considerar como un prisma regular de indefinido número de caras.

6.° El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas, es igual al tercio de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas. Pues este tronco de pirámide es equivalente á tres tetraedros de su misma altura y que tienen por bases las del tronco y una media proporcional entre ellas (330, C.°). Se expresa por, $\frac{1}{3} a (B + b + Bb)$, llamando a á la altura y B y b las dos bases.

7.° El volumen de un tronco de cono circular recto de bases paralelas, es igual al tercio de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas. Pues este tronco se le puede considerar como un tronco de pirámide regular de bases paralelas que tenga un número indefinido de caras. Se expresa por $\frac{1}{3} a\pi (R^2 + r^2 + Rr)$, llamando a, la altura R y r los radios de las bases.

8.° El volumen de un tronco de prisma triangular, es igual al tercio del producto de la base por la suma de las distancias de los tres vértices de la sección oblícua á la base. Pues este tronco es equivalente á tres tetraedros que tengan por base la del prisma y cuyos vértices sean los de la sección oblícua (331).

9.° El volumen de un poliedro circunscrito á su esfera, es igual al tercio del radio de la esfera por el área del poliedro. Pues todo poliedro circunscrito á una esfera, es equivalente á un tetraedro que tenga por base un triángulo equivalente á la superficie del poliedro y por altura el radio de la esfera inscrita (329).

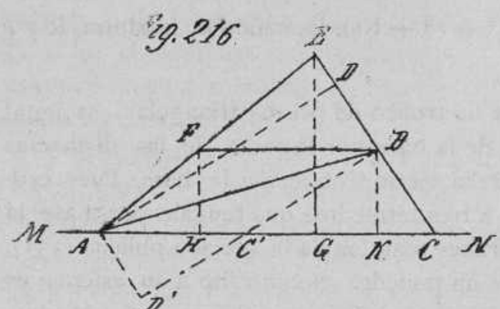
10. El volumen de una esfera, es igual al tercio del radio por el área de la esfera. Pues toda esfera es equivalente á un tetraedro que tenga por base un triángulo equivalente á la superficie esférica y por altura el radio (229, C.°) Se expresa por $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} R \times 4\pi R^2$.

11. El volumen de una cuña esférica, es igual á la cuarta

parte del volumen de la esfera multiplicada por la relación entre el ángulo de su huso y el ángulo recto. Pues haríamos un razonamiento análogo al expuesto (321). Su fórmula $\frac{1}{3}\pi R^3 A$, siendo A la relación del ángulo del huso al ángulo recto; ó bien $\frac{1}{3} R \times \pi R^2 A$, que nos dice, el volumen de una cuña, es igual al tercio del radio por el área del huso. Del mismo modo, el volumen de un tetraedro ó de una pirámide esférica, es igual al tercio del radio por el área del polígono esférico.

336. El volumen del cuerpo engendrado por un triángulo al girar alrededor de una recta exterior á él que pasa por su vértice en su plano, es igual al tercio de la altura del triángulo por el área de la superficie engendrada por su base.

En efecto, figura 216, sea el eje MN, el triángulo, cuyo vértice A está en el eje, no puede ocupar más posiciones respecto de este que; 1.ª la ABC ó ABC′ en que un lado coincide con el eje; 2.ª la ABE en que la base prolongada encuentra al eje; y 3.ª la ABF en que la base es paralela al eje: trazando las perpendiculares BK, EG y FH al eje, así como las AD y AD′ á las rectas BC y BC′, respectivamente, tendremos: en la 1.ª posición ABC engendra dos conos circulares rectos en que el radio de las bases es BK, y cuyas alturas son AK y CK, por tanto el volumen será, $\frac{1}{3} AC \times \pi \overline{BK}^2$, y como $AC \times BK = AD \times BC$ por ser expresiones del doble del área del triángulo, sustituyendo se obtiene para expresión del volumen, $\frac{1}{3} AD \times \pi BK \times BC$; si fuese el triángulo ABC′ engendraría



la diferencia de los conos circulares rectos engendrado por los triángulos ABK y BC′K, por tanto el volumen será, $\frac{1}{3}$ AC′ $\times \pi\overline{BK}^2$, y como antes AC′ $\times$ BK $=$ AD′ $\times$ BC′, sustituyendo se obtiene para expresión del volumen, $\frac{1}{3}$ AD′ $\times$ $\times\, \pi$BK$\times$BC′: en la 2.ª posición ABE engendrará un cuerpo que será la diferencia de los engendrados por AEC y ABC, siendo por tanto, el tercio de la altura AD del triángulo por el área de la superficie engendrada por la base BE: y en la 3.ª posición ABF engendra un cuerpo que será la diferencia entre, los engendrados por el rectángulo BFHK y el triángulo AFH, y el engendrado por el triángulo ABK, siendo por tanto, el tercio de la altura BK del triángulo por el área engendrada por la base BF; luego en todas las posiciones se verifica el teorema.

COROLARIOS.—1.° El volumen del cuerpo engendrado por un sector poligonal regular al girar alrededor de una recta exterior á el que pasa por su centro en su plano, es igual al tercio de la apotema del sector por el área de la superficie engendrada por la línea quebrada regular que le sirve de base (319, C.°).

2.° El volumen de un sector esférico, es igual al tercio del radio por el área del casquete que le sirve de base. Pues el volumen de un sector esférico es el límite de los volúmenes engendrados por los sectores poligonales regulares inscritos en el sector circular correspondiente cuando el número de lados de la base del sector poligonal aumenta indefinidamente. De aquí se deduce otra vez—cómo una esfera se puede considerar engendrada por un sector circular igual á un semicírculo—que el volumen de una esfera, es igual al tercio del radio por el área de la esfera.

3.° El volumen de un segmento esférico es igual al producto del área del círculo que tuviese por radio su altura por la diferencia entre el radio de la esfera y el tercio de la altura del segmento. Pues no habría más que restar del volumen del sector el del cono correspondiente.

4.° El volumen de una rebanada esférica, es igual á la diferencia de los volúmenes de los segmentos esféricos cuyas bases sean respectivamente las de la rebanada.

337. Escolio general.—Es muy conveniente observar que para determinar el volumen de un poliedro cualquiera bastará descomponerle en poliedros cuyos volúmenes sepamos determinar, si bien en algunos casos por la naturaleza del poliedro propuesto ó del cuerpo cuyo volumen deseemos obtener, se puede determinar este volumen por medios más sencillos; por esto se obtienen fórmulas sencillas para calcular las capacidades de los fosos, las de los cuerpos terminados por superficies de revolución, la de la parte de carena de un buque sumergido en el agua, y el del espacio comprendido entre planos paralelos de una superficie reglada cualquiera. Por último cuando no sea fácil ni la descomposición en figuras cuyos volúmenes sepamos determinar, ni la aplicación de otros procedimientos porque el cuerpo sea demasiado irregular en su modo de terminar; para determinar su volumen se emplea el procedimiento del peso específico (82, 1.^{er} curso), que consiste en dividir el peso del cuerpo por su peso específico: siendo muy ventajoso el empleo del sistema métrico por ser el kilógramo el peso de un decímetro cúbico de agua destilada, líquido que se toma como término de comparación para la determinación de los pesos específicos.

CAPITULO II

Semejanza.

LECCIÓN 40.

Tetraedros semejantes.

338. Como ya sabemos por la Planimetría, las condiciones generales de la semejanza, nos bastará aplicar á las figuras no planas los principios que allí establecimos; y puesto que fundamos las propiedades de las figuras planas semejantes en la definición de triángulos semejantes, en la definición de tetradros semejantes debemos fundar las propiedades de las figuras no planas semejantes.

TETRAEDROS SEMEJANTES, *son los que tienen iguales é igualmente dispuestos dos triedros cuyos vértices estén en una arista.*

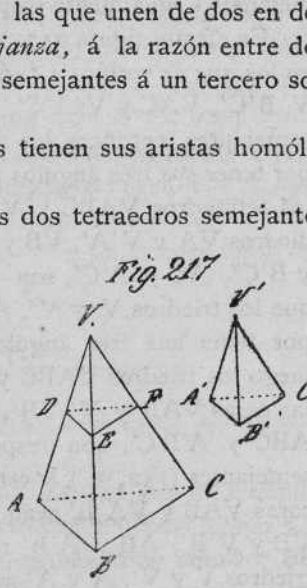
Los tetraedros semejantes tienen por tanto sus caras respectivamente semejantes y por consecuencia sus ángulos diedros y triedros iguales (148 y 184, 1.º y 2.º).

En los tetraedros semejantes se llaman; *aristas homólogas*, los lados homólogos de las caras semejantes; *caras homólogas*, las caras semejantes; *diedros homólogos*, los formados por caras semejantes, ó bien los iguales; *vértices homólogos*, los correspondientes á triedros iguales; *diagonales homólogas*, las que unen vértices homólogos; *puntos homólogos*, son los que unidos con tres vértices de dos caras homólogas resultan dos tetraedros semejantes; *rectas homólogas*, son las que unen de dos en dos puntos homólogos, y *razón de semejanza*, á la razón entre dos aristas homólogas. Dos tetraedros semejantes á un tercero son semejantes entre sí.

339. Los tetraedros semejantes tienen sus aristas homólogas proporcionales.

En efecto, figura 217, sean los dos tetraedros semejantes VABC y V'A'B'C'; por ser semejantes tienen los triedros V y V', A y A' iguales, de donde, los triángulos VAC y V'A'C', VAB y V'A'B', ABC y A'B'C', VBC y V'B'C', son respectivamente semejantes, y por tanto (150), VA : V'A' = VC : V'C' = AC : A'C' = AB : A'B' = VB : V'B' = BC : B'C', conforme al teorema.

Fig. 217



340. Si por un punto de una de las aristas laterales de un tetraedro se traza un plano paralelo á la base, el tetraedro parcial que resulta es semejante al propuesto.

En efecto, figura 217, sea el tetraedro VABC y tracemos por un punto E de la arista lateral VA un plano paralelo EFG; entonces los tetraedros VABC y VEFG, tienen el triedro V común y los triedros A y E iguales por tener sus tres ángulos planos respectivamente iguales (199); luego los dos tetraedros son semejantes.

ESCOLIO.—Podríamos considerar las tres posiciones que consideramos (152), pero entónces la que está encima del vértice no es tetraedro directamente semejante.

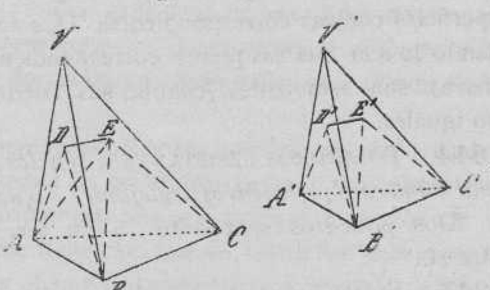
341. Dos tetraedros son semejantes si tienen; 1.° sus caras respectivamente semejantes é igualmente dispuestas; 2.° sus ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos; 3.° sus caras respectivamente paralelas; 4.° una cara semejante adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales; 5.° un ángulo diedro igual formado por dos caras respectivamente semejantes é igualmente dispuestas.

En efecto, figura 217, sean los tetraedros VABC y V'A'B'C' en los que se verifica 1.° que las caras VAB y V'A'B', VBC y V'B'C', VAC y V'A'C', ABC y A'B'C', son respectivamente semejantes, entonces los triedros V y V', A y A' son iguales, por tener sus tres ángulos planos respectivamente iguales; luego los tetraedros VABC y V'A'B'C' son semejantes; 2.° que los diedros VA y V'A', VB y V'B', VC y V'C', AB y A'B', BC y B'C', AC y A'C', son iguales, entónces sucede como antes que los triedros V y V', A y A' son respectivamente iguales, por tener sus tres ángulos driedros respectivamente iguales; luego los triedros VABC y V'A'B'C' son semejantes; 3.° que las caras VAB y V'A'B', VBC y V'B'C', VAC y V'A'C', ABC y A'B'C', son respectivamente paralelas; entonces son semejantes (152, 3.°), y estamos en el primer caso; 4.° que las caras VAB y VA'B' sean semejantes y los diedros VA y V'A', VB y V'B', AB y A'B' respectivamente iguales; entonces los triedros V y V', A y A' son iguales por tener un ángulo plano igual y los ángulos diedros adyacentes iguales; luego los dos tetraedros propuestos son semejantes; 5.° que los ángulos diedros VA y V'A' sean iguales, y las caras que les forman VAB y V'A'B', VAC y V'A'C' respectivamente semejantes; entónces los triedros V y V', A y A' son iguales, por tener un ángulo diedro igual y los ángulos que los forman respectivamente iguales; luego también los tetraedros VABC y V'A'B'C' son semejantes.

342. La razón de las rectas homólogas de dos tetraedros semejantes, es igual á la razón de semejanza.

En efecto, figura 218, sean las rectas homólogas de los dos tetraedros semejantes VABC y V'A'B'C', DE y D'E', uniendo sus extremos respectivamente con A, B, C, y A', B', C', se obtienen los tetraedros respectivamente semejantes DABC y D'A'B'C', y EABC y E'A'B'C'; entonces los tetraedros DEAC y D'E'A'C', son semejantes (341, 5.º), luego DE : D'E' = AC : A'C'.

Fig. 218.



LECCIÓN 41.

Figuras semejantes y consecuencias.

343. CUERPOS SEMEJANTES, *son los terminados por superficies semejantes.*

Ya sabemos (165), las condiciones con que han de cumplir dos superficies planas para que sean semejantes; pero como hemos estudiado superficies no planas, necesitamos conocer las condiciones que han de tener estas para que sean semejantes; sin embargo como nosotros nos hemos limitado á estudiar entre las superficies no planas, la cónica cilíndrica y esférica, si bien por lo que respecta á las dos primeras sólo nos interesan, como formando parte de las superficies del cono y cilindro circular recto; de aquí el que digamos: Dos superficies cónicas de dos conos circulares rectos son semejantes, cuando los triángulos rectángulos que engendran los conos lo son: Dos superficies cilíndricas de dos cilindros circulares rectos son semejantes, cuando los rectángulos que engendran los cilindros lo son: Dos superficies esféricas son siempre semejantes: dos superficies laterales de dos troncos de conos circulares rectos de bases paralelas son semejantes, cuando los trapecios generadores lo sean: Dos husos son semejantes, cuando sus ángulos correspondientes sean iguales: Dos casquetes son semejantes, cuando lo son sus superficies cónicas correspondientes. Dos zonas son semejantes, cuando lo son sus casquetes correspondientes: Dos triángulos esféricos son semejantes, cuando sus triedros correspondientes son iguales.

344. POLIEDROS SEMEJANTES, *son los que se componen de igual número de tetraedros semejantes é igualmente dispuestos.*

Dos poliedros semejantes á un tercero son semejantes entre sí.

345. Si por un punto de una de las aristas laterales de una pirámide se traza un plano paralelo á la base, la pirámide parcial que resulta es semejante á la propuesta. Puesto que descomponiendo las bases, que son polígonos semejantes (158), por medio de diagonales homólogas en triángulos semejantes, y haciendo pasar planos por estas diagonales y los vértices de las pirámides, quedarán descompuestas en igual número de tetraedros semejantes é igualmente dispuestos; luego las pirámides serán semejantes.

346. Dos poliedros semejantes, tienen las caras homólogas semejantes y los ángulos diedros y poliedros homólogos respectivamente iguales. Puesto que; las caras homólogas, ó son caras homólogas de tetraedros semejantes, ó se componen de igual número de caras homólogas de los mismos; los ángulos diedros, ó son diedros homólogos de tetraedros semejantes, ó se componen de igual número de diedros homólogos de ellos; y los ángulos poliedros, se hallan compuestos de igual número de diedros homólogos iguales. Claro está, que las aristas homólogas son proporcionales por pertenecer á tetraedros semejantes.

Recíproco.—Dos poliedros son semejantes, cuando tienen sus caras homólogas respectivamente semejantes y los ángulos diedros que estas formen respectivamente iguales. Pues eligiendo dos vértices homólogos de dos caras semejantes, se pueden descomponer en igual número de tetraedros semejantes é igualmente dispuestos.

Corolarios.—1.º Dos poliedros regulares del mismo número de caras, son semejantes. 2.º Las aristas homólogas y las rectas homólogas de dos poliedros semejantes son directamente proporcionales.

Escolio.—Debemos hacer notar que las figuras semejantes gozan de la propiedad de podérselas colocar de manera que, trazando por un mismo punto rectas á todos los puntos de su contorno, aquellas que tienen la misma dirección son proporcionales. A las rectas que se trazan desde un mismo punto se las llama *radios vectores*; y al origen común de todos los radios vectores, *centro de semejanza*.

El centro de semejanza es *directo*, cuando los radios vectores homólogos están dirigidos en el mismo sentido; y es *inverso*, cuando están dirigidos en sentidos contrarios. Las figuras semejantes, pueden por tanto ser directa ó inversamente semejantes, y cuando la razón de semejanza es la unidad; las directamente semejantes son iguales; y las inversamente semejantes son simétricas, por no tener estas sus elementos igualmente dispuestos.

347. La razón de las áreas de dos poliedros semejantes, es igual á la razón de los cuadrados de sus rectas homólogas. Puesto que los poliedros semejantes tienen por caras homólogas polígonos semejantes y la razón de las rectas homólogas es igual á la razón de semejanza (163).

348. La razón de las áreas de dos conos semejantes, es igual á la razón de los cuadrados de sus rectas homólogas. Puesto que si llamamos, C y C', á las áreas de los conos, l y l'

á los lados, y r y r' á los radios respectivos tendríamos; $C = \pi r\ (r + l)$, y $C' = \pi r'\ (r' + l')$, de donde, $C : C' = r\ (r+l) : r'\ (r'+l')$, y como, $r : r' = l : l' = (r + l) : (r'+l')$, se obtiene $C : C' = r^2 : r'^2 = l^2 : l'^2$.

COROLARIOS.—1.° Las áreas laterales de dos conos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus rectas homólogas. 2.° La razón de las áreas de dos cilindros semejantes, es igual á la razón de los cuadrados de sus rectas homólogas. 3.° Las áreas laterales de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus rectas homólogas. 4.° La razón de las áreas de dos troncos de cono semejantes, es igual á la razón de los cuadrados de sus rectas homólogas. 5.° Las áreas laterales de dos troncos de cono semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus rectas homólogas.

349. La razón de las áreas de dos esferas, es igual á la razón de los cuadrados de sus radios ó diámetros. Puesto que si llamamos E y E′ á las áreas de dos esferas cuyos radios sean R y R′ tendríamos $E = 4\pi R^2$ y $E' = 4\pi R'^2$, de donde, $E : E' = R^2 : R'^2 = 4R^2 : 4R'^2$.

COROLARIOS.—Las áreas de dos casquetes, de dos zonas, de dos husos, y de dos triángulos esféricos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de los radios de las esferas de que forman parte.

350. La razón de los volúmenes de dos poliedros semejantes, es igual á la razón de los cubos de sus rectas homólogas. Puesto que si son dos tetraedros semejantes, como los VABC y V′A′B′C′ de la figura 217, se podrá colocar el segundo sobre el primero de modo que tome la posición VEFG; pero en este caso se tiene (327), $ABC : EFG = \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$, y como los volúmenes de los dos tetraedros son, llamando a y a' á las alturas, $\frac{1}{3}\ a \times ABC$ y $\frac{1}{3}\ a' \times A'B'C'$, y $\frac{1}{3}\ a : \frac{1}{3}\ a' = AB : EF$, se obtiene, multiplicando esta igualdad por la anterior teniendo en cuenta que $EFG = A'B'C'$, y $EF = A'B'$, $\frac{1}{3}\ a \times ABC : \frac{1}{3}\ a' \times A'B'C' = \overline{AB}^3 : \overline{A'B'}^3$; y si fuesen dos poliedros semejantes sabemos que se componen de igual número de tetraedros semejantes é igualmente dispuestos; luego se podrían formar una serie de razones iguales en que la suma de los antecedentes fuese un poliedro la de los consecuentes el otro y un antecedente el cubo de una arista y su consecuente el cubo de su homóloga.

351. La razón de los volúmenes de dos conos semejantes, es igual á la razón de los cubos de sus rectas homólogas. Puesto que si llamamos C y C′ á los volúmenes de los conos, a y a' las alturas y r y r' los radios de sus bases tendríamos; $C = \frac{1}{3} a \times \pi r^2$, $C' = \frac{1}{3} a' \times \pi r'^2$, de donde, $C : C' = ar^2 : a' r'^2$, y como, $a : a' = r : r'$, se obtiene, $C : C' = a^3 : a'^3 = r^3 : r'^3$.

COROLARIOS.—La razón de los volúmenes de dos troncos de cono, de dos cilindros, de dos sectores esféricos, de dos cuñas esféricas, de dos segmentos esféricos, de dos rebanadas esféricas semejantes, son iguales á la razón de los cubos de sus rectas homólogas.

352. La razón de los volúmenes de dos esferas es igual á la razón de los cubos de sus radios ó diámetros. Puesto que si llamamos E y E′ á las dos esferas cuyos radios sean R y R′, tendríamos; $E = \frac{4}{3} \pi R^3$, $E' = \frac{4}{3} \pi R'^3$, de donde, $E : E' = R^3 : R'^3 = 8R^3 : 8R'^3$.

ESCOLIO.—Es conveniente observar que; 1.° la razón entre las longitudes de dos líneas semejantes es igual á la relación de las primeras potencias de dos rectas homólogas; 2.° la razón entre las áreas de dos superficies semejantes, es igual á la razón de las segundas potencias de dos rectas homólogas; y 3.° que la relación entre los volúmenes de cuerpos semejantes, es igual á la relación entre las terceras potencias de sus rectas homólogas.

353. ESCOLIO GENERAL.—Debemos hacer notar que lo expuesto en (173), es aplicable por completo á la Estereometría.

LECCIÓN 42

Máximos y mínimos.

354. Para terminar la Estereometría nos resta, determinar los máximos y mínimos de las figuras no planas; pues de este modo cumpliremos el plan que en las dos partes del aspecto particular de la Geometría hemos razonado en la primera lección.

Principiaremos por tanto por la determinación de los máximos y mínimos de los triángulos esféricos; puesto que el triángulo esférico es la figura fundamental de la Estereometría, así como el triángulo rectilíneo lo es de la Planimetría.

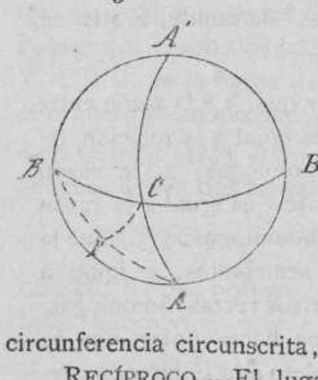
355. De los triángulos esféricos que tengan dos lados dados cuya suma sea menor que 180°, será de área máxima aquel cuyo tercer lado sea diámetro del círculo circunscrito.

Para demostrar este teorema antepondremos los dos lemas siguientes:

1.° Cuando el vértice de un triángulo esférico se mueve sobre su circunferencia circunscrita, la diferencia entre la suma de los ángulos adyacentes á la base y el ángulo en el vértice es constante.

En efecto, figura 219, sea el triángulo esférico ABC, P el centro esférico de la circunferencia circunscrita, y tracemos los radios esféricos PA, PB y PC; entonces tendremos, $BAC + CBA - ACB = BAP + CAP + ABP + CBP - ACP - BCP = 2BAP$; y como esta diferencia depende solamente de la posición del centro esférico respecto de la base AB, será constante. En el caso especial de que AB sea un diámetro esférico de la circunferencia circunscrita, la diferencia será nula.

Fig 219



RECÍPROCO.—El lugar geométrico de los vértices de los triángulos esféricos que tengan una base común y en los que sea constante la diferencia entre la suma de los ángulos adyacentes á la base y el ángulo en el vértice, es una circunferencia circunscrita á la base común.

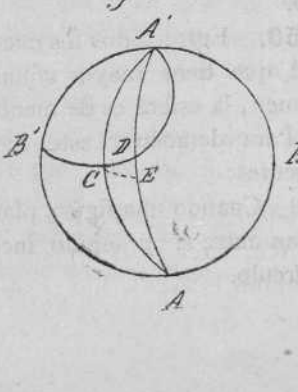
En efecto, figura 219, sea ABC uno de los triángulos que cumplen con la hipótesis del enunciado, P el polo del círculo menor circunscrito al triángulo, y trazando los radios esféricos PA, PB y PC, los triángulos esféricos PAB, PAC y PBC son isósceles; por tanto, la diferencia, $BAC + CBA - ACB = 2BAP$, es constante, siendo por consecuencia el triángulo PAB fijo, lo mismo que el polo P; luego siendo la distancia $PC = PA$ constante, el vértice C está siempre sobre la circunferencia descrita desde el punto P como polo con un radio esférico igual á PA.

2.º El lugar geométrico de los vértices de los triángulos esféricos que tengan una base común é igual área, es una circunferencia menor que pasa por los puntos opuestos á los extremos de la base común.

En efecto, figura 219, sea A′B′C uno de los triángulos esféricos que cumplen con la hipótesis, siendo A′B′ la base común; entonces, por ser $(A' + B' + C - 2)$ constante, también lo es $(C - A - B)$, pues $A' = 2 - A$, $B' = 2 - B$; por consecuencia el lugar de que se trata es el mismo que el de los vértices de los triángulos como el ABC, cuya base AB es fija siendo constante la diferencia entre el ángulo en el vértice y la suma de los ángulos en la base, lugar que según acabamos de ver, es una circunferencia menor que pasa por A y B puntos opuestos á los extremos de la base común A′B′.

Ahora ya es fácil demostrar el teorema propuesto, una vez que, figura 220, si son AB y AC los dos lados dados cuya suma sea menor que 180°, trazando por los puntos A′ y B′ opuestos á los A y B, el círculo cuyo diámetro esférico A′C sea suplementario del lado AC, lo que exige $A'C > AB$ ó bien $AB + AC < 180°$ según la hipótesis, y trazando también la semicircunferencia máxima A′DA que corte en D á la circunferencia menor A′B′C; se tendrá, que los triángulos ABC y ABD

Fig 220



tendrán la misma área según el lema segundo: tomando ahora sobre AD una parte $AE = AC$, será $AE < AD$; puesto que $AE = A'C > A'D$; de donde resulta que el triángulo ABE tiene menor área que el ABD; luego $ABC > ABE$. Pero en el triángulo esférico ABC, se tiene $B + C - A = -B' + C + A'$, y como $A'C$ es un diámetro esférico se anulan los dos miembros de esta igualdad, según el lema primero; por tanto BC es un diámetro esférico del círculo menor ABC.

Escolio.—Es conveniente observar que teniendo en cuenta los triángulos polares de los considerados se tiene evidentemente: 1.° Cuando la base de un triángulo esférico se mueve de modo que no deje de ser tangente al círculo inscrito en el mismo, la diferencia entre la suma de los otros lados y la base será constante: 2.° Las bases de los triángulos esféricos con un ángulo común en el vértice y que la diferencia entre la suma de los lados que concurren en el vértice común y la base sea constante, son tangentes por fuera á un círculo inscrito en el ángulo de dicho vértice común: 3.° Las bases de los triángulos esféricos con un ángulo común en el vértice é iguales perímetros, son tangentes por fuera á un círculo inscrito en el ángulo común: 4.° De los triángulos esféricos que tengan dos ángulos dados cuya suma sea mayor que 180°, será de perímetro mínimo aquel cuyo tercer ángulo sea igual al diámetro del círculo inscrito.

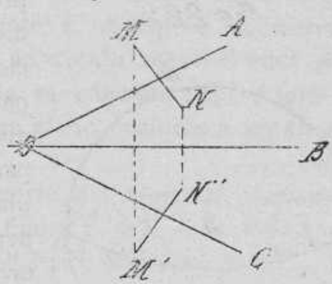
356. Entre todos los cuerpos de la misma área, la esfera es el que tiene mayor volumen; y entre todos los de igual volumen, la esfera es de menor área.

Para demostrar este teorema antepondremos los lemas siguientes:

1.° Cuando una figura plana tiene dos ejes de simetría que forman entre sí un ángulo incomensurable con π, esta figura es un círculo.

En efecto, figura 221, sean OA y OB los dos ejes de simetría que tenga la figura plana de que se trate; entónces la recta OC simétrica de OA con respecto á OB es también eje de simetría; porque siendo M un punto cualquiera de la figura y N su simétrico con respecto á OA, al rebatir la figura por OB, los dos puntos M′ y N′ con los cuales coinciden M y N, serán también puntos de la figura á causa de la simetría con respecto á OB, pero estos dos puntos M′ y N′ son simétricos con respecto á OC, por haber coincidido OA con OC en el rebatimiento, luego OC es eje también de simetría: por tanto, haciendo girar á OB un ángulo AOB alrededor del punto O y en el plano de la figura, se obtiene un tercer eje de simetría OC; una nueva rotación de la misma amplitud daría un cuarto eje de simetría, y así sucesivamente: pero como el ángulo AOB que forman los ejes es incomensurable con π, no se obtendrá nunca un eje de simetría ya obtenido por más que se continúe la rotación; luego la figura tiene un número indefinido de ejes de simetría pasando por el punto O, de modo que es un círculo (421, E.° 2.°)

Fig. 221

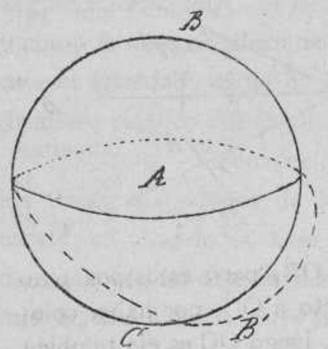


2.° Si por los puntos medios de las aristas laterales de un tronco de prisma triangular se traza un plano; los dos segmentos del tronco son equivalentes, y la sección es en general menor que la semisuma de las bases. Puesto que los dos segmentos del tronco tendrían el mismo volumen (331), y la sección es la semisuma de las proyecciones de las bases.

ESCOLIO.—Es necesario observar que del lema anterior resulta que: si en un cuerpo limitado por una superficie convexa se trazan una serie de cuerdas paralelas, la superficie lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas divide al cuerpo en dos partes equivalentes, y tiene un área menor que la mitad del área del cuerpo.

Ahora es ya fácil la demostración del teorema propuesto; una vez que, figura 222, si imaginamos un cuerpo que tenga la propiedad de ser de mayor volumen que todos los de igual superficie que él, necesariamente existe para una dirección dada un plano que divide á la superficie en dos partes iguales, sea A uno de estos planos, B y C las mitades de la superficie; si el cuerpo no estuviese dividido por este plano en dos partes equivalentes, siendo por ejemplo AB > AC, no podría tener este cuerpo un volumen máximo, porque se podría reemplazar C por la simétrica de B y había aumentado el volumen sin variar la superficie; es por tanto preciso que AB = AC: si con este supuesto C no fuese simétricamente igual á B, se podría imaginar una superficie B′ del mismo lado que C con respecto al plano A, y simétricamente igual á B, teniendo AB′ = AB = AC; y por tanto el cuerpo BB′ = BC: si en los espacios comprendidos entre C y B: se trazasen rectas paralelas entre sí y limitadas por estas superficies, sus puntos medios estarán sobre una superficie D que tendría la misma base que C y B′ entónces; AD = AC = AB′, ó BD = BC; pero según el segundo lema, 2D < C + B′, ó bien, D < C, puesto que C = B′: la superficie D, que sería menor que C encerraría, pues con B un espacio equivalente al que está encerrado entre B y C, lo que es contrario al supuesto: se necesita por consiguiente que C sea simétricamente igual á B; ó de otro modo el cuerpo supuesto tiene la propiedad de admitir como plano de simetría todo plano que divida á la superficie en dos partes equivalentes. Pues bien, consideremos una recta cualquiera M en el espacio, y tracemos por ella dos planos cualesquiera P′ y Q′ que formen entre sí un ángulo incomensurable con π: el cuerpo máximo admitirá dos planos de simetría P y Q, respectivamente paralelos á P′ y Q′;

Fig 222



por consiguiente, toda sección del cuerpo hecha perpeudicularmente á la recta M tendrá por ejes de simetría las dos rectas p y q, según las cuales el plano de esta sección corta á los P y Q; pero estas rectas forman entre sí un ángulo incomensurable con π; luego esta sección es un círculo según el lema primero, y como la dirección de ella es arbitraria, se vé que el cuerpo máximo es cortado por un plano cualquiera según un círculo; luego es una esfera.

Para demostrar la segunda parte del teorema, llamemos E á la esfera equivalente á una figura F, y E_1 á la esfera de igual área que F; tendremos $F < E_1$, y por tanto $E < E_1$, de donde E tiene menor área que F.

357. ESCOLIO GENERAL.—Por lo expuesto en esta lección, se vé que los teoremas demostrados para las figuras planas en la lección 22, conservan su exactitud para las figuras esféricas.

Aplicaciones.

LIBRO PRIMERO.

1.° Trazar por un punto una recta paralela á otra dada. Este problema se resuelve como su análogo de la Planimetría.

2.° Trazar por una recta un plano, perpendicular á otro dado. Se resuelve este problema trazando por un punto de la recta dada una perpendicular al plano dado. Si la recta dada fuese ya perpendicular al plano dado el problema será indeterminado.

3.° Trazar por un punto una recta que corte á dos rectas dadas. La solución será la recta intersección de los dos planos determinados por el punto dado y cada una de las rectas dadas. Discusión de este problema según las diferentes posiciones de los planos.

4.° Trazar una recta paralela á otra y que corte á otras dos dadas. La solución de este problema será la intersección de los dos planos paralelos á la recta dada á quien ha de ser paralela la que se nos pide, trazados por las dos rectas dadas á que ha de cortar la pedida.

5.º Determinar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros cuatro dados. La solución de este problema será la perpendicular, trazada en el centro del círculo determinado por los tres puntos dados, al plano determinado por los tres puntos dados.

6.º Determinar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros tres dados. La solución de este problema será el punto intersección de la perpendicular en su centro al círculo determinado por tres de estos puntos y el plano perpendicular en el punto medio á la recta que une el cuarto punto con cualquiera de los otros tres. Discusión de este problema cuando los cuatro puntos están en un plano.

7.º Hallar en un tetraedro dado su altura. Para resolver este problema se trazan desde el vértice del tetraedro perpendiculares á dos aristas de la base y en sus piés se trazan en el plano de la base perpendiculares á esas aristas, uniendo el punto de intersección de estas perpendiculares con el vértice del tetraedro tendremos la altura pedida. Determinar la magnitud de la altura de un tetraedro impenetrable sobre un plano.

8.º Dada una pirámide truncada de bases paralelas, hallar su altura, la de la pirámide total, y la de la deficiente. La altura del tronco se determina por el problema anterior; para determinar las otras dos se forman las proporciones siguientes; llamando, b y b' dos aristas homólogas de las bases, a la altura del tronco y VO y VO′ a las alturas total y deficiente $VO : VO' = b : b'$, $a : VO = (b-b') : b$, $a : VO' = (b-b') : b'$, de donde; $VO = \frac{a\,b}{b-b'}$, $VO' = \frac{ab'}{b-b'}$.

9.º Trazar un plano tangente á la superficie cónica, paralelo á una recta dada.

Se resuelve este problema, trazando por el vértice una paralela á la recta dada, por un punto de esta recta se traza un plano paralelo á la base, y por el mismo punto la tangente á la sección; esta tangente y la paralela trazada desde el vértice á la recta dada, determinan el plano pedido.

10. Trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica, paralelo á una recta dada.

Se resuelve este problema, trazando por un punto de la recta dada una paralela al eje, por otro punto de la misma recta un plano perpendicular al eje, por la recta dada otro plano paralelo al eje, que cortará al anterior según una recta, y trazándo una tangente á la sección determinada por el plano paralelo al eje, que sea paralela á la intersección determinada por los dos planos; esta tangente y la generatriz del punto de contacto determinarán el plano pedido.

11. Dado un tronco de cono circular recto de bases paralelas, hallar su altura, la del cono total, y la del deficiente. La altura del tronco se determina construyendo un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa el lado del tronco y que uno de los catetos sea la diferencia de los radios de las bases, el otro cateto será la altura pedida; para determinar las otras dos se forman las proporciones siguientes,—llamando r y r' los radios de las bases, á la altura del tronco a, y VO y VO$'$ á las alturas total y deficiente $VO : VO' = r : r'$, $a : VO = (r - r') : r$, $a : VO' = (r - r) : r'$; de donde,

$$VO = \frac{ar}{r - r'},\ VO' = \frac{ar'}{r - r'}.$$

12. Construir un triángulo esférico conocidos tres cualesquiera de sus seis elementos.

1.° Si se dan dos lados y el ángulo comprendido, se resuelve como en Planimetría.

2.° Si se dan un lado y los ángulos adyacentes, se resuelve, por el triángulo polar, como el anterior.

3.° Si se dan los tres lados que llamaremos, a, b, c; supondremos, para fijar las ideas, que, $a > b > c$, tracemos una circunferencia máxima en la superficie esférica y tomemos sobre ella una parte $BC = a$, tracemos desde los puntos B y C como polos y con una abertura de compás igual á las cuerdas de c y b, arcos de circunferencia que se encontrarán en dos puntos A y A'; los triángulos ABC y A'BC resuelven el problema, si bien el segundo es simétrico del primero. Para que se pueda resolver este problema es preciso que,

$$a < b + c, \text{ y } a + b + c < 360^o.$$

4.° Si se dan los tres ángulos, se resuelve, por el triángulo polar, como el anterior.

5.° Si se dan dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos; se trazan en la superficie esférica dos circunferencias máximas que formen un ángulo A igual al dado, tomaremos á partir del vértice sobre una de ellas un arco AB $= b$, y desde el punto C como polo y con una abertura igual á la cuerda de a, describen un arco que corte al otro lado en B, entonces, el triángulo ABC será el pedido; pero en el caso que no le corte ó lo corte en dos puntos, no habrá triángulo ó el problema tendrá dos soluciones.

6.° Si se dan dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos, se resuelve, por el triángulo polar, como el anterior.

LIBRO II.

13. Determinar la altura de una pirámide regular; cuya base es un cuadrado que tiene por lado 4 metros, y cuya área lateral sea ocho veces la de la base. La altura pedida es un cateto de un triángulo rectángulo en que el otro cateto es la apotema de la base y la hipotenusa la apotema de la pirámide; luego llamando a, esta altura sabemos (175 y 309), que se tiene $2 \times 4\sqrt{a^2+4} = 8 \times 16$, ó bien $\sqrt{a^2+4} = 16$, de donde, $a^2 = 16^2 - 4$, y $a = 6\sqrt{7} = 15'87$ metros.

14. Se desea determinar cuánto cobrará un pintor que ha pintado una cuba cilíndrica por dentro y fuera; sabiendo que la cuba tiene dos metros de diámetro y cinco de profundidad, y que cada metro cuadrado cuesta 0'15 de peseta. El número de metros cuadrados que habrá de pagar será el doble del área total de la cuba, que sabemos es (318), $2 \times 2\pi r\,(l + r)$; luego, $4 \times 3'14 \times 6 \times 0'15 = 11'30$ pesetas, será lo que cobrará el pintor.

15. Determinar el área de una zona esférica; sabiendo que el diámetro de la esfera es de 6 metros, y que las bases distan hacia el mismo lado del centro uno y dos metros respectivamente. El área que se nos pide estará expresada (320) por, $1 \times 2\pi 3 = 3'14 \times 6 = 18'84$ metros cuadrados.

16. Determinar el área de un triángulo esférico, cuyos ángulos tengan respectivamente, 60°--20′, 70°--30′ y 80°--40′, teniendo el radio de la esfera 70 centímetros. El área del triángulo esférico propuesto es (322), $\frac{7}{40} \times \pi 70^2$, cuando se toma por unidad el ángulo esférico recto ó sea la cuarta parte del área de la esfera, ó bien $\frac{7}{20} \times \frac{1}{2} \pi \times 70^2$, cuando se toma por unidad el triángulo esférico trirrectángulo; efectuando las operaciones se obtiene en uno y otro caso para valor del área 2.693 centímetros cuadrados.

17. Determinar el peso del aire contenido en una habitación; sabiendo que un litro de aire pesa 1'29 gramos, y que las dimensiones de la habitación cuya forma sea un paralelepípedo rectángulo, son 7 metros de largo, 5 de ancho y 4 de altura. El volumen del aire es (335), $7 \times 5 \times 4 = 140 m^3 = 140.000\ l$; luego el peso pedido será, $140.000 \times 1'29 = 180.600$ gramos $=$ $= 180$ kg.--6Hg.

18. En una clase de 50 discípulos y cuyas dimensiones, teniendo la forma de un paralelepípedo rectángulo, son $8m$, $6m$, y $4m$; se desea determinar las dimensiones de una abertura cuadrada, con el fin de que entre el aire necesario con una velocidad por segundo de $5dm$, para la respiración de los alumnos durante la hora y media de clase, sabiendo que cada alumno necesita $6m^3$ de aire por hora. El número de metros cúbicos de aire que contiene la habitación es según sabemos (335), $8 \times 6 \times 4$ $= 192 m^3$; para 50 discípulos se necesitan $6 \times 50 = 300\ m^3$ por hora, y en hora y media $450\ m^3$, es preciso pues que entre en ese tiempo, $450 - 192 = 258 m^3$ de aire, ó lo que es lo mismo durante un segundo $258 : 5.400 = 0'048 m^3$; y como la velocidad por segundo es de $5dm$, el área de la abertura tiene que ser, $0'048 : 0'5 = 0'096m^2$.

19. Determinar las dimensiones del litro que se emplea para los líquidos; sabiendo que tiene la forma de un cilindro, y que su altura es doble del diámetro de la base. Como sabemos que el litro es equivalente á un decímetro cúbico, se resolverá el problema (335, C.^os 1.º y 5.º) estableciendo la siguiente igualdad, $1^3 = \pi \frac{a^2}{16} \times a$, llamando a á la altura del cilindro, pues entonces el radio de la base será $\frac{a}{4}$; de la igualdad establecida se deduce, $16 = \pi a^3$, $a^3 = \frac{16}{\pi}$, $a = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}$, y efectuando el cálculo se obtiene, $a = 172mm$ y $\frac{a}{4}$ $43mm$.

20. Determinar las dimensiones del litro, del decálitro, y del hectólitro que se emplean para los áridos; sabiendo que tienen la forma cilíndrica, y que la altura de cada uno de ellos es igual al diámetro de su base. Llamando a, a', a'' las alturas del litro, del decálitro y del hectólitro, los radios de las bases respectivas serán $a : 2$, $a' : 2$, $a'' : 2$; por tanto como en el problema anterior estableceremos las siguientes igualdades, $1^3 = \frac{\pi a^2}{4} \times a$ " $10 \times 1^3 = \frac{\pi a'^2}{4} \times a'$ " $100 \times 1^3 = \frac{\pi a''^2}{4} \times a''$ de las que se deduce, $a = \sqrt[3]{4 : \pi}$ " $a' = \sqrt[3]{40 : \pi}$ " $a'' = \sqrt[3]{400 : \pi}$, y efectuando el cálculo se obtiene, $a = 108mm$, $a' = 233\ mm$, $a'' = 503mm$.

21. CUBICACIÓN DE MADERAS.—Las maderas se venden ordinariamente en vigas ó en tablas, en el primer caso, sino están labradas, tienen la forma de un tronco de cono, y en el segundo tienen la forma de un paralelepípedo rectángulo; por tanto para la cubicación de las maderas bastará aplicar las fórmulas respectivas (335, y C.º 7.º) Pero sucede á veces que los diámetros de las dos bases del tronco de cono de bases paralelas, difieren en muy poco; entonces se le considera como un cilindro circular recto cuya base sea la sección hecha por el punto medio de su altura. Supongamos, por ejemplo, que se desea cubicar una viga de 7 metros de larga y en la que los diámetros de las dos bases sean próximamente iguales; mediremos, con una cinta barnizada dividida en metros y sus divisores, la longitud de la circunferencia media, que supondremos tenga 1'90 metros; entonces el radio de la sección será $1'90 : 2\pi$, su área $1'90^2 : 4\pi$, y el volumen de la viga $1'90^2 \times 7 : 4\pi =$ $= 2'059 m^3$.

22. CUBICACIÓN DE TONELES.—Los toneles por su forma se les puede considerar como la suma de dos troncos iguales de cono circular recto de bases paralelas, siendo la base mayor la sección hecha en la parte media del tonel y las bases menores los testeros del tonel; por tanto para la cubicación de los toneles bastará aplicar la fórmula $\frac{1}{3}\pi a(R^2+r^2+Rr)$, (335 C.° 7.°). Pero esta fórmula nos dá un resultado erróneo por defecto, lo que ha hecho se sustituyan Rr por R^2, lo que nos dá la fórmula de OUGHTRED, $\frac{1}{3}\pi a(2R^2+r^2)$, esta fórmula dá por el contrario un resultado por exceso mayor que la de DEZ, $\pi a\left[R-\frac{3}{8}(R-r)\right]^2$; la fórmula más aproximada para la determinación de la capacidad de los toneles dada su forma general es, $\frac{1}{3}\pi a\left[2R^2+r^2-\frac{1}{3}(R^2-r^2)\right]$, sin embargo en la práctica se acostumbra á usar la siguiente, $0'625 d^3$, en la que d representa la diagonal que va desde el agujero central al punto más bajo de uno de los testeros; esta fórmula tiene la ventaja de que hay varillas de metal construidas para medir la diagonal y que tienen ya calculados los volúmenes para los diferentes valores de él, lo que hace se obtenga la capacidad del tonel por ~~para~~ una simple lectura: para comparar esta fórmula con las anteriores, basta observar que d es la diagonal de un triángulo rectángulo en que uno de los catetos es $\frac{a}{2}$ y el otro $R + r$, por lo cual se puede escribir, $0'625d^3 = 0'625 \left(\frac{a^2}{4} + R^2 + 2Rr + r^2\right) \frac{3}{2}$. Supongamos, por ejemplo, que un tonel, tiene, de altura 1'5 metros, de radio central 0'45 metros, y de radio del fondo ó de uno de los testeros, 0'325 metros; la primera fórmula efectuando los cálculos por logaritmos nos dá, 714 litros para capacidad del tonel, la segunda 802, la tercera 765, la cuarta 751, y la quinta 784.

23. Determinar el volumen de la tierra, suponiéndola esférica. Por la definición del metro sabemos que la longitud de un círculo máximo de la tierra, es de 4.000 miriámetros, por tanto el radio será $2.000 : \pi$, y su volumen será, $32.000.000.000 : 3\pi^2 = 1.080\ 759.000\ Mm^3$, efectuando las operaciones por logaritmos.

24. Determinar el volumen de una esfera; sabiendo que el sector que tiene por base $1m^2$, tiene por volumen $2m^3$. Como (336, C.° 2.°) el volumen de un sector esférico es igual al tercio del radio de la esfera por el área del casquete que le sirve de base; se tiene para radio de la esfera $6m$, y para volumen $\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 904'8m^3$, efectuando el cálculo por logaritmos.

25. Hallar el área de una esfera de cristal; sabiendo que pesa $2kg$, y que la densidad del cristal es de 2'7. Como la densidad de un cuerpo es igual al peso dividido por el volumen; tendremos, $2kg = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 2'7 = 4\pi R^3 \times 0'9$, de donde

$$R = \sqrt[3]{2 : 4\pi \times 0'9} = 0'5.613\ dm, \text{ luego el área será}$$

$$4\pi \times (0'5613)^2 = 3'959\ dm^2.$$

26. Determinar el volumen de un segmento esférico, sabiendo que el radio de la esfera tiene $8m$, y que la base está trazada á una distancia del centro igual á la mitad del radio. Como el volumen de un segmento esférico es igual (336, C.° 3.°) al producto del área del círculo que tuviese por radio su altura por la diferencia entre el radio de la esfera y el tercio de la altura del segmento; tendrá por expresión

$$\pi 4^2 \left(8-\frac{4}{3}\right) = \pi \times 16 \times \frac{20}{3} = 335m^3,$$

efectuando el cálculo por logaritmos.

27. Determinar el volumen de una rebanada esférica, sabiendo que el radio de la esfera es de $8m$, y que las bases están trazadas hacia un mismo lado del centro y á una distancia de él igual á 3 y $6m$. Como el volumen de una rebanada esférica es igual (336, C.º 4.º) á la diferencia de los volúmenes de los segmentos cuyas bases sean respectivamente las de la rebanada; determinaremos como en el problema anterior el volumen del segmento cuya altura tiene $5m$, que tendrá por expresión $\pi \times 25 \times \frac{19}{3} = 497'1m^3$, y el del segmento cuya altura tiene $2m$, que es $\pi \times 4 \times \frac{22}{3} = 92'1m^3$, y restando tendremos para volumen de la rebanada propuesta $405m^3$.

28. Determinar la arista homóloga de un poliedro semejante á otros dados que sea equivalente á la suma de ellos; sabiendo que las aristas homólogas de la serie de los poliedros semejantes dados, son los términos de la progresión decreciente $\div$ 1 : 0'6 : $0'6^2$, : $0'6^3$: ... Sabemos que por ser los poliedros semejantes se tiene (350), $P : 1^3 = P_1 : 0'6^3 = P_2 : 0'6^6 = P_3 : 0'6^9 = ... = X : x^3$, llamando P, P_1, P_2, P_3,.....X, á los poliedros y x á la arista homóloga que nos proponemos determinar; por tanto, de esta serie de fracciones iguales se deduce (260, 1.er Curso) $(P+P_1+P_2+P_3+...) : (1^3+0'6^3+0'6^6+0'6^9+...) = X : x^3$, pero como los numeradores son iguales, según el enunciado, los denominadores también lo serán; luego $x^3 = 1^3+0'6^3+0'6^6+ +0'6^9+...$, el segundo miembro de esta igualdad es la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente indefinida, cuyo primer término es uno y la razón $0'6^3$, cuyo límite es (391, 1.er Gurso) $1 : (1-0'6^3)$, por consiguiente tendremos, $x = \sqrt[3]{1 : (1-0'6^3)} = \sqrt[3]{1.000 : 784} = 1'084m$, efectuando el cálculo por logaritmos.

29. Determinar las dimensiones de una vasija cilíndrica que tuviese doble capacidad que otra dada, sabiendo que esta tiene por radio 0'25 *m*, y por profundidad 0'75 *m*. Los volúmenes respectivos de los dos cilindros están en la relación de $1 : 2$, y además (351, C.º), $1 : 2 = 0'25^3 : r^3 = 0'75^3 : a^3$, llamando r al radio y a á la profundidad de la vasija que vamos á encontrar; luego $r = 0'25\sqrt[3]{2} = 0'32m$, y $a = 0'75\sqrt[3]{2} = 0'95m$.

30. Determinar los volúmenes de la Luna y del Sol, tomando el de la Tierra por unidad; sabiendo que los diámetros de la Tierra, la Luna y el Sol son proporcionales á los números 1, 3 : 11 y 112. Suponiendo la Tierra, la Luna y el Sol esféricos, y representando sus volúmenes respectivos por T, L, y S, tendremos (352), $T : 1 = L : \left(\frac{3}{11}\right)^3 = S : 112^3$; de donde, $L = (27 : 1331)\,T$, y $S = 1404928T$.

31. Determinar el paralelepípedo rectángulo de mayor volumen, entre todos los que tengan la misma área. Llamando S al área constante, y a, b, c, las tres dimensiones, se tiene $S = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$; luego $a^2b^2c^2 = ab \times ac \times bc$ cuadrado del volumen, será máximo cuando sean iguales los factores ab, ac, bc, pero como su suma es constante, es preciso que se tenga, $ab = ac = bc$, ó $a = b = c$, (472, 4.º, 1.er Curso): el cubo será, pues, el paralelepípedo máximo.

32. Inscribir en una esfera el mayor paralelepípedo posible. Llamando D al diámetro de la esfera, x, y, z, las dimensiones del paralelepípedo P, tendremos $P^2 = x^2y^2z^2$, y como (256, C.º 1.º), $D^2 = x^2 + y^2 + z^2$; luego el producto $x^2y^2z^2$ será un máximo cuando $x^2 = y^2 = z^2$, ó $x = y = z$, siendo por tanto el cubo el mayor paralelepípedo que puede inscribirse en una esfera.

33. Circunscribir á una esfera el menor cono posible. Llamando x al radio de la base del cono, y, su altura, R al radio de la esfera; el triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio y la altura del cono y la hipotenusa el lado del cono, será semejante al triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio de la esfera y la parte de lado del cono comprendida entre el vértice y el punto en que toca á la superficie esférica siendo la hipotenusa la parte de altura del cono comprendida entre el vértice y el centro de la esfera, de modo que como el cateto homólogo á la altura del cono es tangente á la circunferencia máxima de la esfera que pasa por el punto de contacto con la superficie esférica, tendrá por expresión $\sqrt{y(y-2R)}$ (156, C.º 1.º), y por tanto se tendrá la proporción, $R : x = \sqrt{y(y-2R)} : y$, de donde $x^2 = R^2y : (y-2R)$: ahora bien, el volumen del cono es $\frac{1}{3}\pi x^2y$, pero el mínimo de esta expresión siendo independiente de la cantidad constante $\frac{1}{3}\pi$, se puede escribir, $x^2y = m$, que sustituyendo en lugar de x^2 el valor antes encontrado se tiene, $R^2y^2 : (y-2R) = m$, de donde $R^2y^2 - my + 2Rm = o$, $y = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8R^3m}}{2R^2}$ (461, 1.ª, 1.er Curso), el menor valor que podemos dar á m es (472, 5.º 1.er Curso) $m = 8R^3$, entonces, $y = m : 2R^2 = 8R^3 : 2R^2 = 4R$, sustituyendo ahora estos valores de m e' y en la expresión $x^2y = m$, se tiene $x^2 \times 4R = 8R^3$, $x = R\sqrt{2}$; luego el menor cono posible que puede circunscribirse á una esfera tiene por altura el cuádruplo del radio de la esfera dada, y por radio de la base el lado del cuadrado inscrito en uno de los círculos máximos de la misma esfera.

PARTE QUINTA.

Aspecto general de la Geometría.

LECCIÓN 43.

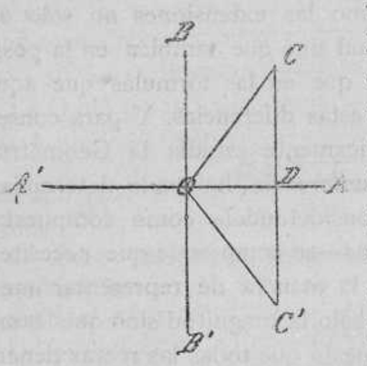
Nociones preliminares.

358. Ya sabemos (10, 1.^{er} Curso), que el aspecto general de la Geometría estudia las leyes relativas á los hechos de la extensión, es decir, que no considera á la extensión particular y determinada, sinó á un conjunto de extensiones que cumplen con una condición, y que por tanto obedecen á una ley; claro está que la expresión de una ley que comprenda á varias extensiones, no puede expresarse con sencillez y claridad por algunas de las extensiones que cumplan con las condiciones que la ley prefija; y de aquí la necesidad de emplear otros medios de expresión distintos de los que hemos hecho uso en el aspecto particular de la Geometria; una vez que, si bien es cierto que en él hemos tratado de leyes sencillas á que obedecían ciertas extensiones, hemos tenido que valernos del lenguaje común auxiliados de los medios de expresión propios y peculiares del mismo, medios que si allí no complicaban la exposición, aquí—que nos proponemos sintetizar con la mayor brevedad posible todo lo que en aquel hemos expuesto—nos imposibilitarían por lo complicados y difusos, la exposición sencilla y clara de las importantes leyes elementales de la extensión. Las leyes de los hechos de los números se expresan por fórmulas (300, 1.^{er} Curso), y como ya sabemos que las extensiones una vez medidas son números (36, 1.er Curso); estas fórmulas las hemos empleado después de determinar la magnitud de las extensiones, determinación necesaria para el completo conocimiento de la equivalencia y la semejanza. Pero como las extensiones no sólo se pueden diferenciar en la magnitud sinó que también en la posición y la figura (6); es presiso que en las fórmulas que aquí empleemos se puedan apreciar estas diferencias. Y para conseguirlo—como las líneas que únicamente estudia la Geometría elemental son, la recta y la circunferencia, habiendo determinado la magnitud de esta última considerándola como compuesta de un número indefinido de rectas—se comprende que necesitemos, como preliminar, conocer la manera de representar mediante una expresión literal no sólo la magnitud sinó que también la posición de las rectas; puesto que todas las rectas tienen la misma figura.

359. Las diferentes posiciones que pueden tener dos rectas en un plano son, 1.ª que no tengan ningún punto común ó que sean paralelas, y entonces se dice que tienen *la misma dirección;* 2.ª que teniendo un punto común sean prolongaciones opuestas respecto del punto de encuentro, y entonces se dice que tienen *direcciones opuestas;* y 3.ª que cortándose lo hagan perpendicular ú oblícuamente, no teniendo entonces ni la misma dirección, ni direcciones opuestas. Para la representación de estas diversas posiciones, teniendo en cuenta lo expuesto (296, 1.er Curso), nos valdremos; de su magnitud precedida de signo más, cuando tienen la misma dirección; de su magnitud precedida del signo menos, cuando tienen direcciones opuestas; y de su magnitud precedida del signo $\pm\sqrt{-1}$ ó $\pm i$, cuando no tienen ni la misma dirección ni direcciones opuestas; necesitamos en este último caso diferenciar la posición perpendicular de la oblícua, y esto se consigue, representando la posición perpendicular por una expresión imaginaria, y la oblícua por una expresión compleja.

Aclararemos lo expuesto para su mejor comprensión en la forma siguiente: supongamos, figura 223, que tenemos un punto de origen O y que trazamos á partir de él; una recta OA que tenga la misma dirección que la unidad *u;* otra recta de igual longitud OA′ que tenga opuesta dirección; y por último las rectas de igual longitud también OB y OB′ perpendiculares y OC y OC′ oblícuas; llamemos á la longitud de todas ellas *a;* decimos que, $+a$ representa en magnitud y posición la recta OA, $-a$ representa igualmente en magnitud y posición á la recta OA′, $a\sqrt{-1}$ representa del mismo modo á OB, $-a\sqrt{-1}$ á OB′ $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ á OC, y $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ á OC′ siendo α la magnitud de OD y β la magnitud de CD. En efecto; 1.° conteniendo OA, *a* unidades y teniendo la misma dirección que la unidad, contribuirá directamente, con ese número de unidades, al fin que nos propongamos; luego según el convenio hecho (296, 1.er Curso) será una cantidad positiva que la representaremos por $+a$; 2.° conteniendo OA′, *a* unidades y teniendo dirección opuesta á la unidad, se opondrá directamente al fin que nos propongamos con ese número de unidades; luego será una cantidad negativa que la representaremos por $-a$; 3.° conteniendo OB así como OB′, *a* unidades, y no teniendo la misma dirección ni dirección opuesta respecto de la unidad, no se opondrán directamente al fin que nos proponemos ni contribuirán directamente á este fin; luego serán cantidades imaginarias, que veremos con claridad tienen que representarse por $\pm a\sqrt{-1}$, teniendo en cuenta que OB es media proporcional á OA y OA′ por tener las mismas longitudes y tener la misma posición respecto de OB, por consiguiente tendremos, $+a : a = a : -a$, de donde $a^2, = -a^2$, y $a = \pm a\sqrt{-1}$, la expresión $+a\sqrt{-1}$ corresponde á OB, y $-a\sqrt{-1}$

Fig. 223.



corresponde á OB′; 4.° conteniendo OC, y OC′, *a* unidades, y no teniendo la misma dirección ni dirección opuesta respecto de la unidad, no contribuirán directamente al fin que nos proponemos ni se opondrán directamente á este fin; luego serán cantidades imaginarias, cuya representación no puede ser la anterior que solo corresponde á la posición de perpendicularidad, pero que las podremos representar por las cantidades complejas $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ á OC, y $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ á OC′, puesto que para ir de O á C, podremos ir de O á D y luego de D á C, y para ir de O á C′ podremos ir de O á D y luego de D á C′.

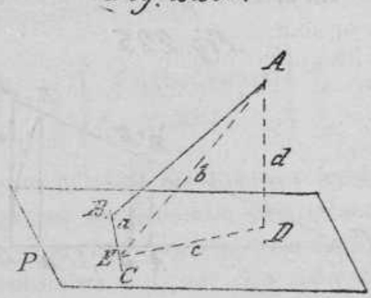
ESCOLIOS.—1.° Es conveniente observar que cada una de las expresiones $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$ y $-a\sqrt{-1}$, se componen cada una de dos factores que son, $a\times+1$, $a\times-1$, $a\times+\sqrt{-1}$, y $a\times-\sqrt{-1}$, de estos factores el primero a, expresa la magnitud de la recta y el otro expresa la dirección una vez fijada la de $+1$. Por otra parte, en la figura 223, se vé que OC y OC′ tienen la misma posición y magnitud respecto de OA, y por tanto se tiene, $(\alpha+\beta\sqrt{-1}):a=a:(\alpha-\beta\sqrt{-1})$, de donde $a^2=\alpha^2+\beta^2$, y $a=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ó por ser solo la longitud, $a=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ que es como en los demás casos la magnitud de las rectas OC ó OC′ y el otro factor sería

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{-1}.$$

En cada caso al factor que expresa la magnitud de las rectas se llama, *coeficiente de magnitud*, y al que expresa la dirección de la recta, *coeficiente de dirección.*

2.° Para terminar todo lo relativo á magnitud y posición réstanos conocer la expresión de la posición de una recta respecto de un plano á quien corta. Para ello sea, figura 224, P el plano y AB la recta, tracemos por B la recta BC como unidad de dirección y en el plano P, la perpendicular AD al plano, desde su pié la DE perpendicular á BC, y únase E con A; entonces AB quedará determinada, sabiendo su posición respecto de BC en el plano ABC y la posición de este plano respecto

Fig. 224.

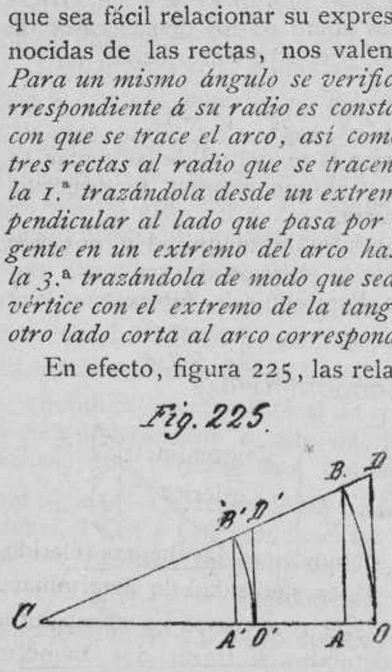


del P, como la expresión de ABC respecto de P, es igual que la de la recta AE respecto de DE, será $c+d\sqrt{-1}$, esta expresión es la longitud b de la expresión $a+b\sqrt{-1}$ de la recta AB; de modo que para conocer la posición de la recta AB respecto del plano P, basta conocer la longitud a y la expresión de AE, $c+d\sqrt{-1}$, respecto de una perpendicular á la BC.

360. Sabiendo ya representar la magnitud y posición de las extensiones, nos resta saber representar la figura de las mismas; pero como hemos visto que la figura de las extensiones depende de los ángulos (148 y 338), necesitamos representar mediante una expresión literal los ángulos rectilíneos, que si para determinar su magnitud nos hemos valido de los arcos correspondientes (128, E.° 2.°), sabiendo que todos los arcos correspondientes á un mismo ángulo son semejantes (130 y 165), para representarlos cualquiera que sea su magnitud de modo que sea fácil relacionar su expresión, con las expresiones ya conocidas de las rectas, nos valemos de la siguiente propiedad. *Para un mismo ángulo se verifica que, la relación del arco correspondiente á su radio es constante cualquiera que sea el radio con que se trace el arco, así como también las relaciones de las tres rectas al radio que se tracen con las condiciones siguientes; la 1.ª trazándola desde un extremo del arco de modo que sea perpendicular al lado que pasa por el otro; la 2.ª trazando la tangente en un extremo del arco hasta que encuentre al otro lado; la 3.ª trazándola de modo que sea la parte de un lado que una el vértice con el extremo de la tangente trazada en el punto que el otro lado corta al arco correspondiente.*

En efecto, figura 225, las relaciones; BO : CO=B'O' : CO' AB : CO=A'B' : CO',DO : : CO=D'O': CO', y CD : CO =CD' : CO' son evidentes (150 y 165); de aquí resulta que podemos tomar para arco correspondiente á un ángulo un arco trazado con un radio cualquiera, y que las tres rec-

Fig. 225.



tas cuyas relaciones con los radios son las mismas para un mismo ángulo podemos también tomarlas relacionándolas con el radio del arco correspondiente que más nos convenga. Esto hace que tomemos para arco correspondiente á un ángulo el trazado con un radio igual á la unidad, y que por tanto las tres rectas al dividirlas por la unidad nos dén por cociente ellas mismas. Estas rectas que dependen, como los arcos correspondientes, de los ángulos respectivos son las que se sustituyen por los ángulos; por lo cual se llaman líneas *gonométricas* ó *trigonométricas;* pues hemos visto (354) que la figura fundamental de la Geometría es el triángulo.

361. *Las leyes de los hechos de la extensión, tienen por objeto calcular los elementos desconocidos de una figura, mediante los elementos conocidos de la misma, que la determinan.*

362. Como todas las figuras en Planimetría se pueden referir al triángulo rectilíneo, así como en Estereometría al triángulo esférico; de aquí el que el aspecto general de la Geometría se divida en dos partes una que se ocupe de la resolución de los triángulos rectilíneos á que se llama *Trigonometría rectilínea*, y otra que se ocupe de la resolución de los triángulos esféricos que se llama *Trigonometría esférica*, pero como esta resolución necesita el conocimiento de las *líneas trigonométricas*, debemos anteponer á esas dos partes la referente á las mismas; por consiguiente, el cuadro sintético de la división del aspecto general es el siguiente.

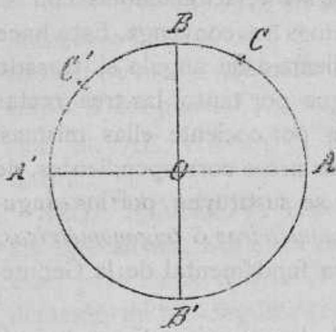
ASPECTO GENERAL DE LA GEOMETRÍA.

Líneas trigonométricas.

Planimetría	Trigonometría rectilínea.	Aplicaciones	Estereometría	Trigonometría esférica.	Aplicaciones

363. Como las líneas trigonométricas las hemos referido á los arcos; de aquí el que tengamos necesidad de determinar la posición de los mismos, puesto que conocemos ya su magnitud. Para ello, figura 226, se acostumbra á trazar dos diámetros

Fig. 226.



perpendiculares en un círculo tales como AA′ y BB′ y llamando al AA′ diámetro horizontal y al BB′ vertical; se llama origen de arcos, al extremo derecho A, del diámetro horizontal y origen de los complementos de los arcos, al extremo superior B, del diámetro vertical; siendo positivos los arcos trazados en la dirección del origen de los arcos al origen de los complementos, y negativos los que tienen dirección opuesta.

364. ARCOS COMPLEMENTARIOS, *son los que su suma literal es un cuadrante.* Como AC′ — BC′.

ARCOS SUPLEMENTARIOS, *son los que su suma literal es una semicircunferencia.* Como AC + CA′.

Los arcos complementarios tienen la propiedad de tener el mismo extremo.

LIBRO PRIMERO

Líneas trigonométricas.

CAPITULO I

Relaciones entre las líneas trigonométricas.

LECCIÓN 44.

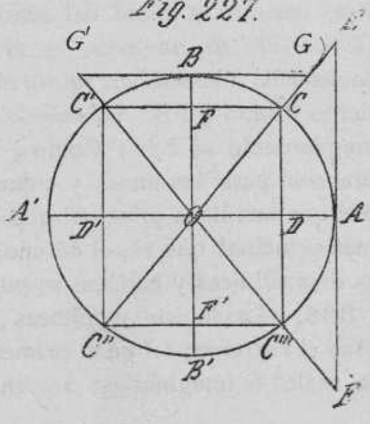
Líneas trigonométricas de un arco.

365. LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS, *son rectas cuyo valor depende del ángulo en que están trazadas, ó del arco correspondiente á este ángulo.*

Las principales son; *seno, tangente y secante.* A estas líneas se las suele llamar también *funciones circulares*, por más que son un caso particular de ellas; de modo que las líneas trigonométricas se diferencian de las funciones circulares en que son un caso particular de estas; por otra parte las líneas trigonométricas tienen un origen puramente geométrico, mientras que las funciones circulares su origen es algébrico.

366 SENO, *es la perpendicular trazada desde el extremo de un arco al diámetro que pasa por el origen.* Como CD en la figura 227.

Fig. 227.



TANGENTE, *es la parte de tangente trazada en el origen de un arco, y comprendida entre el origen y el diámetro prolongado que pasa por el extremo del arco.* Como AE.

SECANTE, *es la recta comprendida entre el centro de un arco y el extremo de su tangente.* Como OE.

Estas líneas se representan abreviadamente, anteponiendo á la letra ó letras con que se exprese el ángulo ó el arco, las notaciones; *sn, tg, sc.* Así las líneas trigonométricas del ángulo AOC ó de su arco correspondiente AC figura 226, llamando *a* á la medida del ángulo ó arco; se representan abreviadamente por las notaciones; *sna, tga, sca.*

367. Colíneas trigonométricas de un arco, *son las líneas trigonométricas del arco complementario.* Las principales son, *coseno, cotangente* y *cosecante;* que se representan abreviadamente, anteponiendo á la letra ó letras con que se expresa el arco, las notaciones; *csn, ctg, csc.* Así el coseno del arco AC, figura 227, sería el seno de su complemento BC ó CF; la cotangente sería la tangente de BC ó BG; y la cosecante sería la secante de BC ó OG: que llamando *a* la medida del arco AC, las representaríamos abreviadamente por las notaciones *csna, ctga, csca.*

Escolio.—Además de las líneas y colíneas trigonométricas principales que hemos definido, hay otras tres líneas auxiliares con sus correspondientes colíneas, ó líneas de Mendoza por ser este célebre matemático español el primero que empleó en sus *Tablas de Navegación* las dos últimas, que son; senoverso, verso y subverso las líneas, cosenoverso, coverso y subcoverso las colíneas. *Senoverso de un arco,* es la parte de diámetro comprendida entre el pie de su seno y el origen. *Verso de un arco,* es la mitad del senoverso del mismo. Como $\frac{1}{2}$ AD. *Cosenoverso de un arco,* es el senoverso del complemento. Como FB. *Coverso de un arco,* es el verso de su complemento. Como $\frac{1}{2}$ FB. *Subcoverso de un arco,* es el verso de su complemento á 270°. Como $\frac{1}{2}$ B′F $=$ $\frac{1}{2}$ F′B. La unidad de dirección para las líneas y colíneas es OA. En esencia no hay más que una línea principal que es el seno; ni más que una colínea principal que es, el coseno; pues como ya veremos todas las demás líneas y colíneas se pueden obtener mediante estas.

368. Las líneas y colíneas trigonométricas de un arco si tiene el extremo; 1.° en el primer cuadrante son todas positivas, ya reales ó imaginarias; 2.° en el segundo cuadrante, son el seno, senoverso, verso, subverso, cosenoverso, coverso y subcoverso positivas, y las restantes líneas y colíneas negativas, ya reales ó imaginarias; 3.° en el tercer cuadrante, son la tangente, secante, senoverso, verso, subverso y sus colíneas positivas, y el seno y coseno negativas, ya reales ó imaginarias; 4.° en el cuarto cuadrante, son el coseno, senoverso y su colínea, verso su colínea, subverso y su colínea, positivas, y las restantes líneas y colíneas negativas, ya reales ó imaginarias.

En efecto, figura 227, como la unidad de dirección para las líneas y colíneas es OA, en virtud de (359 y 360), se tiene; 1.° para el arco AC cuyo extremo C está en el primer cuadrante, *sn* AC $=$ DC línea positiva é imaginaria, *tg* AC $=$ AE, línea positiva é imaginaria, *sc* AC $=$ OE, línea positiva y compleja, *sn-vr* AC $=$ DA, línea positiva, *vr* AC $= \frac{1}{2}$ DA, línea positiva, *svr* AC $= \frac{1}{2}$ D′A, línea positiva, *csn* AC $=$ FC, colínea positiva, *ctg* AC $=$ BG colínea positiva, *csc* AC $=$ OG colínea positiva, *csn-vr* AC $=$ FB colínea positiva é imaginaria, *cvr* AC $= \frac{1}{2}$ FB colínea positiva é imaginaria, y por último *scvr* AC $= \frac{1}{2}$ F′B colínea positiva é imaginaria, es decir, que todas las líneas y colíneas del primer cuadrante son positivas; 2.° para el arco AC′ cuyo extremo C′ está en el segundo cuadrante, *sn* AC′ $=$ D′C′ línea positiva é imaginaria, *sn-vr* AC′ $=$ D′A línea positiva, *vr* AC′ $= \frac{1}{2}$ D′A línea positiva, *svr*AC′$=\frac{1}{2}$ DA línea positiva, *csn-vr* AC′$=$EB colínea positiva é imaginaria, *cvr* AC′ $= \frac{1}{2}$ FB colínea positiva é imaginaria, *scvr* AC′ $= \frac{1}{2}$ F′B colínea positiva é imaginaria, *csn*AC′$=$FC′ colínea negativa, *tg*AC′ $=$ AE′ línea negativa é imaginaria, *sc* AC′ $=$ OE, línea negativa y compleja, *ctg* AC′ $=$ BG′ colínea negativa, *csc*AC′ $=$ OG′ colínea negativa y compleja; 3.° para el arco AC″ cuyo extremo C″ está en el tercer cuadrante, *tg* AC″ $=$ AE línea positiva é imaginaria, *sc*AC″$=$OE línea positiva y compleja, *sn-vr* AC″ $=$ D′A línea positiva, *vr* AC″$=\frac{1}{2}$ D′A línea positiva, *svr* AC″ $= \frac{1}{2}$ DA línea positiva, *ctg* AC″ $=$ BG colínea positiva, *csc* AC″$=$OG colínea positiva y compleja, *csn-vr* AC″ $=$ F′B colínea positiva é imaginaria, *cvr* AC″ $= \frac{1}{2}$ FB colínea positiva é imaginaria, *sc-vr* AC″ $=$

$= \frac{1}{2}$ FB colínea positiva é imaginaria, *sn* AC″ $=$ D′C″ línea negativa é imaginaria, y *csn*AC″ $=$ F′C″ colínea negativa; 4.° para el arco AC‴ cuyo extremo C‴ está en el cuarto cuadrante, *csn*AC‴ $=$ F′C‴ colínea positiva *sn-vr*AC‴ $=$ DA línea positiva, *csn-vr* AC‴$=$F′B colínea positiva é imaginaria, *vr* AC‴ $= \frac{1}{2}$ DA línea positiva, *cvr*·AC‴ $= \frac{1}{2}$ F′B colínea positiva é imaginaria, *svr*AC‴$= \frac{1}{2}$ D′A línea positiva, *scvr* AC‴$= \frac{1}{2}$ FB colínea positiva é imaginaria, *sn* AC‴ $=$ DC‴ línea negativa é imaginaria, *tg* AC‴$=$AE′ línea negativa é imaginaria, *sc* AC‴$=$ $=$ OE′ línea negativa y compleja, *ctg* AC‴ $=$BG′ colínea negativa, y *csc* AC‴ $=$ OG′ colínea negativa y compleja. Todo lo cual está conforme con el enunciado en todas sus partes.

ESCOLIOS.—1.° Debemos hacer notar que conocida la unidad de dirección sabemos (359), que toda perpendicular á la unidad de dirección es imaginaria y toda oblícua es compleja; siendo por tanto, lo más interesante conocer cuándo las líneas y colíneas son positivas ó negativas, lo que se consigue con la siguiente *Regla. Las líneas trigonométricas son positivas cuando están en el diámetro horizontal ó encima de él, y negativas cuando están debajo; las colíneas trigonométricas son positivas cuando están en el diámetro vertical ó á su derecha, y negativas cuando estàn á su izquierda.* Por esto las líneas y colíneas auxiliares son siempre positivas.

2.° Por la simple inspección de la figura 227, se vé que el coseno de cualquier arco es siempre igual á la parte de diámetro comprendido entre el centro y el pie del seno

369. Las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco cualquiera, pueden expresarse en magnitud por las del primer cuadrante.

En efecto, figura 227; las líneas y colíneas trigonométricas principales de los arcos AC′, AC″, AC‴, son iguales en magnitud á las del arco AC, ó por lados opuestos de rectángulo ó por lados homólogos de triángulos iguales.

COROLARIO.—Las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco cualquiera, pueden expresarse en su magnitud por las de un arco menor que 45°. Puesto que siendo iguales en magnitud á las del primer cuadrante, como todo arco mayor que 45° tiene por complemento otro menor que 45°; todas se pueden expresar por las de uno menor que 45°.

370. Las líneas y colíneas trigonométricas de un arco no se alteran porque se añadan á este arco una ó más circunferencias.

En efecto, las líneas y colíneas trigonométricas de un arco dependen de su extremo, y como éste no varía porque se agregue al arco una ó más circunferencias, sus líneas y colíneas tampoco variarán. Así siendo m un número entero cualquiera y a la medida de un arco cualquiera, $2m\pi + a$, expresará un arco compuesto de un número m de circunferencias y del arco a; puesto que ya sabemos $2\pi R$ representa la circunferencia y como aquí el radio es la unidad la circunferencia se expresa por 2π.

COROLARIO.—Las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco cualquiera, no varían en magnitud cuando se agrega al arco un número impar de semicircunferencias; pero el seno y el coseno varían de signo. Puesto que si al arco AC de la figura 227 se le agrega, una semicircunferencia tendremos el arco AC″ en que se verifica el corolario; pero agregando ahora un número cualquiera de circunferencias las líneas y colíneas no varían, luego el corolario subsiste cualquiera que sea el número impar de semicircunferencias que se agreguen al arco.

371. Las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco negativo, son iguales en magnitud á las del mismo arco tomado positivamente; pero tienen distinto signo, excepto el coseno que tiene el mismo.

En efecto, figura 227, AC‴ contado de A á B′ será un arco negativo, que por ser igual en magnitud al arco positivo AC á que representamos por a, le expresaremos por $-a$; ahora bien las líneas y colíneas trigonométricas principales del arco AC‴ son, $sn\ (-a) = DC''' = -DC = -sna$, $tg\ (-a) = AE' = -AE = -tga$, $sc\ (-a) = OE' = -OE = -sca$; $csn\ (-a) = OD = csna$, $ctg\ (-a) = BG' = -BG = -ctga$, $csc\ (-a) = OG' = -OG = -csca$.

ESCOLIO.—Es conveniente observar, 1.° que los arcos, figura 227, AC′, AC″, AC‴, pueden expresarse llamando a, la medida del arco AC, en la forma siguiente AC′ $= \pi - a$, AC″ $= \pi + a$, AC‴ $= 2\pi - a$; 2.° que los arcos suplementarios tales como a y $\pi - a$, ó $-a$ y $\pi + a$, tienen sus senos coversos y subcoversos iguales; 3.° que el verso y subverso de un arco negativo es igual al del mismo arco tomado positivamente, pero el coverso y subcoverso son respectivamente iguales el coverso al subcoverso, y el subcoverso al verso del mismo arco tomado positivamente; pues se tiene, $vr(-a) = \frac{1}{2}$DA $= vra$, $svr(-a) = \frac{1}{2}$A′D $= \frac{1}{2}$D′A $= svra$, $cvr(-a) = \frac{1}{2}$F′B $= \frac{1}{2}$B′F $= scvra$, y $scvr(-a) = \frac{1}{2}$B′F′ $= \frac{1}{2}$FB $= cvra$; y 4.° que en el primer cuadrante una línea ó colínea cualesquiera determina el arco, en el 2.° hay que exceptuar el seno coverso y subcoverso, en el 3.° hay necesidad de dos que no sean la tangente y cotangente, y en el 4.° dos no siendo el coseno, verso y subverso.

372. Hallar la relación que existe entre el coeficiente de dirección de una recta y el ángulo que esta forma con la unidad de dirección. Sea la recta dada OC, figura 227, cuya expresión es $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, y su coeficiente de dirección

$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{-1}$ (359, E.°), tracemos haciendo centro en O con un radio igual á $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$, el arco AC $= a$ correspondiente al ángulo AOC, el seno de a será $\beta\sqrt{-1}$ y el coseno α, y las magnitudes $csna$, sna, serán respectivamente α y β; luego $\alpha + \beta\sqrt{-1} = csna + \sqrt{-1}\, sna$, y

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{-1} = csn\mathrm{AOC} + \sqrt{-1}\, sn\mathrm{AOC},$$

igualdad que resuelve el problema y que por ser $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$,

se tiene, $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{-1} = csna + \sqrt{-1}\, sna$.

LECCIÓN 45.

Relaciones entre las líneas y colíneas trigonométricas de un arco.

373. El seno de un arco menor que un cuadrante, es igual en magnitud á la mitad de la cuerda del arco duplo.

En efecto, figura 227, sea AC un arco y su seno CD; prolongando esta recta hasta C‴ punto en que encuentra á la circunferencia se tiene; que la longitud del arco AC es igual á la de AC′ (103), siendo por consiguiente el arco CAC‴ duplo del arco AC, del mismo modo CD es igual á C‴D, siendo por tanto CD mitad de CC‴ cuerda del arco CAC‴: de modo que la magnitud del seno CD del arco AC es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.

374. Las relaciones entre las magnitudes de las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco cualquiera son; 1.ª $sn^2a + csn^2a = 1$; 2.ª $tga = sna : csna$; 3.ª $ctga = csna : sna$; 4.ª $sca = 1 : csna$; y 5.ª $csca = 1 : sna$.

En efecto, figura 227, siendo AC el arco cuya medida es a, se tiene; 1.º $1 = sn^2a + csn^2a$, ó bien, $sn^2a + csn^2a = 1$, (372); 2.º en los triángulos semejantes OAE y ODC, $tga = sna : csna$, y $sca = 1 : csna$; y 3.º en los triángulos semejantes OBG, y OFC, $ctga = csna : sna$, y $csca = 1 : sna$: pero como las magnitudes de las líneas y colíneas principales de un arco cualquiera, son iguales á las del primer cuadrante (369); las relaciones obtenidas para un arco del primer cuadrante, son las mismas para un arco cualquiera.

Corolario.—Las magnitudes de las colíneas principales de un arco cualquiera, son recíprocas; el coseno de la secante; la cotangente de la tangente; y la cosecante del seno. Puesto que la relación cuarta se tiene, $csna = 1 : sca$; de la segunda y tercera multiplicándolas, $tga \times ctga = 1$, ó bien, $ctga = 1 : tga$; y la quinta nos dá directamente $csca = 1 : sna$.

Escolios.—1.º Por la simple inspección de las cinco relaciones del teorema se vé que todas las líneas y colíneas principales dependen del seno y su colínea el coseno, únicas que en esencia se pueden considerar como principales.

2.° Las relaciones entre las magnitudes de las líneas y colíneas principales de un arco cualquiera, se transforman en relaciones entre las mismas líneas y colíneas, observando; que el coseno y cotangente no pudiendo ser más que positivos ó negativos, se expresan por sus magnitudes afectadas de los signos más ó ménos; que aun cuando el seno, tangente, secante y cosecante son las dos primeras imaginarias, y las dos últimas complejas, como además pueden ser positivas ó negativas: se podrán establecer para no confundirnos las siguientes relaciones; $Csna = csna$, $Ctga = ctga$, $Sna = sna \times \sqrt{-1}$, $Tga = tga \times \times \sqrt{-1}$, $Sca = sca\,(csna + \sqrt{-1}\,sna)$, $Csca = csca\,(csna + + \sqrt{-1}\,sna)$, de donde, las relaciones entre las líneas y colíneas de un arco cualquiera son; 1.ª $Csn^2a - Sn^2a = 1$; 2.ª $Tga = Sna : Csna$; 3.ª $Ctga = Csna : \sqrt{-1}\,Sna$; 4.ª $Sca = =(Csna + Sna) : Csna$ y 5.ª $Csca = (Csna + Sna)\sqrt{-1} : Sna$.

3.° Las relaciones entre las líneas y colíneas trigonométricas auxiliares de un arco cualquiera son; 1.ª $Sn\text{-}vra = 1 - - Csna$; 2.ª $Csn\text{-}vra = \sqrt{-1} : Sna$; 3.ª $Vra = (1 - - Csna) : 2$; 4.ª $Cvra = \sqrt{-1} : 2Sna$; 5.ª $Svra = (1 + + Csna) : 2$; y 6.ª $Scvra = (1 - \sqrt{-}\,Sna) : 2$.

4.° En Geometría siempre se supone que el radio es igual á la unidad, pero si fuese un radio cualquiera, bastaría poner en las fórmulas en lugar de cada línea ó colínea trigonométrica su relación al radio (360).

375. PROBLEMAS.—1.° Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de un arco conociendo el seno. Para ello de la 1.ª relación del teorema anterior se obtiene $csna = \sqrt{1 - sn^2a}$, sustituyendo este valor del coseno en la 2.ª, 3.ª, y 4.ª queda resuelto el problema.

2.° Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de un arco, conociendo el coseno. Se resuelve como el anterior, sin más que despejar en la 1.ª relación en lugar del coseno el seno.

3.º Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de un arco, conociendo la tangente. Para resolver este problema, se eleva al cuadrado la segunda relación y al resultado se le suma á sus dos miembros la unidad teniendo,

$$1 + tg^2 a = 1 + \frac{sn^2 a}{csn^2 a} = \frac{csn^2 a + sn^2 a}{csn^2 a} = \frac{1}{csn^2 a}, \text{ de donde,}$$

$$csna = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}, \quad sna = tga\, csna = \frac{tga}{\sqrt{1 + tg^2 a}},$$

$$sca = \sqrt{1 + tg^2 a}, \text{ y } csca = \frac{\sqrt{1 + tg^2 a}}{taga}.$$

4.º Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de un arco, conociendo la cotangente. Se resuelve como el anterior sin más que tomar como punto de partida la relación tercera.

5.º Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de un arco, conociendo la secante. Conocida la secante por la relación cuarta se conoce el coseno, que sustituido en la primera nos dará el seno, y sustituidos estos valores de las restantes tendremos las demás líneas y colíneas trigonométricas.

6.º Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de un arco, conociendo la cosecante. Se resuelve como el anterior, sin más que conocer primero el seno que el coseno.

7.º Hallar las líneas y colíneas trigonométricas de los arcos de, 30º, 45º, y 18º. Se resuelve este problema, teniendo en cuenta lo expuesto (373 y 175, 176, 177, E.º 1.º), en la forma siguiente; 1.º $sn\ 30^\circ = csn\ 60^\circ = \frac{1}{2}$, y por el primer problema $snc\ 30^\circ = sn\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\ 30^\circ = ctg\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg\ 30^\circ = tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$, $sc\ 30^\circ = csc\ 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, y $csc\ 30^\circ = sc\ 60^\circ = 2$; 2.º $sn\ 45^\circ = csn\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y como antes, $tg\ 45^\circ = ctg\ 45^\circ = 1$, y $sc\ 45^\circ = csc\ 45^\circ = \sqrt{2}$; y 3.º $sn\ 18^\circ = csn\ 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, y como en las anteriores, $csn\ 18^\circ = sn\ 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $tg\ 18^\circ = ctg\ 72^\circ = \frac{1 - 5\sqrt{5}}{4}$, $ctg\ 18^\circ = tg\ 72^\circ = \frac{4}{1 - 5\sqrt{5}} = \frac{-1 - 5\sqrt{5}}{31}$, $sc\ 18^\circ = csc\ 72^\circ = \frac{\sqrt{5}}{5}$, y

$$csc\ 18^\circ = sc\ 72^\circ = \sqrt{5}.$$

ESCOLIO.—Hemos resuelto los problemas para las magnitudes pero en virtud del escolio segundo del número anterior no ofrece dificultad pasar de las magnitudes de las líneas y colíneas á ellas mismas. Como hemos visto, que las líneas y colíneas trigonométricas auxiliares no dependen más que de el seno y el coseno, no nos hemos entretenido en determinarlas en los problemas por ser sumamente sencillas.

LECCIÓN 46

Variaciones de las líneas y colíneas trigonométricas.

376. Como la circunferencia es una curva cerrada reentrante en sí misma, claro está que los arcos á contar desde el origen pueden variar tomando todos los valores desde 0 á $+\infty$, y desde 0 á $-\infty$; por lo cual nos conviene examinar las variaciones que experimentan las líneas y colíneas trigonométricas cuando varían los arcos.

377. Las variaciones que experimentan en su magnitud las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco, cuando este varía desde cero á infinito y desde cero á menos infinito, son; 1.º de cero á uno, el seno y coseno; 2.º de cero á infinito, la tangente y cotangente; y 3.º de uno á infinito, la secante y cosecante.

En efecto, figura 227, tenemos: 1.º $sn\,0 = 0$, $csn\,0 = 1$; $sn\,90^\circ = 1$, $csn\,90^\circ = 0$, $sn\,180^\circ = 0$, $csn\,180^\circ = 1$; $sn\,270^\circ = 1$, $csn\,270^\circ = 0$: 2.º $tg\,0 = 0$, $ctg\,0 = \infty$; $tg\,90^\circ = \infty$, $ctg\,90^\circ = 0$; $tg\,180^\circ = 0$, $ctg\,180^\circ = \infty$, $tg\,270^\circ = \infty$, $ctg\,270^\circ = 0$: 3.º $sc\,0 = 1$, $csc\,0 = \infty$; $sc\,90^\circ = \infty$; $csc\,90^\circ = 1$; $sc\,180^\circ = 1$, $csc\,180^\circ = \infty$; $sc\,270^\circ = \infty$, $csc\,270^\circ = 1$: y como el arco de 360° ó 2π tiene los mismos extremos que el arco cero, y además las líneas y colíneas trigonométricas, no varían cuando se agrega á su arco un número entero cualquiera de circunferencias positivas ó negativas, queda demostrado el teorema en todas sus partes.

COROLARIO.—Las variaciones que experimentan las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco, cuando este varía desde cero á infinito y desde cero á menos infinito, son; 1.° de $+i$ á $-i$, el seno; 2.° de $+1$ á -1, el coseno; 3.° de $+\infty i$ á $-\infty i$, la tangente; 4.° de $+\infty$ á $-\infty$, la cotangente; 5.° de 1 á $+\infty i$ y de 1 á $-\infty i$, la secante; y 6.° de $+\infty i$ á $+i$ y de $-\infty i$ á $+i$, la cosecante. Pues de las igualdades anteriores, se tiene (374, E.° 2.°); 1.° $Sn\,0 = 0$, $Sn\,90^\circ = i$, $Sn\,180^\circ = 0$, $Sn\,270^\circ = -i$; 2.° $Csn\,0 = 1$, $Csn\,90^\circ = 0$, $Csn\,180^\circ = -1$, $Csn\,270^\circ = 0$; 3.° $Tg\,0 = 0$, $Tg\,90^\circ = \infty i$, $Tg\,180^\circ = 0$, $Tg\,270^\circ = -\infty i$; 4.° $Ctg\,0 = \infty$, $Ctg\,90^\circ = 0$, $Ctg\,180^\circ = -\infty$, $Ctg\,270^\circ = 0$; 5.° $Sc\,0 = 1$, $Sc\,90^\circ = \infty i$, $Sc\,180^\circ = 1$, $Sc\,270^\circ = -\infty i$; y 6.° $Csc\,0 = \infty i$, $Csc\,90^\circ = i$, $Csc\,180^\circ = -\infty i$, $Csc\,270^\circ = i$.

378. PROBLEMAS.—1.° Hallar la expresión general de los arcos que tienen el mismo seno. Este problema, teniendo en cuenta lo expuesto (359 y 368, E.° 1.°), se resuelve en la forma siguiente; puesto que la expresión general del seno es $\pm n\sqrt{-1}$, tomaremos, figura 227, á partir del centro sobre el diámetro vertical, encima y debajo del diámetro horizontal, una longitud $OF = OF' = n$, trazaremos después por los puntos F y F', las paralelas CC' y C''C''' al diámetro horizontal, y entonces los arcos cuyos extremos son C, C', C'' y C''' todos tienen por seno la magnitud n: pero llamando á la magnitud del arco AC, a; los arcos que tengan el mismo extremo que el arco AC, tienen por expresión $2m\pi + a$; los que tengan el mismo extremo que el AC', como AC' es igual á $\pi - a$, tienen por expresión $(2m + 1)\pi - a$; los que tengan el mismo extremo que el AC'', como $AC'' = \pi + a$, tienen por expresión $(2m + 1)\pi + a$, y los que tengan el mismo extremo que el AC''', como $AC''' = 2\pi - a$, tienen por expresión $2m\pi - a$: por consiguiente las expresiones que resuelven el problema son; $2m\pi \pm a$, y $(2m + 1)\pi \pm a$, siendo a la magnitud del menor arco positivo, m un número entero cualquiera positivo ó negativo incluso cero, y tomando el signo más de la primera con el ménos de la segunda para el positivo, y el ménos de la primera con el más de la segunda para el negativo.

2.º Hallar la expresión general de los arcos que tienen el mismo coseno. Puesto que la expresión general del coseno es $\pm n$, tomaremos á partir del centro sobre el diámetro horizontal á derecha é izquierda del diámetro vertical, una longitud $OD = OD' = n$, trazaremos después por los puntos D y D', las paralelas CC‴ y C'C″ al diámetro vertical; y entonces los arcos cuyos extremos son C, C', C″ y C‴ todos tienen por coseno la magnitud n: pero llamando á la magnitud del arco AC, a; los arcos que tenga el mismo extremo que el arco AC, tienen por expresión $2m\pi + a$; los que tengan el mismo extremo que el AC', $(2m+1)\pi - a$; los que tengan el mismo extremo que el AC″, $(2m+1)\pi + a$; y los que tengan el mismo extremo que el AC‴, $2m\pi - a$; por consiguiente las expresiones que resuelven el problema son $2m\pi \pm a$, para el positivo, y $(2m+1)\pi \pm a$, para el negativo.

3.º Hallar la expresión general de los arcos que tienen la misma tangente. Puesto que la expresión general de la tangente es $\pm n\sqrt{-1}$, tomaremos á partir del origen de la línea sobre la tangente trazada en él, encima y debajo del diámetro horizontal, una longitud $AE = AE' = n$, trazaremos después por los puntos E y E' las rectas EO y E'O que cortan á la circunferencia en los puntos C, C″, C‴ y C'; y entonces los arcos cuyos extremos son C, C', C″ y C‴ todos tienen por tangente la magnitud n: pero llamando á la magnitud del arco AC, a; los arcos que tengan el mismo extremo que el arco AC, tienen por expresión $2m\pi + a$; los que tengan el mismo extremo que el AC″ tienen por expresión $(2m+1)\pi + a$; los que tengan el mismo extremo que el AC', tienen por expresión $(2m+1)\pi - a$; los que tengan el mismo extremo que el AC‴, tienen por expresión $2m\pi - a$: por consiguiente las expresiones que resuelven el problema son; $m\pi + a$, para la positiva, y $m\pi - a$, para la negativa.

4.º Hallar la expresión general de los arcos que tienen la misma cotangente. Puesto que la expresión general de la cotangente es $\pm n$, tomaremos á partir del orígen de las colíneas sobre la tangente trazada en él, á derecha é izquierda del diámetro vertical, una longitud $BG = BG' = n$, trazaremos después por los puntos G y G', las rectas GO y G'O que cortan á la circunferencia en los puntos C y C'', C' y C'''; y entonces los arcos cuyos extremos son C, C' C'' y C''' todos tienen por cotangente la magnitud n: pero llamando á la magnitud del arco AC, a; los arcos que tengan el mismo extremo que el arco AC, tienen por expresión $2m\pi + a$; los que tengan el mismo extremo que el arco AC'', tienen por expresión $(2m+1)\pi + a$; los que tengan el mismo extremo que el arco AC', tienen por expresión $(2m+1)\pi - a$; los que tengan el mismo extremo que el arco AC''', tienen por expresión $2m\pi - a$; por consiguiente las expresiones que resuelven el problema son; $m\pi + a$; para la positiva, y $m\pi - a$, para la negativa.

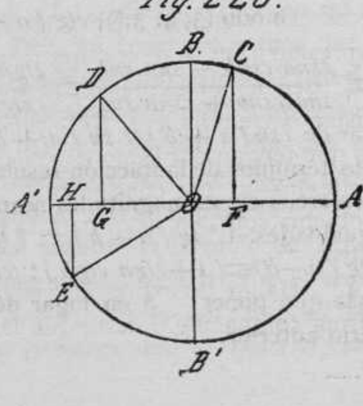
5.° Hallar la expresión general de los arcos que tienen la misma secante ó la misma cosecante. Puesto que la expresión general de las secantes y cosecantes es $1 \pm n\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-1} \pm n$; seguirán la misma ley que las tangentes y cotangentes; siendo por consiguiente las expresiones que resuelven el problema; $m\pi + a$, para las positivas, y $m\pi - a$, para las negativas.

LECCIÓN 47.

Operaciones con los arcos y sus líneas trigonométricas.

379. Si sumamos dos arcos cuyas magnitudes sean a y b, tendremos las igualdades siguientes; 1.ª $sn(a+b) = sna\ csnb + csna\ snb$; y 2.ª $csn(a+b) = csna\ csnb - sna\ snb$.

Fig. 228.



En efecto, figura 228, sean AC y AD dos arcos cualesquiera cuyas magnitudes representaremos por a y b, y AE la suma de estos dos arcos cuya magnitud será $a+b$; entonces tendremos, $AO = 1$, $OC = csna + \sqrt{-1}\ sna$, $OD = csnb + \sqrt{-1}\ snb$ y $OE = csn(a+b) + \sqrt{-1}\ sn(a+b)$: pero por ser la posición OE respecto de OC, la misma que la de OD respecto de OA, siendo además sus magnitudes iguales, se tiene la proporción, $[csn(a+b)+\sqrt{-1}\, sn(a+b)] : [csna+\sqrt{-1}\, sna] = (csnb+\sqrt{-1}\, snb) : 1$, de donde se tiene $csn(a+b)+\sqrt{-1}\, sn(a+b) = (csna+\sqrt{-1}\, sna)(csnb+\sqrt{-1}\, snb) = csna\, csnb - sna\, snb + \sqrt{-1}\, sna\, csnb + \sqrt{-1}\, csna\, snb$, y por último (371, C.° 2.° 1.^er^ Curso); $csn(a+b) = csna\, csnb - sna\, snb$, $sn(a+b) = sna\, csnb + csna\, snb$, que son las igualdades que nos proponíamos demostrar.

COROLARIOS.—1.° Si restamos dos arcos cuyas magnitudes sean a y b, tendremos las igualdades siguientes; 1.ª $sn(a-b) = sna\, csnb - csna\, snb$; y 2.ª $csn(a-b) = csnacsnb + sna\, snb$. Puesto que si en las igualdades del teorema, ponemos en lugar de b, $-b$, se obtienen las igualdades del enunciado (371).

2.° Si sumamos dos arcos cuyas magnitudes sean a y b, tendremos las siguientes igualdades; $tg(a+b) = (tga+tgb) : (1-tga\, tgb)$; y 2.ª $ctg(a+b) = (ctga\, ctgb - 1) : (ctga + ctgb)$.

Pues sabemos (374 2.ª), $tg(a+b) = \dfrac{sn(a+b)}{csn(a+b)} = \dfrac{sna\, csnb + csna\, snb}{csna\, csnb - sna\, snb} = \dfrac{tga+tgb}{1-tga\, tgb}$, sustituyendo en lugar de $sn(a+b)$ y $csn(a+b)$ sus valores, y dividiendo los dos términos de la fracción resultante por $csna\, csnb$; del mismo modo (374, 3.ª), $ctg(a+b) = \dfrac{csn(a+b)}{sn(a+b)} = \dfrac{csna\, csnb - sna\, snb}{sna\, csnb + csna\, snb} = \dfrac{ctga\, ctgb - 1}{ctga + ctgb}$, sustituyendo en lugar de $csn(a+b)$ y $sn(a+b)$ sus valores y dividiendo los dos términos de la fracción resultante por $snasnb$. 3.° Si restamos dos arcos cuyas magnitudes sean a y b, tendremos las siguientes igualdades: 1.ª $tg(a-b) = (tga-tgb) : (1+tga\, tgb)$; y 2.ª $ctg(a-b) = (1+ctga\, ctgb) : (ctgb-ctga)$. Pues no tendríamos más que poner $-b$ en lugar de b, en las igualdades del corolario anterior.

4.° Si sumamos dos arcos cuyas magnitudes sean a y b, tendremos las siguientes igualdades; $sc\,(a+b) = sca\;scb\;csca\;cscb :$ $:(csca\;cscb - sca\;scb)$; y 2.ª $csc\,(a+b) = sca\;scb\;csca\;cscb :$ $:(sca\;cscb + csca\;scb)$. Pues sabemos (374, 4.ª), $sc\,(a+b) =$

$$= \frac{1}{csn\,(a+b)} = \frac{1}{csna\;csnb - sna\;snb} =$$

$$= \frac{1}{1 : sca\;scb - 1 : csca\;cscb} = \frac{scascbcscacscb}{csca\;cscb - sca\;scb},$$

sustituyendo en lugar de $csn\,(a+b)$ su valor, poniendo en vez de los senos y cosenos sus recíprocos (374, C.°), efectuando la sustracción en el denominador de las fracciones resultantes, y por último la división de la unidad por la fracción que resulta;

del mismo modo (374, 5.°) $csc\,(a+b) = \dfrac{1}{sn\,(a+b)} =$

$$= \frac{1}{sna\;csnb + csna\;snb} = \frac{1}{1 : csca\;scb + 1 : sca\;cscb} =$$

$$= \frac{sca\;scb\;csca\;cscb}{sca\;cscb + csca\;scb},$$ sustituyendo en lugar de $sn\,(a+b)$ su valor, poniendo en vez de los senos y cosenos sus recíprocos (374, C.°), efectuando la suma en el denominador de las fracciones resultantes, y por último la división de la unidad por la fracción que resulta.

5.° Si restamos dos arcos cuyas magnitudes sean a y b, tendremos las siguientes igualdades; 1.ª $sc\,(a-b) = sca\;scb\;csca\;cscb : (sca\;scb + csca\;cscb)$; y 2.ª $csc\,(a-b) = sca\;scb\;csca\;cscb : (sca\;cscb - csca\;scb)$. Pues no tendríamos más que poner $-b$ en lugar de b, en las igualdades del corolario anterior.

ESCOLIO.—Las fórmulas obtenidas son para simples sumas de arcos, pero como sabemos (91, 3.° 1.er Curso) que una combinación de sumas se efectúan mediante la misma regla que una simple suma, podríamos determinar fórmulas para sumas de tres ó más arcos: así si quisiéramos obtener la fórmula del seno de la suma de tres arcos cuyas magnitudes sean a, b y c, tendríamos; $sn\,(a+b+c) = sn\,(a+b)\;csnc + csn\,(a+b)\;snc =$ $= (sna\;csnb + csna\;snb)\;csnc + (csna\;csnb - sna\;snb)\;snc =$

$= sna\ csnb\ csnc + csna\ snb\ csnc + csna\ csnb\ snc - sna\ snb\ snc$; del mismo modo procederíamos si fuesen mas arcos y con las demás líneas y colíneas trigonométricas.

380. Si se duplica un arco cuya magnitud sea a, tendremos las siguientes igualdades; 1.ª $sn2a = 2sna\ csna$; 2.ª $csn\ a = csn^2 a - sn^2 a$; 3.ª $tg2a = 2tga : (1 - tg^2 a)$; 4.ª $ctg2a = (ctg^2 a - 1) : 2ctga$; 5.ª $sc2a = sc^2 a\ csc^2 a : (csc^2 a - sc^2 a)$; y 6.ª $cse\ 2a = sca\ csca : 2$.

En efecto, si en las fórmulas obtenidas en el número anterior ponemos en lugar de b, a, se obtiene; 1.º de $sn\,(a + b) = sna\ csnb + csna\ snb$, $sn\ 2a = 2sna\ csna$; 2.º de $csn\,(a + b) = csna\ csnb - sna\ snb$, $csn\ 2a = csn^2 a - sn^2 a$; 3.º de $tg\,(a + b) = (tga + tgb) : (1 - tga\ tgb)$, $tg\ 2a = 2tga : (1 - tg^2 a)$; 4.º de $ctg\,(a + b) = (ctga\ ctgb - 1) : (ctga + ctgb)$, $ctg\ 2a = (ctg^2 a - 1) : 2ctga$; 5.º de $sc\,(a + b) = sca\ scb\ csca\ cscb : (csca\ cscb - sca\ scb)$, $sc\ 2a = sc^2 a\ cs^2 a : (csc^2 a - sc^2 a)$; y 6.º de $csc\,(a + b) = sca\ scb\ csca\ cscb : (sca\ cscb + csca\ scb)$, $csc\ 2a = sc^2 a\ csc^2 a : 2sca\ csca = sca\ csca : 2$.

COROLARIO.—Si se divide por dos un arco cuya magnitud sea a, tendremos las siguientes igualdades; 1.ª $sn\,\frac{1}{2}\,a =$

$$= \sqrt{\frac{1 - csna}{2}}\ ;\ 2.^a\ csn\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + csna}{2}}\ \ 3.^a\ tg\,\tfrac{1}{2}\,a =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - csna}{1 + csna}}\ ;\ 4.^a\ ctg\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1 + csna}{1 - csna}}\ ;\ 5.^a\ sc\,\tfrac{1}{2}\,a =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(1 + csna)}{1 + csna}}\ ;\ y\ 6.^a\ csc\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{2\,(1 - csna)}{1 - csna}}.$$

Pues si en las fórmulas obtenidas $csn2a = csn^2 a - sn^2 a$, $1 = csn^2 a + sn^2 a$, ponemos en lugar de a, $\frac{1}{2}a$, se tiene; $csna = csn^2 \frac{1}{2}a - sn^2 \frac{1}{2}a$, y $1 = csn^2 \frac{1}{2}a + sn^2 \frac{1}{2}a$; de las cuales, $csn^2 \frac{1}{2}a = \dfrac{1 + csna}{2}$, y $sn^2\,\frac{1}{2}\,a = \dfrac{1 - csna}{2}$; y por tanto tendremos; 1.º $sn\frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 - csna}{2}}$; 2.º $csn\frac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1 + csna}{2}}$;

3.° $tg\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-csna}{1+csna}}$; 4.° $ctg\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+csna}{1-csna}}$; 5.° $sc\frac{1}{2}a=$ $=\sqrt{\frac{2(1+csna)}{1+csna}}$; y 6.° $csc\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{2(1-csna)}{1-csna}}$ (374), conforme al enunciado.

ESCOLIOS.—1.° Nos conviene observar que, 1.° en $csn^2\frac{1}{2}a=$ $=\frac{1+csna}{2}$, como el segundo miembro es el subverso del arco cuya magnitud es a, el primero también lo será, y de aquí el que se llame también subverso de un arco el coseno cuadrado de la mitad de este arco; 2.° en $sn^2\frac{1}{2}a=\frac{1-csna}{2}$, como el segundo miembro es el verso del arco cuya magnitud es a, el primero también lo será, y de aquí el que se llame también verso de un arco el seno cuadrado de la mitad de este arco: además estas fórmulas se suelen emplear también en la forma, $2csn^2\frac{1}{2}a=1+csna$, $2sn^2\frac{1}{2}a=1-csna$, y $tg^2\frac{1}{2}a=(1-$ $-csna):(1+csna)$, $ctg^2\frac{1}{2}a=(1+csna):(1-csna)$.

2.° Hemos visto (379), $(csna+\sqrt{-1}\,sna)(csnb+\sqrt{-1}$ $snb)=csn(a+b)+\sqrt{-1}\,sn(a+b))$ del mismo modo se tiene, $(csna+\sqrt{-1}\,sna)(csnb+\sqrt{-1}\,snb)(csnc+\sqrt{-1}$ $snc)=csn(a+b+c)+\sqrt{-1}\,sn(a+b+c)$, y así sucesivamente; por consiguiente si en la igualdad anterior hacemos $a=b=c=..$, y suponemos m el número de factores del primer miembro, se tiene; $(csna+\sqrt{-1}\,sna)^m=csn\,ma\sqrt{-1}$ $sn\,ma$; fórmula debida á MOIVRE que nos dice: para elevar á una potencia entera m, una expresión de la forma $csna+\sqrt{-1}$ sna, basta multiplicar el arco por el exponente de la potencia: de esta fórmula se deduce; $\sqrt[m]{csna+\sqrt{-1}\,sna}=csn\frac{a}{m}+$ $+\sqrt{-1}\,sn\frac{a}{m}$; pues elevando el segundo miembro á la potencia m nos dá la cantidad subradical; luego la fórmula de MOIVRE es cierta para un exponente fraccionario, y en virtud del convenio (307, 1.° 1.er Curso), respecto de las cantidades afectadas de exponente negativo, lo es también cuando el exponente es negativo. De la formula de MOIVRE se deduce desarrollando el primer miembro por la fórmula del binomio de NEWTON $csn\ ma = csn^m a - \binom{m}{2} csn^{m-2}a\ sn^2 a + \binom{m}{4}$ $csn^{m-4} sn^4 a - \ldots$, y $sn\ ma = m\ csn^{m-1}\ sna - \binom{m}{3} csn^{m-3}a$ $sn^3 a + \binom{m}{5} csn^{m-5}a\ sn^5 a\ - \ldots\ldots$; fórmulas que nos dán las líneas y colíneas trigonométricas de los múltiplos de un arco. Sustituyendo en las fórmulas exteriores por a, $\frac{a}{m}$, resultarían dos ecuaciones de grado m cuyas incógnitas serían $sn\frac{a}{m}$ y $csn\frac{a}{m}$ que nosotros no sabemos resolver, más que cuando $m = 2$, como ya hemos visto.

381. Cuando se tienen dos arcos cuya suma sea A y su diferencia B, se tienen las igualdades siguientes; 1.ª $Sn\,A + sn\,B = 2sn\frac{A+B}{2} csn\frac{A-B}{2}$; 2.ª $sn\,A - sn\,B = 2csn\frac{A+B}{2}$ $sn\frac{A-B}{2}$; 3.ª $csn\,A + csn\,B = 2csn\frac{A+B}{2} csn\frac{A-B}{2}$; y 4.ª $csn\,A - csn\,B = -2sn\frac{A+B}{2} sn\frac{A-B}{2}$.

En efecto; sea, $a + b = A$, $a - b = B$, entonces se tiene, $a = \frac{A+B}{2}$, $b = \frac{A-B}{2}$; sustituyendo estos valores en las fórmulas conocidas siguientes, $sn\,(a+b) = sna\ csn\,b + csna\ snb$, $sn\,(a-b) = sna\ csn\,b - csna\ snb$, $csn\,(a+b) = csna\ csn\,b - sna\ snb$, y $csn\,(a-b) = csna\ csn\,b + sna\ snb$, después de sumar y restar las dos primeras, así como las otras dos, que nos dán; $sn\,(a+b) + sn\,(a-b) = 2sna\ csnb$, $sn\,(a+b) - sn\,(a-b) = 2csna\ snb$, $csn\,(a+b) + csn\,(a-b) = 2csna\ csnb$, y $csn\,(a+b) - csn\,(a-b) = -2sna\ snb$, tendremos; 1.° $snA + snB = 2sn\frac{A+B}{2}csn\frac{A-B}{2}$; 2.° $snA - snB = 2csn\frac{A+B}{2}sn\frac{A-B}{2}$; 3.° $csnA + csnB = 2csn\frac{A+B}{2}csn\frac{A-B}{2}$; y 4.° $csnA - csnB = -2sn\frac{A+B}{2}sn\frac{A-B}{2}$, conforme al teorema.

COROLARIOS.—1.° Cuando se tienen dos arcos cuyas magnitudes sean A y B tendremos las siguientes igualdades; 1.ª $tgA + tgB = sn(A+B) : csnA\ csnB$; 2.ª $tgA - tgB = sn(A-B) : csnA\ csnB$; 3.ª $ctgA + ctgB = sn(A+B) : snA\ snB$; y 4.ª $ctgA\ ctgB = sn(B-A) : snA\ snB$. Pues se tiene, $tgA + tgB = \frac{snA}{csnA} + \frac{snB}{csnB} = \frac{snA\ csnB + csnA\ snB}{csnA\ csnB} = \frac{sn(A+B)}{csnA\ csnB}$, que es la 1.ª igualdad y del mismo modo se obtienen las demás.

2.° Cuando se tienen dos arcos cuyas magnitudes sean A y B tendremos las siguientes igualdades; 1.ª $scA + scB = 2\ csn\frac{A+B}{2}csn\frac{A-B}{2} : csnA\ csnB$; 2.ª $scA - scB = -2sn\frac{A+B}{2}sn\frac{A-B}{2} : csnA\ csnB$; 3.ª $cscA + cscB = 2sn\frac{A+B}{2}csn\frac{A-B}{2} : snA\ snB$; y 4.ª $cscA - cscB = 2csn\frac{A+B}{2}sn\frac{A-B}{2} : snA\ snB$. Pues se tiene, $scA + scB = \frac{1}{csnA} + \frac{1}{csnB} = \frac{csnA + csnB}{csnA\ csnB} = \frac{2csn\frac{A+B}{2}csn\frac{A-B}{2}}{csnA\ csnB}$, que es la 1.ª igualdad y del mismo modo se obtienen las demás.

ESCOLIO.—Dividiendo ordenadamente las dos primeras igualdades del teorema, se tiene

$$\frac{snA + snB}{snA - snB} = \frac{sn\frac{A+B}{2}csn\frac{A-B}{2}}{csn\frac{A+B}{2}sn\frac{A-B}{2}} = tg\frac{A+B}{2}ctg\frac{A-B}{2} = \frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}},$$

fórmula que traducida al lenguaje vulgar nos dice: *suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la semi-suma de dichos arcos es á la tangente de la semi-diferencia de los mismos.* Más fórmulas se pueden deducir de las encontradas en el teorema y corolarios, pero no de la importancia de la obtenida.

382. PROBLEMAS.—1.° Transformar la expresión $msna +$ $+ ncsna$ en producto. Para resolver este problema, sacaremos m factor comun en la forma siguiente, $m\left(sna + \frac{n}{m} csna\right)$, y pongamos $tg\alpha$ en lugar de $\frac{n}{m}$, lo que siempre es posible cualquiera que sea el valor de $\frac{n}{m}$ (377, 2.°); entónces se tiene, $msna +$ $+ n\ csna = m\,(sna + tg\alpha\ csna) = m\,(sna + \frac{sn\alpha}{csn\alpha}\ csna)$, sustituyendo por $tg\alpha\ sn$ igual $\frac{sn\alpha}{csn\alpha}$, efectuando la suma dentro del paréntesis y sacando factor común $\frac{1}{csn\alpha}$ tendremos, $m\ sna + n$ $csna = \frac{m}{csn\alpha}\,(sna\ csn\alpha + sn\alpha\ csna) = \frac{msn\,(a + \alpha)}{csn\alpha}$.

2.° Transformar la expresión $M \pm N$ en producto, siendo M y N cantidades positivas. Para resolver este problema se sigue el mismo procedimiento del problema anterior; así $M \pm N =$ $= M\left(1 \pm \frac{N}{M}\right) = M\,(1 \pm tg^2\alpha) = M\left(1 \pm \frac{sn^2\alpha}{csn^2\alpha}\right) = \frac{M}{csn^2\alpha}$ $(csn^2\alpha \pm sn^2\alpha)$; de donde $M + N = \frac{M}{csn^2\alpha}$, y $M - N =$

$$= \frac{Mcsn2\alpha}{csn^2\alpha}\ (374\ 1.^a \text{ y } 380,\ 2.^a)$$

CAPITULO II.

Tablas trigonométricas.

LECCIÓN 48.

Construcción de las tablas trigonométricas.

383. TABLAS TRIGONOMÉTRICAS, *son estados ó cuadros que contienen los arcos de diez en diez segundos ó de minuto en minuto, desde diez segundos ó un minuto, hasta noventa grados; y los correspondientes valores de las líneas y colíneas trigonométricas ó de sus logaritmos.*

Se dividen las tablas trigonométricas en *naturales,* y *logarítmicas*, según que contengan los valores de las líneas y colíneas trigonométricas ó bien sus logaritmos.

Como conocido el arco menor de las tablas y los valores de sus líneas y colíneas trigonométricas es fácil por las fórmulas halladas en las lecciones anteriores conocer los restantes arcos y los valores de sus líneas y colíneas trigonométricas; de aquí el que para construir unas tablas trigonométricas, necesitemos determinar el valor, del arco menor de las tablas, y de las líneas y colíneas trigonométricas correspondientes, que es de lo que nos vamos á ocupar mediante los teoremas siguientes.

384. Todo arco positivo menor que un cuadrante, es mayor que el seno y menor que la tangente.

En efecto, figura 227, si tenemos el arco AC positivo y menor que un cuadrante cuya magnitud representaremos por a; se tiene por ser el arco CAC''' duplo de AC, y el arco menor que la cuerda, $a > sna$, pero el sector OAC es menor que el triángulo OAE, por lo que, $a < tga$; luego tendremos la siguiente limitación, $sna < a < tga$, conforme al teorema.

COROLARIO.—La relación entre el seno de un arco y este arco cuando el arco tiende á cero, tiene por límite uno. Pues de $a > sna$, se deduce, $\frac{sna}{a} < 1$, y de $a < tga = \frac{sna}{csna}$, se deduce, $\frac{sna}{a} > csna$; y como cuando el arco tiende á cero, el coseno tiende á la unidad, el límite de $\frac{sna}{a}$ es la unidad.

385. En todo arco positivo menor que un cuadrante, su seno, es menor que el arco y mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte de su cubo.

En efecto, según el teorema anterior tenemos, $sn a < a$; y además $tg\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a$, de donde $\frac{sn\frac{1}{2}a}{csn\frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}a$, ó bien, $sn\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a$ $csn\frac{1}{2}a$, que nos dá multiplicando los dos miembros por $2csn\frac{1}{2}a$, $2sn\frac{1}{2}a\ csn\frac{1}{2}a > a\ csn^2\frac{1}{2}a$, y como el primer miembro de esta desigualdad es $sn a$ (380, 1.ª), $sn a > a\ csn^2\frac{1}{2}a$, poniendo en esta desigualdad en lugar de $csn^2\frac{1}{2}a$ su igual $1 - sn^2\frac{1}{2}a$ resulta, $sn a < a - a\ sn^2\frac{1}{2}a$, y como el seno es menor que el arco, con mayor razón, $sn a > a - \frac{a^3}{4}$; luego tendremos la siguiente limitación, $a > sn a > a - \frac{a^3}{4}$, conforme al teorema.

386. Como el arco menor de las tablas trigonométricas construidas es, diez segundos ó un minuto, y en las tablas de que nosotros vamos hacer uso el arco menor es diez minutos, vamos á ocuparnos de determinar; el valor del arco de un minuto y de sus líneas y colíneas trigonométricas, resolviendo para ello los siguientes problemas.

1.° Hallar el valor del arco de un minuto. Para resolver este problema sabemos que $360° = 2\pi$, de donde, $1° = \frac{\pi}{180}$, y por tanto, $1' = \frac{\pi}{10800} = 0'0002908882086$.

2.° Hallar el valor del seno de un minuto. Según el teorema y problema anterior tenemos; $0'0002908882086 > sn\ 1' > 0'0002908882086 - \frac{0'0002908882086^3}{4}$, y con mayor razón, $0'0002908882086 > sn\ 1' > 0'0002908882086 - \frac{0'0003^3}{4}$, ó bien efectuando, $0'0002908882086 > sn\ 1' > 0'0002908881816$; luego el valor del seno del arco de un minuto está comprendido entre dos valores que se diferencian en menos de una unidad del noveno órden subdécuplo, y por tanto cualquiera de estos valores será el del seno de un minuto en menos de esta unidad.

3.° Hallar el valor del coseno de un minuto. Como sabemos que $sn^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - csna}{2}$, de donde $csna = 1 - 2\, sn^2 \frac{a}{2}$, sustituyendo por el seno el arco se tiene, $csna = 1 - 2 \frac{a^2}{4}$, con un error de, $1 - 2sn^2 \frac{a}{2} - 1 + 2 \frac{a^2}{4} = 2 \left(\frac{a^2}{4} - sn^2 \frac{a}{2}\right) = 2$ $\left(\frac{a}{2} + sn \frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2} - sn \frac{a}{2}\right)$ y como $\frac{a}{2} + sn \frac{a}{2} < a$, $\frac{a}{2} - sn \frac{a}{2} < \frac{1}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^3$, por ser el seno menor que el arco y mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco: luego el error es menor que, $2a \times \frac{1}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^4$, pero como sabemos que el arco de un minuto es menor que $0'0005 = \frac{1}{2 \times 10^3}$, $\left(\frac{1'}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{4 \times 10^3}\right)^4 < \frac{1}{156 \times 10^{12}} <$ $< \frac{1}{2 \times 10^{14}}$; luego el error que se comete tomando por $csn\, 1'$ el valor $1 - 2 \frac{0'0002908882086^2}{4} = 0'9999\ 9995769$ no llega á media unidad de 14° orden subdécuplo.

Conociendo el seno y coseno de un minuto, se obtendrán las demás líneas y colíneas trigonométricas de un minuto, mediante las relaciones (374); teniendo las líneas y colíneas del arco de un minuto se obtienen las de los demás arcos, mediante las relaciones (379 y 380), pero es preferible el empleo, para la determinación de los senos de los arcos múltiplos de un minuto, de la fórmula de SIMPSÓN que se obtiene mediante el siguiente teorema.

387. El seno de un arco múltiplo de otro, es igual á la diferencia entre el seno del múltiplo precedente multiplicado por el duplo del coseno del arco dado y el seno del múltiplo antiprecedente.

En efecto, si sumamos la 1.ª igualdad de (379), con la 1.ª de (379, C.º 1.º), se tiene; $sn(a+b)+sn(a-b)=2\,sna\,csnb$, poniendo en esta igualdad en lugar de b, α, y en lugar de a, $m\alpha$, se obtiene, $sn(m\alpha+\alpha)+sn(m\alpha-\alpha)=2sn\,m\alpha\,csn\alpha$, ó bien, $sn(m+1)\alpha+sn(m-1)\alpha=2sn\,m\alpha\,csn\alpha$; de donde, $sn(m+1)\alpha=sn\,m\alpha\times 2csn\alpha-sn(m-1)\alpha$, que es la fórmula de SIMPSÓN.

Para emplear esta fórmula, se supone que α es el arco de un minuto y se hace á $m=1$, $m=2$, y así sucesivamente. Así tendremos para $m=1$: $sn\,2'=2\,sn1'cos1'$; para $m=2$; $sn3'=2\,sn2'csn1'-sn1'$; y así sucesivamente.

ESCOLIO GENERAL.—Debemos hacer notar que por el procedimiento expuesto se comprende puedan formarse unas tablas trigonométricas naturales; y después tomando los logaritmos, formar unas tablas trigonométricas logarítmicas; pero el procedimiento elemental es muy pesado, y por tanto los constructores de tablas ya naturales ó logarítmicas se sirven de procedimientos superiores mucho más rápidos.

LECCIÓN 49.

Disposición y uso de las tablas trigonométricas.

388. Como para los cálculos son mucho más ventajosas las tablas trigonométricas logarítmicas, que las naturales, aún cuando se han construido de unas y otras, nosotros vamos á ocuparnos exclusivamente de las logarítmicas. Las diferentes tablas trigonométricas logarítmicas, tanto nacionales como extranjeras, contienen los arcos de diez en diez segundos ó de minuto en minuto, ó por último de diez en diez minutos, y los logaritmos de sus líneas y colíneas trigonométricas hasta 90°; pues como sabemos las magnitudes de las líneas y colíneas trigonométricas de un arco cualquiera positivo ó negativo, son iguales á las del primer cuadrante (369). Pero la disposición de las tablas no es la misma, casi todas están dispuestas á simple entrada, menos las de GASCÓ que como las de los números están dispuestas á trícuple entrada (381 1.er Curso); por lo que recomendamos, el empleo de estos últimos que tienen sobre las demás las ventajas siguientes: 1.a que las demás tablas—que no acostumbran á traer más líneas y colíneas trigonométricas que el seno, tangente, cotangente y coseno,—si bien traen los logaritmos de las líneas y colíneas trigonométricas, con una aproximación menor de una ó media unidad del 6.º ó 7.º orden subdécuplo, mientras que la aproximación de las de GASCÓ es menor que media unidad del 4.º orden subdécuplo; tienen el inconveniente de necesitar por lo menos 88 páginas, y las de GASCÓ que tienen todas las líneas y colíneas trigonométricas, excepto el seno-verso y su colínea, solo tienen diez páginas; 2.a que las demás tablas cuando el arco contiene unidades de segundo ó partes alícuotas de ellas; necesitan emplear las partes proporcionales, como dejamos expuesto en los números (383, 1.er Curso), si bien el principio que aplican es: *que las diferencias de tres arcos, son proporcionales á las diferencias de los logaritmos de las líneas y colíneas trigonométricas correspondientes*, mientras que las de GASCÓ como sucedía en los números no necesita aplicar este principio; y 3.a que se puede con ellas obtener doble aproximación que la ordinaria, merced á tener la última cifra de orden subdécuplo de mayor carácter cuando el logaritmo está aproximado por exceso, lo que no sucede en la mayor parte de las demás.

389. El principio que hemos consignado antes que aplican todas las tablas para las interpolaciones, no se puede emplear: para arcos menores que tres grados y superiores á 87°, en las tablas que contienen los arcos de diez en diez segundos; para arcos menores que 4° y superiores á 86°, en las tablas que contienen los arcos de minuto en minuto; y para arcos menores que 5° y superiores á 85°, en las tablas que contienen los arcos de diez en diez minutos; la razón de ello es porque las diferencias de las líneas y colíneas trigonométricas varían con mucha rapidez entre los límites citados y se cometerían errores de consideración. Esto hace que todos empleen, un procedimiento fundado en que cuando los arcos son pequeños las relaciones de los senos y tangentes á los arcos tienden hacia la unidad (384, C.°); por tanto podemos establecer, $sn\,(a+\alpha):(a+\alpha)=$ $=sna:a$, y $tg\,(a+\alpha):(a+\alpha)=tga:a$, suponiendo que a no llega á 3, 4 ó 5 grados, y que α no llega á 10″, 1′ ó 10′; de las igualdades establecidas se deduce, tomando los logaritmos, las siguientes, $lgsn\,(a+\alpha)=lgsna+lg\,(a+\alpha)+clga$ y $lgtg\,(a+\alpha)=lgtga+lg\,(a+\alpha)+clga$, que nos dan el procedimiento para hallar los logaritmos de los senos y tangentes de los arcos inferiores á 3, 4 ó 5 grados que no traigan las tablas directamente. Para los arcos superiores á 85°, 86° ó 87°, según las tablas, se determina el complemento; en virtud de que si suponemos que $b+\beta$ es un arco, en que b es superior á 85°, 86° ó 87°, y β menor que 10″, 1′ ó 10′, llamando $a+\alpha$ á su complemento a y α cumplirán con las condiciones del caso anterior; por tanto tendremos las igualdades, $lg\,tg\,(b+\beta)=$ $=lg\,ctg\,(a+\alpha)=clgtg\,(a+\alpha)$, $lg\,sc\,(b+\beta)=lgcsc(a+\alpha)=$ $=clgsn\,(a+\alpha)$; luego bastará determinar los logaritmos senos y tangentes por el procedimiento que concluimos de ver y hallar después los complementos. Las demás líneas y colíneas de arcos que no traigan directamente las tablas, por estar comprendidos en los límites citados, se determinan sus logaritmos de un modo análogo.

No insistimos más, en la disposición y uso de las tablas trigonométricas logarítmicas, porque como hemos dicho en el primer curso, el profesor, según las tablas que adopte, enseñará á sus alumnos convenientemente todo lo que á ellas se refiera con las tablas á la vista.

LIBRO II

Trigonometría rectilínea

CAPÍTULO I

Triángulos rectángulos

LECCIÓN 50.

Fórmulas para la resolución de triángulos rectángulos.

390. Como un triángulo queda determinado por tres elementos, siendo uno de ellos por lo ménos un lado; y en el caso de que el triángulo sea particular se necesitan ménos elementos para su determinación (48, E.° 1.° *y* 97, C.° 7.°): si nos proponemos resolver un triángulo rectángulo, como en este se nos dá siempre el ángulo recto, no necesitamos para su resolución más que dos elementos siendo necesariamente uno de ellos un lado; y como además los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios (81, C.° 3.°), los teoremas que necesitamos demostrar para la resolución de triángulos rectángulos, tienen que darnos fórmulas que relacionen dos lados y un ángulo; pues el teorema de PITÁGORAS nos dá la fórmula que relaciona los tres lados.

391. En todo triángulo rectángulo; 1.° un cateto cualquiera, es igual á la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto ó por el coseno del ángulo comprendido; 2.° un cateto cualquiera, es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero ó por la cotangente del ángulo opuesto al segundo.

En efecto, figura 225, sea el triángulo rectángulo ABC, tracemos haciendo centro en C con un radio $CB' = 1$, el arco correspondiente al ángulo en C, tal como $B'O'$, y tracemos su seno $B'A'$; 1.° sabemos (360) que $AB : BC = A'B' : B'C$, ó bien $c : a = sn C : 1$ (147 y 366), de donde se tiene, $c = a\ sn C =$ $= a\ csn B$, por ser complementarios los ángulos en B y C; y 2.° las fórmulas anteriores aplicadas á los dos catetos nos dán,

$c = a\ snC = a\ csnB$, y $b = asnB = a\ csnC$, dividiendo ordenadamente tomando en los segundos miembros el mismo ángulo, se obtiene $c : b = a\ snC : a\ csnC = tgC$, $c : b = a\ csnB : a\ snB = ctgB$, $b : c = a\ snB : a\ csnB = tgB$, $b : c = a\ csnC : a\ snC = ctgC$, de donde, $b = c \times tgB = c \times ctgC$, y $c = b \times tgB = b \times ctgC$; luego las fórmulas que relacionan dos lados y un ángulo son, $b = a\ snB = a\ csnC$, $c = a\ snC = a\ csnB$, $b = c \times tgB = c \times ctgC$, y $c = b \times tgB = b \times ctgC$.

Escolio.—Hay que tener en cuenta que con arreglo á lo expuesto (388, 1.er Curso), las fórmulas anteriores no solo nos sirven para conocer los catetos, conocida la hipotenusa y un ángulo agudo, ó bien un cateto, conocido un ángulo agudo y el otro cateto; sinó que también las dos primeras nos sirven, para conocer la hipotenusa, conociendo un cateto y un ángulo agudo, ó bien un ángulo agudo, conocida la hipotenusa y un cateto; y las dos últimas nos sirven para conocer un ángulo agudo conocidos los dos catetos, de modo que las fórmulas con las cuales podemos resolver los triángulos rectángulos, en los diferentes casos que vamos á considerar, son las siguientes que escribiremos ordenadas:

1.ª $B + C = 90^o$, 2.ª $b = a\ snB$, 3.ª $c = a\ snC$, 4.ª $b = a\ csnC$, 5.ª $c = a\ csnB$, 6.ª $b = c \times tgB$, 7.ª $c = b \times tgC$, 8.ª $b = c \times ctgC$, 9.ª $c = b \times ctgB$, 10.ª $a = b : snB$, 11.ª $a = c : snC$, 12.ª $a = b : csnC$, 13.ª $a = c : csnB$, 14.ª $snB = b : a$, 15.ª $snC = c : a$, 16.ª $csnC = b : a$, 17.ª $csnB = c : a$, 18.ª $tgB = b : c$, 19.ª $tgC = c : b$, 20.ª $ctgC = b : c$, 21.ª $ctgB = c : b$, 22.ª $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, 23.ª $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, y 24.ª $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

LECCIÓN 51

Resolución de triángulos rectángulos.

392. Los diferentes casos de resolución de triángulos rectángulos que vamos á exponer son cuatro; 1.º dados los dos catetos; 2.º dados un ángulo agudo y la hipotenusa; 3.º un cateto y un ángulo agudo; y 4.º un cateto y la hipotenusa.

Los datos en el *primer caso* son; b y c; por tanto tendremos que determinar a, B y C; para determinar a, nos valdremos de la fórmula 22.ª del escolio anterior que nos dá, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, y tomando los logaritmos, $lg\ a = \frac{1}{2}\ lg\ (a^2 + b^2)$, fórmula fácilmente calculable con las tablas de GAUS; para determinar B, nos valdremos de la fórmula 18.ª del escolio anterior, $tg\text{B} = b : c$, tomando los logaritmos se obtiene, $lg\ tg\text{B} = lg\ b + clgc$, y el antilogaritmo de logaritmo tangente de B nos dará los grados, minutos y segundos del ángulo B; para determinar C, nos valdremos de la fórmula 1.ª del escolio anterior, ó bien de la 20.ª $ctg\text{C} = b : c$, y tomando los logaritmos tenemos, $lg\ ctg\text{C} = lg\ b + clgc$, siendo el antilogaritmo de logaritmo $Ctg\text{C}$ quien nos dará los grados, minutos y segundos de C, sirviéndonos la fórmula 1.ª de comprobación.

Los datos en el *segundo caso* son a y B; por tanto tendremos que determinar, b, c y C; para determinar b nos valdremos de la fórmula 2.ª del escolio anterior, $b = a\ sn\text{B}$, y tomando logaritmos, $lgb = lga + lg\ sn\text{B}$, el antilogaritmo de $lg\ tg\ b$ nos dará el número de unidades de longitud de b; para determinar c, nos valdremos de la fórmula 5.ª del escolio anterior, $c = a\ csn\text{B}$, y tomando logaritmos, $lgc = lga + lg\ csn\text{B}$, el anti-logaritmo de lgc nos dará el número de unidades de longitud de c; para determinar C, nos valdremos de la 1.ª fórmula del escolio anterior, $\text{B} + \text{C} = 90^\circ$, de donde $\text{C} = 90^\circ - \text{B}$.

Los datos en el *tercer caso* son b y B, por tanto tendremos que determinar a, c y C; para determinar a, nos valdremos de la fórmula 10ª del escolio anterior, $a = b : sn\text{B}$, y tomando logaritmos, $lga = lgb + clgsn\text{B}$, el anti-logaritmo de lga, nos dará el número de unidades de longitud de a; para determinar c, nos valdremos de la fórmula 9.ª del escolio anteríor, $c = b \times \times ctg\text{B}$, y tomando logaritmos, $lgc = lgb + lg\ ct\text{B}$, el anti-logaritmo de lgc, nos dará el número de unidades de longitud de c; para determinar C, nos valdremos de la fórmula 1.ª del escolio anterior $\text{B} + \text{C} = 90^\circ$, de donde, $\text{C} = 90^\circ - \text{B}$.

Los datos en el *cuarto caso* son b y a; por tanto tendremos que determinar c, B y C; para determinar c, nos valdremos de la fórmula 24.ª del escolio anterior $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$, y tomando logaritmos, $lgc=\frac{1}{2}\left[lg(a+b)+lg(a-b)\right]$, el anti-logaritmo de lgc nos dará el número de unidades de longitud de c; para determinar B, nos valdremos de la fórmula 14.ª del escolio anterior, $sn\text{B}=b:a$, y tomando logaritmos, $lg\ sn\text{B}=lg\ b+clga$, el anti-logaritmo de $lgsn\text{B}$ nos dará los grados, minutos y segundos de B; para determinar á C, nos valdremos de la fórmula 16.ª del escolio anterior $csn\text{C}=b:a$, y tomando logaritmos, $lgcsn\text{C}=lg\ b+clga$, el antilogaritmo de $lg\ csn\text{C}$ nos dará el número de grados, minutos y segundos de C, la fórmula 1.ª del escolio anterior nos puede servir de comprobación.

ESCOLIO.—En la resolución de problemas las incógnitas deben estar, á ser posible, en función de los datos y no de otras incógnitas; por esto siempre nos hemos servido, en la resolución de los diferentes casos de triángulos rectángulos de las fórmulas que nos daban las incóngnitas en función de los datos y no de otras incógnitas, sirviéndonos estas últimas de comprobación. Datos para resolver un triángulo rectángulo; $a=3581'92m$, $b=2315'52m$, $c=2732'86$, $\text{B}=4{,}0^\circ\text{--}16'\text{--}27''2$, y $\text{C}=$ $=49^\circ\text{--}43'\text{--}32''8$.

CAPÍTULO II.

Triángulos oblicuángulos.

LECCIÓN 52.

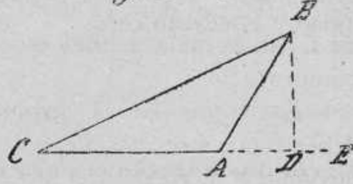
Fórmulas fundamentales para la resolución de triángulos oblicuángulos.

393. Como en los triángulos oblicuángulos es necesario conocer tres de sus elementos para determinarlos, siendo por lo menos un lado uno de los elementos conocidos; necesitamos determinar fórmulas que relacionen tres lados y dos ángulos, tres lados y un ángulo y dos lados y dos ángulos; pues la fórmula que liga á los tres ángulos nos es conocida (81).

394. En todo triángulo se verifica; 1.° los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos; 2.° un lado es igual á la suma de los productos de los otros dos por el coseno del ángulo que cada uno forme con el primer lado; 3.° el cuadrado de un lado, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido.

En efecto, figura 229, sea el triángulo oblicuángulo ABC, suponiendo que CE sea la unidad de dirección, tendremos (147, 359 E.° y 372); que la expresión de la recta BC será, $b+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, llamando α á la magnitud de AD y β á la de BD, y también $a\,(csn\mathrm{C}+\sqrt{-1}\ sn\mathrm{C})$, pero como la expresión de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ es igual á $c\left[csn(180^{\circ}-\mathrm{A})+\sqrt{-1}\,sn(180^{\circ}-\mathrm{A})\right]=c(-csn\mathrm{A}+\sqrt{-1}\ sn\mathrm{A})$, igualando las dos expresiones de la recta BC, se tiene, $a\,(csn\mathrm{C}+\sqrt{-1}\ sn\mathrm{C})=b+c(-csn\mathrm{A}+\sqrt{-1}\ sn\mathrm{A})$, efectuando las multiplicaciones indicadas en los dos miembros, se obtiene, $a\ csn\mathrm{C}+\sqrt{-1}\ a\ sn\ \mathrm{C}=b-c\ csn\mathrm{A}+\sqrt{-1}\ c\ sn\mathrm{A}$, é igualando la parte imaginaria y la real (371, C.° 2.° 1.er Curso), tenemos las dos fórmulas siguientes; 1.ª $a\ sn\mathrm{C}=c\ sn\mathrm{A}$, 2.ª $a\ csn\mathrm{C}=b-c\,csn\mathrm{A}$: de estas fórmulas se deduce; 1.° de la 1.ª, $a:c=sn\mathrm{A}:sn\mathrm{C}$, que expresa la 1.ª parte del teorema; 2.° de la 2.ª, $b=a\ csn\mathrm{C}+c\ csn\mathrm{A}$, que expresa la 2.ª parte del teorema; y 3.° de la 1.ª y 2.ª elevándolas al cuadrado y sumándolas, $a^2sn^2\mathrm{C}+a^2csn^2\mathrm{C}=c^2csn^2\mathrm{A}+b^2+c^2csn^2\mathrm{A}-2bc\,csn\mathrm{A}$, y teniendo en cuenta, que $scn^2\mathrm{A}+csn^2\mathrm{A}=1$, así como $sn^2\mathrm{C}+$ $+csn^2\mathrm{C}=1$, (374, 1.ª), se obtiene, $a^2=b^2+c^2-2bc\times csn\mathrm{A}$, que expresa la 3.ª parte del teorema.

Fig. 229.



Escolio.—Aplicando las fórmulas obtenidas á los tres lados, y teniendo en cuenta que de, $a:b=sn\mathrm{A}:sn\mathrm{B}$, y $b:c=$ $=sn\mathrm{B}:sn\mathrm{C}$, se deduce multiplicándolas ordenadamente, $a:c=$

$= snA : snC$, obtendremos los tres sistemas de fórmulas fundamentales siguientes:

1.° $A+B+C=180°$, $a : b = snA : snB$, y $b : c = snB : snC$.

2.° $a = b\ csnC + c\ csnB$, $b = a\ csnC + c\ csnA$, y $c = a\ csnB + b\ csnA$.

3.° $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ csnA$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ csnB$, y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ csnC$.

Con estas fórmulas podemos resolver un triángulo oblicuángulo y aun siendo rectángulo; pues entónces nos bastaría hacer al ángulo A recto, en cuyo caso sabemos que el seno es la unidad y el coseno cero.

LECCIÓN 53.

Fórmulas derivadas para la resolución de triángulos oblicuángulos.

395. En todo triángulo, la suma de dos lados partida por su diferencia, es igual á la tangente de la semi-suma de los ángulos opuestos partida por la tangente de la semi-diferencia de los mismos ángulos.

En efecto, de la fórmula $a : b = snA : snB$, se deduce (243, C.° 4.° 1.er Curso), $\frac{a+b}{a-b} = \frac{snA + snB}{snA - snB}$ y como (381, E.°)

$$\frac{snA + snB}{snA - snB} = \frac{tg\ \frac{1}{2}(A+B)}{tg\ \frac{1}{2}(A-B)},$$

tendremos, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\ \frac{1}{2}(A+B)}{tg\ \frac{1}{2}(A-B)}$, conforme al enunciado.

396. En todo triángulo se verifica; 1.° el coseno de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los lados que le forman, el producto del semi-perímetro por la diferencia entre el semi-perímetro y el lado opuesto; 2.° el seno de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los lados que le forman, el producto de las diferencias entre el semi-perímetro y estos lados; 3.° la tangente de la mitad de un ángulo, es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto del semi-perímetro y la diferencia entre el semi-perímetro y el lado opuesto, el producto de las diferencias entre el semi-perímetro y los lados que le forman; y 4.º la cotangente de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de la diferencia entre el semi-perímetro y los lados que le forman, el producto del semi-perímetro por la diferencia entre el semi-perímetro y el lado opuesto.

En efecto; 1.º de la fórmula, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ csn A$, se deduce, $csn A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, y sumando la unidad á los dos miembros, $1 + csn A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, ahora, poniendo en lugar del primer miembro su igual $2csn^2 \frac{1}{2} A$ (380, E.º 1.º), y efectuando la suma indicada en el segundo miembro se obtiene, $2csn^2\frac{1}{2}A = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$ (306, 1.er Curso), llamando $2p$ al perímetro, $a + b + c = 2p$, y $b + c - a = 2(p - a)$, por tanto sustituyendo se tiene, $2csn^2\frac{1}{2}A = \frac{2p \times 2(p-a)}{2bc}$, simplificando, $csn^2\frac{1}{2}A = \frac{p(p-a)}{bc}$, y por último extrayendo la raiz cuadrada, $csn\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, fórmula que está conforme con la primera parte del teorema; 2.º restando de la unidad los dos miembros de la fórmula, $csn A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, se tiene, $1 - csn A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, poniendo en lugar del primer miembro su igual $2sn^2\frac{1}{2}A$ (380, E.º 1.º), y efectuando la diferencia indicada en el segundo miembro, se obtiene, $2sn^2\frac{1}{2}A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$
$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$ (306, 1.er Curso), llamando como antes $2p$ al perímetro, $a + b - c = 2(p - c)$,

y $a-b+c=2(p-b)$, que sustituyendo se tiene, $2sn^2\frac{1}{2}A=$ $=\frac{2(p-b)\times 2(p-c)}{2bc}$, simplificando, $sn^2\frac{1}{2}A=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$, y por último extrayendo la raiz cuadrada,

$sn\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, fórmula que está conforme con la segunda parte del teorema; 3.° dividiendo esta última fórmula por la obtenida anteriormente se tiene, $tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ (323 y 364 1.er Curso), fórmula que está conforme con la tercera parte del teorema; y 4.° dividiendo la 1.ª fórmula obtenida por la 2.ª se tiene, $ctg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$, fórmula que está conforme con la última parte del teorema.

ESCOLIO.—Las fórmulas con las cuales podemos resolver un triángulo en los cuatro casos que vamos á considerar son:

1.ª $A+B+C=180°$; 2.ª $b=\frac{a\,snB}{snA}$; 3.ª $c=\frac{a\,snC}{snA}$;

4.ª $tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\,tg\frac{1}{2}(A+B}{a+b}$; 5.ª $c^2=a^2+b^2-2ab\,csnC$;

6.ª $tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; 7.ª $tg\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b}}$;

8.ª $tg\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$; 9.ª $snB=\frac{b\,snA}{a}$;

y 10.ª $a^2=b^2+c^2-2bc\,csnA$.

LECCIÓN 54.

Resolución de triángulos oblicuángulos.

397. Los casos de resolución de triángulos oblicuángulos que vamos á exponer son cuatro; 1.° dados un lado y dos ángulos; 2.° dos lados y el ángulo comprendido; 3.° los tres lados; y 4.° dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

Los datos en el *primer caso* son, a, A y B; por tanto tendremos que determinar C, b y c; para determinar C, nos valdremos de la 1.ª fórmula del escolio anterior, $A + B + C = = 180^{\circ}$, de donde, $C = 180^{\circ} - (B + A)$; para determinar b, nos valdremos de la 2.ª fórmula del escolio anterior $b = \frac{a\,sn\,B}{sn\,A}$, tomando los logaritmos, $lgb = lga + lgsnB + clgsnA$, y el antilogaritmo de lgb nos dará el número de unidades de longitud de b; para determinar C, nos valdremos de la fórmula 3.ª del escolio anterior, $c = a\,snC : snA$, tomando los logaritmos, $lg\,c = lga + lgsnC + clgsnA$, y el antilogaritmo de lgc nos dará el número de unidades de longitud de c; hay que observar $snC = sn\,(A + B)$ (371, E.º 2.º).

Los datos en el *segundo caso* son a, b y C; por tanto tendremos que determinar A, B y c; para determinar A y B, nos valdremos de la fórmula 4.ª del escolio anterior, $tg\frac{1}{2}(A - B) = = (a - b)\,tg\frac{1}{2}(A + B) : (a + b)$, tomando logaritmos, $lg\,tg\frac{1}{2}(A - B) = lg\,(a - b) + lg\,tg\frac{1}{2}(A + B) + clg\,(a + b)$, el antilogaritmo de $lg\,tg\frac{1}{2}(A - B)$, nos dará el número de grados, minutos y segundos de $\frac{1}{2}(A - B)$ y duplicando tendríamos los de $A - B$, conocida la suma $A + B$, doble de $\frac{1}{2}(A + B) = = 90^{\circ} - \frac{1}{2}C$, y la diferencia $A - B$ de los dos ángulos buscados serán (459, 3.ª 1.er Curso), el mayor igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y el menor igual á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia; para determinar C, nos valdremos de la fórmula 5.ª del escolio anterior, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,csnC$, en la que poniendo en vez de $csnC$ su igual $1 - 2sn^2\frac{1}{2}C$ (380, E.º 1.º), se tiene, $c^2 = a^2 + b^2 - - 2ab + 4ab\,sn^2\frac{1}{2}C = (a - b)^2 + 4ab\,sn^2\frac{1}{2}C$, aplicando el procedimiento expuesto (382, 2.º), haciendo $4ab\,sn^2\frac{1}{2}C : : (a - b)^2 = tg^2\alpha$, tendremos, $c^2 = (a - b)^2\,(1 + 4ab\,sn^2\frac{1}{2}C : : (a - b)^2) = (a - b)^2\,(1 + tg^2\alpha) = (a - b)^2\left[csn^2\alpha + sn^2\alpha\right] : : csn^2\alpha = (a - b)^2 : csn^2\alpha$, de donde, $c = (a - b) : csn\alpha$, tomando logaritmos $lgc = lg\,(a - b) + clg\,csn\alpha$, determinando α, tomando logaritmos en la fórmula, $tg\alpha = \left[2sn\frac{1}{2}C : (a - b)^2\right]$

$\sqrt{ab}$, se obtiene $lg\ tg\,\alpha = lg2 + lg\ sn\frac{1}{2}C + clg(a-b) + \frac{1}{2}(lga + lgb)$, conocido el valor de α el antilogaritmo de c nos dará el número de unidades de longitud que contenga.

Los datos en el *tercer caso* son, a, b, y c; por tanto tendremos que determinar A, B y C; para determinar A, nos valdremos de la fórmula 6.ª del corolario anterior, $tg\ \frac{1}{2}A =$ $= \sqrt{(p-b)(p-c) : p(p-a)}$, tomando logaritmos se tiene, $lg\ tg\ \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\left[lg\,(p-b) + lg\,(p-c) + clgp + clg\,(p-a)\right]$, y el antilogaritmo de $lg\ tg\ \frac{1}{2}$ A nos dará la mitad del número de grados, minutos y segundos de A, que duplicados nos darán por último el valor de A; del mismo modo determinaríamos el valor de B y C eplicando las fórmulas 7.ª y 8.ª del escolio aeterior.

Los datos en el *cuarto caso* son, a, b y A; por tanto tendremos que determinar B, C y c; para determinar B, nos valdremos de la fórmula 9.ª del escolio anterior, $sn\ B = b\ snA : a$, tomando logaritmos, $lg\ snB = lgb + lg\ snA + clga$, el antilogaritmo de $lgsnB$ nos dará el número de grados, minutos y segundos del ángulo B, pero como los senos de los ángulos suplementarios son iguales, su suplemento podrá ser el valor del ángulo B, también para determinar á C, sabemos que es el suplemento de A + B, de modo que pudiendo tener B dos valores, también los podrá tener C, hasta el punto que la expresión de snB es la misma que la de sn (A+C); para determinar c, nos valdremos de la fórmula 10.ª del escolio anterior, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ csnA$, en que, $c = b\ csnA \pm$ $\pm\sqrt{b^2csn^2A - b^2 + a^2}$ (461, 2.ª 1.er Curso), y poniendo en lugar de $1 - csn^2A$ su igual sn^2A, $c = bcsnA \pm \sqrt{a^2 - b^2sn^2A}$, y como $sn^2B = b^2sn^2A : a^2$, se tiene, $c = b\ csnA \pm \sqrt{a^2(1 - sn^2B)}$ $= b\ csnA \pm a\ csnB$, de donde, $c = b\ csnA\,(1 \pm a\ csnB : b\ csnA)$, y poniendo por $a : b$ su igual $snA : snB$, $c = b\ csnA\,(1 \pm snA\ csnB : snB\ csnA) = b\ csnA\left[(snB\ csnA \pm snA\ csnB) : snA\ csnB\right]$, y por último, $c = b\ sn\,(A \pm B) : snB$; puesto que no hemos podido prescindir para determinar C del ángulo en B, hubiera sido más sencillo determinarlo por la fórmula 3.ª del Escolio anterior.

DISCUSIÓN.—Una vez que en este problema el ángulo en B está determinado por su seno y puede tener dos valores lo mismo que el C y lado c que de él dependen; nos conviene saber en qué caso tendrá el problema dos soluciones ó una ó ninguna como ya vimos en las aplicaciones de la Planimetría 1.°, para ello, es evidente que si A es recto ú obtuso el problema no tiene más que una solución por ser B necesariamente agudo; pero si A es agudo puede suceder que sea $a > b$, $a = b$, y $a < b$, 1.° si $a > b$, $A > B$, y por tanto B agudo, y el problema tendrá una sola solución; 2.° si $a = b$, $A = B$, por consiguiente B agudo, teniendo el problema también una sola solución; 3.° si $a < b$, $A < B$, entónces, B puede ser agudo ú obtuso, pudiendo tener el problema dos soluciones ó ninguna; pues siendo $a < b$, puede ser, $a > b\,sn A$, $a = b sn A$, y $a < b\,sn A$; siendo $a < b\,sn A$, puede el ángulo en B ser agudo ú obtuso, teniendo por consiguiente el problema dos soluciones; siendo $a = b\,sn A$, el ángulo en B sería recto por ser su seno igual 1, teniendo el problema una sola solución; y siendo por último $a < b\,sn A$, el seno del ángulo B sería mayor que 1, lo que es imposible, luego el problema no tendría ninguna solución.

ESCOLIO.—Hemos procurado, como digimos en la resolución de los triángulos rectángulos determinar las incógnitas en función de los datos y no de otras incógnitas; pero hemos tenido ocasión de ver en los casos segundo y cuarto, que esto no siempre era posible, pues ~~pero~~ para determinar, c, en uno y otro caso necesitamos obtener su valor en función de otra incógnita; cuando esto sucede deben determinarse las incógnitas mediante la fórmula más sencilla, sirviendo en todo caso las demás como medio de comprobación.

Datos para resolver un triángulo oblicuángulo; $a = 97'89m$, $b = 153'33m$, $c = 159'36m$, $A = 36°\text{-}25'\text{-}20''$, $B = 68°\text{-}26'\text{-}17''$, y $C = 75°\text{-}8'\text{-}23''$.

LIBRO III

Trigonometría esférica

CAPÍTULO I

Triángulos rectángulos y rectiláteros

LECCIÓN 55.

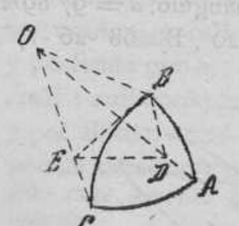
Fórmulas para la resolución de los triángulos rectángulos y rectiláteros.

398. Como un triángulo esférico queda determinado por tres elementos, y en el caso de que el triángulo sea particular son necesarios menos elementos para su determinación (286, C.º 1.º); si nos proponemos resolver un triángulo rectángulo ó rectilátero, como en estos se nos dá siempre el ángulo recto ó el lado de 90º, no necesitamos para su resolución más que dos elementos; por tanto los teoremas que es preciso demostrar para la resolución de triángulos rectángulos ó rectiláteros, tienen que darnos fórmulas que relacionen tres elementos siendo dos de ellos conocidos. Suponiendo siempre como en la trigonometría rectilínea, que el radio de la esfera es la unidad.

399. En todo triángulo esférico rectángulo el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.

En efecto, figura 230, sea ABC el triángulo esférico rectángulo en A, tracemos por B la perpendicular BD á AO, por D la perpendicular DE á OC, y unamos B con E, en cuyo caso BD será perpendicular al plano AOC, y CO perpendicular al plano BDE (215, E.º 2.º); ahora bien, en los triángulos rectángulos OED, ODB, y OEB se tiene, (391, 1.º), OE = OD *csnb*, OD = OB *csnc*, y OE = OB *csna*, de donde multiplicando las dos primeras

Fig. 230.

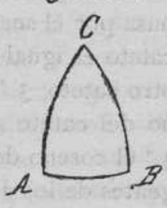


OE $=$ OB $csnb\ csnc$, y por último de esta y la tercera que tienen sus primeros miembros iguales, obtenemos, $csna = csnb\ csnc$, fórmula conforme con el enunciado.

400. En todo triángulo esférico birrectángulo, los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.

En efecto, figura 231, sea ABC el triángulo birrectángulo en A y B, entónces C es polo de AB (285 C.° 2.°), y AB es la medida del ángulo C; por tanto, tendremos, $sna : snb : snc = 1 : 1 : snC = snA : snB : snC$, una vez que el seno del ángulo recto y el del cuadrante es la unidad.

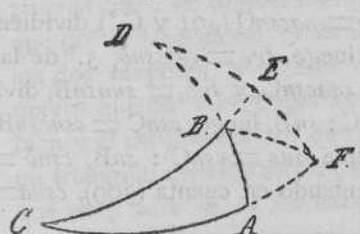
Fig. 231.



401. En todo triángulo rectángulo, el seno de un cateto es igual al seno de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto.

En efecto, figura 232, sea ABC el triángulo rectángulo en A, prolonguemos los lados CA y CB hasta un cuadrante y prolonguemos los arcos AB y FE hasta su encuentro en D; entónces C es polo de FE y D de CF; por tanto en los triángulos birrectángulos CFE y DAF se tiene por el teorema anterior, $snCE : snEF = snF : snE$, $snDF : snAD = snA : snF$, y en el triángulo rectángulo BDE (399), $csnBE\ csnDE = csnBD$, ó bien, $snBC\ snCE\ snEF\ snDF = snAB\ snAD$, (379), ahora bien, multiplicando esta igualdad por las dos anteriores, miembro á miembro resulta, $snBC\ snCE\ snEF\ snDF\ (snDF : snAD)\ (snCE : snEF) = snAB\ snAD\ (snA : snF)\ (snF : snC)$, simplificando, $snBC\ sn^2CE\ sn^2DF = snAB\ sn^2AD\ snA : snC$, y por ser CE, DF y AD cuadrantes, $sna = snc : snC$; luego $snc = sna\ snC$ fórmula conforme con el teorema.

Fig. 232.



Corolario.—En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de un ángulo oblícuo por el seno de la hipotenusa es igual al coseno del cateto opuesto al ángulo oblícuo por el seno del otro cateto. Pues en la figura 232, en los triángulos BEF y BAF rectángulos en E y A, se tiene (399), $csn\mathrm{EF}\ csn\mathrm{BE} = csn\mathrm{BF} = csn\mathrm{AB}\ csn\mathrm{AF}$, y como CE y CF valen 90°, y el arco EF es la medida del ángulo en C, se tiene, $csn\mathrm{BE} = csn\,(\mathrm{CE}-\mathrm{BC}) = sn\mathrm{BC}$, $csn\mathrm{AF} = csn\,(\mathrm{CF}-\mathrm{AC}) = sn\mathrm{AC}$, de donde sustituyendo, $csn\mathrm{C}\ sna = csnc\ snb$, fórmula conforme con el enunciado.

402. En todo triángulo esférico rectángulo se verifica; 1.° la tangente de un cateto es igual á la tangente de la hipotenusa por el seno del ángulo comprendido; 2.° la tangente de un cateto es igual á la tangente del ángulo opuesto por el seno del otro cateto; 3.° el coseno de un ángulo oblícuo es igual al coseno del cateto opuesto por el seno del otro ángulo oblícuo; y 4.° el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos oblícuos.

En efecto; 1,° según el corolario anterior, $csn\mathrm{C} = csncsnb : sna$, y como (339), $csnc = csna : csnb$, sustituyendo se tiene $csn\mathrm{C} = csnasnb : snacsnb = ctgatgb$, luego, $tgb = tgacsn\mathrm{C}$; 2.° de las fórmulas, $snc = snasn\mathrm{C}$, y $csncsnb = snacsn\mathrm{C}$ (401 y C.°) dividiéndolas, se deduce, $tgc = snbtg\mathrm{C}$, luego, $tgc = tg\mathrm{C}snb$; 3.° de las fórmulas (401 y C.°), $csncsnb = snacsn\mathrm{C}$, y $snb = snasn\mathrm{B}$, dividiéndolas se deduce, $csnc = csn\mathrm{C} : sn\mathrm{B}$, luego, $csn\mathrm{C} = csncsn\mathrm{B}$; y 4.° concluimos de demostrar que $csnc = csn\mathrm{C} : sn\mathrm{B}$, $csnb = csn\mathrm{B} : sn\mathrm{C}$, multiplicando y teniendo en cuenta (399), $csna = ctg\mathrm{B}\ ctg\mathrm{C}$.

403. En todo triángulo esférico rectilátero se verifica; 1.° el coseno del ángulo opuesto al cuadrante es igual á menos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos; 2.° el seno de un ángulo adyacente al cuadrante, es igual al seno del ángulo opuesto al cuadrante por el seno del lado opuesto al ángulo; 3.° la tangente del ángulo adyacente al cuadrante es igual á menos el producto de la tangente del ángulo opuesto al cuadrante por el coseno del lado no opuesto al ángulo; 4.° la tangente de un ángulo adyacente al cuadrante es igual al producto del seno del otro ángulo adyacente al cuadrante por la tangente del lado opuesto al primer ángulo; 5.° el coseno de un lado adyacente al cuadrante es igual al coseno del ángulo opuesto por el seno del otro lado; y 6.° el coseno del ángulo opuesto al cuadrante es igual á menos el producto de las cotangentes de los otros dos lados.

En efecto, si suponemos un triángulo rectilátero ABC, cuyos ángulos sean A, B y C y sus lados a, b y c, valiendo a 90°, el triángulo polar correspondiente que llamaremos A′B′C′, será rectángulo en A′, y se tendrá (283), $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$, $A' = 180° - a$, $B' = 180° - b$, $C' = 180° - c$; por tanto de las fórmulas que concluimos de obtener para los triángulos esféricos rectángulos se deducen por simples sustituciones las siguientes (370 y 371, C.°); 1.° de $csna' = csnb'\, csnC'$, $csnA = -csnB\, csnC$; 2.° de $snc' = sna'\, snC'$, $snC = snA\, snc$; 3.° de $tgb' = tga'\, csnC'$, $tgB = -tgA\, csnc$; 4.° de $tgb' = snc'\, tgB'$, $tgB = snC\, tgb$; 5.° de $csnB' = csnb'\, snC'$, $csnb = csnB\, snc$; y 6.° de $csna' = ctgB'\, ctgC'$, $csnA = -ctgb\, ctgc$.

Escolios.—Hay que observar: 1.° que en todo triángulo esférico rectángulo los tres lados son menores, ó uno menor y los otros dos mayores que 90°; pues de la fórmula, $csna = csnb\, csnc$, se desprende que siendo $csna$ positivo, ó menor que 90° la hipotenusa, lo serán también los catetos ó bien serán los dos mayores, y siendo $csna$ negativo será la hipotenusa mayor que 90° y entonces un cateto tiene que ser mayor también y el otro menor: 2.° que cada cateto y su ángulo opuesto en un triángulo esférico rectángulo, son ambos mayores ó menores que 90°, pues en la fórmula $csnB = csnb\, snC$, snC es siempre positivo por ser menor que 180°, luego B y b tendrán siempre el mismo signo: 3.° que en todo triángulo rectilátero los tres ángulos son mayores ó uno mayor y los otros dos menores que 90°; pues de la fórmula $csnA = -cnsB\, csnC$, se desprende por consideraciones análogas al primer escolio: 4.° que en todo triángulo rectilátero un ángulo adyacente al cuadrante y su lado opuesto, los dos son mayores ó menores que 90°; pues se deduce como antes de la fórmula, $csnb = csnB\, snc$: 5.° las fórmulas con las cuales podemos resolver un triángulo rectángulo en los seis casos que vamos á considerar son; 1.ª $csna = csnb\, csnc$;

2.ª $snc = sna\, snC$; 3.ª $tgb = tga\, csnC$; 4.ª $tgb = snc\, tgB$; 5.ª $csnB = csnb\, snC$; y 6.ª $csna = ctgB\, ctgC$, aplicadas á todos los elementos análogos: y 6.º las fórmulas con las cuales podemos resolver un triángulo rectilátero en los seis casos que vamos á considerar son; 1.ª $csnA = -csnB\, csnC$, 2.ª $snC = snA\, snc$; 3.ª $tgB = -tgA\, csnc$; 4.ª $tgB = snC\, tgb$; 5.ª $csnb = csnB\, snc$; y 6.ª $csnA = -ctgb\, ctgc$.

LECCIÓN 56.

Resolución de triángulos rectángulos.

404. Los casos de resolución de triángulos esféricos rectángulos que vamos á exponer son seis; 1.º dada la hipotenusa y un cateto; 2.º dados los dos catetos; 3.º dada la hipotenusa y un ángulo oblícuo; 4.º dado un cateto y el ángulo opuesto; 5.º dado un cateto y el ángulo adyacente; y 6.º dados los dos ángulos oblícuos.

Los datos en el *primer caso*, son a y b; por tanto tendremos que determinar c, B y C; para determinar c, nos valdremos de la 1.ª fórmula (403, E.º 5.º), $csna = csnb csnc$, de donde, $csnc = csna : csnb$, tomando logaritmos, $lgcsnc = lgcsna + clgcsnb$, y el antilogaritmo de $lgcsnc$, nos dará el número de grados, minutos y segundos del lado c; para determinar B, nos valdremos de la 2.ª fórmula (403, E.º 5.º), $snb = sna\, snB$, de donde, $snB = snb : sna$, tomando logaritmos, $lgsnB = lgsnb + clgsna$, y el antilogaritmo de $lgsnB$ nos dará los grados, minutos y segundos del ángulo B; para determinar C, nos valdremos de la 3.ª fórmula (403. E.º 5.º), $tgb = tgacsnC$, de donde, $csnC = tgb : tga$, tomando logaritmos, $lgcsnC = lgtgb + clgtga$, y el antilogaritmo de $lgcsnC$ nos dará los grados, minutos y segundos del ángulo C. Para que el problema sea posible es preciso que $snb < sna$, lo cual exige; si $a < 90^{\circ}$, que se tenga $a > b$, ó $b > 180^{\circ} - a$, si $a > 90^{\circ}$, $a < b$, ó $b < 180^{\circ} - a$, si $a = 90^{\circ}$, siempre $snb < sna$: cuando el problema es posible no tiene más que una solución porque el ángulo en B dado por el seno tiene que ser mayor ó menor que 90° según que su lado opuesto sea mayor ó menor que 90° (403, E.° 2.°).

Los datos en el *segundo caso*, son b y c; por tanto tendremos que determinar a, B y C, para determinar a, nos valdremos de la 1.ª fórmula (403, E.° 5.°), $csna = csnbcsnc$, tomando logaritmos, $lgcsna = lgcsnb + lgcsnc$, y el antilogaritmo de $lgcsna$, nos dará el valor de a; para determinar B, nos valdremos de la 4.ª fórmula (403, E.° 5.°), $tgb = snc\, tg\mathrm{B}$, de donde, $tg\mathrm{B} = tgb : snc$, tomando logaritmos, $lgtg\mathrm{B} = lgtgb + $ $+ clgsnc$, y el antilogaritmo del $lgtg\mathrm{B}$, nos dará el valor de B; para determinar C, nos valdremos de la fórmula análoga á la anterior, $tgc = snbtg\mathrm{C}$, de donde, $tg\mathrm{C} = tgc : snb$, tomando logaritmos, $lgtg\mathrm{C} = lgtc + clgsnb$, y el antilogaritmo del $lgtg\mathrm{C}$, nos dará el valor de C. Este problema es siempre posible y tiene una sola solución, no olvidando que cada lado tiene que ser siempre menor que media circunferencia.

Los datos en el *tercer caso*, son a y B; por tanto tendremos que determinar b, c y C; para determinar b, nos valdremos de la 2.ª fórmula (403, E.° 5.°), $snb = snasn\mathrm{B}$, tomando logaritmos, $lgsnb = lgsna + lgsn\mathrm{B}$, y el antilogaritmo del $lgsnb$, nos dará el valor de b; para determinar c, nos valdremos de la 3.ª fórmula (403, E.° 5.°), $tgc = tga\, csn\mathrm{B}$, tomando logaritmos, $lgtgc = lgtga + lgcsn\mathrm{B}$, y el antilogaritmo del $lgtgc$ nos dará el valor de c; para determinar C, nos valdremos de la 6.ª fórmula (403, E.° 5.°), $csna = ctg\mathrm{B}ctg\mathrm{C}$, de donde, $ctg\mathrm{C} = csna : ctg\mathrm{B}$, tomando logaritmos, $lgctg\mathrm{C} = lgcsna + $ $+ clgctg\mathrm{B}$, y el antilogaritmo de $lgctg\mathrm{C}$, nos dará el valor de C. Este problema es siempre posible y tiene una sola solución; pues el cateto b y el ángulo opuesto B son los dos mayores ó menores que 90° (403, E.° 2.°).

Los datos en el *cuarto caso* son b y B; por tanto tendremos que determinar a, c, y C; para determinar a, nos valdremos de la fórmula 2.ª (403, E.° 5.°), $snb = snasn\mathrm{B}$, de donde, $sna = snb : sn\mathrm{B}$, tomando logaritmos, $lgsna = lgsnb + clgsn\mathrm{B}$, del antilogaritmo de $lgsna$, nos dará el valor de a; para determinar c, nos valdremos de la 4.ª fórmula (403, E.° 5.°), $tgb = snctg\text{B}$, de donde, $snc = tgb : tg\text{B}$, tomando logaritmos, $lgsnc = lgtgb + clgtg\text{B}$, y el antilogaritmo de $lgsnc$, nos dará el valor de c; para determinar el valor de C, nos valdremos de la 5.ª fórmula (403, E.° 5.°), $csn\text{B} = csn\, bsn\text{C}$, de donde, $sn\text{C} = csn\text{B} : csnb$, tomando logaritmos, $lgsn\text{C} = lgcsn\text{B} + clg\, csnb$, y el antilogaritmo de $lg\, sn\text{C}$, nos dará el valor de C.

Este problema tiene dos soluciones; puesto que todas las incógnitas están dadas por su seno, y además los tres lados tienen que ser menores que 90° ó uno menor y otros dos mayores, siendo cada cateto de la misma especie que el ángulo opuesto (403, E.°s 1.° y 2.°); de modo que las únicas soluciones posibles son;

$$b<90^\circ\left\{\begin{matrix} a, & c & \text{C} \\ 180^\circ-a, & 180^\circ-c, & 180^\circ-\text{C} \end{matrix}\right\} \quad b>90^\circ\left\{\begin{matrix} a, & 180^\circ-c, & 180^\circ-\text{C} \\ 180^\circ-a, & c, & \text{C}. \end{matrix}\right.$$

llamando a, c, y C los valores de las incógnitas dados por las tablas.

Los datos en el *quinto caso*, son b y C; por tanto tendremos que determinar a, c, y B; para determinar a, nos valdremos de la 3.ª fórmula (403, E.° 5.°), $tgb = tgacsn\text{C}$, de donde, $tga = tgb : csn\text{C}$, tomando logaritmos, $lgtga = lgtgb + clgcsn\,\text{C}$, y el antilogaritmo de $lgtga$, nos dará el valor de a; para determinar c, nos valdremos de la 4.ª fórmula (403, E.° 5.°), $tgc = snbtg\text{C}$, tomando logaritmos, $lg\, tgc = lgsnb + lgtg\text{C}$, y el antilogaritmo de $lgtg\, c$, nos dará el valor de c; para determinar B, nos valdremos de la fórmula 5.ª (403 E.° 5.°), $csn\text{B} = csnbsn\text{C}$, tomando logaritmos, $lgcsn\text{B} = lgcsnb + lgsn\text{C}$, y el antilogaritmo de $lgcsn\text{B}$, no dará el valor de B.

Este problema es siempre posible y tiene una sola solución.

Los datos en el *sexto caso*, son B y C; por tanto tendremos que determinar a, b y c; para determinar a, nos valdremos de la 6.ª fórmula (403, E.° 5.°), $csna = ctg\text{B}\, ctg\text{C}$, tomando logaritmos, $lgcsna = lgctg\text{B} + lgctg\text{C}$, y el antilogaritmo del logaritmo del coseno de a, nos dará el valor de a; para determinar el valor de b, nos valdremos de la 5.ª fórmula (403, E.° 5.°), $csn\text{B} = csnbsn\text{C}$, de donde, $csnb = csn\text{B} : sn\text{C}$, tomando logaritmos, $lgcsnb = lgcsnB + clgsnC$, y el antilogaritmo de $lgcsnb$, nos dará el valor de b; para determinar C, nos valdremos de la misma fórmula, $csnC = csncsnB$, de donde, $csnc = csnC : snB$, tomando logaritmos, $lgcsnc = lgcsnC + clgsnB$, y tomando el antilogaritmo de $lgcsnc$, nos dará el valor de c. Para que este problema sea posible es preciso, que la suma de los ángulos dados esté comprendida entre 90° y 270°, y su diferencia entre -90 y 90°; cumplidas estas condiciones el problema tiene una sola solución.

ESCOLIO.—No hemos considerado los triángulos birrectángulos y trirrectángulos; porque no dan lugar á ningún problema; una vez que el birrectángulo los dos lados que forman el ángulo oblícuo valen 90° y el tercer lado es igual al ángulo opuesto, y en el trirrectángulo los tres lados son iguales á 90°. En el cuarto caso siendo $b = B$, resulta un triángulo birrectángulo.

Datos para resolver un triángulo esférico rectángulo; $a = 71^\circ\text{-}24'\text{-}30''$, $b = 140^\circ\text{-}52'\text{-}40''$, $c = 114^\circ\text{-}15'\text{-}53''9$, $B = 138^\circ\text{-}15'\text{-}45''4$, $C = 105^\circ\text{-}52'\text{-}39''$.

LECCIÓN 57.

Resolución de triángulos rectiláteros.

405. Los casos de resolución de triángulos esféricos rectiláteros que vamos á exponer son seis; 1.º dados dos ángulos siendo uno opuesto al cuadrante; 2.º dados dos ángulos que ninguno se oponga al cuadrante; 3.º dados el ángulo opuesto al cuadrante y un lado; 4.º dados un lado y el ángulo opuesto; 5.º dados un ángulo y el lado adyacente; y 6.º dados dos lados.

Las fórmulas para la resolución de los triángulos esféricos rectiláteros en los seis casos, son las de (403, E.º 6.º); y la posibilidad y número de soluciones de cada caso son análogas á las de los casos correspondientes de los triángulos esféricos rectángulos, sin más que estar fundadas en los escolios 3.º y 4.º de (143) y en las propiedades generales de los triángulos esfécos (283 al 286); por esto, nos limitaremos á exponer solo las fórmulas para cada caso, llamando *a* al cuadrante.

Los datos en el *primer caso*, son A y B; por tanto tendremos que determinar C, *b* y *c;* determinaremos C, por la fórmula 1.ª, $csnA = - csnB\, csnC$, de donde $csnC = - csnA : csnB$, tomando logaritmos, $lgcsnC = - (lgcsnA + clgcsnB)$, y el antilogaritmo de $lgcsnC$, nos dará el valor de C; determinaremos *b*, por la fórmula 2.ª, $snB = snA\, snb$, de donde, $snb = snB : snA$, tomando logaritmos, $lgsnb = lgsnB + clgsnA$, y el antilogaritmo de $lgsnb$, nos dará el valor de *b*, determinaremos *c*, por la fórmula 3.ª, $tgB = - tgA\, csnc$, de donde, $csnc = - tgB : tgA$, tomando los logaritmos, $lgcsnc = - (lgtgB + clgtgA)$, y el antilogaritmo de $lgcsnc$, nos dará el valor de *c*.

Los datos en el *segundo caso*, son B y C; por tanto tendremos que determinar A, *b*, y *c;* determinaremos A, por la fórmula 1.ª, $csnA = - csnB\, csnC$, tomando logaritmos, $lgcsnA = -clgcsnB + lgcsnC)$, y el antilogaritmo de $lgcsnA$, nos dará el valor de A; determinaremos *b*, por la fórmula 4.ª, $tgB = snC\, tgb$, de donde, $tgb = tgB : snC$, tomando logaritmos, $lgtgb = lgtgB + clgsnC$, y el antilogaritmo de $lgtgb$, nos dará el valor de *b*, determinaremos *c*, por la fórmula análoga, de modo que, el antilogaritmo de $lgtgc$, nos dará el valor de *c*.

Los datos en el *tercer caso*, son A, y *b;* por tanto tendremos que determinar B, C, y *c;* determinaremos B, por la fórmula 2.ª, $snB = snA, snb$, tomando logaritmos, $lgsnB = lgsnA + lgsnb$, y el antilogaritmo de $lgsnB$, nos dará el valor de B; determinaremos C, por la fórmula 3.ª, $tgC = - tgA\, csnb$, tomando logaritmos, $lgtgC = - (lgtgA + lgcsnb)$, y el antilogaritmo de $lgtgC$, nos dará el valor de C; determinaremos *c*, por la fórmula 6.ª, $csnA = -ctgb\, ctgc$, de donde, $ctgc = - csnA : ctgb$, tomando logaritmos, $lgctgc = - (lgcsnA + clgctgb)$, y el antilogaritmo de $lgctgc$, nos dará el valor de *c*.

Los datos en el *cuarto caso*, son *b* y B; por tanto tendremos que determinar A, C y *c;* determinaremos A, por la fórmula 2.ª, $snB = snA snb$, de donde, $snA = snB : snb$, tomando logaritmos, $lgsnA = lgsnB + clgsnb$, y el antilogaritmo de $lgsnA$, nos dará el valor de A; determinaremos C, por la fórmula 4.ª, $tgB = snC\,tgb$, de donde, $snC = tgB : tgb$, tomando logaritmos, $lgsnC = lgtgB + clgtgb$, y el antilogaritmo de $lgsnC$, nos dará el valor de C; determinaremos c, por la fórmula 5.ª, $csnb = csnB\,snc$, de donde, $snc = csnb : csnB$, tomando logaritmos, $lgsnc = lgcsnb + clgcsnB$, y el antilogaritmo de $lgsnc$, nos dará el valor de c.

Los datos en el *quinto caso*, son B y c; por tanto tendremos que determinar A, C y b; determinaremos A; por la fórmula 3.ª, $tgB = -tgAcsnc$, de donde $tgA = -tgB : csnc$, tomando logaritmos, $lgtgA = -(lgtgB + clgcsnc)$, y el antilogaritmo de $lgtgA$, nos dará el valor de A; determinaremos C, por la fórmula 4.ª, $tgC = snBtgC$, tomando logaritmos, $lgtgC = lgsnB + lgtgc$, y el antilogaritmo de $lgtgC$, nos dará el valor de C; determinaremos b, por la fórmula 5.ª, $csnb = csnBsnc$, tomando logaritmos, $lgcsnb = lgcsnB + lgsnc$, y el antilogaritmo de $lgcsnb$, nos dará el valor de b.

Los datos en el *sexto caso* son, b y c; por tanto tendremos que determinar A, B y C; determinaremos A, por la fórmula 6.ª, $csnA = -ctgbctgc$, tomando logaritmos, $lgcsnA = -(lgctgb + lgctgc)$, y el antilogaritmo de $lgcsnA$, nos dará el valor de A; determinaremos B, por la fórmula 5.ª, $csnb = csnBsnc$, de donde, $csnB = csnb : snc$, tomando logaritmos, $lgcsnB = lgcsnb + clgsnc$, y el antilogaritmo de $lgcsnB$, nos dará el valor de B; determinaremos C, por la fórmula análoga, de modo que el antilogaritmo de $lgcsnC$, nos dará el valor de C.

ESCOLIOS.—Debemos hacer notar: 1.° que si se nos dá para resolver un triángulo esférico que tenga dos lados ó dos ángulos iguales, trazando desde el vértice opuesto al lado desigual ó desde el vértice del ángulo desigual un arco de circunferencia máxima al lado desigual ó al lado opuesto al ángulo desigual; quedará dividido el triángulo propuesto en dos triángulos rectángulos iguales, que resolviendo uno quedará resuelto el triangulo: 2.° que si se nos dá para resolver un triángulo en que la suma de dos lados ó dos ángulos sea 180°, prolongando uno de los lados dados y el tercero, ó bien uno de los lados opuestos á uno de los ángulos dados y el lado que no se opone á ninguno; se formará un triángulo en el cual dos lados ó dos ángulos serán iguales, que se resolverá según hemos dicho en el problema anterior.

Datos para la resolución de un triángulo esférico rectilátero, $b = 41^{o}\cdot\cdot 44'\cdot\cdot 14''6$, $c = 74^{o}\cdot\cdot 7'\cdot\cdot 21''$, $A = 108^{o}\cdot\cdot 35'\cdot\cdot 30''$, $B = 39^{o}\cdot\cdot 7'\cdot\cdot 20''$, $C = 65^{o}\cdot\cdot 44'\cdot\cdot 6''1$.

CAPITULO II

Triángulos oblicuángulos.

LECCIÓN 58

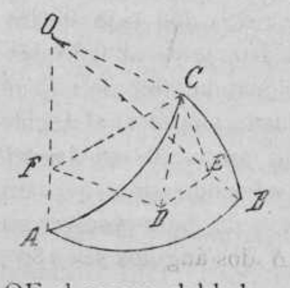
Fórmulas fundamentales para la resolución de triángulos oblicuángulos.

406. Como en los triángulos esféricos oblicuángulos se necesitan conocer tres de sus elementos para su determinación; son necesarias fórmulas que relacionen cuatro elementos siendo tres de ellos conocidos.

407. En todo triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.

En efecto, figura 233, sea ABC el triángulo esférico, y su triedro correspondiente OABC; tracemos desde el vértice C una perpendicular CD al plano AOB, desde el pie D de esta perpendicular tracemos las perpendiculares DE y DF á las aristas OB y OA, y unamos por último C con E y F, las rectas CE y CF son perpendiculares respectivamente á OB y OA (215, E.º 2.º), siendo por consiguiente, CE el seno y OE el coseno del lado a, y CF el seno y OF el coseno del lado

Fig. 233.

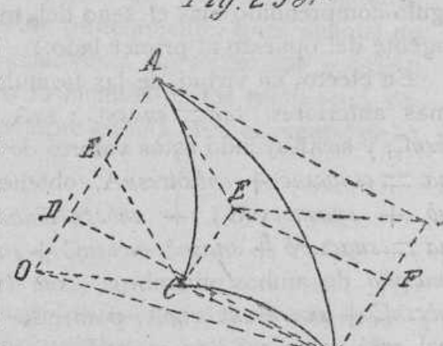


b; ahora bien, $CF = DF + CD\sqrt{-1} = snb\,(csnA + \sqrt{-1}\,snA)$ (359, E.° 2.° y 372), de donde, $DF = snbcsnA$, y $CD = snb$ snA (371, C.° 2.° 1.er Curso); pero en el triángulo CDE rectángulo en D, $CD = snasnB$ (391, 1.°); luego igualando los dos valores de CD dados por esta igualdad y la anterior se tiene, $snasnB = snbsnA$, de la que se deduce, $sna : snb = snA : snB$, conforme con el teorema.

408. En todo triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos más el producto de los senos de los mismos por el coseno del ángulo comprendido.

En efecto, figura 234, sea ABC el triángulo esférico, y OABC, su triedro correspondiente, tracemos en A las tangentes AD y AE, á los lados c y b del triángulo esférico, desde los vértices B y C tracemos, paralelas á la arista OA hasta que encuentre á las tangentes de c y b, tales como BD y CE, y paralelas á las tangentes AD y AE hasta que encuentren á la arista OA, tales como BD′ y CE′, unamos E con D, y tracemos por último la cuerda BC del lado a, y por E la paralela EF á esa cuerda; las rectas BD′ y CE′ son los senos respectivos de los lados c y b, siendo sus cosenos OD′ y OE′, por consiguiente en los paralelógramos ADBD′ y AECE′ se tiene, $AD = BD' = snc$, $BD = AD' = OA - OD' = 1 - csnc$, $AE = CE' = snb$, y $CE = AE' = OA - OE' = 1 - csnb$; ahora bien, en el triángulo ADE (394, 3.°), $\overline{ED}^2 = sn^2c + sn^2b - 2sncsnbcsnA$, y en el triángulo DEF rectángulo en D (205, C.° 1.°), por ser $EF = BC$, $\overline{ED}^2 = 4sn^2\tfrac{1}{2}a - (csnc -$

Fig. 234



$-csnb)^2$, pues BC es el doble del seno de la mitad de a y $DF =$ $= BD - CE$; igualando los dos valores de $\overline{ED}^2$, $4sn^2\frac{1}{2}a -$ $-(csnc - csnb)^2 = sn^2c + sn^2b - 2sncsnbcsnA$, de donde, $4sn^2\frac{1}{2}a - csn^2c - csn^2b + 2csnc\, csnb = sn^2c + sn^2b - 2snb$ $snc\, csnA$, y (374, 1.°), $4sn^2\frac{1}{2}a = 2 - 2csnb\, csnc - 2snb\, snc$ $csnA$, simplificando y poniendo en vez de $2sn^2\frac{1}{2}a$ su igual $1 - csna$ (380, E.° 1.°), $1 - csna = 1 - csnbcsnc - snbsnccsnA$, obteniendo por último, simplificando y cambiando de signo á los dos miembros, $csna = csnbcsnc + snbsnccsnA$, conforme al teorema.

409. En todo triángulo esférico, la cotangente de un lado por el seno del otro es igual, al coseno de este por el coseno del ángulo comprendido más el seno del mismo ángulo por la cotangente del opuesto al primer lado.

En efecto, en virtud de las fórmulas obtenidas en los teoremas anteriores; $snc = snasnC : snA$, $csnc = csnacsnb + sna$ $snbsnC$, y sustituyendo estos valores de snc y $csnc$, en la fórmula $csna = csnbcsnc + snbsnccsnA$, obtenemos, $csna = csnb\,(csna$ $csnb + snasnbcsnC) + snbcsnAsnasnC : snA$, de donde, $csna = csnacsn^2b + snasnbcsnbcsnC + snasnbsnC\, ctgA$, restando $csnacsn^2b$ de ambos miembros, $csna\,(1 - csn^2b) = snasnb$ $csnbcsnC + snasnbsnC\, ctgA$, poniendo en vez de $1 - csn^2b$ su igual sn^2b, $csna\, sn^2b = snasnbcsnbcsnC + snasnbsnC\, ctgA$, y por último, dividiendo ambos miembros por $snasnb$, se obtiene, $ctgasnb = csnbccsnC + snC\, ctgA$, conforme al teorema.

410. En todo triángulo esférico, el coseno de un ángulo es igual á, menos el producto de los cosenos de los otros dos más el producto de los senos de los mismos por el coseno del lado opuesto al primero.

En efecto, sean a, b, c los lados y A, B, C los ángulos del triángulo ABC propuesto, los lados y ángulos de su triángulo polar A'B'C' serán a', b', c' y A', B', C'; y en este triángulo tenemos según (408), $csna' = csnb'\, csnc' + snb'\, snc'\, csnA$, de donde, poniendo en esta fórmula en lugar de a', b', c' y A' sus valores, $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$, y $A' = 180° - a$, se obtiene, $-csnA = csnB\, csnC - snB\, snC\, csna$, y cambiando de signos tenemos, $csnA = - csnB\ csnC + snB\ snC\ csna$, conforme al teorema.

ESCOLIOS.—1.º En el teorema (407), así como obtuvimos dos valores para CD, pudimos también obtener dos valores para DF, deduciendo así una fórmula que con la obtenida, se podía deducir de las dos la del teorema (408), por un procedimiento análogo al segundo (394) en los triángulos rectilíneos; pero el cálculo es tan pesado que hemos preferido seguir otro procedimiento.

2.º De los cuatro teoremas obtenidos, se deducen fácilmente los que hemos hallado para los triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros, sin más que poner en vez de A su valor 90º para los rectángulos, y en vez de a su valor 90º para los rectiláteros; pero hemos preferido obtenerlos directamente, pues aunque no hemos fundado en ellos los relativos á los triángulos esféricos oblicuángulos, como tampoco lo hicimos en los rectilíneos, entendemos se debe proceder siempre en una obra elemental de lo sencillo á lo complicado.

LECCIÓN 59.

Fórmulas derivadas para la resolución de triángulos oblicuángulos.

411. En todo triángulo esférico se verifica; 1.º el coseno de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los senos de los lados que le forman, el producto del seno del semiperímetro por el seno de la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto; 2.º el seno de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los senos de los lados que le forman, el producto de los senos de las diferencias entre el semiperímetro y estos lados; 3.º la tangente de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto del seno del semiperímetro por el seno de la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto, el producto de los senos de las diferencias entre el semiperímetro y los lados que le formen; y 4.° la cotangente de la mitad de un ángulo es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los senos de las diferencias entre el semiperímetro y los lados que le forman, el producto del seno del semiperímetro por el seno de la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto.

En efecto; 1.° de la fórmula fundamental, $csna = csnb\, csnc + snb\, snc\, csnA$, se deduce, $csnA = (csna - csnb\, csnc) : snb\, snc$, sustituyendo este valor de $csnA$ en la fórmula, $csn\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{(1 + csnA) : 2}$, se obtiene, $csn\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{(csna - csub\, csnc + snb\, snc) : 2\, snb\, snc}$, y (379, 2.ª),

$$csn\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{[csna - csn\,(b + c)] : 2snb\, snc} =$$
$$= \sqrt{sn\,\tfrac{1}{2}\,(a + b + c)\, sn\,\tfrac{1}{2}\,(b + c - a) : snb\, snc}\ (381,\ 4.^a),$$

llamando $2p$ al perímetro, $a + b + c = 2p$, y $b + c - a = 2\,(p - a)$, por tanto sustituyendo tenemos, $csn\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{snp\, sn(p\text{-}a) : snb\, snc}$, conforme la 1.ª parte del teorema; 2.° sustituyendo el valor de $csnA$, en la fórmula, $sn\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{(1 - csnA) : 2}$, se obtiene,

$$sn\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{(snb\, snc + csnb\, csnc - csna) : 2snb\, snc},$$

y (379, C.° 1.° 2.°), $sn\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{[csn\,(b - c) - csna] : 2snbsnc} = \sqrt{sn\,\frac{1}{2}\,(a + c - b)\, sn\,\frac{1}{2}\,(a + b - c) : snbsnc}$, llamando como antes $2p$ al perímetro, $a + c\text{-}b = 2\,(p - b)$, y $a + b\text{-}c = 2\,(p - c)$, por tanto sustituyendo tenemos, $sn\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{sn\,(p - b)\, sn\,(p - c) : snb\, snc}$, conforme la 2.ª parte del teorema; 3.° dividiendo esta última fórmula por la obtenida anteriormente se tiene, $tg\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{sn\,(p - b)\, sn\,(p - c) : snp\, sn\,(p - a)}$, conforme con la 3.ª parte del teorema; y 4.° dividiendo la primera fórmula obtenida por la segunda tenemos,

$$ctg\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{snp\, sn\,(p - a) : sn\,(p - b)\, sn\,(p - c)}.$$

Corolario.—En todo triángulo esférico se verifica; 1.° el coseno de la mitad de un lado es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los senos de los ángulos adyacentes, el producto de los senos de las diferencias entre los ángulos adyacentes y el semi-exceso; 2.º el seno de la mitad de un lado es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los senos de los ángulos adyacentes, el producto del seno del semi-exceso por el seno de la diferencia entre el ángulo opuesto y el semi-exceso; 3.º la tangente de la mitad de un lado es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto de los senos de las diferencias entre los ángulos adyacentes y el semi-exceso, el producto del seno del semi-exceso por el seno de la diferencia entre el ángulo opuesto y el semi-exceso; y 4.º la cotangente de la mitad de un lado es igual, á la raiz cuadrada del cociente de dividir por el producto del seno del semi-exceso por el seno de la diferencia entre el ángulo opuesto y el semi-exceso, el producto de los senos de las diferencias entre los ángulos adyacentes y el semi-exceso. Puesto que llamando 2E al exceso esférico del triángulo propuesto; $A+B+C-180^{\circ}=2E$, ó bien, $A+B+C=180^{\circ}+2E$; por tanto aplicando las fórmulas obtenidas en el teorema, al triángulo polar del ABC tendremos;

1.º $csn\frac{1}{2}a=\sqrt{sn\,(B-E)\;scn\,(C-E):snB\;snC}$;

2.º $sn\frac{1}{2}a=\sqrt{snE\;sn\,(A-E):snB\;snC}$;

3.º $tg\frac{1}{2}a=\sqrt{snE\;sn\,(A-E):sn\,(B-E)\;sn\,(C-E)}$; y

4.º $ctg\frac{1}{2}a=\sqrt{sn\,(B-E)\;sn\,(C-E):snE\;sn\,(A-E)}$.

412. ANALOGÍAS DE DELAMBRE.—DELAMBRE así como GAUSS, han obtenido cuatro fórmulas entre los seis elementos de un triángulo esférico que pueden emplearse para la resolución de triángulos, en algunos casos con ventaja; las fórmulas son las siguientes:

1.ª $sn\,\frac{1}{2}(A+B):csn\,\frac{1}{2}C=csn\,\frac{1}{2}(a-b):csn\,\frac{1}{2}c$

2.ª $sn\,\frac{1}{2}(A-B):csn\,\frac{1}{2}C=sn\,\frac{1}{2}(a-b):sn\,\frac{1}{2}c$

3.ª $csn\,\frac{1}{2}(A+B):sn\,\frac{1}{2}C=csn\,\frac{1}{2}(a+b):csn\,\frac{1}{2}c$

4.ª $csn\,\frac{1}{2}(A-B):sn\,\frac{1}{2}C=sn\,\frac{1}{2}(a+b):sn\,\frac{1}{2}c$

Para obtener estas fórmulas, de los valores del seno y el coseno de la mitad de un ángulo obtenidas en el teorema anterior, se deduce,

$$sn\ \tfrac{1}{2}A\ csn\ \tfrac{1}{2}B = \frac{sn\,(p-b)}{snc}\sqrt{\frac{snpsn\,(p-c)}{sncsnb}} = \frac{sn\,(p-b)}{snc}\ csn\ \tfrac{1}{2}C$$

$$csn\ \tfrac{1}{2}A\ sn\ \tfrac{1}{2}B = \frac{sn\,(p-a)}{snc}\sqrt{\frac{snpsn\,(p-c)}{snasnb}} = \frac{sn\,(p-a)}{snc}\ csn\ \tfrac{1}{2}C$$

$$csn\ \tfrac{1}{2}A\ csn\ \tfrac{1}{2}B = \frac{snp}{snc}\sqrt{\frac{sn\,(p-a)\,sn\,(p-b)}{snasnb}} = \frac{snp}{snc}\ sn\ \tfrac{1}{2}C$$

$$sn\ \tfrac{1}{2}A\ sn\ \tfrac{1}{2}B = \frac{sn\,(p-c)}{snc}\sqrt{\frac{sn\,(p-a)\,sn\,(p-b)}{snasnb}} = \frac{sn\,(p-c)}{snc}\ sn\ \tfrac{1}{2}C;$$

de donde por suma y resta de las dos primeras y las dos últimas,

$$\frac{sn\ \tfrac{1}{2}Acsn\ \tfrac{1}{2}B \pm csn\ \tfrac{1}{2}A\ sn\ \tfrac{1}{2}B}{csn\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{sn\,(p-b) \pm sn\,(p-a)}{snc}$$

$$\frac{csn\ \tfrac{1}{2}Acsn\ \tfrac{1}{2}B \pm sn\ \tfrac{1}{2}A\ sn\ \tfrac{1}{2}B}{sn\ \tfrac{1}{2}C} = \frac{snp \pm sn\,(p-c)}{snc};$$

por ser $a+b+c=2p$, $sn\,(p-b)+sn\,(p-a)=2sn\ \tfrac{1}{2}c\ csn\ \tfrac{1}{2}(a-b)$, $sn\,(p-b)-sn\,(p-a)=2csn\ \tfrac{1}{2}c\ sn\ \tfrac{1}{2}(a-b)$, $snp+sn\,(p-c)=2sn\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ csn\ \tfrac{1}{2}c$, $snp-sn\,(p-c)=$ $=2csn\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ su\ \tfrac{1}{2}c$, además, $snc=2sn\ \tfrac{1}{2}c csn\ \tfrac{1}{2}c$, luego poniendo estos valores en las dos igualdades anteriores y separando los signos, obtendremos las cuatro fórmulas de DELAMBRE (380 y 381).

413. ANALOGÍAS DE NEPER.—NEPER ha obtenido cuatro fórmulas entre los seis elementos de un triángulo, que como las de DELAMBRE se pueden en algunos casos emplear con ventaja para la resolución de triángulos esféricos; las fórmulas son las siguientes:

1.ª $tg\ \tfrac{1}{2}(A+B) = ctg\ \tfrac{1}{2}C\ csn\ \tfrac{1}{2}(a-b) : csn\ \tfrac{1}{2}(a+b)$
2.ª $tg\ \tfrac{1}{2}(A-B) = ctg\ \tfrac{1}{2}C\ sn\ \tfrac{1}{2}(a-b) : sn\ \tfrac{1}{2}(a+b)$
3.ª $tg\ \tfrac{1}{2}(a+b) = tg\ \tfrac{1}{2}c\ csn\ \tfrac{1}{2}(A-B) : csn\ \tfrac{1}{2}(A+B)$
4.ª $tg\ \tfrac{1}{2}(a-b) = tg\ \tfrac{1}{2}c\ sn\ \tfrac{1}{2}(A-B) : sn\ \tfrac{1}{2}(A+B)$

Estas fórmulas se obtienen; la 1.ª, dividiendo la 1.ª de DELAMBRE por la 3.ª; la 2.ª, dividiendo la 2.ª de DELAMBRE por la 4.ª; la 3.ª, dividiendo la 4.ª de DELAMBRE por la 3.ª; y la 4.ª, dividiendo la 2.ª de DELAMBRE por la 1.ª

ESCOLIO.—Podríamos obtener más fórmulas, pero para los seis casos de resolución de triángulos que vamos á considerar son suficientes las fórmulas obtenidas.

LECCIÓN 60.

Resolución de triángulos oblicuángulos.

414. Los casos de resolución de triángulos esféricos oblicuángulos que vamos á exponer son seis; 1.º dados dos lados y el ángulo comprendido; 2.º dados dos ángulos y el lado adyacente; 3.º dados los tres lados; 4.º dados los tres ángulos; 5.º dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos; y 6.º dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

Los datos en el *primer caso*, son a, b, y C; por tanto tendremos que determinar A, B y c; para determinar A y B, nos valdremos de las dos primeras fórmulas de NEPER, $tg\,\frac{1}{2}\,(A+B) = ctg\,\frac{1}{2}C\; csn\,\frac{1}{2}\,(a-b) : csn\,\frac{1}{2}\,(a+b)$, $tg\,\frac{1}{2}\,(A-B) = ctg\,\frac{1}{2}C\; sn\,\frac{1}{2}\,(a-b) : sn\,\frac{1}{2}\,(a+b)$, tomando logaritmos, $lgtg\,\frac{1}{2}\,(A+B) = lgctg\,\frac{1}{2}C + lgcsn\,\frac{1}{2}\,(a-b) + clgcsn\,\frac{1}{2}\,(a+b)$, $lgtg\,\frac{1}{2}\,(A-B) = lgctg\,\frac{1}{2}C + lgsn\,\frac{1}{2}\,(a-b) + clgsn\,\frac{1}{2}\,(a+b)$, y los antilogaritmos de $lgtg\,\frac{1}{2}\,(A+B)$ y $lgtg\,\frac{1}{2}\,(A-B)$, nos darán el valor de $\frac{1}{2}\,(A+B)$ y $\frac{1}{2}\,(A-B)$; de donde, la suma de estos valores será el valor de A y la diferencia el de B; para determinar c, nos valdremos de la 3.ª fórmula de NEPER, $tg\,\frac{1}{2}\,(a+b) = tg\,\frac{1}{2}\,c\; csn\,\frac{1}{2}\,(A-B) : csn\,\frac{1}{2}\,(A+B)$, de donde, $tg\,\frac{1}{2}c = tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)\; csn\,\frac{1}{2}\,(A+B) : csn\,\frac{1}{2}\,(A-B)$, tomando logaritmos se obtiene, $lgtg\,\frac{1}{2}c = lgtg\,\frac{1}{2}\,(a+b) + lgcsn\,\frac{1}{2}\,(A+B) + clgcsn\,\frac{1}{2}\,(A-B)$, y el antilogaritmo de $lgtg\,\frac{1}{2}c$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}c$ y duplicándolo tendremos el valor de c. Este problema es siempre posible y tiene una sola solución; no olvidando que los datos han de ser menores que 180º.

Los datos en el *segundo caso*, son A, B y c; por tanto tendremos que determinar a, b y C; para determinar a y b, nos valdremos de las fórmulas 3.ª y 4.ª de NEPER, $tg\,\frac{1}{2}(a+b) = tg\,\frac{1}{2}c\ csn\,\frac{1}{2}(A-B) : csn\,\frac{1}{2}(A+B)$, $tg\,\frac{1}{2}(a-b) = tg\,\frac{1}{2}c\ sn\,\frac{1}{2}(A-B) : sn\,\frac{1}{2}(A+B)$, tomando logaritmos, $lgtg\,\frac{1}{2}(a+b) = lgtg\,\frac{1}{2}c + lgcsn\,\frac{1}{2}(A-B) + clgcsn\,\frac{1}{2}(A+B)$, $lgtg\,\frac{1}{2}(a-b) = lgtg\,\frac{1}{2}c + lgsn\,\frac{1}{2}(A-B) + clg\,(A+B)$, y los antilogaritmos de $lgtg\,\frac{1}{2}(a+b)$ y $lgtg\,\frac{1}{2}(a-b)$, nos darán el valor de $\frac{1}{2}(a+b)$ y $\frac{1}{2}(a-b)$, de donde la suma de estos valores será el valor de a y la diferencia el de b; para determinar C, nos valdremos de la 2.ª fórmula de NEPER, $tg\,\frac{1}{2}(A-B) = ctg\,\frac{1}{2}C\,sn\,\frac{1}{2}(a-b) : sn\,\frac{1}{2}(a+b)$, de donde $ctg\,\frac{1}{2}C = tg\,\frac{1}{2}(A-B)\,sn\,\frac{1}{2}(a+b) : sn\,\frac{1}{2}(a-b)$, tomando logaritmos, $lgctg\,\frac{1}{2}C = lgtg\,\frac{1}{2}(A-B) + lgsn\,\frac{1}{2}(a+b) + clgsn\,\frac{1}{2}(a-b)$, y el antilogaritmo de $lgctg\,\frac{1}{2}C$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}C$, y duplicado el valor de C. Este problema como el anterior es siempre posible y tiene una sola solución.

Los datos en el *tercer caso,* son a, b y c; por tanto tendremos que determinar A, B, C; para determinar A, nos valdremos de la fórmula, $tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{sn\,(p-b)\,sn\,(p-c) : snpsn\,(p-a)}$ (411, 3.º), tomando logaritmos, $lgtg\,\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\,[lgsn\,(p-b) + lgsn\,(p-c) + clgsnp + clgsn\,(p-a)]$, y el antilogaritmo de $lgtg\,\frac{1}{2}A$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}A$, y duplicado el valor de A; del mismo modo determinaríamos el valor de B y C, aplicando la fórmula (411, 3.º), á los ángulos B y C. Este problema para que sea posible es preciso, que la suma de los datos sea menor que 360º, y que cada lado sea menor que la suma de los otros dos (283, C.º 2.º y 284); siendo posible tiene una sola solución.

Los datos en el *cuarto caso,* son A, B y C; por tanto tendremos que determinar a, b y c; para determinar a nos valdremos de la fórmula (411, C.º 3.º), $tg\,\frac{1}{2}a = \sqrt{snEsn\,(A-E) : sn\,(B-E)\,sn\,(C-E)}$, tomando logaritmos, $lgtg\,\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\,[lgsnE + lgsn\,(A-E) + clgsn\,(B-E) + clgsn\,(C-E)]$, y el antilogaritmo de $lgtg\,\frac{1}{2}a$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}a$, y duplicando el valor de a; del mismo modo determinaríamos el valor de b y c, aplicando la fórmula (411, C.º 3.º), á los lados b y c. Este problema para que sea posible es preciso, que el exceso esférico esté comprendido entre cero y 360º, y que cada uno de los ángulos sea mayor que la mitad del exceso (283, C.° 1.°); siendo posible, tiene una sola solución.

Los datos en el *quinto caso*, son a, b y A; por tanto tendremos que determinar B, C y c; para determinar B, nos valdremos de la fórmula, $sna : snb = snA : snB$ (407), de donde, $snB = snb\, snA : sna$, tomando logaritmos, $lgsnB = lgsnb + lgsnA + clgsna$, y el antilogaritmo de $lgsnB$, nos dará el valor de B; para determinar C, nos valdremos de la fórmula 1.ª de NEPER, $tg\, \frac{1}{2}(A+B) = ctg\, \frac{1}{2}C\, csn\, \frac{1}{2}(a-b) : csn\, \frac{1}{2}(a+b)$, de donde, $ctg\, \frac{1}{2}C = tg\, \frac{1}{2}(A+B)\, csn\, \frac{1}{2}(a+b) : csn\, \frac{1}{2}(a-b)$, tomando logaritmos, $lgctg\, \frac{1}{2}C = lgtg\, \frac{1}{2}(A+B) + lgcsn\, \frac{1}{2}(a+b) + clg\, csn\, \frac{1}{2}(a-b)$, y el antilogaritmo de $lgctg\, \frac{1}{2}C$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}$ C, y duplicando el valor de C; para determinar el valor de c, nos valdremos de la fórmula tercera de NEPER, $tg\, \frac{1}{2}(a+b) = tg\, \frac{1}{2}c\, csn\, \frac{1}{2}(A-B) : csn\, \frac{1}{2}(A+B)$, de donde, $tg\, \frac{1}{2}c = tg\, \frac{1}{2}(a+b)\, csn\, \frac{1}{2}(A+B) : csn\, \frac{1}{2}(A-B)$, tomando logaritmos, $lgtg\, \frac{1}{2}c = lgtg\, \frac{1}{2}(a+b) + lgcsn\, \frac{1}{2}(A+B) + clgcsn\, \frac{1}{2}(A-B)$, y el antilogaritmo de $lgtg\, \frac{1}{2}c$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}c$, y duplicando el valor de c.

DISCUSIÓN.—Una vez que en este problema el ángulo en B está determinado por su seno y puede tener dos valores lo mismo que el C y el c, que de él dependen; nos conviene saber en qué caso tendrá el problema dos soluciones una ó ninguna; para ello es evidente que $snB = snbsnA : sna$, tiene que ser menor que uno, pues si fuese mayor el problema no tendría ninguna solución; ahora bien, siendo $snB < 1$, puede suceder; 1.° que $A < 90°$, y $a < b$, $a = b$, $a > b$; 2.° que $A = 90°$, y $a < b$, $a = b$, $a > b$; y 3.° que $A > 90°$, y $a < b$, $a = b$, $a > b$: 1.° Si $a < b$, $B > A$ (285, 2.ª), y de los dos valores de B se toma el mayor que A, teniendo el problema una solución cuando no hay más que un valor de B mayor que A, pero si lo son los dos el problema tendrá dos soluciones; si $a = b$, $B = A$, (285, 1.°), el problema tiene una sola solución; si $a > b$, $B < A$, el problema tendrá una sola solución: el segundo y el tercer caso se discutirán como el primero; viéndose en todos ellos, que el problema, cuando es posible, tiene una ó dos soluciones. Los valores de C y c no admiten duda; pues en el caso de dos soluciones, los dos valores de C y c son menores que 180°; y en el caso de una solución, uno de los valores de C y c es mayor y el otro menor que 180°.

Los datos en el *sexto caso,* son A, B y a; por tanto tendremos que determinar b, c y C; para determinar b, nos valdremos de la fórmula, $sna : snb = snA : snB$, de donde, $snb = snB sna : : snA$, tomando logaritmos, $lgsnb = lgsnB + lgsna + clgsnA$, y el antilogaritmo de $lgsnb$, nos dará el valor de b; para determinar c nos valdremos de la fórmula 3.ª de NEPER, $tg\ \frac{1}{2}\ (a+b) = ctg\ \frac{1}{2}\ c\ csn\ \frac{1}{2}\ (A - B) : csn\ \frac{1}{2}\ (A+B)$, de donde, $tg\ \frac{1}{2}\ c = tg\ \frac{1}{2}\ (a+b)\ csn\ \frac{1}{2}\ (A+B) : csn\ \frac{1}{2}\ (A-B)$, tomando logaritmos, $lgtg\ \frac{1}{2}\ c = lgtg\ \frac{1}{2}\ (a+b) + lgcsn\ \frac{1}{2}\ (A+B) + clgcsn\ \frac{1}{2}\ (A-B)$ y el antilogaritmo de $lgtg\ \frac{1}{2}\ c$, nos dará el valor de c, y duplicando el valor de c; para determinar C, nos valdremos de la fórmula 1.ª de NEPER, $tg\ \frac{1}{2}\ (A+B) = ctg\ \frac{1}{2}\ C sn\ \frac{1}{2}\ (a-b) : csn\ \frac{1}{2}\ (a+b)$, de donde, $ctg\ \frac{1}{2}\ C = tg\ \frac{1}{2}\ (A+B)\ csn\ \frac{1}{2}\ (a+b) : csn\ \frac{1}{2}\ (a-b)$, tomando logaritmos, $lgctg\ \frac{1}{2}\ C = lgtg\ \frac{1}{2}\ (A+B) + lgcsn\ \frac{1}{2}\ (a+b) + clgcsn\ \frac{1}{2}\ (a-b)$, y el antilogaritmo de $lgctg\ \frac{1}{2}\ C$, nos dará el valor de $\frac{1}{2}\ C$, y duplicando el valor de C. Este problema se discute como el anterior, teniendo por consecuencia dos soluciones, una ó ninguna según los casos.

ESCOLIO.—Teniendo en cuenta lo expuesto (397, E.°), hemos obtenido las incógnitas por las fórmulas más sencillas, aunque no siempre en función de los datos, como nos ha sucedido en los casos 1.°, 2.°, 5.° y 6.°; pudiéramos haberlas obtenido directamente, pero no estando las fórmulas bien dispuestas para el cálculo logarítmico, la aplicación del procedimiento expuesto (382, 2.°), las transformaría en otras bien dispuestas para el cálculo logarítmico, si bien introduciendo una nueva incógnita que teníamos previamente que determinar; por lo cual allí como aquí, se deben como hemos hecho emplear las fórmulas más sencillas, sirviendo en todo caso de comprobación las demás.

Hay muchos más casos de resolución de triángulos esféricos que los expuestos; algunos de ellos los trataremos en las aplicaciones, otros son propios y exclusivos de los tratados de Geodesia, por lo cual no nos ocuparemos de ellos.

Datos para la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo.

$A = 121^{\circ} \cdot\cdot 36' \cdot\cdot 19''' 84$, $B = 42^{\circ} \cdot\cdot 15' \cdot\cdot 13''' 46$,
$C = 34^{\circ} \cdot\cdot 15' \cdot\cdot 2''' 78$, $a = 76^{\circ} \cdot\cdot 35' \cdot\cdot 36''$
$b = 50^{\circ} \cdot\cdot 10' \cdot\cdot 30''$, $c = 40^{\circ} \cdot\cdot 0' \cdot\cdot 10''$

Aplicaciones.

LIBRO PRIMERO.

1.° Determinar sobre una circunferencia dada un arco que tenga, 1.° por seno $\frac{5}{6}$; 2.° por coseno $\frac{3}{5}$; 3.° por tangente $\frac{10}{7}$; 4.° por cotangente $\frac{7}{10}$; 5.° por secante $\frac{5}{3}$; y 6.° por cosecante $\frac{6}{5}$. Resolveremos este problema, figura 227, trazando los diámetros horizontal y vertical y tomando, 1.° $\frac{5}{6}$ de OB encima del diámetro horizontal, tal como OF, y por F trazando una paralela á ese diámetro tal como CC', los arcos AC y AC' son los pedidos; 2.° $\frac{3}{5}$ de OA á la derecha del diámetro vertical, tal como OD, y por D trazando una paralela á ese diámetro tal como CC''', los arcos AC y AC''' son los pedidos; 3.° sobre la tangente trazada en A y encima del diámetro horizontal $\frac{10}{7}$

del radio, tal como AE, y uniendo E con el centro, los arcos AC y AC″, son los pedidos; 4.° sobre la tangente trazada en B y á la derecha del diámetro vertical $\frac{7}{10}$ del radio, tal como BG, y uniendo G con el centro, los arcos AC y AC″, son los pedidos; 5.° $\frac{5}{3}$ del radio, se traza un arco haciendo centro en él de la circunferencia con ese radio que cortará á la tangente trazada en A en los puntos E y E′, uniendo el punto E, que está encima del diámetro horizontal, con el centro, los arcos AC y AC″, son los pedidos; y 6.° $\frac{6}{5}$ del radio, se traza un arco haciendo centro en él de la circunfereneia con ese radio que cortará á la tangente trazada en B en los puntos G y G′, uniendo el punto G, que está á la derecha del diámetro vertical, con el centro, los arcos AC y AC″ son los pedidos.

Escolio.—Si se nos diesen valores negativos en vez de positivos, se resolvería el problema del mismo modo, sin más que tomar las partes del radio á partir del centro debajo del diámetro horizontal, para las líneas, y á la izquierda del diámetro vertical, para las colíneas.

2.° Hallar el seno de 60°, 36°, 22°'5, y 15°. Resolveremos este problema teniendo en cuenta la lección 20, y el valor del seno de un arco, en la forma siguiente; 1.° $sn 60° = \frac{1}{2} l_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0'8660$; 2.° $sn\ 36° = \frac{1}{2} l_5 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0'5878$; 3.° $sn 22°'5 = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0'3826$; y 4.° $sn\ 15° = \frac{1}{2} l_{12} = \frac{1}{4} (\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 0'2588$: con menos error que una diezmilésima.

3.° Determinar con error de una diezmilésima las demás líneas y colíneas trigonométricas principales, sabiendo que el valor de la tangente de un arco es $-0'8540$. Resolveremos este problema teniendo en cuenta, que por ser la tangente negativa el arco tendrá su extremo en el segundo ó en el cuarto cuadrante, y por consiguiente aplicando las fórmulas del problema 2.° de la lección 45, se obtendrán para magnitudes de las líneas y colíneas pedidas las siguientes $csn = 0'7604$, $sn = 0'6495$, $ctg = 1'1707$, $sc = 1'3152$, y $csc = 1'5399$; conocida la magnitud la posición es la correspondiente al 2.º ó al 4.º cuadrante.

4.º Dado un arco de 1236°, determinar sus líneas y colíneas trigonométricas principales por las de un arco menor que 45°. Resolveremos este problema teniendo en cuenta que, $1236^\circ = 360^\circ \times 3 + 156^\circ$, y $156^\circ = 180^\circ - 24^\circ$; por tanto la magnitud de las líneas y colíneas pedidas es la misma que las de las líneas del arco de 24°, y respecto de la posición como el arco de 1236° tiene su extremo en el segundo cuadrante, será la de las líneas y colíneas de ese cuadrante. Si el arco fuese negativo entonces se restaría de $360^\circ \times 4$, lo que nos daría $204^\circ = 180^\circ + 24^\circ$; la magnitud sería la misma pero la posición sería la correspondiente á las líneas y colíneas del tercer cuadrante.

5.º Sabiendo que el duplo del seno de un arco más el triplo del coseno del mismo arco valen tres, encontrar los valores del arco menores que 90°. Llamando x al arco tendremos, $2snx + 3csnx = 3$, de donde, $3csnx = 3 - 2snx$, elevando al cuadrado $9csn^2x = 9 - 12snx + 4sn^2x$, poniendo en vez de csn^2x su igual $1 - sn^2x$, $9 - 9sn^2x = 9 - 12snx + 4sn^2x$, haciendo la trasposición y reducción, $13sn^2x - 12snx = 0$, sacando snx factor común, $snx\,(13snx - 12) = 0$, y de aquí se deduce, $snx = 0$, $snx = \frac{12}{13} = 0'9230$; luego, $lgsnx = lg0'9230 = \bar{1}'9652 = lgsn\,(67^\circ\text{ - }22')$. En este problema pudimos despejar $csnx$, y después de determinado el arco podemos encontrar los valores de sus líneas y colíneas trigonométricas, conocidos los valores del seno ó el coseno.

6.º Determinar el seno de la suma de los arcos, sabiendo que el seno del uno es $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ el del otro. Llamaremos á los arcos x é y, y determinaremos los cosenos de esos arcos que serán; $csnx = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, $csny = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; luego, $sn\,(x + y) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{25}{25} = 1$. Del mismo modo determinaríamos el seno de la diferencia, el coseno de la suma y diferencia, la tangente de la suma y diferencia, la cotangente de la suma y diferencia, la secante y cosecante de la suma y diferencia de dos arcos; conociendo una de sus líneas ó colíneas trigonométricas, pues nos bastará determinar las líneas trigonométricas que entren en la fórmula que hayamos de aplicar de la lección 47.

7.° Hallar los valores correspondientes de las líneas y colíneas trigonométricas del arco de 51°. Resolveremos este problema, teniendo en cuenta el problema segundo, y las fórmulas del seno de la suma de dos arcos, en la forma siguiente; $sn 51^{\circ} = sn(36^{\circ} + 15^{\circ}) = sn\, 36^{\circ}\, csn\, 15^{\circ} + csn\, 36^{\circ}\, sn\, 15^{\circ} = 0'7771$; $csn\, 51^{\circ} = 0'6293$; $tg\, 51^{\circ} = 1'2349$; $ctg\, 51^{\circ} = 0'8099$; $sc\, 51^{\circ} = 1'5888$; y $csc\, 51^{\circ} = 1'2867$. Del mismo modo pudimos haber aplicado, las fórmulas, del coseno de la suma de dos arcos, así como las fórmulas de la tangente, cotangente, secante y cosecante de la suma de dos arcos.

8.° Hallar el seno del duplo de un arco, sabiendo que el seno de este arco es 0'4. Resolveremos este problema teniendo en cuenta la fórmula 1.ª (380), $sn2a = 2sna\ csna = 2sna \sqrt{1 - sn^2 a}$, de donde sustituyendo $sn2a = 2 \times 0'4 \times 0'916 = 0'7328$. Del mismo modo hallaríamos el coseno del duplo de un arco conocido su coseno, asi como la tangente, contangente, secante y cosecante del duplo de un arco conocidas la tangente, cotangente, secante y cosecante de ese arco, sin más que aplicar las fórmulas 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª y 6.ª del número 380.

9.° Determinar la cosecante del duplo de un arco, sabiendo que la cotangente de ese arco es $\frac{4}{3}$. Resolveremos este problema teniendo en cuenta que la tangente de ese arco es $\frac{3}{4}$, y entonces el seno será, $\frac{3}{4} : \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{3}{5}$, y el coseno será, $1 : \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{4}{5}$, y según el problema anterior el seno del duplo del arco será, $\frac{24}{25}$; luego la cosecante del duplo del arco será $\frac{25}{24}$.

10. Hallar el seno del triplo de un arco, sabiendo que el seno de este arco es 0'4. Resolveremos este problema, poniendo en la fórmula, $sn(a+b) = snacsnb + csnasnb$, $2a$ en lugar de b, con lo cual se obtiene, $sn3a = snacsn2a + csnasn2a$, y poniendo en lugar de $csn2a$ y $sn2a$ sus valores (380, 2.ª y 1.ª), $sn3a = sna(csn^2a - sn^2a) + 2snacsn^2a$, de donde, $sn3a = sna(1 - sn^2a) - sn^3a + 2sna(1 - sn^2a) = 3sna - 4sn^3a$, y sustituyendo por seno de a su valor 0'4, tendremos $sn3a = 3 \times 0'4 - 4 \times 0'4^3 = 0'944$.

11. Determinar el seno de la mitad de un arco, sabiendo que el seno de un arco es 0'8. Resolveremos este problema teniendo eu cuenta (380, C.° 1.°); determinando primero el coseno del arco que será, $\sqrt{1 - 0'8^2} = 0'6$, por tanto el seno de la mitad del arco será, $\sqrt{\frac{1 - 0'6}{2}} = \sqrt{0'2} = 0'44$. Del mismo modo determinaríamos el coseno de la mitad de un arco conocido el coseno, así como la tangente, cotangente, secante y cosecante de la mitad de un arco, conociendo la tangente, cotangente, secante y cosecante de este arco, sin más que aplicar las fórmulas 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª y 6.ª de (380, C.°).

12. Hallar la tangente de 27° sabiendo que el $csn\ 54° = 0'5876$. Resolveremos este problema aplicando la fórmula 3.ª (380, C.°), que nos dá, $tg\ 27° = \sqrt{\frac{1 - csn\ 54°}{1 + csn\ 54°}} =$

$$= \frac{\sqrt{1 - 0'5876}}{\sqrt{1 + 0'5876}} = \sqrt{0'2597} = 0'509.$$

LIBRO II.

13. Hallar la distancia entre dos puntos visibles, siendo accesible sólo uno de ellos.

Sea CB, figura 229, la distancia que deseamos determinar, siendo C accesible; tracemos y midamos la recta, CA, que por ser accesible toda ella y servirnos de punto de partida se llama *base*, hecho esto determinemos los ángulos que con CA forman las visuales CB y AB de los extremos de la recta CA al punto inaccesible B, entónces conoceremos en el triángulo CAB un lado y dos ángulos, que resolviendo el triángulo nos dará el valor del lado CB que nos proponíamos hallar. En el caso de que por las circunstancias del terreno nos fuese posible elegir una base tal como la AD perpendicular á la visual DB, el triángulo ADB que tendríamos que resolver para conocer la distancia AB, sería rectángulo, siendo por lo tanto el problema más sencillo.

ESCOLIO.—Debemos de observar como ya digimos (123, E.° 1.°), que los instrumentos necesarios para la determinación de rectas y de ángulos en el terreno, no los describimos por ser preferible á toda descripción y dibujo, el presentar á la vista de los alumnos los instrumentos y enseñarles á operar con ellos. Por otra parte los trabajos de medición son siempre en Geometría de dos clases; unos de *campo*, que nos suministran los datos necesarios para resolver el problema ó problemas que nos propongamos; y otros de *gabinete*, que se reducen á efectuar los cálculos que se necesiten para la resolución del problema.

14. Hallar la distancia entre dos puntos visibles, pero inaccesibles.

Sea CD, figura 52, la distancia que deseemos determinar; tracemos y midamos la base AB, y los ángulos ABC, y BAC; obtendremos así, un lado y dos ángulos del triángulo ABC, que resuelto nos dará el lado BC; midamos después los ángulos DBA y DAB, que nos dará del igual modo el lado BD del triángulo ABD; y midamos por último el ángulo CBD, conoceremos dos lados y el ángulo comprendido del triángulo BCD, que resuelto nos dará la distancia CD pedida.

ESCOLIO. Es preciso observar que en ocasiones no podemos medir una base desde cuyas extremidades sean visibles los dos puntos inaccesibles: en tal caso se elige un punto desde el cual se vean los dos inaccesibles y se miden dos bases que partan de ese punto.

15. Determinar una altura de pié accesible, en terreno horizontal.

Sea FK, figura 35, la altura que nos proponemos determinar; tracemos y midamos la base EF, y el ángulo FEK, obtendremos así, un cateto y un ángulo agudo del triángulo rectángulo EFK, que resuelto nos dará el lado FK. En el caso de que el ángulo FEK tuviese 45° se tendría FK = EF.

16. Determinar una altura de pié accesible, en terreno no horizontal.

Sea GK, figura 35, la altura que nos proponemos determinar; tracemos y midamos la base EG, y el ángulo DEK que la vertical DE forma con la visual EK, y el ángulo DEG, obtendremos asi, el ángulo KEG, diferencia entre los ángulos DEG y DEK, el ángulo GKE = DEK por alternos entre paralelas, y el lado EG del triángulo EGK, que resuelto nos dará GK.

17. Determinar una altura de pié visible, pero inaccesible.

Sea CA, figura 138, la altura que nos proponemos determinar; tracemos y midamos la base DB, y los ángulos ABD y ADB, obtendremos así, un lado y dos ángulos del triángulo ABD, que resuelto nos dará los lados BA y DA; midamos después los ángulos DBC y CDB, que nos dará de igual modo los lados BC y DC; midamos por último el ángulo CBA, conoceremos dos lados y el ángulo comprendido del triángulo ABC, que resuelto nos dará CA.

18. Determinar una altura de pié invisible.

Sea CH, figura 97, la altura que nos proponemos determinar; tracemos y midamos la base DE, y los ángulos HDE y HED, obtendremos así, un lado y dos ángulos del triángulo DEH, que resuelto nos dará el lado EH; y midiendo después el ángulo FEH = EHC por alternos entre paralelas, conoceremos en el triángulo rectángulo EHC, la hipotenusa EH y el ángulo agudo EHC, que resuelto nos dará CH.

19. Determinar el área de un triángulo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

Sea el triángulo ABC, figura 229, su área sabemos que es; $S_3 = \frac{1}{2}$ BD $\times$ AC, y como en el triángulo rectángulo ABD BD $=$ ABsnA, se tiene sustituyendo, $S_3 = \frac{1}{2}$ AC $\times$ ABsnA $=$ $= \frac{1}{2}$ $bcsn$A, esta fórmula nos dice: *que el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.*

COROLARIO.—El área de un paralelógramo, es igual al producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.

20. Determinar el área de un triángulo, conociendo un lado y los ángulos adyacentes. Resolveremos este problema sustituyendo en la fórmula del problema anterior, en lugar de b, su igual csnB : snC, lo que nos dará, $S_3 = c^2\, sn\text{A}\, sn\text{B} : 2sn\text{C}$ esta fórmula nos dice: *que el área de un triángulo, es igual al cuadrado de un lado por el producto de los senos de los ángulos adyacentes y partido por el duplo del seno del ángulo opuesto.*

21. Determinar el área de un triángulo, conociendo los tres lados.

Resolveremos este problema sustituyendo en la fórmula del problema 19, en lugar de snA sn igual $2sn$ $\frac{1}{2}$ A csn $\frac{1}{2}$ A, lo que nos dara, $S_3 = bcsn$ $\frac{1}{2}$ A csn $\frac{1}{2}$ A, y poniendo en vez de seno y coseno de $\frac{1}{2}$ A sus valores, se tiene

$S_3 = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$, esta fórmula nos dice: *que el área de un triángulo, es igual á la raiz cuadrada del semiperímetro multiplicado por las diferencias entre el semiperímetro y cada lado.*

22. Determinar el área de un cuadrilátero, conociendo sus diagonales y el ángulo que forman.

Sea el cuadrilátero ACBD, figura 132, determinaremos su área hallando las áreas de los cuatro triángulos AOC, COB, BOD y DOA, en que queda descompuesto por las diagonales, que son; $\frac{1}{2}$ OA $\times$ OC snO, $\frac{1}{2}$ OC $\times$ OB snO, $\frac{1}{2}$ OB $\times$ OD snO, y $\frac{1}{2}$ OD $\times$ OA snO sumando estas áreas tendremos para área del cuadrilátero, $S_4 = \frac{1}{2}$ AB $\times$ CD snO, esta fórmula nos dice; *que el área de un cuadrilátero, es igual á la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.*

COROLARIOS. 1.º El área de un rombo es igual á la mitad del producto de las diagonales. 2.º El área de un cuadrado es igual á la mitad del cuadrado de su diagonal.

23. Determinar el área de un polígono regular, conocida su apotema y el número de sus lados.

Sea ABCDEF, figura 71, un polígono regular cualquiera; trazando los radios del polígono queda este descompuesto en tantos triángulos iguales al AOB como lados tiene, de modo que suponiendo sea n el número de lados del polígono propuesto se tiene; $S_n = n \times AOB = n \times \frac{1}{2} AB \times OG = n \times AG \times OG$, y poniendo en lugar de AG su igual $OG \times tg\, AOG = OG \times tg\, \frac{1}{2} AOB = a tg \frac{180^\circ}{n}$, llamando a la apotema OG, se tiene; $S_n = na^2\, tg \frac{180^\circ}{n}$ esta fórmula nos dice: *que el área de un polígono regular, es igual al producto del número que expresa los lados que tiene por el cuadrado de su apotema y de la tangente de la mitad de su ángulo central.*

ESCOLIO.—Teniendo en cuenta la fórmula obtenida, se pueden obtener con facilidad otras que nos den el área de un polígono regular, en función de su radio y el número de sus lados; y en función de su lado y el número de ellos.

LIBRO III.

24. Determinar la distancia geográfica entre dos puntos de la superficie terrestre, conocidas sus longitudes y latitudes.

Sean A y B, figura 232, los dos puntos de la Tierra cuya distancia nos proponemos determinar, C, el polo del hemisferio en que se hallen los dos puntos, FD el ecuador terrestre, y CE y CF los meridianos de los puntos dados; entonces, el arco AF será la latitud del punto A, el BE la latitud del punto B, el EF será la suma ó diferencia de sus longitudes, según que los dos se encuentren á distinto ó al mismo lado del primer meridiano, y el arco AB de circunferencia máxima será la distancia entre los puntos dados A y B, y como en el triángulo esférico ABC conocemos dos lados y el ángulo comprendido, podemos determinar el lado AB que será la distancia pedida, teniendo en cuenta que el cuadrante tiene 10.000 km.

25. Determinar el área de un triángulo esférico, conociendo sus lados.

Resolveremos este problema, sustituyendo en la 1.ª y 3.ª de las fórmulas de DELAMBRE, en vez de $\frac{1}{2}(A+B)$ su valor $90.^{\circ}-$ $-\left(\frac{1}{2}C-E\right)$, deducido de la expresión $2E=A+B+C-180^{\circ}$, obteniendo así; $csn\left(\frac{1}{2}C-E\right):csn\frac{1}{2}C=csn\frac{1}{2}(a-b):$ $:csn\frac{1}{2}c$, $sn\left(\frac{1}{2}C-E\right):sn\frac{1}{2}C=csn\frac{1}{2}(a+b):csn\frac{1}{2}$ c; de la primera igualdad se deduce (243, 1.er Curso), la siguiente, $\left[csn\left(\frac{1}{2}C-E\right)-csn\frac{1}{2}C\right]:\left[csn\left(\frac{1}{2}C-E\right)+csn\frac{1}{2}\right.$ $\left.C\right)=\left[csn\frac{1}{2}(a-b)-csn\frac{1}{2}c\right]:\left[csn\frac{1}{2}(a-b)+csn\frac{1}{2}c\right]$; que transformando las sumas y diferencias en productos nos dá; $tg\frac{1}{2}E\,tg\frac{1}{2}(C-E)=tg\frac{1}{2}(p-a)\,tg\frac{1}{2}(p-b)$. La segunda igualdad, siguiendo un procedimiento análogo nos dá; $tg\frac{1}{2}E:tg\frac{1}{2}(C-E)=tg\frac{1}{2}p\,tg\frac{1}{2}(p-c)$; y multiplicando esta igualdad por la anterior miembro á miembro, obtendremos por último;

$$tg\frac{1}{2}E=\sqrt{tg\frac{1}{2}p\,tg\frac{1}{2}(p-a)\,tg\frac{1}{2}(p-b)\,tg\frac{1}{2}(p-c)},$$

expresión sencilla y cómoda para calcular E, y por tanto para determinar el área de un triángulo esférico en función de sus lados.

ESCOLIO GENERAL.—No nos extendemos en las aplicaciones numerosísimas del aspecto general de la Geometría, porque hay obras especiales que de ellas tratan, y además la rama de las Matemáticas que se llama Topografía no es más que una aplicación de la Geometría: por tanto, los que deseen conocer más aplicaciones de la Geometría, pueden consultar los libros de problemas de esta ciencia, así como los tratados de Topografía en los que se describen los instrumentos y la manera de emplearlos para el levantamiento de planos de corta extensión.

FIN.

MALLO

MATEMATICAS

SEGUNDO

CURSO