sitio donde la union de las cerdas debe quedar.

Si la colocacion en este punto nos marca una inclinacion en la visual de $0^m,2$, dividiendo el intévalo entre o y T en 200 partes iguales, cada una de las divisiones corresponderá á $0^m,001$ de inclinacion, pudiendo indicar tambien estas divisiones hácia la parte superior de T.

El gran número de ellas es espacio tan pequeño, haría que fuesen ilegibles, para evitar lo cual se ha adoptado el sistema de indicar un número menor, 40 por ejemplo, apreciando cada una $0^m,005$, y colocar en el canto de la pieza móvil un nonio, que conteniendo cuatro de las partes marcadas esté dividido en cinco, consiguiéndose por este medio la misma apreciacion de milímetro en milímetro. El cero del nonio debe estar á la misma altura sobre la regla que el punto de cruce de las cerdas, ó lo que es lo mismo debe corresponder á la prolongacion de la cerda horizontal.

Antes de usar el nivel de pendientes, es preciso asegurarse de su buena disposicion.

Consiste esta en la horizontalidad perfecta de la visual 0γ cuando el cero del nonio coincida con el de la regla y la burbuja del nivel esté entre sus referencias. Para comprobarlo, se lleva la burbuja á esta posicion por

movimientos de los tornillos del pié, y por los comunicados á la pieza H se hace coincidir su cero con el de la regla. Ya en este estado, se dirige por la pínula pequeña como ocular y por la grande como objetivo, una visual á un punto muy lejano, y dando en seguida un giro de 180° de modo que cambien de lugar las pínulas y llevando otra vez la burbuja á sus referencias por los tornillos del pié debe observarse el mismo punto. Si esto no sucediera, se coloca una mira á larga distancia, se observan sobre ella los dos puntos, y marcando el medio entre ellos, se lleva allí la visual por el movimiento del tornillo s de rectificacion de la alidada menor.

Nótese que la altura de la visual puede cambiar un poco al efectuar el giro, cuando el eje alrededor del cual se imprime no es vertical, por lo que se debe procurar colocar la mira á la mayor distancia posible, á fin de que el ángulo que tiene su vértice en el centro del ocular y que termina sus lados en los extremos de la diferencia de altura sea despreciable.

Si se desea usar el aparato que acabamos de describir en la medicion de una pendiente formada por la union de dos puntos del terreno tales como A y B figura 2 (lám. 15) se coloca la estacion en C de tal modo que la vertical de la pínula menor tenga su extremo en uno de los puntos dados A. En el otro B se coloca verticalmente una mira, cuya tablilla *b* diste del pié, una cantidad igual á la que separa el cruce *a* de las cerdas del terreno, en cuya disposicion se levanta la corredera de la pinula mayor hasta que se vea coincidir la cruz de

sus hilos con la tablilla de la mira, y entonces el número que lleve el punto del marco correspondiente al cero del nonio será la pendiente pedida, puesto que siendo iguales y paralelas las líneas aA y bB , también serán iguales y de la misma pendiente las AB , y ab .

Si el punto de la estacion fuese el mas alto, en nada varia el procedimiento si no en servir de ocular la pínula mayor, cuya corredera se baja ó sube lo conveniente, colocando siempre en la vertical de la estacion la pínula pequeña como indica la fig. 3.^a (lám. 15).

Formaremos idea de las ventajas que este clisímetro proporciona, con solo considerar que si hubiésemos usado un nivel ordinario, se hubiera tenido que estacionar en un punto intermedio, tomar las alturas de nivel de los dos dados, hallar su diferencia y dividirla por la distancia horizontal que entre los citados dos puntos existiese, siendo el cociente la pendiente por metro deseada.

En lo que mas se evidencia la utilidad del aparato es en el trazado sobre el terreno de líneas de pendiente dada. Para efectuar dicho trazado, se empieza por elevar la corredera de la pínula mayor hasta que el cero de su nonio marque dicha pendiente.

Se hace estacion en el punto extremo del trazado, y se dá como antes á la mira la longitud igual á la vertical del ocular situado en la pequeña pínula, y se dirige la marcha del porta-mira que sube ó baja por la pendiente del terreno hasta tanto que entre la tablilla en la visual marcada, en cuyo caso se indica el punto con un piquete. La línea que una á este con el de estacion será

paralela á la visual dirigida, teniendo en consecuencia la pendiente marcada. Se hace estacion ahora en el punto indicado en el terreno por el piquete, y se determina otro por el mismo procedimiento, siguiendo así de punto en punto hasta concluir el trazado que se desea.

Debemos advertir que en cada operacion resultará mas de un punto que satisfaga á las condiciones de la cuestion, eligiendo siempre el mas conveniente para las operaciones que se emprendan. El mismo trazado fundamental asi marcado, suele tambien modificarse segun las necesidades, como sucede por ejemplo en el caso de tenerse determinados los extremos del trazado, cuyo objeto es la construccion de un camino que deba dirigirse á una posicion avanzada desde la principal, y que por su pendiente tenga que permitir el paso á los carruajes de Artillería, y á los que transporten los efectos que para el mejor servicio puedan ser necesarios.

Es muy útil este aparato para marcar canales de conduccion de aguas, bien sea para el aprovechamiento de una plaza, para llenar sus fosos en caso dado, ó para mover una rueda etc.

Con regular práctica, se hacen con el instrumento que nos ocupa las operaciones con gran rapidéz y bastante exactitud.

Tambien sirve el nivel de pendientes para medir en cada caso las alturas de los desmontes ó de los terraplenes que se tienen que hacer, al efectuar sobre el terreno la construccion de obras cuyas directrices del proyecto tengan pendientes dadas.

Se coloca el aparato en estacion en uno de los puntos del trazado que sea comun al terreno y al proyecto, y dando á la corredera en la pínula mayor la altura correspondiente á la pendiente dada, se traslada el porta-mira á la vertical de otro punto del trazado, habiendo antes dado á la tablilla la altura á que el ocular se encuentre con respecto al terreno.

Si en la posicion en que el porta-mira se ha colocado coincide la línea divisoria de los colores de su tablilla con la visual dirigida por el aparato, el punto en que apoya su talon corresponderá tambien al terreno y al proyecto, cosa que rara vez tendrá lugar.

Si resultase la tablilla mas alta que la visual, será señal de la necesidad de hacer desmonte, y para medir su altura, se practica un hoyo en el terreno en el que poco á poco se vá introduciendo la mira hasta tanto que la línea media de la tablilla coincida con la visual, en cuyo caso el número de la division que enrase con el terreno nos indicará la altura del desmonte.

En vez de practicar el hoyo en el terreno, se puede hacer tambien observando la division de la mira que coincida con la visual, y restando su número del de colocacion de la tablilla, la diferencia será la altura del desmonte.

Obsérvese que en este caso se necesita una mira graduada, mientras que en el otro medio y en todas las demás operaciones que con el nivel de pendientes hemos indicado, no hacen falta mas que una regla vertical con su tablilla correspondiente, pero sin graduacion alguna.

Si al dirigir la visual á la mira en el segundo punto, quedase la tablilla por debajo de aquella, esto nos indicaría la necesidad de terraplenar, y para medir la altura del terraplen, se iría elevando la mira sobre un sosten cualquiera, hasta conseguir la coincidencia de la tablilla, marcándonos la altura del dicho sosten la del terraplen necesario. Puede efectuarse tambien sin elevar la mira esta operacion, notando la division en que la visual encuentra á la graduada, y restando de su número la distancia que media entre la tablilla y el talon, obtenemos el dato apetecido.

Cuando sobre un plano, representacion de una cierta extension de terreno, se quiera trazar un camino de direccion y pendiente marcada ú otra obra cualquiera que cumpla con estas condiciones, dando por supuesto que las líneas del plano estén convenientemente acotadas, se acostumbra indicar las líneas del proyecto con tinta roja, acotando tambien sus extremos, y cambios de direccion con arreglo á las condiciones dadas.

Los puntos en que las líneas del proyecto cortan á las del terreno ó las líneas segun las cuales se efectúa el encuentro de los planos de aquel con los de este, toman el nombre de *puntos y líneas de paso*, y se las suele marcar con tinta azul. Estos puntos y líneas tienen gran importancia en las construcciones, debiendo cuidar de indicar siempre sus cotas.

Llámanse *cotas rojas* las porciones de vertical interceptadas entre el terreno y el proyecto.

En las operaciones en que las pendientes deben fi-

gurar, pueden presentarse las cuestiones siguientes:

1.º *Dada la pendiente por metro de una cierta línea, y la distancia horizontal que media entre sus puntos extremos, hallar la pendiente absoluta.*

Por lo que antes dijimos, siendo y la pendiente absoluta y x la distancia, y representando por α el ángulo de inclinación tendremos $y = x \operatorname{tang.} \alpha$, siendo $\operatorname{tang.} \alpha$ la pendiente por metro conocida.

2.º *Recíprocamente, conociendo la distancia horizontal de los extremos, y la cota absoluta, se quiere determinar la pendiente por metro.* En la igualdad anterior

obtenemos $\operatorname{tang.} \alpha = \frac{y}{x}$, que nos resuelve la cuestión.

3.º *Se conoce la dimensión del trozo de vertical comprendida entre una línea del proyecto y otra del terreno, ó sea una cota roja, lo mismo que la pendiente por metro de las expresadas líneas, y se desea determinar el valor que la cota roja tendrá á una distancia conocida de la primera.*

Representemos fig. 4.ª (lám. 15) por P la pendiente absoluta de la línea AB del proyecto para una distancia $NN' = x$, por p su pendiente por metro, y por c la cota roja AC . Sean también T la pendiente absoluta de CD y t su pendiente por metro.

Tomando el punto C del terreno como origen de distancias, la ecuación de pendiente relativa á CD será $y = tx$, y la del proyecto $y' = px + c$; de donde

$BD = y' - y = (p - t)x + c = P - T + c$ puesto que se tiene $P = px$, y $T = tx$.

Lo que nos dice «*que conocida una cota roja, comprendida entre una línea del terreno representado y otra de un proyecto establecido, se puede conocer la cota roja correspondiente á las mismas líneas, á una distancia determinada de la primera, restando las pendientes absolutas de ambas líneas correspondientes á la misma distancia, y aumentando á la diferencia la cota roja que como dato se nos ha dado.*»

El signo de $(p - t)x + c$ nos indicará: si es positivo que el punto del proyecto está elevado sobre el terreno, y lo contrario si es negativo.

4.^a Determinar con los datos del caso anterior la cota del punto de paso.

La condicion de este punto es $y = y'$, de donde

$x = NK = \frac{c}{t - p}$; y por medio de la igualdad $y = tx$ nos

resulta $y = \frac{tc}{t - p}$, resultándonos tambien

$OK = NC - y = \text{cota del punto C con respecto á NN}' - \frac{tc}{t - p}$.

Los triángulos semejantes AOC y ODB, nos indican que si las cotas rojas extremas son conocidas, se puede determinar tambien fácilmente el punto de paso, pues no hay mas que dividir á NN' en dos partes, cuya relacion sea igual á la de las cotas rojas dadas para obtener el punto K extremo de la vertical de O.

::

En cada caso particular se puede encontrar este punto O sin recurrir á la fórmula general, con solo la comparacion directa de los triángulos semejantes.

Nivel de pendientes de perpendicular.—El clisímetro mas sencillo, es un nivel de perpendicular, en cuyo arco ó regla transversal están indicadas las pendientes. La division con la cual venga á coincidir el hilo de su plomada, cuando los extremos de sus brazos apoyen en una línea, nos indicará la pendiente de esta, por una sola observacion y directamente, si el cero se encuentra en la línea de fé del nivel, ó por diferencia entre la lectura hecha y la que corresponda á la línea de fé, caso de que aquella condicion no se cumpliera.

Los ángulos cuya pendiente se lea, serán iguales á los formados por la línea de apoyo del nivel con la horizontal, por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Se marcan dos graduaciones, á uno y otro lado de la línea de fé, para evitar el cambio de posicion del nivel, segun se midan pendientes ascendentes ó descendentes, siendo señal de lo primero el que el hilo corte á algun punto de la mitad de la graduacion total mas próxima al observador, y de lo segundo el que la corte en alguno de la mas lejana.

Este clisímetro, que á causa de su modo de ser, no puede tener nonio, no se usa en las operaciones que requieren mucha exactitud, y en las que no exigen tanta, se le emplea solo para conocer las pendientes de líneas dadas, pero no para la operacion inversa, de marcar líneas de pendiente conocida.

Se han construido elisímetros, cuyo perpendicular en vez de ser un hilo con su peso, es una varilla giratoria al rededor de un eje horizontal que está en el vértice, cuya aguja lleva cerca de su punta un pequeño peso, que la obliga á marcar la verticalidad.

La punta de la aguja se mueve sobre un arco graduado, que indica los ángulos de inclinacion de la visual dirigida por dos pínulas que lleva el instrumento en los extremos de la regla en que apoya sus brazos, sobre la horizontal.

Para preservar á la aguja de las desviaciones que por causa del viento pueda experimentar, suele estar encerrada la porcion del nivel, desde el vértice hasta la parte inferior del arco, por una caja con un cristal en su parte anterior para permitir las observaciones.

Cuando las divisiones del instrumento sean correspondientes á valores angulares, no dá este á conocer inmediatamente las pendientes, las que se pueden calcular por la fórmula $y = x \text{ tang. } \alpha$ valiéndose de la tabla de tangentes.

Otra modificacion del nivel de albañil, es la representada en la fig. 5.^a (lám. 15.)

Se sustituye al perpendicular una varilla móvil alrededor del punto B como centro. En su extremo lleva un nonio H, que corre sobre un arco graduado, incrustado en la regla transversal DE. La varilla BH, lleva tambien un nivel, perpendicular á su longitud, el cual se arregla de manera, que su burbuja esté en las referencias cuando los piés A y C estén en una misma horizontal, siendo

necesario al mismo tiempo que el cero del nonio y el punto medio del arco coincidan, haciéndose ya las lecturas como en el nivel de albañil ordinario del cual no difiere si no en algunos detalles de la forma y en su mayor apreciación.

TOPOGRAFÍA IRREGULAR.

LECCION 29.

RECONOCIMIENTOS MILITARES.

GENERALIDADES É INSTRUMENTOS QUE PARA ELLOS SE USAN.

Todos los procedimientos topográficos explicados en las anteriores lecciones tienen por origen la eleccion de un cánvas fundamental, de cuyo exacto trazado depende la perfeccion de las operaciones siguientes y de la representacion general.

Debian cumplir los puntos vértices del cánvas elegido con ciertas condiciones que á su tiempo se expresaron, y para escoger sobre el terreno los adecuados, al objeto, era necesario hacer antes un estudio preliminar á la vista de aquel.

En los levantamientos que requieran gran precision y que se efectúan en circunstancias ordinarias, dicho reconocimiento preliminar se hace con toda la detencion necesaria, no sucediendo lo mismo, cuando por algun

motivo particular es indispensable dar á la ligera una idea del terreno.

Entonces la rapidez de los procedimientos que deben seguirse, hace imposible la precision de los resultados.

En el caso que acabamos de citar se hallan la generalidad de los *reconocimientos militares*, que son los que se hacen con el objeto de estudiar y representar el terreno en que un ejército tiene que seguir sus operaciones, para preparar á estas el mejor éxito.

Cuando el tiempo, el lugar y los elementos de que se disponga permitan seguir paso á paso los procedimientos topográficos, las anteriores lecciones indican ya el modo de llevar á buen término la operacion.

Pero no sucede así generalmente, y el oficial encargado de tal comision, con corto tiempo para cumplirla, privado de aparatos precisos, y sin ningun elemento de estudio, tiene que recurrir á las ideas generales que sobre la cuestion tenga.

Como en toda ciencia aplicada, la práctica adquirida en trabajos análogos, es el mejor auxiliar que se puede encontrar, por lo cual es de suma conveniencia el que todo oficial se ejercite en las mediciones de distancias á ojo, y levantamientos de terrenos de poca extension, en donde suponga proyectada alguna operacion militar.

Dejando aparte esta cuestion agena á nuestro objeto, indicaremos que no son tan solo los conocimientos topográficos los que en tal caso tienen inmediata aplicacion, sino tambien muy principalmente los de arte militar, y

los de estadística general, sin dejar de considerar los Geográficos.

Debe comprender todo reconocimiento militar bien hecho dos partes: 1.ª Un croquis ó representación del terreno, de exactitud proporcionada á los medios de que se disponga é importancia de la operacion que se vá á emprender, y 2.ª Una memoria detallada que contenga todos los datos convenientes al objeto, y que no tengan cabida en el croquis.

En muchas ocasiones basta solo una de las partes indicadas, pudiéndose citar como ejemplos, el que el vivac de un cuerpo de ejército puede establecerse en la generalidad de los casos, con ayuda de un croquis del terreno con algunas notas marginales, y un cambio de posicion puede hacerse con el auxilio de algunas palabras escritas y aun por una ligera indicacion verbal.

Suelen tambien unirse al croquis vistas pintorescas de las posiciones principales, con el objeto de aclararlas, y evitar equivocaciones que pudieran ser de importancia, pudiéndose colocar alguna de dichas vistas: al principio de un camino que se deba seguir cuando se reunan varios en una encrucijada, en la cabeza de un puente cuando existan otros en las inmediaciones, al principio y fin de los vados, en las casas ó conventos susceptibles de buena defensa que se encuentren en las orillas del camino, y en los detalles que en cada caso le sugiera al oficial su buen celo, como importantes para la operacion que se va á emprender.

Vamos á ocuparnos primeramente de la formacion

del croquis, dejando para despues el hacer algunas indicaciones referentes á la redaccion de las memorias.

Escala que se emplea en los reconocimientos.— La escala que debe emplearse, debe ser suficientemente grande para que queden bien indicados todos los detalles del terreno, pero como quiera que así los errores que se pueden cometer darán lugar en el papel á grandes inexactitudes, se elige una escala media que

suele ser $\frac{1}{20000}$. En esta escala resultan las distancias

bastante pequeñas, y cuando falte la práctica es fácil se introduzca la confusion, adoptándose para este caso una

escala doble de la anterior, es decir $\frac{1}{10000}$.

Instrumentos.— Deben estos reunir las condiciones de fácil transporte, rapidez en la observacion, sencillez en la forma, y que exijan poco tiempo para estacionarse.

Para el levantamiento planimétrico explicaremos sucesivamente la *plancheta simplificada* y la *brújula de Burnier*, usándose además los por nosotros ya conocidos *brújula de Kater*, *las estadias*, *telémetros* y *estadiómetros* que hemos explicado, el *sestante de bolsillo* etc.

La nivelacion se efectúa por medio del *eclímetro de la brújula de Burnier*, *la alidada nivelante*, por este aparato simplificado, el *nivel de Burel*, el *transportador* etc.

Plancheta simplificada.— El tablero que para esta se suele emplear es una pieza AB de madera muy ligera, cuadrada y de unos 0, ^m 4 de lado fig. 6.ª (lám. 15).

En su parte media inferior lleva un rebajo, algunas veces trabajado á rosca donde se introduce el extremo de un chuzo destinado á sostenerla; otras veces se apoya la plancheta en el plano formado por las puntas de las bayonetas de un pabellon de fusiles; y en general, se le dán en cada caso por sostenes, los mas perfectos que en el momento de la observacion se pueda proporcionar el que la efectúe.

El aparato orientador de esta plancheta, lo constituye una pequeña brújula de declinacion C, encerrada en una caja cuadrada de 0,^m06 á 0,^m07 de lado, en cuyo fondo hay un círculo graduado en 360°, cuya línea 0—180° se halla paralela á uno de los lados de la caja. En el centro del círculo y perpendicularmente á su plano se eleva un pivote, apoyado en el cual gira la aguja.

La caja de la brújula se fija á la plancheta por medio de un tornillo, de modo que quede en posicion próxima á uno de los vértices del tablero, y los lados de la caja paralelos á los de aquel.

La alidada es un prisma triangular D que se apoya en una de sus caras, sirviendo la arista superior para dirigir las visuales, para dar cabeceo á las cuales, se colocan verticalmente dos agujas en los extremos de dicha arista.

Una de las inferiores sirve de línea de fé, y aun puede llevar marcada la escala.

Algunas veces, suele usarse la plancheta representada en la fig. 7.^a (lám. 15). Se compone de varias tablillas rectangulares *a, a.....*, pegadas sobre badana ó lienzo fuerte, que se pueden doblar las unas sobre las

::

otras como se indica en la misma figura. Cuando se quiera operar con ella se desdoblán las tablillas y se hacen girar sobre los pequeños pernos *d* los listones *b*, que llevan las tablillas estremas, hasta dejar los listones indicados, en la disposición que expresa la figura, en cuyo caso unos pequeños anillos fijos á las *a*, penetran en un rebajo hecho en los *b*, y se sujetan por medio de los ganchos *e*, quedando ya formado el plano.

Brújula de Burnier.—Se compone este instrumento, que es muy portátil y de uso cómodo, de una pequeña caja de latón AB cerrada, cuya forma indica la figura 8.^a (lámina 15), en cuya tapa superior y perpendicularmente al eje de simetría, se encuentran dos pínulas C y D de desigual altura, que girando alrededor de sus bases de apoyo pueden rebatirse cuando se quiera sobre la caja.

La pínula menor C es una placa metálica que lleva una ranura en sentido de su altura, que sirve de ocular.

La mayor D, consiste en un marco, cuyo hueco queda dividido en dos partes iguales también en sentido de la altura por una cerda que hace las veces de objetivo.

En la porción de pared plana y lateral H de la caja hay abierto un ventanillo en el cual se ha colocado una lente destinada á ampliar lo que á su través se mire, y en la tapa superior hay otro ventanillo rectangular E destinado á dejar paso á la luz que penetra en la caja, y para evitar las alteraciones y oscilaciones que en la parte interior de esta podría producir el viento, está cubierto con una laminilla de talco.

Del fondo de la caja, y perpendicularmente á su plano, se eleva un pivote L, sobre el cual gira una aguja MM, que lleva un limbo NN muy ligero y bien equilibrado soldado á sus extremos y participando de su movimiento. Este limbo, como ya lo indicamos en la brújula de Kater, lleva su graduacion en la superficie lateral del cilindro de poca altura que lo constituye.

El cero de esta graduacion está en la punta Sur de la aguja y en sentido contrario á aquel en que giran las de un reloj. Este modo de graduar el limbo, completamente inverso del de las brújulas ordinarias, tiene por objeto el poder comparar las observaciones hechas con el aparato de que nos ocupamos á las efectuadas con aquellas, bastando para convencerse de ello el considerar, que á la par que la graduacion es inversa, tambien el modo de observar es inverso en una y otras. Los ángulos meridianos que ahora se leen son iguales por opuestos por el vértice, á los que antes se observaban.

En el mismo plano perpendicular al fondo de la caja en que se hallan contenidas la ranura de una pínula y la cerda de otra, que es el de colimacion del aparato, é interpuesto entre el ventanillo H y el limbo NN', existe un alambre delgado G, destinado á marcarnos la lectura por su interseccion con el expresado limbo.

Para determinar con este aparato el ángulo meridiano de una recta cualquiera, se dirige en su direccion una visual por medio de las pínulas, sosteniendo el aparato por su mango F, y procurando que el fondo de la caja esté horizontal. Al mismo tiempo se observa por el ven-

tanillo H, y el número de grados del limbo que el alambre nos indique, será el valor de dicho ángulo meridiano.

Pasando ahora á los aparatos niveladores propios para la operacion que nos ocupa vamos á explicar primeramente el *eclímetro* de la brújula de Burnier.

Tomando aun en consideracion la misma fig. 8.^a (lámina 15) vemos que en ella, y perpendicular á la tapa de la caja se eleva un pivote o. Alrededor de este puede girar un limbo PQ muy ligero. Está este limbo graduado de modo, que cuando las bases de la caja estén verticales, y horizontal el plano de colimacion, corresponde al alambre el cero. A uno y otro lado parten de este dos graduaciones iguales, cada una de las cuales llega á 90°. En uno de los puntos que terminan la graduacion hay un pequeño peso, como indica la fig. 9.^a (lám. 15) destinado á convertirle siempre en el punto mas bajo del limbo, cualquiera que sea la posicion del aparato, de modo que si con las bases verticales dirijimos por las pínulas una visual de inclinacion cualquiera, la intercepcion del alambre G con el limbo-eclímetro PQ, nos indicará el valor gradual de dicha inclinacion, puesto que la graduacion será la posicion fija, y el alambre indicador irá recorriendo con el plano de colimacion los ángulos que se trate de medir, grado por grado.

Alidada nivelante.—Este aparato, debido á Mr. Livet, acompaña generalmente á la plancheta simplificada, siendo su empleo de gran utilidad pues además de trazar sobre el papel la direccion de las visuales, mide tambien

las pendientes que entre el punto estacion y los observados existen, permitiendo determinar las diferencias de nivel entre uno y otros.

Consta fig. 10 (lám. 15) de una regla AB de madera, con uno de sus cantos chaflanado y dividido en milímetros para que sirva de escala. Se elevan en los extremos de la AB dos pínulas C y D que pueden girar, alrededor de su base de apoyo sobre la regla.

Una de ellas, la C, es una plancha metálica que tiene practicados en una misma línea central paralela á los lados mayores, dos orificios *a*, que sirven de oculares. La otra pínula D, es un marco con una cerda que divide su hueco en dos partes iguales en sentido de la altura.

La longitud de la regla AB suele ser de 0, ^m3.

Uno de los lados mayores del marco D tiene dos graduaciones, una ascendente y otra descendente, cuyos ceros se encuentran elevados sobre la regla á la misma altura que los orificios inferior y superior de la otra pínula respectivamente. La magnitud de cada division es la centésima parte de la distancia que media entre las dos pínulas, de modo que en la generalidad de los casos es 0 ^m, 003.

Para operar con este sencillo instrumento, se coloca sobre la plancheta, la cual se situa con el tablero próximamente horizontal por medio de una bola que en el caso deseado no debe rodar. Algunas veces suele existir incrustado en el espesor de la regla AB un pequeño nivel de aire, y en este caso se consigue la horizontalidad del tablero por medio de dicho nivel. Puede tambien bas-

tar para conseguir la deseada apreciacion con poner horizontal la alidada, sin fijarse mucho en la plancheta, consiguiéndose entonces que la burbuja vaya á sus referencias por una pequeña cuña que se introduce por debajo de dicha alidada.

Se trata de medir aproximadamente la pendiente MN figura 11 (lámina 18). Se dirige la visual por el orificio *a* inferior y la cerda de la otra pínula al punto N, y para encontrar el número de la division del marco en que este es cortado por dicha visual, se corre por él la punta de un lapiz, deteniéndolo en el momento en que aquella le sea tangente, en cuyo caso indicará el número deseado. Tambien se puede hacer uso de un papel recortado como indica la fig. 12 que se haga correr sobre el marco.

Tenemos entonces, fig. 11 (lám. 15) que $\frac{NP}{Pa} = \frac{bo}{oa}$ y suponiendo que el punto *b* corresponda á la division 12

$$\text{tendremos } \frac{NP}{Pa} = \frac{12}{100} \quad \text{ó} \quad NP = Pa \times \frac{12}{100}.$$

El valor $\frac{12}{100}$ que nos ha resultado para la pendiente se comprende que no es el de la MN pedido si no de la línea aN, pero la poca exactitud que se exige, la pequeña altura del instrumento sobre el punto de estacion y la gran distancia á que se observa hacen poco sensible el error cometido.

Si se desea conocer la diferencia de nivel NQ esta

$$\text{será } NQ = NP + PQ = QM \times \frac{12}{100} + a\bar{a} = QM \times \frac{12}{100} + mM.$$

Cuando el punto que se observa está mas bajo que la estacion, como indica la fig. 43 (lám. 43) la pendiente se encuentra del mismo modo haciendo uso del ocular superior y de la graduacion descendente, y suponiendo que corte la visual á esta graduacion tambien en su punto 12, resultará para la pendiente $\frac{12}{100}$, y para la di-

$$\text{ferencia de nivel } PN = QN - PQ = MP \times \frac{12}{100} - mM,$$

por donde vemos que la fórmula general de esta nivela-

cion será $H = D \frac{p}{100} \pm a$, llamando H la diferencia de

nivel, D la distancia horizontal que media entre los puntos, p la division del marco que nos resulta de la operacion efectuada y a la altura del ocular sobre la horizontal de la estacion, usándose el signo + en las pendientes ascendentes y el — en las descendentes.

Simplificacion de la alidada nivelante.—A la estremidad J de un jalon se fija una plancha de metal, rectangular que tiene por longitud de base 0^m,4, dividiéndose su altura en milímetros fig. 45 (lám. 45) con el cero en la parte inferior en una de las caras, y superior en la otra, perteneciendo el primero á una graduacion ascendente y el segundo á una descendente. Para encontrar el tanto por ciento de pendiente entre dos puntos cualesquiera, se clava en uno de ellos verticalmente el

jalon y se dirige la visual al otro tomando como ocular el p y contando desde el cero de abajo si el punto observado está mas alto que la estacion, y cuando estoviese mas bajo, se mira desde q y se cuenta desde el cero superior. Para conocer el número de la division en que la visual corta á la parte graduada, se corre la uña por el borde hasta que encuentre á dicha visual, quedando entonces indicado el número pedido. Si este fuese 8, la pendiente aproximada sería $\frac{8}{100}$.

Transportador eclimetro.—Tambien nos puede servir el transportador para encontrar la diferencia de nivel que entre dos puntos existe, colocando sujeto á su centro el hilo de una plomada.

Para efectuar esta operacion fig. 16 (lám. 12) se coje el transportador con la mano izquierda, despues de situarse en uno de los puntos dados M , y haciendo que esté bien vertical por medio de la plomada, se coloca hácia la parte superior el diámetro libre y próximo al observador el cero de la graduacion, y elevándole á la altura de los ojos se inclina dicho diámetro libre hasta que en prolongacion de su direccion se vea el otro punto N , en cuyo caso la plomada indicará la distancia zenital encontrándose la diferencia de nivel por la fórmula $H = D \cot. \delta \pm a$ por lo que anteriormente expresamos.

Usase tambien un nivel, que parece ser ya el límite de las simplificaciones que en ellos se pueden introducir. Consta de una regla en cuyos extremos están fijos los de dos cuerdas de igual longitud, que se atan una con

otra por el otro extremo, como indica la fig. 17 (lám. 15).

Para dirigir visuales horizontales se coje el aparato por el punto de union de sus dos cuerdas, y se dirige la visual por el canto de la regla, á la cual su propio peso habrá colocado horizontal.



LECCION 30.

RECONOCIMIENTOS MILITARES.—MODO DE EFECTUARLOS.

Descritos ya los instrumentos que en la operacion de que tratamos suelen emplearse, vamos á explicar los métodos que se siguen para dibujar al croquis resultado de un reconocimiento militar.

Estos reconocimientos pueden efectuarse de cuatro modos. 1.º *con instrumentos*. 2.º *á ojo á la vista del terreno*. 3.º *de memoria* y 4.º *por las noticias que se puedan adquirir*.

Levantamiento y trazado del croquis, por medio de instrumentos.—Como lo que en este caso se trata de hacer, es un levantamiento topográfico á la ligera, debemos seguir, aunque imperfectamente los pasos de los procedimientos generales, formando primero un cánevas fundamental, marcando despues otro para los detalles, y dibujando luego estos mismos detalles.

Pueden ocurrir dos casos, ó que se posea una carta en

pequeña escala del terreno, ó que no se posea dicha carta.

En el primero, se eligen sobre la carta los puntos que convengan para vértices y punto central del cánvas siendo conveniente que algunos de ellos sean accesibles. Sean los elegidos los A, B, C, D, E, F de la figura 1.^a (lámina 16). Secubre la carta con un pliego de papel vegetal y eligiendo uno de dichos puntos tal como F, por él se trazan dos líneas en direccion de la meridiana magnética y de su perpendicular. En seguida se marcan, siempre sobre el papel vegetal las coordenadas de todos los demás puntos con relacion al sistema que dichas dos líneas determinan. Paralelamente á los lados del papel en que se ha de dibujar el croquis, se trazan dos líneas que se cruzarán perpendicularmente, cuyas líneas se adoptan como sistema coordinado, y su interseccion como posicion de F. Se toman en seguida sobre el papel vegetal las distancias $F\bar{a}$ y Fa , las que reducidas á la nueva escala

$\frac{1}{20000}$ se toman sobre los nuevos ejes á contar del ori-

gen, y levantando perpendiculares en los extremos de las dimensiones tomadas, el punto de su encuentro será el A de la nueva representacion, determinando del mismo modo las posiciones de los puntos B, C, D, E.

Es sabido que no se debe nunca amplificar el plano por causa de los errores, que aumentan tambien, pero no hay inconveniente en hacerlo ahora, por la poca aproximacion que se exige.

Puede tambien hacerse la operacion uniendo sobre el papel vegetal dos puntos, trasladar en distancia redu-

cida á escala sobre el papel del croquis, y apoyando en los extremos, con radios iguales á las distancias que existen á los demás puntos, tambien reducidas á escala trazar arcos de círculo, que por sus intersecciones dos á dos nos darán los puntos deseados. Este método tiene el inconveniente del general de intersecciones.

Cuando se carezca de carta del país, es necesario elegir los puntos del cánevas sobre el terreno, procurando que estén situados en las torres, campanarios, confluencia de rios, cruzamientos de caminos, etc., debiendo tambien medirse una base.

Para evitar esta medicion se suelen adoptar como bases los espacios comprendidos entre los postes kilométricos de las carreteras ó ferro-carriles, pero cuando se carezca de este recurso se hace la medicion por alguno de los siguientes métodos:

1.º *A pasos*.—Es necesario conocer de antemano la longitud media del paso de un peon ó caballo, para la que se habrá acostumbrado á uniformarle, y recorriendo varias veces una longitud de 100^m por ejemplo, se vé el término medio de los pasos que se dan, que supongamos son 120, teniendo entonces 120 pasos = 100 metros y un

$$\text{paso} = \frac{100^m}{200} = \frac{5^m}{6}, \text{ de modo que para medir una}$$

base, no hay mas que recorrerla contando los pasos que en ello se emplean, y multiplicando su número por

$\frac{5}{6}$, se obtiene el de metros que contiene la base recor-

rida, los que se reducirán á la escala del croquis. Si se quiere escusar la reduccion á metros de la distancia medida se puede construir una escala de pasos.

Para ello, si 1 paso es igual á $\frac{5}{6}$ de metro, se verifi-

ca $100 \text{ pasos} = \frac{500}{6} \text{ metros} = 83^m, 3$ y tomando esta mag-

nitud en la escala del croquis, la dividiremos en 10 partes de las que cada una apreciará 10 pasos, y sobre estas construiremos una escala de transversales que apreciará pasos, pudiendo tomar sobre esta escala, convenientemente reducidos los que se dan para transitar un camino recorrido.

2.º *Por el tiempo que se tarda en recorrer las distancias.*

—Es preciso en este caso conocer la velocidad del paso propio, ó el del caballo que se monta, es decir el espacio que se recorre á pié ó á caballo en un segundo ó en un minuto siendo evidente que el recorrido es un tiempo cualquiera t , se deducirá de la relacion $s = v.t$, representando por v el espacio recorrido en la unidad de tiempo, y t el número de estas unidades que se han empleado en recorrer un espacio s . Si la medicion se hace á caballo, se vé el número t de unidades de tiempo que se marcha al paso, y el t' que se marcha al trote siendo entonces la longitud de la distancia recorrida $S = vt + v't'$.

3.º *Por la velocidad del sonido.*—La luz recorre el espacio con una velocidad que en los pequeños límites de un levantamiento podemos considerar como infinita,

mientras que el sonido no recorre mas que 335^m por segundo; luego si multiplicamos este número por el de segundos, contados entre el fogonazo y la detonacion de un arma de fuego disparada en el extremo de la base opuesto á aquel donde el observador se encuentra, obtendremos la distancia que entre ambos media á la que añadiremos ó quitaremos de 10 á 30^m segun que las corrientes de aire favorables ó contrarias sean débiles ó fuertes.

4.º *Por el odómetro ó cuenta-pasos.*—La facilidad con que el observador puede equivocarse al contar los pasos que entre uno y otro extremo de la base se han dado ha hecho necesario el uso del odómetro.

Es este un aparato de la forma y dimensiones de un reloj de bolsillo, que tiene en una de sus caras, figura 2.^a (lámina 16) varias circunferencias divididas todas en 40 partes iguales, teniendo cada una de dichas circunferencias una aguja giratoria alrededor de su centro. Contiene tambien el aparato una palanca ahorquillada MN, que tiene un eje horizontal en el interior de la caja cilíndrica, y superior á él un gancho fiador que apoya en una rueda de 10 dientes en cuyo eje está montada la aguja de uno de los círculos graduados. A cada oscilacion de la palanca, el fiador deja adelantar un diente y la punta de la aguja recorre la décima parte de su circunferencia. Un sistema conveniente de engranajes hace que la segunda aguja tenga un movimiento 10 veces mas lento que la anterior, es decir que cuando esta haya dado una vuelta completa, aquella no habrá adelantado mas que una division. La tercera aguja tiene un movimiento 10

veces mas lento que la segunda, y la cuarta diez veces mas lento que la tercera, de modo que si logramos hacer adelantar una division á la primera aguja por cada paso que demos, la posicion de la segunda nos indicará las decenas de pasos, la tercera las centenas y la cuarta los millares.

Para usar este aparato, si se hace la observacion á pié se puede sujetar la caja al cinturon del sable, por un gancho que tiene aquella en su parte posterior, atando por una cinta ó pequeña correa el extremo de la palanca al muslo, con lo cual á cada paso que se dé, se imprimirá una oscilacion á dicha palanca.

Cuando se observe á caballo, se asegura la caja á las pistoleras ó á una de las correas del cubre-capas, y el extremo de la palanca al pretal.

Tambien conociendo la circunferencia exterior de la rueda de un carruaje se puede medir por medio del odómetro la longitud de la base para lo cual no hay mas que sujetar el aparato al costado del carruaje, poniendo un clavo en el cubo de la rueda que empuje la palanca á cada vuelta. El odómetro nos indicará entonces el número de estas vueltas empleadas en recorrer la base, que multiplicadas por el que nos exprese la circunferencia de la rueda, nos dará la longitud buscada. En nuestra figura, marca el odómetro 9482.

Apreciacion á ojo.—Es de suma conveniencia, como en otro lugar hemos indicado que todo oficial se ejercite en reconocer de que manera mas ó menos exacta percibe los objetos colocados á distancias conocidas.

Este método de apreciacion aunque inexacto, es útil en muchas ocasiones.

Determinacion de puntos.—Medida ya la base, y trasladada al papel reducida á escala, vamos á trasladar tambien el cánvas.

Si se usa la plancheta, nos colocamos en estacion en uno de los extremos de la base y orientamos con relacion al otro, trazando en seguida la meridiana magnética prolongando sobre el papel la línea recta que marca la direccion de la aguja. Se trazan las visuales á todos los puntos del cánvas visibles desde la estacion, y estableciendo esta en el otro extremo de la base se marcan tambien las visuales á los mismos puntos, resultando la representacion de estos en el papel de la interseccion de las rectas marcadas. Se pueden elegir en seguida como estacion algunos de los vértices ya determinados para representar los que no eran visibles desde los extremos de la primera base, siguiendo así hasta tenerlos todos.

Si en vez de la plancheta, operásemos con la brújula se sigue tambien el método de intersecciones, estacionando primeramente en los extremos de la base medida, para determinar los vértices desde ellos visibles, y pasando despues la estacion á otro ya encontrado, para marcar la posicion de los demás.

Para formar el cánvas de los detalles, se combinan los métodos de interseccion, medicion y radiacion, apoyándose en los puntos del fundamental, y cruzando por estos siempre que sea posible para verificacion, haciendo que las líneas trazadas contengan todos los

puntos algo notables del terreno, completando generalmente á ojo los contornos de los objetos inmediatos al camino que se recorre, y otros accidentes poco importantes.

Ordinariamente se ejecuta la nivelacion al mismo tiempo que la planimetría, estudiando de abajo arriba las pendientes, y representándolas por algunos trazos mas ó menos gruesos, cortos y unidos. Algunas veces conviene determinar ciertas cotas, que se escriben dentro de un circulito al lado del punto á que pertenecen en el croquis. En los caminos deben estudiarse cuidadosamente las pendientes, señalando las que ofrezcan dificultad para el paso ya sea en la subida ya en la bajada.

Al tiempo que se efectúan las anteriores operaciones, se consignan en un registro todas las noticias topográficas que deben figurar en la memoria, y que despues enumeraremos.

Levantamiento y trazado del croquis á ojo, á la vista del terreno.—Para esta operacion, admitiremos que se carece de todo instrumento, y no se dispone mas que de una tablilla, carton ú otra superficie plana cualquiera, á la cual se fija la hoja que tiene que contener el croquis.

Las distancias pueden medirse á pasos, ó por el tiempo que en recorrerlas se emplea.

Si se tiene á mano el plano del terreno, se pueden marcar con anterioridad los puntos elegidos como vértices del cánevas, y en el caso contrario se eligen tres puntos notables, midiendo del modo indicado los lados del triángulo de que son los vértices, reduciendo des-

pues las longitudes encontradas á la escala del plano.

Partiendo de uno de los vértices se dibujan á ojo los detalles que estén próximos á este punto y marchando despues en la direccion del otro, se van fijando todos los accidentes del camino, cambios de direccion, de pendientes, y de naturaleza del terreno. Igualmente se van colocando sobre el croquis á ojo, los detalles de uno y otro lado del camino á tanta distancia como la localidad lo permita.

De la misma manera se recorre el segundo y tercer lado.

Se tiene de este modo dibujada una zona triangular de cierto ancho, y para llenar el espacio central se parte de la bifurcacion de un camino ya dibujado, y seguimos su direccion hasta llegar á otro punto tambien representado en el otro lado del triángulo fundamental, levantando los detalles que á derecha é izquierda del camino existan; así se sigue marchando por transversales, estudiando y dibujando la direccion en que se camina hasta conseguir representar todo el terreno, sin que falte ningun punto notable.

Levantamiento y trazado del croquis de memoria.—Se ejecutan estos reconocimientos cuando el tiempo apremia, y generalmente en las avanzadas y á la vista del enemigo.

El oficial encargado de la comision debe penetrarse bien de su objeto, para no fijarse mas que en los detalles de verdadera importancia, sin sobrecargar su memoria con los demás, que pudieran hacerle olvidar los prime-

ros. Desde que se pone en marcha, va anotando el tiempo que tarda en llegar á un punto principal, y los que emplea en trasladarse de unos á otros de estos.

Se debe enterar minuciosamente de la naturaleza de los caminos que sigue, su estado, detalles de sus inmediaciones, pendientes, pasos difíciles, desfiladeros, pantanos, cultivos, bosques, rios, puentes, etc.

Adquiridos estos datos, y al regreso, se forma un croquis lo mas aproximado posible, traduciendo el tiempo que antes se habia anotado en distancia.

Si se quiere completar el croquis con las noticias que se puedan adquirir concernientes al terreno, debe consignar el origen, no dando entero crédito mas que á las propias observaciones.

Trazado del croquis por las noticias que se puedan adquirir.—Se ejecuta un trabajo de esta clase, cuando se recibe la orden de penetrar en un terreno ocupado por el enemigo, sin haber podido procurarse una carta de él, ó la que se posee, como sucede en la mayoría de los casos, no es suficientemente detallada.

Cualquiera que sea el objeto de la expedicion, es necesario que se tenga exacta idea de la naturaleza del terreno, los caminos que deben seguirse, accidentes notables, casas que puedan servir para el descanso ó la defensa, etc.

Las noticias se adquieren por los espías, los prisioneros y los habitantes del país. Se les debe interrogar con circunspeccion, y en cuanto sea posible se deben comprobar las noticias que procedan de distinto origen.

Para dar mayor exactitud á las contestaciones se suele hacer un croquis á la vista de la persona á quien se interroga con arreglo á sus noticias, procurando hacérsele comprender, é indicar las distancias aproximadas que median entre los distintos puntos.

Tienen que fijarse principalmente las preguntas sobre los caminos, sendas que terminan en el principal, punto de donde estas parten, poblacion presumible de la localidad, puntos ocupados por el enemigo, etc.

Se toman tambien especialmente en cuenta los puntos de paso arriesgado, tales como puentes, desfiladeros, vados, bosques, etc.

Consiguiendo tomar las noticias de buen origen se puede formar un croquis, que supla con ventaja al empleo de guias.

Itinerarios.—Se llaman así los reconocimientos militares que se efectúan cuando hay necesidad de conocer perfectamente un camino para la seguridad de la tropa ó de la conduccion de convoyes en tiempo de guerra, ó para su comodidad en tiempo de paz.

En este caso no hay necesidad de cánovas.

El instrumento que mas se usa es un carton, una pequeña brújula y una alidada cualquiera.

Sobre una hoja de papel, pegada al carton se traza una línea, que se considera como la representacion de la primera parte del camino que se vá á seguir, colocándola en lo posible de tal modo, que esté dicho camino en direccion de la mayor longitud del papel.

Sobre esta línea se pone la de fé de la alidada,

y se mueve el carton hasta que la visual dirigida por aquella esté en direccion de la primera parte del camino, en cuyo caso se marca con un trazo de lápiz el punto correspondiente al extremo de la punta azul de la aguja. Se marcha hasta el primer recodo, habiendo antes medido á pasos la distancia en que el camino sigue la primitiva direccion, cuya distancia se traslada al papel, reducida á escala.

Se estaciona en el primer recodo, y haciendo por movimientos del carton, que coincida la punta azul de la aguja con el trazo antes marcado, se hace girar la alidada sobre el punto correspondiente á la estacion, hasta que la visual marque la nueva direccion del camino, que se indica en el papel, siguiendo del mismo modo, hasta determinar el trazado en toda su longitud.

En las carreteras y vías férreas, se rectifican las distancias medidas á pasos, por los postes kilométricos.

Al mismo tiempo que se vá marchando en direccion del camino, se ván levantando y representando á ojo los alrededores, siendo lo general que esta representacion comprenda á uno y otro lado los objetos situados hasta 500 metros de distancia.

Se comprende que esta no puede sujetarse á medida fija, pues si el terreno es muy despejado, bastará con indicar la direccion del camino, mientras que si es muy accidentado, será necesario representar los objetos situados á distancias bastante mayores que la indicada.

Los puntos notables de un camino los constituyen: un cambio de direccion ó de construccion, la entrada de un

desfiladero, una pendiente donde sea necesario poner la rastra á los carruajes, un puente, un vado, una casa aislada, una venta, una aldea, una encrucijada, etc.

Se hace constar la clase de construccion del camino y su estado de conservacion, se dan detalles del terreno que atraviesa, sobre los objetos próximos que ofrezcan algun interés bajo el punto de vista militar, sobre la naturaleza y dimensiones de los puentes y vados y épocas del año en que estos son practicables, indicando tambien en un registro ordenado, los medios que hay para el paso de los rios, número de hombres, caballos y carruajes que pueden contener los pontones ó barcas, y tiempo que se tarda en la ida y vuelta de uno de ellos, puntos á propósito para el descanso, cantidad y calidad del agua que en ellos exista, y los demás datos que indicaremos al tratar de la redaccion de memorias que son comunes tanto á los reconocimientos en general, como á los itinerarios.

Se dedica especial cuidado á la inspeccion de los alrededores para ver si existen los materiales necesarios para recomponer los pasos, en el caso en que el enemigo los inutilice, sin dejar de indicar en el croquis por algunas vistas pintorescas los sitios del camino en que es fácil equivocarse separándose de la verdadera direccion, pues como regularmente el que hace el itinerario no es el que dirige la marcha, es necesario que este tenga datos fijos en que fundar sus disposiciones.

Para las pendientes es preciso tener presente los siguientes:

Límites de las pendientes accesibles.....	Carruajes sin rastra.....	$\frac{4}{18}$..	0,055..	3°
	Id. con id.....	$\frac{4}{7}$..	0,44..	8°
	Para caballería.....	$\frac{4}{40}$..	0,40..	24°
	Para artillería de montaña.	$\frac{55}{100}$..	0,55..	32°
	Para infantería.....	$\frac{80}{100}$..	0,80..	42°

teniendo en cuenta que estas pendientes son las que se pueden franquear maniobrando y combatiendo.

En los vados es necesario estudiar la naturaleza de su fondo é inmediaciones. Un fondo arenisco dificulta el paso de los carruajes, y si es pedregoso se hiere el ganado y pierde pié con facilidad. El mas conveniente es el formado por una mezcla de grava gruesa y cantos rodados.

Los límites máximos de la profundidad para que los vados sean practicables, son los que á continuacion se expresan, que se deben modificar disminuyendo cuando sean muy rápidas las corrientes.

Para la Caballería.....	4 ^m , 20.
Para infantería segun la corriente...	4 ^m á 0 ^m , 80.
Para los carruajes, sin mojar las municiones	0 ^m , 65.

Cuando se deba hacer el itinerario de un camino de hierro, se deben estudiar é indicar en el croquis los acci-

dentes principales del terreno que cruza, los desmontes, terraplenes, diques, puentes, via-ductos, etc., el ancho de las vias, número de ellas y estado de conservacion del camino, las estaciones y otros edificios que se encuentren á lo largo de la via, su capacidad y construccion, y los caminos ó sendas que con ella se cruzan.

Deben estudiarse además los medios de transporte, esto es, fuerza y número de las locomotoras, número de carruajes para viajeros, capacidad y division interior, carruajes para equipajes, su número y utilidad para el transporte de los de Artillería y otros efectos militares, tomando nota de los elementos que existan para transportar ganado, siendo tambien conveniente, dadas las condiciones de la estacion, indicar el tiempo aproximado que podian tardar en acomodarse en el tren cada batallon de Infantería, batería de Artillería y escuadron de Caballería. Es además indispensable conocer el personal disponible en conductores, maquinistas, guarda-vias, etc. y todos los demás datos que convengan para la seguridad de un transporte militar.

Los telégrafos ópticos ó eléctricos deben considerarse en su situacion y estaciones que tengan, su sistema de comunicacion si son eléctricos, ya sea por alambres suspendidos por medio de postes, ya por hilos subterráneos ó submarinos, el mecanismo y el número de sus aparatos, el personal, y las horas de servicio ordinario.

Memorias.— Deben estas constar de tres partes: 1.^a *Detalles topográficos.* 2.^a *Reseña estadística.* 3.^a *Discusion de la operacion militar que se proyecta.*

En la primera deben consignarse las carreteras, caminos y senderos con los puntos principales que en su extension comprenden, los canales, rios y arroyos, expresando si alguno de los dos primeros son navegables; las ciudades, villas, aldeas, posadas y casas aisladas. Los cultivos, bosques y pantanos, el aspecto general del país, la salubridad del aire, la naturaleza geológica del suelo y la calidad de las aguas.

En la segunda parte se dará á conocer la poblacion del país objeto del reconocimiento, sus costumbres y carácter, las producciones del suelo en cereales, legumbres, vino, ganado, etc., sin dejar de explicar las existencias que puede haber en los almacenes ó ganaderías.

El ganado de tiro y carga, los carruajes y barcos, los recursos de todo género que puede ofrecer el país para alojarse y racionarse, el precio medio de los alimentos, etc.

La tercera parte de la memoria es cuestion de arte militar, y á su estudio nos debemos referir, indicando aquí solamente, que es necesario hacer solo hipótesis probables, é indicar para ellas las disposiciones que se juzguen mejores, sin entrar en ningun detalle relativo á combates simulados:

Cualquiera que sea la cuestion, es bueno tratarla bajo el punto de vista de la ofensiva y de la defensiva, á fin de generalizar las ideas y de preveer lo que podrá hacer el enemigo para oponerse á la operacion que se proyecta, debiendo en todo caso advertir que las primeras

cualidades del buen estilo militar son la claridad y la concision.

Nos hemos detenido en el asunto de que acabamos de tratar atendiendo á su utilidad para los oficiales de todas armas, y al especial objeto de estas lecciones.

Aplicacion de la fotografia á los reconocimientos militares.—Las vistas pintorescas convenientemente elegidas, facilitan mucho la comprension de los croquis resultantes de un reconocimiento militar. Los modernos adelantos han producido la sustitucion de dichas vistas por las fotográficas. La exactitud de estas y la rapidez con que se las obtiene, dn al nuevo procedimiento propiedades características que determinan la utilidad de su empleo en algunas circunstancias particulares en las que todos los demás métodos serian insuficientes.

No son necesarios grandes conocimientos geométricos para concebir la srie de construcciones por las cuales se pueden llevar á su verdadera posicion los objetos de los cuales se tiene la perspectiva, tomada de dos puntos de vista distintos.

Estas construcciones, y todo lo que se relaciona con este sistema de levantamientos, ha sido tratada recientemente de un modo inmejorable por el Comandante de Ingenieros francés Laussedat, y el Gobierno español tenemos entendido ha comisionado á distinguidos oficiales para que en el extranjero estudien el asunto con toda detencion, no teniendo nosotros por ahora noticias del resultado.

Creemos que la cuestion debe dividirse en dos partes. 1.^a Verdaderos levantamientos en que la fotografia entra como auxiliar, y 2.^a Levantamientos efectuados por los métodos ordinarios, en que para mejor inteligencia de los encargados de manejar los planos, algunas veces personas de poca instruccion, se cubren los sitios principales, con sus vistas fotográficas.

Ocupándonos de la 1.^a, la aplicacion del método exige cuatro séries de operaciones.

1.^a Las que constituyen el levantamiento con instrumentos fotográficos ordinarios, de los puntos destinados á servir de estacion de los aparatos fotográficos. 2.^a La obtencion de las vistas fotográficas. 3.^a El dibujo de algunos croquis del detalle, lo mismo que la representacion por los medios usuales de las partes del terreno que no figuran en las vistas, y que no se pueden hacer aparecer en ellas á no ser que se multipliquen mucho las estaciones, y 4.^a Las construcciones gráficas y la copia en limpio del plano para las cuales se emplean todos los datos recogidos sobre el terreno.

Esta última série de operaciones es la mas larga. Compréndese por las ideas que hemos dado que las ventajas de las representaciones fotográficas son: el poder sacar vistas á la ligera, que estando las estaciones convenientemente elegidas nos darán buena idea del terreno siempre que no necesitemos de él una representacion muy exacta, como sucede en los reconocimientos militares; y en cuanto á los inconvenientes son: la poca exactitud, el tener que llevar los instrumentos fotográficos y los topo-

gráficos y sobre todo el largo tiempo que se emplea en los trabajos de gabinete.

Hánse ideado varios aparatos fotográficos, destinados á modificar la cámara oscura y el laboratorio para facilitar su transporte, existiendo el de Dubroni que tiene á las dos en un solo cuerpo. Pero como quiera que aun no se ha llegado ni con mucho á la perfeccion estrema, no nos detendremos á describirlos.

La comparacion entre los métodos ordinarios y el fotográfico ha hecho que la mayor parte de los topógrafos se decidan por aquellos.

En cuanto á los planos obtenidos por los métodos ordinarios, é ilustrados con vistas fotográficas de los puntos principales pueden ser de utilidad suma, como en la última guerra franco-prusiana se ha demostrado, pues los cortos destacamentos de caballería recorrian extensiones grandes sin mas auxilio que el de estas cartas, que en poder de sus jefes existian.

Como quiera que esta es una cuestion que en la actualidad se está resolviendo, no nos atrevemos á impugnar ni á recomendar la adopcion del sistema, temerosos de penetrar en un terreno no explorado, sin la suficiente seguridad.

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

1891

1892

1893

1894

1895

1896

1897

1898

1899

1900

ELEMENTOS DE GEODÉSIA.

LECCION 31.

GENERALIDADES.—TRIÁNGULOS GEODÉSICOS.—BASES.—CORRECCIONES ANGULARES Y CÁLCULO DE LA RED.

Establecimos ya en el correspondiente lugar, la diferencia que entre los procedimientos geodésicos y los topográficos existía. Con toda detencion hemos enumerado y explicado los segundos, y nos toca ahora ocuparnos de los primeros, aunque los límites que nos hemos impuesto, nos harán no tocar mas que ligeramente las principales cuestiones.

Comprendiendo los levantamientos geodésicos una extension mayor que los topográficos, por lo que en una de las primeras lecciones indicamos, será necesaria mayor exactitud en los procedimientos y necesarios tambien instrumentos de gran apreciacion.

Esto, y la diferencia que nos produzca el tener que operar sobre la superficie esférica, en vez de hacerlo sobre su plano tangente, hace que aunque el orden de los procedimientos sea el mismo, el modo de seguirlos sea distinto.

Además de la materialidad de la representación, sirven los conocimientos geodésicos para determinar la posición geográfica de los distintos puntos, para la medida de los grandes arcos terrestres, que sería imposible sin ellos, y para la determinación de todas las circunstancias que se refieren á la figura exacta de la tierra.

Esta, como sabemos, se considera esférica, sin tener en cuenta las protuberancias de la superficie, pues estas son á lo mas de dos leguas sobre el nivel del mar suponiéndolo prolongado por debajo de los continentes, que es la superficie que tiene ahora que sustituir al plano de comparación ó referencia que se adoptaba en los levantamientos topográficos.

La Geodésia propiamente dicha, está íntimamente ligada con la navegacion, y presta y recibe auxilio de la Astronomía, pues así como alguno de los procedimientos de aquella se apoyan en las observaciones de los astros, también los resultados de estas serian falsos, si el observador no conociese las dimensiones del planeta estacion móvil en donde se encuentra.

Reasumiendo las operaciones topográficas á grandes rasgos, vemos que estaban todas reducidas á marcar sobre el terreno un cánevas fundamental, apoyando sobre él otro que comprendia los principales detalles, efectuando la medicion de una recta de apoyo, á la que llamábamos *base*; referiamos siempre sobre el terreno los diversos puntos á un sistema de coordenadas rectilíneo y rectangular, averiguábamos el valor de estas coordenadas, y las inclinaciones que con respecto á la

meridiana magnética ó astronómica tenían las líneas que unian uno con otro los diversos puntos, á cuyas inclinaciones llamábamós *azimutes*, pasando luego á la representacion en el papel del levantamiento efectuado, y ejecutando por último las operaciones concernientes á la nivelacion.

Paso á paso vamos á seguir ahora idéntica marcha, en todo lo que nos podamos permitir, atendida la extension de nuestro trabajo.

Triangulacion.—Se eligen en el terreno que se vá á representar varios puntos, cuyas líneas de recíproca union lo envuelven todo, sirviendo despues dichos puntos de referencia para determinar la posicion de los demás.

Estos puntos, de tres en tres, constituyen por sus líneas de union triángulos. Laplace ha demostrado por el cálculo de probabilidades, que es necesario emplear ó marcar sobre el terreno el menor número posible de triángulos de *primer orden*. Este número es dependiente de las condiciones de la localidad y del alcance de los instrumentos que se tengan.

Cuanto mayor sea este, mas distantes se pueden elegir los puntos, y menor número de triángulos bastan para cubrir el terreno; pero los accidentes de este por una parte, que impiden distinguir á unos puntos desde los otros, por otra la necesidad de varios de comprobacion y que cada hoja parcial en que se tiene que dividir la carta del conjunto contenga alguno, hace que se fije su número en cantidad algo mayor.

Generalmente los lados geodésicos suelen tener de 40 á 42000^m.

Se ha demostrado que los errores que en la triangulación se cometan llegan á su mínimo valor, cuando los tres ángulos son iguales á 60°. Debe procurarse en lo posible cumplir con esta condicion, y en la generalidad de los casos, en que no se pueda conseguir, se procura que á lo menos sean isósceles, con su ángulo desigual no muy agudo.

Sobre el cánevas fundamental se apoya otro de lados menores, cuyos triángulos, llamados de *segundo orden* se determinan con gran precision, aunque no con tanta como los de primero. Aquellos sirven á su vez de apoyo para otra triangulación llamada de *3.º orden* en que siendo la longitud de los lados de 600 á 1000 metros, pueden ya seguirse los procedimientos topográficos. Esta última triangulación es la destinada á recoger los detalles.

Las de 1.º y 2.º orden constituyen superficies poliédricas que envuelven el terreno estando algo separadas de él, pero se suponen bajadas verticales de todos los vértices hasta la superficie esférica, quedando formada en esta una red de triángulos esféricos que son los que se consideran en las operaciones.

Señales.—En Topografía, la pequeñez relativa de la distancia á que se observaba hacia que se diese poca importancia á las señales colocadas en los vértices, que como indicamos, consistian regularmente en una pértiga en cuya parte superior se solia formar un cono de paja, rodeado de papel, con el objeto de que por su color se destacase

sobre los demás accidentes. Ahora las señales deben ser mas visibles, y susceptibles por su forma de dar direccion mas precisa á la visual, en razon á las mayores distancias á que se observa y á la gran exactitud que los procedimientos requieren.

Se prefiere construir estas señales en todos los vértices de primer orden á tomar como tales las torres, campanarios, etc., por la mala disposicion que comunmente tienen, para ser observados desde distintos puntos.

Aunque pueden variar mucho las formas de las señales, indicaremos las mas generalmente empleadas. La mas comun es una pequeña torre observatorio A, piramidal cuadrangular, fig. 3.^a (lám. 16) elevada sobre el suelo por las vigas ó pértigas que constituyen sus aristas, soliendo colocar en los hoyos en que los piés se introducen algo de carbon para evitar la putrefaccion de la madera. Todas las piezas están ensambladas, para poderlas desarmar, y trasportar la torre de un vértice á otro en caso necesario.

En los costados del observatorio hay ventanas que se abren ó cierran á voluntad. Su techo tiene la forma de otra pirámide cuadrangular de ángulo mas abierto, y de cuya cúspide parte una varilla en donde vá montada otra pirámide B invertida, y formada solo por listones para que oponga menos resistencia á la fuerza del viento, que á la larga pudiera ladearla.

En el punto O del suelo, pié de la vertical de la señal, se coloca una piedra en donde suele estar marcado dicho punto O por el cruce de las diagonales y aun muchas

veces por una pequeña parte metálica empotrada en dicho punto, de platino ú otro metal duro y difícil de oxidar, para que aunque se quite la torre se puede volver á establecer allí la estacion.

Algunas veces, por estar el punto estacion del terreno suficientemente alto, no hay necesidad de elevar el sitio donde se observa, y entonces está limitada la construcción á la misma pirámide del caso anterior pero sin mas que cubrir de tablas desde la cúspide hasta unos dos metros del suelo fig. 4.^a (lám. 16) para preservar de la intemperie al observador y los aparatos. La señal la suele constituir una varilla que baja tambien hasta cerca del suelo en donde se coloca la piedra que antes indicamos para fijar la estacion. El trípode del instrumento se apoya en este caso en el suelo.

Cuando se carece de madera para construir las torres ó cohertizos de que acabamos de hablar, se construyen en los vértices obras de mampostería ó á piedra seca, cuyas obras fig. 5.^a (lám. 16) suelen consistir en una torre cilíndrica, y en su parte superior ó azotea se coloca una pequeña elevacion cónica destinada á recibir el aparato. Solamente en caso de carecer por completo de materiales para construir las señales, se adoptan para estas torres ó campanarios, pero con la circunstancia de que se pueda hacer estacion en la vertical misma de la señal, cuyo punto se debe marcar tambien en el suelo.

Se han usado algunas veces como señales, fuegos de Bengala, lámparas con grandes reflectores, y otras para las observaciones de noche, habiéndose desechado tales

procedimientos á causa de que la mucha densidad de las capas inferiores de la atmósfera, hacia fuese muy grande el error producido por la refracción.

En la medicion de la base central de la triangulacion geodésica de España, se usó como señal un *heliótropo* construido por Brunner. Se compone fig. 6.^a (lám. 16) de un anteojo astronómico A, que está sostenido por collares dentro de los cuales puede girar, ó rápidamente, levantando á charnela la mitad superior, ó lentamente colocando esta, y dando movimiento al tornillo sin fin K, que cuando se aprieta el r, engrana en un disco dentado que hay en la superficie exterior del anteojo. Por delante del objetivo salen los brazos z, que sostienen los dos espejos M, N, dispuestos perpendicularmente el uno al otro y giratorios alrededor del eje mn, por medio del tornillo V, que tiene en su eje montado un pequeño piñon, el cual engrana en un sector P, unido á dicho mn por la parte exterior de los Z.

La parte superior del instrumento puede girar alrededor de su eje con movimientos rápidos y lentos, existiendo para permitir é impedir los primeros el tornillo de presion E, y para los segundos el de coincidencia H, auxiliado por el resorte en espiral G con su correspondiente varilla. Está todo el aparato sostenido por una plataforma de tres tornillos verticales, que permiten darle las pequeñas inclinaciones que generalmente tienen los triángulos geodésicos.

Lo primero que se hace para usar el *heliótropo* como señal es hacer que el eje óptico coincida con el de figura,

cuya verificación y corrección tantas veces hemos explicado. Efectuado esto, si se hace coincidir la cruz filar con la imagen de un objeto terrestre, y en tal situación se asegura el instrumento, dejando tan solo libertad al anteojo para moverse dentro de sus collares, se podrá, primero con giros rápidos á mano y luego con el tornillo **K**, combinar este movimiento y el del piñon **V**, de manera que la imagen del sol, reflejada por el espejo **N** venga á coincidir con las cerdas. El espejo **M** reflejará los rayos solares en la misma dirección, pero en sentido contrario; yendo por consiguiente á fijarse la imagen del sol, formada por los rayos reflejados en el segundo espejo, en el mismo punto del terreno que antes se observó. Este reflejo visto á gran distancia, tiene la apariencia de una estrella, luciendo sin interrupción cuando se tiene cuidado de seguir con los movimientos del aparato, sin variar la estación, la marcha del sol. Cuando se tenga que observar el heliótopo desde pequeña distancia, se cubre casi todo el espejo **M**, dejando solo para producir la imagen la parte central, por causa de los errores que en cambio de posición podía producir en las observaciones.

Las señales para los vértices de segundo orden son generalmente las torres, campanarios, etc., con tal de que en ellos se pueda estacionar. Cuando no existan edificios de la citada clase, se suelen usar grandes mástiles figura 7.^a (lámina 16) en cuya parte superior existe un rectángulo ó mejor aun una pirámide construida de listones. En otros casos se usa una pantalla circular pintada de negro, con un orificio en la parte central; la pantalla se

suele pintar de negro, y de esta manera es fácil de percibir el orificio por el distinto color que á un través se nota. Con el objeto de evitar la reduccion al centro de estacion suelen estar los mástiles que sostienen lasseñales divididos en dos partes que se mantienen unidas por medio de dos pernos *a*, girando la parte superior cuando se quita uno de ellos, y quedando la inferior formando una meseta donde se coloca el aparato, como indica la misma figura. La parte de abajo del mástil total, se introduce en un rebajo hecho con sumo cuidado en una piedra colocada en la estacion, poniéndose algunas veces un marco de madera para no dejar duda alguna sobre la invariabilidad de posicion.

Los vértices de tercer orden se marcan ya por señales topográficas, pudiendo servir hasta las torres de molinos de viento y los árboles desprovistos de ramas por su parte inferior, que de ningun modo pueden servir en los otros dos órdenes.

Base y su medida.—De todas las operaciones geodésicas la que parece mas fácil de efectuar es la medicion de una cierta longitud, cuando esta medicion deba ser muy exacta, y es sin embargo la mas dificil, á causa de los muchos cuidados que hay que tener para evitar los errores.

En efecto, á causa de la gran extension del levantamiento, un pequeño error cometido en la línea en que la triangulacion debe apoyarse, nos producirá defectos grandísimos en los datos de los triángulos resultantes por el cálculo.

Para evitar los que del crecimiento progresivo de los triángulos resulta, fuera de desear que la base tuviese la longitud de los lados de la triangulación de primer orden, pero la gran dificultad de encontrar terreno á propósito para fijar tan gran línea, ha hecho adoptar como longitud media 10000^m. Sobre ella se apoya un triángulo isósceles cuyos lados iguales son algo mayores que la magnitud indicada; sobre estos se apoyan otros isósceles cuyos lados vayan siendo mayores, concluyendo al fin por formar aquellos que tengan por longitud de lados los de la triangulación principal.

Los defectos que este método produce se esquivan por la gran exactitud en los procedimientos, y las muchas comprobaciones que en el curso de ellos se ejecuta.

Después de elegir el terreno que debe contener á la base, se traza esta, para lo cual se coloca un observador en uno de los extremos con un teodolito ú otro aparato á cuyo eje óptico de su anteojo se le pueda obligar á describir por su movimiento planos verticales, y por medio de él se va marcando una alineación por jalones herrados y pintados de blanco que se colocan de 200 en 200 metros.

Con el objeto de que los extremos de las bases no se pierdan, fuera conveniente que uno por lo menos estuviese en un observatorio, pero caso de no poder ser así, se introduce en el terreno una piedra dura y bien trabajada, cuya parte central la determina una varilla de un metal duro, convenientemente fijado.

Para efectuar la medición de la base trazada, se usan

aparatos de gran precision, cuya descripcion detallada no tiene lugar en el pequeño espacio de nuestro libro, y que está magistralmente efectuada en la obra de los Señores Ibañez, Saavedra Meneses, Monet y Quiroga intitulada «Base central de la triangulacion geodésica de España» y mas aun, si cabe, en la del primero que tiene por título «Nuevo aparato de medir bases geodésicas».

Nosotros tan solo diremos que los imperfectos métodos de Topografía, no se pueden aquí emplear.

Usanse generalmente sistemas de dos reglones, que se van colocando sucesivamente uno en pos de otro, y siempre que es posible en posicion horizontal, lo cual en su esencia no es mas que encontrar la longitud del desarrollo del arco de círculo máximo que tiene sus extremos en los de la base.

Si los reglones son de madera, debe ser su longitud perpendicular á la direccion de las fibras, para que las dilataciones se efectúen hácia el ancho y no hácia el largo, y se tienen que introducir en aceite hirviendo para privarles de facultades higrométricas.

Tanto si son de madera como si son de metal, es necesario corregir los cambios de magnitud que produce la temperatura, para lo que hay termómetros convenientemente dispuestos. Como seria sumamente pesado hacer nueva correccion á cada nueva temperatura, se hace una correccion constante, correspondiente á la temperatura media en un mismo dia.

Las reglas se colocan sobre viguetas colocadas en soportes de altura variable. Por estos y un nivel que

suele ser de aire ó de perpendicular perfeccionado, se consigue la horizontalidad.

Es preciso que el contacto de una regla con otra sea ligero para que los empujes no originen cambios de posicion, para conseguir lo cual, ó están los extremos tallados á bisel, ó son cilindricos, tienen un clavo de cabeza esférica, ó mejor unas lengüetas de platino que pueden salir de los extremos en donde tienen su nonio, y que aprecian las pequeñas distancias que entre regla y regla existen.

Cuando la pendiente haga que los reglones no se puedan poner en prolongacion, se baja del extremo de uno de ellos una plomada, á cuyo hilo se acerca el otro, debiendo tomar en cuenta para la medicion el grueso de este hilo, que aunque insignificante por una vez, puede introducir algun error en la operacion total.

Cuando la naturaleza del terreno no permite la colocacion horizontal de los reglones, se tiene que reducir en cada adapecion su longitud al horizonte, multiplicándola por el coseno del ángulo de la inclinacion.

Las ideas generales que hemos dado, sirven para formar concepto sobre las grandes precauciones que para la medida de la base se toman.

Reduccion de la base al nivel del mar.—La reunion de los triángulos geodésicos forma una red esférica, contenida en la superficie concéntrica á la de la tierra en donde se encuentra la base medida. Pero como quiera que existen dichas superficies concéntricas en número infinito, es necesario que se adopte una de ellas

que sirva de referencia para todos los levantamientos. Se ha adoptado como tal, la superficie de los mares y su imaginaria prolongacion. Si proyectamos sobre esta superficie la base medida, y sobre la longitud de la proyeccion fundamos el cálculo de los triángulos, que sea dicho de paso no varian el valor de sus ángulos, los lados nos vendrán determinados tambien sobre la superficie del mar.

Para conseguir dicha proyeccion de la base, sea en la figura 8.^a (lámina 16), $A\bar{B}$ la medida en el terreno y $A'B'$ su proyeccion, á las cuales llamaremos respectivamente B y b . Llamemos tambien R al radio oB' de la tierra, y a á la altitud ó altura á que el terreno de la base se encuentra con respecto al nivel del mar; teniendo en este caso

$$\frac{b}{B} = \frac{R}{R+a}; \text{ de donde } b = \frac{RB}{R+a} = B \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{R}} \right) =$$

$$= B \left(1 - \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} - \frac{a^3}{R^3} + \dots \right), \text{ y en atencion á}$$

ser a de estrema pequeñez con respecto á R , se pueden despreciar las potencias de $\frac{a}{R}$ superiores á la primera,

$$\text{resultando } b = B - \frac{Ba}{R} \text{ reemplazando el valor de } b \text{ al } B$$

en el cálculo de los triángulos. Mas adelante se indicará el modo de determinar la cantidad a .

Medida de los ángulos y correcciones angulares.—Para esta operacion se usan círculos repeti-

dores y teodolitos muy perfectos. Con los primeros se miden los ángulos en el plano de los objetos, obteniendo por los segundos, los que forman los planos verticales correspondientes á los círculos máximos, que son los mismos de los triángulos esféricos que se toman en consideracion, y que no varian de magnitud cuando se pasa de una superficie de nivel á otra.

Las veces que un ángulo se tiene que repetir, es mucho mayor que en las operaciones que en Topografía hemos efectuado, habiendo ahora necesidad de tomar en consideracion los dias y las horas en que se efectúan.

Las correcciones angulares que puedan necesitar segun las circunstancias de la operacion y los instrumentos, son las siguientes: 1.^a Correccion relativa á la escentricidad del anteojo inferior para ciertos teodolitos. 2.^a Reduccion al centro de señal. 3.^a Reduccion al centro de estacion. 4.^a Reduccion al horizonte, y 5.^a Correccion del esceso esférico.

Conocemos ya los medios de efectuar las cuatro primeras y debemos ocuparnos solo de la 5.^a.

Antes diremos que los errores se dividen en sistemáticos ó constantes, y accidentales. Los errores sistemáticos que dependen del instrumento deben tratar de evitarse por todos los medios posibles, y los errores accidentales que dependen generalmente de la imperfecta observacion se atenúan por muchas repeticiones.

Pasando ahora á ocuparnos de lo que hemos llamado esceso esférico, debemos demostrar el siguiente principio:

Teorema de Legendre sobre el exceso esférico.—Puede este enunciarse diciendo que: *La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico de lados cortos, difiere de 180° una cantidad muy pequeña e, que toma el nombre de «exceso esférico.»*

Y como consecuencia del anterior principio: *Todo triángulo esférico de lados cortos, puede ser sustituido por otro rectilíneo, cuyos lados sean los de aquel desarrollados y los ángulos los esféricos medidos, disminuidos respectivamente en la tercera parte del exceso esférico.*

Vamos á demostrar las anteriores proposiciones:

Sea ABC un triángulo esférico, fig. 9.^a (lám. 16) *a*, *b*, *c* el valor de los lados ó arcos BC, AC y AB, y α , ϵ y γ el desarrollo de estos mismos arcos, teniendo entonces que

$$a = \frac{\alpha}{R}, \quad b = \frac{\epsilon}{R}; \quad \text{y} \quad c = \frac{\gamma}{R},$$

representando por R el radio de la tierra.

Aplicando la fórmula trigonométrica

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c} \text{ en el caso actual nos resulta}$$

$$\cos. A = \frac{\cos. \frac{\alpha}{R} - \frac{\cos. \epsilon}{R} \cos. \frac{\gamma}{R}}{\text{sen. } \frac{\epsilon}{R} \text{ sen. } \frac{\gamma}{R}};$$

Si desarrollamos los valores de los senos y cosenos que aparecen en la expresion, por las fórmulas de las séries circulares:

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} \dots, \quad \text{sen. } x = x - \frac{x^3}{2.3} + \dots,$$

y se efectúan los productos, despreciando los términos que tengan en el denominador potencias de R superiores á la cuarta, á causa de la gran magnitud de dicho radio, tendremos:

$$\cos. A = \frac{\frac{\epsilon^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4 + \epsilon^4 - \gamma^4}{2.3.4. R^2} - \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{4 R^2}}{\epsilon \gamma \left(1 - \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{2.3. R^2}\right)}$$

de cuya cantidad es un factor $\frac{1}{1 - \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{2.3. R^2}}$; y desarro-

llándolo por la fórmula de $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$,

nos resultará

$$\frac{1}{1 - \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{2.3. R^2}} = 1 + \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{2.3. R^2} + \frac{(\epsilon^2 + \gamma^2)^2}{4.9. R^4} + \dots,$$

que sustituido en el valor de coseno de A, continuando siempre con el sistema de despreciar los términos que contengan en su denominador potencias de R superiores á la cuarta

$$\cos. A = \frac{\epsilon^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\epsilon\gamma} + \frac{\alpha^4 + \epsilon^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\epsilon^2 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\epsilon^2\gamma^2}{2.3.4\epsilon\gamma R^2}; (*)$$

(*) Todo el cálculo está efectuado en el adjunto pliego.

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}; \quad a = \frac{\alpha}{R}; \quad b = \frac{\xi}{R}; \quad c = \frac{\gamma}{R}; \quad \text{sen. } x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots, \quad \cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots;$$

$$\cos. A = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4} - \left(1 - \frac{\xi^2}{2R^2} + \frac{\xi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4}\right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\gamma^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4}\right)}{\left(\frac{\xi}{R} - \frac{\xi^3}{2 \cdot 3 \cdot R^3}\right) \left(\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma^3}{2 \cdot 3 \cdot R^3}\right)} = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4} - \left(1 - \frac{\xi^2}{2R^2} + \frac{\xi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4} - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\xi^2 \gamma^2}{4R^4} + \frac{\gamma^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4}\right)}{\frac{\xi \gamma}{R^2} - \frac{\xi^3 \gamma}{2 \cdot 3 \cdot R^4} - \frac{\xi \gamma^3}{2 \cdot 3 \cdot R^4}} =$$

$$= \frac{\frac{\xi^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^4} - \frac{\xi^2 \gamma^2}{4R^4}}{\frac{\xi \gamma}{R^2} - \frac{\xi^3 \gamma}{2 \cdot 3 \cdot R^4} - \frac{\xi \gamma^3}{2 \cdot 3 \cdot R^4}} = \frac{\frac{\xi^2 - \gamma^2 - \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4 - 6\xi^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot R^2}}{\xi \gamma \left(1 - \frac{\xi^2 + \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot R^2}\right)} = \left(\frac{\xi^2 - \gamma^2 - \alpha^2}{2\xi \gamma} + \frac{\alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4 - 6\xi^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \xi \gamma R^2}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{\xi^2 + \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot R^2}}\right);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots; \quad \frac{1}{1 - \frac{\xi^2 + \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot R^2}} = 1 + \frac{\xi^2 + \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot R^2} + \frac{(\xi^2 + \gamma^2)^2}{4 \cdot 9 \cdot R^4} + \dots;$$

$$\cos. A = \left(\frac{\xi^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\xi \gamma} + \frac{\alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4 - 6\xi^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \xi \gamma R^2}\right) \left(1 + \frac{\xi^2 + \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot R^2}\right) = \frac{\xi^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\xi \gamma} + \frac{\alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4 - 6\xi^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \xi \gamma R^2} + \frac{\xi^4 + \xi^2 \gamma^2 - \alpha^2 \xi^2 + \xi^2 \gamma^2 + \gamma^4 - \alpha^2 \gamma^2}{3 \cdot 4 \cdot \xi \gamma R^2} =$$

$$= \frac{\xi^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\xi \gamma} + \frac{\alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4 - 6\xi^2 \gamma^2 + 2\xi^4 + 4\xi^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \xi^2 + 2\gamma^4 - 2\alpha^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \xi \gamma R^2} = \frac{\xi^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\xi \gamma} + \frac{\alpha^4 + \xi^4 + \gamma^4 - 2\xi^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \xi^2 - 2\alpha^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \xi \gamma R^2};$$

$$R = \infty; \quad A \dots \dots \dots A'; \quad \cos. A' = \frac{\xi^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\xi \gamma}; \quad \text{sen.}^2 A' = 1 - \cos. A' = 1 - \frac{\alpha^4 + \xi^4 + \gamma^4 - 2\xi^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \xi^2 - 2\alpha^2 \gamma^2}{4\xi^2 \gamma^2} =$$

$$= \frac{4\xi^2 \gamma^2 - \alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4 + 2\alpha^2 \xi^2 - 2\xi^2 \gamma^2 + 2\alpha^2 \gamma^2}{4\xi^2 \gamma^2} = \frac{2\alpha^2 \xi^2 + 2\alpha^2 \gamma^2 + 2\xi^2 \gamma^2 - \alpha^4 - \xi^4 - \gamma^4}{4\xi^2 \gamma^2}; \quad \cos. A = \cos. A' - \frac{\text{sen.}^2 A' \times \xi \gamma}{2 \cdot 3 \cdot R^2};$$

$$S = \xi \gamma \frac{\text{sen. } A'}{2}; \quad \cos. A = \cos. A' - \frac{S}{3R^2} \text{sen. } A'; \quad \text{sen. } \frac{S}{3R^2} = \frac{S}{3R^2}; \quad \cos. \frac{S}{3R^2} = 1; \quad \left(\frac{e}{3}\right)'' = \text{arc. sen. } \left(\frac{S}{3R^2}\right); \quad \frac{S}{3R^2} = \text{sen. } \left(\frac{e}{3}\right)''; \quad \cos. \left(\frac{e}{3}\right)'' = 1;$$

$$\cos. A = \cos. A' \cos. \left(\frac{e}{3}\right)'' - \text{sen. } A' \text{sen. } \left(\frac{e}{3}\right)'' = \cos. \left(A' + \left(\frac{e}{3}\right)''\right) \quad A = A' + \left(\frac{e}{3}\right)''; \quad \frac{e}{3} = A - A'; \quad \frac{e}{3} = B - B'; \quad \frac{e}{3} = C - C'; \quad e = A + B + C - 180^\circ.$$

Haciendo $R = \infty$, la superficie esférica se convierte en plana, y el triángulo esférico en un rectilíneo de lados iguales á los desarrollos de α , ϵ y γ , y llamando A' al ángulo de este triángulo rectilíneo opuesto á α tendremos:

$$\begin{aligned} \cos. A' &= \frac{\epsilon^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\epsilon\gamma} \text{ y } \overline{\cos.}^2 A' = 1 - \overline{\cos.}^2 A' = \\ &= \frac{2\alpha^2\epsilon^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4}{4\epsilon^2\gamma^2}; \end{aligned}$$

por lo cual $\cos. A = \cos. A' - \frac{\epsilon\gamma \text{ sen.}^2 A'}{2.3. R^2}$; y como

$\frac{\epsilon\gamma \text{ sen.} A'}{2}$ es la superficie del triángulo rectilíneo

$$\cos. A = \cos. A' - \text{sen.} A' \times \frac{S}{3R^2}.$$

Como la superficie S es muy pequeña con respecto al cuadrado que tenga al radio por lado, podemos establecer:

$\text{sen.} \frac{S}{3R^2} = \frac{S}{3R^2}$; y $\cos. \frac{S}{3R^2} = 1$; y representando por $\frac{e}{3}$ el número de segundos del arco cuyo

seno es $\frac{S}{3R^2}$ tendremos $\frac{S}{3R^2} = \text{sen.} \frac{e}{3}$;

y $1 = \cos. \frac{e}{3}$, de donde

$\cos. A = \cos. A' \cos. \frac{e}{3} - \text{sen.} A' \text{sen.} \frac{e}{3} = \cos. \left(A' + \frac{e}{3} \right)$;

y $A = A' + \frac{e}{3}$: $A - A' = \frac{e}{3}$.

pudiéndose encontrar por idénticos procedimientos $B - B' = \frac{e}{3}$, y $C - C' = \frac{e}{3}$. Sumando las tres igualdades anteriores nos resulta, por ser $C' + B' + A' = 180^\circ$, $e = A + B + C - 180^\circ$, que es lo que tratábamos de demostrar, en cuya expresion el valor de e se hará tanto mas pequeño, cuando la suma de los ángulos del triángulo esférico se vaya separando mas y mas de los seis rectos y se vaya aproximando á los dos, lo cual tendrá lugar cuando sean muy pequeños α , β y γ , como sucede en los levantamientos geodésicos, en que los lados son siempre de estrema pequeñez comparados con el gran radio de la esfera en que se encuentran que es de 6366 198^m aproximadamente.

Cálculo de la red geodésica.—Demostrado el teorema anterior, ninguna dificultad puede ya ofrecer el cálculo de los distintos triángulos. Se miden sobre el terreno los ángulos esféricos, y á su suma se le restan 180° ; en la diferencia e están comprendidos el esceso esférico y los errores de observacion.

Quitando á cada uno de los ángulos medidos $\frac{1}{3} e$ se obtienen los del triángulo rectilíneo equivalente, y como se tiene además medida la base que no es otra cosa que un lado desarrollado, se encuentran los otros dos de dicho triángulo rectilíneo, que tambien son arcos desarrollados. Sobre los lados encontrados haciendo en los ángulos de cada triángulo la correccion indicada, se calcula toda la red.

El exceso esférico se pudiera haber hallado aislado sin los errores de observacion. En efecto tenemos

$$\text{sen. } \frac{S}{3R^2} = \frac{e}{3}; \text{ de donde reduciendo á segundos}$$

$$\frac{e}{3} = \frac{S}{3R^2} \times \frac{1''}{\text{sen. } 1''}, e = \frac{S}{R^2} \times \frac{1''}{\text{sen. } 1''};$$

$$\text{y como } S = \frac{1}{2} \alpha^2 \text{sen. } A = \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 \text{sen. } B \text{ sen. } C}{\text{sen. } (B + C)}; \text{ se puede}$$

determinar este valor de S, con auxilio de un lado medido que puede ser la base, y de los ángulos aun no corregidos, con lo cual queda determinado e, que no depende mas que de las cantidades conocidas S, R y sen. 1''.

Durante las operaciones se pueden efectuar comprobaciones. Estas se verifican empezando la triangulacion por dos extremos opuestos, y haciendo que los últimos triángulos en una y otra tengan un lado comun. Este será obtenido por dos cálculos distintos, y caso de no resultar valor idéntico, se toma la semi-suma de los dos resultados, con tal que la diferencia entre ellos no sea mayor que el error tolerado.

Si dicha diferencia es muy pequeña, solo se corrigen en armonia con ella los ángulos de los últimos triángulos, y en caso de ser algo mayor, se tiene que hacer sufrir la correccion á los de todos. En cualquiera de los casos, las alteraciones de valor introducidas en los ángulos medidos, no deben igualar ni sobrepujar al límite de errores tolerado.

Existen otros medios de comprobacion de las operaciones, pero de no poder hacer mencion de ellos, nos ha parecido oportuno indicar el que mas al alcance está del que tenga que adquirir ligera idea de los procedimientos.

LECCION 32.

DETERMINACION DE LAS COORDENADAS, Y ORIENTACION.

Cuando nos ocupamos de determinar la verdadera posicion de los puntos en el terreno con el objeto de trasladarlos luego al papel, dijimos era necesario referirlos á un sistema coordinado en que dos de los ejes se trazaban en el plano del levantamiento, y el otro en direccion perpendicular á él, eligiendo para los dos primeros la meridiana del lugar y la perpendicular á ella por un punto convenientemente elegido. Expresamos entonces tambien, que una vez determinadas las dos coordenadas horizontales de un punto cualquiera, y conocido el ángulo que la línea que le unia con el origen formaba con la meridiana, al cual llamábamos azimut, se deducian los valores de las coordenadas de los demás puntos y azimutes de las demás líneas.

En esta leccion vamos á repetir las mismas operaciones con la diferencia introducida por la gran extension del levantamiento.

El sistema coordinado á que se refieren los puntos

situados sobre la superficie esférica, sigue compuesto de tres ejes, pero solo uno de ellos es rectilíneo y normal á dicha superficie, mientras los otros dos, contenidos en ella son arcos de círculo máximo. Tómanse como tales ejes la meridiana y el ecuador, siendo las coordenadas de los puntos, también arcos perpendiculares á dichos ejes. Las perpendiculares al ecuador toman el nombre de *latitudes*, y las perpendiculares á la meridiana de *longitudes*, de las cuales mas adelante daremos la definición geográfica.

Conserva el nombre de *azimut*, el ángulo que forma un arco de círculo máximo trazado sobre la esfera, con la dirección de la meridiana, sirviendo como en las operaciones topográficas para orientar los levantamientos.

Tampoco hace aquí falta la determinación directa de las coordenadas de todos los puntos y azimutes de todos los arcos, sino que basta el conocimiento de aquellas para un punto, y el del azimut para un arco que se dirige de él á otro dado, deduciéndose por el cálculo los datos análogos correspondientes á los demás puntos.

Como para la determinación de los valores de las longitudes, latitudes y azimutes, son de absoluta necesidad algunos conocimientos sobre el movimiento de los astros, sucintamente y solo para recordar conocimientos que suponemos adquiridos, vamos á mencionarlos.

La simple observación del firmamento, nos hace dividir los astros que en él brillan en dos clases principales: *estrellas fijas ó soles y estrellas errantes ó planetas*. Elámense así las primeras, porque en efecto están inmó-

viles en el espacio, ó á lo menos los movimientos que tienen son tan pequeños que es necesario un tiempo considerabilísimo para que sus cambios de posición puedan ser perceptibles. Los arcos que podemos suponer, ligando unas de estas estrellas á otras, afectan por su conjunto diversas figuras geométricas, que se aperciben con facilidad, siendo estas figuras siempre las mismas, y conservando constantes sus dimensiones.

En apariencia, todos los astros son arrastrados por un movimiento comun de Oriente á Occidente, produciendo esta ilusion el movimiento de la Tierra de Occidente á Oriente, en el giro alrededor de su eje efectuado cada veinticuatro horas, que nos hace atribuir á los astros el cambio de lugar en contrario sentido.

El movimiento aparente de que acabamos de hablar, produce en nosotros el mismo efecto, que lo que resultaria si se supusiesen las estrellas fijas unidas invariablemente á la parte cóncava de una superficie esférica de radio inmenso, cuyo centro estuviese ocupado por la tierra, girando dicha esfera cada veinticuatro horas alrededor de nosotros, sobre un eje que pasa por dos puntos fijos que se llaman *polos*. Al plano del círculo máximo que los contiene á ellos y al lugar de la observacion se le dá el nombre de *meridiano*, y de *ecuador* al perpendicular á él trazado por el centro de la Tierra, á cuya superficie corta segun otro círculo máximo que conserva el mismo nombre. Este movimiento aparente es completamente uniforme.

El Sol, la Luna y las estrellas errantes ó planetas nos parecen tambien arrastrados por dicho movimiento uni-

versal, pero con la diferencia, de que estos cuerpos no permanecen unidos á la esfera que hemos supuesto en los mismos puntos, sino que tienen un movimiento propio, que les hace variar de posicion sobre aquella, recorriendo círculos diferentes, con diferentes velocidades, pero siempre de Occidente á Oriente. El Sol describe su circunferencia en un año, y la Luna en veintisiete dias y un tercio.

Parece inútil advertir, que en realidad, el Sol está fijo, y la Tierra, y los demás planetas giran alrededor del Sol. No faltan autores, tal vez de imaginacion demasiado viva, que supongan á las estrellas fijas, como centros de otros tantos sistemas planetarios.

Las estrellas se clasifican por sus magnitudes, llamándose de primera, segunda, tercera, etc. Hasta las de la sexta magnitud se pueden percibir á simple vista en noches oscuras y atmósfera despejada. Las de un orden mayor, no son visibles sino por medio de aparatos convenientes. Por lo demás, se comprende que la estrella que es de primera magnitud para un observador, puede parecerle á otro de segunda.

La débil claridad, que en forma de faja irregular divide al firmamento en las noches serenas, y que se llama *via láctea*, es producida por millones de estrellas que no se pueden observar sino con aparatos de gran aumento.

En las observaciones geodésicas, no se toman nunca como puntos de mira, las estrellas de pequeña magnitud, eligiéndose siempre aquellas cuyo brillo es muy considerable.

Como la nomenclatura individual de las estrellas no es posible, se ha adoptado el medio de considerar reunidas cierto número de ellas, llamándose á tales grupos *constelaciones*.

Para indicar en cada constelacion las diversas estrellas, se las ha denominado por una letra griega ó romana, aunque la generalidad de las veces se las suele indicar por el sitio que ocupan en la constelacion respectiva, diciendo «*la cola de la Osa mayor*» por ejemplo; debiendo advertir que las constelaciones no afectan las formas correspondientes á sus nombres, pues estos tienen su origen en las costumbres religiosas y en las alusiones mitológicas de los antiguos pueblos, de que nosotros los hemos recibido, conservándolos como símbolos.

En el asunto de estas lecciones solo hemos tenido ó tendremos que recurrir á tres constelaciones: la Osa mayor, la Osa menor y Casiopea.

El Carro ú Osa mayor está formada por seis estrellas de segunda magnitud y una de tercera.

Volviendo la espalda al S en una noche despejada se ve á dicha constelacion, fig. 10 (lám. 46) formando las α , ϵ , γ y δ , un gran cuadrilátero, y las otras tres una línea curva cuyo primer elemento es prolongacion de la diagonal. Las tres constelaciones de que nos ocupamos pertenecen al número de las que no se ocultan nunca para nuestra posicion sobre el globo.

La Osa menor, afecta casi la misma figura que acabamos de indicar, pero con dimensiones menores y posicion inversa. Lo que hace notable á esta constelacion es

el contener á la estrella polar, que por su aproximacion al polo parece inmóvil en el espacio. Prolongando la línea que une las estrellas α y ϵ de la Osa mayor, una cantidad igual próximamente á su mayor dimension, se encuentra la polar α , última de la cola de la Osa menor. El polo está á $1^{\circ} 36'$ de distancia de la estrella polar, sobre el arco que va de ella á la estrella Σ primera de la cola de la Osa mayor.

La constelacion Casiopea en un grupo de estrellas que se distinguen por la forma de γ que tiene su conjunto. Está al otro lado del polo que la Osa mayor, ó cerca del horizonte boreal la una, cuando está la otra hácia el zenit, segun la hora y la estacion, fig. 44 (lám. 46). Las estrellas de Casiopea son de tercera y cuarta magnitud.

El Sol es un cuerpo de mucho mayor volúmen que la tierra y dotado de luz propia. Este foco de luz y de calor es una verdadera estrella, y como tal está inmóvil en el espacio. Sus dimensiones nos parecen mayores que las de las demás, por la inmensa distancia á que estas se encuentran de nosotros.

Cuando se efectúa la observacion simultánea del Sol y de una estrella que aparezca poco separada de él, se nota que aquel parece cambiar de lugar con relacion á ella. A la puesta del Sol, si nos fijamos en una estrella cercana á él, y que efectúe mas tarde su inmersion aparente, esta estrella parece en los dias siguientes que se aproxima mas y mas, hasta que efectúa su inmersion muy poco despues que dicho astro, desaparece luego en el cuerpo luminoso, al cabo de unos dias se ve apa-

recer la estrella en el horizonte un poco antes de la salida del Sol, y en los siguientes se va alejando mas y mas, en contrario lado que aquel en que se acercaba.

Como las estrellas permanecen en la bóveda celeste, sin tener mas movimiento que el de esta aparentemente, nos figuramos que el Sol, por un movimiento de Oeste á Este efectúa una revolucion entera en un año, recorriendo cierto número de constelaciones que le marcan su camino.

Componiendo la rotacion general de la esfera celeste con el movimiento del Sol, resulta el efecto aparente, origen de antiguas y ya desechada hipótesis sobre el movimiento de los astros, de que la Tierra está inmóvil en el espacio, dando la esfera celeste una vuelta entera alrededor de la línea de los polos en un día exacto, mientras el Sol, aunque arrastrado por este movimiento general, describe en sentido contrario sobre esta esfera un arco de círculo máximo, de una longitud próxima á un grado, cada dia, recorriendo así el círculo entero en un año. En realidad, el Sol está inmóvil como las demás estrellas fijas, y es la Tierra la que todos los dias da una completa revolucion sobre su eje, al mismo tiempo que recorre una órbita elíptica, en uno de cuyos focos está el Sol, tardando un año en recorrerla. Escusado es advertir que nuestros movimientos se efectúan en contrarios sentidos que los aparentes del Sol.

La órbita que recorre este en su movimiento aparente se llama *ecliptica*. Esta no se confunde con el ecuador, sino que su plano forma con este un ángulo de $23^{\circ} 28'$

que se llama *oblicuidad* de la eclíptica. La línea segunda cual se cortan se llama *de los equinoccios*.

Para nuestro objeto, que es el tener puntos de observación á grandes distancias, cuya ley de variación de lugar sea conocida, adoptaremos el movimiento aparente para todas las observaciones.

(*) La Luna cuyo diámetro es $\frac{3}{11}$ del de la tierra, describe en realidad una elipse en cuyo foco está situado el centro de nuestro planeta.

Sus fases y los eclipses de Sol y de Luna, son debidos á las posiciones relativas de estos tres astros.

El estudio que desde la mas remota antigüedad se viene haciendo de los cuerpos celestes, ha hecho que se conozcan con estrema precisión las leyes, direcciones y velocidad de sus movimientos. Por medio de las fórmulas que ligán tales datos, se han construido tablas, que por medio de simples adiciones nos dán la posición de cualquier astro en cada instante. Llámense á estas tablas, *astronómicas*, y por medio de ellas se forman las *efemérides*, que son cuadros que expresan los lugares ocupados por el Sol, la Luna y principales astros en cada día, el momento de su salida y de su puesta, etc.

Para conocer la posición de los astros en la bóveda celeste ha sido necesario referirlos á un sistema de coordenadas curvas, que vamos á dar á conocer.

Sea para esto, fig. 12 (lám. 16) T la tierra fija en el

(*) Obsérvese que no nos detenemos en mas detalles que en los parámetros precisos para nuestro objeto.

centro de la esfera celeste, CBDA el ecuador, FAEB la eclíptica y AB la línea de los equinoccios.

Se llama *declinacion* de un astro S, el arco SP bajado perpendicularmente de él al ecuador, y se llama *ascension recta* la distancia AP que media entre el pié de este arco y el punto A extremo de la línea de los equinoccios.

Llámase la declinacion *boreal ó austral*, segun se encuentre el astro á uno y otro lado del ecuador, y se cuenta desde 0 á 90° que es la declinacion de los polos. Las ascensiones rectas se cuentan de 0 á 360° de Oeste á Este á partir del punto A, dando la vuelta entera al círculo ecuatorial. La declinacion y la ascension recta son las dos coordenadas que fijan la posicion del punto en la bóveda celeste.

Refiriendo los astros al plano de la eclíptica, se tienen otras dos coordenadas circulares, que determinan la posicion de cada uno, y que se llaman respectivamente *longitudes* y *latitudes*. Son las segundas los arcos tales como SQ bajados del astro perpendicularmente á la eclíptica, y las primeras las distancias que del punto A median al pié de dicho arco perpendicular. Estas se cuentan de A hácia el Este de 0 á 360° y aquellas de 0 á 90. Para evitar los grandes números que resultarían en la medicion de longitudes se ha adoptado una unidad de 30° llamada signo, de los cuales hay doce en la circunferencia. Al concluir el Sol de recorrer cada uno de ellos está cerca de una constelacion que dá su nombre al signo, y á todos se les llama signos del *zodiaco*. El correspondiente al punto A es el *Aries* que se representa

por la letra γ , y el del B el *Libra* que se representa por Ω .

No deben confundirse estas longitudes y latitudes con las de los mismos nombres correspondientes á las coordenadas de los puntos de la superficie terrestre.

Cuando el Sol recorriendo su órbita, se encuentra en los puntos A y B del ecuador, los días son iguales á las noches en todos los puntos de la Tierra. Estos son los *equinoccios*. En A ó γ tiene lugar el de primavera, el 21 de Marzo, y en B ó Ω el de otoño el 21 de Setiembre. Ya hemos dicho que el punto A se toma como origen de las ascensiones rectas.

Cuando el Sol llega á los puntos E y F, lo cual tiene lugar en verano é invierno, cuando entra dicho astro en los signos Cáncer y Capricornio, tienen lugar los *solsticios*.

Como la esfera celeste gira alrededor de nosotros en 24 horas exactas, el origen A de las ascensiones rectas gira al mismo tiempo, y recorre todos los puntos del espacio ABCD. Recorriendo en todo el giro 360 grados se puede establecer una equivalencia que nos permita traducir los arcos en tiempo, siendo $360^\circ = 24^h$, $1^h = 15^\circ$, de modo que nos será igual decir «un arco de 30° que un arco de 2^h .»

Los planos del ecuador y de la eclíptica, no conservan en su giro simultáneo la misma posición relativa. Además de variar su ángulo una pequeña cantidad, la línea de los equinoccios gira muy lentamente en el transcurso de los siglos, alrededor del punto T, en el sentido de A á F. En este movimiento adelanta el punto A unos 50" por año. Esto es lo que toma el nombre de *precision*

de los equinoccios Por este fenómeno, las longitudes de los astros, crecen todos los años en $50''$, lo que altera en algo las ascensiones rectas y las declinaciones.

Además el eje pp' de los polos, por un pequeño balanceo, hace que los puntos p y p' cambien algo de lugar, sucediéndole lo mismo en consecuencia al punto A.

Estos movimientos están tan bien estudiados, que no introduce ninguna perturbacion en las observaciones la variacion de lugar del punto A, puesto que en cualquier instante se puede conocer el que ocupa.

En una de las lecciones anteriores explicamos lo que se entendia por *refraccion*, fenómeno que por otra parte en el curso de Física teníamos perfectamente conocido y aplicado. Solo añadiremos aquí que existen tablas que dan la correccion de refraccion para un ángulo de altura ó una distancia zenital dada. Así cuando se observa que una estrella se eleva sobre el horizonte una cantidad $40^\circ, 15' 48''$, como entonces por las indicadas tablas, la refraccion es de $5', 11'', 8$, restando se encuentra que la verdadera altura es de $40^\circ 40' 36'' 2$.

Si en vez de tomar el ángulo de altura, hubiéramos considerado la distancia zenital, se hubiera debido añadir á su valor la correccion $5', 11'', 8$.

Quando se observa un astro S desde un punto C de la superficie de la Tierra, fig. 43 (lám. 16) se le refiere al punto S' de la esfera celeste, correspondiente á la direccion del rayo visual CS'. Observando el mismo astro desde otro punto de la superficie, nos parecería colocado en otro punto de la bóveda celeste, por lo cual, como

las efemérides están formadas para servir en todos los puntos de la Tierra, ha sido necesario elegir en ella uno hipolético constante de observacion, siendo el centro O de la esfera. Como desde él no se puede observar, es necesario corregir la operacion hecha en la superficie de un ángulo igual á aquel CSO, bajo el cual desde el astro se vería al semi-diámetro de la tierra, cuyo ángulo se llama *paralaje*.

La gran distancia á que las estrellas se encuentran de nosotros, hacen que para ellas el paralaje se pueda considerar como nulo. Para el Sol es de cerca de 8", y para la Luna llega en ciertos casos á 1°.

El paralaje se efectúa en un plano vertical como la refraccion, pero actúa en sentido contrario, y parece bajar el astro, y es necesario añadirle á las alturas que se suponen observadas desde O, para obtener las que se observarían desde C.

Cuando el astro S está en el horizonte del observador, el ángulo CSO fig. 14 (lám. 16) se llama *paralaje horizontal*.

Tiempos verdadero, medio y sideral.—Hay tres maneras de apreciar el tiempo trascurrido. 1.º Por la revolucion diurna del Sol verdadero. 2.º Por la de un astro ficticio que se llama *Sol medio*, y 3.º Por la de las estrellas.

Como la velocidad y la distancia del Sol varían en los diferentes meses, el Sol verdadero no emplea cada día del año el mismo tiempo en concluir su diurna revolucion, de suerte que de un mediodía al siguiente,

aunque se divida el tiempo trascurrido en 24 horas, los días serán desiguales, y en consecuencia las horas desiguales también. Además este astro no describe en su movimiento el ecuador, cuyos grados son la medida del tiempo, de modo que aunque la marcha del Sol fuese uniforme en una órbita circular, los días solares serían desiguales aun.

Pero si se imagina un Sol que en el trascurso de un año describiese el ecuador con movimiento uniforme, los pasos de este astro por el meridiano de un lugar cualquiera, estarían separados por tiempos iguales. El tiempo marcado por este Sol es el «*tiempo medio.*»

Como la marcha del astro verdadero es perfectamente conocida, y la del ficticio es una cuestión de cálculo, se han formado tablas de todas las separaciones de uno y otro. Toma el nombre de *ecuación del tiempo* la diferencia entre las horas indicadas por los dos soles, ó lo que es lo mismo lo que hay que agregar á la hora verdadera para tener la hora media, ó la diferencia de sus ascensiones rectas traducidas á tiempo, de modo que:

$$\text{hora media} = \text{hora verdadera} + \text{ecuación del tiempo.}$$

Los días *civiles* empiezan y concluyen á medianoche, y se componen de dos períodos de 12 horas cada uno, cuyo respectivo origen es el paso del Sol por el meridiano en su parte superior ó en su parte inferior.

El día *astronómico* empieza á mediodía, y se cuentan las horas sin interrupción hasta 24, así el 29 de Mayo á las once de la mañana, es para el astrónomo el 28 á las 23.

Como la revolución diurna de la esfera celeste es

perfectamente uniforme, se toma como apoyo para medir el tiempo. El día *sideral* ó las 24 horas siderales es el tiempo que trascurre desde el paso de una estrella cualquiera por el meridiano hasta su vuelta á este plano. Se toma como principio del día sideral, el instante en que el equinoccio de primavera γ , origen de las ascensiones rectas pasa por el meridiano.

Los relojes están arreglados por el tiempo medio.

El Sol medio se supone cruza el Ecuador en un año ó lo que es lo mismo en 365,2422218124 días, y siendo recorridos uniformemente los 360° de dicha circunferencia, tenemos para encontrar el arco descrito en un día

$$\frac{360^{\circ}}{365,2422218124} = 1^{\circ} - 51'' , 670 = 59' 8'' , 33022 = \\ = 0^{\circ} , 985547283$$

que nos indica el crecimiento de la ascension recta del Sol en cada día medio. En este, pasa por el meridiano un arco de ecuador de 360° 59' 8" , 33022; ó lo que es lo mismo, pasa un arco de 15° , 2' 74" , 847 en una hora media, 15' , 2" , 464 en un minuto ó 15" , 041 en un segundo de tiempo.

Por medio de una simple proporcion, se deduce el tiempo necesario para describir el arco de 59' 8" , 33022 cantidad que adelanta el Sol medio cada día, sobre el ecuador en su marcha hácia el Este, cuya cantidad es 3' , 55" , 90945 de tiempo medio.

Esta cantidad es el exceso de duracion del día medio sobre el sideral, pues este último no expresa sino el tiempo necesario para el paso de 360° por el meridiano.

Tambien es el tiempo medio $3', 55'', 90945$ el que el Sol medio emplea cada dia en llegar al meridiano, sobre el que emplean las otras estrellas.

Para traducir la cantidad encontrada á tiempo sideral diremos: si 360° se describen en 24 horas siderales, para describir $0^\circ, 985647$ ¿cuánto tiempo se empleará? encontrándose por resultado $2' 56'', 555348$ que es en tiempo sideral el valor del arco de ecuador descrito cada dia por el Sol medio, ó la cantidad en que aumenta su ascension recta en un dia medio.

Así, cuando se haya determinado la ascension recta del Sol medio en una época cualquiera, se podrá obtener la actual, aumentando á aquel valor tantas veces $2', 56'', 555348$ como dias hayan trascurrido desde aquella determinacion.

Si suponemos que cada astro gira acompañado de su círculo horario, llamando así á un círculo máximo que pasa por los polos, en el instante del paso, este círculo se confunde con el meridiano del lugar; en otro instante cualquiera estos dos planos forman un ángulo que toma el nombre de *ángulo horario*.

En la fig. 13 (lám. 16), CA es el meridiano del lugar, γ el origen de las ascensiones rectas, γA la hora sideral actual, γE la ascension recta de un astro cualquiera, y EA el tiempo trascurrido desde su paso por el meridiano, ó lo que es lo mismo su ángulo horario. De la expresada figura se deduce $\gamma A = \gamma E + EA$, y si el astro estuviese en E' , $\gamma A = \gamma E' - AE'$, ó lo que es igual

hora sideral = ascension recta del astro \pm ángulo horario.

De modo que conociendo con anterioridad la ascension recta y el ángulo horario se puede encontrar la hora sideral en que el astro ocupa la posicion cuyo pié de coordenada es E ó E'.

Dadas ya estas nociones, indispensables para nuestro objeto, vamos á pasar á él.

Determinacion de latitudes.—Toma el nombre de *latitud* de un punto, el arco de meridiano comprendido entre este punto y el ecuador. Se cuentan las latitudes de 0 á 90° teniendo su origen en el ecuador, llamándose *boreal* ó *austral* segun el hemisferio en que esté situada.

La latitud de un punto cualquiera, es igual á la altura del polo sobre el horizonte de dicho punto.

Para demostrarlo, consideremos la fig. 16 (lám. 16) en la cual PP' es el eje del mundo, pp' los polos de la Tierra; el plano EE' perpendicular al eje, es el ecuador; A el punto cuya latitud se quiere encontrar; MM' su horizonte racional, y CAO la vertical del punto. Segun la definicion, la latitud del punto A, es el arco AE, medida del ángulo AOE. Si ahora desde el punto A tratamos de trazar una recta que pase por el polo P del mundo, esta será la AB paralela á PP' á causa de la inmensa distancia á que el punto P se halla del A, no cabiendo ya duda sobre la igualdad de los ángulos BAM' y AOE, por tener sus lados perpendiculares, que es lo que deseábamos demostrar.

De modo que si conseguimos medir desde un lugar cualquiera el ángulo de elevacion del polo sobre el horizonte, el valor encontrado será la latitud.

Esta puede determinarse valiéndonos de las estrellas circumpolares, que son para cada observador, las que no se ocultan nunca por bajo de su horizonte. Estas describen un círculo alrededor del polo, y pasan dos veces por el meridiano de cada lugar durante la revolución diurna, por lo cual si medimos su ángulo de elevación en cada uno de los dos pasos y hallamos el valor medio de las dos observaciones, nos resultará la elevación sobre el horizonte del polo, y por consiguiente la latitud. Así en la fig. 17 (lám. 16), en la que A es el punto cuya latitud se quiere hallar, AZ su meridiano, P el polo, y SS' las posiciones de la estrella circumpolar en los dos pasos, la semi-suma de los dos arcos AS, AS' nos dará la latitud del lugar, y su semi-diferencia la distancia de la estrella al polo, complemento de su declinación.

La estrella que generalmente se observa es la polar, ó alguna otra de la Osa menor.

También puede encontrarse la latitud por el paso de una sola estrella por el meridiano fig. 18 (lám. 16).

Se mide para ello con cuidado, la distancia zenital de un astro tal como S, en el momento de su paso por el meridiano del lugar cuya latitud deseamos determinar. Sea Z el zenit, P el polo, EO el ecuador, y AO el horizonte de A.

La distancia zenital medida será la SZ, y SE será la declinación del astro, teniendo entonces

$$EP=90^{\circ}, AZ=90^{\circ}; \text{ luego } AE=ZP$$

$$AE=ZP=90^{\circ}-\text{latitud}=90^{\circ}-ZE; \text{ luego}$$

$$\text{latitud}=ZE=ZS+ES; \text{ cantidades conocidas.}$$

Si el astro S' estuviese mas bajo que el ecuador tendríamos: $\text{latitud} = ZE = ZS' - ES'$, siendo entonces ZS' , la distancia zenital del astro y ES' su declinacion,

Si el astro estuviese como el S'' entre el polo y el zenit tendríamos

$\text{latitud} = ZE = S''E - ZS''$, en que $S''E$ es la declinacion y ZS'' la distancia zenital.

Determinacion de diferencia de longitudes, ó de longitudes.—Establecemos esta distincion, porque la operacion que generalmente se efectúa, es hallar la diferencia de longitud que entre dos puntos existe, siendo necesario para hallar la longitud de uno de ellos añadir esta diferencia á la longitud del otro ya conocida.

Generalmente se adopta en cada país un meridiano como *principal*, que pasa por un observatorio astronómico y se toman las longitudes de los demás puntos con relacion á este meridiano, entendiéndose por *longitud* la distancia á que se encuentra el punto del meridiano principal contado en grados de ecuador ó de paralelo. Se concibe que la diferencia de longitudes entre dos puntos es el número de grados que mide el ángulo formado por sus planos meridianos.

La determinacion de longitudes está ligada á las relaciones entre el tiempo y el valor gradual de los arcos de ecuador, que hemos establecido.

Cuando se trata de encontrar la diferencia de longitud entre dos puntos terrestres poco distantes, que es lo que sucede en el levantamiento de la carta de un estado cualquiera, se enciende en lugar elevado en una

noche de atmósfera despejada, una gran hoguera, destinada á ser tapada súbitamente por una pantalla.

Dos observadores, colocados respectivamente en las estaciones con un cronómetro, arreglado cada uno por el meridiano del lugar en que se encuentre, observarán en el mismo instante físico la ocultacion de la hoguera, pero los cronómetros indicarán horas diferentes; su diferencia será la de longitud expresada en tiempo, que se podrá reducir á valor gradual por la relacion $1^{\text{hora}} = 15^{\circ}$.

A la hoguera se la ha sustituido á veces por la inflamacion de cierta cantidad de pólvora, ó por luz reflejada por superficies brillantes de forma parabólica.

Para tener con seguridad la diferencia de longitudes, se tiene que repetir muchas veces la operacion y tomar el término medio de todas las esperiencias.

Cuando se tengan que hacer operaciones de mas precision, hay que fundarlas en observaciones astronómicas.

Durante los eclipses de Luna los instantes en que entran y salen de la sombra sus manchas, se pueden fijar con precision, siendo los mismos para todos los puntos de la Tierra. Siendo en poco número los eclipses de Luna, se suelen tomar como instantes de observacion aquellos en que se verifican las ocultaciones de otro astro por la Luna, y aun algunas veces, en el momento en que un satélite de Júpiter entra en la sombra de este planeta.

El modo de observacion es igual al indicado.

Determinacion de un azimut.—El *azimut* de un lado de un triángulo esférico cualquiera, es el ángulo ho-

rizontal que forma su plano vertical, con uno ú otro de los meridianos que pasan por sus extremos. Estos ángulos se cuentan de 0 á 360° partiendo del Norte al Este, Sur y Oeste.

La determinacion del azimut es una de las principales operaciones de Geodésia, sirviendo para orientar la red, lo que en los levantamientos de pequeña extension se conseguia por medio de la brújula.

Solamente, como ya en otro lugar hemos dicho, se determina uno de estos azimutes, deduciéndose los otros por el cálculo, procediendo de estacion á estacion, salvo las verificaciones indispensables que obligan á medir algunos otros, para compararles á los resultantes del cálculo.

Entre los métodos que existen para medir el azimut de un lado citaremos el siguiente, fig. 19 (lám. 16).

Sea ZZ' (*) el lado cuyo azimut queremos encontrar, el cual segun la definicion será el PZZ' siendo P el polo.

La consideracion de la figura nos indica que el ángulo α buscado, es la suma de los α y α' , de cuya determinacion nos vamos á ocupar.

La estrella polar, separada del polo $1^{\circ} 39'$, describe cada 24 horas un círculo alrededor del polo.

Existen dos posiciones A y A' en las cuales la estrella estará á su máximo alejamiento del meridiano de Z, en cuyas posiciones parece que se queda sin movimiento alguno. En esta disposicion es como se la debe observar,

(*) Hay que advertir que en la figura, Z y Z', son los zenites de los puntos extremos del lado en la esfera terrestre

con el objeto de poder obtener por varias repeticiones el valor verdadero del ángulo α' , uno de los deseados.

Para ello, es necesario saber la hora en que está en la posición A, para cuyo conocimiento es indispensable el del ángulo horario ZPA.

Para adquirirlo, observemos, que por las propiedades de los arcos trazados en la superficie de la esfera, entre el normal PA y el tangente ZA existe perpendicularidad, de modo que el triángulo PAZ es rectángulo en A.

Observemos además que AP es el complemento de la declinación δ del astro, y que PZ es el complemento de la latitud l del lugar, luego

$$AP = 90^\circ - \delta \quad \text{y} \quad PZ = 90^\circ - l;$$

en el triángulo PAZ se tiene:

$$\begin{aligned} \cos. P &= \frac{\cos. AZ - \cos. PA \cos. ZP}{\text{sen. PA} \text{sen. ZP}} = \\ &= \frac{\cos. AZ - \text{sen. } \delta \text{sen. } l}{\cos. l \cos. \delta} \end{aligned}$$

en virtud de la fórmula de trigonometría

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{sen. } c}, \text{ y de haber sustituido en}$$

lugar de PA y ZP sus valores.

Siendo recto el ángulo en A, y por la fórmula trigonométrica $\cos. a = \cos. b \cos. c$, tenemos

$$\cos. PZ = \cos. PA \cos. AZ; \text{ ó } \text{sen. } l = \cos. AZ \times \text{sen. } \delta; \text{ de}$$

donde: $\cos. AZ = \frac{\text{sen. } l}{\text{sen. } \delta}$ y sustituyendo

$$\begin{aligned} \cos. P &= \frac{\frac{\text{sen. } l}{\text{sen. } \delta} - \text{sen. } \delta \text{ sen. } l}{\cos. \delta \cos. l} = \frac{\text{sen. } l \left(\frac{1}{\text{sen. } \delta} - \text{sen. } \delta \right)}{\cos. \delta \cos. l} = \\ &= \text{tang. } l \left(\frac{1 - \text{sen.}^2 \delta}{\text{sen. } \delta \cos. \delta} \right) = \text{tang. } l \cot. \delta. \end{aligned}$$

Hallando el arco correspondiente á este coseno, y substituyéndolo en la ecuacion: *hora sideral* = *ascension recta del astro* \pm *ángulo horario*, tendremos la sideral en que la estrella polar está en el punto A de su máximo alejamiento, en la cual debemos hacer la observacion, muchas veces repetida del ángulo α' , por medio de un buen teodolito.

El α se encuentra por la relacion

$$\frac{\text{sen. } \alpha}{\text{sen. } PAZ} = \frac{\text{sen. } PA}{\text{sen. } PZ}, \text{ ó lo que es igual}$$

$$\text{sen. } \alpha = \frac{\cos. \delta}{\cos. l};$$

teniendo en consecuencia conocido el azimut por la suma $\alpha + \alpha'$.

Conociendo el lado y el azimut, se encontrará si se quiere la declinacion magnética, para lo cual no habrá mas que dirigir una visual en direccion del meridiano astronómico y el ángulo que con él marque la aguja será aquella cantidad.

LECCION 35.

REPRESENTACION EN EL PAPEL.—CARTAS Y PROYECCIONES. PROYECCIONES PERSPECTIVAS.

El medio mejor para representar la superficie terrestre para formarnos perfecta idea de ella, es formar un globo artificial. Debe contener este, la representacion en pequeño de la Tierra, con sus mares, sus islas y sus continentes, indicando tambien las cordilleras, rios y ciudades principales. Todos estos puntos, están representados sobre la esfera en su verdadera posicion, y colocados en ella por observaciones astronómicas y las medidas geodésicas.

Pero un globo de pequeño radio no puede contener mas que los principales accidentes, y uno que lo tenga muy grande es de difícil manejo, siendo necesario obtener la representacion sobre superficie plana.

La imposibilidad que existe, de efectuar el desarrollo de una superficie esférica, hace que dichas representaciones estén algo deformadas, siendo tanto mayores estas deformaciones, cuanto mas grande sea la estension que

::

se trata de desarrollar, tendiendo á desaparecer con la disminucion de las dimensiones de aquella.

Pueden comprender dichas representaciones: ó todas las partes del globo, una sola de ellas, un Estado ó provincia cualquiera, ó una pequeña porcion de terreno. En el primer caso toman el nombre de *mapa-mundi* y cuando tienen la forma circular *planisferios*; en el segundo se llaman *cartas generales* ó *Geográficas*; en el tercero *cartas particulares* ó *corográficas*; y las últimas son los *planos topográficos*.

Existen aun otras cartas destinadas á algun uso particular como son las *hidrográficas* destinadas á los marios, las *mineralógicas*, *geológicas*, etc.

Las representaciones se obtienen todas por ciertas construcciones, en las cuales no se toma en consideracion el achatamiento de los polos, considerando á la tierra perfectamente esférica.

Dichas construcciones toman el nombre de *proyecciones*. Las hay de dos clases, las unas son verdaderas perspectivas del globo ó de las partes de su superficie tomadas desde distintos puntos de vista, y sobre distintos planos, y las otras no son mas que especies de desarrollos, sujetos á leyes aproximadas, y apropiadas por su forma, á conservar las dimensiones que con mas exactitud se deseen representar.

Las primeras se dividen en dos clases: *ortográficas* y *stereográficas*.

Es *proyeccion ortográfica* aquella en que la superficie de la esfera está representada sobre el plano de un cír-

culo máximo, suponiéndose el ojo del observador á una distancia infinita de los dos hemisferios, teniendo necesidad de recordar, que para que la proyeccion sea una figura algo semejante á la del terreno, es necesario que el eje de figura de este contenga al punto desde donde se mira, y que el plano de proyeccion sea perpendicular á dicho eje. La figura del globo, nos hace conocer que los rayos que pasen próximos al punto culminante del hemisferio que se trata de representar, siendo próximamente normales á la superficie, proyectarán la estension en su verdadera magnitud mientras los que choquen en los puntos de la esfera próximos al plano de proyeccion, verificándolo muy oblícuamente, darán las magnitudes muy disminuidas, de modo que la deformacion será mayor en las partes que mas se alejen del centro de la proyeccion. Este defecto hace que con las ortográficas no se pueda llenar ninguno de los objetos que la Geografía y la Geodésia se proponen, por lo cual solo trataremos ligeramente de su construccion.

Debemos advertir antes, que en todas las proyecciones, cualquiera que sea su clase, no se determina la posicion de todos los puntos notables por los medios que vamos á indicar, sino solo las de los meridianos y paralelos, quedando de este modo dividida la representacion en cuadriláteros rectilíneos, curvilíneos ó mistilíneos, correspondientes á los curvilíneos de la esfera, colocando despues en cada uno de dichos cuadriláteros, los puntos notables contenidos en él por sus distancias á los lados.

Tanto las proyecciones ortográficas como las stereográficas pueden ser de tres clases: 1.^a El plano de proyeccion es el ecuador, y el ojo se supone colocado en uno de los polos, en cuyo caso la proyeccion se llama *polar*. 2.^a El plano de proyeccion es un meridiano, generalmente el de la isla de Hierro (Canarias) que corta al globo en dos hemisferios, conteniendo el uno la América y el otro la Europa, el Asia y el Africa, que se llama *ecuatorial*, puesto que el ojo está situado en un punto del ecuador, y 3.^a La que tiene como plano de proyeccion el horizonte de un lugar cualquiera, en cuyo caso se llama *horizontal*, suponiéndose colocado el observador en un punto cualquiera entre el ecuador y los polos. En las proyecciones de una porcion de terreno de magnitud relativamente pequeña, se suelen usar las llamadas *centrales*, en las que el observador se supone colocado en el centro de la Tierra, y se recibe la representacion sobre el plano tangente á la superficie que se proyecta en su punto céntrico.

Pasemos ya á ocuparnos de la construccion de las ortográficas.

Proyeccion ortográfica polar. Fig. 1.^a (lámina 17.) Las líneas AB y CD son dos meridianos que se cortan en ángulo recto en E que es la proyeccion del polo y el centro de la carta. La circunferencia ACBD es el ecuador, sobre el cual se recibe la proyeccion. Se divide esta circunferencia de 10 en 10 grados ó de 5 en 5, y los diámetros *a'a''*, *b'b''*, *c'c''* serán los meridianos que pasen por los puntos de division, y bajando desde los

a', b', \dots , perpendiculares al diámetro CD, se tendrán los radios con que los paralelos deben describirse. Teniendo trazados los meridianos y paralelos, queda ya construida la proyeccion como antes indicamos.

Proyeccion ortográfica ecuatorial, fig. 2.^a (lámina 17).—Se trazan las líneas pp', EE' que se cortan en ángulo recto, siendo una de ellas la proyeccion de la línea de los polos PP' y la otra la del ecuador EE' .

Su interseccion es el centro del plano de proyeccion, circunscrito en el espacio, por el meridiano $PEP'E'$. Compréndese que los paralelos se proyectarán segun líneas paralelas al ecuador, que interceptarán sobre la circunferencia de la carta, á contar de EE' arcos respectivamente iguales á la latitud de dichos paralelos, quedándonos solo por construir los meridianos. Sea uno de ellos el $PBAP'$ del cual vamos á construir una de las mitades. Por de pronto podemos conocer será una elipse, cuyo trazado por puntos se debe hacer. La proyeccion del punto A del meridiano es a , pié de la perpendicular bajada de A sobre el plano de la carta. Si se rebate el plano del ecuador sobre el de proyeccion, haciéndole girar alrededor del diámetro EE' , el punto a queda inmóvil y la perpendicular Aa , se coloca segun $A'a$ de tal manera que el arco $A'E$ es igual al EA , que es la longitud del meridiano que estamos trazando.

Luego si tomamos sobre la carta un arco $A'E$ igual á esta longitud, y bajamos la $A'a$ perpendicularmente al ecuador, se tendrá un punto de la curva buscada en a .

Del mismo modo, el punto B de la esfera, se proyecta

en b , pié de la perpendicular bajada desde B , pero haciendo girar el paralelo alrededor de ee' hasta que coincida con el plano de proyeccion, apareciendo entonces segun una circunferencia que tenga á ee' por diámetro, colocándose el punto B en B' de tal modo que el arco eB' sea igual al eB que tambien es la longitud del meridiano.

De modo que yendo á la carta, y describiendo sobre ee' como diámetro una semicircunferencia, y tomando en ella desde e' un arco eB' igual á la longitud del meridiano que se está trazando se obtendrá un punto B' , desde el cual bajando la perpendicular á ee' , se determina el b que tambien es punto de paso de la elipse, yendo de este modo determinando varios, que unidos por un continuo trazado nos darán la curva deseada, teniendo por el mismo procedimiento proyectados los demás meridianos.

La proyeccion ortográfica horizontal es poco usada y mas pesada en su construccion que las anteriores por tener que construir los elipses segun las cuales se proyectan los meridianos y paralelos, por lo que no nos ocuparemos de su descripcion pasando desde luego á las stereográficas.

Como en estas los rayos visuales son emanados de un punto á distancia finita, sus direcciones serán divergentes, produciéndose así una deformacion grande en los puntos alejados del centro que serán proyectados con una magnitud mayor que la suya, defecto análogo al que notamos en las ortográficas.

Proyeccion stereográfica polar.—Suponiendo el ojo en uno de los polos y siendo el ecuador el plano destinado á recibir la proyeccion, los meridianos estarán representados por líneas rectas, y los paralelos por círculos concéntricos.

Para efectuar la citada construccion de los meridianos, sea fig. 3.^a (lám. 17) P la proyeccion del polo sobre el plano ACBD del ecuador. Como todos los meridianos se cortan segun el eje de los polos, podemos elegir como principal uno cualquiera, que supongamos esté trazado en el papel segun AB. Dividamos la semicircunferencia ACB en veinte partes iguales, y tracemos los diámetros correspondientes á los puntos de division; siendo estos diámetros las proyecciones de los meridianos que tienen por respectiva longitud A1, A2..... siendo la diferencia de longitud entre cada meridiano y sus inmediatos 100 ó 90° segun se haya adoptado el sistema centesimal ó el sexagesimal.

Ocupémonos ahora de proyectar los paralelos. La figura 4.^a (lámina 17) nos hace conocer que uno cualquiera de ellos EE', se proyecta segun otro círculo, concéntrico al ecuador, cuyo radio es eo. Existe un medio muy sencillo para determinar la longitud de este radio. Hagamos para ello girar el plano meridiano APB, alrededor de AB como eje, rebatiéndolo sobre el ecuador. La línea PO seguirá este movimiento, permaneciendo perpendicular á AB, y se rebatirá sobre la carta, segun una posicion OD, y además el rayo visual PeE' tomará una posicion tal que el arco AE'' será igual al AE' ó á la

latitud del paralelo que se desea proyectar, de todo lo cual puede deducirse la construcción siguiente, figura 3.^a (lámina 17).

Para obtener la proyección de paralelos, cuyas diferencias de latitudes entre los inmediatos sean de 10° por ejemplo, se eleva el diámetro CD perpendicular á AB, se trazan las rectas D1, D2, D3, D4...., las cuales serán los rebatimientos sobre la carta, de las generatrices de las superficies cónicas que tengan cada una por base un paralelo, y en consecuencia las intersecciones m, m', \dots , de estas líneas con AB son las proyecciones stereográficas de puntos que pertenecen á los paralelos de 10, 20, 30.... grados de latitud, de modo que lo que ya resta es el trazado de circunferencias de radio y centro conocidos.

Proyección stereográfica ecuatorial. (*)—En este sistema, el punto de vista colocado siempre en el céntrico de la superficie del hemisferio opuesto al que se quiere proyectar, está sobre la circunferencia del ecuador, y la proyección de este es una línea recta, perpendicular al eje de los polos.

(*) Es de primera importancia recordar las dos proposiciones siguientes:
1.^a *Cualquiera que sea la posición de un círculo trazado sobre la esfera, y del ojo, situado en un punto de la superficie, la perspectiva será siempre un círculo sobre el plano perpendicular al radio dirigido por el ojo*, figura 5.^a (lámina 17). En efecto, si el plano del círculo NN' es perpendicular al horizontal AOB, que contiene al ojo en su punto O, los rayos visuales dirigidos á dicha curva formarán un cono oblicuo NON' de base circular, cuyo eje Oc termina en el centro c de dicho círculo. El plano vertical AB corta á este cono según una curva nn' que es la perspectiva pedida, y que se trata de demostrar es un círculo. Si se hacen girar las líneas NO, N'O alrededor del eje Oc, producirán dicho cono NON', pasando sucesivamente por todos los puntos

Los paralelos se proyectan del modo indicado en la figura 6.^a (lámina 17). Sea sobre la carta, ee' la proyeccion del ecuador EE' , y pp' la del eje PP' siendo O el centro de la carta ó la proyeccion del punto de vista C , sobre el plano de la proyeccion, ó meridiano $PAEP'E'A'$ que aquí consideramos como principal, y que sobre la carta, está representado por la circunferencia $pep'e'$. Como la proyeccion stereográfica de un paralelo AA' es una circunferencia, y semejante línea está perfectamente determinada cuando se conocen tres de sus puntos, vamos á tratar de construir las proyecciones de tres de los puntos del paralelo AA' . Los arcos iguales AE , $A'E'$, mi-

del círculo NN' y de su perspectiva nn' . Una semi-revolucion lleva el punto n á m y el n' á m' , de manera que la recta nn' toma la posicion mm' , que es el eje de la seccion despues de girar tambien. Pero el ángulo $N = n'$, pues-

to que el uno tiene por medida $\frac{1}{2} AN' + \frac{1}{2} AO$ y el otro,

$$\frac{1}{2} AN' + \frac{1}{2} OB, \text{ cuyos dos valores son iguales.}$$

Por ello $N'NO = mm'o$; mm' es paralela á NN' y el cono está cortado por un plano paralelo á la base, y la seccion mm' , y por consiguiente la nn' que es la *antiparalela* son círculos, estando además demostrado que cuando un cono oblicuo de base circular NN' , está cortado por un plano nn' , tal, que se verifique $N' = n$, la seccion llamada antiparalela es un círculo.

El mismo hecho tiene lugar, cuando el plano del círculo NN' , tiene una direccion cualquiera con relacion al horizontal AOB . En efecto, figura 7.^a (lámina 17) dirijamos al centro e del círculo NN' la recta Ce , esta recta será perpendicular á su plano, y medirá su distancia al centro C de la esfera. El plano COe , dirigido por el eje Oe del cono y la recta Ce , es perpendicular al plano NN' . Corta á la esfera segun el arco QL , y al plano de perspectiva segun CL . Esta perspectiva es la curva nn' . Se nota que el círculo NN' y su perspectiva nn' están con relacion al plano OCe en las condiciones del caso anterior. Bastará hacer girar el plano COe alrededor de QO , para rebatirlo sobre QBA para que esté todo en el mismo estado que en el caso anterior ya citado.

2.^o En la proyeccion stereográfica la perspectiva del ángulo de dos curvas cualesquiera, no difiere del ángulo mismo.

::

den la latitud conocida del paralelo, por lo que tomando dos arcos $ea, e'a'$, iguales á esta latitud, tendremos dos puntos a, a' del paralelo de la carta.

Además, el meridiano $PCP'B$, que en el espacio encuentra el punto de vista C , corta á la circunferencia del paralelo en dos puntos BB' , y si unimos uno de ellos B á C , la interseccion b del rayo visual con el plano de proyeccion, será la proyeccion stereográfica de B . Imaginemos que el tal meridiano gira alrededor de PP' para rebatirse sobre el plano de la carta. Los puntos C y B se colocarán respectivamente en E' y A , quedando el b inmóvil por pertenecer al eje; de manera que AbE' será el rayo visual rebatido sobre la carta. Esta línea en el papel de la proyeccion es ae' , y por consiguiente, tam-

Si por un punto D fig. 7.^a—2.^a (lám. 47) en donde se cortan dos curvas cualquiera trazadas sobre la superficie de la esfera, se conciben las tangentes DR, DR' que forman el mismo ángulo que dichas curvas, el plano determinado por estas tangentes, será tangente á la esfera, y por consiguiente perpendicular al radio CD . Si S es el punto de vista situado en el eje de las Z y sobre la superficie de la esfera y $B'mB$ es el plano de proyeccion, estando elegido el de las XZ de tal modo que una de las tangentes DR esté contenida en él, entonces la recta RR' que une los puntos en que las dos tangentes encuentran al plano, será perpendicular al plano de las XZ , y el ángulo RdR' será la proyeccion del RDR' de las dos curvas.

Ahora, en el triángulo dDR se tiene $DR = dR$. En efecto, los ángulos D y d de este triángulo son iguales puesto que el primero, formado por la cuerda SD y la tangente DR tiene por medida $\frac{SB + ED}{2}$ y el segundo formado por las dos cuerdas SD y BB' , tiene por medida $\frac{SB' + BD}{2}$. Además

$SB' = SB = 90^\circ$, luego $DR = dR$. Los triángulos RDR' y RdR' que tienen el lado RR' comun son rectángulos en R , teniendo por consiguiente un ángulo igual comprendido entre lados iguales, y por consiguiente son idénticos y el ángulo de las dos tangentes á la esfera y su proyeccion stereográfica no difieren, como tratábamos de demostrar.

bien en él, es b el punto deseado, quedando reducida la cuestion á hacer pasar una circunferencia por los puntos a, a' y b , determinándose lo mismo los demás paralelos.

Busquemos ahora la proyeccion de un meridiano. Sea PDP' el semi-meridiano que se trata de trazar sobre la carta. Los dos puntos P y P' se proyectan en p, p' , y en cuanto á D , su proyeccion es en el espacio, la interseccion del rayo visual CD con el plano que recibe dicha proyeccion. Sabido esto, si se imagina rebatido el plano del ecuador sobre el de la carta, C caerá sobre P' y D sobre D' , de tal modo que el arco ED' sea igual al ED , longitud del meridiano que estamos proyectando.

En consecuencia de esto, si sobre la carta se toma un arco ed' igual á la longitud del meridiano, y se une el punto p' con d' , el d de interseccion de la línea $p'd'$ con el ecuador, será la proyeccion stereográfica de D , y se hace pasar por él, y los p y p' una circunferencia con lo que queda el meridiano trazado.

Proyeccion stereográfica horizontal.—Sea figura 8.^a (lámina 17) $MAM'B$ el horizonte de un punto del globo, cuyo plano sea el que deba recibir la proyeccion, y consideremos á la línea OZ como la vertical del expresado punto. El meridiano del lugar se proyecta evidentemente segun su traza horizontal MM' que es la meridiana. Describamos de un punto O de la carta como centro y con un radio arbitrario una circunferencia, y tenemos el círculo obtenido como plano de dicha carta, siendo entonces un diámetro cualquiera de la curva la proyeccion del meridiano del lugar.

Con el objeto de comprender como se pueden fijar los polos sobre esta recta, que supondremos sea la mm' , volvamos á la figura del espacio. El eje del mundo POP' está contenido en el plano meridiano ZMM' , y por consiguiente los rayos visuales ZP, ZP' , dirigidos del punto de vista Z á los polos, no pueden encontrar á la carta si no en dos puntos pp' , de la recta MM' .

Hagamos ahora girar el meridiano del lugar alrededor de MM' , hasta que se rebata sobre el horizonte. En este movimiento, la recta OZ quedará siempre perpendicular á MM' , y se rebatirá segun OZ' , tomando el eje del mundo una posicion AB tal, que el ángulo AOM será igual al ángulo POM , que es la distancia al polo, y por consiguiente la latitud del lugar. Habiendo quedado fijos los puntos p y p' , los rayos visuales $ZPp, Zp'P'$ se rebatirán segun $Z'Ap$ y $Z'p'B$, que son líneas de fácil obtencion en la carta.

Dirijamos en ella ab , de tal modo, que forme con mm' un ángulo moa igual á la latitud del lugar. Eleve- mos oz perpendicular á mm' , y tracemos las za y zb ; los puntos p y p' , determinados por la interseccion de estas rectas con la mm' , son las proyecciones stereo- gráficas horizontales de los polos.

Para construir la proyeccion de un paralelo cualquie- ra NN' , basta observar, que el diámetro de esta curva que se encuentra sobre el meridiano del lugar, sigue en el giro el movimiento de este plano, rebatiéndose sobre el de la carta segun una perpendicular NN' al rebati- miento ab del eje del mundo, y á una distancia angular

del punto b igual al complemento de su latitud.

Las líneas zN , zN' son, pues, los rebatimientos de dos rayos visuales dirigidos á puntos del paralelo, y en consecuencia las intersecciones n , n' de estas rectas con mm' son proyecciones de puntos del paralelo y por consiguiente describiendo una circunferencia sobre nn' como diámetro, se tendrá la proyeccion buscada.

Resta solo el trazado sobre la carta de un meridiano, que tenga con relacion al del lugar, una longitud conocida L . Como todo meridiano pasa por los polos, se sigue que la circunferencia buscada pasará por los puntos p y p' , pero además en virtud de la proposicion demostrada, las proyecciones stereográficas de dos arcos de círculo, forman entre sí el mismo ángulo que los arcos del espacio, luego la línea que queremos trazar, forma con mm' un ángulo igual á L . De manera, que para ejecutar la construccion gráfica, basta dirigir la recta pC que forme con mm' un ángulo igual á L , y describir una circunferencia tangente en p á pC pasando además por el punto p' .

Las proyecciones perspectivas acabadas de explicar son las que se emplean en la construccion del mapamundi.

LECCION 34.

PROYECCIONES POR DESARROLLO.

Entre todos los cuerpos de superficie desarrollable, el cono y el cilindro son los que tienen alguna semejanza con la esfera.

El cono sobre todo, ofrece la ventaja de que un tronco de cono de poca altura, no difiere mucho de una zona esférica, cuyos paralelos límites sean iguales respectivamente á las bases de dicho tronco.

Este es el motivo de haberse empleado algunas veces las proyecciones cónicas en la formación de buenas cartas geográficas, y tambien mediante ciertas modificaciones en la representacion de partes considerables del globo, pudiendo citar como ejemplo del último caso, la carta del imperio Ruso ejecutada por el astrónomo Delisle de la Croyere, el cual perfeccionó la proyeccion cónica haciendo entrar el cono en la esfera, de manera que la cortase segun dos paralelos, colocados cada uno á igual distancia del paralelo medio y de uno de los extremos. La carta tenía sobre los dos paralelos de in-

terseccion, la misma dimension que la parte correspondiente del globo, y su estension total, diferia poco de la del país que debia representar, puesto que lo escédente que existe en las dos extremidades, era compensado en parte por el defecto con relacion á la zona esférica, de la parte intermedia del cono inscrito á ella.

Proyeccion cónica ordinaria.—En esta, se considera una zona esférica como confundida con la superficie de un cono truncado tangente á ella. Si se desarrolla esta superficie, los paralelos se convertirán en arcos de círculo descritos con el cúspide del cono como centro, y los meridianos son rectas que pasan todas por dicho punto, y se dirigen hácia la base del cono.

Sea en la fig. 9.^a (lám. 17) PC el radio de la esfera, M un punto de latitud EM, y OM la cotangente de esta latitud. El desarrollo del paralelo medio tiene por radio la cotangente de su latitud, y por magnitud el arco igual á la circunferencia de la cual MR es el radio.

Del punto O como centro, fig. 10 (lám. 17) y con el radio OM, describamos un arco indefinido NN', y tomando á Oa por el meridiano correspondiente al punto central de la carta, formaremos el ángulo N'OM igual á la mitad del número de grados contenidos en el paralelo medio.

Supongamos que la porcion de paralelo medio contenida en la carta comprenda 25°, el número de los que comprendiera su desarrollo se obtendrá por la

$$\text{proporcion } \frac{x}{25} = \frac{MR}{OM}; \quad x = \frac{MR}{OM} \cdot 25.$$

Las circunferencias obtenidas por la interseccion de los planos de los paralelos con la superficie cónica son exteriores y concéntricas á dichos paralelos. Por consiguiente, los de la carta, tanto superiores como inferiores al paralelo medio, tendrán mayor longitud que los del globo de los cuales son proyeccion, y cuanto mayor sea la estension de la carta en el sentido de las latitudes, mas inexacta será la representacion.

Para disminuir el error producido en sentido de las longitudes por el exceso de estension de los paralelos, se llevan sobre el meridiano medio Oa , á uno y otro lado del paralelo medio M , arcos desarrollados de meridiano iguales á las diferencias de latitud de los paralelos que deban trazarse, 15° por ejemplo, y por los puntos de division que resultan a, b, \dots se hacen pasar los arcos descritos desde el vértice comun O . Se divide despues el paralelo medio en arcos de 15° , á contar de M , y se dirigen por los puntos de division y por O rectas que representan las generatrices del cono, y hacen las veces de meridianos, dividiendo á todos los paralelos concéntricos en arcos de 15° .

Los defectos de esta proyeccion son: no conservar la igualdad entre los espacios, y no dar las distancias verdaderas sino en el sentido de los meridianos. Para atenuar estos defectos se han ideado dos medios; consiste el uno en tomar en vez del cono tangente, un cono inscrito en totalidad ó en parte, y el otro en modificar la proyeccion rectilínea de los meridianos, cuyos dos métodos son poco usados.

Proyeccion cilindrica.—Consiste en imaginar un cilindro tangente á la esfera segun el ecuador. Las generatrices de este cilindro tangentes á los meridianos, representan á estos en su desarrollo. El ecuador resulta en el desarrollo una línea recta, y los paralelos quedan representados por otras rectas paralelas á ella, que no son otra cosa que los desarrollos de las circunferencias segun las cuales los planos de los paralelos prolongados cortan al cilindro circunscrito, fig. 41 (lám. 17).

Solamente para una zona de pequeña dimension en sentido de las latitudes, al N ó al S del ecuador es admisible esta proyeccion en la cual el error existe por dos causas, por la disminucion de distancias en el sentido de las latitudes y por el aumento en el de las longitudes.

Cuando la zona que se desée representar no sea contigua al ecuador, tal como la AB fig. 42 (lám. 17) se imagina el cilindro inscrito cuya generatriz sea la BB', ó bien el circunscrito que tenga por generatriz la AA', tomándose en muchos casos para mayor exactitud el cilindro de generatriz media *cc'*.

Proyeccion de Mercator.—Mercator, considerando que los marineros no emplean la carta para conocer los accidentes de la superficie, y sí solo para trazar el camino que sus buques siguen, para determinar las distancias á que se encuentran de los distintos puntos de la costa, y conocer la direccion que deben seguir para llegar á ellas ó para evitarlas, ideó un nuevo medio de proyeccion por desarrollo cilíndrico.

Los meridianos son líneas rectas paralelas equidis-

tantes cortadas en ángulo recto por las que representan los paralelos al ecuador; pero los intervalos que separan estos crecen á medida que se avanza hácia los polos, en una relacion inversa de la que sigue sobre el globo la disminucion de los grados de longitud, resultando, que las distancias en longitud, medidas sobre cada paralelo, tienen con relacion á las distancias en latitud correspondientes, la misma razon que sobre la superficie esférica.

El trazado de estas cartas, no ofrece mas dificultad que la construccion de la escala de latitudes, para lo cual existen tablas calculadas, llamadas de *latitudes crecientes* á causa del aumento que en ellas experimenta la magnitud de cada grado de latitud, á medida que se aproxima al polo.

Proyeccion de Casini.—Este, considerando que la deformacion mayor que en las cartas por desarrollo cilíndrico resultaba era para los puntos mas próximos al polo, trató de reemplazar aquel método por otro semejante, en el cual las mayores deformaciones fueran en el sentido de las longitudes. Su objeto era la formacion de la carta de Francia, que tiene mayor dimension N—S que E—O, logrando de la manera que vamos á explicar que las diferencias de forma que resultaban no fuesen sensibles.

En vez de suponer circunscrito á la esfera un cilindro cuya línea de contacto fuese el ecuador, se imagina otro cuya línea de contacto sea el meridiano principal. Se divide el ecuador en partes, y por los puntos de division se

suponen planos paralelos al meridiano, y dividiendo tambien al meridiano principal, haciendo pasar por los puntos de division otros planos que pasan por el centro y determinan en la superficie esférica arcos de círculos máximos, que tienen un diámetro comun situado en el plano del ecuador, fig. 13 (lám. 17). Este diámetro es en la proyeccion de Casini lo que la línea de los polos en la cilíndrica. Se imagina el cilindro desarrollado, y las generatrices que pasan por las divisiones del meridiano, ó lo que es lo mismo las tangentes á los círculos máximos, representan los desarrollos de estos círculos perpendiculares á dicho meridiano, mientras los círculos trazados paralelamente á él por las divisiones del ecuador, tienen por proyecciones los desarrollos de las intersecciones de la superficie cilíndrica por sus planos.

Se vé por lo dicho y la inspeccion de la figura, que las dimensiones de los parajes cercanos al meridiano son los que no aparecen deformados en la representacion, mientras que en el sentido del ecuador los cuadriláteros de la esfera, disminuyendo mas y mas en superficie, y aumentando su oblicuidad, se representan muy mal por los rectángulos de la carta.

Proyeccion antigua de Flamsteed.—En ella, la vertical AB fig. 44 (lám. 17) del medio de la carta representa el meridiano principal, que es cortado por un sistema de paralelas equidistantes MN, PQ, RS, que representan los desarrollos de los círculos paralelos al ecuador. Despues de haber trazado la vertical AB, se toman sobre ella partes iguales *ab, bc, cd.....*, destina-

das á representar cada una 1 grado de latitud, y por los puntos de division *b, c, d.....*, se trazan las perpendiculares MN, PQ, RS.... Hecho esto, se buscará la longitud de los grados de los respectivos paralelos en las distintas latitudes, y se tomarán *am, bp, cr.....*, respectivamente iguales á las longitudes encontradas. Para determinarlas, sabemos que las circunferencias guardan la misma relacion que sus radios, y como los radios de los paralelos son los cosenos de sus respectivas latitudes tendremos:

$$\frac{\text{Arc. de D grados de MN}}{\text{Arc. de D grados de PQ}} = \frac{\cos. l}{\cos. L'}$$

Podemos tomar á uno cualquiera tal como MN por ecuador, teniendo entonces $\cos. l = 1$,

$$\frac{\text{Arc. de D grados de ecuador}}{\text{Arc. de D grados del paralelo PQ de latitud } l^\circ} = \frac{1}{\cos. l^\circ}$$

de donde se puede, habiendo tomado una distancia arbitraria para representar los D° del ecuador, encontrar todas las longitudes de los demás arcos.

Uniendo los puntos *m, p.....* ya determinados, se tienen líneas que nos representan un nuevo meridiano. Tomando en seguida $mm' = am, pp' = pb...$ y uniendo los puntos que así resulten, la curva $r'p'm'$ será tambien un meridiano, yendo así trazándolos todos.

Proyeccion de Flamsteed modificada.—En la proyeccion de que acabamos de hablar, se presenta el inconveniente de resultar los meridianos oblicuos con respecto á los paralelos, lo que introduce deformacion en las representaciones, habiéndose modificado el pro-

cedimiento con motivo de la formación de la nueva carta de Francia, reemplazando las líneas paralelas que nos representaban los paralelos al ecuador por arcos de círculo concéntricos, como detalladamente vamos á indicar.

El ecuador y el meridiano principal, fig. 15 (lám. 17) se suponen divididos en partes iguales, y se consideran que pasan paralelos al ecuador por todos los puntos de division del meridiano, y meridianos por los de division del ecuador. Para obtener la proyeccion, se traza el eje $O'X$ que suponemos sea el meridiano principal rectificado. Desde un punto O' de esta recta, y con un radio igual á la cotangente MO del paralelo medio M del terreno que se va á proyectar, se traza un arco de círculo HK el cual es el desarrollo de dicho paralelo. Todos los demás paralelos vienen representados por arcos concéntricos descritos del mismo punto O' , y conservando una distancia recíproca igual á la parte rectificada de meridiano comprendida entre ellos. El paralelo N de nuestra figura, por ejemplo, se trazaría, rectificando el arco MN sobre la cotangente OM , y si N fuese á parar á N' , con el radio ON' y desde O' se trazaría el arco $H'K'$ representación del expresado paralelo.

Se toman sobre cada uno, á contar del meridiano principal las magnitudes de los grados de longitud de los distintos paralelos, cuyas magnitudes se encuentran por la proporcionalidad de que antes hemos hecho uso entre los radios, ó los cosenos de las latitudes y los arcos abrazados por un mismo ángulo. Márcanse de este modo

los puntos \bar{z} , H, H'....., que unidos por una curva nos dan un meridiano, y así de los demás.

Pero la gran magnitud que los radios con que los paralelos deben trazarse tienen casi siempre, aun reducidos á escala, dificultan é imposibilitan la operacion material del trazado de los arcos representacion de dichos paralelos, siendo necesario por otras consideraciones, marear para cada uno un cierto número de puntos bastante próximos, para que se les pueda unir sin alteracion de forma, por un trazado continuo.

Para marcar estos puntos, refiramos la construccion á un sistema coordinado, en que uno de los ejes sea la línea O'X antes marcada, y el otro la perpendicular O'Y á aquella trazada por el punto O'.

Llamemos L á la latitud del paralelo medio M, l y α' la latitud y la longitud, conocidas ambas, de un punto H' del paralelo N, y recordando que R radio de la tierra es igual á 6366198^m, tenemos que las coordenadas de este punto H' son $X=O'n$ é $Y=H'n$, las cuales vamos á hallar en funcion de cantidades conocidas, teniendo para ello $X=O'H' \cos. \alpha$; $Y=O'H' \sin. \alpha$, llamando α al ángulo que el radio que vá á H' forma con el meridiano principal.

Ahora $O'H'=O'N'=O'M'-M'N'=R \cot. L-(l-L)$ por ser $O'M'=OM=R \cot. L$, y $M'N'=l-L$.

La relacion, 4° de latitud = 100000^m en la graduacion centesimal ó 4° de latitud = 411111,111^m en la sexagesimal, nos permite encontrar el número de metros que corresponde al valor gradual $l-L$, y suponiendo

que sea m este número, se tendrá $O'H' = R \cot. L - m$. Debemos ahora encontrar el valor del ángulo α , que corresponde al punto de longitud P sobre el paralelo de latitud l . Un arco cualquiera de este paralelo, es en el desarrollo otro arco de la misma longitud pero de distinto radio. El valor gradual de estos arcos está en razón inversa de los radios con que están trazados (*).

$R \cot. L - m$ es el radio del arco del paralelo en el desarrollo, que tiene por valor α° , y $R \cos. l$ es el radio del arco de paralelo de la misma longitud en la superficie esférica que contiene $\alpha', de modo que podremos establecer la proporción$

$$\frac{R \cot. L - m}{R \cos. l} = \frac{\alpha'}{\alpha} \text{ de donde } \alpha = \frac{\alpha' R \cos. l}{R \cot. L - m}:$$

por lo cual substituyendo en los valores de X é Y se tienen para H' las coordenadas

$$X = (R \cot. L - m) \cos. \frac{\alpha' R \cos. l}{R \cot. L - m};$$

$$Y = (R \cot. L - m) \text{ sen. } \frac{\alpha' R \cos. l}{R \cot. L - m}$$

(*) Los arcos DF y AB , fig. 46 (tám. 47) son de la misma longitud, y vamos á demostrar que los ángulos que subtenden están en razón inversa de los radios. Por de pronto tenemos: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$ y tambien $\frac{DF}{DE} = \frac{DCF}{DCE}$.

Además $AB = DF$, luego $\frac{AB}{DE} = \frac{DCF}{DCE}$ y á causa de la razón comun

$$\frac{DCF}{DCE} = \frac{AC}{CD}.$$

Los ángulos DCF y DCE siendo medidos por los arcos AB y DF , se sigue que el número de grados comprendidos en cada uno de estos arcos están en razón inversa de los radios con que están descritos.

en funcion de cantidades conocidas, por lo que el punto está completamente determinado de posicion.

Lo mismo se determinan los demás hasta el número necesario.

Recíprocamente, conociendo las coordenadas X é Y en la carta, es muy sencillo el encontrar su latitud y su longitud, y por consiguiente su posicion en la superficie del globo. En efecto, el valor de α nos resultaría de la

igualdad $\text{tang. } \alpha = \frac{Y}{X}$; teniendo además la relacion

$$O'H' = \frac{Y}{\text{sen. } \alpha} = R \cot. L - m; \text{ de donde}$$

$m = R \cot. L - \frac{Y}{\text{sen. } \alpha}$; y el valor de m que resulte reducido á grados nos indicará la diferencia de latitudes entre el paralelo en que el punto se encuentra y el medio, y como la de este es conocida, aquella tambien lo será.

Despejando el valor de α' en la igualdad

$$\alpha = \alpha' \frac{R \cos. l}{R \cot. L - m}, \text{ tendremos } \alpha' = \alpha \frac{R \cot. L - m}{R \cos. l}$$

donde todo es conocido menos α' que se puede determinar.

Determinadas l y α' la posicion del punto sobre el globo queda completamente fijada.

En los estrechos límites que nos hemos propuesto marcar á las nociones de Geodésia, no nos es permitido extendernos mas acerca del asunto, creyendo por nuestra

parte, que basta lo expuesto para la completa inteligencia de las proyecciones que hemos mencionado, y de las cartas con arreglo á ellas construidas.

Nuestro objeto quedará cumplido, si nuestros elementos son suficientes para servir de base á mas profundos estudios.

LECCION 35.

NIVELACION GEODÉSICA.

El objeto de esta nivelacion, es determinar la tercera coordenada de los distintos puntos, á la cual llamamos *altura ó altitud*. Las alturas se toman á contar del nivel del mar, que se elige como superficie de comparacion.

Pueden ser tambien las alturas negativas, siendo de esta clase los accidentes sub-marinos cuya elevacion se mide por medio de la sonda.

Fórmula general de la nivelacion.—Tratemos de encontrar la diferencia de altura entre dos puntos tales como A y B, fig. 47 (lám. 17) cuando desde uno de ellos se ha medido la distancia zenital del otro. C es el centro de la Tierra, y B' el punto en que la vertical de B corta á una superficie concéntrica á la de aquella, trazada por A, y supongamos que se representa por $D=AB'$, la distancia en metros entre A y B', contada sobre la superficie de nivel, que atendida la magnitud de su radio estará casi confundida con la recta AB'.

También la gran magnitud del radio produce que el ángulo C del centro sea de muy pequeña abertura.

Para expresar su valor nos resulta $\frac{\text{sen. } \frac{1}{2} C}{4} = \frac{\frac{1}{2} D}{R}$ ó

bien $\text{sen. } C = \frac{D}{R}$, y por la pequeñez de C , $\frac{C}{4''} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } 4''}$

de donde $\text{sen. } C = C \text{ sen. } 4''$; y $C = \frac{D}{R \text{ sen. } 4''}$.

La diferencia de nivel es BB' , contada en la vertical de B y supongamos que este y el A , puedan percibirse recíprocamente.

Las trayectorias luminosas producidas por la refracción tienen poca curvatura, ó se confunden sensiblemente con un mismo círculo osculador.

Al mirar uno de los puntos, cada observador lo vé según la tangente á los últimos elementos de trayectoria AT ó BT . Estas tangentes forman con la cuerda AB del círculo osculador ángulos p, p' iguales entre sí, que son de la refracción terrestre.

Admitamos que se haya medido desde A la distancia zenital aparente de B , resultándonos un valor δ para ZAT . La distancia zenital verdadera será $\delta + p$.

El triángulo BAB' nos dá:

$$\frac{BB'}{D} = \frac{\text{sen. } BAB'}{\text{sen. } ABB'}; \text{ pero}$$

$$\delta + p + BAB' = 90^\circ + \frac{1}{2} C,$$

por lo que $BAB' = 90^\circ - (\delta + p - \frac{1}{2} C)$

y $\delta + p = ABB' + C$, $ABB' = \delta + p - C$.

Sustituyendo estos valores resulta

$$BB' = \frac{D \operatorname{sen.} (90^\circ - (\delta + p - \frac{1}{2} C))}{\operatorname{sen.} (\delta + p - C)} = \frac{D \operatorname{cos.} (\delta + p - \frac{1}{2} C)}{\operatorname{sen.} (\delta + p - C)}$$

pero como $\delta + p - \frac{C}{2}$ difiere muy poco de $\delta + p - C$ se puede sustituir el uno por el otro, quedando

$$BB' = D \operatorname{cot.} (\delta + p - \frac{C}{2}):$$

que es la expresion general de la diferencia de nivel.

Determinacion del ángulo de refraccion terrestre por las distancias zenitales reciprocas de dos puntos.—Cuando se toman las distancias zenitales reciprocas de los dos puntos, se puede deducir de ellas el valor de p . Llamemos δ' á la distancia zenital aparente de A observada desde B, teniendo entonces que

$$Z'BA = \delta' + p; ABB' = \delta + p - C, \text{ de donde}$$

$$Z'BA + ABB' = \delta + \delta' + 2p - C = 180^\circ \text{ y}$$

$$p = 90^\circ + \frac{C}{2} - \frac{(\delta + \delta')}{2}.$$

Como p varia con C , podemos suponer $p = n C$ y se ha visto que el coeficiente n difiere poco de 0,08 de manera que el ángulo de refraccion es proporcional al ángulo del centro C .

Sustituyendo en el valor de BB' ; en vez de p su valor nC , toma dicho valor la forma,

$$BB' = \frac{D \cos. \left(\delta + nC - \frac{C}{2} \right)}{\text{sen.} \left(\delta + nC - C \right)} = \frac{D \cos. \left(\delta + C \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)}{\text{sen.} \left(\delta - C(1-n) \right)}$$

Ordinariamente n es algo pero muy poco mayor que 0,079; en tiempo cálido y lluvioso es sensiblemente igual á cero; en tiempo frio varía su valor entre 0,10 y 0,09, durante las nieblas del invierno llega hasta 0,15, 0,16, y 0,17, en casos muy raros.

Estas variaciones han hecho que se tomen como valores de n , en verano 0,06, en invierno 0,14 y en épocas medias 0,08. Se atenúan mucho los errores de refraccion operando hácia la mitad del dia de 10 á 3 por ejemplo, y procurando siempre elegir los de atmósfera despejada.

Si en la expresion que nos dá el valor de BB' , reemplazamos p por su valor $90^\circ + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta'}{2} \right)$ nos resultará

$$\begin{aligned} BB' &= \frac{D \cos. \left(\delta + 90^\circ + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta'}{2} \right) - \frac{C}{2} \right)}{\text{sen.} \left(\delta + 90^\circ + \frac{C}{2} - \left(\frac{\delta + \delta'}{2} \right) \right)} = \\ &= \frac{D \cos. \left(90^\circ - \left(\frac{\delta' + \delta}{2} \right) \right)}{\text{sen.} \left(90^\circ - \left(\frac{\delta' - \delta + C}{2} \right) \right)} = \frac{D \text{sen.} \frac{\delta' - \delta}{2}}{\cos. \frac{1}{2} (\delta' - \delta + C)}; \end{aligned}$$

como δ y δ' difieren poco, y C es de estrema pequeñez, el denominador se aparta poco de la unidad, pudiendo establecer

$BB' = D \operatorname{sen.} \frac{\delta' - \delta}{2}$; y á consecuencia de la proporcion

$$\frac{\frac{\delta' - \delta}{2}}{1''} = \frac{\operatorname{sen.} \frac{\delta' - \delta}{2}}{\operatorname{sen.} 1''}; \operatorname{sen.} \frac{\delta' - \delta}{2} = \frac{\delta' - \delta}{2} \operatorname{sen.} 1''$$

y $BB' = \frac{D}{2} (\delta' - \delta) \operatorname{sen.} 1''$; cuya fórmula es indepen-

diente de la refraccion terrestre, ofreciendo empero alguna dificultad la determinacion simultánea de las distancias δ y δ' .

Correccion de las distancias zenitales.—Las distancias zenitales δ y δ' que se miden no son las verdaderas y hay que corregirlas.

En efecto, los instrumentos no están colocados en la cúspide de la señal, sinó en puntos mas bajos, resultando por esta causa disminuidos los valores de las distancias zenitales. Si A y B, fig. 18 (lám. 17) son los dos puntos cuya diferencia de altura se vá á encontrar, los instrumentos se hallan en otros tales como *a*, *b*, y tratamos de encontrar el valor de los errores que resultan para efectuar la correspondiente correccion.

Son los ángulos que debieron medirse los $ZAB = \Delta$ y $Z'BA = \Delta'$, y se midieron los $ZaB = \delta$ y $Z'bA = \delta'$, y es necesario añadir á estos respectivamente los $ABa = d\delta$ y $BAb = d\delta'$ para que se conviertan en los primeros. Hagamos $AB = D$; $Aa = dA$, y $Bb = dA$.

El triángulo *ABa* nos dá

$$\frac{\operatorname{sen.} \delta}{\operatorname{sen.} d\delta} = \frac{D}{dA}; \text{ de donde, } \operatorname{sen.} d\delta = \frac{dA}{D} \times \operatorname{sen.} \delta$$

y atendida la pequeñez de $d\delta$, $\frac{\text{sen. } d\delta}{\text{sen. } 1''} = \frac{d\delta}{1''}$; de don-

de $\text{sen. } d\delta = \frac{d\delta \text{ sen. } 1''}{1''}$; y de aquí

$$d\delta = \frac{dA}{D} \times \frac{\text{sen. } \delta \times 1''}{\text{sen. } 1''} \text{ y análogamente}$$

$$d\delta' = \frac{dA}{D} \times \frac{\text{sen. } \delta' \times 1''}{\text{sen. } 1''}; \text{ lo que nos dice que además}$$

de la medicion del ángulo, se debe en cada caso hacer la de la altura de la cúspide de la señal, sobre el plano del instrumento.

Para tener la altura absoluta de los vértices geodésicos, es decir, su elevacion sobre el nivel del mar, es necesario llevar hasta cerca de su orilla la cadena de triángulos.

Conseguido esto, se efectúa una nivelacion topográfica entre dicha superficie de referencia y el vértice mas próximo, cuya altura queda así determinada, y por ella pueden ya conocerse las de los otros vértices. Pero como quiera que en los sitios próximos al mar es muy considerable la refraccion, deben efectuarse en la nivelacion topográfica de que acabamos de hablar, no solo la correccion que atenúa el indicado defecto, sinó tambien todas las demás, tendiendo á la perfeccion estrema, que si es útil en todos los levantamientos, lo es mas en la determinacion de uno de los datos fundamentales de los geodésicos.

FIN.

APÉNDICE.

ARTILLERÍA.—*Junta Superior Facultativa.*—*Excmo. Sr.*—*Enterada la Junta de lo que V. E. se sirve prevenirla en su superior orden de 15 del corriente, respecto á fijar las escalas mas convenientes en los planos y dibujos, tanto de terrenos como de edificios y el material, se ha ocupado en estudiar lo que con igual fin se practica en otros paises, toda vez que en este particular, lo mas interesante es el fijar reglas cualquiera que ellas sean, y que por lo mismo era preferible optar por las mas generalmente admitidas, acordando en su consecuencia manifestar á V. E. lo siguiente, que en su sentir es lo que puede V. E. ordenar se observe como mas conveniente.*

Objetos del material.

1.º **PIEZAS, CUREÑAS, CARRUAJES, JUEGOS DE ARMAS Y ATALAJES.**—*Planos para una coleccion, en hojas de 270 milímetros de ancho por 190 milímetros de alto, escala 1:20 del natural. Planos de proyectos 1:5 el conjunto, 1:5 los detalles de madera ó bronce, 2:5 detalles de hierro.*

2.º **PROYECTILES, ARTIFICIOS, Y OTROS OBJETOS DE DIMENSIONES PARECIDAS.**—*Planos para coleccion 1:10, proyectos 1:5, detalles de madera ó metal 2:5.*

3.º **ARMAS PORTÁTILES, INSTRUMENTOS DE PRECISION, MÁQUINAS MUY PEQUEÑAS.**—*Planos para la coleccion 1:10, proyectos 2:5, detalles 4:5, detalles mas pequeños é interesantes 1:2.*

Baterias permanentes.

Planos generales de las baterias, espaldones, resguardos observaciones, comunicaciones y otras obras de escuela práctica 1:500 (2 milímetros por metro). Proyectos 1:200 (3 milímetros por metro). Perfiles, esplanadas, blindajes, pequeños repuestos de pólvora. 1:100 (10 milímetros por metro).

Edificios, máquinas y terrenos de corta extension.

1.º **EDIFICIOS.**—*Planos generales 1:500 (2 milímetros por metro). Proyectos de edificios, cortes, elevaciones 1:200 (3 milímetros por metro). Maderamen, otros detalles y techumbres 1:100 (10 milímetros por metro).*

2.º **POLÍGONOS (ESCUELAS PRÁCTICAS), Y TERRENOS DE CORTA ESTENSION.**—*Planos generales 1:2000 (1 milímetro por 2 metros). Proyectos y detalles 1:1000 (1 milímetro por metro).*

3.º **MÁQUINAS AISLADAS, Ó REUNION DE VARIAS MÁQUINAS.**—*Planos generales 1:200 (3 milímetros por metro), detalles 1:100 (10 milímetros por metro).*

Plazas de guerra y fuertes sean ó no permanentes.

Planos de las plazas con sus alrededores hasta 3 kilómetros 1:10,000 (1 milímetro por 10 metros). Fuertes y frentes de fortificación 1:1000 (1 milímetro por metro). Perfiles 1:250 (3 milímetros por metro).

Todo proyecto debe constar del plano, la memoria razonada, el croquis del terreno en que se piensa establecer con curvas de nivel, y los presupuestos detallados con arreglo á los precios de la localidad.

Trazado de los planos y colores convencionales.

1.^o *Toda obra de fábrica existente, se traza con tinta de china y líneas continuas, lavándola de rojo.*

2.^o *Todo proyecto de obra aprobado ya pero no ejecutado aun, se traza con tinta de china y líneas continuas, lavándolo de amarillo. (Tierra y otras de fábrica).*

3.^o *Todo proyecto aun no aprobado, como los anteriores, sin mas diferencia que las líneas son de puntos.*

4.^o *Obras de fábrica arruinadas ó destruidas, ó bien obras subterráneas de fábrica, línea de puntos y lavado de rojo.*

5.^o *Obra de tierra destruidas, líneas de puntos y lavado negro.*

6.^o *En los edificios particulares, se usa el rojo claro.*

7.^o *En los edificios públicos se usa el rojo oscuro, y se representan con techos, tejados ó azoteas.*

8.^o *En los edificios de Artillería se usa el color azul, y se representan como los públicos.*

9.^o *Todo plano de terreno debe orientarse.*

10. *Los objetos todos del material, se trazan en todas ocasiones con líneas continuas ó de puntos segun conviene á la mejor inteligencia, de tinta de china y sin lavarlas.*

Por mas que estas reglas puedan y deban servir de norma, parece necesario, el que cuando convenga y expresando los motivos que para ello pueda haber, se modifiquen por los que estén en el caso de aplicarlas, pues es casi imposible ni abrazar todos los casos, ni que en alguno particular, no sea mas acertado el prescindir de ellos.

No obstante lo dicho, V. E. con su superior ilustracion, resolverá lo mas acertado.

Lo que por acuerdo de esta Junta superior Facultativa, pongo en conocimiento de V. E. en contestacion á la superior orden citada. Dios guarde á V. E. muchos años. Madrid 27 de Diciembre de 1858.—Excmo. Sr.—El Vice-presidente, Juan Barbaça.—Excmo. Sr. Director general del Cuerpo.

PROGRAMA PARA EL EXÁMEN

É

ÍNDICE DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO SEGUNDO.

NIVELACION.

	Páginas.
LECCION 21.— <i>Métodos generales de medicion de los ángulos verticales.</i> —Nivelacion del cánvas y de los detalles.—Fórmula general de la nivelacion topográfica.—Manera de medir los ángulos de altura y zenitales.	5
LECCION 22.— <i>Algunos aparatos destinados á la medicion de ángulos verticales y correcciones.</i> —Uso del teodolito de Lenoir como eclímetro.—Uso del teodolito Brunner para la medida de ángulos verticales.—Influencia de la falta de verticalidad del limbo.—Reduccion al centro tanto en sentido horizontal como vertical.	23
LECCION 23.— <i>Brújula nivelante.</i> —Brújula nivelante —Descripcion.—Verificaciones.—Modo de operar con la brújula nivelante; cálculo de las diferencias de nivel y cotas de los puntos.—Tabla de tangentes.	35
LECCION 24.— <i>Determinacion de las curvas de nivel.</i> —Dibujo de las curvas de nivel determinando los puntos de paso.—Trazado de las secciones horizontales sobre el terreno.—Hallar puntos de cota determinada.—Bases de las secciones horizontales y levantamientos del plano de estas con la brújula ó plancheta.	43
LECCION 25.— <i>Niveles de agua y de perpendicular.</i> —Niveles.—Línea de nivel.—Nivel de agua, su descripcion uso, y conveniente colocacion.—Ventajas é inconvenientes de este nivel.—Límite de su empleo.—Nivel de agua de tubo flexible.—Nivelacion simple y compuesta; fórmula general.—Nivelacion en contorno.—Nivel de perpendicular, descripcion, uso, verificacion y rectificacion.	71
LECCION 26.— <i>Nivel de aire.</i> —Nivel de aire: su descripcion y condiciones de buena construccion.—Nivelacion de una línea y de un plano.—Asimilacion de este nivel al de perpendicular.—Nivel de aire con pínfutas y rectificacion á que está sujeto.—Nivel de Chezy: su descripcion, uso, verificaciones y rectifi-	

aciones.—Correccion de esfericidad, fórmula general y formación de las tablas; estaciones equidistantes de los puntos dados.—Error debido á la refraccion y fórmula que comprende ambas correcciones.—Sondeo.—Nivel-eclímetro de Ertel; su descripción y empleo: verificaciones y rectificaciones.—Nivel de Watking: su descripción uso, y verificaciones.—Nivel de reflexion de Burel: su descripción, uso, verificacion; y correccion; modificacion de Leblanc. 89

LECCION 27.—*Niveles de Ertel y de Watking.—Teodolito de Troughton considerado como nivel, y nivel de reflexion.*—Nivel y eclímetro del teodolito de Troughton: su descripción y uso en la nivelacion por altura de mira y ángulos de inclinacion; verificaciones y correcciones.—Graduacion del eclímetro para reducir las medidas hechas segun las pendientes á su proyeccion horizontal. 107

LECCION 28.—*Clisímetros.*—Su objeto.—Nivel de pendientes de burbuja de aire, descripción; verificaciones y correcciones.—Uso de este clisímetro.—Nivel de pendientes de perpendicular; descripción, uso, verificacion y correccion. 121

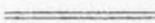
TOPOGRAFÍA IRREGULAR.

LECCION 29.—*Reconocimientos militares.—Generalidades é instrumentos que pueden usarse para efectuarlos.*—Reconocimientos: su objeto é importancia.—Reconocimientos militares.—Croquis, vistas pintorescas y memoria.—Eleccion de la escala.—Instrumentos; plancheta simplificada, alidada, declinatorio.—Brújula de Burnier, trasportador convertido en eclímetro, nivel simplificado, alidada nivelante. 133

LECCION 30.—*Reconocimientos militares.—Modo de efectuarlos.*—Cáneas que puede elegirse.—Medida de la base, determinacion de los detalles, y nivelacion —Reconocimientos á la vista.—Cáneas con una carta ó con tres puntos elegidos en el terreno; detalles.—Reconocimientos de memoria: caso en que se ejecuta: modo de llevarlos á cabo.—Reconocimientos por noticias: ocasiones en que se hacen: como se proceda.—Itinerarios.—Su objeto é instrumentos que se emplean y como se opera: estension que abrazan, puntos notables; detalles descriptivos; vistas pintorescas.—Reconocimientos de ferrocarriles y telégrafos eléctricos.—Memoria, parte topográfica: reseña estadística: discusion de la operacion militar que se proyecta.—Aplicacion de la fotografia á los reconocimientos militares. 149

NOCIONES DE GEODÉSIA.

LECCION 31.— <i>Generalidades.—Triángulos geodésicos.—Bases.—Correcciones angulares y cálculo de la red.—Figura de la tierra —Red geodésia: triángulos de 1.º, 2.º y 3.er orden; su forma y dimensiones.—Diferentes señales que se usan: heliótopo: base.—Ligera idea de las clases de aparatos que se emplean para su medida; como se hace esta y reduccion al nivel del mar.—Ángulos que se miden; correcciones angulares, errores sistemáticos y accidentales.—Esceso esférico y cálculo de la red.</i>	169
LECCION 32.— <i>Determinacion de las coordenadas y orientacion.—Tablas astronómicas, ecuador, eclíptica, ascension recta y declinacion —Rotacion diurna: estrellas fijas: movimientos propios del Sol y de la Luna: nutacion y precesion de los equinoccios: refracciones, paralajes y semidiámetros.—Determinacion de la latitud.—Tiempo verdadero, medio y sideral.—Ecuacion del tiempo, dia civil y astronómico, dia sideral.—Determinar las longitudes.—Determinar un azimut.</i>	189
LECCION 33.— <i>Representacion en el papel.—Cartas y proyecciones en general.—Proyecciones perspectivas.—Diferentes clases de proyecciones: stereográficas y ortográficas.—Su construccion.—Cartas generales ó geográficas, particulares ó corográficas y topográficas.—Cartas en grande y pequeña escala.</i>	211
LECCION 34.— <i>Proyecciones por desarrollo.—Proyeccion cónica; proyeccion cilíndrica; proyeccion de Mercator.—Proyeccion de Cassini; idem de Flamsteed y modificada de este.</i>	225
LECCION 35.— <i>Nivelacion geodésica.—Fórmula general de la diferencia de nivel de dos puntos en funcion de la distancia zenital del uno, observada desde el otro.—Angulo de refraccion terrestre dependiente de las distancias zenitales reciprocas.—Valor del coeficiente del ángulo de refraccion.—Diferencia de nivel en funcion de las distancias zenitales reciprocas.—Correccion debida á las alturas de las señales.—Nivelacion del cánvas.</i>	237
APÉNDICE.	243



27ms

C31-

36 €

NOUVEAU DE BREVET

Le présent brevet a pour objet un procédé de fabrication de produits en caoutchouc, consistant à mélanger le caoutchouc avec des particules de silice ou d'alumine, et à soumettre le mélange à un traitement thermique dans un milieu gazeux.

Le caoutchouc est mélangé avec des particules de silice ou d'alumine, et le mélange est soumis à un traitement thermique dans un milieu gazeux.

Le traitement thermique est effectué dans un milieu gazeux, et le produit obtenu est caractérisé par une résistance accrue à l'abrasion.

Le produit obtenu est caractérisé par une résistance accrue à l'abrasion, et est utilisé dans des applications nécessitant une grande durabilité.

Le produit obtenu est caractérisé par une résistance accrue à l'abrasion, et est utilisé dans des applications nécessitant une grande durabilité.

Le produit obtenu est caractérisé par une résistance accrue à l'abrasion, et est utilisé dans des applications nécessitant une grande durabilité.

Le produit obtenu est caractérisé par une résistance accrue à l'abrasion, et est utilisé dans des applications nécessitant une grande durabilité.

270
C3
36

Se vende esta obra en casa de D. José Lopez, Calle Real, núm. 20, y en Madrid en la librería de la Señora Viuda de Poupard é hijo, Paz, 6.

SANZ.

TOPOGRAFIA

Y ELEMENTOS

DE GEODISIA.

II.

SECOVIA.

G 25662