CURSO
MATEMÁTICO.

TOMO IV.

CURSO MATEMÁTICO

PARA LA ENSEÑANZA

DE LOS CABALLEROS CADETES

DEL REAL COLEGIO MILITAR

DE ARTILLERÍA.

Por DON PEDRO GIANNINI, *Comisario de Guerra de los Reales Exércitos, Profesor primero de dicho Colegio, Socio de la Academia del Instituto de Bolonia, de la Real Academia de Ciencias de Lisboa, &c.*

TOMO IV.

VALLADOLID. M.DCCCIII.

EN LA IMPRENTA DEL REAL ACUERDO Y CHANCILLERÍA POR ARÁMBURU Y ROLDÁN.

Con superior permiso.

PRÓLOGO.

El método de las Acciones que he promovido á las teorías hidráulicas en el primero de mis Opúsculos Matemáticos impresos en 1773 en Parma, extendí igualmente á las teorías de las ciencias de Estática y de Hidrostática, que en los respectivos libros primero y segundo del presente quarto tomo de mi Curso se enseñan, dándose en el libro tercero del mismo tomo las que corresponden á la ciencia de la Dinámica. Por tanto el Libro primero trata del centro de gravedad de las magnitudes, pasando de las magnitudes infinitésimas á las finitas, y haciendo ver el equilibrio del mismo centro si se sustenta con la correspondiente potencia; sucesivamente se exâmina la teoría de la Composicion y Descomposicion de las Potencias para determinar sus respectivas potencias equilibrantes, y de consiguiente las resultantes ó equivalentes á las potencias dadas, cuyas direcciones exísten en un mismo ó en distintos planos; despues se enseñan las reglas para determinar el equilibrio así en las Máquinas simples como en las compuestas, señalando de estas las que tienen el mayor uso en la práctica; y últimamente se dan los métodos para calcular en las principales el rozamiento que padecen, y el embarramiento de las cuerdas. En el segundo libro se exâminan las teorías del equilibrio de los fluidos contenidos en los vasos y tubos comunicantes de qualquiera figura, señalando al propio tiempo las reglas de la presion de los mismos fluidos así sobre los fondos de sus vasos, como tambien sobre sus superficies laterales; despues se dan las teorías del equilibrio de los fluidos y de los sólidos sumergidos en ellos, y el método para hallar las gravedades específicas de unos y otros con los usos principales que tienen estas determinaciones; sucesivamente se trata de las principales propiedades del ayre deducidas de la experiencia, con la descripcion y uso de los principales instrumentos y máquinas que son necesarias al propio intento, enseñando al mismo tiempo los métodos para determinar la gravedad específica del ayre, y su presion sobre las superficies, con sus usos correspondientes; y finalmente se establecen las potencias que son necesarias para sostener el agua en equilibrio en las Bombas atraente, impelente y compuesta, con la descripcion de estas máquinas y el modo de elevar el agua por medio de ellas, á lo que se añade la descripcion de la Bomba á fuego y de la Máquina de compresion con sus respectivos usos. En el libro tercero se trata del movimiento de los cuerpos, uniforme, acelerado y retardado, y del movimiento compuesto y rectilineo, consultando sucesivamente la experiencia para ver si las teorías de aquellos movimientos, que ciertas suposiciones establecen, son uniformes á la misma experiencia; sucesivamente se exâmina el movimiento rectilineo de los cuerpos, á quienes están aplicadas potencias constantes, aplicando la teoría que resulta al movimiento de los cuerpos sobre planos inclinados; despues se dá la teoría general del movimiento de los cuerpos, á quienes están aplicadas potencias variables, y se reducen á las medidas precisas las fórmulas que resultan de dicha teoría; á continuacion se expone el movimiento de los cuerpos, entre los quales media la potencia de los elastros ó muelles; se pasa consiguientemente á establecer las teorías del movimiento de los cuerpos que se chocan, como tambien las de los Péndulos simples ó compuestos, donde se señalan las leyes del movimiento de los cuerpos en las curvas mas celebradas; posteriormente se trata del movimiento libre curvilineo de los cuerpos, aplicando las fórmulas generales correspondientes á los muchos casos que puedan proponerse, al movimiento de los cuerpos no solo en las Secciones cónicas, donde se exâmina el caso del movimiento de los proyectiles arrojados por los morteros, sino tambien en distintas otras curvas, para que el uso de dichas fórmulas pueda mas bien comprehenderse; y finalmente se exâmina el movimiento de los cuerpos en un medio resistente: me reservo de dar en Disertacion á parte lo que corresponde al movimiento de los Proyectiles en medio resistente, por la extension que conviene á este asunto, y que no permite el presente volúmen. Por lo demas debo advertir que en la composicion de esta Obra me he valido de las Mecánicas de los Autores citados ya en mis tomos anteriores.

ERRATAS.

Pág.	*Lin.*	*Errata.*	*Correccion.*
42.	17.	(56)	(56, 63)
48.	3.	*CM*	Sc. *u*
62.. 64.	19.. 1.	(58)	(58, 63)
68.	7.	(III. 233)	(III. 234)
144.	1.	*R*	*P*
145.	22.	del número	del duplo número
146.	4, 8, 12, 25.	del número	del duplo número
147.	15, 19.	del número	del duplo número
151.	3.	en *I*,	en *T*,
241.	3 .. 13.	$4\frac{20}{31}$ ... (271)	$5\frac{1}{3}$ ... (232)
315.	18.	3 .. 5 .. 6	4 .. 6 .. 7
319.	9.	acelerado	retardado
334.	9.	$= s$	$= S$
346.	9.	*AM*	*AN*
358.	8.	(450)	(452)
359.	22.	cuerpo *D*.	cuerpo *B*.
375.	24.	y *u*	y *v*
388.	3.	(63, 54)	(50, 63)
390.	4.	*HpH*	*Hph*
391.	2.	(63, 54)	(50, 63)
406.	2, 3.	luego..Que es &c.	Que es &c.
408.	2.	se	será
414.	2.	$A +$	$A -$
421.	12, 13.	$\frac{2aP^2L}{b^2} - a^2$	$-\frac{2aP^2L}{b^2} + a^2$
424.	10.	Prop. LII.	Prop. LV.
439.	17.	$\surd(b^2 + c^2 - y^2$	$\surd(b^2 + c^2 - y^2)$
469.	6.	*FZ*	*VZ*
475.	10.	*AB*;	*AB* con la subtangente $2m{:}n$;
477.	15.	en el exe	en la tangente
478.	13.	454.	554.
485.	7.	$\times FCH$. Por	$\times FCH : \frac{1}{2} CF$. Por
486.	14.	$n^2 < 1$. Por	$n^2 < 1$ ó $n^2 > 1$. Por
487.	6. .21.	(*Fig.* 270). . $dt =$	(*Fig.* 268) . . . $dt = -$
488.	1. .8.	ndz . . $L.z$	$-ndz$. . $-L.z$
Id.	5 . . 6.	$L.na$, . $- L.na$	$-L.na$. . $L.na$

**

ADICIONES.

Pág. 34. *Lin.* 23. gravedad. *Añádase* „Por tanto las propiedades demostradas en la Proposicion I y sus Corolarios respecto al centro de gravedad de magnitudes infinitésimas se extienden igualmente al centro de gravedad de magnitudes finitas, con tal que estas se consideren reunidas en sus respectivos centros de gravedad.“

Pág. 359. *Lin.* 9, 10. estado. *Añádase* „Discúrrase del mismo modo en los demas casos de dos (454) ó de tres cuerpos (455) relativamente al equilibrio de ellos.

LIBRO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES.

1. Masa de un cuerpo es la suma de las partes materiales que componen el mismo cuerpo.

2. Volumen de un cuerpo es la extension que tiene en longitud, latitud y profundidad.

ESCOLIO.

3. Consta de las observaciones y experiencias que las partes materiales que componen los cuerpos no se tocan en todos sus puntos, de modo que hay entre ellas unos huecos ó poros; y el número de estos y su extension son mayores ó menores segun la naturaleza de los cuerpos.

4. Por Sistema de dos ó mas cuerpos se entiende el conjunto de los mismos cuerpos, y que además tienen enlace entre ellos.

5. Se dice que dos cuerpos son igualmente densos, ó bien que tienen una misma densidad, quando tomados en iguales volúmenes, contienen masas iguales; pero si la masa del uno es menor que la del otro, se dice que éste es mas denso que aquel.

6. Lugar absoluto de un cuerpo es el espacio ocupado por el mismo cuerpo en el que contiene todo el Universo. Lugar relativo es el espacio ocupado por un cuerpo respecto á un espacio determinado, y es lo que se llama tambien Situacion del cuerpo.

7. Quietud absoluta es la permanencia de un cuerpo en el mismo lugar absoluto, ó en la misma parte del espacio en el que está todo el Universo. Quietud relativa es la permanencia de un cuerpo en el mismo lugar relativo, ó en la misma parte de un espacio determinado.

8. Movimiento absoluto de un cuerpo es la translacion sucesiva del mismo cuerpo de un lugar absoluto á otro, ó la aplicacion sucesiva de un cuerpo á las diferentes partes del espacio en que está todo el Universo. Movimiento relativo es la translacion sucesiva de un cuerpo de un lugar relativo á otro, ó la aplicacion sucesiva de un cuerpo á las diferentes partes de un espacio determinado.

ESCOLIO.

9. En lo sucesivo, si no se expresase lo contrario, se entenderá siempre de la quietud absoluta, y del movimiento absoluto.

10. Un cuerpo no puede por sí mismo mudar

el estado de quietud en el de movimiento, ó bien el estado de movimiento en el de quietud, sin una causa que produzca semejante mutacion.

11. Potencia ó Fuerza se llama aquella causa ó cantidad, que es capaz de mudar el estado de un cuerpo de la quietud al movimiento, ó del movimiento á la quietud: tales son; la fuerza de los hombres y de los animales; la Gravedad, esto es, la fuerza que hace descender los cuerpos á la superficie de la tierra, no habiendo obstáculo que lo impida; la resistencia que oponen los cuerpos para moverlos de una parte á otra; la fuerza de Adhesion, esto es, la fuerza con la que están unidas entre sí las partes materiales que componen un cuerpo; la fuerza de Presion, esto es, la fuerza con la que un cuerpo comprime á otro, sobre el qual insiste; &c.

ESCOLIO.

12. Segun las observaciones y experiencias la fuerza de la gravedad sobre los cuerpos terrestres se aumenta ó disminuye á menores ó mayores distancias del centro de la tierra, y dicha fuerza se conserva la misma á iguales distancias de dicho centro. Por tanto los pesos de unos mismos cuerpos, como efectos de dicha fuerza, se aumentan,

ó disminuyen, ó quedan los mismos, á menores, ó mayores, ó iguales distancias del centro de la tierra; por cuya razon conviene distinguir en general la masa de un cuerpo de la gravedad que le aníma, ó del peso que tiene: pues que teniendo un cuerpo terrestre la misma masa, su gravedad y de resultas el peso varian á distintas distancias del referido centro. Pero respecto á que las partes materiales que componen un cuerpo, ó un sistema de algunos cuerpos, como son los de que se trata en este Libro y en el siguiente, se pueden considerar igualmente distantes del centro de la tierra en atencion á la grande extension de su radio, la fuerza de la gravedad que aníma á dichas partes ó sistema se podrá igualmente considerar constante y proporcional con las masas de los mismos cuerpos, ó bien los pesos de los cuerpos proporcionales con sus masas.

13. Direccion de una potencia ó fuerza es la linea recta, segun la qual actua la misma potencia sobre el cuerpo.

14. La direccion de una potencia se dice Vertical, si es perpendicular á la horizontal, esto es, á la tangente tirada al punto de la superficie terrestre, en donde dicha vertical le encuentra: tal es la direccion de la gravedad en los cuerpos terrestres.

COROLARIO.

15. Luego en la suposicion de la figura esférica de la tierra si se prolongan las direcciones de la gravedad en los cuerpos terrestres, concurrirán todas al centro de la tierra.

ESCOLIO.

16. Adviértase que dos direcciones ó verticales, que comprehenden un arco de la superficie terrestre menor que un minuto ó 951 toesas, se podrán considerar como paralelas, en atencion á que dicho arco se puede en los usos mecánicos considerar que coincide con su tangente por la extension tan grande de toda la periferia del círculo. Dígase lo mismo respecto á la suposicion de la figura esférica de la tierra, sin embargo de que dicha figura sea una Esferoide lata; esto es, producida por la revolucion de una Elipse al rededor de su exe menor que se valua en 6525376 toesas, siendo el mayor de 6562024, y en este caso las direcciones de la gravedad en los cuerpos son tangentes de la evoluta de una Elipse. Por tanto en atencion á la corta extension que ocupa un cuerpo ó un sistema de cuerpos, como son los de que se trata en este Libro y en el siguiente, se podrá considerar que las direcciones de la gravedad que

aníma á las partes materiales de un mismo cuerpo ó sistema de cuerpos, son verticales y paralelas entre sí.

17. Qualquier plano que pasa por una vertical se llama Plano vertical respecto al punto de la superficie terrestre, en donde dicha vertical le encuentra: y Plano horizontal es el que es tangente á la superficie terrestre en dicho punto.

18. Los cuerpos se dicen Sólidos, quando sus partes están unidas entre sí, de modo que sea necesaria una fuerza sensible para separarlas: tales son unos pedazos de madera, de hierro, de marmol, &c. Los cuerpos se dicen Fluidos, quando sus partes ceden á qualquiera fuerza, y fácilmente se mueven entre sí; tales son el agua, el vino, la sangre, el mercurio, &c.

19. Equilibrio es el estado de un cuerpo, ó bien de un sistema de cuerpos, que está movido por algunas potencias, cuyos efectos ó son destruidos por algunos obstáculos, ó se destruyen mutuamente.

20. Centro de gravedad de una magnitud ó de un sistema de magnitudes ó cuerpos es el punto al rededor del qual se ponen en equilibrio todos los elementos que componen la magnitud dada, ó el sistema de las magnitudes dadas, en qualquiera situa-

cion que se coloquen dicha magnitud, ó sistema de magnitudes, respecto á dicho punto inmoble. Dicho punto se llama tambien Centro de magnitud.

21. La vertical que pasa por el referido centro de gravedad se llama Linea de direccion.

22. Potencias conspirantes se llaman las que impelen juntas un cuerpo segun la misma direccion: Potencias opuestas son las que juntamente le impelen en direcciones contrarias: y Potencias de mediana conspiracion y oposicion se dicen las que juntamente impelen un cuerpo en direcciones que forman ángulo entre ellas.

23. Quando dos ó mas potencias conspirantes, ó bien de mediana conspiracion y oposicion, actuan sobre un cuerpo en un mismo punto, y quedan equilibradas por otra sola potencia aplicada al mismo punto, se llaman aquellas Componentes, y esta Equilibrante; y la potencia opuesta é igual á la equilibrante se dice Compuesta, Resultante ó Equivalente á las referidas dos ó mas potencias. Entiéndase lo mismo acerca de las potencias Equilibrante, y Compuesta, Resultante ó Equivalente á las potencias componentes que actuan sobre un sistema de cuerpos. Como, por exemplo, si las potencias *P* y *Q* actuan (*Fig.* 1.) en el punto *C* segun las direcciones *CP* y *CQ*, y la potencia *R* actua en

el mismo punto, de modo que le tenga en equilibrio; las potencias *P* y *Q* serán componentes, y la potencia *R* será la equilibrante: y tomando la potencia *S* igual y opuesta á la equilibrante *R*, dicha potencia *S* será la resultante, equivalente ó compuesta de las referidas potencias componentes *P* y *Q*.

24. Composicion de las Potencias es el método de hallar la resultante ó las resultantes de qualquier número de potencias componentes dadas que exîsten en un mismo plano ó en distintos planos: y el método contrario es lo que se llama Descomposicion ó Resolucion de las potencias.

25. Se llama Máquina todo instrumento que sirve para facilitar el movimiento de los cuerpos.

26. Divídense las Máquinas en simples y compuestas: éstas son las que se componen de dos ó mas simples. Por máquinas simples se entienden comunmente la Palanca, el Plano inclinado, la Cuña, la Polea, el Exe en el Peritroquio, la Rosca y la Balanza.

27. En toda máquina la fuerza que se le aplica para ponerla en movimiento, suceda éste ó no, se llama Potencia; y la fuerza que está aplicada á la misma máquina, y que resiste á la potencia, se dice Resistencia.

ESCOLIO.

28. Las potencias que se emplean en las máquinas son freqüentemente las fuerzas del agua, ayre, hombres, animales, &c. algunas veces pesos, y otras la fuerza del fuego. Es de notar que aunque las potencias y resistencias sean de diferentes especies, sin embargo se calculan todas como unos pesos determinados: y asi, por exemplo, si un hombre actua sobre una máquina con la misma fuerza, con la que actuaria un peso de quatro arrobas, la dicha fuerza se calculará por un peso de las mismas quatro arrobas.

29. Centro del movimiento en una máquina se llama el punto, al rededor del qual se mueve la misma máquina. Y si las partes de una máquina tienen su movimiento al rededor de un exe, éste se llama Exe del movimiento.

30. Palanca es una pértiga de hierro ó de madera, que tiene uno de sus puntos sostenido con un apoyo: dicho punto se llama Apoyo ó Hipomoclio, y es el centro del movimiento en dicha máquina. Expresen, *ACB* la palanca, y el punto *C* el hipomoclio: si *C* está colocado entre la potencia *P* y la resistencia *R*, se llama *AB* palanca del primer género (*Fig. 2.*): si la resistencia *R* es-

tá colocada entre el hipomoclio *C* y la potencia *P*, se dice *AB* palanca del segundo género (*Fig*. 3.): y si la potencia *P* está colocada entre el hipomoclio *C* y la resistencia *R*, se llama *AB* palanca del tercer género (*Fig*. 4.).

31. Plano inclinado es aquel que no es paralelo, ni perpendicular al plano horizontal: como si *BDO* denota un plano horizontal, será *AB* un plano inclinado (*Fig*. 5.). Si se tiran las rectas, *CO* perpendicular al plano horizontal *BDO*, *OB* perpendicular á la comun seccion *BE* del plano inclinado *BA* y del horizontal *BDO*, y la *BO*; se llaman, *CO* la altura, *BO* la base, y *CB* la longitud de dicho plano inclinado, considerada *CA* la comun seccion del mismo plano con el plano vertical que pasa por *CO*, y que es paralelo al vertical que pasa por *BE*. Además el ángulo *CBO* se dice la inclinacion del plano inclinado *BA* al horizonte.

ESCOLIO.

32. El plano inclinado tiene su uso para sostener una parte de la gravedad de los cuerpos, ó para valerse de una parte de dicha fuerza, ya sea para dirigir los movimientos hacia cierto punto, ó ya sea para moderarlos al arbitrio.

33. El prisma triangular *FBDEAC* de hierro

ó de madera, que tiene los triángulos *BCD* y *FAE* isósceles, se llama Cuña (*Fig.* 6.). En la cuña se llaman, Filo ó Corte la recta *AC*, Base ó Cabeza el paralelógramo *FBDE*, Latitud la recta *BD*, y Altura la perpendicular *CG* tirada desde *C* á la base *BD* del triángulo isósceles *BCD*.

ESCOLIO.

34. Se usa de la cuña para hender ó dividir los cuerpos, en los que se introduce por su filo, aplicando la potencia sobre la cabeza de esta máquina.

35. Polea se llama una pequeña rueda *ABC* de madera ó de metal cavada en la circunferencia, por la que pasa la cuerda que mueve el peso (*Fig.* 7, 8.). Llámase tambien Garrucha, Carrucha, Carrillo, Roldana ó Moton. La Polea se dice inmoble si su exe (*Fig.* 7.) queda siempre en el mismo lugar, y la rueda puede moverse al rededor de su exe; y si puede andar con el peso que transporta (*Fig.* 8.) se llama movible. La Máquina compuesta de muchas poleas se dice Polispastos, Polea compuesta, ó Aparejo.

36. Exe en el Peritroquio se llama el cilindro *AB* unido á la rueda *CD* de mayor diámetro, y movible cerca del exe *GF* que está sostenido de los postes *H*, *I*: dicho exe puede colocarse en si-

tuacion vertical, horizontal ú obliqua (*Fig.* 9.). Esta Máquina se llama tambien Exe en la rueda, y particularmente Cabrestante ó Argüe, si dicho cilindro se coloca en situacion vertical. Torno se llama comunmente todo cilindro que compone una máquina para subir pesos.

ESCOLIO.

37. En dicha máquina se aplica la potencia *P* á la periferia de la rueda, y el peso ó resistencia *R* al cilindro por medio de una cuerda, que por un extremo está afianzada al mismo cilindro, y por el otro al peso que se ha de mover, de modo que haciendo mover la potencia *P* á la rueda, la cuerda se enrosca en la superficie del cilindro, y asi levanta el peso *R*. Algunas veces se fixan en el cuerpo del cilindro, y perpendiculares á su exe unas pértigas ó palancas *E*, *E*, á las que se aplica la potencia; con lo que se logra el mismo efecto. Otras veces las extremidades del cilindro acaban en dos Manubrios ó Cigueñas *ABC* (*Fig.* 10.), en quienes son *AB* las palancas fixas en el exe del cilindro, y *BC* los asideros, mangos ó manijas donde se aplican las potencias *P* en los puntos *B* para mover las palancas y el cilindro.

38. Rosca es un cilindro sólido de madera ó

metal que tiene su superficie abierta en muescas espirales: y Tuerca es otra pieza de madera ó metal abierta interiormente en figura cilíndrica, cuya superficie está tambien abierta en muescas espirales, donde entra y juega la espiga de la rosca. La Rosca se llama tambien Husillo; y la Tuerca, Matriz ó Rosca Hembra: y en general con el nombre de rosca se entienden las dos piezas de dicha máquina. Las vueltas de los planos se llaman Espiras, Estrias ó Pasos de la rosca; y *GH*, *HI*, &c. se dicen las alturas de los mismos pasos. *Fig.* 12.

ESCOLIO.

39. Si hay un peso ó resistencia *R* aplicada al extremo *F* de la rosca segun la direccion de su exe *EF*, y una potencia *P* que está aplicada á la palanca *EP* perpendicular á dicho exe, y que actua en direccion perpendicular á la misma palanca; la rosca girará entrando las espiras del cilindro convexô en las del cóncavo, y por consiguiente elevará el peso *R*: de donde resulta que la rosca se compone de una palanca y de un plano inclinado. Tambien se hace uso de la rosca para elevar pesos por su extremo superior. Otras veces la rosca está firme é inmoble, y se hace mover la tuerca por medio de una ó mas palancas

para apretar ó comprimir los cuerpos.

40. Balanza se llama el instrumento representado en la *Fig.* 11, que tiene las siguientes partes: el Astil ó barra *AB* de hierro ó de metal: los platos ó cazoletas *D* y *E* igualmente pesados que están sostenidos por medio de iguales cordones en los extremos *A* y *B* de dicha barra: el Fiel *IG* ó hierro delgado perpendicular á la misma barra, y firme en su mitad: la Alcoba *HF* ó caxa que sostiene un exe que atraviesa perpendicularmente á la dicha barra, de modo que toda la máquina, esto es, el astil, el fiel y los platos, se puede mover libremente al rededor de dicho exe, en cuya mitad *C* se considera el centro del movimiento: y finalmente los Brazos *CA* y *CB* perfectamente iguales, siendo los que juntan dicho punto *C* con los extremos *A* y *B* del astil. La referida máquina se llama comunmente Peso de cruz.

ESCOLIO.

41. Esta máquina sirve para determinar los pesos de los cuerpos; es á saber, en uno de los platos se pone el cuerpo cuyo peso se pide determinar, y en el otro plato se ponen pesas conocidas, como son la libra, onza, &c. hasta que la balanza quede en equilibrio, estando su fiel en

situacion vertical, esto es, en el medio de la alcoba firme en *M*; y entonces las pesas conocidas que están en el un plato señalan el peso del cuerpo que está en el otro.

42. Si un cuerpo que está en quietud se supone movido por una potencia al lugar infinitamente próxîmo, y se prolongan las dos direcciones de la potencia aplicada á los puntos infinitamente próxîmos donde actua; el punto en que concurren dichas dos direcciones se llama Centro de la misma potencia.

Como, por exemplo, si á la recta inflexîble *ACB* (*Fig.* 13.) movible al rededor del punto *C* se aplican en sus extremos *A* y *B* las potencias *P* y *R* segun las direcciones *AP* y *BR*, y se consideran la recta *ACB* en el lugar infinitamente próxîmo *aCb*, y las direcciones *AP* y *BR* en los lugares infinitamente próxîmos *Ap* y *Br*; prolongadas las referidas direcciones hasta que concurran en los puntos *D* y *E*, éstos serán los respectivos centros de las potencias *P* y *R*.

43. La diferencia entre las dos rectas que juntan el centro de la potencia con los dos puntos donde está aplicada en los dos lugares infinitamente próxîmos, se llama Aproxîmacion ó Alejamiento del punto respecto al centro de la potencia,

esto es, aproxîmacion, si el lugar próxîmo se acerca al centro, y si se aleja, alejamiento.

Como en el exemplo antecedente (*Fig.* 13.) baxada la recta am perpendicular á la AD, será Am la aproxîmacion del punto A al centro D de la potencia P aplicada en A, mientras que el punto A ha pasado al lugar infinitamente próxîmo a: pues siendo el ángulo mDa evanecente, será la suma de los ángulos Dma y Dam igual á dos rectos; y por ser recto el ángulo Dma, lo será tambien Dam, y por consiguiente $Dm = Da$: luego será $DA - Da = Am$ aproxîmacion, por estar el punto a mas próxîmo al centro D de la potencia que el punto A. Igualmente si se baxa Bn perpendicular á br, será bn el alejamiento del punto B al centro E de la potencia R, mientras que el punto B ha pasado al lugar infinitamente próxîmo b: pues $bE - BE$ es igual á bn, y el punto b está mas distante del centro E de la potencia R que el punto B.

44. La accion de una potencia, que actua sobre un cuerpo, se supone ser proporcional con el producto de la potencia que produce dicha accion por la aproxîmacion ó alejamiento: y se llama Accion de aproxîmacion ó de alejamiento.

Asi en el exemplo antecedente (*Fig.* 13.)

Pag. 17.

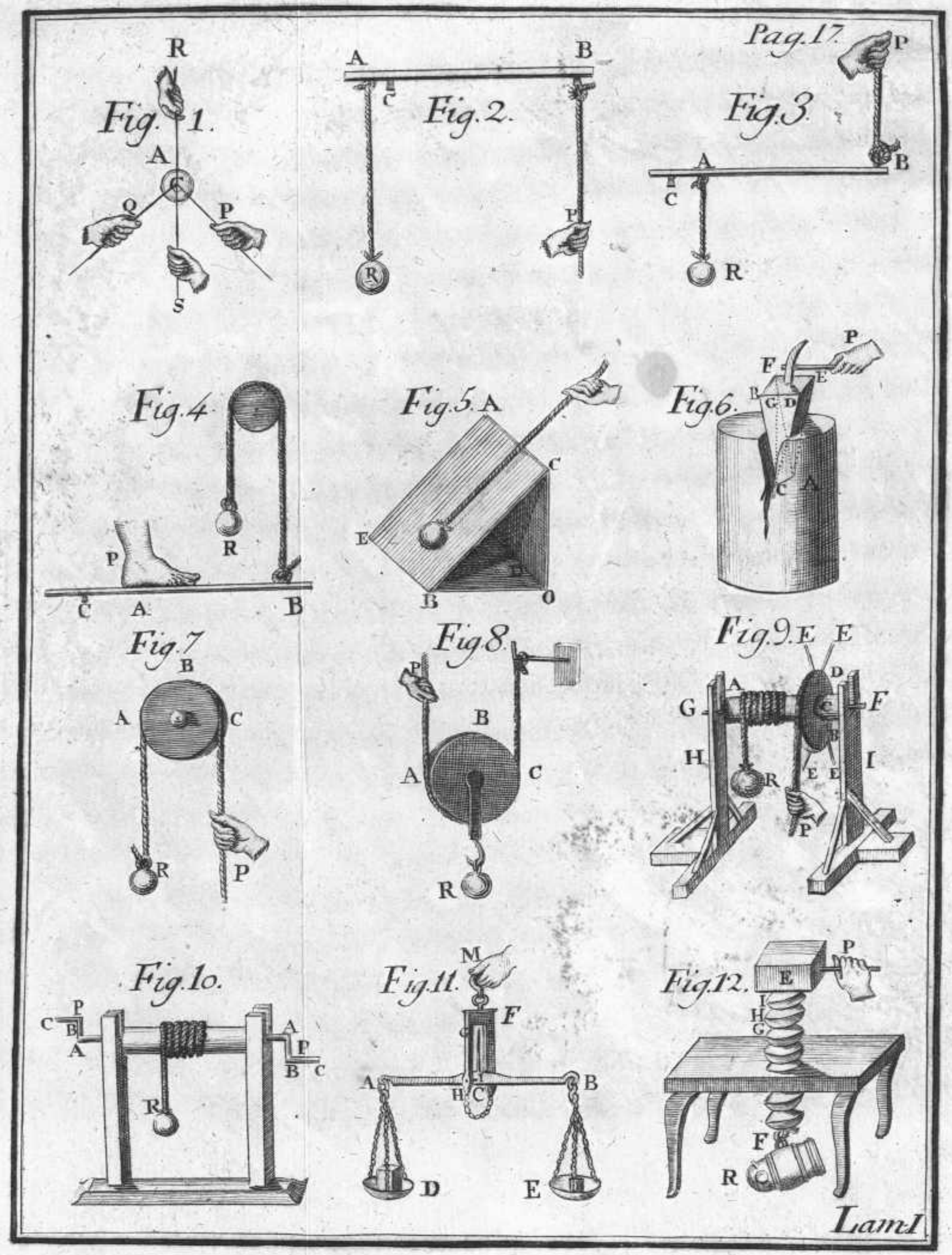
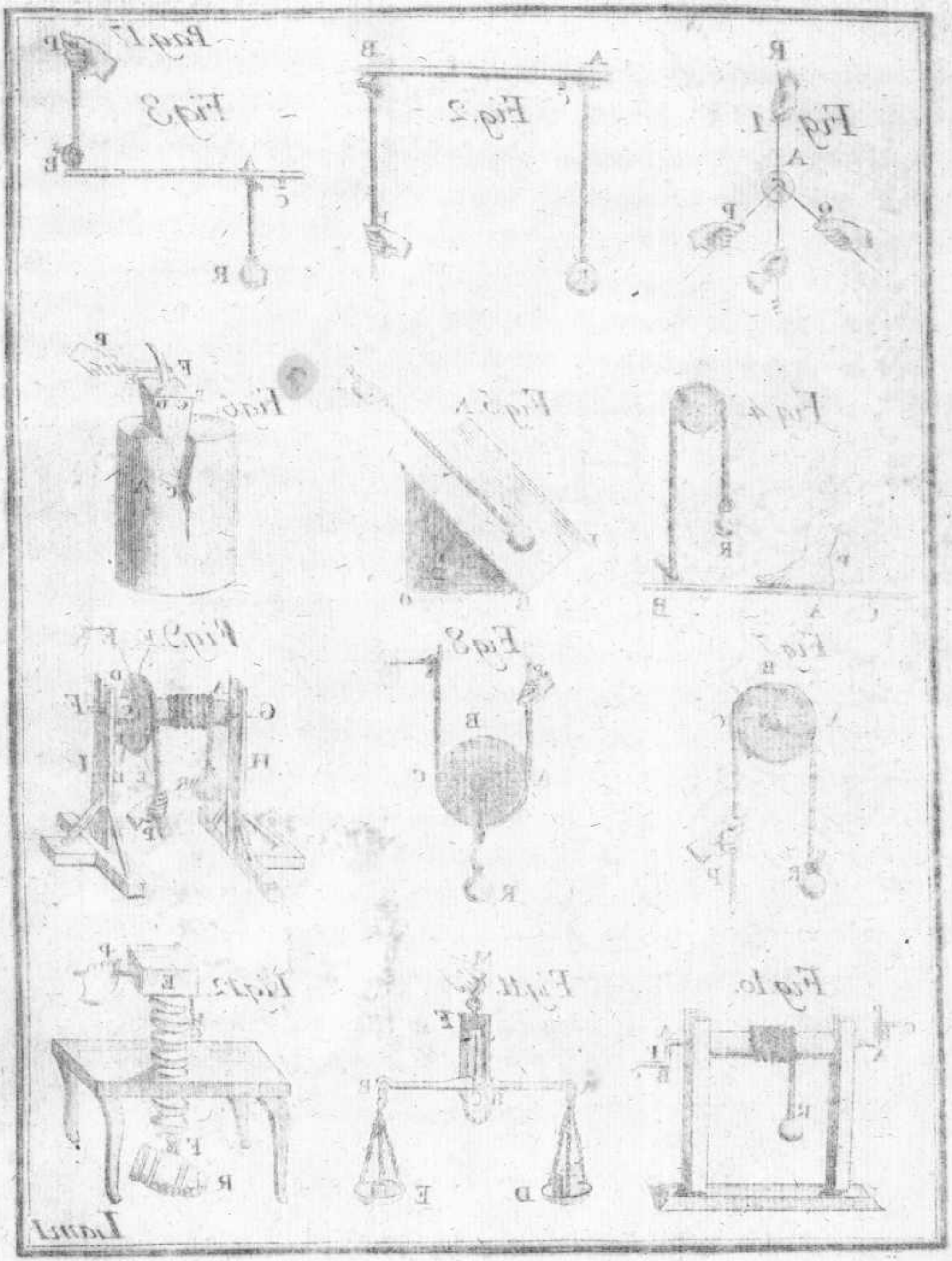


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Lam. I.



$P \times Am$ será la accion de aproxîmacion respecto á la potencia aplicada en A, si la cantidad de esta potencia se nombra P: asimismo $R \times bn$ será la accion de alejamiento respecto á la potencia aplicada en B, si la cantidad de esta potencia es R.

45. Si una potencia actua sobre un cuerpo para ponerle en movimiento, y otra potencia resiste al movimiento del mismo cuerpo, de modo que sea la accion de aproxîmacion de la primera potencia igual á la accion de alejamiento de la segunda; se supondrá que dicho cuerpo queda en equilibrio: pero si las referidas acciones son desiguales, el cuerpo se moverá hácia la parte de la potencia que goza de la mayor accion. El mismo principio se establece para el equilibrio de un sistema de cuerpos, sobre los que actuan potencias y resistencias, esto es, que siendo la suma de las acciones de aproxîmacion igual á la suma de las acciones de alejamiento, asi dicho sistema de cuerpos, como el de las potencias y resistencias, quedarán en equilibrio.

COROLARIO I.

46. Infiérese que si el cuerpo A (*Fig.* 14.) está movido por las potencias P y R opuestas é iguales, quedará dicho cuerpo en equilibrio: pues, considerando el punto A, donde actuan dichas

potencias, en el lugar infinitamente próxîmo a; y expresando las cantidades de las mismas potencias por las rectas iguales AP y AR, se tendrá $PA \times Aa = RA \times Aa$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la accion de alejamiento de la resistencia R.

COROLARIO II.

47. Si las potencias P y T conspirantes actuan sobre el cuerpo A segun la direccion AP, la equivalente ó resultante de ellas será la suma de las mismas potencias, esto es, $P+T$; pues suponiendo R la potencia equilibrante, deberá ser $P \times Aa + T \times Aa = R \times Aa$; y partiendo por Aa, será $P+T=R$: luego la potencia equivalente á las potencias P y T será $P+T$. Dígase lo mismo respecto á tres ó mas potencias conspirantes, esto es, la suma de todas ellas será su resultante.

COROLARIO III.

48. Si las potencias P y S son opuestas y desiguales, su resultante ó equivalente será la diferencia de las mismas potencias, esto es, $P-S$, siendo P la mayor potencia: pues si se supone R la potencia equilibrante, deberá ser $P \times Aa = R \times Aa + S \times Aa$; y partiendo por Aa, se tendrá

$P = R + S$, de donde $R = P - S$: luego la potencia equivalente á las potencias opuestas y desiguales P y S será $P - S$. Dígase lo mismo respecto á qualquiera número de potencias opuestas, esto es, la diferencia que pasa entre la suma de las potencias que actuan hacia una misma parte, y la suma de las potencias que actuan hacia la parte contraria, será la resultante de todas ellas.

49. Estática se llama la ciencia que trata del equilibrio de los Sólidos.

Del Centro de gravedad de las magnitudes.

PROPOSICION I.

50. Si las magnitudes A y B se suponen infinitésimas, y tirada la recta AB se divide en E en razon recíproca de dichas magnitudes, y sobre un plano ó recta MT se baxan las perpendiculares AM, ER y BN: digo que será $(A + B) \times ER = A \times AM + B \times BN$, y que el punto E será el centro de gravedad de las mismas magnitudes, si son proporcionales con ellas las potencias P y Q, que las animan, y actuan en direcciones paralelas. *Fig.* 15, 16.

1°. Por el punto E tírese (*Fig.* 15.) la recta HK paralela á la MN, y prolónguese hasta que corte las perpendiculares BN, y MA prolongada, en los puntos K y H. Por la semejanza de los triángulos BKE, AHE es $BK : AH = BE : EA$; pero (sup.) $A : B = BE : EA$: luego será $BK : AH = A : B$, y por consiguiente $A \times AH = B \times BK$; pero $A \times AH = A \times HM - A \times AM$, y $B \times BK = B \times BN - B \times KN$: luego será $A \times HM - A \times AM = B \times BN - B \times KN$, de donde resulta $A \times HM + B \times KN = B \times BN + A \times AM$; y por ser $HM = KN = ER$, será $(A + B) \times ER = A \times AM + B \times BN$. Que es lo primero.

2°. Supóngase que la recta inflexîble AEB (*Fig.* 16.) da un movimiento infinitésimo cerca del punto E, de modo que pase al lugar infinitamente próxîmo aEb, y las direcciones AP y BQ á las ap y bq. Tírense las rectas Aa y Bb, y las am y Bn perpendiculares respectivamente á las AP y bq, y finalmente por el punto E la recta XZ perpendicular á las direcciones BQ y PA prolongada. Siendo, pues, en el triángulo AEa el ángulo AEa evanecente, será la suma de los ángulos EAa, EaA igual á dos rectos; pero es $EA = Ea$: luego será el ángulo EAa recto, y por consiguiente $EAX + aAm$ será igual á un recto; pero en el triángulo rectángulo Ama es $mAa + Aam$ igual á un recto: luego será $EAX + aAm = mAa + Aam$; y quitando de ambas partes el ángulo comun aAm, quedará $EAX = maA$. Por tanto los triángulos Ama y AXE, que tienen los ángulos m y X iguales por rectos, é iguales los ángulos maA y EAX por lo demostrado, tendrán proporcionales los lados, esto es, $Am : Aa = EX : EA$; y por los triángulos AEa y BEb semejantes será $Aa : Bb = EA : EB$; y finalmente por los triángulos Bnb y BZE semejantes será $Bb : bn = BE : EZ$: luego por razon de igualdad ordenada será $Am : bn = EX : EZ$; pero por la semejanza de los triángulos AXE y BZE es $EX : EZ = AE : EB$: luego será $Am : bn = AE : EB$; y por ser (sup.) $A : B = BE : EA$, y $P : Q = A : B$, se tendrá $Am : bn = Q : P$; y por consiguiente $P \times Am = Q \times bn$, esto es, será la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la potencia Q: luego (45) las magnitudes A y B animadas por las potencias P y Q estarán en equilibrio cerca del punto E. Con el mismo método se demostrará que si se da otra qualquiera posicion $A'EB'$ á la recta AEB al rededor del punto fixo E; las dichas magnitudes A' y B' animadas por las mismas potencias P' y Q' proporcionales con ellas segun las direcciones $A'P'$ y $B'Q'$ paralelas á las AP y BQ estarán en equilibrio al rededor del punto E: luego el punto E será (20) el centro de gravedad de las magnitudes A y B. Que es &c.

COROLARIO I.

51. Si se añade una tercera magnitud C infinitésima (*Fig.* 17.) y tirada la recta EC se divide en F, de suerte que sea $A+B:C=CF:FE$, y se baxan las rectas FO y CH perpendiculares á MT, será $(A+B+C)\times FO=A\times AM+B\times BN+C\times CH$. Siendo, pues, $A+B:C=CF:FE$, y suponiendo las magnitudes A y B reunidas en E, será (50) $(A+B+C)\times FO=(A+B)\times ER+C\times CH$; pero $(A+B)\times ER=A\times AM+B\times BN$: luego será $(A+B+C)\times FO=A\times AM+B\times BN+C\times CH$; y además el punto F será el centro de gravedad de las magnitudes A, B, C, con tal que las potencias que las animan sean proporcionales con ellas, y actuen en direcciones paralelas.

COROLARIO II.

52. Tambien si se añade una quarta magnitud D infinitésima, y tirada la recta DF se divide en G, de suerte que sea $A+B+C:D=DG:GF$, se demostrará del mismo modo que tiradas las rectas GS y DT perpendiculares á MT, será $(A+B+$

$C+D)\times GS = A\times AM + B\times BN + C\times CH + D\times DT$, y que el punto G será el centro de gravedad de las magnitudes A, B, C, D. Dígase lo mismo de qualquiera número de magnitudes, en la inteligencia de que todas estén colocadas sobre el plano ó recta MT.

COROLARIO III.

53. Con un método semejante á el de la Proposicion antecedente se demostrará que, si la magnitud A está colocada sobre el plano ó recta MT, y la magnitud B baxo de él (*Fig.* 18.), y es $A:B = BE:EA$, y son las rectas AM, ER, BN perpendiculares á MT; será $(A+B)\times ER = A\times AM - B\times BN$, y además el punto E será el centro de gravedad de dichas magnitudes. Si se añade otra tercera magnitud C que esté sobre el plano, y es $A+B:C = CF:FE$, y las rectas FO y CI son perpendiculares á MT; será $(A+B+C)\times FO = A\times AM + C\times CI - B\times BN$, y además el punto F será el centro de gravedad de las magnitudes A, B, C. Tambien si se añade otra quarta magnitud D que esté baxo del plano MT, y es $A+B+C:D = DG:GF$, y las rectas DT y GS son perpendiculares á MT; será $(A+B+C+D)\times GS = A\times AM + C\times CI - B\times BN - D\times DT$,

y además el punto *G* será el centro de gravedad de dichas magnitudes *A*, *B*, *C*, *D*. Discúrrase del mismo modo respecto á qualquiera número de magnitudes, de las quales unas están colocadas sobre la recta ó plano *MT*, y otras baxo de él.

COROLARIO IV.

54. Luego el producto de la distancia del centro de gravedad de un sistema de magnitudes infinitésimas á qualquiera plano dado de posicion por la suma de todas las magnitudes es igual á la suma de los productos de cada magnitud por su respectiva distancia al mismo plano, en la suposicion de que todas las magnitudes estén colocadas sobre el mismo plano.

COROLARIO V.

55. Y si algunas magnitudes están colocadas sobre un plano dado de posicion, y otras baxo de él; el producto de la distancia del centro de gravedad de todas ellas á dicho plano por la suma de las mismas será igual á la diferencia entre la suma de los productos de cada magnitud colocada sobre el plano por su respectiva distancia al mismo plano, y la suma de los productos de cada magnitud colocada baxo del plano por su respectiva distancia al mismo plano.

COROLARIO VI.

56. Luego la distancia del centro de gravedad (*Fig.* 17, 18.) de un sistema de magnitudes infinitésimas á un plano ó recta *MT* dada de posicion será igual al quociente que resulta partiendo la suma de los productos de cada magnitud y de su distancia á dicho plano ó recta por la suma de todas las magnitudes, con la advertencia que á las magnitudes que exîsten baxo de *MT* se debe dar el signo negativo en el numerador de la expresada fraccion. Dígase lo mismo respecto á la distancia del referido centro de gravedad á otro plano ó recta dada de posicion perpendicular á *MT*.

COROLARIO VII.

57. Por tanto si sobre una recta ó plano dado de posicion se halla una serie de magnitudes infinitésimas *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. y baxo de la misma recta ó plano se hallan otras tantas *M*, *N*, *O*, *P*, *Q*, &c. y éstas son respectivamente iguales á aquellas, y distan igualmente, esto es, *A* y *M*, *B* y *N*, &c. de dicha recta ó plano; el centro de gravedad de todas las referidas magnitudes estará en la misma recta ó plano dado de posicion.

COROLARIO VIII.

58. Si se dan (*Fig.* 15.) las magnitudes *A* y *B*, su centro *E* de gravedad, y la distancia *AE* de una de ellas, como *A*, á dicho centro *E*, se determinará la distancia *BE* de la otra magnitud *B* al mismo centro *E*, hallando una quarta proporcional á las magnitudes *B*, *A* y *AE*, de suerte que prolongada la recta *EA* por el punto *E*, y cortada *EB* igual á dicha quarta proporcional, se tendrá determinado el punto *B*, en que se debe colocar la magnitud *B*, para que las *A* y *B* tengan el centro dado *E* de gravedad. Y expresando el punto *A* el centro de gravedad de un sistema dado de magnitudes, y el punto *E* el centro de gravedad del agregado de dicho sistema con otro sistema igualmente dado, cuyo centro de gravedad deba hallarse en la prolongacion de la recta dada *AE*, se procederá del mismo modo para determinar la distancia *EB* del centro *B* de gravedad del segundo sistema al centro *E* comun á ambos.

COROLARIO IX.

59. Si los puntos *A* y *B* son los respectivos centros de gravedad de dos sistemas de magnitudes los que llamo *M* y *N*, y tirada la recta *AB* se di-

vide en E en razon recíproca de dichos sistemas, de suerte que sea $M : N = BE : EA$; será el punto E el centro de gravedad comun á ambos sistemas M y N.

ESCOLIO I.

60. En lo sucesivo se considerará que las lineas, superficies y sólidos están divididos en sus elementos, y que estos se hallan animados por potencias que les son proporcionales, y que actuan en direcciones paralelas, del mismo modo que si dichas magnitudes fuesen unos cuerpos homogéneos divididos en un número infinito de partes materiales evanecentes animadas por la gravedad, cuya potencia sobre los cuerpos de que se trata se puede suponer (12, 16) constante y proporcional con los pesos ó masas de los mismos cuerpos, y que actua en direcciones verticales y paralelas; y asi por este medio se consigue determinar el centro de gravedad en las referidas magnitudes. En general es de notar que para determinar el centro de gravedad en una linea ó en una superficie plana, es menester determinar la distancia de dicho centro á dos rectas dadas de posicion que se tiran perpendiculares una á otra en el mismo plano de la dicha linea ó superficie; y que para determinar el centro de gravedad en un sólido ó en su superficie, con-

viene determinar la distancia de dicho centro á tres planos dados de posicion, que se tiran perpendiculares entre sí. Es evidente que si respecto á la superficie *ADB* (*Fig.* 19.) se hallan la distancia *CE* de su centro *C* de gravedad á la recta *AD*, como tambien la *CF* del mismo centro *C* á la recta *AF* tirada perpendicular á *AD*, quedará determinado el centro *C* de gravedad de la superficie *ADB*: entiéndase lo mismo respecto á la determinacion del centro *C* de gravedad de la linea *AB*: y en quanto al sólido *CM* (*Fig.* 20.) si se determinan las distancias *CG*, *CH*, y *CF* de su centro *C* de gravedad á los tres planos *AB*, *BD* y *DA* perpendiculares entre sí, quedará determinado el centro *C* de gravedad en el sólido *CM*.

ESCOLIO II.

61. Es de notar que se determina mecánicamente el centro de gravedad de qualquiera cuerpo por los métodos siguientes, con tal que el mismo cuerpo se pueda suspender ó apoyar sobre otro; es á saber,

1°. Si se suspende un cuerpo, en este estado se le dexará en libertad, hasta que quede inmoble; despues se señalarán en la superficie de dicho cuerpo el punto que le tiene suspendido, como tambien el punto que esté con aquel en la misma vertical; y finalmente suspendido el mismo cuerpo por otro distinto punto de los ya señalados, se repetirá la operacion anterior para tener igualmente en su superficie otros dos puntos: y el punto donde se cortan las dos rectas que unen los referidos puntos segun corresponde, esto es, la una recta los dos primeros puntos señalados, y la otra los otros dos, será el centro de gravedad del cuerpo que se pide determinar.

2°. Si se pide determinar el centro de gravedad de un cuerpo teniéndole apoyado; sobre un plano horizontal se colocará un prisma triangular de madera, de modo que una de sus superficies rectangulares insista sobre el mismo plano; despues se pondrá el cuerpo por su longitud encima del lado superior del prisma, y se moverá hácia la derecha ó izquierda de dicho lado, hasta que quede inmoble; y finalmente se señalará la comun seccion de la superficie del cuerpo con el plano vertical que pasa por el referido lado del prisma; ahora se repetirá la misma operacion, poniendo el cuerpo por su latitud, y sucesivamente por su altura encima del mismo lado superior del prisma: y el punto donde se cortan los tres planos que pasan por las tres lineas señaladas en la superficie del cuerpo, será el centro de gravedad del mismo cuerpo.

PROPOSICION II.

62. En la hipótesis de la Proposicion antecedente, digo que sosteniendo el punto C con una potencia R igual á la suma de las potencias P y Q, y con la direccion CR paralela á las direcciones AP y BQ, las potencias P, Q y R estarán en equilibrio. *Fig.* 21, 22, 23.

1°. Considérese que la recta inflexible ACB (*Fig.* 21.) da un movimiento infinitésimo, y pasa al lugar infinitamente próxîmo $a'c'b'$, de modo que los puntos A, B, C sigan las direcciones AP, BQ y RC prolongada; y complétense los paralelógramos Ac', Ab': luego serán, $P\times Aa'$ la accion de aproxîmacion respecto á la potencia P, $R\times Cc'$ la accion de alejamiento respecto á la potencia R, y $Q\times Bb'$ la accion de aproxîmacion respecto á la potencia Q; pero $P\times Aa'+Q\times Bb'=R\times Cc'$, por ser $R=P+Q$ (sup.), y $Aa'=Bb'=Cc'$: luego las potencias P, Q, R quedarán (45) en equilibrio.

2°. Consíderese que la recta ACB (*Fig.* 21.) da un movimiento infinitésimo cerca del punto B, y pasa al lugar infinitamente próxîmo Bca, con lo que las direcciones AP y CR se transferirán á las ap y cr. Báxense las perpendiculares aE y CF á las AP y cr, y tírense las rectas Aa y Cc. Siendo, pues, las rectas Aa y AE respectivamente paralelas á las Cc y cF, será el ángulo $EAa = CcF$; pero los ángulos en E y F son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos AEa y CFc, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $AE : cF = Aa : Cc = AB : BC$ por la semejanza de los triángulos ABa y CBc; pero (sup.) $P : Q = BC : CA$, de donde $P + Q : P = AB : BC$: luego será $AE : cF = P + Q : P$; y por ser $P + Q = R$ (sup.) será tambien $AE : cF = R : P$; por consiguiente $P \times AE = R \times cF$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego (45) subsistirá el equilibrio entre las potencias P y R cerca del punto B. Del mismo modo se demostrará el equilibrio de las potencias P y R cerca del punto A.

3°. Supóngase un movimiento infinitésimo de la recta ACB cerca de qualquier punto K (*Fig. 22.*) tomado en la prolongacion de dicha recta, de modo que ésta pase al lugar infinitamente próxîmo $acbK$, y sean ap, bq, cr las nuevas direcciones de las potencias P, Q, R. Tírense las perpendiculares aE á AP, bG á BQ, CF á cr, y las rectas

Aa, Cc, Bb. Siendo, pues, los triángulos AEa y BGb semejantes, como tambien los AKa y BKb, será $AE : BG = Aa : Bb = AK : KB$; por consiguiente $P \times AE : Q \times BG = P \times AK : Q \times BK$, y componiendo $P \times AE + Q \times BG : Q \times BG = P \times AK + Q \times BK : Q \times BK$; pero por la semejanza de los triángulos CFc y BGb, BKb y CKc, es $BG : cF = Bb : Cc = BK : CK$, y $Q \times BG : R \times cF = Q \times BK : R \times CK$: luego por razon de igualdad ordenada será $P \times AE + Q \times BG : R \times cF = P \times AK + Q \times BK : R \times CK$; y respecto á que son proporcionales aritméticamente los rectángulos $P \times AK$, $P \times CK$, $Q \times CK$, $Q \times BK$, por ser la diferencia $P \times AC$ entre los dos primeros igual á la diferencia $Q \times BC$ entre el tercero y quarto, se tendrá $P \times AK + Q \times BK = (P + Q) \times CK = R \times CK$: luego será $P \times AE + Q \times BG = R \times cF$, esto es, la suma de las acciones de aproxîmacion de las potencias P y Q será igual á la accion de alejamiento de la resistencia R: luego &c.

4°. Finalmente supóngase un movimiento infinitésimo (*Fig.* 23.) de la recta ACB cerca de qualquier punto K tomado fuera de ella; y los puntos A, C, B describirán los arcos evanecentes Aa, Cc, Bb semejantes, y las nuevas direcciones ap, cr, bq de las potencias P, R, Q serán paralelas á las anteriores. Tírense las perpendiculares aE á AP, CF á cr, bG á BQ, y desde el punto K báxese la perpendicular KH á las direcciones PA, CR y QB prolongadas, y finalmente tírense los radios KA y Ka, KC y Kc, KB y Kb. Siendo, pues, el ángulo KAa recto, será $KAH + aAE$ igual á un recto; pero en el triángulo rectángulo AEa es $EAa + AaE$ igual á un recto: luego será $KAH + aAE = EAa + AaE$, y quitando el ángulo comun aAE, será $KAH = AaE$; por consiguiente los triángulos rectángulos AEa y KHA serán semejantes: asimismo se demostrarán semejantes los triángulos CFc y CNK, BGb y BOK. Ahora por la semejanza de dichos primeros triángulos será $AE : Aa = KH : KA$; por la semejanza de los sectores AKa, BKb será $Aa : Bb = AK : KB$; y por la semejanza de los triángulos BGb y BOK será $Bb : BG = BK : KO$: luego por razon de igualdad ordenada será $AE : BG = KH : KO$, y $P \times AE : Q \times BG = P \times KH : Q \times KO$; y componiendo se tendrá $P \times AE + Q \times BG : Q \times BG = P \times KH + Q \times KO : Q \times KO$. Con semejante método se demostrará ser $Q \times BG : R \times cF = Q \times KO : R \times KN$: luego por razon de igualdad ordenada será $P \times AE + Q \times BG : R \times cF = P \times KH + Q \times KO : R \times KN$; y respecto á que son aritméticas mente proporcionales los rectángulos $P \times KH$, $P \times KN$, $Q \times KN$, $Q \times KO$, será $P \times KH + Q \times KO = (P+Q) \times KN = R \times KN$: luego será $P \times AE + Q \times BG = R \times cF$; por consiguiente &c. Que es &c.

COROLARIO I.

63. Infiérese que se podrán considerar siempre las magnitudes infinitésimas A y B reunidas en su centro C de gravedad: pues la misma potencia R se necesita para sostener la magnitud $A + B$ en C, que para sostener el centro C de gravedad de las magnitudes A y B colocadas del modo expresado. Dígase lo mismo respecto á un sistema de magnitudes infinitésimas; como es el agregado de los elementos de una linea, de una superficie plana, de un sólido y de su superficie, y de un cuerpo de qualquier figura y volumen, con tal que se consideren dichos elementos animados por potencias proporcionales con ellos, siendo paralelas las direcciones de las mismas potencias; esto es, se podrá considerar el agregado de los elementos que componen un sistema, reunido en su centro de gravedad.

COROLARIO II.

64. Tambien se infiere de la Proposicion antecedente que la potencia, que tiene en equilibrio á

qualquiera número de potencias que actuan en direcciones paralelas, y hácia una misma parte, es igual á la suma de todas ellas; y que el punto, en donde debe aplicarse dicha potencia equilibrante, coincide con el centro de gravedad, y en conseqüencia se determinará (56) por la propiedad que le corresponde: como, por exemplo, si se dan las potencias P, Q, S, que actuan en los respectivos puntos H, I, E segun las direcciones paralelas HP, IQ, ES, será la potencia equilibrante $R = P + Q + S$, y el punto C se determinará por medio de las equaciones $CL = \frac{P \times HB + Q \times IF + S \times ED}{P + Q + S}$,

$CN = \frac{P \times HM + Q \times IK + S \times EO}{P + Q + S}$, en las que las rectas AK, HB, IF, CL y ED son perpendiculares á la recta AD dada de posicion que empieza desde un punto fixo A, y las rectas HM, EO, CN y IK son perpendiculares á la AK. Si alguna de dichas potencias actuase hácia parte contraria, se le daria el signo menos en las tres equaciones anteriores: y si dichas direcciones paralelas no estuviesen en un mismo plano, se referiria el punto C á tres planos dados de posicion perpendiculares entre sí.

PROPOSICION III.

65. Determinar el centro de gravedad de una recta, de un paralelógramo, de un paralelepípedo, &c. *Fig.* 25. . . 28.

1°. Si la recta AB (*Fig.* 25.) se divide por medio en C, se tendrá en dicho punto C el centro de gravedad de la recta AB. Tírese la recta DE perpendicular á la AB, y divídanse las rectas AC y CB en partes evanecentes iguales $Aa = Bb$, &c. y será $Aa \times aC = Bb \times bC$, y lo mismo sucederá con los demas productos hechos del mismo modo; pero los elementos que componen la recta CA están sobre la recta DE, y los que componen la CB están baxo de ella: luego el centro de gravedad de la recta AB será (57) el punto C que queda en la recta DE.

2°. El centro de gravedad de la circunferencia de un círculo $CBADE$ es el centro de la misma figura (*Fig.* 26.). Tírense las ordenadas HF, hf, &c. al diámetro AE, y considérense infinitamente próxîmas; y será $Ff \times FG = Hh \times HG$, y lo mismo sucederá con los demas productos hechos del mismo modo; pero los elementos que componen la semicircunferencia ADE están sobre el diámetro AE, y los que componen la ABE están baxo del

Fig. 13.

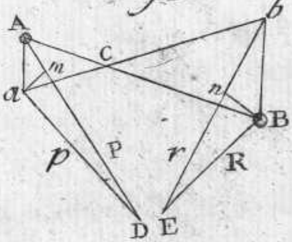


Fig. 14.

Fig. 15.

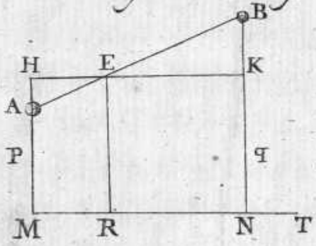


Fig. 16.

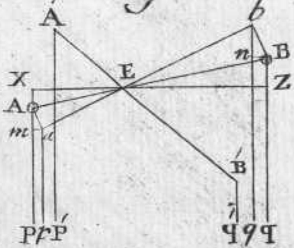


Fig. 17.

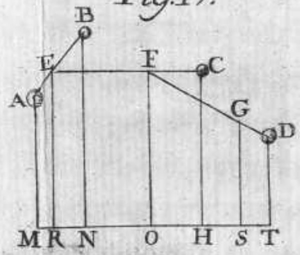


Fig. 18.

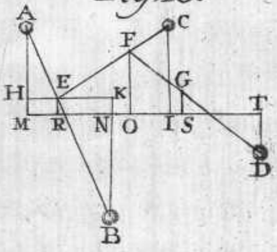


Fig. 19.

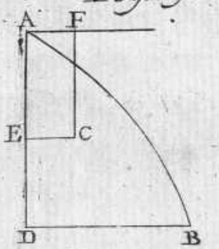


Fig. 20.

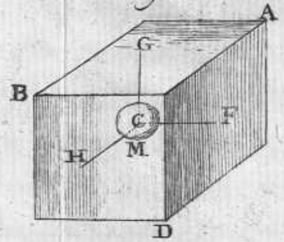


Fig. 21.

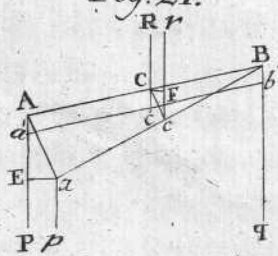


Fig. 22.

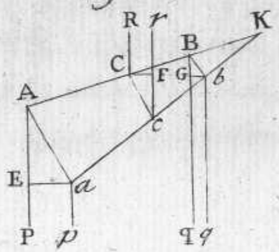


Fig. 23.

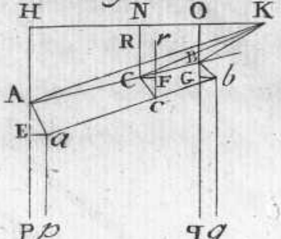
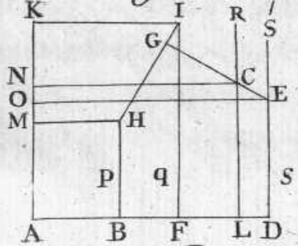


Fig. 24.



Lam. II.

mismo diámetro: luego en el diámetro AE se hallará (57) el centro de gravedad de la referida circunferencia. Por la misma razon en otro diámetro BD se hallará tambien el centro de gravedad de dicha circunferencia: luego el centro C del círculo será centro de gravedad de la circunferencia del mismo círculo.

3°. Si en el paralelógramo AF (*Fig.* 27.) se dividen los lados opuestos AB y DF por medio en los puntos C y E, y se tira la recta CE; estará en la misma recta CE el centro de gravedad del paralelógramo AF: pues considerando divididos los paralelógramos $CBFE$, $ACED$ perfectamente iguales en partes evanecentes iguales, el producto de cada elemento del paralelógramo CF por su distancia á la recta CE será siempre igual al producto del correspondiente elemento del paralelógramo DC por su distancia á dicha recta CE, estando los elementos que componen el paralelógramo CF sobre la recta CE, y los otros que componen el paralelógramo DC baxo de ella: luego en la recta CE estará (57) el centro de gravedad del paralelógramo AF. Igualmente si se dividen los otros dos lados opuestos AD y BF por medio en los puntos G y K, y se tira la recta GK, en ésta se hallará tambien el centro de gravedad del paralelógramo *AF*. Por tanto el punto *H* comun á las dos rectas *CE* y *GK* será el centro de gravedad del paralelógramo *AF*.

4°. El centro de gravedad de un círculo *CABED* es el centro *C* de la misma figura (*Fig*. 26.). Tírese qualquier diámetro *AE*, y sean las rectas *HF*, *hf*, &c. ordenadas al mismo diámetro. Y considerando las dichas rectas infinitamente próxîmas, las areas evanecentes *GgfF*, *GghH*, y los rectángulos evanecentes *Gm*, *Gn*, serán iguales entre sí, y las distancias de los centros de gravedad de los mismos elementos al diámetro *AE* serán tambien iguales : dígase lo mismo de los demas elementos; pero los que componen el semicírculo *ADEC* están sobre el diámetro *AE*, y los que componen el otro semicírculo *ABEC* están baxo el mismo diámetro : luego el centro de gravedad del círculo (57) se hallará en el diámetro *AE*. Con el mismo raciocinio se demostrará que el centro de gravedad de dicho círculo se halla en qualquiera otro diámetro *BD*. Por tanto el centro *C* del círculo es su centro de gravedad.

5°. Si en el paralelepípedo *AP* (*Fig*. 28.) se dividen los paralelógramos opuestos *KP* y *AE* por medio con el plano *NB*; en éste se hallará el centro de gravedad del mismo paralelepípedo : y si los paralelógramos opuestos *AM* y *CP* se dividen por medio con el plano *LD*; en éste se hallará igualmente dicho centro de gravedad: y finalmente si los paralelógramos opuestos *AQ* y *OP* se dividen por medio con el plano *HJ*, en éste se hallará tambien el referido centro. Por tanto el punto *X* comun á los tres planos *NB*, *LD* y *HJ* será el centro de gravedad del paralelepípedo *AP*; ó que es lo mismo, si se juntan los centros *G* y *F* de gravedad de los paralelógramos *KP* y *AE* opuestos con la recta *GF*, y ésta se divide por medio en *X*; será el punto *X* el centro de gravedad del paralelepípedo *AP*.

6º. El centro de gravedad de una esfera será el centro de la misma esfera: pues, si ésta se corta con un plano que pase por su centro, en dicho plano estará el centro de gravedad de la esfera; y si se corta con otros dos planos que pasen por el centro de la esfera, en dichos planos se hallará tambien el centro de gravedad de la misma esfera. Por tanto el centro de la esfera que es comun á los referidos tres planos será el centro de gravedad de la misma esfera. Con el mismo método se demostrará que el centro de gravedad de un cilindro se halla en el punto que divide por medio el exe del mismo cilindro. Que es &c.

COROLARIO I.

66. Con el mismo método expresado antes (2°) se demostrará que, si la curva BAD (*Fig.* 29.) tiene los ramos AB y AD perfectamente iguales, en su exe AC estará el centro Q de gravedad de la misma curva.

COROLARIO II.

67. Y en la suposicion antecedente la distancia del centro O de gravedad del ramo AD á la recta IK perpendicular al exe AC en el punto A será igual á la distancia del centro Q de gravedad de la curva BAD á la misma recta: pues baxadas las perpendiculares FL, HM, &c. á dicha recta, será (54) $BAD \times QA = Hh \times HM + Ff \times FL +$ &c. y partiendo por dos, se tendrá $AD \times AQ = Ff \times FL +$ &c. pero (54) $AD \times OP = Ff \times FL +$ &c. luego será $AD \times QA = AD \times OP$, y por consiguiente $QA = OP$.

COROLARIO III.

68. Tambien con el mismo método expresado en la Proposicion antecedente (4°.) se demostrará que, si en qualquiera superficie plana BAC (*Fig.* 30) la recta AF divide por medio á todas las paralelas

EG, *eg*, *&c.* terminadas en el perímetro de dicha superficie; en la recta *AF* se hallará el centro *Q* de gravedad de la misma superficie *BAC*.

COROLARIO IV.

69. Y en la suposicion antecedente la distancia del centro *O* de gravedad de la superficie *FAC* á la recta *DK* tirada paralela á las ordenadas *EG* será igual á la distancia del centro *Q* de gravedad de toda la superficie *BAC* á la dicha recta.

COROLARIO V.

70. Por los mismos principios se demostrará tambien que (*Fig.* 31.) si un plano *ABC* corta á todos los planos paralelos *DE*, *FG*, *IH*, *&c.* tirados en un sólido *BDE* y terminados en su superficie en partes iguales y semejantes; en dicho plano *ABC* estará el centro de gravedad del mismo sólido. Ahora si por el exe *BM* pasa otro plano *OBN*, que corte del mismo modo á los referidos planos paralelos, entonces el centro de gravedad del sólido *BDE* estará en el exe *BM*.

COROLARIO VI.

71. Y en la suposicion antecedente la distancia del centro de gravedad del sólido *BDE* á la rec-

ta KL paralela á la AC será igual á la distancia del centro de gravedad del sólido $BAOCMA$ á dicha recta KL.

PROPOSICION IV.

72. Determinar el centro de gravedad del perímetro de qualquier polígono $abcde$. *Fig.* 32, 33.

Divídanse (*Fig.* 32.) los lados del polígono propuesto por medio en los puntos D, H, G, F, E, en quienes estarán (65) los centros de gravedad de los respectivos lados ae, ed, dc, cb, ba; y de dichos puntos báxense perpendiculares á las dos rectas AC y AB dadas de posicion en el mismo plano del polígono, y perpendiculares entre sí. Sea el punto X el centro de gravedad que se pide determinar, y desde él báxense las perpendiculares XS y XM á las respectivas rectas AC y AB: luego serán por lo demostrado (56)

$$XS = \frac{ab \times EV + bc \times FT + cd \times GR + de \times HQ + ae \times DP}{ab + bc + cd + de + ea},$$

$$\text{y } XM = \frac{ab \times EN + bc \times FK + cd \times GI + de \times HL + ea \times DO}{ab + bc + cd + de + ea},$$

con lo que quedan determinadas las distancias del centro X de gravedad á las rectas AC y AB dadas de posicion, y por consiguiente el mismo centro.

De otro modo.

Divídanse (*Fig.* 33.) los lados ae, ed, dc, cb, ba por medio en los puntos D, H, G, F, E, y en estos se tendrán (65) los respectivos centros de gravedad de dichos lados. Tírese DH, y hágase $ae : ed = HI : ID$; y será (59) el punto I centro de gravedad de los lados ae, ed. Ahora tírese IG, y hágase $ae + ed : dc = GK : KI$; y será el punto K centro de gravedad de los lados ae, ed, dc. Tírese la recta KF, y hágase $ae + ed + dc : bc = FL : LK$; y será el punto L centro de gravedad de los lados ae, ed, dc, cb. Y finalmente tírese la recta LE, y hágase $ae + ed + dc + cb : ba = EO : OL$; y será el punto O centro de gravedad del perímetro del polígono propuesto.

PROPOSICION V.

73. Hallar el centro de gravedad de qualquiera curva AB referida al exe AH. *Fig.* 34.

Supóngase la curva AB dividida en sus elementos Ee, y que el punto C es el centro de gravedad de dicha curva. Llámense, la ordenada $IE = y$, y el elemento $Ee = ds$: luego será yds el producto del elemento Ee por su distancia al exe AH, y por consiguiente $S.yds$ será la suma de los productos de cada elemento de la curva AB multiplicado por su respectiva distancia al exe AH; pero dicha suma partida por la suma de todos los elementos es igual (56) á la distancia CG del centro de gravedad al exe AH: luego se tendrá $CG = \frac{S.yds}{AB}$.

Si sobre el exe AH en el punto A se levanta la perpendicular AN, y se baxan á ella las perpendiculares $EL = y$, y CM; con el mismo raciocinio se demostrará ser $CM = \frac{S.yds}{AB}$. Que es &c.

EXEMPLO.

74. Sea la curva AB la Parábola Apoloniana, cuyo exe AH, y parámetro $= 2a$. *Fig.* 34.

Por lo demostrado (73) la expresion de la distancia CG es $\frac{S.yds}{AB}$; pero en la Parábola de la equacion $y^2 = 2ax$ es (III. 223) $ds = \frac{dy\sqrt{(y^2+a^2)}}{a}$: luego será $CG = \frac{S.ydy\sqrt{(y^2+a^2)}}{a \times AB} = \frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + A}{3a \times AB}$. La constante A que se añade á la integral es igual á la cantidad $-a^3$, porque siendo $CG = o$, será tambien la ordenada $y = o$. Por tanto se tendrá

$CG = \frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - a^3}{3a \times AB}$, en quien la y será la ordenada BH que sale desde el extremo B del arco AB. Tambien por lo demostrado la expresion de la distancia CM es $\frac{S.yds}{AB}$, en quien la ordenada $EL = y$; pero en la parábola de la equacion $2ay = x^2$, es $ds = \frac{dx\surd(a^2+x^2)}{a}$: luego será $CM = \frac{S.x^2 dx\surd(a^2+x^2)}{2a^2 \times AB}$. La diferencial $x^2 dx \surd(a^2+x^2)$ se transforma en $\frac{a^2}{2} \times dz \surd(z^2 - \frac{a^2}{4})$ por medio de la substitucion $a^2 + x^2 = a \times (z + \frac{a}{2})$. Por tanto se tendrá

$$CM = \frac{S.dz\surd(z^2 - \frac{a^2}{4})}{4AB} = \frac{z\surd(z^2-\frac{a^2}{4}) + \frac{a^2}{4} \times L.(z - \surd(z^2 - \frac{a^2}{4})) + A}{8AB}$$

(III. 125). La constante A es igual á $-\frac{a^2}{4} \times L.\frac{a}{2}$; porque siendo $x = o$, será $z = \frac{a}{2}$, y $CM = o$. Por tanto será la distancia

$$CM = \frac{z\surd(z^2-\frac{a^2}{4}) + \frac{a^2}{4} \times L.(z - \surd(z^2-\frac{a^2}{4})) - \frac{a^2}{4} \times L.\frac{a}{2}}{8AB}.$$

Si se prolonga la ordenada BH hasta encontrar el otro ramo parabólico en K, y en el exe AH se toma la parte AG igual á la distancia CM que se ha determinado anteriormente; el punto *G* será (67) el centro de gravedad del arco parabólico *KAB*.

PROPOSICION VI.

75. Hallar el centro de gravedad de qualquier curva *AB* referida al focus *F*. *Fig.* 35.

Supóngase la curva *AB* dividida en sus elementos, uno de los quales sea *Ee*, y que el punto *C* es el centro que se busca. Desde los puntos *C* y *E* báxense las perpendiculares *CG* y *EI* á la ordenada *AF*, y tírese la ordenada *FE*. Llámense, el ángulo $AFE = u$ referido al radio constante r, la ordenada $FE = y$, y el elemento $Ee = ds$. En la ordenada *FE* tómese $FO = r$, y tírese la recta *OP* perpendicular á la *AF*. Por la semejanza de los triángulos *FOP*, *FEI*, es $FO : OP = FE : EI$, esto es, $r : Sc.u = y : EI = \frac{y \times Sc.u}{r}$: luego el elemento *Ee* multiplicado por su distancia *EI* á la ordenada *AF* será igual á $\frac{ySc.u \times ds}{r}$, y por consiguiente $\frac{S.ySc.u \times ds}{r}$ será la suma de todos los productos de cada elemento de la curva *AB* multiplicado por su respectiva distancia á la ordenada *AF*; pero dicha suma partida por la suma de todos los elementos, que componen la curva AB, es igual (56) á la distancia CG del centro C de gravedad á la misma ordenada AF: luego será $CG = \frac{S.ySc.u \times ds}{r \times AB}$. Si sobre la ordenada FA en el punto F se levanta la perpendicular FL, y se baxan á ella las perpendiculares EL, CM y ON, con el mismo raciocinio se demostrará ser la distancia $CM = \frac{S.yCc.u \times ds}{r \times AB}$. Que es &c.

EXEMPLO.

76. Se pide hallar el centro de gravedad del arco circular DB, cuyo radio $BF = r$. *Fig.* 36.

Divídase el arco DB por medio en A, y tírese el radio FA; y por ser los arcos AD, AB perfectamente iguales, se hallará (66) en FA el centro O de gravedad que se busca, y tirada la recta FL perpendicular al radio FA, será FO igual (67) á la distancia CM del centro C de gravedad del arco AB á la misma recta FL. Consta por lo demostrado (75) que es $CM = \frac{S.yCc.u \times ds}{r \times AB}$; pero en el caso presente son $y = r$, $s = u$, y $ds = du$: luego será $CM = \frac{S.rCc.u \times du}{r \times AB}$; pero es (III. 114)

$D.Sc.u = \frac{Cc.u \times du}{r}$: luego se tendrá $CM = \frac{S.r \times D.Sc.u}{AB}$ $= \frac{r \times Sc.u}{AB}$, siendo el valor de la constante cero, porque en la suposicion del arco $u = o$ es $CM = o$. Por tanto la distáncia CM ó bien la del centro O de gravedad del arco DB al centro F del círculo es quarta proporcional al arco AB, á su seno y al radio, ó bien al arco DAB, á su cuerda, y al radio. Luego si el arco DAB es la semicircunferencia del círculo, la distancia de su centro de gravedad al centro de la figura será quarta proporcional á la semicircunferencia, al diámetro, y al radio, ó bien tercera proporcional al quadrante y al radio.

PROPOSICION VII.

77. Determinar el centro de gravedad de qualquier triángulo ABC. *Fig.* 37.

Divídase la base AC por medio en D, y tírese la recta BD, en quien estará (68) el centro de gravedad que se busca : asimismo dividido el lado BC por medio en E, y tirada la recta AE, estará tambien dicho centro en AE : luego el centro de gravedad del triángulo ABC será el punto F, donde se cortan las rectas AE y BD. Tírese la

Fig. 25.

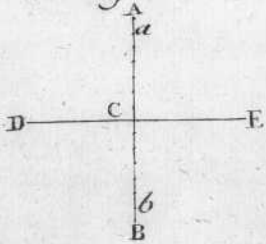


Fig. 26.

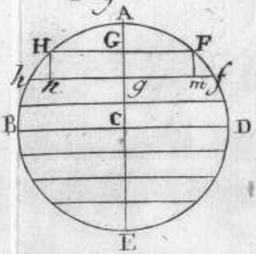


Fig. 27 Pag. 49.

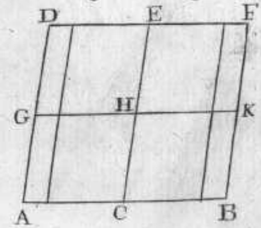


Fig. 28.

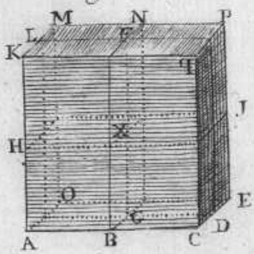


Fig. 29.

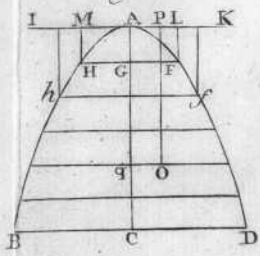


Fig. 30.

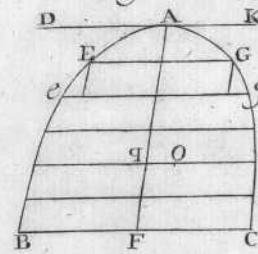


Fig. 31.

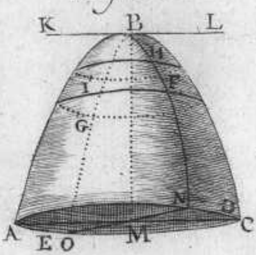


Fig. 32.

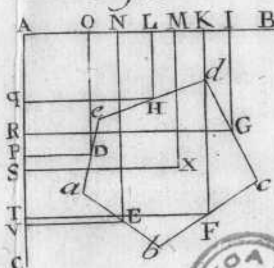


Fig. 33.

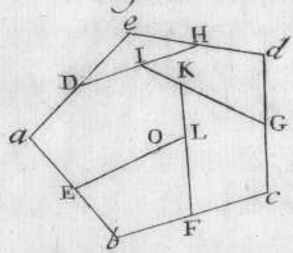


Fig. 34.

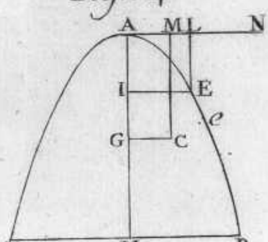


Fig. 35.

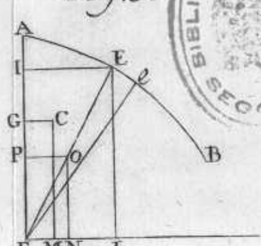
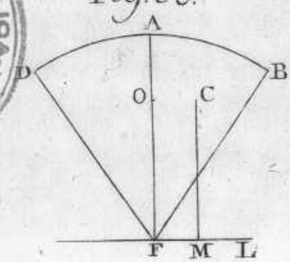


Fig. 36.



Lam. III.

recta DE; y por ser $CD:DA=CE:EB$, será dicha recta DE paralela á la AB: luego $AB: DE=AC:CD$; y siendo $AC=2CD$, será tambien $AB=2DE$; pero por la semejanza de los triángulos AFB, DFE es $AB:ED=AF:FE$: luego será $AF=2FE$, y por consiguiente $AF=\frac{2}{3}AE$. Del mismo modo se demostrará ser $BF=\frac{2}{3}BD$; y dividido el lado AB por medio en G, y tirada la recta CG, será tambien $CF=\frac{2}{3}CG$. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

78. Hallar el centro de gravedad del trapezio $ABCD$, cuyos lados CD y AB son paralelos. *Fig.* 38.

Divídanse los lados AB y CD por medio en los puntos F y E; y tírese la recta FE, en quien estará (68) el centro de gravedad que se busca. Tambien tírense las rectas AE y DF; y tómense $EK=\frac{1}{3}AE$, y $FH=\frac{1}{3}DF$; por consiguiente (77) en los puntos K y H estarán los centros de gravedad de los respectivos triángulos CAD y ADB: luego tirada la recta KH, en ésta se tendrá (59) el centro de gravedad de dichos triángulos ó bien del trapezio $ACDB$; pero dicho centro debe estar en la recta EF: luego el punto G, donde se cortan las rectas KH y EF, será el centro de gravedad del trapezio $ACDB$. Ahora vamos á determinar la distancia FG; para lo qual tírense las rectas KL y HI paralelas á la CD. Siendo, pues, $EK=\frac{1}{3}AE$, y $FH=\frac{1}{3}DF$, serán $KL=\frac{1}{3}AF$, $EL=\frac{1}{3}EF$, $HI=\frac{1}{3}ED$, $FI=\frac{1}{3}EF$, y por consiguiente $LI=\frac{1}{3}EF$. Por la semejanza de los triángulos KLG, GIH, es $KL:HI=LG:GI$: luego será $KL+HI:HI=LI:GI$, ó bien $\frac{1}{3}(AF+ED):\frac{1}{3}ED=\frac{1}{3}EF:GI$, de donde $GI=\frac{ED\times EF}{3\times(AF+ED)}$; por consiguiente se tendrá $FG=FI+IG=\frac{1}{3}EF+\frac{ED\times EF}{3\times(AF+ED)}=EF\times\frac{AF+2ED}{3\times(AF+ED)}$. Que es &c.

PROPOSICION IX.

79. Hallar el centro de gravedad del area de qualquier polígono.

Divídase el polígono dado en triángulos; hállese (77) el centro de gravedad de cada uno de ellos; y finalmente determínese el centro de gravedad comun á los mismos con método semejante á el que se ha enseñado (72) para determinar el centro de gravedad del perímetro de qualquier polígono. Adviértase que si el polígono dado es equilátero y equiángulo, su centro de gravedad se tendrá en el centro del círculo circunscrito al mismo polígono. Que es &c.

PROPOSICION X.

80. En qualquiera curva ADF referida al exe AB determinar el centro de gravedad del area ABF. *Fig.* 39.

El area ABF considérese dividida en sus elementos $EedD$; y tírese la recta AR perpendicular al exe AB en A. Sea C el centro de gravedad que se busca, y desde él báxense las perpendiculares CG y CH á las respectivas rectas AR y AB. Llamadas las coordenadas $AE = x$, $ED = y$, será (III. 202) el elemento $EedD = ydx$, y la distancia del centro de gravedad del mismo elemento á la recta AR será igual á x: luego $ydx \times x$ será el producto del elemento $EedD$ multiplicado por la distancia del centro de gravedad del mismo elemento á la recta AR; por consiguiente $S.yxdx$ será la suma de todos los productos de cada elemento del area ABF multiplicado por la respectiva distancia de su centro de gravedad á la recta AR; pero la suma de dichos productos partida por la suma de todos los elementos es igual (56) á la distancia CG: luego se tendrá $CG = \frac{S.yxdx}{ABF}$.

Ahora para determinar la distancia CH del centro C de gravedad al exe AB, obsérvese que $\frac{1}{2}y$ es (65) la distancia del centro de gravedad del rectángulo evanecente EM, ó bien (III. 9) del trapezio $EedD$, al exe AB; por consiguiente $ydx \times \frac{1}{2}y$ ó bien $\frac{1}{2}y^2dx$ será el producto del elemento $EedD$ multiplicado por la distancia de su centro de gravedad al exe AB, y $S.\frac{1}{2}y^2dx$ será la suma de todos los productos de cada elemento del area ABF multiplicado por la respectiva distancia de su centro de gravedad al exe AB; pero la suma de dichos productos partida por la suma de todos los elementos es igual (56) á la distancia CH: luego será $CH = \frac{S.y^2dx}{2ABF}$. Que es &c.

EXEMPLO I.

81. Sea la curva ADF la Parábola Apoloniana, cuyo parámetro $= 2a$. *Fig.* 39.

Consta por lo demostrado (80) que es $CG = \frac{S.yxdx}{ABF}$; pero $y^2 = 2ax$ por la equacion á la curva propuesta, de donde $y = \sqrt{2a} \times x^{\frac{1}{2}}$: luego será $CG = \sqrt{2a} \times \frac{S.x^{\frac{3}{2}}dx}{ABF} = \frac{2\sqrt{2a} \times x^{\frac{5}{2}}}{5ABF} = \frac{2yx^2}{5ABF}$. Ahora substituyendo en lugar de x la abscisa $AB = b$, y en lugar de y la ordenada $BF=c$, se tendrá la distancia $CG=\frac{3}{5}\times b$. Tambien por lo demostrado (80) es $CH=\frac{S.y^2dx}{2ABF}$; pero $y^2=2ax$: luego será $CH=$

$\frac{S.2axdx}{2ABF}=\frac{2ax^2}{4ABF}=\frac{y^2x}{4ABF}$; y haciendo las substituciones antecedentes se tendrá $CH=\frac{3}{8}\times c$. Por tanto tomando en el exe AB la parte $AH=\frac{3}{5}AB$, y sobre el mismo exe en el punto H levantando la perpendicular $HC=\frac{3}{8}BF$, se tendrá en el punto C el centro de gravedad del area dada ABF.

EXEMPLO II.

82. Se pide determinar el centro de gravedad del segmento circular ABF, cuyo radio $AL=a$. *Fig.* 40.

Supuestas las denominaciones anteriores, será $y^2=2ax-x^2$, de donde $y=\sqrt{(2ax-x^2)}$; pero es $CG=\frac{S.yxdx}{ABF}$: luego será $CG=\frac{S.\sqrt{(2ax-x^2}\times xdx}{ABF}$

$$=\frac{S.\sqrt{(2ax-x^2)}\times(xdx-adx)}{ABF}+\frac{S.adx\sqrt{(2ax-x^2)}}{ABF}=$$

$$\frac{-(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ABF}+\frac{ax-a^2}{2}\times\frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{ABF}+\frac{a^2}{2}\times\frac{u}{ABF},$$

siendo u un arco de círculo, cuyo seno verso $=x$ (III. 121). Es evidente que el valor de la constante es cero en el caso presente. Ahora para determinar el valor de $CH = \frac{S.y^2 dx}{2ABF}$, substitúyase en lugar de y^2 su valor $2ax - x^2$; y se tendrá $CH = \frac{S.(2ax - x^2) \times dx}{2ABF} = \frac{ax^2 - \frac{1}{3}x^3}{2ABF}$, por ser en este caso el valor de la constante, que se debe añadir á toda integral, igual á cero. Por medio de los valores hallados de las distancias CG y CH se hallará el centro de gravedad de qualquier segmento dado, hechas las correspondientes substituciones de los valores de la x, y del area ABF: como, por exemplo, si se ha de determinar el centro de gravedad del quadrante circular, se harán las substituciones, $x = a$, $ABF = ALN = \frac{aq}{2}$, y $u = q$, llamado q el quadrante de la circunferencia del mismo círculo: luego será la distancia del centro de gravedad del quadrante ALN á la recta AR igual á $a - \frac{2a^2}{3q}$, y la distancia del mismo centro al radio AL igual á $\frac{2a^2}{3q}$: y si se pide determinar el centro de gravedad del semicírculo, se harán las substituciones $x = 2a$, ABF igual á dicho semicírculo $= aq$, $u = 2q$; y resultará ser la distancia del centro de gravedad del semicírculo á la recta AR igual al radio a, y la distancia del mismo centro al radio AL igual á $\frac{2a^2}{3q}$.

PROPOSICION XI.

83. En qualquiera curva ADB referida al focus F determinar el centro de gravedad del area AFB. *Fig.* 41.

Considérese el area AFB dividida en sus elementos DFd, y que DE es el arco infinitésimo descrito con la ordenada variable FD. Sea C el centro de gravedad del area AFB, y desde él báxese la recta CG perpendicular á la ordenada AF. Llámense, la ordenada $FD = y$, el arco infinitésimo $DE = dx$, y el ángulo $AFD = u$ referido al radio constante r. Ahora si se supone el arco ó cuerda evanecente Dd dividida por medio en N, y tirada la recta FN se toma en ella la parte $FM = \frac{2}{3} FN$, será (77) el punto M el centro de gravedad del triángulo evanecente DFd; y tomada $FI = \frac{2}{3} FD$, y baxada la perpendicular IK á la ordenada AF, la distancia del punto M á la ordenada AF será igual á la IK: luego $DFd \times IK$ será el producto del elemento DFd multiplicado por la distancia del centro de gravedad del mismo elemento á la recta AF; pero (III. 214) $DFd = \frac{1}{2}ydx$, y $IK = \frac{2ySc.u}{3r}$: luego dicho producto será igual á $\frac{y^2 Sc.u \times dx}{3r}$; por consiguiente $\frac{S.y^2 Sc.u \times dx}{3r}$ será la suma de todos los productos de cada elemento del area AFB multiplicado por la respectiva distancia de su centro de gravedad á la recta AF; pero la suma de dichos productos partida por la suma de todos los elementos es igual (56) á la distancia CG del centro C de gravedad á la recta AF: luego se tendrá $CG = \frac{S.y^2 Sc.u \times dx}{3r \times AFB}$; y siendo en las curvas referidas á los focus (III. 217) $dx = \frac{ydu}{r}$, será tambien $CG = \frac{S.y^3 Sc.u \times du}{3r^2 \times AFB}$. Ahora sobre la ordenada AF en el focus F levántese la perpendicular FT, y desde el punto C báxese á ella la perpendicular CH; y con el mismo raciocinio se demostrará ser $CH = \frac{S.y^2 Cc.u \times dx}{3r \times AFB} = \frac{S.y^3 Cc.u \times du}{3r^2 \times AFB}$. Que es &c.

EXEMPLO.

84. Se pide hallar el centro de gravedad en el

sector circular *BRF*, cuyo radio $BF = r$. *Fig.* 42.

Divídase el arco *BR* por medio en *A*; tírese el radio *FA*, y sobre éste levántese en el punto *F* la perpendicular *FT*. Siendo, pues, los sectores *AFR*, *AFB* iguales y semejantes, el centro *O* de gravedad del sector *BFR* estará (68) en el radio *AF*, y la distancia *OF* á la recta *FT* será (69) igual á la distancia *CH* del centro *C* de gravedad del sector *AFB* á dicha recta. Consta ser (83) la distancia $CH = \frac{S.y^3 Cc.u \times du}{3r^2 \times AFB}$; pero en el círculo $y = r$, (III. 114) $Cc.u \times du = r \times D.Sc.u$, y el sector $AFB = \frac{1}{2} r \times AB$: luego será *CH* ó bien $OF = \frac{S.r^3 \times r \times D.Sc.u}{3r^2 \times \frac{1}{2} r \times AB} = \frac{2}{3} r \times \frac{Sc.u}{AB}$: de donde resulta que la distancia del centro *O* de gravedad del sector circular *RFB* al centro *F* de la figura es quarta proporcional al arco *AB*, á su seno, y á dos terceras partes del radio, ó bien la quarta proporcional al arco *RAB*, á su cuerda, y á dos terceras partes del radio.

PROPOSICION XII.

85. Determinar el centro de gravedad de qualquier Pirámide *ADBFE*. *Fig.* 43.

Sean, *AC* la altura de dicha pirámide, y el punto *g* centro de gravedad de su base. Tírese la recta Ag, en quien se hallará (70) el centro G de gravedad de toda la pirámide: tambien tírense los planos $IKLH$, $iklh$ paralelos á la base $DEFB$, cuyos planos se considerarán infinitamente próxîmos, y desde el punto R, donde la recta Ag encuentra el plano $IKLH$, báxese la recta RP perpendicular á la AC. Llámense, $AP=x$, $AC=a$, $BDEF=bb$. Y siendo los paralelógramos $IKLH$, $DEFB$ semejantes, será $DEFB:IKLH=(DB)^2:(IH)^2$; pero por la semejanza de los triangulos DAB y IAH, BAg y HAR, gAC y RAP, es $DB:IH=AB:AH=Ag:AR=AC:AP$, de donde $(DB)^2:(IH)^2=(AC)^2:(AP)^2$: luego será $DEFB:IKLH=(AC)^2:(AP)^2$; y dando valores, se tendrá $bb:IKLH=a^2:x^2$; por consiguiente $IKLH=\frac{b^2x^2}{a^2}$; y multiplicando esta expresion por dx, se tendrá que $\frac{b^2x^2dx}{a^2}$ es el valor del elemento $IKLHhikl$ de la pirámide dada. Por tanto el producto de dicho elemento por la distancia de su centro de gravedad á la recta NM perpendicular á la AC será igual á $\frac{b^2x^3dx}{a^2}$; y $\frac{b^2}{a^2}\times S.x^3dx$ ó bien $\frac{b^2x^4}{4a^2}$ será igual (54) á $ADBFE\times AO$, ó bien á $bb \times \frac{1}{3}a \times AO$: luego substituyendo a en lugar de x, será $\frac{b^2a^4}{4a^2} = b^2 \times \frac{1}{3}a \times AO$, de donde resulta ser $AO = \frac{3}{4}a$, y por consiguiente $AG = \frac{3}{4}Ag$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

86. Determinar el centro de gravedad de un sólido X, como tambien él de la superficie del mismo sólido. *Fig.* 44, 45.

1°. Considérese dividido el sólido X (*Fig.* 44.) en sus elementos, y uno de ellos sea $FfoO$. Llámense, dz el elemento $FfoO$, y t la distancia ET del centro de gravedad de dicho elemento al plano NM dado de posicion. Supóngase que el punto C es el centro de gravedad del sólido X, y tírese la recta CA perpendicular á dicho plano NM: luego será (56) $CA = \frac{S.tdz}{X}$. Es evidente que esta misma fórmula vale para expresar las distancias CY y CJ á otros dos planos MU y MV perpendiculares al plano MN, con tal que por t se entienda la distancia variable del centro de gravedad de cada elemento del sólido al correspondiente plano dado de posicion. Si dicho sólido X (*Fig.* 45.) está producido por la revolucion del area ABD al rededor del exe AB, en este caso el centro C de gravedad del sólido AHI estará (70) en el exe AB, y será $t = x$, y (III. 233) $dz = \frac{p}{2r} \times y^2\, dx$, llamadas las coordenadas $EA = x$, $FE = y$, y $\frac{p}{2r}$ la razon constante de la periferia al diámetro : luego en dicho caso la fórmula de la distancia CA á la recta NM perpendicular al exe AB en el punto A será $\frac{p}{2r} \times \frac{S.y^2 x dx}{AHI}$.

2°. Asimismo considerando dividida la superficie (*Fig.* 44.) del sólido X en sus elementos, y llamando dz qualquiera de los mismos elementos, y t la distancia variable del centro de gravedad de cada elemento al plano NM, será la distancia CA del centro C de gravedad á dicho plano igual á $S.tdz$ partida por la referida superficie. La misma fórmula vale para expresar las distancias CY y CJ á los planos MU y MV dados de posicion. Y si la superficie del sólido está producida (*Fig.* 45.) por la revolucion de la linea AFD al rededor del exe AB, en este caso el centro C de gravedad de dicha superficie estará en el exe AB, y será $t = x$, y (III. 245) $dz = \frac{p}{r} \times y\, ds$: luego en dicho caso la fórmula de la distancia CA á la recta NM perpendicular al exe AB en el punto A será $\frac{p}{r} \times S.xyds$ partida por la dicha superficie del sólido, en cuya expresion es ds la diferencial de la linea AF. Que es &c.

EXEMPLO I.

87. Se pide hallar el centro de gravedad del cono descrito por la revolucion del triángulo rectángulo ABD al rededor del lado AB. *Fig.* 46.

Llámense las rectas $AB=a$, $BD=b$, la abscisa $AE=x$, y la ordenada $EF=y$ perpendicular al exe AB; y supóngase que el punto C es el centro de gravedad que se busca, cuyo centro estará (70) en el exe AB del cono propuesto. Siendo, pues, los triángulos ABD, AEF semejantes, tendrán proporcionales los lados, esto es, $AB:BD = AE:EF$, ó bien $a:b=x:y$, de donde resulta ser $y=\frac{bx}{a}$; y substituyendo el valor de la y en la expresion de la distancia $CA=\frac{p}{2r} \times \frac{S.y^2xdx}{AHI}$, será $CA=\frac{p}{2r} \times \frac{S.b^2x^3dx}{a^2 \times AHI} = \frac{pb^2x^4}{8a^2r \times AHI}$. Ahora substituyendo en lugar de x toda la altura $AB=a$, y en lugar del cono AHI su valor $\frac{a}{3} \times \frac{pb^2}{2r}$, se hallará $CA = \frac{3}{4} a$. Por tanto si en el exe AB del cono $AIKHD$ se toma desde el vértice A la parte AC igual á las tres quartas partes del mismo exe, en el punto C estará el centro de gravedad de dicho cono.

EXEMPLO II.

88. Hallar el centro de gravedad de un cono truncado formado por la revolucion del trapezio $EBDF$ cerca del exe EB. *Fig*. 46.

Prolónguense las rectas BE, DF, hasta que concurran en el punto A; tómese $AC = \frac{3}{4} AB$, como tambien $AR = \frac{3}{4} AE$, y en los puntos C y R estarán respectivamente los centros de gravedad (87) del cono mayor y del menor. Supóngase que el punto G es el centro de gravedad del cono truncado; y por ser el punto C centro de gravedad del cono mayor, ó bien del cono menor y del cono truncado, y el punto R centro de gravedad del cono menor, será (58) el cono truncado reunido en G al cono menor reunido en R como CR á CG. Por tanto hallando la quarta proporcional CG al cono truncado, al cono menor, y á CR, será el punto G asi determinado el centro de gravedad del cono truncado. Ahora si se llaman $AB = a$, $BD = b$, y $AE = c$, por la semejanza de los triángulos ABD y AEF se tendrá $EF = \frac{bc}{a}$: luego serán los conos $AKD = \frac{p}{r} \times \frac{ab^2}{6}$, $AOF = \frac{p}{r} \times \frac{b^2c^3}{6a^2}$, y por consiguiente el cono truncado $OHFI = \frac{pb^2}{6ra^2} \times (a^3 - c^3)$: luego la distancia CG será quarta proporcional á las cantidades $\frac{pb^2}{6ra^2} \times (a^3 - c^3)$, $\frac{p}{r} \times \frac{b^2c^3}{6a^2}$, y $\frac{3}{4} \times (a - c)$, esto es, será $CG = \frac{\frac{3}{4}c^3}{a^2 + ac + c^2}$ y $GA = \frac{\frac{3}{4}c^3}{a^2 + ac + c^2} + \frac{3}{4}a$.

EXEMPLO III.

89. Si en el cono truncado $OKDF$ está inscrito el cilindro LS cerca del mismo exe EB del cono truncado, se pide determinar el centro de gravedad del sólido comprehendido entre las superficies del cono truncado y del cilindro. *Fig.* 47.

Determínese (88) el centro de gravedad G del cono truncado, y el centro P de gravedad del cilindro LS que se tendrá (65) dividiendo el exe EB por medio en P. Supóngase que el punto Q es el centro de gravedad del sólido que se busca; y por ser el punto G centro de gravedad del cono truncado, esto es, del sólido que se busca y del cilindro, y el punto P el centro de gravedad del cilindro LS, será (58) el sólido comprehendido entre la superficie del cono truncado y la del cilindro reunido en Q al cilindro LS reunido en P como GP á GQ, y por esta quarta proporcional se tendrá determinado el centro Q de gravedad que se busca. Supuestas las denominaciones anteriores (88) y además el radio $LE = h$, será el cilindro $LS = \frac{ph^2}{2r} \times (a - c)$; pero el cono truncado $OKDF$ $= \frac{pb^2}{6ra^2} \times (a^3 - c^3)$: luego el sólido comprehendido entre la superficie del cono truncado y la del cilindro será igual á $\frac{pb^2}{6ra^2} \times (a^3 - c^3) - \frac{ph^2}{2r} \times (a - c)$, y $GP = GA - AP = \frac{\frac{3}{4}c^3}{a^2 + ac + c^2} + \frac{3}{4}a - (c + \frac{a - c}{2}) = \frac{a^3 - a^2c - ac^2 + c^3}{4 \times (a^2 + ac + c^2)} = \frac{m^3}{4n^2}$, llamando $m^3 = a^3 - a^2c - ac^2 + c^3$, y $n^2 = a^2 + ac + c^2$ por facilidad del cálculo: luego la distancia GQ será quarta proporcional de las cantidades $\frac{pb^2}{6ra^2} \times (a^3 - c^3) - \frac{ph^2}{2r} \times (a - c)$, $\frac{ph^2}{2n} \times (a - c)$, y $\frac{m^3}{4n^2}$, esto es, $GQ = \frac{3a^2h^2m^3}{4n^2 \times (b^2n^2 - 3a^2h^2)}$.

EXEMPLO IV.

90. Hallar el centro de gravedad de la superficie convexâ del cono formado por la revolucion del triángulo rectángulo ABD al rededor del lado AB. *Fig.* 46.

Supónganse la construccion de la figura y las denominaciones expresadas antes (87); tírense las rectas Fn y fe respectivamente paralelas á las AB y BD; consíderese la ordenada fe infinitamente próxîma á la FE; y finalmente llámese el lado $AD = c$. Sea el punto C el centro de gravedad de la superficie convexâ del cono propuesto. Siendo, pues, los triángulos Fnf, ABD, AEF semejantes entre sí, se tendrán las proporciones, esto es, $Ff : Fn = AD : AB$, $AB : BD = AE : EF$; y dando valores, serán $ds : dx = c : a$, $a : b = x : y$; de donde resulta ser $ds = \frac{cdx}{a}$, $y = \frac{bx}{a}$: luego substituyendo estos valores en la expresion hallada (86. 2°.) de la distancia CA de dicho centro C de gravedad á la recta NM, será $CA = \frac{pbc}{ra^2} \times S.\,x^2 dx$ partida por la superficie convexâ del cono propuesto; pero $S.x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, y dicha superficie es igual

(III. 250. 1°.) á la circunferencia $DHKI$ multiplicada por $\frac{1}{2}AD$, esto es, igual á $\frac{pb}{r} \times \frac{1}{2}c$: luego será $CA = \frac{pbc}{ra^2} \times \frac{x^3}{3} : \frac{pb}{r} \times \frac{1}{2}c$; y substituyendo en lugar de x la altura $AB = a$, se tendrá $CA = \frac{2}{3}a$.

PROPOSICION XIV.

91. Si qualquier cantidad A, ya sea linea ó superficie, puesta en el mismo plano con el exe de rotacion se mueve al rededor de él: digo que la superficie ó el sólido producido es igual al producto de la respectiva cantidad A producente multiplicada por la circunferencia descrita por su centro de gravedad. *Fig.* 48, 49.

1°. Sea la curva AM (*Fig.* 48.) que se mueve al rededor del exe HG puesto en el mismo plano, y el centro de gravedad de dicha curva sea en C; la superficie formada por la revolucion de la curva AM será igual al producto de la misma AM multiplicada por la circunferencia descrita por el centro C de gravedad. *Fig.* 48.

Tírense las rectas CE, DK perpendiculares al exe HG, y consíderese dividido el arco AM en sus elementos Dd. Llámense, $Dd = ds$, y la distancia de qualquier elemento Dd al exe HG, esto es, $DK = y$.

Consta (73) ser $S.yds = AM \times CE$; y multiplicando esta equacion por $\frac{p}{r}$, en quien p expresa la periferia descrita con el radio constante r, será también $S.\frac{py}{r} \times ds = AM \times \frac{p \times CE}{r}$; pero $\frac{p \times CE}{r}$ es la circunferencia descrita por el punto C, y $\frac{p}{r} \times S.yds$ es (III. 246) la superficie producida por la revolucion de la curva AM al rededor del exe HG: luego esta superficie será igual al producto de la curva AM por la circunferencia descrita por el centro C de gravedad de dicha curva. Que es lo primero.

2°. Sea la superficie $HAFG$ que se mueve al rededor del exe HG puesto en el mismo plano, y el centro de gravedad de dicha superficie sea el punto C: digo que el sólido formado por la revolucion del area $HAFG$ cerca del exe HG es igual al producto del area $HAFG$ multiplicada por la circunferencia descrita por el centro C de gravedad. *Fig.* 49.

Considerese el area $HAFG$ dividida en sus elementos $DdnN$; tírese la recta CE perpendicular al exe HG, y desde el punto L centro de gravedad del paralelógramo No, ó trapezio evanecente

$ND\,dn$, báxese la perpendicular LK al exe HG. Llámense, la abscisa $HN=x$, la ordenada $ND=y$; y serán $ND\,dn=y\,dx$ (III. 202) y $LK=\frac{1}{2}y$ (65). Consta ser $S.\frac{1}{2}y^2\,dx=HAFG\times CE$ (80); y multiplicando esta equacion por $\frac{p}{r}$, será tambien $\frac{p}{2r}\times S.y^2\,dx=HAFG\times\frac{p\times CE}{r}$; pero $\frac{p}{2r}\times S.y^2\,dx$ es (III. 233) el sólido formado por la revolucion del area $HAFG$ al rededor del exe HG, y $\frac{p\times CE}{r}$ es la circunferencia descrita por el punto C: luego el sólido formado por la revolucion del area $HAFG$ cerca del exe HG es igual al producto de la superficie $HAFG$ multiplicada por la circunferencia descrita por el centro C de gravedad de la misma superficie. Que es &c.

ESCOLIO.

92. Adviértase que si parte de la cantidad que se mueve al rededor del exe está cortada por el mismo exe, entonces la diferencia de las dos cantidades, que se producen por la revolucion, será igual á la cantidad que se mueve cerca del exe multiplicada por la circunferencia descrita por el centro de gravedad de dicha cantidad. Por tanto

Fig. 37.

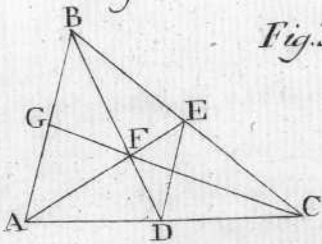


Fig. 38.

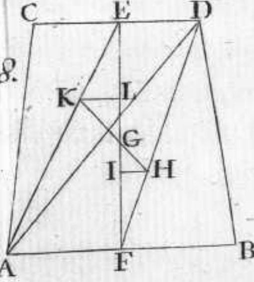


Fig. 39.

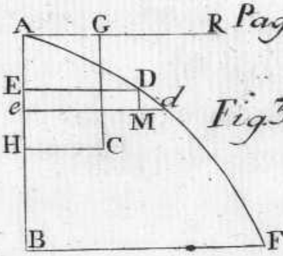


Fig. 40.

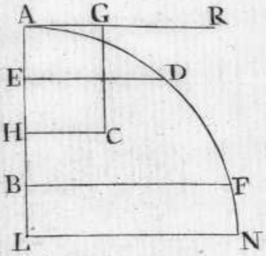


Fig. 41.

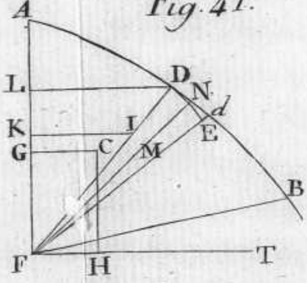


Fig. 42.

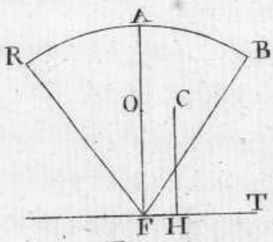


Fig. 43

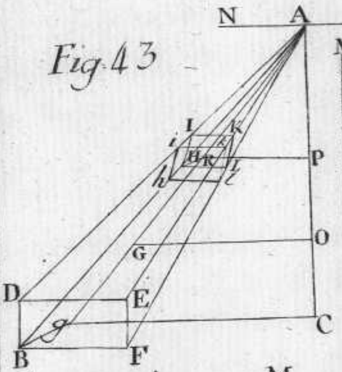


Fig. 44.

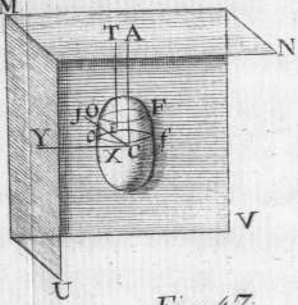


Fig. 45.

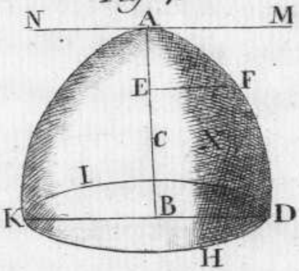


Fig. 46.

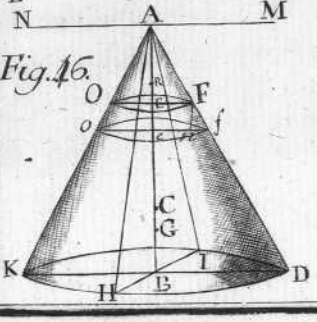


Fig. 47.

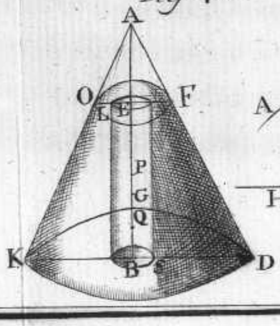
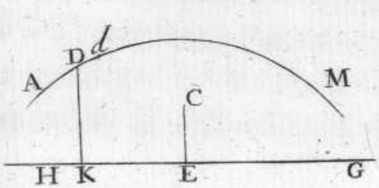
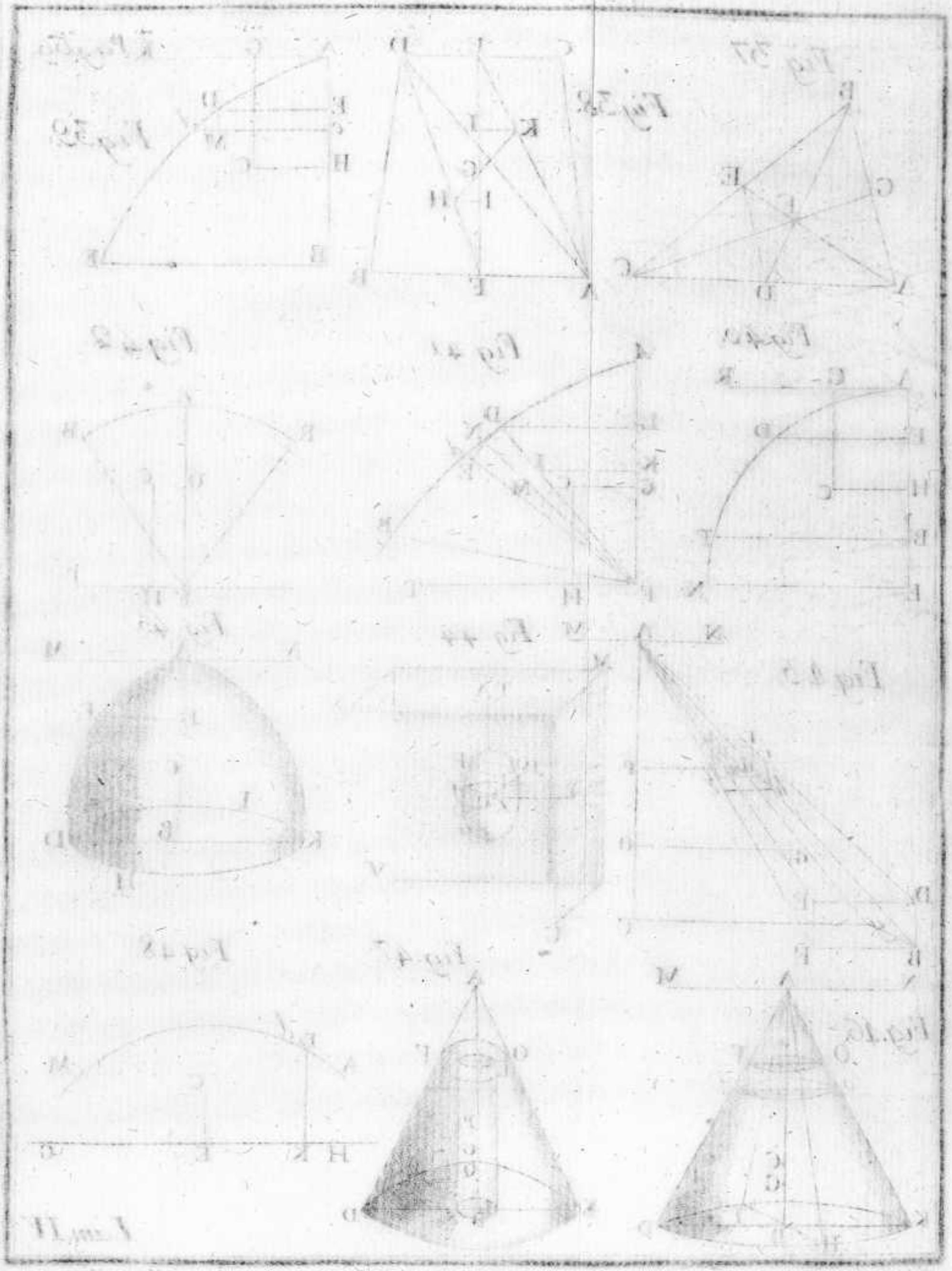


Fig. 48.





si el referido centro pasa por el exe de rotacion, las cantidades producidas por ambas partes de dicho exe serán iguales.

EXEMPLO I.

93. Determinar la superficie formada por la revolucion de la semicircunferencia DBA al rededor del exe LG paralelo al diámetro AD. *Fig.* 50.

Báxese desde el centro C la perpendicular CG al exe LG; y llámense, $CG = a$, el radio $CD = r$, y el quadrante $BD = q$. Consta (76) que tomada la recta $CH = \frac{r^2}{q}$, será el punto H centro de gravedad de la semicircunferencia ABD; por consiguiente se tendrá $HG = a - \frac{r^2}{q}$, y la circunferencia del círculo descrito con el radio HG será igual á $\frac{4q}{r} \times (a - \frac{r^2}{q})$. Ahora por el teorema general (91) se tiene que la superficie formada por la revolucion de la semicircunferencia ABD al rededor del exe LG es igual á la misma semicircunferencia multiplicada por la circunferencia descrita por el centro H de gravedad: luego la superficie que se busca será igual á $2q \times \frac{4q}{r} \times (a - \frac{r^2}{q}) = \frac{8aq}{r} \times (q - \frac{r^2}{a})$.

EXEMPLO II.

94. Se pide hallar el sólido formado por la revolucion del quadrante elíptico ABE al rededor del semiexe AB. *Fig.* 51.

Sea el punto C centro de gravedad de dicho quadrante, y desde C báxese la perpendicular CG al semiexe AB. Llámense, $AB=a$, $BE=b$, la ordenada $DF=y$, la abscisa $BF=x$; y será la equacion á la Elipse $y^2=\frac{b^2}{a^2}\times(a^2-x^2)$. Consta (80) que es $CG=\frac{S.y^2dx}{2ABE}$; y substituyendo en esta expresion el valor de y^2, será $CG=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{S.(a^2dx-x^2dx)}{2ABE}$; é integrando se tendrá $CG=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{(a^2x-\frac{x^3}{3})}{2ABE}=\frac{ab^2}{3ABE}$, substituida la cantidad a en lugar de x; por consiguiente la circunferencia descrita por el centro C de gravedad será igual á $\frac{p}{r}\times\frac{ab^2}{3ABE}$: luego por el teorema general (91) la semiesferoide que se busca será igual á $ABE\times\frac{p}{r}\times\frac{ab^2}{3ABE}=\frac{p}{r}\times\frac{ab^2}{3}$.

Se infiere que la semiesfera cuyo radio $= r$ será igual á $\frac{p}{r} \times \frac{r^3}{3} = \frac{pr^2}{3}$: luego si se pide hallar una esfera igual á una esferoide dada, se formará la equacion $\frac{pr^2}{3} = \frac{p}{r} \times \frac{ab^2}{3}$, de donde resulta ser $r^3 = ab^2$, y $r = \sqrt[3]{ab^2}$. Por tanto el radio de la referida esfera es la primera de las dos medias proporcionales entre los semiexes b y a de la Elipse.

PROPOSICION XV.

95. Determinar el centro de gravedad de un sistema de cuerpos, cuyas masas son dadas. *Fig.* 52.

Sean A, B, C, D los cuerpos que forman el sistema dado, y sus masas nómbrense a, b, c, d. Hállense (86) los centros de gravedad O, P, R, T de los respectivos cuerpos A, B, C, D, cuyas masas se podrán considerar (63) reunidas en dichos centros. Tírese la recta OP, y dividida ésta de modo que sea $a : b = PQ : QO$, será (59) el punto Q el centro de gravedad de los cuerpos A y B. Ahora tírese QR, y dividida ésta de modo que sea $a + b : c = RS : SQ$, será el punto S el centro de gravedad de los cuerpos A, B, C. Finalmente tírese ST, y dividida ST de suerte que sea $a + b + c : d = TV : VS$, será el punto V el centro de gravedad del sistema propuesto. Con el mismo método se hallará el centro de gravedad de qualquiera otro sistema dado. Que es &c.

ESCOLIO.

96. Si los cuerpos P, Q, R, S, que tienen sus centros de gravedad en los puntos P, Q, R, S, penden (*Fig.* 53.) libremente de la horizontal AB; se podrá determinar el centro O de gravedad del mismo sistema con el método siguiente. Desde dicho punto O báxense las perpendiculares OE y OF á las respectivas rectas AB y BF, y nómbrense p, q, r, s las masas de dichos cuerpos; y por ser verticales las direcciones de la gravedad que anima los mismos cuerpos, serán rectos los ángulos en A, C, D, B: luego será (63, 56) $OE = \frac{p \times AP + q \times QC + r \times RD + s \times SB}{p+q+r+s}$, y por la misma razon se tendrá $OF = \frac{p \times AB + q \times CB + r \times DB}{p+q+r+s}$. Por tanto si se corta de la recta BA la parte BE igual al valor hallado de OF, y sobre la misma BE en el punto E se levanta la perpendicular EO igual á su valor hallado antes, se tendrá el centro O de gravedad del sistema de dichos cuerpos P, Q, R, S. Se ha considerado ser AB una recta inflexîble; pero sien-

do AB una barra de madera ó metal que tiene la masa m, y el centro de gravedad en G, se tirará la recta GO, que se dividirá en H, de modo que sea $p+q+r+s:m=GH:HO$; y el punto H será el centro de gravedad del sistema de cuerpos P, Q, R, S, AB. Es evidente que si en este caso se tira la HI perpendicular á la horizontal AB, y se sostiene el punto I en equilibrio, quedarán en equilibrio los referidos cuerpos. Dígase lo mismo respecto al punto E, si se considera AB como una recta inflexîble.

De la Composicion y Descomposicion de las Potencias.

PROPOSICION XVI.

97. Si una potencia P actúa sobre el punto A segun la direccion AP, y el mismo punto debe seguir la direccion necesaria AM; hallar la potencia resultante, ó equivalente á la potencia P, segun la direccion AM. *Fig.* 54.

Exprésese la cantidad de la potencia P por la recta AP; desde el punto P báxese la perpendicular PS á la recta AM; y prolónguese MA por el punto A. Supóngase que la potencia AR es la equilibrante, esto es, que la potencia AR es igual y contraria á la potencia que moveria el punto A por la direccion AM. Considérese el punto A en el lugar infinitamente próxîmo a, y desde a báxese ab perpendicular á la direccion AP; y será Ab la aproxîmacion de dicho punto al centro de la potencia AP, y Aa será el alejamiento del mismo punto respecto al centro de la potencia AR: luego para que quede el punto A en equilibrio, deberá ser (45) $PA \times Ab = AR \times Aa$, y por consiguiente $PA : AR = Aa : Ab$; pero por la semejanza de los triángulos Aba, ASP es $Aa : Ab = AP : AS$: luego será $PA : AR = PA : AS$, y por consiguiente $AR = AS$. Por tanto si se aplica al punto A una potencia igual á AS segun la direccion AR, dicha potencia equilibrará la potencia AP segun la direccion AM, y por consiguiente la potencia equivalente á la AP segun la direccion AM es la potencia AS, por ser ésta igual y contraria á la potencia equilibrante AR. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

98. En la hipótesis de la Proposicion antecedente hallar la potencia resultante, ó equivalente á la potencia P, segun la direccion AE perpendicular á la AM. *Fig.* 55.

Exprésese la cantidad de la potencia P por la recta AP; desde el punto P báxese la perpendicular PE á la AE, y prolónguese EA por el punto A. Supóngase que la potencia AR es la equilibrante, esto es, igual y contraria á la potencia que moveria el punto A segun la direccion AE. Ahora considérese el punto A en el lugar infinitamente próxîmo a, y desde a báxese ab perpendicular á AP; y será Ab la aproxîmacion de dicho punto al centro de la potencia AP, y Aa el alejamiento del mismo punto respecto al centro de la potencia AR: luego para que quede el punto A en equilibrio, deberá ser (45) $PA \times Ab = AR \times Aa$, y por consiguiente $PA : AR = Aa : Ab$; pero por la semejanza de los triángulos Aba, AEP, es $Aa : Ab = AP : AE$: luego será $PA : AR = PA : AE$, y por consiguiente $AR = AE$: luego será AE la potencia resultante ó equivalente á la potencia AP segun la direccion AE perpendicular á la direccion necesaria AM. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

99. Si dos potencias P, Q actúan sobre el punto A segun las direcciones AP, AQ, y el mismo punto debe seguir la direccion necesaria AM; hallar la potencia resultante ó equivalente á las referidas potencias segun la direccion AM. *Fig.* 56, 57, 58.

Exprésense las cantidades de las potencias P, Q respectivamente por las rectas AP, AQ, y desde los puntos P, Q báxense las perpendiculares PS, QE á la recta AM, la que se prolongará por el punto A. Supóngase que AR es la potencia equilibrante, esto es, que AR es igual y contraria á la potencia que moveria el punto A segun la direccion AM. Ahora considérese el punto A en el lugar infinitamente próxîmo a, y desde este punto báxense las perpendiculares ab, ac á las respectivas rectas AP, AQ.

1°. Si los ángulos PAM, QAM (*Fig.* 56) son agudos, deberá ser (45) en el caso del equilibrio $PA \times Ab + QA \times Ac = AR \times Aa$; pero $PA \times Ab = SA \times Aa$, y $QA \times Ac = EA \times Aa$: luego será $SA \times Aa + EA \times Aa = AR \times Aa$; y partiendo por Aa, se tendrá $SA + EA = AR$. Por tanto si se aplica al punto A una potencia AR igual á $AS + AE$ segun la direccion AR, dicha potencia equilibrará las potencias AP, AQ segun la direccion AM, y la potencia $AS + AE$ será la resultante, ó equivalente á las potencias AP y AQ, segun la direccion AM.

2°. Si el ángulo PAM es agudo, y el ángulo QAM (*Fig.* 57.) es recto, será (45) en el caso del equilibrio $PA \times Ab = AR \times Aa$, porque la accion de la potencia AQ, esto es $QA\times Ac$, es infinitésima del segundo órden (III. 22); pero $PA\times Ab = SA\times Aa$: luego será $SA\times Aa = AR\times Aa$, de donde resulta ser $SA = AR$. Por tanto si se aplica al punto A una potencia AR igual á AS segun la direccion AR, dicha potencia equilibrará las potencias AP, AQ segun la direccion AM, y la potencia AS será la resultante ó equivalente á las potencias AP y AQ segun la direccion AM.

3°. Si el ángulo PAM es agudo, y el ángulo QAM (*Fig.* 58) es obtuso, será (45) en el caso del equilibrio $PA\times Ab = QA\times Ac + RA\times Aa$; pero $PA\times Ab = SA\times Aa$, y $QA\times Ac = EA\times Aa$: luego será $SA\times Aa = EA\times Aa + RA\times Aa$; y partiendo por Aa, se tendrá $SA = EA + RA$, de donde resulta ser la potencia equilibrante AR que se busca igual á la diferencia de las SA y AE: luego $AS - AE$ expresará la potencia resultante, ó equivalente á las potencias AP y AQ, segun la direccion AM. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

100. En la hipótesis de la Proposicion antecedente determinar la potencia resultante ó equivalente á las potencias P y Q segun la direccion GAH perpendicular á la AM. *Fig.* 59.

Exprésense las cantidades de las potencias *P* y *Q* por las respectivas rectas *AP* y *AQ*; y desde los puntos *P* y *Q* báxense las perpendiculares *PG* y *QH* á la recta *GAH*. Consta (98) que *AG* expresa la potencia resultante ó equivalente á la potencia *AP* segun la direccion *AG*, y que tambien es *AH* la potencia resultante ó equivalente á la potencia *AQ* segun la direccion *AH*; pero las potencias *AG*, *AH* están en direcciones contrarias; luego la potencia resultante ó equivalente á las potencias *AP* y *AQ* segun la direccion *GAH* perpendicular á la direccion necesaria *AM* será (48) igual á la diferencia de las potencias *AG* y *AH*. Que es &c.

PROPOSICION XX.

101. Si dos potencias *P* y *Q* dadas actúan sobre el punto *A* segun las respectivas direcciones *AP* y *AQ*, hallar la resultante de dichas potencias. *Fig.* 60, 61, 62.

Las cantidades de las potencias *P* y *Q* exprésense respectivamente por las rectas *AP* y *AQ*, y sea *AR* la potencia que tenga á ellas en equilibrio. Prolónguese *AR* por el punto *A*, y desde los puntos *P* y *Q* báxense las perpendiculares *PE* y *QS* á la recta *RAM*.

1°. Concíbase que el punto *A* (*Fig.* 60.) da un movimiento infinitésimo segun la direccion RAM, y pasa al lugar infinitamente próxîmo a: y con el mismo método expresado anteriormente (99) se hallará ser la potencia equilibrante $AR = AS + AE$.

2°. Concíbase que el punto A (*Fig.* 61.) da un movimiento infinitésimo segun la direccion GAH perpendicular á RAM, y que pasa al lugar infinitamente próxîmo a. Desde el punto a báxense las perpendiculares ab y ac á las respectivas rectas AP y QA prolongada, y desde los puntos P y Q báxense las perpendiculares PG y QH á la recta GAH: luego por estar (sup.) el punto A en equilibrio, deberá ser (45) la accion de aproxîmacion $PA \times Ab = QA \times Ac$ accion de alejamiento, porque la accion de la potencia AR es evanecente respecto á ellas; pero $PA \times Ab = GA \times Aa$, y $QA \times Ac = HA \times Aa$: luego será $GA \times Aa = HA \times Aa$, y por consiguiente $GA = AH$. Por tanto en el caso del equilibrio de las potencias AP, AQ, AR, debe ser $AG = AH$, ó bien $PE = QS$, como tambien por lo demostrado anteriormente la potencia equilibrante $AR = AE + AS$. Córtese ahora la recta $AM = AR$, y tírense las rectas PM y QM. Y siendo $AM = AE + AS$, será tambien $SM = AE$; pero $PE = QS$, y los ángulos en S y E iguales por rectos: luego los triángulos QSM, AEP

serán perfectamente iguales, y tendrán los lados $QM=AP$, y los ángulos $QMS=PAM$, por lo que dichos lados iguales QM y AP serán tambien paralelos: luego la figura PQ es un paralelógramo, cuya diagonal AM será igual á la potencia equilibrante AR.

3°. Finalmente concíbase que el punto A (*Fig.* 62.) da un movimiento infinitésimo segun qualquiera otra direccion AX, y pasa al lugar infinitamente próxîmo a. Desde el punto a báxense las perpendiculares ab, ad y ac á las respectivas rectas AP, AM y AQ, y desde los puntos R, P, M y Q báxense las perpendiculares RD, PF, MX y QG á la recta XAD. Prolónguese la recta QG hasta encontrar la diagonal AM en I; y por las rectas QI y PF paralelas será $AG:AF=AI:AH$, y componiendo se tendrá $AG+AF:AF=AI+AH:AH$; pero por las paralelas MX y PF es $AF:AX=AH:AM$: luego por razon de igualdad ordenada será $AG+AF:AX=AI+AH:AM$; y siendo $QS=PE$, los ángulos QSI y PEH iguales por rectos, y los ángulos $QIS=PHE$ por las paralelas QI y PF, se tendrá $SI=HE$, de donde $AI+AH=AS+AE=AM$: luego será $AG+AF=AX=AD$ por ser los dos triángulos AXM y ADR perfectamente iguales. Y siendo $AG + AF = AD$, será tambien $AG \times Aa + AF \times Aa = AD \times Aa$; pero $AG \times Aa = AQ \times Ac$, $AF \times Aa = AP \times Ab$, $AD \times Aa = RA \times Ad$: luego será $AQ \times Ac + AP \times Ab = RA \times Ad$; esto es, la suma de las acciones de aproximacion de las potencias AP y AQ será igual á la de alejamiento de la potencia AR; por consiguiente el punto A quedará tambien en equilibrio segun qualquiera otra direccion AX. Por tanto la resultante de las potencias P y Q será la diagonal AM del paralelógramo PQ, cuyos dos lados AP y AQ expresan las cantidades de dichas potencias, esto es, la fuerza combinada de las potencias AP y AQ sobre el punto A será la misma que la fuerza única de la potencia expresada por la diagonal AM del paralelógramo PQ sobre el mismo punto, actuando la misma potencia segun la direccion de dicha diagonal. Que es &c.

COROLARIO I.

102. Se infiere que se puede substituir, salvo el equilibrio, la potencia AM en lugar de las potencias AP y AQ, cuya operacion es determinada. Y al contrario, en lugar de la potencia AM se podrán substituir las potencias AP y AQ, cuya operacion es indeterminada, porque en lugar de

la potencia *AM* se pueden substituir infinitos pares de potencias.

COROLARIO II.

103. Si las tres potencias *AP*, *AQ*, *AR* (*Fig.* 63.) están aplicadas al punto *A*, y actúan sobre él segun las direcciones *AP*, *AQ*, *AR*, se determinará la potencia resultante de ellas con el método siguiente: con los lados *AP* y *AQ* complétese el paralelógramo *PQ*, y tírese la diagonal *AM*, que será la potencia resultante de las potencias *AP*, *AQ*: ahora con los lados *AM*, *AR* complétese el paralelógramo *MR*, y tírese la diagonal *AT*, que será la potencia equivalente á las *AM*, *AR*, ó bien á las *AP*, *AQ*, *AR*. Discúrrase del mismo modo para determinar la potencia equivalente á quatro ó mas dadas, como tambien para resolver una potencia en tantas quantas se quiere, y que estén en un mismo ó diferentes planos dados de posicion, y que además algunas de ellas satisfagan á ciertas condiciones dadas, como por exemplo, que pasen por algunos puntos dados, y sean tambien de una magnitud dada, ó que sean paralelas á algunas rectas dadas.

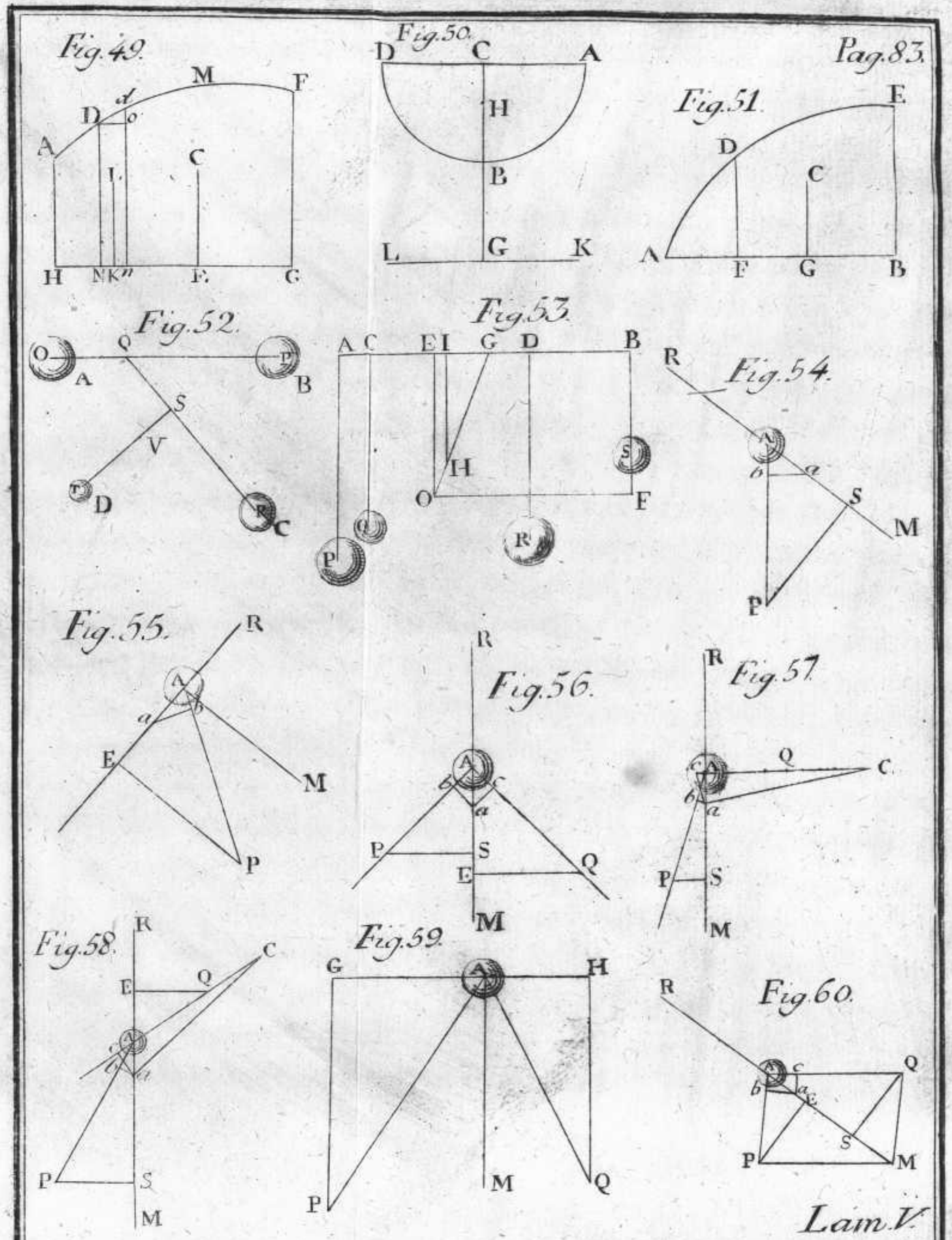
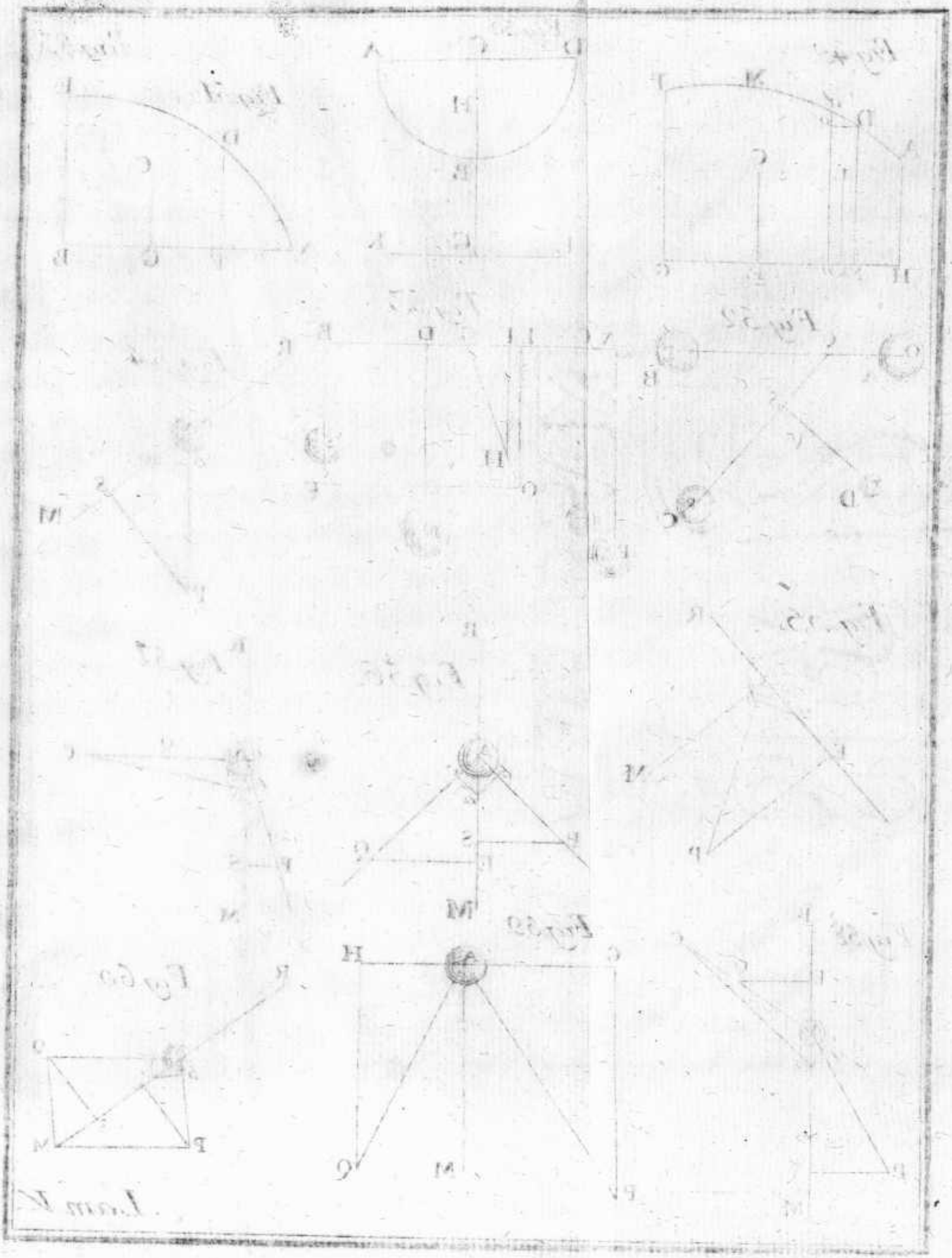


Fig.49.
Fig.50.
Fig.51.
Fig.52.
Fig.53.
Fig.54.
Fig.55.
Fig.56.
Fig.57.
Fig.58.
Fig.59.
Fig.60.
Lam.V.



PROPOSICION XXI.

104. Dadas las potencias componentes *AP*, *AQ* y *AR*, que están en un mismo plano, determinar por el cálculo trigonométrico la potencia resultante *AT* de ellas. *Fig.* 63.

En el paralelógramo *PQ* dado el ángulo *PAQ* se conocerá el ángulo *AQM*; y resolviendo el triángulo *AQM*, en quien se conocen los lados *AQ*, *QM*, y el ángulo *AQM*, se determinarán el lado *AM* y el ángulo *AMQ* ó bien *PAM*: luego restando el ángulo *PAM* del dado *PAR*, se tendrá el ángulo *MAR*, y por consiguiente el ángulo *AMT*. Ahora resolviendo el triángulo *AMT*, en quien se conocen los lados *AM*, *MT*, y el ángulo *AMT*, se tendrá el valor de la resultante *AT* de las tres potencias *AP*, *AQ*, *AR*. Discúrrase del mismo modo respecto á la resultante de qualquier número de potencias dadas aplicadas á un punto, con tal que estén todas en un mismo plano. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

105. Dadas las potencias componentes *AP* y *AQ*, como tambien la *AR* que no está en el mismo plano de aquellas, determinar la resultante *AT* de

dichas tres potencias por el cálculo trigonométrico. *Fig*. 63.

Tírese la recta *RF* perpendicular á la *AQ* prolongada, si es necesario; por el punto *F* levántese la perpendicular *FD* sobre *AF*, y tírese la recta *DR*. Resuélvase ahora el triángulo *RAF*, en quien se conocen el lado *RA*, y los ángulos *RAF* y *RFA*, y se determinarán los lados *RF* y *AF*: despues resuélvase el triángulo *ADF*, en quien se conocen el lado *AF* y los ángulos *AFD* por recto y *MAQ* por lo demostrado (104), y se tendrán los lados *FD* y *DA*. Y siendo las rectas *FD* y *FR* perpendiculares á la *FA*, será la recta *AF* perpendicular al plano *DFR*; por consiguiente los planos *PAQM* y *DFR* serán perpendiculares entre sí: luego si se baxa la recta *RO* perpendicular á la comun seccion *DF* (prolongada, si es necesario) de dichos dos planos, será *RO* perpendicular al plano *PAQM*; y siendo conocidas *RO* y *RF* en el triángulo rectángulo *ROF*, se tendrá tambien el lado *OF*; y por haberse determinado antes el valor de *FD*, se tendrá el lado *OD* del triángulo rectángulo *DOR*, en quien se conoce *OR*; por consiguiente se tendrá *DR*. Por tanto en el triángulo *DAR*, en quien quedan ya conocidos sus tres lados, se determinará el ángulo *DAR* del paralelógramo $MART$, y en conseqüencia se tendrá el ángulo AMT, cuyos lados AM y MT son conocidos: luego se determinará el valor de la resultante AT de las tres potencias AP, AQ y AR, quedando ésta en distinto plano. Discúrrase del mismo modo para determinar la resultante de qualquiera número de potencias componentes aplicadas á un punto, aunque no se hallen todas en un mismo plano. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

106. Si las direcciones de las potencias P, T, S aplicadas perpendicularmente á los lados AB, AE, ED del polígono rectilíneo AD los dividen por medio, y además dichas potencias son iguales á los respectivos lados sobre que actúan: digo que la resultante de ellas será la potencia X aplicada perpendicularmente al último lado BD en su mitad, y expresada por este mismo lado. *Fig.* 64.

Prolónguense las direcciones PI y TL de las potencias P y T, hasta que concurran en C; tómense las rectas $CP = AB$, $CT = AE$; complétese el paralelógramo PT; y tírense la diagonal CG y la recta EB. En el quadrilátero $LAIC$ los ángulos $L + I$ son iguales á dos rectos: luego los ángulos $A + LCI$ serán tambien iguales á dos rectos;

pero por ser las rectas CL y PG paralelas, los ángulos $LCI + P$ son iguales á dos rectos: luego será el ángulo $A = P$; y siendo tambien el lado $CP = AB$, y $GP = CT = AE$ en los triángulos GPC, EAB, será $CG = BE$, y además el ángulo $GCP = ABE$; pero el ángulo $IFB = CFH$: luego los triángulos FIB, FHC tendrán iguales los ángulos FIB, FHC, y por ser el ángulo FIB recto, la recta CG será perpendicular á la EB. Ahora si se considera un círculo circunscrito al triángulo EAB, su centro será el punto C: luego la perpendicular CG á la cuerda EB la dividirá por medio; pero la potencia CG es la resultante (101) de las potencias CP y CT: luego la potencia que nombro R aplicada perpendicularmente en la mitad del lado EB, y que es igual al mismo lado, será la resultante de las referidas potencias P y T. Del mismo modo se demostrará que la resultante de las dos potencias R y S es igual á la potencia X aplicada perpendicularmente en la mitad del lado BD, y que es igual al mismo lado: luego dicha potencia X será la resultante de las potencias P, T, S. Que es &c.

COROLARIO.

107. Se infiere que si la potencia Y es opuesta

é igual á la potencia *X*; las potencias *P*, *T*, *S*, *Y* estarán en equilibrio. Discúrrase del mismo modo si las potencias *P*, *T*, *S* son igualmente multíplices de los respectivos lados *AB*, *AE*, *ED*; esto es, la resultante *X* de todas ellas, ó su equilibrante *Y*, serán igualmente multíplices del último lado *BD* del polígono propuesto, y estarán aplicadas perpendicularmente en la mitad de dicho lado.

PROPOSICION XXIV.

108. Determinar la resultante de qualquiera número de potencias, cuyas direcciones formen entre sí qualesquiera ángulos, y actúen todas en un mismo plano. *Fig*. 65.

Sean *P*, *S*, *Q* las potencias dadas que actúen en los repectivos puntos *A*, *N*, *I* segun las direcciones *AP*, *NS*, *IQ* exîstentes en un mismo plano; y supóngase que las cantidades de dichas potencias están expresadas por las respectivas rectas *AB*, *NO*, *IK*. En el plano de dichas potencias tírense las rectas *ae*, *aX*, que formen ángulo recto, y desde los puntos *N*, *A*, *I* báxense á ellas las perpendiculares *Ne* y *NV*, *Ad* y *AZ*, &c. que serán dadas por estar dada la posicion de los puntos *N*, *A*, &c. Ahora resuélvase (103) cada una de las potencias *NO*, *AB*, *IK* en dos respectivamente paralelas á las rectas ae, aX, esto es, la potencia NO en las NU y NT respectivamente paralelas á las ae y aX, siendo NU y NT lados del paralelógramo TU, cuya diagonal es NO; y asi de las demas. Consta (64) que la resultante de las potencias NU, AD, IM es la potencia EG paralela á ellas é igual á $NU + AD - IM$, y que ademas es la distancia $EY = \frac{NU \times NV + AD \times AZ - IM \times IX}{NU + AD - IM}$. Por la misma razon la resultante de las potencias paralelas NT, AC, IL será la potencia EH paralela é igual á la suma de ellas, y además será la distancia

$$Ec = \frac{NT \times Ne + AC \times Ad + IL \times Ib}{NT + AC + IL}.$$

Por tanto siendo conocidas las distancias Ec, EY del punto E á las rectas ae y aX, quedará determinado el punto E; y con los lados EH y EG completo el paralelógramo HG, será su diagonal EF la resultante de las potencias EH y EG, esto es, de todas las potencias dadas. Que es &c.

PROPOSICION XXV.

109. Determinar la resultante de qualquiera número de potencias, cuyas direcciones se hallen en diferentes planos, y sean paralelas entre sí. *Fig.* 66.

Sean las potencias Q, S, P aplicadas á los puntos B, C, A, y sus direcciones BQ, CS, AP paralelas entre sí y en diferentes planos, y perpendiculares al plano XZ. Supónganse los planos XZ, ZV, VX perpendiculares entre sí, y prolónguense las dichas direcciones hasta encontrar el plano XZ en los puntos M, N, O. Consta (64) que tomada la potencia $T = P + Q + S$, con la direccion ET paralela á las de las demas potencias, dicha potencia T tendrá en equilibrio las potencias P, Q, y S: luego la potencia $T' = T$ tomada con la direccion ET' contraria á la ET será la resultante de las mismas potencias P, Q, S. Prolónguese la recta ET' hasta encontrar el plano XZ en R; y será (64) la distancia $ER = \frac{Q \times BM + S \times CN + P \times AO}{P + Q + S}$: asimismo tiradas las rectas AF, CJ, BH, EL, perpendiculares al plano ZV, será la distancia $EL = \frac{P \times AF + S \times CJ + Q \times BH}{P + S + Q}$: y finalmente si se baxan desde los puntos A, C, B, E perpendiculares al plano XV, se determinará del mismo modo la distancia del punto E á dicho plano: luego por medio de dichas tres distancias se determinará el punto E, donde debe aplicarse la potencia resultante T' igual á $Q + S + P$ con la direccion ET' paralela á la BQ, en la suposicion que todas las potencias Q, S, P actúen hácia una misma parte; pero si alguna de ellas actuare hácia parte contraria, se le dará el signo negativo en las expresiones anteriores. Tambien si tirada la recta AC se forma la primera proporcion $S : P = AD : CD$, y si sucesivamente tirada la recta DB se forma la segunda $S + P : Q = BE : ED$; se tendrá igualmente determinado el referido punto E. Que es &c.

PROPOSICION XXVI.

110. Hallar las resultantes de qualquier número de potencias, cuyas direcciones se hallen en diferentes planos, y no sean paralelas. *Fig.* 67.

Supóngase que P es una de las referidas potencias que actúan sobre el punto A segun la direccion AP; y prolónguese ésta hasta encontrar un plano XZ en el punto H. Exprésese la cantidad de la potencia P por la recta HV; desde el punto V báxese la recta VO perpendicular á dicho plano ZX; tírese HO, y complétese el rectángulo NO. Consta (102) que la potencia HV es equivalente á las potencias, HN perpendicular al plano ZX, y HO que está en el plano ZX. Hágase la misma operacion respecto á las demas potencias cuyas direcciones encuentran el plano ZX: y determinando ahora la resultante (109) de todas las potencias perpendiculares al plano ZX, como también (108) la resultante de todas las potencias existentes en el plano ZX, se tendrán reducidas todas las potencias dadas á dichas dos resultantes, con tal que las direcciones de las mismas potencias dadas encuentren el plano ZX: pero si las direcciones de algunas potencias dadas son paralelas á dicho plano, entonces se variará la posicion de él, de suerte que dichas direcciones y las referidas dos resultantes encuentren el mismo plano; y por el método anterior las dichas potencias y las dos resultantes, y consiguientemente todas las potencias propuestas, se reducirán á dos resultantes, que se componen en una sola (102) en el caso que la resultante de las potencias que actúan en el plano XZ encontrase la resultante de las potencias perpendiculares al mismo plano. Que es &c.

ESCOLIO.

111. Adviértase que si las potencias dadas se reducen á tres resultantes con el método siguiente; con mayor facilidad se podrán resolver diferentes qüestiones correspondientes á esta teoría. En un punto fixo X fórmese (*Fig.* 68.) el ángulo ZXT recto, y tírese la recta XY perpendicular al plano ZXT; con lo que se tendrán los tres planos ZXT, ZXY,

YXT. Supóngase la potencia *P* expresada por la recta *AB*, y sobre *AB* fórmese el rectángulo *DC* perpendicular al plano *YXT*, y que tenga el lado *BC* paralelo á *XZ* : asimismo sobre el lado *BD* fórmese el rectángulo *FE* paralelo al plano *YXT*, y que tenga los lados *BE* y *BF* respectivamente paralelos á las rectas *XY* y *XT*. Consta (102) que la potencia *AB* es equivalente á las potencias *BC* y *BD*, y que la potencia *BD* es equivalente á las *BE* y *BF* : luego la potencia *AB* será equivalente á las tres, esto es, á la potencia *BC* perpendicular al plano *YXT*, y paralela á la recta *XZ*, á la potencia *BE* perpendicular al plano *ZXT*, y paralela á la recta *XY*, y últimamente á la potencia *BF* perpendicular al plano *ZXY*, y paralela á la recta *XT*. Hágase la misma operacion respecto á las demas potencias, que no son perpendiculares á ninguno de los tres referidos planos : y determinando (109) la resultante de las potencias perpendiculares al plano *YXT*, la resultante de las potencias perpendiculares al plano *ZXT*, y la resultante de las potencias perpendiculares al plano *ZXY*, se tendrán reducidas todas las potencias dadas dirigidas en distintos planos á las dichas tres resultantes perpendiculares á los referidos tres planos *YXT*, *ZXT*, *ZXY*.

Del Equilibrio en las Máquinas simples.

PROPOSICION XXVII.

112. Si las potencias P y R impelen á la palanca ó recta inflexîble AB del primer género cuyo apoyo C segun las direcciones AP y BR perpendiculares á la AB, y es $P \times CA = R \times BC$; dicha palanca estará en equilibrio. *Fig.* 69.

Considérese la recta ACB en el lugar infinitamente próxîmo aCb, y estarán los puntos a y b en las direcciones AP y RB, por ser los ángulos en A y B rectos. Siendo, pues, $P \times CA = R \times BC$, será $P : R = BC : CA$; pero es $Bb : Aa = BC : CA$ por la semejanza de los triángulos BCb, ACa: luego será $P : R = Bb : Aa$, y por consiguiente $P \times Aa = R \times Bb$, esto es, será la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P y R, y la recta inflexîble AB sobre que actúan las mismas potencias, estarán (45) en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

113. Tambien si la potencia Q impele á la misma palanca ACB segun la direccion OQ paralela á las direcciones AP y BR de las potencias P y

R, y es $P \times AC + Q \times CO = R \times BC$; se demostrará igualmente que dicha palanca queda en equilibrio. Siendo, pues, $AC : CO = Aa : Oo$ por la semejanza de los triángulos ACa y OCo, será tambien $P \times AC : Q \times CO = P \times Aa : Q \times Oo$, y componiendo se tendrá $P \times AC + Q \times CO : Q \times CO = P \times Aa + Q \times Oo : Q \times Oo$; pero por la semejanza de los triángulos OCo y BCb es $CO : CB = Oo : Bb$, y $Q \times CO : R \times CB = Q \times Oo : R \times Bb$: luego por razon de igualdad ordenada será $P \times AC + Q \times CO : R \times CB = P \times Aa + Q \times Oo : R \times Bb$; y siendo (sup.) $P \times AC + Q \times CO = R \times CB$, será $P \times Aa + Q \times Oo = R \times Bb$, esto es, la suma de las dos acciones de aproxîmacion de las potencias P y Q será igual á la de alejamiento de la resistencia R; por consiguiente (45) las potencias P, Q, R estarán en equilibrio. Discúrrase del mismo modo en los demas casos de qualquiera otro número de potencias y resistencias; esto es, en el caso del equilibrio la suma de los productos de cada potencia multiplicada por su respectiva distancia al apoyo C será igual á la suma de los productos de cada resistencia multiplicada por su respectiva distancia á dicho punto.

COROLARIO II.

114. Si las potencias P y R impelen á la palanca ACB, y es $P \times AC > R \times BC$; la palanca no quedará en equilibrio, y baxará el brazo CA de ella: pues, siendo $P \times AC > R \times BC$, será $P:R > BC:AC$; pero $BC:AC = Bb:Aa$: luego será $P:R > Bb:Aa$, y por consiguiente $P \times Aa > R \times Bb$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será mayor que la de alejamiento de la resistencia R: luego se inclinará (45) el brazo CA hácia la parte de la potencia P. Y si las tres potencias P, Q y R impelen á dicha palanca, y es $P \times AC + Q \times OC > R \times BC$; se demostrará igualmente que la palanca no queda en equilibrio, inclinándose el brazo CA de ella.

PROPOSICION XXVIII.

115. Si las potencias P y R impelen á la palanca ó recta inflexîble CBA del segundo ó tercer género cuyo apoyo C segun las direcciones AP y BR perpendiculares á CBA, y es $P \times CA = R \times CB$; dicha palanca estará en equilibrio. *Fig.* 70, 71.

Considérese la recta inflexîble CAB en el lugar infinitamente próxîmo Cab, y los puntos a y b estarán en las direcciones AP y RB prolongada. Siendo, pues, $P\times CA=R\times CB$, será $P:R=CB:CA$; pero $CB:CA=Bb:Aa$ por la semejanza de los triángulos BCb y ACa: luego será $P:R=Bb:Aa$, y por consiguiente $P\times Aa=R\times Bb$, esto es, será la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la accion de alejamiento de la resistencia R: luego (45) las potencias P y R, y la palanca sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

116. Infiérese que en la palanca del segundo género la potencia P es menor que la resistencia R, por ser $P:R=CB:CA$, y $CB<CA$. Lo contrario sucede en la palanca del tercer género, esto es, la potencia P debe ser mayor que la resistencia R en el caso del equilibrio.

COROLARIO II.

117. Y si la resistencia Q actúa tambien sobre las referidas palancas segun la direccion OQ perpendicular á ellas, y es $P\times CA=R\times CB+Q\times CO$; se demostrará con el mismo método expresado antes (113) que dichas palancas quedan en equilibrio.

ESCOLIO.

118. En las proposiciones anteriores se ha con-

siderado como una recta inflexible la palanca ACB, sobre que actúan las potencias P y R en direcciones perpendiculares; pero si es menester calcular la masa, gravedad ó peso de dicha palanca, se considerará que la misma masa se halla reunida en el centro de gravedad de la palanca, y que sobre este centro actúa una potencia en direccion vertical, siendo la cantidad de ella igual á la masa, gravedad ó peso de la misma palanca; por cuyo medio esta máquina pasará del estado físico al matemático, como se manifiesta en las quatro Proposiciones siguientes. Adviértase que la referida consideracion es general á las demas máquinas para calcular la gravedad de sus piezas con inclusion de las cuerdas, que en el estado matemático se consideran como rectas ó superficies.

PROPOSICION XXIX.

119. Dadas en qualquiera palanca las distancias AC y CB del apoyo C, la masa de la palanca, y la resistencia R; determinar la potencia P que tenga en equilibrio la resistencia R. *Fig.* 69, 70, 71.

Determínese (86) el centro O de gravedad de la palanca; y considérese aplicada en O la potencia Q opuesta é igual á la que tendria equilibrada la palanca en O segun la direccion vertical OQ paralela á las AP y BR; y se tendrá en el caso del equilibrio (113) respecto á la palanca del primer género (*Fig.* 69.) $P \times AC + Q \times CO = R \times CB$, y (117) respecto á las de los géneros segundo y tercero será (*Fig.* 70, 71.) $P \times CA = R \times CB + Q \times CO$: luego en la palanca del primer género será $P = \frac{R \times CB - Q \times CO}{AC}$, y en las demas será $P = \frac{R \times CB + Q \times CO}{CA}$. Que es &c.

COROLARIO.

120. Al contrario, dada la potencia P se determinará por las equaciones anteriores la resistencia R que tiene aquella en equilibrio: pues, será en la palanca del primer género la resistencia $R = \frac{P \times AC + Q \times CO}{CB}$, y en las demas será $R = \frac{P \times CA - Q \times CO}{CB}$.

PROPOSICION XXX.

121. Dadas las potencias P y R, y la masa de la palanca del primer género, determinar el apoyo C, para que dichas potencias queden en equilibrio. *Fig.* 69.

Hállese el centro O de gravedad de la referida palanca; y llámense, $AO=a$, $OB=b$, $BC=x$, y Q la potencia opuesta é igual á la que tendria equilibrada la palanca en O segun la direccion vertical OQ paralela á las AP y BR. Siendo, pues, (113) $P\times AC+Q\times CO=R\times BC$, se tendrá $P\times(a+b-x)+Q\times(b-x)=R\times x$, de donde resulta ser $P\times(a+b)-Px+Qb-Qx=Rx$, y $x=\frac{P\times(a+b)+Qb}{P+Q+R}$.

PROPOSICION XXXI.

122. Dadas las potencias P y R, el apoyo C, y la masa y la longitud del brazo CA en la palanca del primer género, determinar la distancia AB. *Fig.* 69.

Llámense, la longitud $CA=a$, m la masa correspondiente á una unidad del volúmen del cuerpo CA, $AB=y$; y suponiendo que en el cuerpo AB está uniformemente distribuida su masa, de modo que su centro de gravedad se halle en la mitad O de la longitud AB, será my la masa del mismo cuerpo AB. Sea Q la potencia aplicada á dicho centro O de gravedad segun la direccion OQ paralela á las AP y BR, y opuesta é igual á la que tendria el cuerpo en equilibrio. Por tanto se tendrá (113) $P\times AC+Q\times CO=R\times BC$; y substituyendo sus valores, será $P\times a+my\times$

$(a - \frac{1}{2}y) = R \times (y - a)$, de donde resulta ser $Pa + Ra = \frac{1}{2}my^2 - may + Ry$, cuya raiz positiva $y = \frac{-R + ma}{m} + \sqrt{\left(\frac{(R - ma)^2}{m^2} + \frac{2Pa + 2Ra}{m}\right)}$ da la distancia AB. Que es &c.

PROPOSICION XXXII.

123. Dadas las potencias P y R, la distancia CB, y la masa del cuerpo CB en la palanca del segundo género, determinar la distancia CA. *Fig.* 70.

Supóngase que el centro de gravedad del cuerpo CA se halla en el punto O mitad de su longitud. Nómbrense, m la masa correspondiente á una unidad del volumen del cuerpo CB, las longitudes $CB = c$, y $CA = x$; y será mx la masa del cuerpo CA que se supone homogeneo y recto, ó bien la potencia Q aplicada á dicho centro de gravedad. Consta (113) ser $P \times AC = R \times CB + Q \times CO$; y substituyendo sus valores, se tendrá $Px = R \times c + mx \times \frac{1}{2}x$: de donde resulta la equacion $x^2 - \frac{2P}{m} \times x = -\frac{2Rc}{m}$, cuya raiz $x = CA = \frac{P}{m} + \sqrt{\left(\frac{P^2}{m^2} - \frac{2Rc}{m}\right)}$. Por tanto si se considera la masa de la palanca CA, la potencia P no podrá ser menor que $\sqrt{(2mRc)}$, sino igual ó mayor: y siendo P igual al menor valor $\sqrt{(2mRc)}$, será $x = \frac{\sqrt{(2mRc)}}{m} = \sqrt{\frac{2Rc}{m}}$. Que es &c.

PROPOSICION XXXIII.

124. Si las potencias P y R impelen á la palanca ó recta inflexîble ACB del primer género en las direcciones AP y BR obliqüas á ACB, y desde el apoyo C baxadas las perpendiculares CV y CO á dichas direcciones es $P : R = CO : CV$; dicha palanca estará en equilibrio. *Fig.* 72.

Considérese la recta ACB en el lugar infinitamente próxîmo aCb, y las nuevas direcciones de las potencias P y R en ap y br. Tírense las rectas Aa y Bb, y las am y Bn perpendiculares respectivamente á las AP y br. Siendo, pues, $CB = Cb$, y el ángulo BCb infinitésimo, será el ángulo CBb recto: asimismo por ser el ángulo nKB infinitésimo, y el ángulo KnB recto, será el ángulo nBK recto: luego serán iguales los ángulos CBb, nBO; y quitando el comun CBn, quedará el ángulo $CBO = nBb$; pero los ángulos en n y O son rectos: luego serán semejantes los triángulos COB, Bnb. Con el mismo método se demostrará que los triángulos AVC, amA son semejantes. Ahora por la semejanza de dichos primeros triángulos será

$bn : Bb = CO : CB$; pero por la semejanza de los triángulos BCb, ACa es $Bb : Aa = BC : CA$, y por la semejanza de los Ama, AVC es $Aa : Am = AC : CV$: luego por razon de igualdad ordenada será $bn : Am = CO : CV$; pero (sup.) $P : R = CO : CV$: luego será $P : R = bn : Am$, y $P \times Am = R \times bn$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R; por consiguiente las potencias P, R, y la palanca sobre que actúan dichas potencias, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

125. Luego si es $P : R > CO : CV$, la palanca no quedará en equilibrio, y baxará el brazo CA: pues, siendo por lo demostrado $CO : CV = bn : Am$ será $P : R > bn : Am$, y por consiguiente $P \times Am > R \times bn$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P mayor que la de alejamiento de la resistencia R: luego (45) el brazo CA se inclinará hácia la potencia P.

COROLARIO II.

126. Si es el ángulo $PAC = RBC$, serán semejantes los triángulos COB, CVA, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $CO : CV = CB : CA$;

pero en el caso del equilibrio es $P : R = CO : CV$: luego siendo el ángulo $PAC = RBC$, será en el caso del equilibrio $P : R = CB : CA$. Dígase lo mismo, si las direcciones AP y BR de las potencias P y R son paralelas y obliqüas á la palanca ACB.

PROPOSICION XXXIV.

127. Si las potencias P y R impelen á las palancas CAB de los géneros segundo ó tercero apoyadas en C segun las direcciones BP y AR obliqüas á CAB, y baxadas las perpendiculares CF y CE á dichas direcciones, es $R : P = CF : CE$: digo que las mismas palancas ó rectas inflexîbles estarán en equilibrio. *Fig.* 73, 74.

Considérese la recta inflexîble CAB en el lugar infinitamente próxîmo Cab, y las direcciones BP y AR en bp y ar. Desde los puntos b y A báxense las perpendiculares bn y Am á las respectivas rectas BP y ar, y tírense las Bb y Aa. Siendo, pues, en el triángulo BCb el ángulo BCb evanecente, y el lado $CB = Cb$, será el ángulo CBb recto; y por ser tambien recto el ángulo bnB en el triángulo Bnb, serán los ángulos $nBb + nbB = CBb$; y quitando el ángulo comun nBb, se tendrá $CBF = nbB$; pero los ángulos en n y F son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos bnB y CFB; y con el mismo método se demostrarán semejantes los triángulos Ama y AEC. Y siendo $Bn:Bb = CF:CB$ por la semejanza de los triángulos Bnb y BFC, $Bb:Aa = CB:CA$ por la semejanza de los BCb y ACa, y finalmente $Aa:am = CA:CE$, será por razon de igualdad ordenada $Bn:am = FC:CE$; pero (sup.) $CF:CE = R:P$: luego será $R:P = Bn:am$, y por consiguiente $P \times Bn = R \times am$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la accion de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P y R y la recta CAB sobre que actúan, quedarán (45) en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

128. Por ser $CF:CE = Sc.CBP \times CB : Sc.CAR \times CA$, en el caso del equilibrio de la potencia P y resistencia R será $R:P = Sc.CBP \times CB : Sc.CAR \times CA$; por consiguiente $P = \frac{R \times Sc.CAR \times CA}{Sc.CBP \times CB}$, y $R = \frac{P \times Sc.CBP \times CB}{Sc.CAR \times CA}$.

COROLARIO II.

129. Infiérese que en la palanca del segundo género (*Fig.* 73.) la potencia P, que se necesita pa-

Fig 61

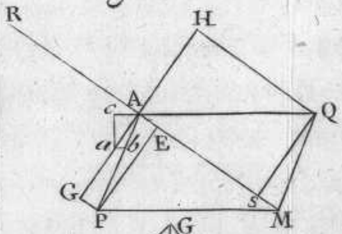


Fig 62.

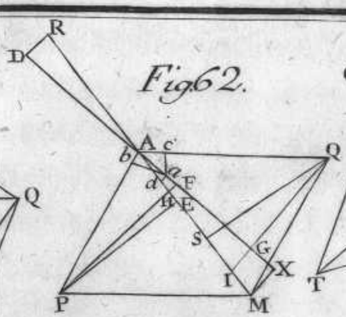


Fig. 63. Pag. 105.

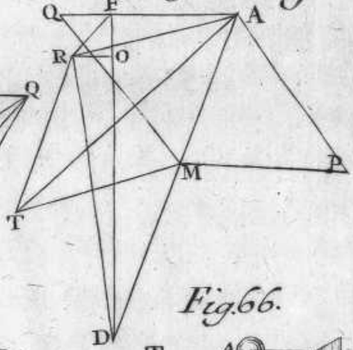


Fig. 64.

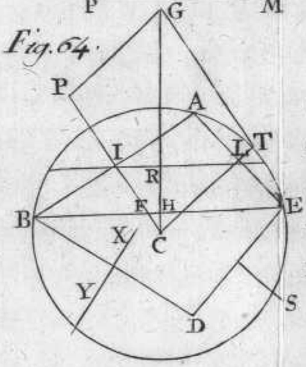


Fig. 65.

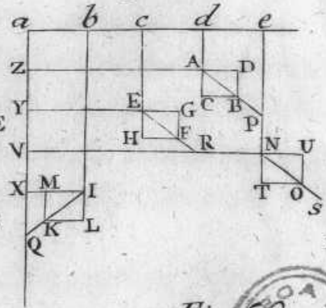


Fig. 66.

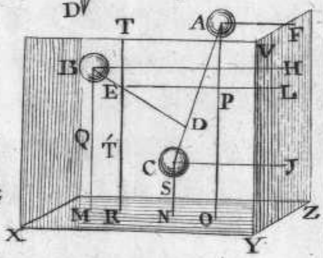


Fig. 67.

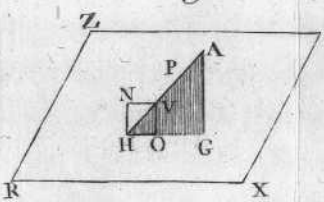


Fig. 68.

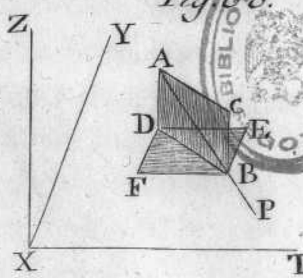


Fig. 69.

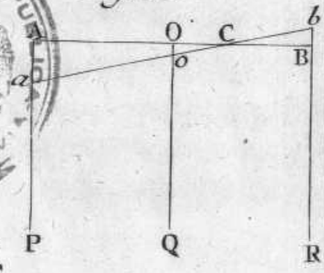


Fig. 70.

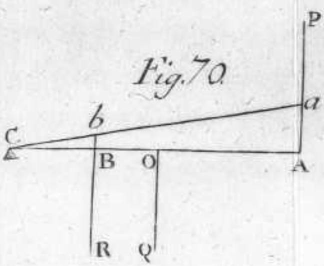


Fig. 71.

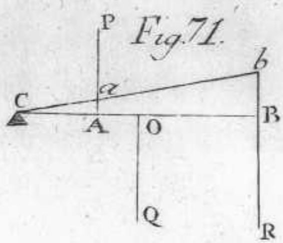
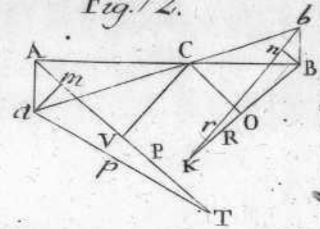
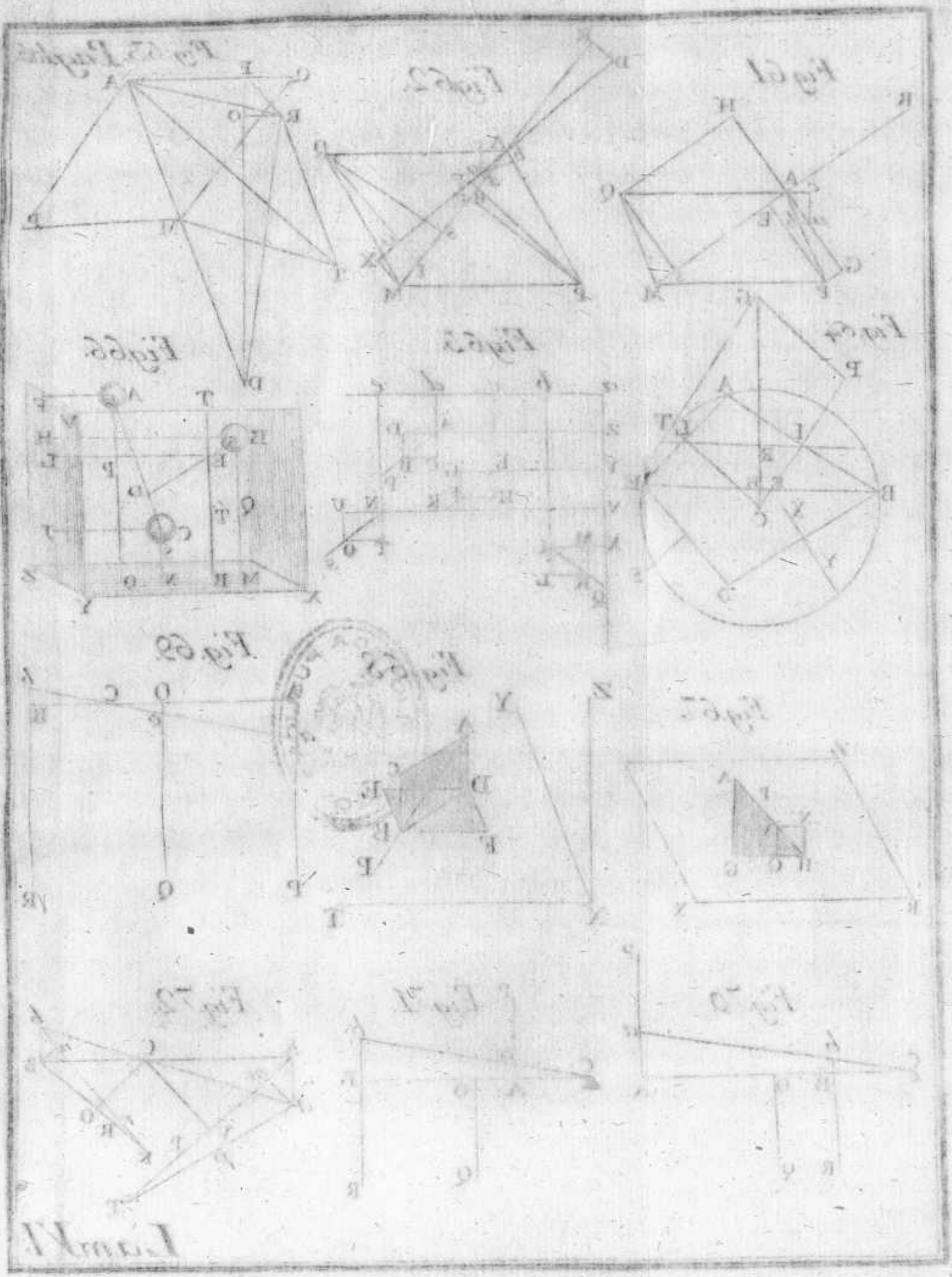


Fig. 72.



Lam. VI.



ra tener equilibrada una misma resistencia R con un mismo ángulo CAR, se disminuirá á proporcion que se aumenta el ángulo CBP, y que la potencia P necesaria para dicho equilibrio será mínima dando á ella una direccion perpendicular á CB: pues á proporcion que se aumenta dicho ángulo CBP, se aumenta su seno que es el máxîmo, siendo BP perpendicular á CB. Por tanto se aplica la potencia á la palanca con la máxîma ventaja, si se le da una direccion perpendicular á la misma palanca. Dígase lo mismo respecto á la palanca del tercer género (*Fig.* 74.).

COROLARIO III.

130. Tambien se infiere (*Fig.* 73, 74.) que si en las palancas de los géneros segundo y tercero quedan las mismas la cantidad de la potencia P y su direccion, dicha potencia P sostendrá en equilibrio una menor resistencia á proporcion que se aumenta el ángulo CAR, que forma la direccion de esta con la BC, de modo que llega á ser mínima, quando sea el ángulo CAR recto.

PROPOSICION XXXV.

131. Si las palancas AC y CB no están directamente, y tienen en el punto C el centro del mo-

vimiento, y si la potencia *P* y la resistencia *R* actúan en los puntos *A* y *B* segun las respectivas direcciones *AP* y *BR* perpendiculares á dichas palancas *CA* y *CB*: digo que siendo *P* á *R* como *CB* á *CA*, las potencias *P* y *R* estarán en equilibrio. *Fig.* 75.

Considérese *ACB* en lugar infinitamente próxîmo *aCb*, y los puntos *a* y *b* estarán en las referidas direcciones *AP* y *RB* prolongada, por ser (sup.) los ángulos *CAP*, *CBR* rectos. Siendo, pues, el ángulo $ACB = aCb$, será $ACa = BCb$; pero los ángulos *CAa*, *CBb* son iguales por rectos: luego los triángulos *CAa*, *CBb* serán semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $Bb : Aa = CB : CA$; pero (sup.) $P : R = CB : CA$: luego será $P : R = Bb : Aa$, y por consiguiente $P \times Aa = R \times Bb$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia *P* igual á la de alejamiento de la resistencia *R*: luego las potencias *P* y *R* estarán en equilibrio. Que es &c.

PROPOSICION XXXVI.

132. Si la potencia *P* actúa en el punto *C* centro de gravedad del cuerpo *CN*, que insiste sobre el plano inclinado *AB*, segun la direccion *CP* paralela al mismo plano, y si baxada la perpendicular *AO* á la horizontal *BO*, es la potencia *R*,

que aníma la masa del cuerpo CN segun la direccion vertical CR, á dicha potencia P como la longitud AB del plano inclinado á su altura AO: digo que el cuerpo CN quedará en equilibrio sobre el plano inclinado AB. *Fig.* 76.

Considérese el punto C en el lugar infinitamente próxîmo c, y desde dicho punto báxese la perpendicular Cm á la nueva direccion cr de la referida potencia R. Siendo, pues, las rectas AB y AO respectivamente paralelas á las Cc y cm, será el ángulo $A = c$; pero los ángulos en O y m son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos AOB, cmC, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $AB : AO = Cc : cm$; pero (sup.) $R : P = AB : AO$: luego será $R : P = Cc : cm$, y por consiguiente $P \times Cc = R \times cm$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego el cuerpo CN impelido de dichas potencias (45) quedará en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

133. Se infiere que el cuerpo CN impelido de las referidas potencias P y R estará en equilibrio, quando sea R á P como el seno totál al seno de la inclinacion del plano inclinado al horizonte,

pues estos senos están entre sí como AB á AO.

COROLARIO II.

134. Tambien se infiere que la potencia P será menor que la resistencia R, y que dicha potencia se disminuirá á proporcion que se disminuye la inclinacion ABO del plano inclinado al horizonte.

COROLARIO III.

135. Si desde el centro C de gravedad (*Fig.* 77, 78.) se baxa la perpendicular CE al plano inclinado AB, y se expresa la cantidad de la potencia R por la recta CD; completo el rectángulo GF, la potencia CD se resolverá en las potencias CG y CF; de las quales la primera CG quedará destruida por el apoyo E del plano inclinado en la suposicion que la perpendicular CE cayga en la base de dicho cuerpo, y la segunda potencia CF, que es igual á la equilibrante P por ser $CD : CF = AB : AO = R : P$, será la con que el cuerpo CN no estando sostenido en equilibrio se resbala por el plano inclinado, con tal que se prescinda del rozamiento.

COROLARIO IV.

136. Y si la referida perpendicular CE (*Fig.* 79.) cae fuera de la base HL del cuerpo CN, y éste

no está sostenido por la dicha potencia *P*; caerá dicho cuerpo rodando al rededor de *L*, de modo que el centro *C* de gravedad describirá el arco *CK*, cuyo radio es la recta *CL*; y despues continuará su descenso en el mismo plano inclinado, ya sea resbalándose por él, ó ya sea rodando como antes, segun los distintos casos de la perpendicular tirada desde el centro de gravedad del cuerpo á la base que insiste sobre el plano inclinado.

PROPOSICION XXXVII.

137. Si la potencia *P* actúa en el punto *C*, centro de gravedad del cuerpo *CN* que insiste sobre el plano inclinado *AB*, segun la direccion *CP* obliqüa al mismo plano; y si tirando la recta *AD* paralela á la *CP*, y las *BD* y *AO* perpendiculares á las respectivas rectas *AD* y *BO* horizontal, es la potencia *R*, que aníma la masa del cuerpo *CN* segun la direccion vertical *CR*, á dicha potencia *P* como *AD* á *AO*: digo que el mismo cuerpo *CN* quedará en equilibrio sobre el plano inclinado *AB*. *Fig.* 80.

Considérese el punto *C* en el lugar infinitamente próximo *c*, y desde dicho punto báxense las perpendiculares *Cm* y *Cn* á las nuevas direcciones *cr* y *cp* prolongada de las referidas potencias *R* y

P. Tírese la recta Cc. Siendo, pues, las rectas cC y cn respectivamente paralelas á las AB y AD, será el ángulo $Ccn = BAD$; pero los ángulos en n y D son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos BAD, Ccn, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $cn : cC = AD : AB$; pero es $cC : cm = AB : AO$ por la semejanza de los triángulos cmC, AOB: luego por razon de igualdad ordenada será $cn : cm = AD : AO$; pero (sup.) $R : P = AD : AO$: luego será $R : P = cn : cm$, y por consiguiente $P \times cn = R \times cm$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego el cuerpo CN impelido de dichas potencias quedará en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

138. Se infiere que el cuerpo CN impelido de las referidas potencias P y R quedará en equilibrio, quando sea R á P como el coseno del ángulo que forma la direccion de la potencia P con el plano inclinado AB al seno de la inclinacion del mismo plano con el horizonte BO, esto es, $R : P = Cc.CPB : Sc.ABO$, de donde resulta ser $P = \frac{R \times Sc.ABO}{Cc.CPB}$.

COROLARIO II.

139. Si la direccion de la potencia P forma ángulo recto con el plano inclinado AB, será $Cc.CPB = o$; por consiguiente se necesitará una potencia P infinita para equilibrarse con la potencia R.

COROLARIO III.

140. Y si la direccion de la potencia P forma ángulo agudo con el plano inclinado AB, será su coseno tanto mayor, quanto menor sea dicho ángulo; por consiguiente una menor potencia P se equilibrará con una misma potencia R, si se disminuye el ángulo que forma la direccion de la potencia P con el plano inclinado AB.

COROLARIO IV.

141. Luego la mínima potencia P, que se necesita para equilibrar una misma resistencia R, será la que tiene su direccion paralela al plano inclinado AB. Por tanto para sostener en equilibrio un cuerpo sobre un plano inclinado dado con la máxîma ventaja, se deberá dar á la potencia una direccion paralela al mismo plano.

PROPOSICION XXXVIII.

142. Si la potencia P actúa sobre la base BD de la cuña BCD, cuyo perfil vertical se representa en la figura, segun la direccion PAC perpendicular á dicha BD, y las resistencias R y R' iguales actúan sobre BC y CD en las respectivas direcciones RE y $R'F$ paralelas á la BD: digo que siendo $R+R':P=AC:BA$, la cuña quedará en èquilibrio. *Fig.* 81.

Considérese BCD en el lugar infinitamente próxîmo bcd, y desde los puntos b y E báxense las perpendiculares bm y EG á las BC y bc: y finalmente tírese la recta Bb. Siendo, pues, las rectas Bb y CA paralelas, será el ángulo $bBm=BCA$; pero los ángulos en m y A son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos Bmb, BAC, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $Bb:bm=BC:BA$. Y siendo los ángulos en G y A iguales por rectos, y los EeG y ABC iguales por las rectas Ee y eG respectivamente paralelas á las AB y BC, serán los triángulos Eeg y ABC semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, EG ó bien $bm:Ee=AC:CB$: luego por razon de igualdad perturbada será $Bb:Ee=AC:BA$; pero (sup.) $R+R':P=AC:BA$: luego será $R+R':$

$P=Bb:Ee$; por consiguiente $P\times Bb=(R+R')\times Ee$, ó bien $P\times Aa=R\times Ee+R'\times Ff$ por ser $Ee=Ff$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la suma de las acciones de alejamiento de las resistencias R y R': luego las potencias P, R y R', y la cuña sobre que actúan, estarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO.

143. Se infiere que en el caso del equilibrio en la cuña impelida de las referidas potencias será $R+R':P=Cc.BCA:Sc.BCA$, por ser $AC=Cc.BCA$, y $BA=Sc.BCA$.

PROPOSICION XXXIX.

144. Si la potencia P actúa sobre la base BD de la cuña BCD segun la direccion PAC perpendicular á dicha BD, y las resistencias R y R' iguales actúan segun las direcciones RE y $R'F$ oblíqüas á BD, de modo que formen con BC y DC los ángulos $REB=R'FD$, y si tirada la recta BH perpendicular á las paralelas ER y CH, es $P:R+R'=BA:BH$: digo que la cuña quedará en equilibrio. *Fig.* 82.

Considérese BCD en el lugar infinitamente próxîmo bcd, y desde los puntos b y E báxense las perpendiculares bm á BC, y EG á bc. Tírese la recta Bb. Siendo, pues, los ángulos EeG y BCH iguales por opuestos en el paralelógramo $EeIC$, y los ángulos en G y H iguales por rectos, serán semejantes los triángulos EeG, BCH, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $Ee:EG=BC:BH$; pero por la semejanza de los triángulos Bmb, BCA, es bm ó bien $EG:Bb=BA:BC$: luego por razon de igualdad perturbada será $Ee:Bb=BA:BH$; pero (sup.) es $P:R+R'=BA:BH$: luego será $P:R+R'=Ee:Bb$; por consiguiente $P\times Bb=(R+R')\times Ee$, ó bien $P\times Aa=R\times Ee+R'\times Ff$ por ser $Ee=Ff$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la suma de las acciones de alejamiento de las resistencias R y R': luego dichas potencias P, R y R', y la cuña sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

145. Se infiere que en el caso del equilibrio de la cuña impelida de las referidas potencias será P á $R+R'$ como el seno del ángulo BCA al seno del ángulo que forma la direccion de la resistencia R con el lado BC, esto es, $P:R+R'=Sc.BCA:Sc.REB$, de donde $P=\frac{(R+R')\times Sc.BCA}{Sc.BER}$.

COROLARIO II.

146. Por tanto si los ángulos REB, $R'FD$ iguales se aumentan, y quedan las mismas potencias iguales R y R', una menor potencia P tendrá la cuña en equilibrio, y esta potencia será la mínima, quando sean rectos los dichos ángulos REB y $R'FD$ que forman las direcciones de las resistencias R y R' con los lados CB y CD.

COROLARIO III.

147. Tambien se infiere de la formula $P = \frac{(R+R') \times Sc.BCA}{Sc.BER}$ que si se disminuye el ángulo BCD, y son las mismas las resistencias iguales R y R', y los ángulos formados por sus direcciones con los lados de la cuña, una menor potencia P tendrá equilibradas las resistencias R y R'.

PROPOSICION XL.

148. Si en la polea inmoble ABC la potencia P aplicada al extremo P de la linea flexîble $RABCP$ es igual á la resistencia R aplicada al otro extremo R de dicha linea, y actúan dichas potencias segun las direcciones CP, AR tangentes al círculo ABC en los puntos C, A: digo que las referidas poten-

cias estarán en equilibrio. *Fig.* 83.

Considérese la linea flexîble $PCBAR$ en el lugar infinitamente próxîmo $pCBAr$. Siendo, pues, $PCBAR = pCBAr$, se tendrá $Pp = Rr$; pero (sup.) la potencia $P = R$: luego será $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la accion de alejamiento de la resistencia R; por consiguiente las potencias P y R estarán en equilibrio. Que es &c.

ESCOLIO.

149. Aunque en la polea inmoble se necesite en el caso del equilibrio una potencia igual á la resistencia, de suerte que con el auxîlio de esta máquina no se consiga disminuir la dicha potencia; todavía la misma máquina es muy útil en la práctica para variar la direccion de la potencia en otra CP mas ventajosa para levantar un peso R.

PROPOSICION XLI.

150. Si la polea movible ABC, cuyo centro es el punto E, está obligada con la linea flexîble $DABCP$, de modo que las partes AD y CP sean paralelas, y el un extremo D de ella esté firme, y al otro extremo P esté aplicada una potencia P que actúe segun la direccion CP, y si la resisten-

cia R aplicada al extremo R de la linea ER paralela á las AD y CP actúa segun la direccion ER: digo que siendo $R:P=2:1$, la dicha máquina quedará en equilibrio. *Fig.* 84.

Considérese un movimiento infinitésimo, de suerte que pasen, la linea flexîble $DABCP$ al lugar infinitamente próxîmo $Dabcp$, la rueda ABC á abc, y ER á er. Siendo, pues, $DABCP = Dabcp$, ó bien $Da + aA + ABC + Cc + cP = Da + abc + cP + Pp$, se tendrá $Aa + Cc = Pp$; pero Aa y Cc son iguales á Ee por lados opuestos en los rectángulos Ae y Ce: luego será $Pp = 2Ee$; y por ser $ER = er$, se tendrá $Ee = Rr$, y $2Ee = 2Rr$: luego será $Pp = 2Rr$, y por consiguiente $Pp:Rr = 2:1$; pero (sup.) $R:P = 2:1$: luego será $R:P = Pp:Rr$, y $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P y R, y la polea sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO.

151. Con el mismo raciocinio se demostrará que si en D está aplicada una potencia que llamo Q, que actúe segun la direccion AD, cada una de las potencias P y Q será mitad de la resistencia R.

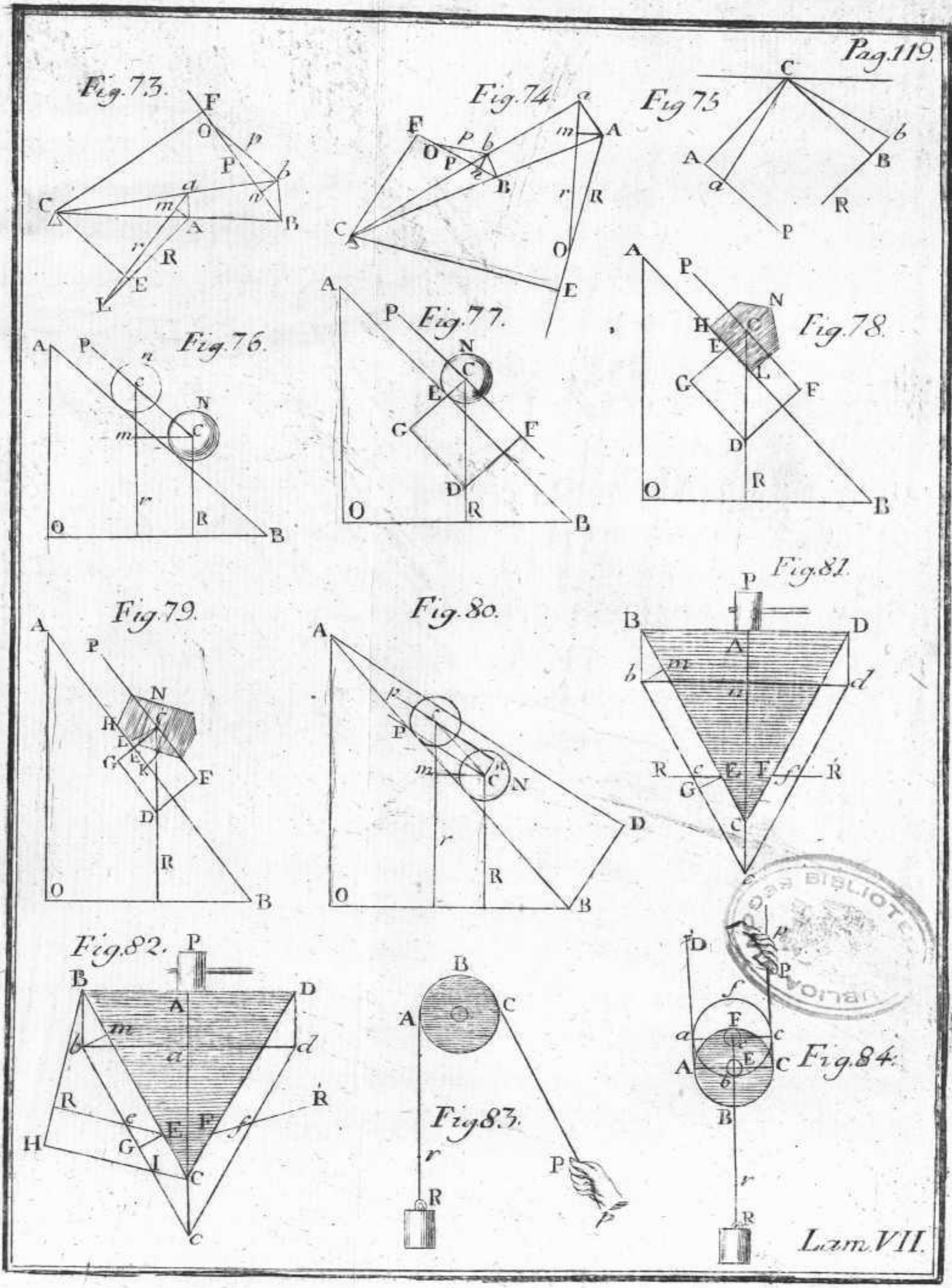
ESCOLIO.

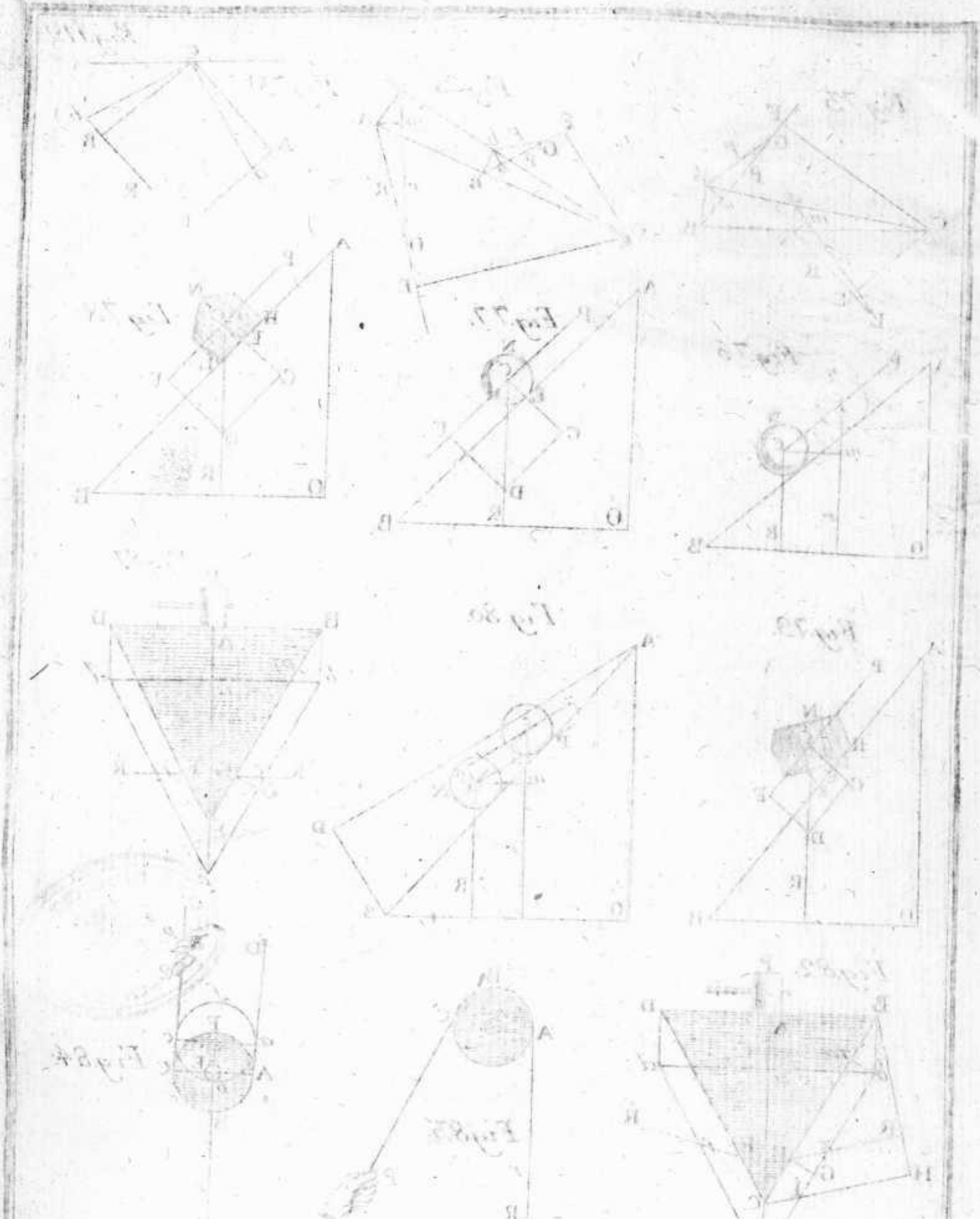
152. En la Proposicion antecedente se han considerado la polea ABC y el cordel ER sin peso; pero en la práctica convendrá añadir estos pesos á la resistencia dada R: pues el peso de la polea se halla reunido en el centro E de gravedad, y actúa segun la misma direccion vertical ER de la resistencia ó peso R, como igualmente el peso del cordel ER.

PROPOSICION XLII.

153. Si la polea movible ABC, cuyo centro es el punto O, está obligada con la linea flexîble $DABCP$, de modo que las partes AD y CP tangentes al arco ABC en los puntos A y C no sean paralelas, y el un extremo D de ella esté firme, y al otro extremo P esté aplicada una potencia P que actúe en la direccion CP, y si la resistencia R aplicada al extremo R de la linea GR perpendicular á la cuerda AC en su mitad G actúa segun la direccion GR: digo que siendo $P : R = AO : AC$, la dicha máquina quedará en equilibrio. *Fig.* 85.

Considérese un movimiento infinitésimo, de modo que pasen, $DABCP$ al lugar infinitamente próxîmo $Dabcp$, la rueda ABC á abc, y GR á


Pag. 119
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Lam. VII.



gr. Tírense las rectas Aa y Cc, y desde los puntos a y c báxense las perpendiculares am y cn á las respectivas rectas DA y CP. Siendo, pues, $DABCP = Dabcp$, ó bien $Dm + mA + ABC + Cn + nP = Da + abc + cP + Pp$, se tendrá $mA + nC = Pp$; y por ser los triángulos Ama, Cnc perfectamente iguales será $Pp = 2Cn$. Prolónguese la tangente PC por el punto C, y resultará el ángulo $ACH = AOG$: luego será $cCn = OAG$, y por consiguiente los triángulos rectángulos cnC y OGA serán semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, Cc ó bien Gg que es igual á $Rr : Cn = AO : AG$, y $Rr : 2Cn = AO : 2AG$, ó bien $Rr : Pp = AO : AC$; pero (sup.) $P : R = AO : AC$: luego será $P : R = Rr : Pp$, y $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproximacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P y R, y la polea sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

154. Con el mismo raciocinio se demostrará que, si se aplica en el punto D una potencia Q que sea igual á la P, y que actúe segun la direccion AD, será en el caso del equilibrio $P + Q : R = AO : AG$.

COROLARIO II.

155. Por tanto en la poléa movible para que la potencia tenga en equilibrio la resistencia con la máxîma ventaja, es necesario que las direcciones AD y CP sean paralelas, en cuyo caso el arco ABC es la semicircunferencia del círculo, y es P á R como el radio AO al diámetro del mismo círculo, estando firme el punto D.

PROPOSICION XLIII.

156. Si en el exe en el peritroquio, cuyo perfil vertical se expresa en la figura, la potencia P está aplicada á la rueda segun la direccion PF tangente al círculo FG en F, y la resistencia R está aplicada al cilindro de la misma máquina segun la direccion ER tangente al círculo HE: digo que siendo $P : R = CE : CF$, quedará la máquina en equilibrio. *Fig.* 86.

Supóngase un movimiento infinitésimo en la máquina propuesta, de suerte que los radios CF y CE describan al rededor del centro C los ángulos FCf y ECe, y los puntos P y R pasen á los lugares infinitamente próxîmos p y r. Siendo, pues, los ángulos ECe, FCf iguales, será $Ee : Ff = CE : CF$; y por ser $Ee = Rr$, $Ff = Pp$, será tambien $Rr : Pp = CE : CF$; pero (sup.) $P : R = CE : CF$: luego será $P : R = Rr : Pp$, y $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P y R, y la máquina sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

157. Se infiere que si de las quatro magnitudes, que son la potencia, la resistencia ó peso, el radio de la rueda, y él del cilindro, se conocen tres, se podrá determinar siempre la quarta.

COROLARIO II.

158. Si se considera grande número de palancas iguales B, G, E, F (*Fig.* 87, 88.) igualmente distantes entre sí, perpendiculares al exe C del cilindro, y unidas por la circunferencia HH, se tendrá la máquina, que se llama Rueda dentada ó de dientes, con la misma propiedad del exe en el peritroquio, esto es, $P : R = CD : CP$.

ESCOLIO.

159. Adviértase que en el caso práctico de dicha máquina se debe añadir al radio CE del cilin-

dro él del cordel, siempre que este radio tenga con aquel una razon sensible.

PROPOSICION XLIV.

160. Si en la rosca es la resistencia *R*, que actúa segun la direccion vertical del exe *EF* del cilindro descrito por el rectángulo *EK*, á la potencia *P* que actúa sobre la palanca *EP* perpendicular á *EF* en la direccion *PO* perpendicular á la misma palanca en *P*, como la circunferencia del círculo descrito con el radio *EP*, á la altura *HG* de un paso de dicha máquina: digo que las potencias *P* y *R* estarán en equilibrio. *Fig.* 95.

Represente *HLG* en la superficie del referido cilindro el paso correspondiente á su altura *HG*, esto es, la linea que describe el punto *H*, mientras el punto *P* impelido de dicha potencia *P* describe la circunferencia del círculo cuyo radio es *EP*, y la resistencia *R* pasa á *R'* siendo la altura $RR' = HG$. Tírese la recta *HM* perpendicular al exe *EF*, y sea *EM* perpendicular al círculo *HMN* descrito con el radio *HM*. Considérese un movimiento infinitésimo en dicha máquina, de suerte que pasen, *EP* al lugar infinitamente próxîmo *Ep*, el radio *MH* á *MN*, *H* á *h*, y *R* á *r*; y tirada la recta *hN*, se tendrá $Nh = Rr$. Siendo, pues, los ángulos PEp y HMN iguales, será $Pp : HN = EP : MH$ ó como la circunferencia del círculo, cuyo radio EP, á la del círculo cuyo radio MH; pero es el elemento HN de la circunferencia del círculo HMN al elemento Nh de la altura HG como dicha circunferencia á HG: luego por razon de igualdad ordenada será Pp á Nh ó bien Rr como la circunferencia del círculo, cuyo radio EP, á la altura GH; pero (sup.) dicha circunferencia á $GH = R : P$: luego será $R : P = Pp : Rr$, y $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la accion de alejamiento de la resistencia R: luego dichas potencias, y la máquina sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO.

161. Se infiere que si se aumenta la longitud de la palanca EP, una menor potencia P tendrá en equilibrio una misma resistencia R: dígase lo mismo, si se disminuyen las alturas de los pasos de la rosca.

ESCOLIO.

162. La espira HLG, que tiene la altura HG, se señala en la superficie del cilindro del modo siguiente. Se toma la recta AB (*Fig.* 95, 96.) igual

á *GH*; sobre la misma *BA* en el punto *A* se levanta la perpendicular *AC* igual á la circunferencia del círculo base de dicho cilindro; se tira la recta *BC*; y entonces poniendo *AB* sobre *HG*, y el triángulo *BAC* sobre la superficie cilíndrica, el plano inclinado *BC* señala la espira *GLH* en la misma superficie. Dígase lo mismo para señalar las demas espiras, cuyas alturas son todas iguales en esta máquina.

PROPOSICION XLV.

163. Si el centro *C* del movimiento en la balanza está encima ó debaxo de la recta *AB* que junta los extremos *A* y *B* de los brazos *CA* y *CB* iguales, de donde penden los platos de la misma máquina, y si la potencia *P* y la resistencia *R* actúan segun las direcciones verticales *AP* y *BR* perpendiculares á la horizontal *DE*: digo que siendo $R : P = Cc. ACD : Cc. BCE$, dicha máquina estará en equilibrio. *Fig.* 89, 90.

Prolónguense las direcciones *AP* y *BR* hasta encontrar la horizontal *DE* en los puntos *D* y *E*. Considérese la balanza *ACB* en el lugar infinitamente próximo *aCb*; y las nuevas direcciones de las potencias *P* y *R* en *ap* y *br*. Desde los puntos *a* y *b* báxense las perpendiculares *am* y *bn* á las respectivas rectas AP y EB; y tírense las rectas Aa y Bb. Siendo, pues, el ángulo ACa infinitésimo, y la recta $CA = Ca$, será el ángulo CAa recto; y por consiguiente la suma de los ángulos CAD y aAm será tambien igual á un recto; pero en el triángulo rectángulo CDA la suma de los ángulos CAD y ACD es igual á un recto: luego será $CAD + aAm = CAD + ACD$; y quitado el ángulo comun CAD, se tendrá $aAm = ACD$: luego los triángulos rectángulos Ama y CDA serán semejantes. Con el mismo método se demostrará ser el triángulo rectángulo Bnb semejante al triángulo rectángulo BEC. Y por la semejanza de los primeros triángulos será $Am : Aa = CD : CA$, y por la de los segundos se tendrá $Bb : Bn = CB : CE$; pero $Aa = Bb$ por la perfecta igualdad de los triángulos ACa y BCb, y $CA = CB$: luego por razon de igualdad ordenada será $Am : Bn = CD : CE = Cc.ACD : Cc.BCE$; pero (sup.) $R : P = Cc.ACD : Cc.BCE$: luego será $R : P = Am : Bn$, y $P \times Am = R \times Bn$, esto es, la accion de aproximacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P, R y la máquina sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

164. Por tanto si es $CD : CE > R : P$, la balanza no estará en equilibrio, y se inclinará el brazo CA hacia la parte X: pues, siendo por lo demostrado $Am : Bn = CD : CE$, será $Am : Bn > R : P$, y por consiguiente $P \times Am > R \times Bn$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P mayor que la de alejamiento de la resistencia R. Con el mismo método se demostrará que si es $CD : CE < R : P$, la balanza no estará en equilibrio, y el brazo CB se inclinará hácia la parte X.

COROLARIO II.

165. Luego la balanza que no está equilibrada sobre la horizontal DE, se equilibrará siempre baxo de la misma horizontal.

COROLARIO III.

166. Si es la potencia P igual á la resistencia R, será $CD = CE$; pero $CA = CB$, y los ángulos en D y E iguales por rectos: luego será $DA = EB$, y además será la recta DA paralela á la EB; por consiguiente las rectas DE y AB serán paralelas: y siendo la DE horizontal, lo será tambien la recta AB.

ESCOLIO.

167. Si se pide determinar el referido equilibrio contando con la masa, gravedad ó peso de los brazos *CA* y *CB* perfectamente iguales, considérese que en sus centros *F* y *G* de gravedad actúan las potencias *Q* iguales á dicho peso en las direcciones *HQ*, *IQ* perpendiculares á la horizontal *DE*: y se demostrará con el mismo método que en el caso del equilibrio de las potencias *P* y *R* será $P \times CD + Q \times CH = R \times CE + Q \times CI$, y que no estando equilibrada la misma máquina sobre la horizontal, se equilibrará siempre baxo de ella.

PROPOSICION XLVI.

168. Si á la balanza *ACB* está unido el fiel *CH*, que forma con los brazos *CA* y *CB* los ángulos *HCA* y *HCB* iguales, y si el punto *F* centro de gravedad de dichos brazos y fiel se halla en la prolongacion de éste, y sobre dicho punto actúa la potencia *Q* equivalente á los pesos de los mismos brazos y fiel segun la direccion vertical *FQ* paralela á las direcciones *AP* y *BR* de las potencias *P* y *R*, y finalmente se prolongan las dichas direcciones hasta encontrar la horizontal *DE* en los puntos *D*, *G*, *E*: digo que siendo $P \times CD =$

$Q \times CG + R \times CE$, la dicha máquina estará en equilibrio. *Fig.* 91, 92.

Considérese un movimiento infinitésimo, de suerte que pasen, $ACHB$ al lugar infinitamente próximo $aChb$, y las direcciones AP, FQ y BR á ap, fq y br; desde los puntos a, f, b báxense las perpendiculares am, fl, bn á las respectivas rectas AP, FQ, BE; y finalmente tírense las rectas Aa, Ff, Bb. Siendo, pues, el ángulo FCf infinitésimo en el triángulo isósceles FCf, será el ángulo CFf recto; pero en el triángulo rectángulo FGC es la suma de los ángulos CFG y FCG igual á un recto: luego será $CFf = CFG + FCG$; y quitando el ángulo comun CFG, se tendrá $lFf = FCG$: luego los triángulos rectángulos Flf y FGC serán semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $Fl : Ff = CG : CF$; pero por la semejanza de los triángulos FCf y BCb es $Ff : Bb = CF : CB$, y por la de los triángulos Bnb y BEC es $Bb : Bn = BC : CE$: luego por razon de igualdad ordenada será $Fl : Bn = CG : CE$, y $Q \times Fl : R \times Bn = Q \times CG : R \times CE$: luego componiendo se tendrá $Q \times Fl + R \times Bn : R \times Bn = Q \times CG + R \times CE : R \times CE$; pero por lo demostrado (163) $Bn : Am = CE : CD$, y $R \times Bn : P \times Am = R \times CE : P \times CD$: luego por razon de igualdad ordenada será $Q \times Fl + R \times Bn : P \times Am = Q \times CG + R \times CE : P \times CD$: y siendo (sup.) $Q \times CG + R \times CE = P \times CD$, se tendrá $P \times Am = Q \times Fl + R \times Bn$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la suma de las acciones de alejamiento de las potencias R y Q: luego las potencias P, Q, R, y la máquina sobre que actúan, estarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

169 Se infiere que si es $P \times CD > Q \times CG + R \times CE$, la balanza no estará en equilibrio, y el brazo CA se moverá hácia la parte Y: y que si es $P \times CD < Q \times CG + R \times CE$, la balanza no estará en equilibrio, y el brazo CB se moverá hácia la parte X.

COROLARIO II.

170 Por tanto si la balanza que tiene fiel no está equilibrada sobre la horizontal DE, se pondrá en equilibrio baxo de la misma horizontal.

COROLARIO III.

171 Con el mismo método se demostrará que si el referido centro F de gravedad de los brazos

y fiel cae en el mismo fiel CH, será en el caso del equilibrio $P \times CD + Q \times CG = R \times CE$; y que si la balanza no está equilibrada sobre la horizontal DE, se pondrá en equilibrio baxo de la misma horizontal.

COROLARIO IV.

172 Si se añade un pequeño peso al fiel, de modo que el centro de gravedad del peso del fiel asi aumentado, y del peso del hastil se halle en el punto C, será $CG = o$, y por consiguiente en el caso del equilibrio se tendrá $P \times CD = R \times CE$, ó bien $R : P = CD : CE = Cc. ACD : Cc. BCE$; y asi esta máquina unida al fiel se pondrá (165) siempre en equilibrio baxo de la horizontal DE, y se evitará su revolucion al rededor del punto C, siendo este punto superior á los A y B (*Fig.* 91).

COROLARIO V.

173 Si el fiel CH es vertical, será la potencia P igual á la resistencia R: pues será $CG = o$, y en el caso del equilibrio será $P \times CD = R \times CE$; pero en los triángulos ADC, BEC, que tienen $AC = CB$, y los ángulos ADC y ACD respectivamente iguales á los BEC y BCE, es $CD = CE$: luego será $P = R$. Por tanto por la posicion ver-

tical del fiel CH se conocerá la igualdad de la potencia P y de la resistencia R, y estará la máquina en el mismo caso, como si sus brazos iguales no tuvieran gravedad alguna.

PROPOSICION XLVII.

174. Si en las balanzas equilibradas $ACFB$, $acfb$, que tienen iguales todos sus brazos, las potencias P y p, y las resistencias R y r, cuyas direcciones son todas verticales, es el ángulo ACB formado por los brazos de la primera menor que el ángulo acb formado por los de la segunda: digo que tiradas las rectas CF' y cf' verticales, será el ángulo $FCF' < fcf'$. *Fig.* 93, 94.

Supóngase que de las potencias P y R la mayor es P; y háganse, $P = Q + S$, $R = Q - S$: tambien supónganse las dos balanzas equilibradas $A'CF'B'$, $a'cf'b'$ respectivamente iguales á las anteriores, y que sobre ellas actúan las potencias iguales Q, Q, q, y q en direcciones verticales; por consiguiente tendrán las rectas $A'B'$ y $a'b'$ horizontales, y sus fieles CF' y cf' verticales. Tírense las horizontales CH y ch, y prolónguense las direcciones verticales de las potencias Q, P, q, p hasta encontrar las mismas horizontales en los puntos H, D, h, d. Y estando los brazos CA' y CA equilibrados en el punto C, será (163) $Q : P = CD : CH$; y por ser $Q < P$, será $CD < CH$: asimismo será $q : p = cd : ch$, y $cd < ch$; pero es $Q : P = q : p$: luego será $CD : CH = cd : ch$, esto es, los senos de los quatro ángulos CAD, $CA'H$, cad, $ca'h$, serán proporcionales, y el primero de ellos será menor que el segundo. Ahora siendo (sup.) el ángulo $ACB < acb$, será el ángulo $A'CB' < a'cb'$ por ser estos ángulos respectivamente iguales á aquellos : luego en los triángulos isósceles $A'CB'$, $a'cb'$, será el ángulo $CA'B' > ca'b'$: y como las rectas CH y ch son respectivamente paralelas á las $A'B'$ y $a'b'$, será tambien el ángulo $A'CH > a'ch$, y por consiguiente el coseno CH del ángulo $A'CH$ será menor del coseno ch del ángulo $a'ch$; pero es $CD : CH = cd : ch$ por lo demostrado : luego será $CD < cd$. Por tanto queda demostrado que los quatro senos CD, CH, cd, ch correspondientes á los respectivos ángulos CAD, $CA'H$, cad, $ca'h$ son proporcionales, y que el primer seno es menor que los senos segundo y tercero : en conseqüencia (I. 523.) la diferencia de los ángulos que corresponden á los dos senos primeros, será menor que la que corresponde á los otros dos, esto es, $CA'H - CAD < ca'h - cad$; pero el ángulo $CA'H = CED$ por estar cortadas las rectas paralelas HQ y DP por la recta CA', y por igual razon es el ángulo $ca'h = ced$: luego será $CED - CAD < ced - cad$, ó bien $A'CA < a'ca$; por consiguiente el ángulo $FCF' < fcf'$ por ser estos ángulos respectivamente iguales á los $A'CA$, $a'ca$. Que es &c.

COROLARIO.

175. Se infiere que se inclina mas una misma balanza $acfb$, á quien estén aplicadas las mismas potencias desiguales p y r, que actúan en direciones verticales, si los brazos ac y cb de la dicha máquina forman mayor ángulo, por consiguiente la máxîma inclinacion de ella será quando dichos brazos estén directamente: pero en este caso dicha máquina tiene el inconveniente de dar la revolucion cerca del punto c, mientras los pesos p y r sean desiguales.

ESCOLIO.

176. De la teoría expuesta acerca de la balanza resulta: 1°. que los brazos de ella, contados desde el centro del movimiento hasta los puntos de quienes penden los platos, deben ser perfectamente iguales en la longitud y en el peso: 2°. que los platos juntamente con sus cordones ó cadenillas deben ser de igual peso por una y otra parte: 3°. que los referidos brazos iguales deben tener

la mayor longitud posible: 4°. que los ángulos, que forman los dichos brazos con la recta que junta los puntos de quienes penden los platos, deben ser muy pequeños: 5°. que el centro del movimiento, que debe quedar en una misma linea con el fiel y con el centro de gravedad del hastil, debe tambien ser el centro de gravedad de los pesos del hastil, y del fiel aumentado en cierto peso para el mismo efecto.

Del Equilibrio en diferentes Máquinas compuestas.

PROPOSICION XLVIII.

177. Si las tres palancas AC, FG, EI del primer género tienen sus respectivos apoyos en B, D, H, y la potencia P y resistencia R actúan en los extremos A y I de las palancas primera y tercera segun las direcciones verticales AP y IR: digo que siendo $P : R = IH \times GD \times CB : HE \times DF \times AB$, dicha máquina quedará en equilibrio. *Fig.* 97.

Llámense Q y S las respectivas potencias aplicadas á los brazos HE y BC en los puntos E y C, en virtud de la palanca GF, de modo que las tres palancas IE, GF, CA queden en equilibrio. Y

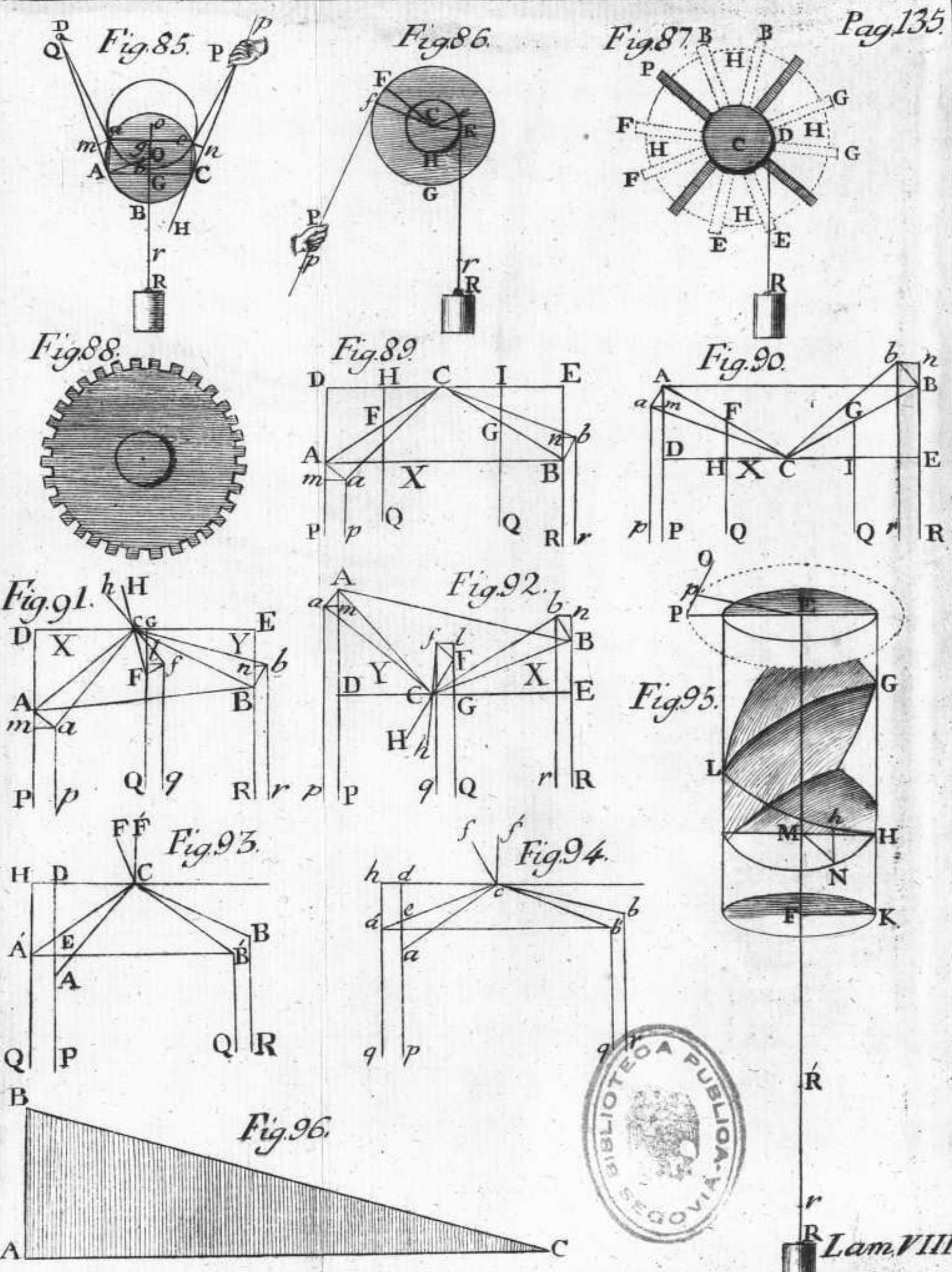
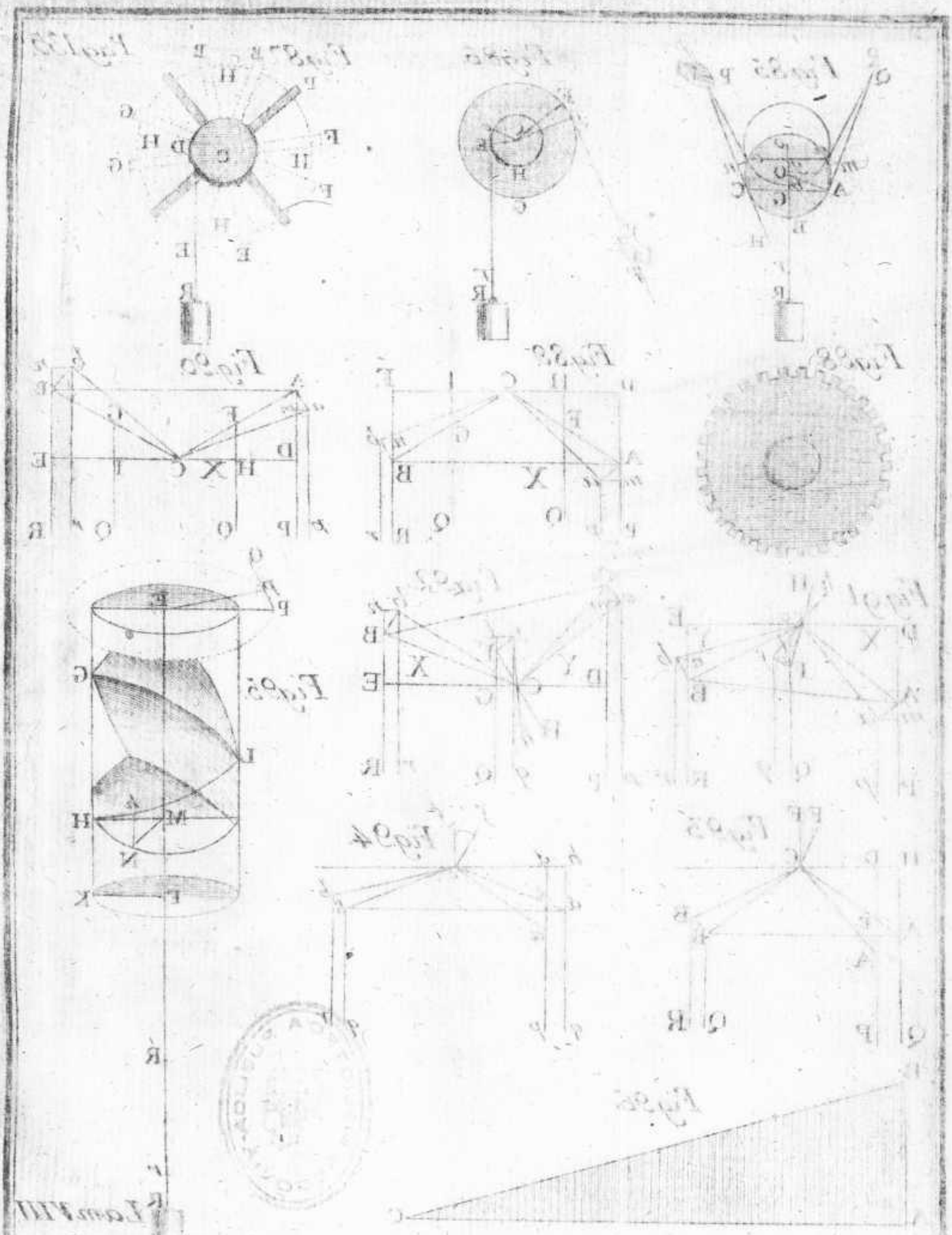


Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.

Lam. VIII.



por el equilibrio en la palanca AC será (112) $P\times AB=S\times CB$, de donde resulta ser $P:S=CB:AB$: asimismo por el equilibrio en la palanca GF será $S:Q=GD:DF$, y finalmente por el equilibrio en la palanca IE, será $Q:R=IH:HE$: luego en el caso del equilibrio de las tres palancas AC, FG, EI, será P á R en razon compuesta de las razones BC á BA, GD á DF, y IH á HE; pero es la razon compuesta de dichas razones como $BC\times GD\times IH$ á $AB\times DF\times HE$: luego será $P:R=BC\times GD\times IH:AB\times DF\times HE$. Que es &c.

PROPOSICION IL.

178. Si la linea flexîble PVJ está aplicada sucesivamente á las poleas A, D, B, E, C, formando las tres A, B, C una polea compuesta inmoble, y las otras dos D, E una polea compuesta movible, de suerte que las partes de la misma linea, esto es, KI, HG, LT, OM sean verticales, y su extremo J esté firme; y si la potencia P aplicada al otro extremo P actúa segun la direccion PV tangente al círculo A, y la resistencia R segun la direccion vertical DR: digo que siendo $R:P=4:1$, la dicha máquina quedará en equilibrio. *Fig.* 98.

Considérese un movimiento infinitésimo, de suerte que pasen, P al lugar infinitamente próxîmo p, los diametros HI y OT á hi y ot, y R á r: y se demostrará con el mismo método expuesto anteriormente (150) ser $Pp = 4Rr$, de donde resulta la proporcion $Pp : Rr = 4 : 1$; pero (sup.) $R : P = 4 : 1$: luego será $R : P = Pp : Rr$, y por consiguiente $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de apróxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego dichas potencias, y la máquina sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO.

179. Si son tres las poleas movibles, se demostrará del mismo modo que en el caso del equilibrio es $R : P = 6 : 1$, esto es, como el duplo número de las poleas movibles á la unidad. Argúyase del mismo modo, si se aumenta el número de las poleas.

ESCOLIO.

180. Téngase presente que la resistencia R expresa el peso del cuerpo aplicado en R, y los pesos de las poleas movibles: adviértase tambien que á la referida máquina por su mucho volumen se le substituye en la práctica la que está representada en la fig. 99, aunque no tenga todos sus cordones

exâctamente paralelos: en esta máquina todas las poleas tienen iguales sus diámetros, y las inmobles están unidas con una clavija, y del mismo modo las movibles.

PROPOSICION L.

181. Si la linea flexîble PGX está aplicada sucesivamente á las poleas A, D, B, E, C, F formando las tres A, B, C una polea compuesta inmoble, y las otras tres D, E, F una polea compuesta movible, de suerte que las partes de dicha linea, esto es, HI, NL, OY, QS, TZ, XV sean verticales, y su extremo X esté firme; y si la potencia P aplicada al otro extremo P actúa segun la direccion GP tangente al círculo GH, y la resistencia R segun la direccion vertical ER: digo que siendo $R:P=6:1$, dichas potencias P y R estarán en equilibrio. *Fig.* 100.

Considérese un movimiento infinitésimo en dicha máquina, de suerte que pasen, el punto P al lugar infinitamente próximo p, los diámetros IL, YS, TV á il, ys, tv, y R á r: y se demostrará con el mismo método expresado anteriormente (150) que es $Pp=6Rr$, de donde resulta la proporcion $Pp:Rr=6:1$; pero (sup.) $R:P=6:1$: luego será $R:P=Pp:Rr$, y por consiguiente

$P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P será igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego las potencias P y R, y la máquina sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO.

182. Si son quatro las poleas inmobles, y quatro las movibles, se demostrará del mismo modo que en el caso del equilibrio es $R : P = 8 : 1$, esto es, como el duplo número de las poleas movibles á la unidad: y en general llamado n el número de las poleas movibles, será en el caso del equilibrio $R : P = 2n : 1$.

PROPOSICION LI.

183. Si las lineas flexîbles $ABCX$, $DEFZ$, $GHIP$ están aplicadas á las poleas K, L, M, que forman una polea compuesta movible, de suerte que las partes AB, CX, DE, FZ, GH, IP sean verticales, y sus extremos A, D, G firmes en la horizontal AG, y los X, Z afianzados en los centros de las poleas L, M; y si la potencia P actúa segun la direccion IP, y la resistencia R segun la direccion vertical KR: digo que siendo $R : P = 2^3 : 1$, dicha máquina quedará en equilibrio. *Fig.* 101.

Considérese un movimiento infinitésimo en la referida polea movible, de suerte que pasen, el punto P al lugar infinitamente próxîmo p, los diámetros HI, EF, BC á hi, ef, bc, y R á r: y se demostrará con el mismo método expuesto anteriormente (150) ser $Ll = 2Kk = 2Rr$, $Mm = 2Ll$, $Pp = 2Mm$, de donde resulta ser $Pp = 8Rr$, y en conseqüencia $Pp : Rr = 8 : 1$; pero es $R : P = 2^3 : 1$: luego será $R : P = Pp : Rr$, y por consiguiente $P \times Pp = R \times Rr$, esto es, la accion de aproxîmacion de la potencia P igual á la de alejamiento de la resistencia R: luego dichas potencias P y R, y la máquina sobre que actúan, quedarán en equilibrio. Que es &c.

COROLARIO I.

184. Si las poleas son quatro se demostrará con el mismo método que, siendo $R : P = 2^4 : 1$, las potencias R y P quedarán en equilibrio.

COROLARIO II.

185. Y en general si es n el número de las poleas, estarán las potencias R y P en equilibrio, quando sea $R : P = 2^n : 1$.

ESCOLIO.

186. Adviértase que por ser incómodo á la potencia aplicada en *P* el tirar el cordon *IP* hácia arriba, se fixa en *N* una polea, sobre la qual se hace pasar el cordon *IPQ*; y entonces aplicando en *Q* la misma potencia *P*, se consigue tirarle con mayor ventaja hácia abaxo, sin que el aumento de la polea inmoble *N* (148) altere el prefixado equilibrio en la referida máquina.

PROPOSICION LII.

187. Si las partes *AB*, *KX*, *DE*, &c. de las lineas flexîbles, que están aplicadas á las poleas *J*, *N*, *O*, que forman una polea compuesta movible, no son paralelas, como lo eran en la Proposicion antecedente, y si la potencia *P* actúa segun la direccion *MP*, y la resistencia *R* segun la direccion vertical *CR*: digo que en el caso del equilibrio será *P* á *R* como el producto de los radios *IH*, *FE*, *CB* de dichas poleas al producto de las cuerdas *HM*, *EL*, *BK* de los respectivos arcos á que están aplicadas dichas lineas flexîbles. *Fig.* 102.

Llámense; *X* la potencia que tiene la resistencia *R* en equilibrio respecto á la polea *J*; *Z* la potencia que tiene en equilibrio la resistencia *X* respecto á la polea N; y finalmente P la potencia que tiene en equilibrio la resistencia Z respecto á la polea O: y se tendrán (153) las proporciones $P:Z = IH:HM$, $Z:X = FE:EL$, $X:R = BC:BK$: luego será en el caso del equilibrio P á R como la compuesta de las razones $IH:HM$, $FE:EL$, $BC:BK$; por consiguiente $P:R = IH \times FE \times BC : HM \times EL \times BK$. Que es &c.

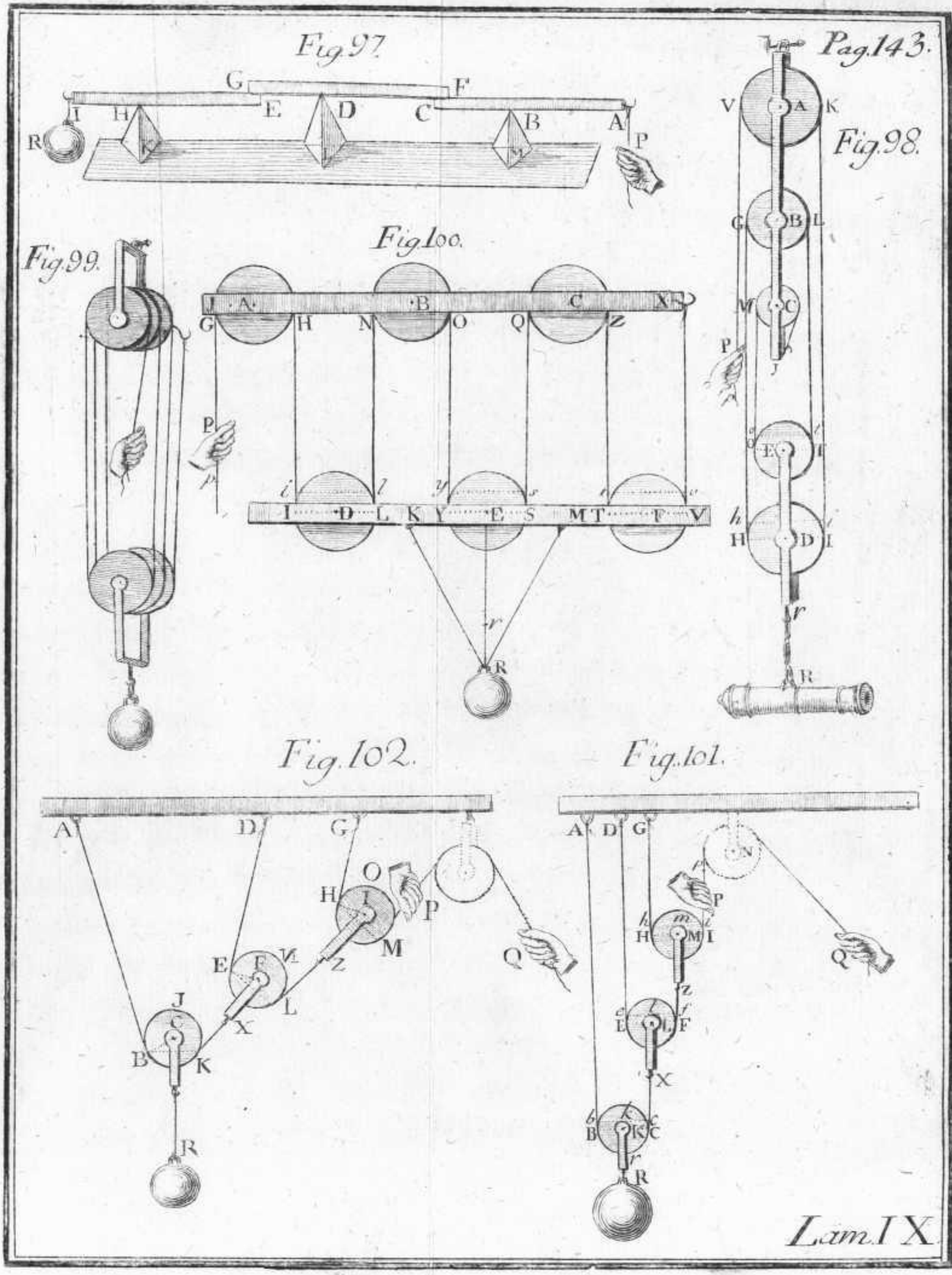
PROPOSICION LIII.

188. Si en la máquina compuesta de quatro exes en el peritroquio, que tienen las ruedas dentadas A, B, C, D, E, F, de suerte que la potencia P aplicada al extremo del mango HP haga mover la rueda A, ésta haga mover la rueda B y en conseqüencia la C, y asi sucesivamente, es la resistencia R aplicada al cilindro LM por la linea flexîble KR á la dicha potencia P que hace mover la palanca GP circularmente, como el producto de los radios de las ruedas mayores F, D, B, y de GP, al producto de los radios de las ruedas menores E, C, A, y del radio del cilindro LM: digo que dicha máquina quedará en equilibrio. *Fig.* 103.

Llámese X la potencia aplicada á la periferia de la rueda F para equilibrar la resistencia R, y será *X* la resistencia de la rueda *E* : asimismo llámese *Y* la potencia aplicada á la periferia de la rueda *D* para equilibrar la resistencia *X*, y será *Y* la resistencia de la rueda *C*; y finalmente llámese *Z* la potencia aplicada á la circunferencia de la rueda *B* para equilibrar la resistencia *Y*, y será *Z* la resistencia de la rueda *A*: luego será *R* á *P* como la compuesta de las razones *R* á *X*, *X* á *Y*, *Y* á *Z*, *Z* á *P*; pero (156) en el caso del equilibrio son, *R* á *X* como el radio de la rueda *F* al radio del cilindro *LM*, *X* á *Y* como el radio de la rueda *D* al radio de la rueda *E*, *Y* á *Z* como el radio de la rueda *B* al radio de la rueda *C*, y *Z* á *P* como *GP* al radio de la rueda *A*: luego estando en equilibrio las potencias *R* y *P*, será *R* á *P* como la compuesta de las razones del radio de la rueda *F* al radio del cilindro *LM*, del radio de la rueda *D* al radio de la rueda *E*, del radio de la rueda *B* al radio de la rueda *C*, y de *GP* al radio de la rueda *A*, esto es, como el producto de los radios de las ruedas mayores *F*, *D*, *B*, y de *GP*, al producto de los radios de las ruedas menores *E*, *C*, *A* y del radio del cilindro *LM*. Que es &c.

COROLARIO I.

189. Infiérese que si se disminuyen los radios


Pag. 143.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 102.
Fig. 101.
Lam. IX

de las ruedas menores y del cilindro con relacion á los radios de las ruedas mayores y de la longitud *GP* de la palanca, se necesitará una menor potencia *P* para equilibrar una misma resistencia *R*.

COROLARIO II.

190. Y si las ruedas *A*, *C*, *E* fuesen mayores que las *B*, *D*, *F*, sería en este caso la potencia *P* mayor que la resistencia *R*: como sucede en la máquina representada en la fig. 104, en quien la potencia *P* está aplicada al extremo *H* de la palanca *GH* firme en el cilindro *IK*, de modo que la misma palanca movida circularmente haga mover el exe *IK* y la rueda *A* unida á él, la rueda *A* haga mover la linterna *B* y en conseqüencia el exe *LM* y la rueda *C*, y la rueda *C* haga mover la linterna *D* y en conseqüencia el exe *NO* y la rueda *E*, y finalmente la rueda *E* haga mover la linterna *F*, y en conseqüencia el exe *QR* y la resistencia *R* unida al mismo exe. En esta máquina la potencia *P* es mayor que la resistencia *R*; pero por dicha máquina se consigue que mientras la potencia *P* da una revolucion, la resistencia *R* haga muchas: como, por exemplo, si las ruedas *A*, *C*, *E* tienen cien dientes, y las *B*, *D*, *F* diez palos, la resistencia *R* dará mil vueltas entretan-

to que la potencia *R* da una sola.

COROLARIO III.

191. Tambien se infiere la teoría del equilibrio en la máquina llamada Cric, representada en las figuras 105 y 106, cuya máquina está metida en una caxa, de la que salen, el extremo *A* de la barra *AB* donde se coloca la resistencia ó peso, y la palanca *FG* con su manija *GH*, en cuyo extremo *G* se aplica la potencia *P*. La misma máquina consiste; en dicha barra *AB* de hierro larga y gruesa, que tiene dientes en su longitud, y que acaba en *A* en forma de media luna; en las ruedas dentadas *C*, *D* firmes en un mismo exe; en la pequeña rueda dentada *E*, á cuyo exe está unida la cigueña *FGH*: y en la misma máquina será en el caso del equilibrio la resistencia aplicada á la rueda pequeña *D*, esto es, el peso del cuerpo colocado en *A* junto con el peso de la barra *AB*, á la potencia *P* aplicada en *G* como el producto del radio de la rueda mayor *C* y de la palanca *FG* al producto de los radios de las ruedas pequeñas *D*, *E*.

ESCOLIO.

192. Adviértase que en las referidas máquinas las ruedas mayores, y las menores llamadas Piño-

nes, deben tener iguales los dientes y sus intervalos, para que las ruedas menores puedan mover las mayores por medio de sus dientes. Por tanto los números de los dientes, como por exemplo, de las ruedas *A* y *B* (*Fig.* 103) serán proporcionales con sus periferias, y en conseqüencia con sus radios. Tambien adviértase que al radio del cilindro *LM* se debe añadir el radio del cordon *KR*, segun se ha expresado anteriormente (159).

PROPOSICION LIV.

193. En la Cabria que se compone; del torno *BD* movible al rededor de su exe, á quien es perpendicular la palanca *CP*; del sistema de las poleas *H*, *I*, *J*, *M*, *L*, de las quales *H*, *I*, *J* son inmobles, y movibles las *M*, *L*; y de una linea flexîble aplicada al torno y á las poleas, estando firmes los extremos de ella en *K* y *BD*: si es la resistencia *R*, que actúa sobre dicho sistema en direccion vertical, á la potencia *P*, que actúa en el extremo *P* de la palanca *CP* en direccion perpendicular á ella, como el producto de la longitud *CP* de la misma palanca, y del número de las ruedas movibles, al radio del cilindro *BD*; la referida máquina estará en equilibrio. *Fig.* 107.

Llámese *Q* la resistencia aplicada al torno *BD* para tener equilibrada la potencia *P*, y será *Q* la potencia aplicada al sistema de las poleas para el equilibrio de la resistencia *R*: y se tendrán las proporciones *R* á *Q* como el número de las ruedas movibles á la unidad (179), y *Q* á *P* como la longitud *CP* de la palanca aplicada al cilindro *BD* al radio del mismo cilindro (156): luego será *R* á *P* como la compuesta de las razones del número de las ruedas movibles á la unidad, y de *CP* al radio del cilindro *BD*; por consiguiente en el caso del equilibrio será *R* á *P* como el producto de la longitud *CP* de la palanca, y del número de las ruedas movibles, al radio del cilindro *BD*. Que es &c.

PROPOSICION LV.

194. En la máquina representada en la figura 108, que se compone; de un plano inclinado *LM*; del sistema de las poleas *E*, *F*, *N* inmobles y *H*, *I* movibles; del torno *K* movible al rededor de su exe, á quien es perpendicular la palanca *AB*; y de una linea flexîble, cuyos extremos están fixos en el cilindro *K*, y en *N*: si es la resistencia *R* que actúa segun la direccion del plano inclinado á la potencia *P* que actúa en direccion perpendicular á dicha palanca *AB* como el producto de la longitud *AB* de la palanca, del número de las poleas

movibles, y del seno total, al producto del radio del cilindro *K*, y del seno del ángulo de la inclinacion del plano inclinado *LM* al horizonte; la referida máquina estará en equilibrio. *Fig.* 108.

Llámense; *X* la resistencia aplicada al torno para tener en equilibrio la potencia *P*, y será *X* la potencia aplicada al sistema de las poleas; *Y* la resistencia aplicada á dicho sistema para equilibrar la potencia *X*, y será *Y* la potencia que equilibra la resistencia *R*: y siendo *R* á *P* como la compuesta de las razones *R* á *Y*, *Y* á *X*, *X* á *P*, será en el caso del equilibrio *R* á *P* como la compuesta de las razones del seno total al seno del ángulo de la inclinacion del plano *LM* al horizonte (133), del número de las poleas movibles á la unidad (179), y de la longitud *AB* de la palanca al radio del cilindro *K* (156): luego estando en equilibrio las potencias *R* y *P*, se tendrá *R* á *P* como el producto del seno total, del número de las poleas movibles, y de la longitud *AB* de la palanca, al producto del seno del ángulo de la inclinacion del plano inclinado *LM* al horizonte, y del radio del cilindro *K*. Que es &c.

PROPOSICION LVI.

195. En la máquina representada en la fig. 109,

que se compone; de la rosca *A B* movible al rededor de su exe *CD* que tiene unida la cigueña *DPE*; y del torno *FG* movible tambien al rededor de su exe, cuyo torno tiene el radio *IK* y la rueda dentada *M*, de suerte que la potencia *P* aplicada al mango de dicha cigueña haga mover la rosca *A B*, y ésta la rueda dentada *M*, el torno y la resistencia *R* aplicada á él por medio de la linea flexîble *STR* que se enrosca al mismo torno: digo que si es la resistencia *R* que actúa en la direccion vertical *TR* á la potencia *P* que actúa en direccion perpendicular á *D P* como el producto del radio *I L* de la rueda dentada, y de la circunferencia del círculo, cuyo radio es *DP*, al producto de la altura *AB* de un paso de la rosca, y del radio *IK* del torno; la referida máquina estará en equilibrio. *Fig.* 109.

Llámese *X* la potencia aplicada á la rueda dentada *M* en *L* para equilibrar la resistencia *R*, y será *X* la resistencia aplicada á la rosca *AB* en *L*; pero es *R* á *P* como la compuesta de las razones *R* á *X*, y *X* á *P*: luego en el caso del equilibrio será *R* á *P* como la compuesta de las razones de *I L* á *IK* (156), y de la circunferencia descrita con el radio *DP* á la altura *AB* (160); por consiguiente *R* á *P* como *I L* multiplicado por la circunfe-

Fig.103.

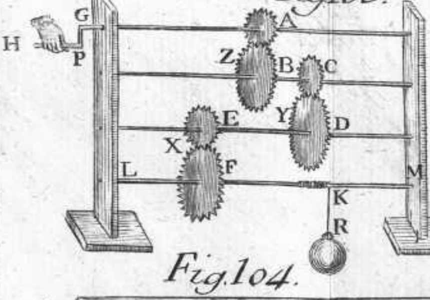


Fig.105.

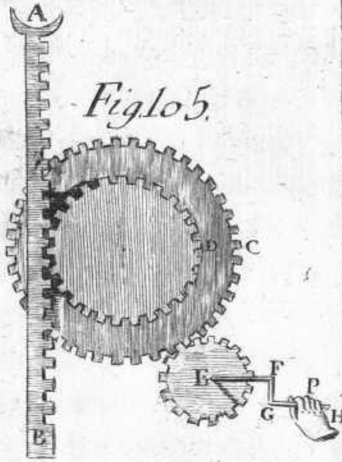


Fig.104.

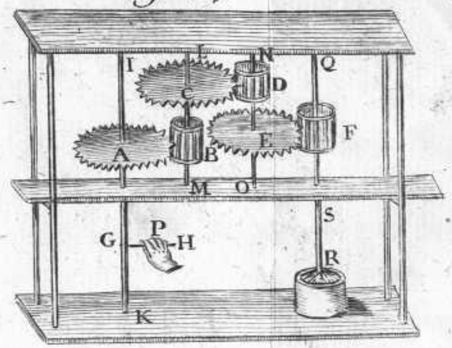


Fig.107.

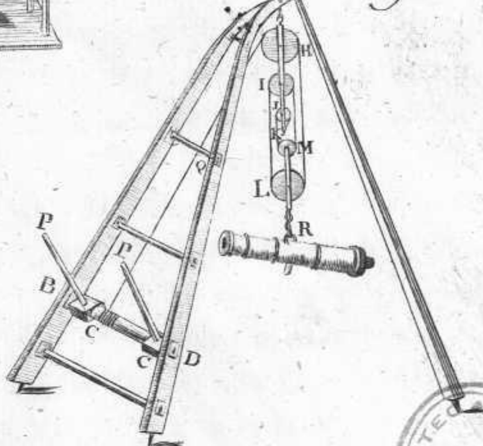


Fig.106.

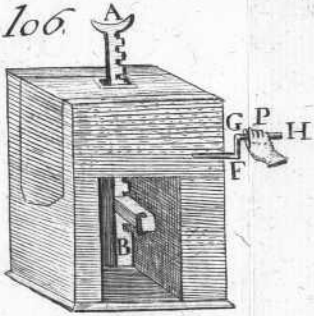
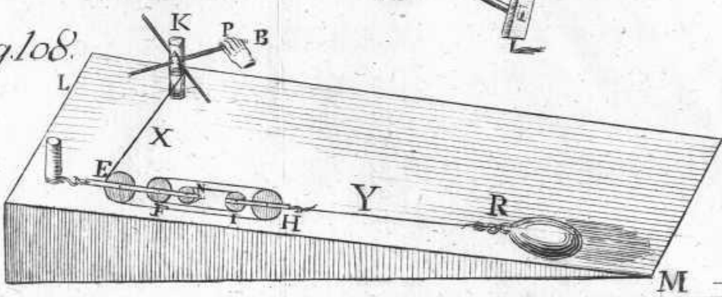


Fig.108.



rencia del círculo, cuyo radio es *DP*, á $IK \times AB$. Que es &c.

COROLARIO I.

196. Infiérese que la potencia *P* que equilibra una misma resistencia *R* se disminuye, aumentándose el radio *IL* de la rueda dentada, y la longitud *DP* de la palanca, con relacion al radio *IK* del torno y á la altura *AB* de un paso de la rosca.

COROLARIO II.

197. Si á la rueda dentada *M* está (*Fig.* 110.) unido el piñon *N* que haga mover la rueda dentada *O* de otro segundo torno *H*, á quien está aplicada la resistencia *R*; se demostrará que en el caso del equilibrio es *R* á *P* como la compuesta de las razones del radio de la rueda dentada *O* á él del torno *H*, del radio de la rueda dentada *M* á él de su piñon *N*, y de la circunferencia descrita con el radio *DP* á *AB*.

COROLARIO III.

198. Si en el torno *FG* expresado en la Proposicion antecedente, cuyo radio es *IK* (*Fig.* 111.) se forma otra rosca semejante á la *AB*, y con aquella se combina otra rueda dentada *V* unida al torno *fg* á quien esté aplicada la resistencia *R*; se-

rá en el caso del equilibrio la resistencia R á la potencia P como la compuesta de las razones del radio de la rueda dentada V á él de su torno, de la circunferencia de la rueda dentada M á la altura ab de un paso de la segunda rosca, y de la circunferencia descrita con el radio DP á la altura AB de un paso de la primera rosca.

ESCOLIO.

199. En las combinaciones anteriores las ruedas dentadas tienen una misma posicion y un mismo movimiento; pero si se debe variar el movimiento de horizontal en vertical, ó al contrario, la rueda que se pone en movimiento, y que es perpendicular al exe de su torno, se forma de modo que tenga sus dientes perpendiculares al plano de la misma rueda, y se llama Rueda estrellada ó punteada.

PROPOSICION LVII.

200. En la máquina compuesta representada en la fig. 112, que consta; de la rosca hecha en el cilindro BC con su palanca BA, á quien se aplica la potencia P; del torno DL con la rueda dentada L y el piñon M; del torno FG con la rueda dentada N; de la polea compuesta H afianzada en I,

con una linea flexîble que está aplicada á todas sus poleas, de suerte que un extremo de ella esté firme en *I*, y el otro *K* en el torno *FG*; y del plano inclinado *OQ*, donde insiste dicha polea compuesta que tira la resistencia *R* en direccion paralela á dicho plano: digo que si es la resistencia *R* á la potencia *P* como la compuesta de las razones del seno total al seno de la inclinacion del plano inclinado *OQ* al horizonte, del duplo número de las ruedas movibles á la unidad, del radio de la rueda dentada *N* al radio del torno *FG*, del radio de la rueda dentada *L* al radio del piñon *M*, y de la circunferencia del círculo, cuyo radio es la palanca *BA*, á la altura de un paso de la rosca; las potencias *P* y *R* estarán en equilibrio. *Fig.* 112.

Llámense; *X* la potencia que equilibra la resistencia *R* sobre el plano inclinado *OQ*, y será *X* la resistencia aplicada á la polea compuesta; *Y* la potencia aplicada á dicha polea compuesta, y será *Y* la resistencia aplicada al torno *FG*; *Z* la potencia aplicada á la rueda *N* para equilibrar la resistencia *Y* en el torno *FG*, y será *Z* la resistencia aplicada al piñon *M*; *V* la potencia aplicada á la rueda *L* para equilibrar la resistencia *Z* en el torno *DL*, y será *V* la resistencia aplicada á la rosca *X* para equilibrar la potencia *P*; pero es *R* á *P* como la compuesta de las razones *R* á *X*, *X* á *Y*, *Y* á *Z*, *Z* á *V*, *V* á *P*: luego será en el caso del equilibrio *R* á *P* como la compuesta de las razones, del seno total al seno de la inclinacion del plano inclinado *OQ* al horizonte (133), del duplo número de las ruedas movibles á la unidad (179), del radio de la rueda dentada *N* al radio del torno *FG* (156), del radio de la rueda dentada *L* al radio del piñon *M* (156), y de la circunferencia del círculo, cuyo radio es la palanca *BA*, á la altura de un paso de la rosca hecha en el cilindro *BC* (160). Que es &c.

ESCOLIO.

201. La teoría del equilibrio en las máquinas expuesta anteriormente padece sus alteraciones en la práctica, que proceden de las propiedades físicas de las materias que componen las mismas máquinas: y dichas propiedades se reducen principalmente al Rozamiento, y al Embarramiento de las cuerdas.

I. La superficie de cada cuerpo terrestre aunque bien bruñida tiene partes elevadas y cóncavas, de suerte que si un cuerpo sirve de apoyo á otro, en la superficie comun á entrambos las partes elevadas del uno se introducen en las cóncavas del

Fig. 109.

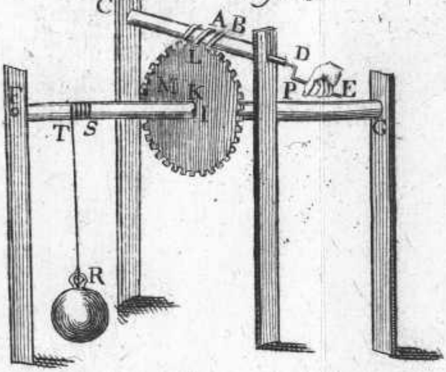


Fig. 110.

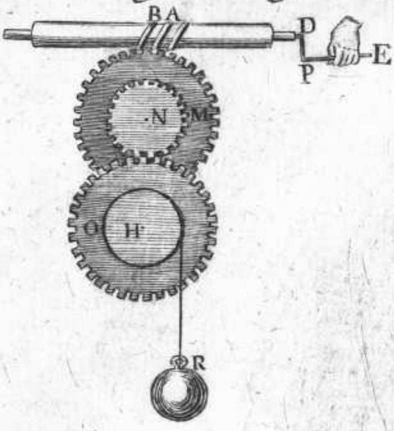


Fig. 112.

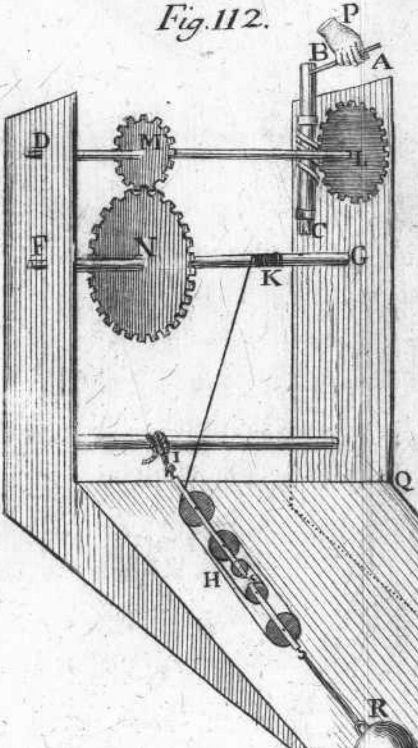
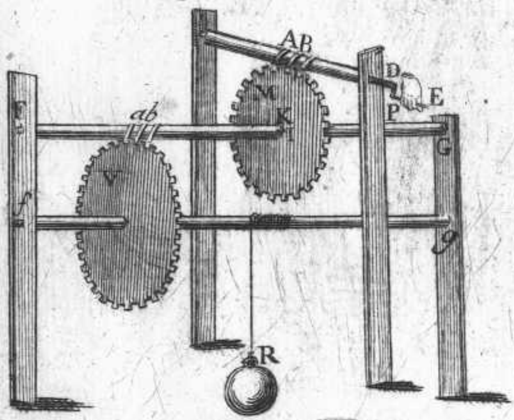
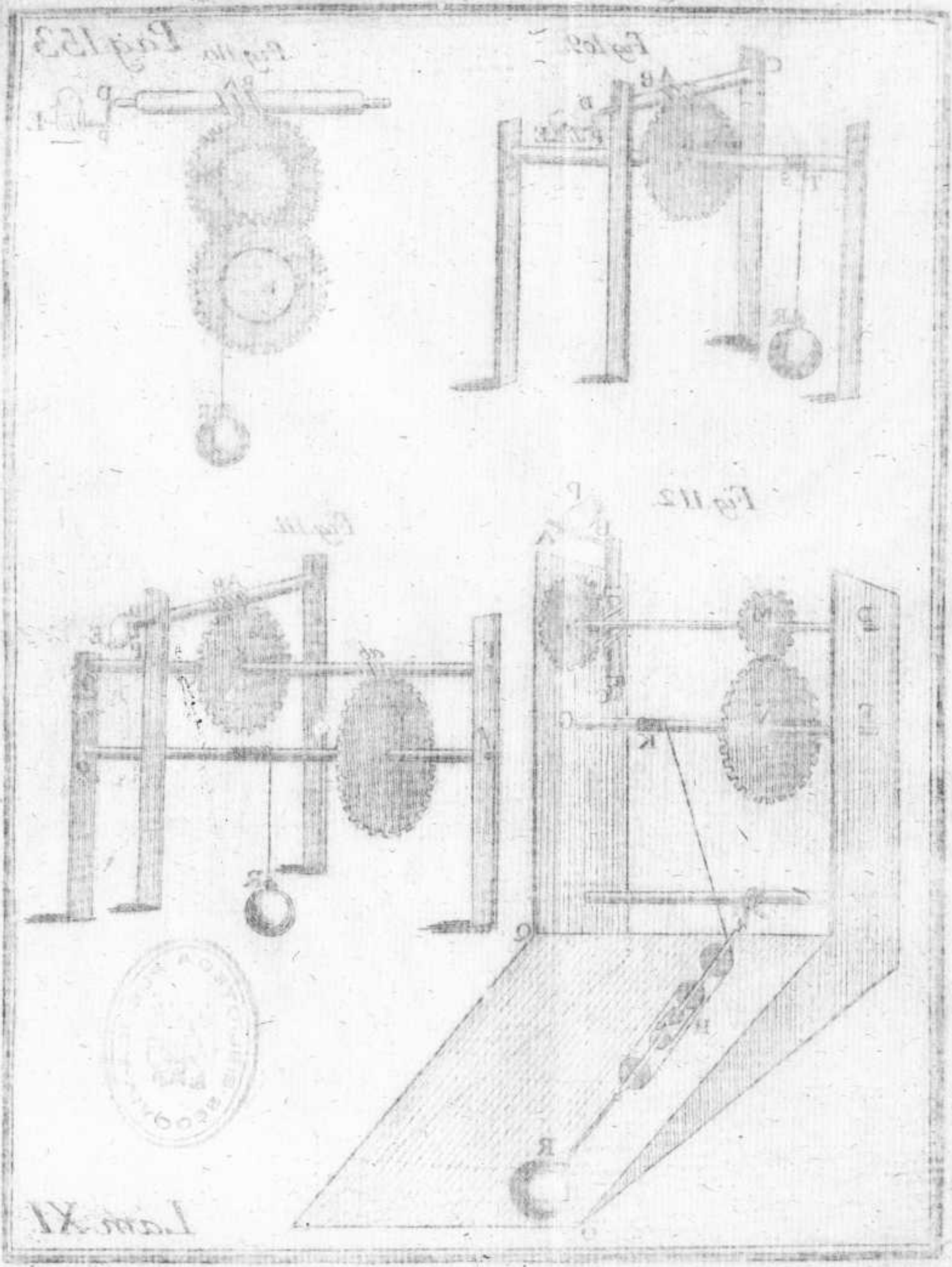


Fig. 111.





otro, lo que produce una nueva resistencia llamada Rozamiento, que no se ha considerado anteriormente en el equilibrio de las máquinas. Por tanto se debe determinar el aumento que se ha de dar á la potencia equilibrante prefixada ya en cada máquina, para que dicho aumento haga equilibrio con el rozamiento, y la potencia equilibrante junta con el mismo aumento pongan la máquina en el estado mas próxîmo al movimiento. La polea y la balanza tienen dicho rozamiento en el exe de su movimiento, el exe en la rueda en los apoyos donde está sostenido su exe, el plano inclinado en la parte de la superficie que toca á la del cuerpo que insiste sobre el mismo plano, &c. Con la consideracion al rozamiento en dichas máquinas se evidencian las dos especies de él; es á saber, la una quando la superficie de un cuerpo se resbala sobre la de otro, y la otra quando una superficie ó entrambas se mueven rodando, siendo el rozamiento de esta segunda especie mucho menor que él de la primera, porque con el movimiento de rotacion se rompen las desigualdades que tienen las superficies que frotan. Antes de proceder á la investigacion del aumento que se debe dar en cada máquina á la potencia equilibrante para el referido objeto, se deben advertir algunos arbitrios que hay para disminuir el rozamiento: es á saber,

1°. Las superficies de las partes de la máquina, que se frotan, deben ser bien bruñidas, con tal que el pulimento de ellas no llegue al grado de hacer sensible su fuerza de adhesion, que es grandísima en el perfecto contacto, lo qual produciria una nueva resistencia en la máquina.

2°. Las partes de la máquina que se frotan mutuamente, se hacen de distintas materias, para que mediante la distinta figura de los poros de ellas las partes elevadas de la una no puedan introducirse y cerrarse en los poros de la otra materia: y asi, por exemplo, el exe de hierro de una rueda se hace mover en una abrazadera de laton ó de otra materia distinta del hierro.

3°. Para las referidas partes de una máquina se hace uso de las materias mas duras, y se procura aumentar su dureza: y asi se usa del hierro templado en los exes, &c.

4°. Se disponen las partes movibles de una máquina, de modo que ellas pesen una sobre otra lo menos que sea posible.

5°. Asimismo se introduce en las referidas partes de una máquina alguna materia untuosa &c. la que además de disminuir el rozamiento preserva el metal y el hierro de orin y moho, y las maderas de la putrefaccion.

Tambien es de notar que si dos superficies están aplicadas una á otra por mayor intervalo de tiempo, la fuerza del rozamiento se aumenta. Igualmente se debe advertir que consta por un gran número de experiencias, que dicha fuerza se mantiene sensiblemente la misma, si se rozan las superficies pequeñas ó las mas grandes de un mismo cuerpo con la de otro, de suerte que parece que la extension de las superficies en iguales circunstancias del peso y del pulimento no hace variar la dicha fuerza. Exceptúese el caso de un cuerpo puntiagudo que tiene considerable aumento en el rozamiento, si su punta insiste sobre la superficie de otro cuerpo.

El método práctico comun á toda máquina para determinar el rozamiento que tiene, consiste en aumentar progresivamente con una pequeña cantidad la potencia equilibrante calculada segun los principios expuestos, y con la consideracion al peso ó gravedad de las partes movibles en la misma máquina, hasta que la máquina se halle pronta al movimiento; y entonces toda la potencia añadida á la equilibrante dará con bastante aproxîmacion la cantidad del rozamiento.

El segundo método para calcular la fuerza del rozamiento en las máquinas se funda en la suposicion que dicha fuerza sea proporcional con la presion que el un cuerpo exerce sobre el otro, esto es, que dicha fuerza sea igual á cierta parte de la presion. Consta por las experiencias siguientes que en las maderas bien tersas la fuerza de la primera especie del rozamiento es con corta diferencia la tercera parte de la fuerza de la presion, y que en otras materias es la quarta, &c. parte, segun sean susceptibles de mayor pulimento, como los metales. Por tanto si en los cálculos correspondientes á la fuerza del rozamiento se supone ésta la tercera parte de la fuerza de presion, los resultados que se tengan harán conocer con alguna ventaja el aumento que se necesita dar á la potencia equilibrante en cada máquina, para que se halle en el estado mas próxîmo al movimiento.

1ª. Sobre el plano horizontal *LM* (*Fig.* 113.) bien terso de una tabla colóquese la tablita *AB* cargada con peso, siendo la superficie inferior de ella perfectamente plana y tersa: hágase pasar el cordon flexîble *FCD* por la polea inmoble *C*, y el extremo *F* del mismo cordon fíxese en *AB*, de modo que su direccion *FC* sea horizontal, y penda del otro extremo *D* la cazoleta *E*: y finalmente pónganse en ésta sucesivamente pesos pequeños, hasta que *AB* comience á moverse. Comparando ahora los pesos aplicados á los extremos *D* y *F* del cordon *DCF*, se halla que el peso aplicado en *D* es próxîmamente la tercera parte del peso aplicado en *F*: lo que demuestra que la fuerza del rozamiento de las dos superficies de madera es próxîmamente la tercera parte del peso del cuerpo insistente sobre el plano horizontal *LM*.

2ª. Supóngase como antes que la tablita *AB* está cargada con peso, y que insiste sobre el plano horizontal *LM*; inclínese (*Fig.* 114.) este plano poco á poco hasta que *AB* comience á moverse sobre él; y en tal disposicion mídanse la altura *LG* del plano inclinado que resulta, y su longitud *HL*. Comparando ahora la altura *LG* con la longitud *LH*, se halla que la primera es próxîmamente la tercera parte de la segunda: lo que demuestra como en la experiencia anterior, que la fuerza del rozamiento de las dos superficies de madera es próxîmamente la tercera parte del peso insistente sobre el plano inclinado: pues en la dicha disposicion del plano inclinado la fuerza, que equilibra el peso *AB* segun la direccion del plano inclinado, es (132) la tercera parte de dicho peso, por ser $LG = \frac{1}{3} LH$: luego la resistencia causada por el rozamiento segun la misma direccion será próxîmamente la tercera parte del mismo peso.

II. La segunda causa física que disminuye el efecto de las potencias aplicadas á las máquinas, consiste en la resistencia que oponen las cuerdas para plegarse en una curva dada; cuya resistencia se llama Embarramiento de las cuerdas. La experiencia enseña que las cuerdas resisten tanto mas á plegarse, quanto mayores son sus radios, y los pesos que se les aplican, y quanto menores son los radios de las poleas, ó de los cilindros en que se envuelven. Por tanto en la comparacion de las resistencias de las cuerdas que tienen las mismas circunstancias, esto es, que son de unas mismas especies, igualmente torcidas, nuevas, &c. se supone que son como la compuesta de la directa de los pesos aplicados á las mismas cuerdas, de la directa de sus diámetros, y de la inversa de los diámetros de las poleas ó de los cilindros en que se envuelven, por ser esta suposicion bastante uniforme á la experiencia: y asi llamadas R, r las resistencias de dos cuerdas, C, c sus diámetros, P, p los pesos aplicados á las mismas cuerdas, y B, b los diámetros de las poleas ó cilindros, será $R:r = \frac{PC}{B} : \frac{pc}{b}$. Tambien consta por algunas experiencias que siendo $p=1$ libra, $c=1$ linea, y $b=1$ pulgada, el peso que conviene añadir á dicha libra para vencer la resistencia r, es igual á media onza: luego substituyendo estos valores en la proporcion antecedente, se tendrá $R : \frac{1}{2} = \frac{PC}{B} : 1$, de donde resulta la fórmula para qualesquiera poleas y cuerdas $R = \frac{PC}{2B}$, cuya fórmula se podrá expresar por $\frac{18}{34} \times \frac{PC}{B}$ á fin de tener la potencia que conviene oponer á la resistencia R con alguna mayor ventaja. En la práctica se debe advertir que las cuerdas entren fácilmente en la ranura de las poleas, y que las mismas cuerdas han de destorcerse antes de usarlas, para que se disminuya la resistencia de ellas, y se facilite el movimiento de las máquinas, y especialmente él de los aparejos.

Del Rozamiento en las máquinas, y del Embarramiento de las cuerdas.

PROPOSICION LVIII.

202. Dada la razon del rozamiento á la presion en una polea equilibrada, en la que actúan potencias en direcciones paralelas, determinar la po-

tencia que tiene dicho rozamiento en equilibrio. *Fig.* 115, 116.

1°. Sea la polea inmoble ABC (*Fig.* 115.) cargada de dos pesos P y Q iguales, que actúan segun lás direcciones AP y CQ paralelas, de suerte que la misma máquina se halle (148) en el estado del equilibrio matemático. Ahora supóngase que se añade un pequeño peso p á P para equilibrar el rozamiento que tiene su exe horizontal geh que rueda sobre apoyos fixos, á fin de que la polea se halle en el estado mas próxîmo al movimiento. Y por estar la resistencia del rozamiento de dicho exe, cuya direccion ef se puede considerar tangente al círculo geh, en equilibrio con el pequeño peso p cerca del punto d centro del movimiento, será (112) dicho rozamiento multiplicado por el brazo de de la palanca igual al peso p multiplicado por el otro brazo dA de la misma palanca. Llámense, $dA=a$, y $de=b$; y exprésese la razon del rozamiento á la presion por la de n á 1: y por ser $2P+p$ la presion, será el rozamiento igual á $n\times(2P+p)$: luego substituyendo estos valores en la eqüacion anterior, se tendrá $n\times(2P+p)\times b=a\times p$, de donde resulta ser $2bnP + nbp = ap$; y despejando de esta equacion la incógnita p, será $p=\frac{2bnP}{a-nb}$.

2°. En la polea movible BCA (*Fig.* 116.) en quien los cordones AP y BD, y las direcciones AP y CR de las potencias P y R son paralelas, estando firme el extremo D del cordon DCP, el mismo peso R será la presion, y por consiguiente el rozamiento nR: luego expresando p el aumento que conviene dar á la potencia P para equilibrar el rozamiento nR, será (115) p multiplicado por a radio de la polea igual á nR multiplicado por b; por consiguiente se tendrá dicho aumento $p = \frac{bnR}{a}$. Ahora si se pide determinar el valor de la potencia $P + p$, que se debe aplicar en P para equilibrar el peso R y el rozamiento en la polea, será $P + p = \frac{R}{2} + \frac{bnR}{a} = R \times \frac{a + 2bn}{2a}$, por ser $P = \frac{1}{2} R$ por lo demostrado (150). Si á la polea BCA está unida otra G con las mismas condiciones, será la resistencia aplicada á la polea G igual á $R \times \frac{a+2bn}{2a} = R \times m$ para facilitar el cálculo: luego expresando Q la potencia que equilibra la resistencia ó presion $R \times m$, y p el aumento que se debe dar á dicha potencia Q para equilibrar el rozamiento $n \times Rm$ en la segunda polea G, será (115) $p \times a = b \times nRm$; por consiguiente se tendrá dicho aumento $p = \frac{nbRm}{a}$. Ahora si se pide determinar el valor de la potencia $Q + p$, que se debe aplicar en Q para equilibrar el peso R y el rozamiento en las dos poleas, se tendrá $Q + p = \frac{Rm}{2} + \frac{nbRm}{a} = Rm \times \frac{a + 2bn}{2a} = Rm^2$. Con el mismo raciocinio se demostrará que si son tres las poleas movibles en la referida máquina, la potencia que se debe aplicar á la tercera polea para equilibrar el peso R y el rozamiento en las tres poleas, será igual á $R \times m^3$; y asi sucesivamente. Que es &c.

EXEMPLO.

203. Si se supone en el segundo caso de la Proposicion antecedente el peso R igual á 500 libras, $\frac{b}{a} = \frac{1}{6}$, y $n = \frac{1}{5}$; será $m = \frac{a + 2bn}{2a} = \frac{8}{15}$. Por tanto si son tres las poleas; la potencia, que tiene en equilibrio dicho peso de quinientas libras con atencion al rozamiento en las mismas poleas, será igual á $Rm^3 = 75, 8$ libras próximamente en lugar de 62, 5 que hubieran sido sin dicho rozamiento. Adviértase que para la exâctitud se debe substituir en lugar de a el valor del radio de la polea aumentado con él del cordon.

ESCOLIO.

204. Se ha omitido considerar el rozamiento en la palanca por ser de corta entidad en la mayor parte de los usos de ella para mover pesos grandes; pero se debe procurar que el apoyo de dicha máquina sea convexô y circular en la parte superior, y que la materia de la misma sea suficientemente dura. Y aunque la balanza se refiera á la palanca, todavía merece particular consideracion el rozamiento en aquella máquina, respecto á que por su medio se pide determinar la igualdad mas precisa entre los pesos.

PROPOSICION LIX.

205. Dada la razon del rozamiento á la presion respecto al cuerpo *BE*, que está en equilibrio sobre el plano inclinado *HG* en virtud de la potencia *R* aplicada al centro *P* de gravedad de dicho cuerpo segun la direccion *PR* obliqüa al mismo plano, determinar la potencia que tiene dicho rozamiento en equilibrio segun la direccion *PR*. *Fig.* 117.

Sean, *HI* la altura, y *GI* la base del plano inclinado propuesto. Supóngase que la potencia *Q* tiene en equilibrio el peso del cuerpo *BE*, y su rozamiento sobre dicho plano, segun la referida direccion PR; exprésense, el peso P del cuerpo por la vertical PD, y la potencia Q por la recta PQ; y formando los rectángulos CA y MF, cuyos lados PC y PF sean paralelos á HG, será $PA+PM$ la presion del cuerpo BE sobre el plano inclinado HG en virtud de dichas potencias PD y PQ; por consiguiente $n\times PA+n\times PM$ será el rozamiento del cuerpo BE sobre dicho plano, con tal que n exprese la razon del rozamiento á la presion. Nómbrese el ángulo $PQM=B$, y refiérase á un radio constante igual á HG para facilitar el cálculo. Por la semejanza de los triángulos PAD, HGI son $PA:PD=GI:GH$, y $PD:DA=GH:HI$, de cuyas proporciones resulta ser $PA=\frac{P\times GI}{GH}$, y DA ó bien $PC=\frac{P\times HI}{HG}$: tambien en el triángulo PMQ son $PQ:PM=GH:Sc.B$, y $PQ:QM=GH:Cc.B$; de donde resulta $PM=\frac{Q\times Sc.B}{HG}$, y QM ó bien $PF=\frac{Q\times Cc.B}{GH}$; pero $n\times PA+n\times PM$ es el rozamiento del cuerpo BE sobre el plano inclinado HG: luego dicho rozamiento será igual á $\frac{n\times P\times GI}{GH}+\frac{nQ\times Sc.B}{GH}$. Y por estar el cuerpo BE en equilibrio sobre el plano inclinado, debe ser la potencia PF igual á la potencia PC unida al rozamiento del mismo cuerpo: luego substituyendo los valores hallados de estas cantidades, se tendrá la equacion $\frac{Q\times Cc.B}{GH} = \frac{P\times HI}{HG} + \frac{nP\times GI}{GH} + \frac{nQ\times Sc.B}{GH}$, de donde resulta ser $Q = \frac{P\times HI + nP\times GI}{Cc.B - nSc.B}$; pero la potencia R que equilibra el peso P del cuerpo BE sin rozamiento segun la dicha direccion PQ es igual á $\frac{P\times HI}{Cc.B}$ (138): luego $Q - R$, esto es, $\frac{P\times HI + nP\times GI}{Cc.B - nSc.B} - \frac{P\times HI}{Cc.B}$, ó bien $\frac{nP\times(GI\times Cc.B + HI\times Sc.B)}{Cc.B\times(Cc.B - nSc.B)}$, será la potencia que se debe añadir á la dicha potencia R en virtud del rozamiento del cuerpo BE sobre el plano inclinado HG. Que es &c.

COROLARIO I.

206. Se infiere que si la direccion PQ de la referida potencia R es paralela al plano inclinado HG; será $R = \frac{P\times HI}{GH}$, y el aumento que se debe dar á la potencia R en virtud del rozamiento será

igual á $\frac{nP\times GI}{HG}$: pues en dicha suposicion es el ángulo $B=o$, y por consiguiente $Sc.B=o$, y $Cc.B$ igual al radio HG. Por tanto á fin de que el cuerpo BE pueda descender por el plano inclinado HG, será preciso que la potencia $\frac{P\times HI}{HG}$ que le anima segun la direccion de dicho plano sea mayor que el rozamiento $\frac{nP\times GI}{HG}$, ó bien $\frac{HI}{GI} > n$.

COROLARIO II.

207. Tambien se infiere que si la direccion PQ de la referida potencia R es paralela á la base GI del plano inclinado HG; será $R=\frac{P\times HI}{GI}$, y el aumento que se debe dar á la misma potencia R en virtud del rozamiento será igual á $\frac{nP\times(GH)^2}{GI\times(GI-n\times HI)}$: pues en dicha suposicion es el ángulo B, esto es, $PQM=HGI$, y por consiguiente $Cc.B=GI$, $Sc.B=HI$.

EXEMPLO.

208. Si se suponen, el peso $P=4000$ libras, el ángulo $HGI=30^\circ$, y $n=\frac{1}{3}$; se tendrá $\frac{HI}{HG}=\frac{1}{2}$,

$\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,886$ próxîmamente: luego si la direccion de la potencia R es paralela al plano inclinado HG, será $R = \frac{P \times HI}{HG} = 2000$ libras, y el aumento, que se debe dar á la potencia R en virtud del rozamiento de dicho peso de 4000 libras con el plano inclinado, será igual á $\frac{nP \times GI}{HG} = 1181\frac{1}{3}$ libras. Y si la direccion de la potencia R es paralela á la base GI del plano inclinado, se tendrá $\frac{HI}{GI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(GI)^2 = \frac{3(HG)^2}{4}$, $n \times GI \times HI = \frac{(HG)^2 \times \sqrt{3}}{12}$: luego la potencia $R = \frac{P \times HI}{GI} = 2257$ próxîmamente, y el aumento, que se debe dar á la misma potencia R con direccion paralela á la base GI del plano inclinado en virtud del rozamiento del referido peso de 4000 libras con el dicho plano, será igual á $\frac{nP \times (GH)^2}{GI \times (GI - n \times HI)} = 2213{,}6$ libras próxîmamente.

PROPOSICION LX.

209. Dada la razon del rozamiento á la presion en el exe en el peritroquio, determinar la potencia que se debe añadir á la equilibrante para

tener en equilibrio el rozamiento en la misma máquina. *Fig.* 118.

Llámense; P el peso ó resistencia aplicada al cilindro GCM, que actúa en la direccion vertical MP; q la pequeña potencia que se debe añadir á la potencia Q que actúa segun la direccion DQ tangente á la rueda BD en D, para que dicha potencia q tenga en equilibrio el rozamiento del exe xy en la misma máquina, mientras la potencia Q equilibra el peso P. Tírense las verticales AON y DK; exprésense, la potencia P por la recta AO, y la potencia $Q+q$ por la recta DE; tírese EK perpendicular á DK, y complétese el rectángulo HK: con lo qual la potencia $Q+q$ quedará descompuesta (102) en la potencia DK que actúa en direccion vertical, y en la potencia DH que actúa en direccion horizontal. Córtese ahora $ON=DK$, y será AN la potencia que actúa sobre el exe xy en direccion vertical en virtud de las potencias $Q+q$, y P. Sobre la recta AN en el punto A levántese la perpendicular $AL=DH$, y expresará AL la potencia que actúa sobre el exe xy en direccion horizontal: luego completo el rectángulo LN, y tirada su diagonal AF, ésta será (102) la potencia resultante de las potencias AL y AN, ó bien la resultante de las potencias $Q+q$, y P

aplicadas al exe xy, esto es, la presion de dichas potencias sobre el mismo exe en el punto y. Por tanto expresando n la razon del rozamiento á la presion en esta máquina, será dicho rozamiento igual á $n \times AF$ con la direccion tangente al círculo xy en el punto y; pero la potencia q actúa sobre AD en D segun la direccion DQ perpendicular á AD, y dicho rozamiento $n \times AF$ actúa sobre Ay en y segun la direccion perpendicular al radio Ay, siendo el punto A centro del movimiento: luego (131) en el caso del equilibrio de la potencia q y del rozamiento $n \times AF$ será $q \times AD = n \times AF \times Ay$, ó bien $(A)\ q^2 \times (AD)^2 = n^2 \times (AF)^2 \times (Ay)^2$. Nómbrense, $AD = a$, $Ay = b$, y el ángulo $QDK = D$ referido al radio a; y por ser $DE = Q + q$, serán DH ó bien $AL = \frac{Sc.D \times (Q+q)}{a}$, y DK ó bien $ON = \frac{Cc.D \times (Q+q)}{a}$; por consiguiente $AN = AO + ON = P + \frac{Cc.D \times (Q+q)}{a}$, $(AF)^2 = (AN)^2 + (AL)^2 = (P + \frac{Cc.D \times (Q+q)}{a})^2 + (\frac{Sc.D \times (Q+q)}{a})^2 = \frac{a^2 P^2 + 2aP \times Cc.D \times (Q+q) + a^2 \times (Q+q)^2}{a^2}$.

Por tanto si en la equacion (A) se substituyen los valores de AD, AF, Ay, se tendrá (B) $a^2 q^2 = \frac{n^2 b^2}{a^2} \times (a^2 P^2 + 2aP \times Cc. D \times (Q+q) + a^2 \times (Q+q)^2)$; y resolviendo esta equacion, se hallará $q = \frac{B + \surd(AC+B^2)}{C}$, en quien $A = n^2 b^2 P^2 + \frac{2P \times Cc. D \times n^2 b^2 Q}{a} + n^2 b^2 Q^2$, $B = \frac{P \times Cc. D \times n^2 b^2}{a} + n^2 b^2 Q$, y $C = a^2 - n^2 b^2$, para facilitar el cálculo. Que es &c.

ESCOLIO.

210. Es de advertir que por ser la potencia q muy pequeña respecto á la Q, se podrá reducir la equacion anterior (B) para los usos prácticos á $a^2 q^2 = \frac{n^2 b^2}{a^2} \times (a^2 P^2 + 2aP \times Cc. D \times Q + a^2 Q^2)$, de donde resulta $q = \frac{nb}{a^2} \times \surd(a^2 P^2 + 2aP \times Cc. D \times Q + a^2 Q^2)$; y substituyendo (156) en esta expresion en lugar de Q su valor $\frac{cP}{a}$, en quien c expresa el radio AM del cilindro, se tendrá $q = \frac{nbP}{a^2} \times \surd(a^2 + 2c \times Cc. D + c^2)$. En esta expresion, como tambien en la anterior $q = \frac{B + \surd(AC + B^2)}{C}$,

será mínimo el valor de q, si es $Cc.D=o$; ó bien el ángulo QDK recto; y siendo $Cc.D=a$, ó el ángulo $QDK=o$, será dicho valor máxîmo; por consiguiente si se prolongan la vertical NA y la horizontal AL hasta encontrar la circunferencia del círculo en los puntos T y S, será mínimo el rozamiento del exe, estando aplicada la potencia en T, y máxîmo quando le está aplicada en S, y desde T á S se irá aumentando el referido rozamiento: luego desde S á V extremo del segundo quadrante SV irá disminuyendo dicho rozamiento, y en V será mínimo. Adviértase que la potencia Q actúa desde T á V en la semicircunferencia TSV hácia la parte de la resistencia. Dígase lo mismo respecto á la otra semicircunferencia TBV, con tal que la potencia Q actúe hácia la misma parte de la resistencia: pues si actuase hácia la parte opuesta, sucederia lo contrario, de modo que el valor de q seria mínimo aplicando la potencia en los puntos S y B.

EXEMPLO.

211. Si se suponen, el peso $P=600$ libras, $a=1$, $c=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{60}$, $n=\frac{1}{3}$, y el ángulo QDK recto; se tendrán $Q=\frac{cP}{a}=100$ libras, y $q=\frac{nbP}{a^2}\times$

$\sqrt{(a^2+c^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{37} = 2,02$ libras: luego con la potencia de 102, 02 libras se tendrá en equilibrio el peso de 600 libras y el rozamiento en la máquina, con tal que la potencia esté aplicada en T, y actúe hácia la parte de la resistencia. Y si la direccion de la potencia Q está aplicada en S, y actúa hácia la parte de la resistencia, esto es, $Cc.D=a$, será $Q=\frac{cP}{a}=100$ libras, y $q=\frac{nbP}{a^2}\sqrt{(a^2+2ac+c^2)}=\frac{nbP}{a^2}\times(a+c)=2\frac{1}{3}$ libras.

PROPOSICION LXI.

212. Dada la razon del rozamiento á la presion en la cuña, determinar la potencia que se debe añadir á la equilibrante para tener en equilibrio el rozamiento en la misma máquina. *Fig.* 119.

Llámense; P la potencia equilibrante que actúa sobre la base BD de la cuña segun la direccion PAC perpendicular á la BD; R y R' las resistencias iguales que actúan sobre los lados BC y CD segun las direcciones RL y $R'L'$ obliqüas á los mismos lados, y con iguales ángulos RLB y $R'L'D$; y p la potencia que se debe añadir á la potencia P para equilibrar el rozamiento en dicha máquina. Tambien exprésese la potencia $P+p$

por la recta AG; tírense las rectas AE y AE' perpendiculares á las respectivas rectas BC y CD, y fórmese el paralelógramo equilátero $AFGF'$: con lo que quedará descompuesta (102) la potencia AG ó $P+p$ en las potencias iguales AF y AF', que actúan perpendicularmente sobre los respectivos lados BC y CD, y que son las presiones sobre ellos en virtud de la potencia $P+p$: luego por la semejanza de los triángulos AFG y BCD será la presion AF á la potencia $P+p$ como BC á BD, de donde resulta ser la presion $AF=\frac{(P+p)\times BC}{BD}$, y en conseqüencia las presiones iguales $AF+AF'=\frac{2\times(P+p)\times BC}{BD}$. Ahora exprésense las resistencias iguales R y R' por las rectas RL y $R'L'$; nómbrense B los ángulos iguales RLB y $R'L'D$ que forman las dichas resistencias con los lados BC y CD refiriendo los mismos ángulos al radio constante BC; y fórmense los rectángulos NM y $N'M'$; con lo que las rectas iguales RM y $R'M'$ expresarán las presiones sobre los mismos lados BC y CD en virtud de las potencias iguales R y R': luego será $RL:RM=BC:Sc.B$, de donde resulta ser la presion $RM=\frac{R\times Sc.B}{BC}$, y en consequencia las presiones iguales $RM + R'M' = \frac{(R+R')\times Sc.B}{BC} = \frac{P\times(Sc.B)^2}{BC\times BA}$, por ser $R + R' = \frac{P\times Sc.B}{BA}$ (145). Por tanto se tendrá que las presiones sobre los lados BC y CD en virtud de las potencias $P+p$, y $R + R'$ son iguales á $\frac{2\times(P+p)\times BC}{BD} - \frac{2P\times(Sc.B)^2}{BC\times BD}$, cantidad que nombro $2A$ para facilitar el cálculo, y por consiguiente el rozamiento será igual á $2nA$, expresando n la razon del rozamiento á la presion en la cuña. Ahora córtense las rectas CI y CI' iguales á nA mitad de dicho rozamiento, y complétese el paralelógramo equilátero $CIHI'$; y su diagonal CH expresará la resultante del mismo rozamiento segun la direccion CA, y la dicha resultante deberá ser igual á la potencia p añadida en virtud del equilibrio que se ha supuesto. Y por ser el paralelógramo $CIHI'$ equilátero, se tendrá $CH = 2CK$, y por la semejanza de los triángulos CKI y CAB será $CK : CI = CA : CB$, por consiguiente $CK = \frac{CI\times CA}{BC}$, y $2CK = \frac{2CI\times AC}{BC}$; pero $p = CH = 2CK$: luego será $p = \frac{AC\times 2nA}{BC} = \frac{AC}{BC} \times \left(\frac{2n\times(P+p)\times BC}{BD} - \frac{2nP\times(Sc.B)^2}{BC\times BD}\right)$, de donde resulta ser ($A$) $p=\frac{nP\times AC\times((BC)^2-(Sc.B)^2)}{(BC)^2\times(BA-n\times AC)}$. Que es &c.

COROLARIO.

213. Si las direcciones de las resistencias iguales R y R' son paralelas á BD; será $Sc.B=AC$: luego en dicha suposicion la referida fórmula A se convertirá en la $p=\frac{nP\times AC\times(BA)^2}{(BC)^2\times(BA-n\times AC)}$.

EXEMPLO.

214. Sean, $BC=5$ pulgadas, $CA=4$, $n=\frac{1}{3}$, y $R+R'=200$ libras; y serán, $AB=3$ pulgadas, y $P=150$ libras en la suposicion que las direcciones de las resistencias R y R' sean paralelas á BD: luego se tendrá $p=\frac{nP\times AC\times(BA)^2}{(BC)^2\times(BA-n\times AC)}=43,2$ libras, que es la potencia que se debe añadir á la equilibrante de 150 libras para el equilibrio del rozamiento en esta máquina. Y si se suponen, $BC=5$ pulgadas, $CA=4,6$, y $R+R'=200$ libras; serán próximamente, $AB=1,9$ pulgadas, y $P=82,6$ libras en la misma suposicion que las direcciones de las resistencias R y R' sean paralelas á BD. Ahora si se substituyen dichos valores en la fórmula $p=\frac{nP\times AC\times(BA)^2}{(BC)^2\times(BA-n\times AC)}$, se hallará que

la potencia p, que se debe añadir á la equilibrante de 82, 6 libras para el equilibrio del rozamiento, es igual á 49, 8 libras. Adviértase que segun las experiencias el rozamiento producido por los cuerpos muy pesados, que actúan en dicha máquina, es mayor que la tercera parte del peso de los mismos cuerpos.

PROPOSICION LXII.

215. Dada la razon del rozamiento á la presion en la balanza, determinar la potencia que se debe añadir á la equilibrante para tener en equilibrio el rozamiento en la misma máquina. *Fig.* 120.

Supóngase que el hastil AB de la balanza, de donde penden los pesos P y Q iguales, se halla en equilibrio; y que se añade un pequeño peso p á P para equilibrar el rozamiento que tiene su exe horizontal fhi que rueda sobre apoyos fixos, á fin de que la dicha máquina se halle en el estado mas próxîmo al movimiento. Y por estar el rozamiento del exe, cuya direccion fg se debe considerar tangente al círculo fhi en el punto f, en equilibrio con el pequeño peso p cerca del punto c centro del movimiento, tirada la horizontal cm, y prolongada la vertical PA hasta m, será dicho rozamiento al peso p como cm ó bien $Cc.Acm$ á cf

radio del exe, lo que se demuestra con método semejante á él que se ha expuesto anteriormente (163). Ahora llámense, $cA = a$, y $cf = b$; y exprésese por n la razon del rozamiento á la presion: y por ser $2P + p$ la presion, será el rozamiento igual á $n \times (2P + p)$: luego substituyendo estos valores en la proporcion anterior, se tendrá $n \times (2P + p) : p = Cc.Acm : b$, de donde resulta ser $2bnP + nbp = p \times Cc.Acm$; y despejando de esta equacion la incógnita p, se tendrá (A) $p = \frac{2bnP}{Cc.Acm - nb}$, cuya expresion en la práctica se puede establecer igual á $\frac{2bnP}{a - nb}$, por ser el ángulo Acm muy pequeño. Que es &c.

EXEMPLO.

216. Si se suponen, el peso P igual á 100 libras, $\frac{b}{a} = \frac{1}{100}$, y el rozamiento igual á $\frac{1}{7}$ de la presion, esto es, $n = \frac{1}{7}$; hechas las substituciones correspondientes en la fórmula (A) se tendrá $p = \frac{200}{499}$ de libra, esto es, igual próxîmamente á seis onzas y tres ochavas.

PROPOSICION LXIII.

217. Dada la razon del rozamiento á la presion en la rosca, determinar la potencia que se debe añadir á la equilibrante para tener en equilibrio el rozamiento en la misma máquina. *Fig.* 95.

Supónganse, la construccion de la figura, las denominaciones, y lo demas que se ha dicho (160) relativamente al equilibrio en la máquina propuesta. Y actuando la potencia P en direccion horizontal, la potencia que actuará sobre el punto H en el plano inclinado infinitésimo Hh tendrá su direccion paralela á la base horizontal HN del mismo plano, mientras la resistencia R actúa sobre dicho punto en direccion vertical. Llámense; p el aumento que se debe dar á la potencia equilibrante P para el equilibrio del rozamiento en el plano inclinado Hh; y q el aumento que se debe dar á la referida potencia con direccion paralela á HN para equilibrar el mismo rozamiento: luego se tendrá (131) $p : q = MH : EP$, ó bien como la circunferencia del círculo, cuyo radio es MH, á la del círculo cuyo radio es EP, cuyas circunferencias se expresarán por c y C; y además será (207) $q = \frac{nR\times(Hh)^2}{NH\times(NH-n\times Nh)} = \frac{nR\times((HN)^2+(Nh)^2)}{(NH)^2-n\times NH\times Nh}$; pero es $Nh : NH = HG : c$ por la construccion (162) de la Espiral HLG, de donde $Nh = \frac{NH \times HG}{c}$: luego será $q = nR \times \left((HN)^2 + \frac{(NH)^2 \times (HG)^2}{c^2} \right)$: $\left((NH)^2 - \frac{n \times (NH)^2 \times HG}{c} \right)$; reduciendo esta expresion se tendrá $q = \frac{nR \times (c^2 + (HG)^2)}{c \times (c - n \times HG)}$; y substituyendo en lugar de q su valor $\frac{p \times C}{c}$, será $\frac{p \times C}{c} = \frac{nR \times (c^2 + (HG)^2)}{c \times (c - n \times HG)}$, de donde resulta ser $p = \frac{nR}{C} \times \frac{(c^2 + (HG)^2)}{c - n \times HG}$; pero en el equilibrio de esta máquina considerada sin rozamiento es (160) $P : R = HG : C$, de donde $R = \frac{P \times C}{HG}$: luego será $p = \frac{nP}{HG} \times \frac{(c^2 + (HG)^2)}{c - n \times HG}$. Que es &c.

EXEMPLO.

218. Si se suponen, $PE = 100$ pulgadas, $MH = 10$, $HG = 3$, y $n = \frac{1}{5}$, y la resistencia $R = 734$ libras; serán próximamente, $c = \frac{22}{7} \times 20$, $C = \frac{22}{7} \times 200$, y la potencia $P = \frac{R \times HG}{C} = 3,5$ libras: luego substituyendo estos valores en la fórmula $p =$

$\frac{nP}{HG} \times \frac{(c^2 + (HG)^2)}{c - n \times HG}$, se tendrá $p = 14,8$ libras próxîmamente. Es de advertir que, mediante el gran contacto que tienen las espiras del husillo con las de la tuerca, la resistencia causada por el rozamiento segun las experiencias llega aun á la mitad de la resistencia ó peso que se ha de levantar por medio de esta máquina en la suposicion que sus espiras sean de figura triangular; porque si son quadradas, el rozamiento se halla ser mayor que la dicha mitad.

PROPOSICION LXIV.

219. Sean las dos poleas *OCM*, *VDN* inmobles cargadas por medio de cuerdas de diferentes diámetros, la primera con dos pesos iguales *P* y *Q*, y la segunda con otros dos pesos tambien iguales *R* y *S*; y supóngase que para vencer el rozamiento y el embarramiento de las cuerdas se han añadido el pequeño peso *p* al peso *P*, y el pequeño peso *r* al peso *R*: se pide determinar las partes *x*, *y* de dicho peso *p* correspondientes al rozamiento y al embarramiento de la cuerda *PCQ* en la primera polea, como tambien las partes *z*, *u* de dicho peso *r* correspondientes al rozamiento y al embarramiento de la cuerda *RDS* en la segunda polea. (*Fig.* 121, 122.)

Llámense, a, b, c los radios respectivos del exe de la polea OCM, de la polea, y de la cuerda PCQ; a', b', c' los radios respectivos del exe de la polea VDN, de la polea, y de la cuerda RDS; y n la razon del rozamiento á la presion. Siendo, pues, x, y las partes del peso p, y z, u las partes del peso r, se tendrán las equaciones, 1.ª $x+y=p$, 2.ª $z+u=r$: y por ser $2P+p$ la presion total sobre el exe de la polea OCM, será $n\times(2P+p)$ el rozamiento en la misma polea, y por consiguiente en el caso del equilibrio (112) será $n\times(2P+p)\times a=b\times x$, de donde resulta la equacion 3.ª $bx=an\times(2P+p)$: y con el mismo raciocinio aplicado á la segunda polea VDN se hallará la equacion 4.ª $b'z=na'\times(2R+r)$: y finalmente en virtud de la suposicion hecha sobre el embarramiento de las cuerdas (201. II.) será $y:u=\frac{(2P+p)\times c}{b}:\frac{(2R+r)\times c'}{b'}$, de donde resulta la equacion 5.ª $bc'\times(2R+r)\times y=b'c\times(2P+p)\times u$. Por medio de las equaciones anteriores se hallará ser,

$$x=\frac{p\times(2R+r)\times bac'-r\times(2P+p)\times cab'}{(2R+r)\times(bac'-bca')},$$

$$y=\frac{r\times(2P+p)\times cab'-p\times(2R+r)\times bca'}{(2R+r)\times(bac'-bca')},$$

$$z = \frac{p\times(2R+r)\times ba'c' - r\times(2P+p)\times ca'b'}{(2P+p)\times(ab'c'-ca'b')},$$

$$u = \frac{r\times(2P+p)\times ab'c' - p\times(2R+r)\times ba'c'}{(2P+p)\times(ab'c'-ca'b')},$$

$$n = \frac{p\times(2R+r)\times bc' - r\times(2P+p)\times cb'}{(2P+p)\times(2R+r)\times(ac'-ca')}.$$ Que es &c.

ESCOLIO I.

220. Si la polea *MCO*, cuyo diámetro es igual á 10 pulgadas y $6\frac{1}{2}$ lineas, siendo él de su exe igual á 8 lineas, se coloca en situacion vertical, y es perfectamente movible al rededor de su exe, y si á dicha polea se le aplica una cuerda nueva y poco torcida, cuyo diámetro igual á 9 lineas, cargándola con los pesos *P* y *Q* iguales á cien libras y doce onzas; se halla que para vencer el rozamiento y el embarramiento de dicha cuerda es menester añadir al peso *P* él de seis libras. Y si á la misma polea se aplica otra cuerda de la misma especie, igualmente nueva y poco torcida, cuyo diámetro igual á 13 lineas, y se le carga con los pesos anteriores; se halla que para vencer el rozamiento y el embarramiento de esta cuerda de mayor diámetro, se debe añadir al peso *P* él de siete libras y media. Supuesta esta experiencia, y que los pesos actúen segun la direccion de los exes

de las cuerdas, es evidente que el diámetro de la referida polea se debe considerar de 11 pulgadas y $3\frac{1}{2}$ lineas; quando se le aplica la cuerda de menor diámetro, y si se le aplica la de mayor diámetro, se debe considerar de 11 pulgadas y $7\frac{1}{2}$ lineas, y por lo tanto en las fórmulas anteriores, serán, $P = R = 100$ libras y doce onzas $= 100,75$ libras; $p = 6$ libras; $r = 7$ libras y ocho onzas $= 7,5$ libras; $2P + p = 207,5$ libras; $2R + r = 209$ libras; $2a = 2a' = 8$ lineas; $2b = 135,5$ lineas; $2b' = 139,5$ lineas; $2c = 9$ lineas; $2c' = 13$ lineas; y hechas estas substituciones en los valores hallados de las cantidades referidas x, y, z, u, n, se tendrá $x = 2,251$ libras, $y = 3,749$ libras, $z = 2,202$ libras, $u = 5,298$ libras, y $n = 0,1837$ número abstracto, ó la razon del rozamiento á la presion. Por tanto es evidente, 1°. que para vencer el rozamiento x y z en uno y otro caso se necesita un peso algo mayor de dos libras; lo que conviene próxîmamente con los principios expuestos: pues si en la fórmula (202. 1°.) del pequeño peso $x = \frac{2anP}{b-na}$ se substituyen $2a = 8$ lineas, $2b = 135,5$ lineas, $P = 100,75$ libras, y $n = \frac{1}{7}$, será $x = 2,407$ libras: y si en la misma fórmula del pequeño peso $z = \frac{2anP}{b'-na}$ se substituyen $2a = 8$ lineas, $2b'=139,5$ lineas, $P=100,75$ libras, y $n=\frac{1}{7}$, se tendrá $z=2,337$ libras.

2°. Que para vencer el embarramiento de la cuerda de menor diámetro se necesita un peso algo menor de quatro libras; y respecto á la cuerda de mayor diámetro es menester un peso algo mayor de cinco libras; lo que tambien conviene próxîmamente con los principios expuestos: pues si en la fórmula (201.) del pequeño peso $y=\frac{18}{34}\times\frac{P\times 2c}{2b}$, se substituyen $P=100,75$ libras, $2c=9$ lineas, $2b=126,5$ lineas valor del solo diámetro de la polea que en este caso se debe considerar, se tendrá $y=3,794$ libras: y si en la misma fórmula del pequeño peso $u=\frac{18}{34}\times\frac{P\times 2c'}{2b}$ se substituyen $P=100,75$ libras, $2c'=13$ lineas, $2b=126,5$ lineas, será $u=5,481$ libras.

3°. Que el rozamiento es un poco mas que la sexta parte de la presion: pues n á 1, que expresa la razon del rozamiento á la presion, será como 0,1837 á 1, cuya razon es mayor que la de 1 á 6.

ESCOLIO II.

221. Es de notar que siendo $ac'=a'c$, las referidas fórmulas (219) de los valores de x, y, z, u, n

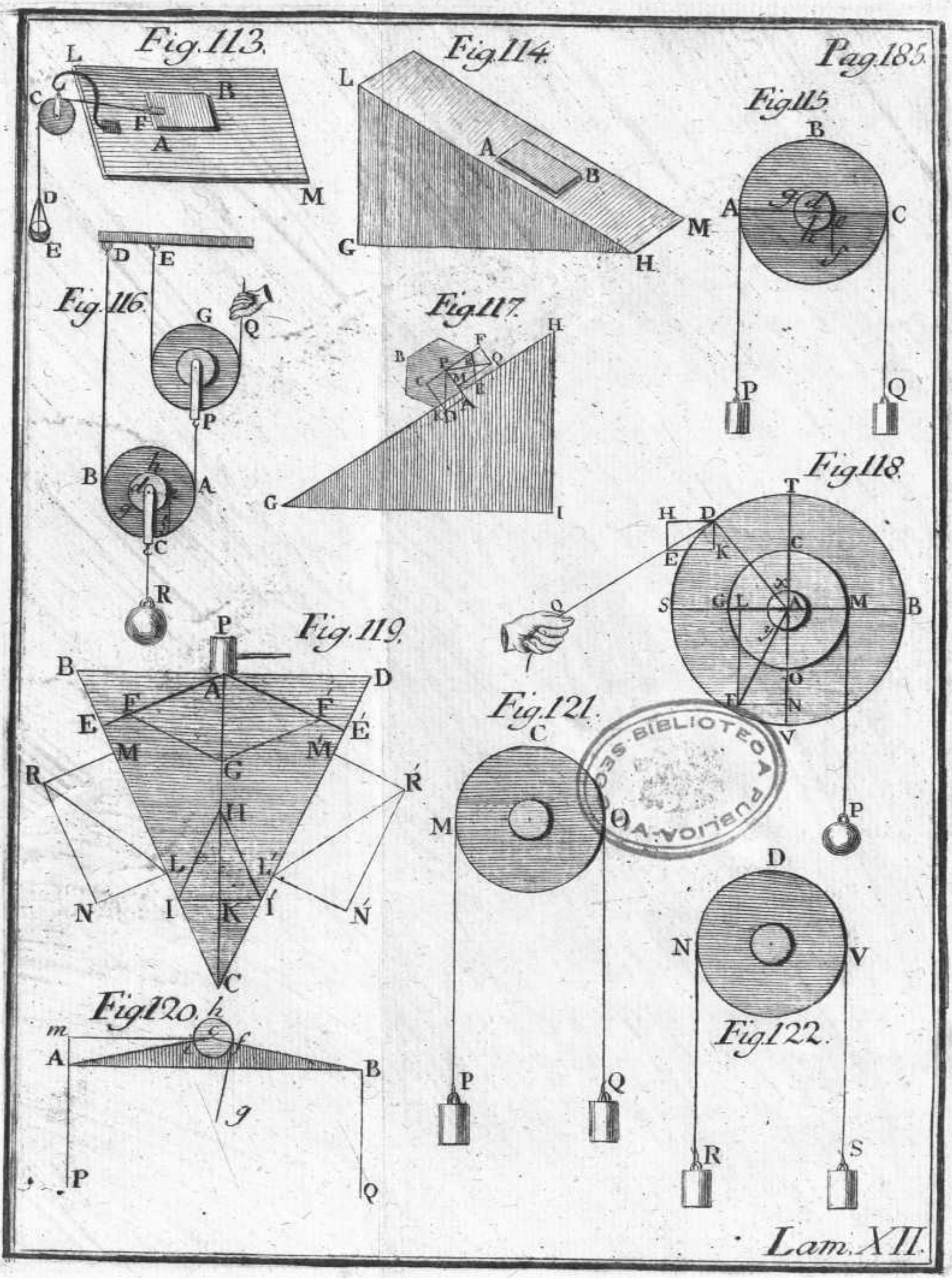


Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.

Lam. XII.

quedan inútiles. En este caso las mismas fórmulas por la substitucion $a=\frac{ca'}{c'}$ se reducen á las siguientes, esto es,

1ª. $x+y=$

2ª. $z+u=r$,

3ª. $bx=\frac{ca'}{c'}\times n\times(2P+p)$,

4ª. $b'z=na'\times(2R+r)$,

5ª. $bc'\times(2R+r)\times y=b'c\times(2P+p)\times u$.

De las equaciones tercera y quarta resulta ser $x:z=\frac{c}{b}\times(2P+p):\frac{c'}{b'}\times(2R+r)$; pero por la equacion quinta es $y:u=\frac{c}{b}\times(2P+p):\frac{c'}{b'}\times(2R+r)$: luego será $x:z=y:u$, de donde resulta ser $x+y:z+u=y:u$: luego $p:r=y:u=\frac{c}{b}\times(2P+p):\frac{c'}{b'}\times(2R+r)$; por consiguiente se tendrán las equaciones $u=\frac{ry}{p}$, $2P+p=\frac{pc'b}{rcb'}\times(2R+r)$, y de esta equacion resulta ser $p=\frac{2rcb'P}{2c'bR+c'br-cb'r}$, y $2P+p=\frac{2Pc'b\times(2R+r)}{c'b\times(2R+r)-cb'r}$. Por tanto en el caso de ser $ac'=a'c$, las cinco equaciones anteriores se reducen á las quatro siguientes, esto es,

1ª. $x+y=p$,

2ª. $z+u=r$,

3ª. $bx=\frac{ca'}{c'}\times n\times(2P+p)$,

4ª. $u=\frac{ry}{p}$,

en las quales son $p=\frac{2rcb'P}{c'b\times(2R+r)-cb'r}$, $2P+p=\frac{2Pc'b\times(2R+r)}{c'b\times(2R+r)-cb'r}$, de modo que quedará el problema indeterminado. Ahora dando un valor, por exemplo, á la n, quedarán determinados los valores de las demas cantidades x, y, u, z; y serán,

$$x=\frac{ca'n\times(2P+p)}{c'b},$$

$$y=\frac{pc'b-ca'n\times(2P+p)}{c'b},$$

$$u=\frac{pc'br-ca'nr\times(2P+p)}{pc'b},$$

$$z=\frac{ca'nr\times(2P+p)}{pc'b}.$$

LIBRO SEGUNDO.

NOCIONES GENERALES.

222. Compresion es la reunion de la masa propia de un cuerpo en un menor volumen mediante el impulso ó presion de otro cuerpo; y si es en virtud del frio, llámase Condensacion.

223. Dilatacion es la extension de la masa propia de un cuerpo en un volumen mayor del que habia tenido durante la compresion; y si es en virtud del calor, llámase Rarefaccion.

224. Elasticidad es aquella fuerza con que los cuerpos reducidos violentamente á menor ó mayor volumen del que tienen en su estado natural, se restituyen á él luego que cesa la causa que les detenia.

225. Fluidos incomprimibles son aquellos que no permiten su compresion; es decir, que por la presion no pueden reducirse á ocupar menor volumen que el que ocupan en su estado natural: tales son por las experiencias, el agua, el vino, la mayor parte de los licores, el mercurio, y los metales fundidos.

226. Fluidos comprimibles ó elásticos son aquellos que permiten su compresion y dilatacion; es de-

cir que pueden ocupar un espacio menor mediante la presion, y luego que ésta cesa, pueden volver á su estado natural: como el ayre.

227. Ayre se llama el fluido invisible que rodea la Tierra; y por Atmósfera terrestre, ó simplemente Atmósfera, se entiende la porcion de ayre que está cerca de la Tierra, esto es, hasta donde llegan los vapores y las exhalaciones de ella.

ESCOLIO.

228. En el presente libro se tratará primero de los fluidos incomprimibles, y sucesivamente del ayre.

229. Por Superficie de un fluido se entiende la superficie superior que forma, qualquiera que sea su figura.

230. Por Gravedad específica de los cuerpos fluidos ó sólidos se entiende la gravedad ó peso que tienen los mismos cuerpos tomados en iguales volúmenes.

COROLARIO I.

231. Por ser las masas de los cuerpos proporcionales (12) con sus gravedades ó pesos, las gravedades específicas de los cuerpos serán proporcionales con sus densidades; por consiguiente los cuerpos de iguales gravedades específicas tendrán las mismas densidades, y teniendo un cuerpo mayor gravedad es-

pecífica que otro, será aquel mas denso que este.

COROLARIO II.

232. Tambien se infiere que el peso de un cuerpo será igual á la gravedad específica del mismo cuerpo multiplicada por su volumen.

COROLARIO III.

233. Por tanto será el peso de un cuerpo al peso de otro como la gravedad específica del primero multiplicada por su volumen á la gravedad específica del segundo multiplicada por su volumen: de donde resulta que será el peso de un cuerpo partido por su gravedad específica al peso de otro cuerpo partido por su gravedad específica como el volumen del primero á el del segundo.

COROLARIO IV.

234. Luego si dos cuerpos son homogéneos ó de una misma naturaleza, será el peso del uno al peso del otro como el volumen de aquel al volumen de este: y si dos cuerpos son heterogéneos ó de distinta naturaleza, y tienen iguales volúmenes, será el peso del uno al peso del otro como la gravedad específica del primero á la del segundo.

COROLARIO V.

235. Y si los pesos de dos cuerpos heterogéneos son iguales, será la gravedad específica del primero multiplicada por su volumen igual á la gravedad específica del segundo multiplicada por su volumen; por consiguiente serán los volúmenes de dichos cuerpos en la razon inversa de las gravedades específicas que tienen.

236. Centro de Presion en un plano oprimido por qualquiera fluido es el punto donde se puede considerar reunida la presion de todo el fluido sobre el mismo plano.

237. Balanza Hidrostática es una balanza construida con la mayor exâctitud posible para determinar las gravedades específicas tanto de los sólidos, como de los fluidos; y se halla representada en la *Fig.* 123: donde la misma balanza está pendiente del brazo horizontal *LM* firme en la coluna *LE*, y la pequeña calderilla *C* está sostenida por un hilo *KO* que está atado al gancho *K* colocado en el medio del plato *B* por la parte inferior. Dicha calderilla tiene una tapa con algunos agujeros, para que en ella se pueda introducir el agua de lluvia contenida en el vaso *FG*, donde la misma calderilla está sumergida.

238. Hidrostática es la ciencia que trata del equilibrio de los fluidos, y de los sólidos sumergidos en ellos.

239. En el equilibrio así de los fluidos, como de los fluidos y sólidos sumergidos en ellos, se considera la misma ley general que se ha establecido (45) para el equilibrio de los sólidos, siendo la potencia de los fluidos incomprimibles su gravedad ó peso que actua en direccion vertical; puesque las partes que componen los fluidos son materiales, aunque se ignore el grado de pequeñez que tienen.

ESCOLIO I.

240. Se ha dicho antes (18) que las partes de un fluido ceden á qualquiera fuerza, y fácilmente se mueven entre sí: con todo es de notar que dichas partes están unidas naturalmente entre sí con alguna fuerza de adhesion, como se observa en las gotas de agua, mercurio, &c. y que de los diferentes grados de dicha fuerza resulta que unos fluidos tienen mayor fluidez que otros. En este tratado se prescinde de dicha fuerza de adhesion, como tambien de aquellos fluidos cuya superficie superior no se reduce á un mismo nivel: como son, el humo, las exhalaciones, los vapores, &c.

ESCOLIO II.

241. Tambien es de notar la diferencia que pasa entre la gravedad de un fluido, y la presion que exerce un fluido sobre el fondo y las paredes del vaso que le contiene: pues la gravedad de un fluido es proporcional con la masa ó peso que tiene, y actua en direccion vertical de arriba abaxo; y la dicha presion guarda las leyes que se dirán á continuacion, y actua de arriba abaxo, de abaxo arriba, y lateralmente, como la experiencia manifiesta: por exemplo, si el vaso *CD*, y el tubo *AB* que le está unido, se llenan de agua (*Fig.* 124.) hasta *A*, y se abren los agujeros *L*, *H* y *K* en el fondo, en la tapa *CE*, y en la pared *DE* del propio vaso; se observará que el agua sale por dichos tres agujeros: luego las direcciones de la presion del agua son, en *L* de arriba abaxo, en *H* de abaxo arriba, y lateralmente en *K*: lo propio sucede con qualquiera otro fluido, y por consiguiente la presion de un fluido se comunica igualmente á qualquiera parte.

Del equilibrio de los fluidos contenidos en los vasos y tubos comunicantes de qualquiera figura.

PROPOSICION I.

242. Si el fluido *ENBF* igualmente denso contenido en un vaso *NC* de qualquiera figura tiene la superficie *EF* horizontal: digo que el mismo fluido estará en equilibrio. *Fig.* 125 y 126.

1°. Sea la base *NB* horizontal (*Fig.* 125.). Supóngase dividida toda la masa fluida en colunas infinitésimas verticales, y considérese que dos qualesquiera de dichas colunas, por exemplo, *LH* y *DM* se comunican por medio del tubo horizontal *HM* infinitésimo, y que sucede en ellas un movimiento infinitésimo, de modo que *GL* y *DR* pasen á los lugares infinitamente próxîmos *gl* y *dr*. Supónganse ahora dichas colunas *LH* y *DM* divididas en partes evanecentes respectivamente iguales á las *Gl* y *Dr*; y la accion de aproxîmacion respecto á la potencia, que es la gravedad ó peso de la coluna fluida *LH*, será igual á la suma de las acciones del peso de la parte evanecente *Gl* multiplicado por la aproxîmacion *Gg*, del peso de la parte evanecente *go* multiplicado por la aproxîmacion gb, y asi sucesivamente; pero los pesos de dichas partes evanecentes son iguales entre sí, y la suma de las alturas Gg, gb, bc, &c. es igual á la altura GH de dicha coluna infinitésima: luego la accion de aproxîmacion respecto á la potencia del fluido LH será igual al peso del fluido contenido en Gl multiplicado por la altura GH. Del mismo modo se demostrará que la accion de alejamiento respecto á la potencia del fluido DM es igual al peso del fluido contenido en Dr multiplicado por la altura RM; pero los pesos de los fluidos Gl y Dr son iguales, y las alturas GH y RM son tambien iguales: luego la accion de aproxîmacion respecto á la potencia del fluido LH será igual á la de alejamiento respecto á la potencia del fluido DM; por consiguiente (45) las colunas fluidas infinitésimas LH y DM estarán en equilibrio. Del mismo modo se demostrará el equilibrio de las demas colunas infinitésimas, aunque éstas no tuviesen figura cilíndrica. Por tanto si la superficie EF del fluido $ENBF$ es horizontal, dicho fluido queda en equilibrio sobre la base NB horizontal.

2°. Sea la base NB (*Fig.* 126.) obliqüa al horizonte. Supóngase dividida toda la masa fluida en colunas infinitésimas verticales, como LH y DM, las que se deberá considerar en este caso que se comunican por medio del tubo infinitésimo HM obliqüo al horizonte segun la direccion de la base NB. Tírese la horizontal MS, y prolónguese la vertical GH hasta encontrar dicha horizontal en S. Supóngase un movimiento infinitésimo en el fluido contenido en las colunas infinitésimas $GLHM$ y MD, de suerte que GL y DR pasen á los lugares infinitamente próxîmos gl y dr; y supónganse tambien dichas colunas divididas en partes evanecentes respectivamente iguales á Gl y Dr: luego con el mismo raciocinio expuesto en el caso anterior se demostrará que la accion de aproxîmacion de la coluna fluida $GLHM$ es igual al peso del fluido contenido en Gl multiplicado por la altura GS, y que la accion de alejamiento de la coluna fluida DM es igual al peso del fluido contenido en Dr multiplicado por la altura RM; pero el peso del fluido contenido en Gl es igual al peso del fluido contenido en Dr, y las alturas GS y RM son tambien iguales: luego la accion de aproxîmacion de la coluna fluida $GLHM$ será igual á la de alejamiento de la coluna fluida DM; por consiguiente (45) dichas colunas infinitésimas estarán en equilibrio. Dígase lo mismo de las demas colunas infinitésimas; luego &c. Que es &c.

COROLARIO.

243. Se infiere que si la superficie EF no es horizontal, la masa del fluido $ENBF$ no estará en equilibrio: pues las acciones de aproxîmacion y de alejamiento serán desiguales.

PROPOSICION II.

244. Si el fluido $BCIE$ igualmente denso contenido en los tubos comunicantes BC y IE tiene las superficies AB y EF en una misma horizontal: digo que dicho fluido estará en equilibrio. *Fig.* 127 y 128.

1°. Sea CI horizontal (*Fig.* 127.). Considérese un movimiento infinitésimo en el fluido propuesto, de modo que las superficies AB y EF pasen á los lugares infinitamente próxîmos ab y ef. Supónganse ahora divididas las colunas fluidas BC y IE en partes evanecentes respectivamente iguales á las $AabB$ y $EefF$: y con el mismo raciocinio expuesto antes (242. 1°.) se demostrará que la accion de aproxîmacion respecto á la potencia, que es el peso de la coluna fluida CB, será igual al peso del fluido contenido en Ab multiplicado por la altura AC, y que la accion de alejamiento respecto á la potencia, que es el peso de la coluna fluida IE, será igual al peso del fluido contenido en Fe multiplicado por la altura IF; pero el peso del fluido contenido en Ab multiplicado por AC es igual al peso del fluido contenido en Fe multiplicado por IF, por ser iguales así dichos pesos, como las alturas AC y IF: luego la accion de aproxîmacion respecto á la potencia de la coluna fluida CB será igual á la accion de alejamiento respecto á la potencia de la coluna fluida IE; por consiguiente (45) el fluido contenido en dichas colunas quedará en equilibrio. Si los tubos CB y IE no son verticales, ó no tienen figura cilíndrica, se demostrará con el mismo raciocinio que el fluido contenido en dichos tubos quedará en equilibrio, estando las superficies AB y EF en una misma horizontal.

2°. Sea CI obliqüa al horizonte (*Fig.* 128.). Divídanse las colunas fluidas $ABCIH$ y $IHEF$ en partes infinitésimas, como $GLMN$ y $MNDR$: y prolongada la vertical GK hasta encontrar la horizontal MS en el punto S, con el mismo raciocinio expresado antes (242. 1°.) se demostrará que la accion de aproxîmacion de la coluna infinitésima $LGMN$ será igual á la accion de alejamiento de la coluna infinitésima $MNDR$; por consiguiente (45) dichas colunas quedarán en equilibrio. Lo mismo sucede con las demas colunas infinitésimas que componen las respectivas colunas fluidas $ABCIH$ y $IHEF$: luego el fluido contenido en los tubos comunicantes *BC* y *IE* estará en equilibrio. Dígase lo mismo, si dichos tubos tienen qualquiera otra figura, con tal que el fluido contenido en ellos sea igualmente denso. Que es &c.

COROLARIO.

245. Se infiere que si las superficies *AB* y *EF* no están en una misma horizontal, la masa fluida *ABCIHEF* no estará en equilibrio: pues las referidas acciones de aproxîmacion y de alejamiento serán desiguales.

PROPOSICION III.

246. Si en los tubos comunicantes *BC* y *PD* se hallan los fluidos *ABCPQN* y *NQDE* de diferente gravedad específica, que tienen sus superficies *AB* y *DE* horizontales; y si las alturas *EN* y *AM* sobre la horizontal *NM*, que separa en la parte *NQ* dichos dos fluidos, están en razon inversa de sus gravedades específicas: digo que los mismos fluidos estarán en equilibrio. *Fig.* 129.

Supóngase un movimiento infinitésimo en el fluido, de suerte que las superficies *AB*, *NQ* y *DE* pasen á los lugares infinitamente próximos *ab*, *nq* y *de*. Considérense tambien las colunas fluidas *BC* y

PD divididas en partes evanecentes, como *OΥ* y *KR* que se comunican por *ΥK*. Llámense, *G* la gravedad específica del fluido mas denso *ABCPNQ*, y *g* la gravedad específica del fluido menos denso *NQDE*. Y con el mismo método expuesto antes (242. 1°.) se demostrará que la accion de aproxîmacion de la potencia del fluido *OΥ* será igual al producto del peso del fluido contenido en *Oo* y de la altura *OΥ*, esto es, igual al volumen $Oo \times G \times OΥ$; y que las acciones de alejamiento de las potencias de los fluidos *KS* y *SR* serán iguales al producto del peso del fluido contenido en *Ss* y de la altura *SK*, y á él del peso del fluido contenido en *Rr* y de la altura *RS*, esto es, serán iguales al volumen $Ss \times G \times SK$ + volumen $Rr \times g \times RS$. Por la suposicion es $OX : RS = g : G$, y por consiguiente $G \times OX = g \times RS$; añadiendo á ambas partes $G \times ΥX = G \times KS$, se tendrá $G \times OΥ = G \times KS + g \times RS$; y multiplicando ambos miembros por los volúmenes iguales *Oo*, *Ss* y *Rr*, será el volumen $Oo \times G \times OΥ =$ volumen $Ss \times G \times KS +$ volumen $Rr \times g \times RS$: luego la accion de aproxîmacion de la potencia del fluido *OΥ* será igual á la suma de las acciones de alejamiento de las potencias de los fluidos *KS* y *SR*; por consiguiente (45) el fluido contenido en la coluna infinitésima *OΥ* se equilibrará con los fluidos contenidos en la coluna infinitésima KR. Se ha demostrado anteriormente que es $G \times OY = G \times KS + g \times RS$; por consiguiente se tendrá $G \times OY - G \times KS = g \times RS = g \times (RK - KS) = g \times RK - g \times KS$: luego trasponiendo los correspondientes términos, será tambien $G \times OY - g \times RK = G \times KS - g \times KS$; y partiendo ambos miembros por $G - g$, será $\frac{G \times OY - g \times RK}{G - g} = KS$; por consiguiente la altura KS de qualquiera parte evanecente de la superficie NQ sobre la horizontal YK será constante. Lo mismo se demostrará respecto á todas las colunas infinitésimas, en las que se han considerado divididos los fluidos contenidos en los tubos comunicantes CB y PD verticales ú obliqüos al horizonte de qualquiera figura que fuesen: luego &c. Que es &c.

ESCOLIO I.

247. Nótese que las referidas propiedades (244, 246) son uniformes á la experiencia, con tal que los tubos no sean capilares, entendiéndose por estos los que tienen sus diámetros no mayores de dos lineas y media sin contar el grueso de los mismos tubos: es á saber, que si en los tubos comunicantes (*Fig.* 130) R, A, B, D, de los quales el primero solo es capilar, se echa un fluido igualmente denso, en el ca-

so del equilibrio se observa: 1°. que en los tubos *A*, *B*, *D*, que no son capilares, la superficie del fluido queda en una misma horizontal *CE*: 2°. que en el tubo capilar *R* se eleva el fluido sobre dicha horizontal como en *n*, exceptuados el mercurio y los metales fundidos, pues quedan estos baxo de la misma horizontal *CE* como en *m*: 3°. que el punto *n* es mas elevado sobre la horizontal *CE*, y que el punto *m* es mas baxo, si la misma experiencia se repite con un tubo capilar de menor diámetro: 4°. y que repitiendo la experiencia en distintos fluidos, el espíritu de vino que es menos pesado se eleva menos que el aceyte de vitriolo que es mas pesado, de suerte que las elevaciones de estos fluidos no están en razon inversa de sus gravedades específicas. Las mismas propiedades se observan en los tubos *R*, *A*, *B*, *D*, que se colocan en qualquiera fluido existente en un vaso *FE* (*Fig.* 131.). La mayor parte de los Físicos atribuye la causa de los referidos fenómenos á una atraccion particular que hay entre el vidrio y los fluidos; pero qualquiera que sea la potencia que produce dichos efectos en los tubos capilares, es evidente que la misma potencia debe ser de corta entidad respecto á que no produce efecto sensible en los tubos que no son capilares.

ESCOLIO II.

248. Consta por la experiencia que si en un vaso se mezclan fluidos de distintas gravedades específicas que no tengan entre sí afinidad señalada (es decir que las partículas de todos ellos no se unan naturalmente, de modo que formen un fluido heterogéneo); dichos fluidos se separan por el órden de sus gravedades específicas, colocándose el fluido de la mayor gravedad específica al fondo del vaso, y él de la menor gravedad específica á la superficie, y los demas entre estos dos segun dicho órden: y así si se mezclan, por exemplo, mercurio, aceyte de tártaro, espíritu de vino, y espíritu de trementina, se separarán dichos fluidos, y se colocarán, el mercurio al fondo del vaso, inmediato al mercurio el aceyte de tártaro, despues el espíritu de vino, y sucesivamente el espíritu de trementina. Es evidente que los elementos de cada fluido tendrán sus distintas gravedades; por consiguiente el elemento mas pesado habrá de descender con mayor fuerza que el elemento menos pesado, y con el exceso de su gravedad forzará el elemento menos pesado á elevarse hácia la superficie. Y respecto á los fluidos que no se separan, la afinidad ó atraccion especial que hay entre ellos debe destruir la referida fuerza procedente de la diferencia de sus gravedades.

De las potencias de los fluidos sobre los fondos y paredes de los vasos que los contienen, y sobre los sólidos sumergidos en los mismos fluidos.

PROPOSICION IV.

249. Si el fluido $AEFB$ contenido en un vaso EB de qualquiera figura es igualmente denso, y está en equilibrio; determinar la presion que dicho fluido exerce sobre la parte infinitésima CD del fondo EF del vaso. *Fig.* 132 y 133.

Sea NM la distancia de la superficie horizontal AB del fluido á la parte infinitésima CD del fondo del vaso. Y considerando dicha CD movil, supóngasele aplicada una potencia P, que actue en direccion perpendicular á dicha CD, y que la tenga en equilibrio; por consiguiente será la potencia P igual á la referida presion del fluido sobre CD. Supóngase ahora en el fluido un movimiento infinitésimo, de modo que AB venga á quedar en ab, y CD en cd en el cilindro infinitésimo Cd; y dividida la figura $AEFB$ en sus elementos iguales á $AabB$, se demostrará con el raciocinio expuesto (242. 1°.) que la accion de aproximacion del fluido contenido en $AEFB$ será igual al peso de la coluna fluida $AabB$ multiplicado por NM, y que la accion de alejamiento de la potencia P será igual á la potencia P multiplicada por el alejamiento Cc: luego en el caso del equilibrio (45) el peso del fluido contenido en $AabB$ multiplicado por NM será igual á $P \times Cc$; pero el peso del fluido contenido en $AabB$ es igual al del fluido contenido en el cilindro Cd, esto es, igual á $CD \times Cc \times G$, llamada G la gravedad específica del fluido: luego será $CD \times Cc \times G \times NM = P \times Cc$; y partiendo ambos miembros por Cc, se tendrá $P = CD \times NM \times G$; por consiguiente la presion del fluido $AEFB$ sobre la parte infinitésima CD del fondo EF del vaso será igual al peso de un cilindro del mismo fluido, que tiene CD por base, y por altura NM. Que es &c.

COROLARIO I.

250. Infiérese que la presion del fluido $AEFB$ (*Fig.* 132) sobre el fondo horizontal EF del vaso será igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene el fondo EF por base, y por altura NM que es la del fluido sobre el mismo fondo.

COROLARIO II.

251. Con el mismo método se demostrará que si en el vaso $AEFB$ de qualquiera figura se contie-

nen los dos fluidos *GEFH* y *AGHB* de diferente gravedad específica; la presion de ellos sobre el fondo horizontal *EF* será igual al peso de una coluna de los mismos dos fluidos, que tiene *EF* por base, y por altura *NM*, cuyo peso equivale á los pesos de una coluna del primer fluido con la base *EF* y con la altura *MI*, y de otra coluna del segundo fluido con la misma base *EF* y con la altura *NI*. Discúrrase del mismo modo, si en el vaso *AEFB* con el fondo horizontal se contienen tres ó mas fluidos de distintas gravedades específicas.

COROLARIO III.

252. Tambien se infiere que la presion de un fluido *AEFB* igualmente denso sobre el fondo *EF* obliqüo al horizonte (*Fig.* 133.) será igual á la suma de los productos de cada parte evanecente del mismo fondo, de la distancia de ella á la superficie *AB* del fluido, y de la gravedad específica del mismo fluido; pero (54) la suma de los productos de cada parte evanecente del fondo, y de la distancia de ella á la superficie dada *AB*, es igual al mismo fondo *EF* multiplicado por la distancia de su centro de gravedad á dicha superficie: luego la referida presion será igual al peso de una coluna de dicho fluido, que tiene por base el fondo del vaso, y por

altura la distancia del centro de gravedad del mismo fondo á la superficie AB del fluido.

COROLARIO IV.

253. Con el mismo método se demostrará que si en el vaso $AEFB$ de qualquiera figura se contienen los dos fluidos $EGHF$ y $GABH$ de diferente gravedad específica; la presion de ellos sobre el fondo EF obliqüo al horizonte será igual á los pesos, de una coluna del primer fluido, que tiene EF por base, y por altura la distancia del centro de gravedad del fondo á la superficie horizontal GH, y de otra coluna del segundo fluido, que tiene por base EF, y por altura la distancia de las dos superficies horizontales GH y AB. Discúrrase del mismo modo, si en el vaso $AEFB$ se contienen tres ó mas fluidos de diferentes gravedades específicas.

EXEMPLO.

254. Se pide determinar la presion del agua contenida en un vaso de qualquiera figura sobre la superficie de su fondo horizontal y paralelógramo.

Determínense, la base y altura de dicho paralelógramo, como tambien la altura de la superficie del agua sobre el fondo del vaso propuesto; y sean las dimensiones halladas en pies de París respectivamen-

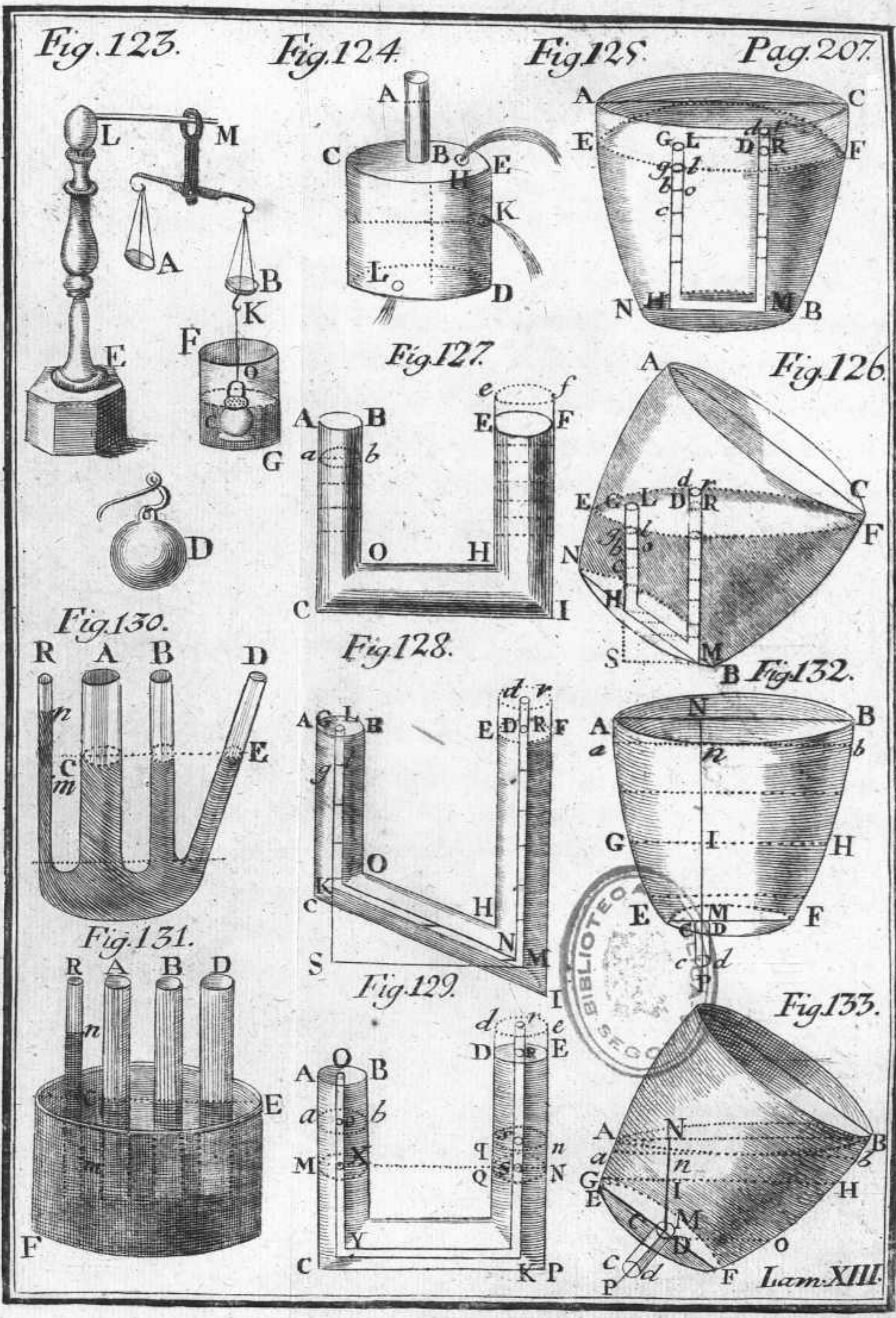
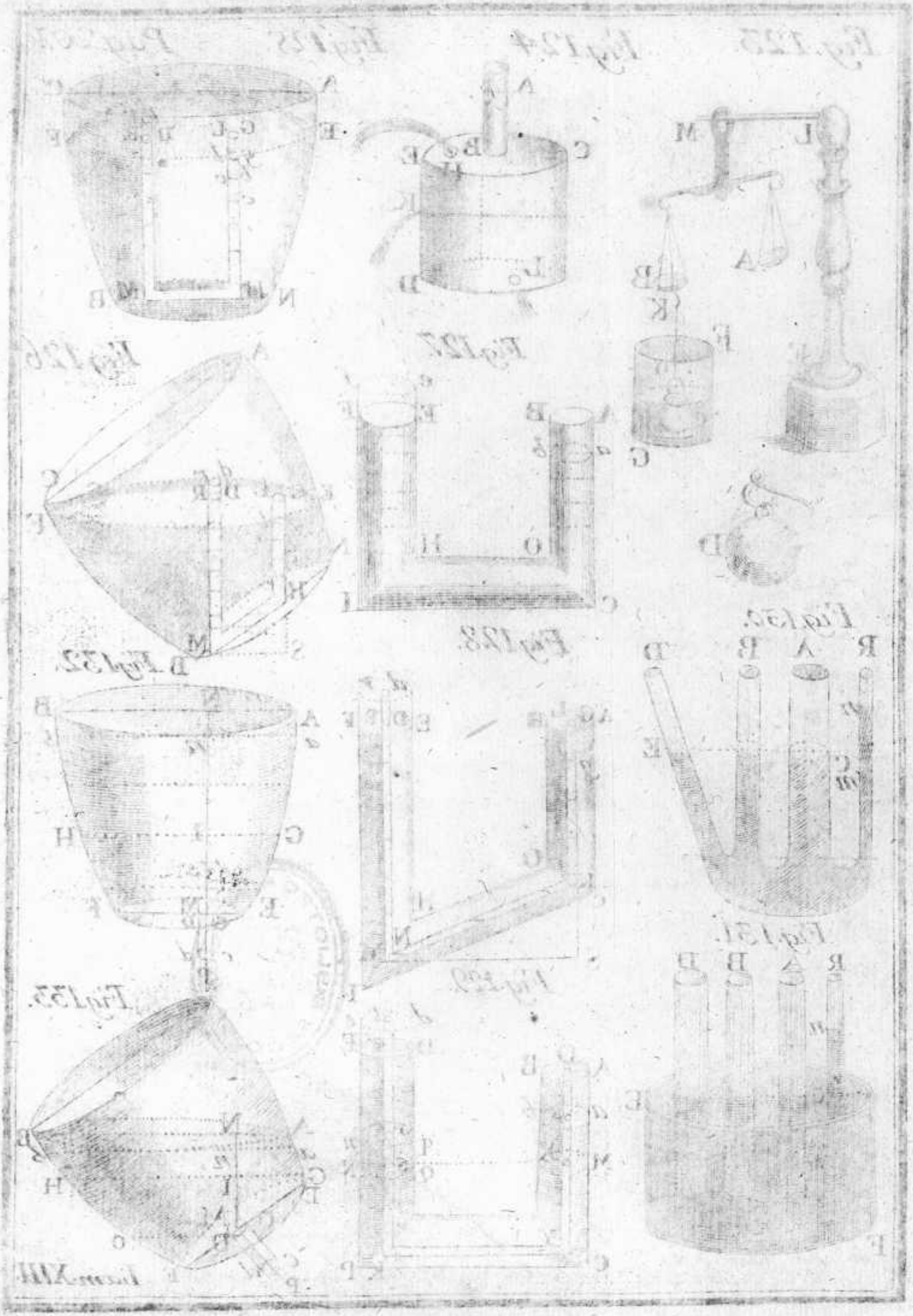


Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Pag. 207.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
Lam. XIII.



te iguales á 30, 15 y 8: luego la presion que se busca será igual á $30 \times 15 \times 8$, esto es, igual al peso de 3600 pies cúbicos de agua; y regulando el peso de un pie cúbico de agua por 70 libras de dicho marco, será la referida presion igual al peso de 252000 libras.

ESCOLIO.

255. La proposicion antecedente suministra un método fácil para producir una presion muy grande con corta cantidad de fluido sobre el fondo de un vaso, configurando este vaso de tal modo, que con corta capacidad tenga una gran base y un cuello muy largo y estrecho, como el vaso *BC* (*Fig.* 134.). Y al contrario, si se toma un vaso que tenga una pequeña base, y sea muy ancho en la parte superior, como el vaso *AE* (*Fig.* 135.); mucha cantidad de fluido producirá corta presion sobre el fondo del mismo vaso.

PROPOSICION V.

256. Si el fluido *AEFB* contenido en un vaso *EB* de qualquiera figura es igualmente denso, y está en equilibrio; determinar la presion que dicho fluido exerce sobre una parte infinitésima *CHDL* de la superficie lateral del vaso. *Fig.* 136.

Supóngase aplicada á dicha parte infinitésima

$CHDL$, que se considerará movil y de figura paralelógrama, una potencia P que actue en direccion perpendicular á la misma $CHDL$ y que la tenga en equilibrio; por consiguiente la potencia P será igual á la referida presion del fluido sobre $CHDL$. Considérese ahora en el fluido un movimiento infinitésimo, de suerte que vengan á quedar AB en ab, y $CLDH$ en $cldh$ en el paralelepípedo infinitésimo Cd. Tírese la horizontal HK, y sea NM la altura del fluido sobre dicha horizontal. Es evidente que el fluido contenido en FK no exerce presion alguna sobre $CLDH$; por consiguiente la presion del fluido contenido en KB será la que se equilibra con la potencia P. Supóngase la figura KB dividida en sus elementos iguales á $AabB$; y con el mismo raciocinio expuesto en la Proposicion antecedente se demostrará que la potencia P ó bien la presion del fluido sobre la parte infinitésima $CLDH$ es igual á $CLDH \times NM \times G$, esto es, igual al peso de un paralelepípedo del mismo fluido, que tiene $CHDL$ por base, y por altura NM que es la distancia de la superficie AB del fluido á la horizontal HK correspondiente á dicha parte infinitésima. Que es &c.

COROLARIO I.

257. Por tanto la presion de un fluido igualmen-

te denso contenido en el vaso EB sobre la superficie lateral infinitésima $CkKH$ del mismo vaso será igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene dicha superficie por base, y por altura NM que es la distancia de la superficie AB del fluido á la horizontal HK.

COROLARIO II.

258. Luego la presion de un fluido igualmente denso contenido en el vaso $AEFB$ sobre la superficie lateral del mismo vaso será igual á la gravedad específica del mismo fluido multiplicada por la suma de los productos de las partes evanecentes $EguF$, $gstu$, &c. de dicha superficie lateral multiplicadas respectivamente por las distancias NG, NO, &c. á la superficie AB del fluido; pero la suma de dichos productos es igual (54) á la superficie lateral $AEFB$ multiplicada por la distancia de su centro de gravedad á la superficie AB del fluido: luego la presion del fluido igualmente denso $AEFB$ sobre la superficie lateral del vaso que le contiene será igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene por base la misma superficie, y por altura la distancia de su centro de gravedad á la superficie AB del fluido.

EXEMPLO.

259. Se pide determinar la presion lateral del agua contenida en un cilindro recto, cuya base sea horizontal.

Supónganse, a la altura de dicho cilindro, b el radio de su base, y $\frac{p}{2r}$ la razon constante de la periferia del círculo á su diámetro; y serán, $\frac{a}{2}$ la distancia del centro de gravedad de dicha superficie lateral á la del agua, y la misma superficie lateral (III. 251.) igual á $\frac{p}{r} \times ba$: luego la presion lateral que se busca será igual al peso de una coluna de agua expresada por $\frac{p}{r} \times ba \times \frac{a}{2}$, ó bien por $\frac{p}{2r} \times ba^2$. Y respecto á que la presion de la misma agua sobre su fondo circular es igual á $\frac{p}{2r} \times b^2 a$, será la dicha presion lateral á la sobre el fondo como a á b, esto es, como la altura del cilindro al radio de su base. Sean, por exemplo, $b = 7$ pies, $a = 8$, y $\frac{p}{2r} = \frac{22}{7}$; y substituyendo estos valores en la fórmula $\frac{p}{2r} \times ba^2$, se tendrá que la presion lateral del agua sobre la superficie del cilindro propuesto equivale al peso de 1408 pies cúbicos de agua que son 98560 libras.

PROPOSICION VI.

260. Determinar el Centro de la presion de un fluido igualmente denso contenido en el vaso *CB* sobre el plano *AB*. *Fig.* 137 y 138.

1°. Sea horizontal el plano *AB* (*Fig.* 137). Desde el punto *O* centro de gravedad del mismo plano tírese la perpendicular *OM* á la superficie *CD* del fluido, y divídase dicha *OM* por medio en *R*. Consta (250) que la presion del fluido *CB* sobre el plano horizontal *AB* es igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene *AB* por base, y *OM* por altura; pero el centro de gravedad de dicha coluna fluida es el punto *R* (65. 6°.) donde se puede considerar reunido el peso del mismo fluido, y la direccion de la presion del fluido es segun la recta *RO* perpendicular al plano *AB*: luego el centro de la presion del fluido contenido en el vaso *CB* sobre el plano horizontal *AB* será el centro *O* de gravedad del mismo plano.

2°. Sea el plano *AB* obliqüo al horizonte (*Fig.* 138.). Desde el punto *O* centro de gravedad del mismo plano tírese la recta *OM* perpendicular á la superficie *CD* del fluido; y la presion del fluido contenido en el vaso *CB* sobre el plano *AB* será (252) igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene por base *AB*, y por altura *OM*. Supóngase que el punto *R* es el centro de gravedad de dicha coluna fluida, y desde el punto *R* báxese la recta *RS* perpendicular al referido plano *AB*: luego se podrá considerar reunido en *R* el peso de dicha coluna fluida; pero la presion del fluido contenido en el vaso *CB* sobre el fondo *AB* actua segun la direccion *RS* perpendicular al mismo plano *AB*: luego el centro de la presion del fluido contenido en *CB* sobre el plano *AB* obliqüo al horizonte será el punto *S*, donde actuando una potencia igual al peso de dicha coluna fluida con direccion perpendicular á *AB*, la misma potencia equivaldrá á la presion del fluido contenido en el vaso *CB* sobre su fondo *AB*. Es evidente que se determinará del mismo modo el centro de presion en una superficie plana lateral del vaso. Que es &c.

PROPOSICION VII.

261. En la hipótesis de la Proposicion V. determinar las potencias vertical y horizontal del fluido sobre el paralelógramo evanecente *HDLC*. *Fig.* 136 y 139.

Tírese la recta *YP* perpendicular á la superficie infinitésima *HDLC* en el punto *Y* centro de gravedad de la misma superficie; y expresando por YP la potencia ó presion del fluido sobre DC segun la direccion YP, será (256) $YP = DC \times NM \times G = DC \times YZ \times G$, en cuya expresion es YZ la perpendicular tirada desde dicho punto Y á la superficie AB del fluido contenido en el vaso. Desde el punto P báxese la perpendicular PR á la vertical ZY prolongada; y completo el rectángulo RT, las rectas YR y YT expresarán (102) las respectivas potencias vertical y horizontal del fluido sobre dicha superficie DC. Tírense las verticales HQ y DJ; prolónguense éstas hasta encontrar el plano horizontal que pasa por CL en los puntos Q y J; y tiradas las rectas QJ, QC y JL, la figura CJ será un paralelógramo. Finalmente prolónguese el plano vertical RT hasta encontrar los planos HL, CJ y HJ; y las comunes secciones de estos con aquel formarán el triángulo VIU semejante al triángulo YTP, de modo que las horizontales HI y QV serán perpendiculares al plano vertical VIU. Ahora por la semejanza de los triángulos YTP y VIU será $YP : PT = IU : UV$; pero $YP = DC \times YZ \times G = CL \times UI \times YZ \times G$: luego será $CL \times UI \times YZ \times G : PT = UI : UV = CL \times UI \times YZ \times G : CL \times UV \times YZ \times G$; por consiguiente la potencia vertical TP ó YR será igual á $CL \times UV \times YZ \times G$, esto es, igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene por base el paralelógramo *QL*, y por altura la distancia de la horizontal *HD* á la superficie *AB* del fluido, cuya coluna es igual á la que insiste sobre el paralelógramo *CD*. Con el mismo método se demostrará que la potencia horizontal *YT* es igual al peso de una coluna del mismo fluido, que tiene por base el rectángulo *QD*, y por altura la distancia de la horizontal *HD* á la superficie *AB* del fluido. Que es &c.

COROLARIO I.

262. Se infiere que si en el vaso *AEFB* se halla un fluido igualmente denso, que está en equilibrio, la fuerza vertical del mismo fluido sobre qualquiera superficie del vaso será igual al peso de una coluna del mismo fluido comprehendida entre dicha superficie, las perpendiculares tiradas desde todos los puntos del perímetro de la misma superficie á la del fluido contenido en el vaso, y la figura que encierra la linea que pasa por los extremos de dichas perpendiculares en la superficie del fluido contenido en el vaso. Dígase lo mismo respecto á la fuerza vertical del fluido sobre la superficie de un sólido sumergido en el mismo fluido.

COROLARIO II.

263. Luego la fuerza vertical de un fluido sobre la superficie del vaso que le contiene será igual al peso del fluido contenido en el mismo vaso.

PROPOSICION VIII.

264. Si un sólido *NGDM* está sumergido en un fluido igualmente denso existente en el vaso *AF*, las fuerzas horizontales del mismo fluido sobre dicho sólido se destruirán mutuamente. *Fig.* 140, 141, 139.

Considérese dicho sólido (*Fig.* 140.) dividido en partes infinitésimas, como *GDLg*, cuyas bases sean horizontales: considérense tambien divididas las superficies laterales de dichas partes en los trapezios ó paralelógramos infinitésimos (*Fig.* 141.) *HDLC*, *DLoO*, &c. y supuesto lo demas que se ha expresado antes (261) la fuerza horizontal *YT* del fluido sobre el paralelógramo infinitésimo *CD* (*Fig.* 141, 139.) será igual á $DH \times VI \times YZ \times G$, esto es, igual al producto de la base *DH* del paralelógramo *HL*, de *VI* altura del sólido infinitésimo *GL*, de *YZ* igual á la distancia del plano horizontal *GD* á la superficie *AB* del fluido, y de la gravedad específica del mismo fluido: dígase lo mismo respecto á las fuerzas horizontales del fluido sobre los paralelógramos infinitésimos Do, oG, &c. por consiguiente dichas fuerzas serán proporcionales con los lados HD, DO, OG, &c. del polígono GD; pero el centro de gravedad Y del paralelógramo CD corresponde al punto I que divide por medio el lado DH (por ser evanecente la distancia entre dichos puntos) quedando la fuerza horizontal YT perpendicular á HD, y lo propio sucede con las demas fuerzas horizontales del fluido sobre los paralelógramos Do, oG, &c. esto es, que actuan perpendicularmente sobre los respectivos lados DO, OG, &c. en sus mitades: luego la resultante de las fuerzas horizontales del fluido sobre los paralelógramos evanecentes HL, LO, Og, &c. será igual (107) á la potencia horizontal X aplicada del mismo modo al último lado HK del polígono GD; pero esta potencia es igual y contraria á la fuerza horizontal que exerce el fluido sobre el paralelógramo infinitésimo KC: luego todas las presiones horizontales del fluido sobre la superficie lateral del sólido infinitésimo GL se equilibrarán. Lo mismo se demostrará de las presiones horizontales del fluido sobre las demas partes infinitésimas del sólido: luego &c. Que es &c.

Del equilibrio de los fluidos y de los sólidos sumergidos en ellos: y del método para hallar las gravedades específicas de unos y otros con los usos principales que tienen estas determinaciones.

PROPOSICION IX.

265. Si el sólido MB se halla sumergido en un fluido igualmente denso existente en los tubos comunicantes AS y OT; determinar quando el sólido y el fluido quedan equilibrados. *Fig.* 142.

En el caso del equilibrio estén, el sólido en $CBNM$, y el fluido en $PTOABCKS$. Considérese un movimiento infinitésimo en el fluido y en el sólido, de suerte que las superficies PT, CB, SK y MN pasen á los respectivos lugares infinitamente próximos pt, cb, sk y mn. Llámense, G la gravedad específica del fluido, y g la del sólido; y prolónguese la horizontal $PTSK$ hasta L: y con el mismo método expuesto antes (242. 1°.) se demostrará que la accion de aproximacion de la coluna fluida OT será el peso del fluido correspondiente al volumen Pt multiplicado por la altura PO, que la accion de alejamiento de la coluna fluida $ABCKS$ será el peso del fluido correspondiente al volumen Cb multiplicado por la altura AB mas el peso del fluido correspondiente al volumen Sk multiplicado por la altura AL, y que la accion de alejamiento del sólido CN será el peso del sólido Mn multiplicado por la altura BN: luego en el caso del equilibrio se tendrá el volumen $Pt\times G\times PO=$ volumen $Bc\times G\times AB+$ volumen $Sk\times G\times AL+$ volumen $Mn\times g\times BN$; pero el volumen Pt es igual á la suma de los volúmenes Sk y Mn: luego será volumen $Sk\times G\times PO+$ volumen $Mn\times G\times PO=$ volumen $Bc\times G\times AB+$ volumen $Sk\times G\times AL+$ volumen $Mn\times g\times BN$; y por ser volumen $Sk\times G\times PO=$ volumen $Sk\times G\times AL$, se tendrá volumen $Mn\times G\times PO=$ volumen $Bc\times G\times AB+$ volumen $Mn\times g\times BN$; y partiendo por volumen $Mn=$ volumen Bc, será $G\times PO=G\times AB+g\times BN$; y trasponiendo el término $G\times AB$, será $G\times(PO-AB)=g\times BN$. Por tanto en el caso del equilibrio será $PO-AB:BN=g:G$, esto es, la diferencia de las alturas de las colunas fluidas OT y AC sobre la horizontal AO á la altura BN del sólido como la gravedad específica del sólido á la del fluido. Que es &c.

COROLARIO I.

266. Si es $g = G$, será $PO - AB = BN$; por consiguiente $PO = AB + BN = AN$: luego siendo la gravedad específica del sólido igual á la del fluido, la superficie MN del sólido quedará en la misma horizontal PK del fluido.

COROLARIO II.

267. Si es $g < G$, será $PO - AB < BN$; por consiguiente $PO < AB + BN = AN$: luego siendo la gravedad específica del sólido menor que la del fluido, la superficie MN del sólido quedará superior á la horizontal PK del fluido.

COROLARIO III.

268. Finalmente si es $g > G$, será $PO - AB > BN$; por consiguiente $PO > AB + BN = AN$. En esta suposicion, si el fluido puede cubrir el sólido (*Fig.* 143.) es evidente que no tendrá lugar la Proposicion antecedente, porque debe computarse tambien la accion del fluido que está sobre el sólido. Hecho esto con el mismo método de dicha Proposicion, se hallará que en el caso del equilibrio debe ser $OP - AB - NL : BN = g : G$; pero $OP = AL$, y $OP - AB - NL = BN$: luego será $g = G$, de donde resulta

no ser posible un tal equilibrio sino en el caso de ser $g = G$. Por tanto si la gravedad específica del sólido es mayor que la del fluido, el sólido caerá al fondo del vaso, con tal que el fluido pueda cubrir el sólido.

COROLARIO IV.

269. Por tanto queda determinado el equilibrio de un sólido MB puesto en un vaso AP lleno de un fluido igualmente denso: porque en el mismo caso del equilibrio considerando dicho sólido en el tubo AS que se comunica con el tubo OT, el fluido contenido en ZS quedará (242) en equilibrio, y para el equilibrio de las colunas AS y OT se tendrá: 1°. que las superficies MN y PT del sólido y del fluido estarán en una misma horizontal, siendo (266) sus gravedades específicas iguales, y que en esta suposicion sumergido el sólido en qualquiera parte dentro del fluido estará (268) equilibrado con él: 2°. que si la gravedad específica del sólido es menor que la del fluido, subsistirá el equilibrio (267) siendo la diferencia de las alturas de las colunas fluidas OT y AC á la altura del sólido en razon recíproca de sus gravedades específicas, esto es, $OP - AB : BN = g : G$, y por lo tanto parte del sólido quedará encima del fluido: 3°. y que si la gravedad específica del sólido es mayor que la del fluido, el sólido caerá al fondo del vaso.

PROPOSICION X.

270. Si el sólido *ALMC* está sumergido en un fluido igualmente denso contenido en el vaso *FG*; la potencia vertical ó gravedad de dicho sólido se disminuye en el peso de un volumen del mismo fluido igual al volumen del sólido que queda dentro del fluido. *Fig.* 144 y 145.

1°. Esté el sólido *AMLC* (*Fig.* 144.) sumergido todo en el fluido. Supóngase que *BLDM* es el mayor plano horizontal que corta dicho sólido; y baxadas desde todos los puntos del perímetro de dicho plano perpendiculares á la superficie *EF* del fluido, sea *IK* la figura que resulta en la misma superficie. Por tanto la potencia vertical del fluido sobre la superficie *BMDLA* del sólido será (262) el peso (*A*) del volumen del fluido comprehendido entre la dicha superficie, las perpendiculares expresadas antes, y la superficie *IK*; y la potencia vertical del fluido sobre la superficie *BMDLC* del sólido, ó el empujo del fluido sobre dicha superficie, será igualmente el peso (*B*) del volumen del fluido comprehendido entre la superficie *BMDLC*, las perpendiculares expresadas antes, y la superficie *IK*; pero dichas potencias actuan en direcciones contrarias: luego la diferencia entre dichos pesos *B* y *A*, que es el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido, será la potencia con que el sólido está impelido hácia arriba en virtud de las potencias verticales del fluido que actuan sobre el mismo sólido; por consiguiente la gravedad ó potencia vertical de este sólido quedará disminuida en el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido sumergido.

2°. Si una parte del referido sólido, como *BMLDA* se halla fuera del fluido (*Fig.* 145.), y la otra parte *BMDLC* se halla sumergida en el mismo fluido; en este caso solo actuará la potencia vertical del fluido de abaxo arriba sobre la superficie *BMDLC* del sólido, cuya potencia es igual al peso (*B*) de un volumen del fluido igual al volumen *BMDLC* del sólido sumergido: luego la gravedad ó potencia vertical del sólido *AMLC* quedará disminuida en el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido sumergido. Que es &c.

COROLARIO I.

271. Por tanto si un sólido se pone encima de un fluido de la misma gravedad específica del sólido, baxará sucesivamente el sólido dentro del fluido con una potencia vertical proporcional siempre con la diferencia entre el peso del sólido y el peso de un vo-

lumen de fluido igual al volumen del sólido sumergido, hasta que dichos dos pesos sean iguales, esto es, que el sólido quede sumergido en el fluido: y en la misma suposicion de las gravedades específicas iguales del fluido y del sólido, éste quedará equilibrado (268) dentro del fluido en qualquiera situacion que se le ponga.

COROLARIO II.

272. Asimismo si un sólido se pone encima de un fluido de menor gravedad específica del sólido, baxará sucesivamente el sólido dentro del fluido con una potencia vertical proporcional con la diferencia entre el peso del sólido, y el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido sumergido; y sumergido todo el sólido dentro del fluido, será dicha potencia constante é igual á la diferencia que pasa entre el peso del sólido y el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido.

COROLARIO III.

273. Tambien si un sólido se sumerge dentro de un fluido de mayor gravedad específica del sólido, éste ascenderá en el fluido con una potencia vertical igual á la diferencia entre el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido, y el peso del mis-

mo *sólido*; y saliendo el sólido fuera del fluido, ascenderá con una potencia proporcional con la diferencia que pasa entre el peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido sumergido, y el peso del mismo sólido; y luego que dichos dos pesos sean iguales, y quede en una misma vertical la recta que pasa por los centros de gravedad de todo el sólido y de su parte sumergida en el fluido, dicho sólido estará en equilibrio con el fluido.

COROLARIO IV.

274. Luego para sostener un sólido de mayor gravedad específica en qualquiera parte dentro de un fluido de menor gravedad específica, se necesitará aplicar á dicho sólido en su centro de gravedad una potencia que le tire hácia arriba en direccion vertical, y que sea igual á la diferencia del peso del sólido, y del peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido: y para sostener un sólido de menor gravedad específica en qualquiera parte dentro de un fluido de mayor gravedad específica, se necesitará aplicar á dicho sólido en su centro de gravedad una potencia que le tire hácia abaxo en direccion vertical, y que sea igual á la diferencia del peso de un volumen de fluido igual al volumen del sólido, y del peso del mismo sólido.

COROLARIO V.

275. Por ser en el caso del equilibrio (273) el peso del sólido de menor gravedad específica del fluido igual al peso del fluido que se contendrá en aquel volumen del sólido que queda dentro del fluido, será la gravedad específica del fluido á la del sólido como el volumen de éste al volumen de la parte del sólido inmersa en el fluido.

COROLARIO VI.

276. Si se llaman g y G las respectivas gravedades específicas del fluido y del sólido, U el volumen de éste, y v el volumen de la parte del sólido inmersa en el fluido; en la suposicion antecedente (275) será $v \times g = U \times G$, y $v = \frac{U \times G}{g}$, $G = \frac{v \times g}{U}$; de donde resulta: 1°. que si el peso $U \times G$ del sólido queda el mismo, y se aumenta la gravedad específica del fluido, un menor volumen v del sólido quedará sumergido dentro del fluido: 2°. que si el peso $U \times G$ del sólido se disminuye, y queda sumergido en el mismo fluido, un menor volumen v del sólido quedará sumergido dentro del fluido: 3°. y que si el peso $U \times G$ del sólido queda el mismo, y se aumenta su volumen, se disminuirá la gravedad específica del sólido sumergido en un mismo fluido.

PROPOSICION XI.

277. Determinar la gravedad específica de los sólidos respecto á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad. *Fig.* 1.

Tómese un pedazito del sólido cuya gravedad específica se pide determinar, y pésese con la balanza hidrostática: hecho esto, átese la calderilla al gancho del plato *B*; y sumergida en el agua de lluvia contenida en el vaso *FG*, póngase la balanza en equilibrio: despues dicho pedazito de sólido póngase dentro de la calderilla; y perdiendo la balanza su equilibrio, vuélvase á equilibrar añadiendo peso en *A* ó en *B* segun fuere la gravedad específica del sólido mayor ó menor que la del agua. Por tanto el peso añadido en *A* será igual (272) á la diferencia entre la gravedad del sólido y la de un volumen de agua de lluvia igual al volumen del mismo sólido; y el peso añadido en *B* será igual (273) á la diferencia entre la gravedad de un volumen de agua de lluvia igual al volumen del sólido, y la gravedad del mismo sólido: luego en el primer caso tomada la diferencia que hay entre la gravedad ó peso del sólido, y el peso añadido en *A*, se tendrá el peso del agua de lluvia tomada en un volumen igual al del sólido; y en el segundo caso el peso del agua de lluvia tomada en un

Fig. 134.

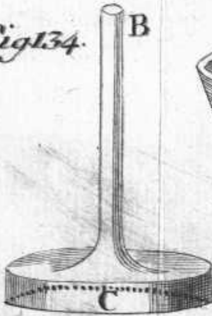


Fig. 135.

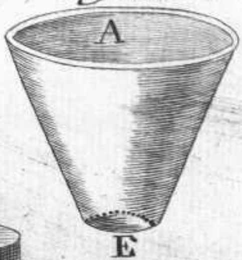


Fig. 136.

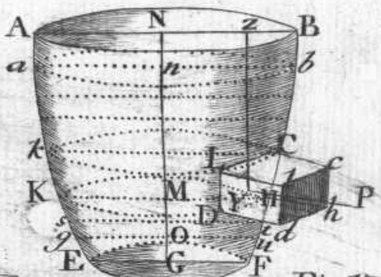


Fig. 137.

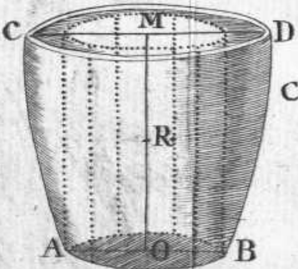


Fig. 138.

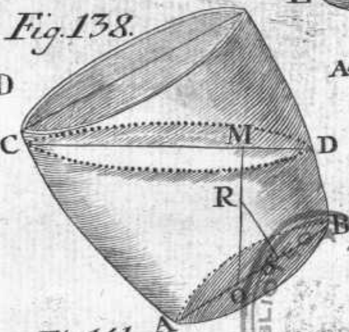


Fig. 139.

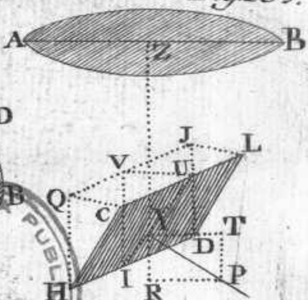


Fig. 140.

Fig. 141.

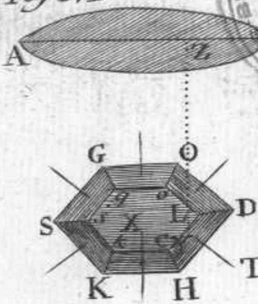


Fig. 142.

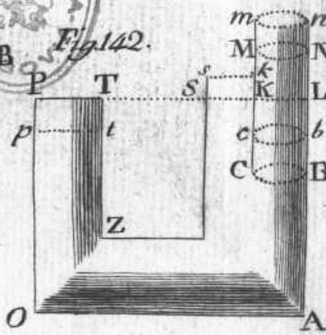


Fig. 143.

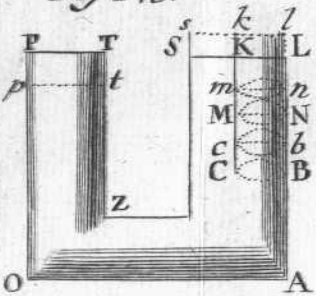


Fig. 144.

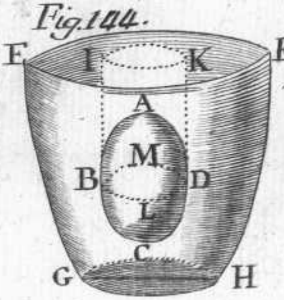
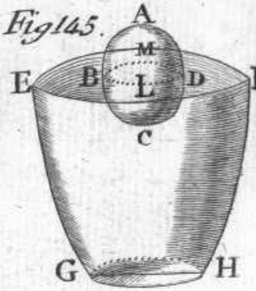


Fig. 145.



volumen igual al del sólido se tendrá en el peso del sólido sumado con el peso añadido en *B*; pero son los pesos de dos cuerpos, que tienen iguales volúmenes, como sus gravedades específicas (234): luego si se parte el peso del sólido por el peso del agua de lluvia tomada en un volumen igual al del mismo sólido, se tendrá en el quociente la gravedad específica del sólido relativamente á la del agua de lluvia supuesta igual á la unidad. Que es &c.

ESCOLIO.

278. Con el mismo método se determina la gravedad específica del mercurio respectivamente á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad, con la advertencia que para tener el peso del mercurio es necesario pesar antes con la balanza un vaso de vidrio vacío, y pesarlo despues con una pequeña porcion de mercurio: luego restando de este segundo peso el primero, se tendrá el peso del mercurio contenido en el vaso; y puesto dicho mercurio en la calderilla, se hará la misma operacion que antes se ha manifestado.

PROPOSICION XII.

279. Determinar la gravedad específica de los fluidos, exceptuados el mercurio y el ayre, relativa-

mente á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad. *Fig.* 1.

Tómese un globo de cristal *D* algo hueco en el medio, de modo que tenga su gravedad específica algo mayor que el agua; suspéndase dicho globo del gancho *K* puesto en la balanza hidrostática por medio de una cerda, y determínese su peso exâctamente, con la advertencia que si la cerda tiene algun peso sensible, se debe éste determinar antes, y restarle del peso de la cerda y del globo juntos para tener exâctamente el peso de dicho globo: despues sumérgase dicho globo en el agua de lluvia contenida en el vaso *FG*, y redúzgase la balanza al equilibrio, quitando del plato *A* el peso que se necesita para este efecto, y en el mismo peso quitado se tendrá (270) él de un volumen de agua igual al del globo: y finalmente quítese el agua del vaso *FG*, echando en éste el fluido cuya gravedad específica se pide determinar; y limpio el globo *D* introdúzgase en dicho fluido, notando el peso que conviene quitar del plato *A* ó añadir en *A*, hasta que de nuevo vuelva la balanza al equilibrio: luego el peso quitado del plato *A* ó añadido en *A*, sumado ó restado del peso hallado antes de un volumen de agua igual al del globo, dará el peso de un volumen del fluido (cuya gravedad específica se ha de determinar) igual al volumen del globo *D*; pero los pesos de dos cuerpos que tienen iguales volúmenes, son entre sí (234) como sus gravedades específicas: luego si se parte el peso hallado de un volumen de fluido igual al del globo por el peso hallado del agua de lluvia en el mismo volumen, se tendrá en el quociente la gravedad específica de dicho fluido relativamente á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad. Que es &c.

ESCOLIO.

280. Es de notar que hay diferentes instrumentos que se llaman Aréometros ó Pesalicores, construidos todos por los principios anteriores, para determinar las gravedades específicas de los fluidos, siendo uno de dichos instrumentos el que se representa en la *Fig.* 146: *ABCD* es una especie de botella de vidrio con cuello estrecho y largo, que tiene en el extremo *C* un poco de mercurio: en el otro extremo se coloca un platillo *A* para poner en él pequeños pesos: y el punto *E* es la señal donde se para el aréometro por su propio peso en un licor de la menor gravedad específica. Ahora si se sumerge dicho instrumento en un licor de mayor gravedad específica, la parte sumergida de él llegará hasta un punto *M* inferior al referido punto *E* (276); y entonces poniendo peso en *A* hasta que el mismo ins-

trumento se inmerga hasta E, se tendrá en dicho peso la diferencia entre la gravedad específica de este fluido y la del primero. Por tanto si se conoce la gravedad específica del primer fluido, se conocerá la de qualquiera otro de mayor gravedad específica. Pero si se da un fluido, cuya gravedad específica sea aun menor de la del fluido que ha servido por término de comparacion, se determinará su gravedad específica con el método siguiente. Se sumergirá el aréometro en dicho fluido, y la parte sumergida de él llegará hasta un punto N superior al citado punto E; entónces se atará el extremo A del mismo instrumento á uno de los brazos de la balanza hidrostática por medio de un hilo muy delgado; y finalmente se pondrá peso en el otro plato de la balanza hasta que dicho instrumento quede sumergido hasta E, y en dicho peso se tendrá la diferencia de las gravedades específicas de los referidos dos fluidos.

281. Tabla de las gravedades específicas de algunos cuerpos sólidos y fluidos determinadas relativamente á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad.

Gravedades específicas de algunos sólidos.

Acero flexíble.	7,738
Idem templado.	7,704

Alumbre	1,714
Antimonio de Alemania	4,000
Idem de Hungría	4,700
Arena de rio	1,900
Azufre comun	1,800
Azufre vivo	2,000
Barro	1,929
Borrax	1,720
Carbon de tierrra	1,240
Cera amarilla	0,995
Cinabrio natural	7,300
Idem artificial	8,200
Cobre amarillo	7,829
Idem roxo	9,257
Estaño puro	7,320
Idem mezclado de Inglaterra	7,471
Goma arábiga	1,375
Guijarro	2,542
Hierro colado	7,114
Idem batido	8,286
Yeso	1,228
Ladrillo	1,857
Litargirio de oro	6,000
Idem de plata	6,044
Madera de álamo	0,530
Idem de acer	0,755

Idem de box..	1,030
Idem de brasil.	1,030
Idem de cedro.	0,613
Idem de ébano..	1,177
Idem de encina verde	1,143
Idem de encina seca.	0,857
Idem de fresno..	0,845
Idem de guayaco.	1,337
Idem de haya.	0,854
Idem de mimbre	0,543
Idem de nogal.	0,600
Idem de olmo	0,600
Idem de pino.	0,550
Marfil.	1,825
Marmol	2,700
Nitro	1,900
Idem reducido á sal fixo por el fuego	2,745
Oro de crisol	19,640
Pez	1,150
Piedra calamina	5,000
Idem hematista ó sanguinaria.	4,360
Piedra de fusil opaca.	2,542
Idem transparente	2,641
Idem de Liais	2,371
Idem de Saint-Leu.	1,643
Pizarra azul.	3,500

Plata de crisol	11,091
Plomo	11,828
Pólvora de guerra	0,914
Sal gema	2,143
Verde gris	1,714
Vidrio blanco	3,150
Vitriolo de Inglaterra	1,880

Gravedades específicas de algunos fluidos.

Aceyte de lino	0,932
Idem de oliva	0,913
Idem de trementina	0,792
Agua de lluvia	1,000
Idem destilada	0,993
Idem de rio	1,009
Idem de mar	1,030
Idem regia	1,234
Idem fuerte	1,300
Espíritu de nitro	1,315
Idem rectificado	1,610
Idem de sal marina	1,130
Idem de tártaro	1,073
Idem de trementina	0,874
Idem de vino, rectificado	0,866
Idem de vitriolo	1,203
Mercurio	13,593

Vino de Borgoña	0,953
Vinagre de vino	1,011
Vinagre destilado	1,030

Nótese que la gravedad específica de un mismo cuerpo puede variar, segun que el calor ó el frio haga variar el volumen del mismo cuerpo, siendo dicha gravedad específica algo menor en el verano por aumentarse dicho volumen, y al contrario mayor en el invierno.

PROPOSICION XIII.

282. Dados el peso y el volumen de un cuerpo, como el peso de un pie cúbico de agua de lluvia, y dados el volumen y la gravedad específica de qualquier otro cuerpo sólido ó fluido; determinar el peso del mismo cuerpo.

Hállese primero una quarta proporcional á la unidad que es la gravedad específica del agua de lluvia, á la gravedad específica del cuerpo propuesto, y al peso de un pie cúbico de agua de lluvia; y dicha quarta proporcional dará (234) el peso de un pie cúbico de dicho cuerpo: y despues multiplíquese la misma quarta proporcional por el número de los pies cúbicos que componen el volumen del cuerpo propuesto; y se tendrá en este producto (232) el peso que se pedia. Que es &c.

EXEMPLO.

283. Se pide determinar el peso de ocho pies cúbicos de pólvora.

Formo la proporcion, 1 á 0,914 gravedad específica de la pólvora como 70 libras peso de un pie cúbico de agua de lluvia al quarto proporcional 63,98 que será el peso de un pie cúbico de pólvora: multiplicando ahora 63,98 por 8 que es el volumen de la pólvora, digo que el producto 511,84 es el número de las libras que pesan 8 pies cúbicos de pólvora segun las medidas anteriores de París.

PROPOSICION XIV.

284. Dados, el peso de un pie cúbico de agua de lluvia, y el peso y la gravedad específica de qualquier otro cuerpo sólido ó fluido; determinar el volumen del mismo cuerpo.

Llámense, G la gravedad específica del cuerpo propuesto, P su peso, x el número de los pies cúbicos que tiene el mismo cuerpo, y p el peso de un pie cúbico de agua de lluvia; y será (233) $p:P = 1:G \times x$: luego $p \times G:P = 1:x$, de donde resulta que hallando una quarta proporcional al peso de un pie cúbico de agua multiplicado por la gravedad específica del cuerpo propuesto, al peso del mismo cuerpo, y á la unidad, se tendrá en dicha quarta proporcional el volumen del cuerpo propuesto en pies cúbicos. Que es &c.

EXEMPLO.

285. Dadas 735 libras de pólvora, y su gravedad específica, se pide hallar el volumen que tendrá la misma pólvora en pies cúbicos.

Multiplico el peso de un pie cúbico de agua de lluvia por la gravedad específica de la pólvora, esto es, 70 por 0,914, de lo que resulta el producto 63,98; formo la proporcion, $63{,}98 : 735 = 1$ al quarto proporcional que es próximamente 11,487; y éste será el volumen de la pólvora en pies cúbicos, como se pedia.

PROPOSICION XV.

286. Dados, el peso y la gravedad específica de un cuerpo A resultante de la mezcla de los cuerpos B y C de diferentes gravedades específicas dadas, de suerte que el volumen del cuerpo mixto A sea igual á la suma de los volúmenes de los componentes; determinar los pesos de estos.

Llámense, P el peso dado del cuerpo A, G su gravedad específica, x el peso de uno de los cuerpos B, y g su gravedad específica dada; y será $P-x$ el peso del otro cuerpo C, cuya gravedad específica dada llámese b. Consta ser (233) $\frac{P-x}{b}$ á $\frac{x}{g}$ como el volumen del cuerpo C al volumen del cuerpo B; y componiendo será $\frac{P-x}{b}+\frac{x}{g}:\frac{x}{g}$ como la suma de los volúmenes de los cuerpos B y C, ó bien como el volumen del cuerpo A al volumen del cuerpo B; pero (233) es $\frac{P}{G}$ á $\frac{x}{g}$ como el volumen del cuerpo A al volumen del cuerpo B: luego será $\frac{P-x}{b}+\frac{x}{g}:\frac{x}{g}=\frac{P}{G}:\frac{x}{g}$; por consiguiente $\frac{P-x}{b}+\frac{x}{g}=\frac{P}{G}$. Despejando ahora la incógnita x de esta equacion, se hallará ser $x=\frac{G-b}{g-b}\times\frac{Pg}{G}$, y por consiguiente $P-x=\frac{g-G}{g-b}\times\frac{Pb}{G}$. Que es &c.

COROLARIO.

287. Se infiere que es el peso del cuerpo componente B al peso del otro C como $\frac{G-b}{g-b}\times\frac{Pg}{G}$ á $\frac{g-G}{g-b}\times\frac{Pb}{G}$, ó bien como $(G-b)\times g$ á $(g-G)\times b$: luego será el peso del cuerpo B partido por g al peso del cuerpo C partido por b como $G-b$ á $g-G$; por

consiguiente (233) será el volumen del primer cuerpo á él del segundo como $G-b$ á $g-G$.

EXEMPLO.

288. Supóngase que fuesen 10 libras el peso de la famosa corona del Rey Hieron, en la qual el artífice mezcló plata con el oro por fraude: supóngase tambien ser 19 la gravedad específica del oro dado al mismo artífice, 16 la de la corona, y 11 la de la plata. Por tanto serán, $P=10$, $G=16$, $g=19$, $b=11$; y substituyendo estos valores en la fórmula $x=\frac{G-b}{g-b}\times\frac{Pg}{G}$, se tendrá $x=7\frac{27}{64}$, esto es, la parte del oro que se hallaba en la corona pesaba 7 libras y $\frac{27}{64}$ de libra.

ESCOLIO.

289. El método dado en la Proposicion antecedente para determinar los pesos de dos cuerpos que componen un mixto, es útil siempre que dichos cuerpos unidos conserven aun sus propios volúmenes, esto es, que las partes del uno no puedan introducirse en los poros del otro. El plomo y el estaño se pueden mezclar de tal suerte que resulte un mixto que tenga la misma gravedad específica que la plata; por

consiguiente dichos dos metales unidos á la plata formarán un mixto, cuyos componentes no se podrán determinar por el método hidrostático. La mezcla del cobre y del estaño tiene mayor gravedad específica que la del cobre; por consiguiente dichos metales unidos no conservan sus propios volúmenes: luego por la teoría hidrostática no se podrá determinar la razon de los cuerpos componentes así de los cañones, como de las campanas. En general adviértase: que si la gravedad específica de un cuerpo se halla ser mayor que la que le corresponde, dicho cuerpo estará mezclado con otro ú otros mas densos: que si se halla igual, este solo conocimiento no bastará para asegurarse de la falta de mezcla en el mismo cuerpo: y que si se halla menor, estará mezclado dicho cuerpo con otro ú otros menos densos, ó contendrá el mismo cuerpo unos vacíos interiores.

PROPOSICION XVI.

290. Si un fluido *B* tiene menor gravedad específica que la del sólido *A*, y mayor que la del sólido *C*, y son dadas dichas gravedades específicas, y además el peso del sólido *A*; determinar el peso de una parte del sólido *C*, de suerte que dichos dos pesos unidos tengan la misma gravedad específica que la del fluido.

Llámense; P el peso dado del sólido A, G su gravedad específica, y U el volumen del mismo sólido; g y h las respectivas gravedades específicas del sólido C y del fluido B; y finalmente x y v el peso y el volumen del sólido C que se busca. Siendo pues la gravedad específica del sólido A mayor que la del fluido B, la potencia vertical con que el sólido A baxará al fondo del fluido B será (272) igual á $G \times U - h \times U$, esto es, igual á la diferencia del peso del sólido A y del peso de un volumen del mismo fluido igual al del sólido: y por tener el sólido C menor gravedad específica que la de dicho fluido, la potencia vertical con que el fluido impele al sólido C será igual (273) á $h \times v - g \times v$: luego para que el cuerpo compuesto de los pesos P y x quede equilibrado dentro del fluido, deberá ser $G \times U - h \times U = h \times v - g \times v$; por consiguiente $U : v = h - g : G - h$; pero (233) $U : v = \frac{P}{G} : \frac{x}{g}$: luego será $\frac{P}{G} : \frac{x}{g} = h - g : G - h$, de donde resulta ser $x = \frac{Pg}{G} \times \frac{G-h}{h-g}$. Que es &c.

EXEMPLO.

291. Las gravedades específicas G, h, g sean respectivamente como 10, 9, $2\frac{1}{4}$, esto es, como las respectivas gravedades específicas del cuerpo huma-

no, del agua y del corcho: y sea el peso P de un hombre igual á 160 libras. Luego substituyendo dichos valores en $x = \frac{(G-h) \times Pg}{(h-g) \times G}$, será $x = 4\frac{20}{31}$ libras.

PROPOSICION XVII.

292. Dados, el peso de un vaso, y la gravedad específica de un fluido, y supuesta la gravedad específica del vaso mayor que la del fluido; determinar el volumen que aquel debe tener para que se sostenga sobre el mismo fluido.

Hállese una quarta proporcional al peso de un pie cúbico del fluido dado, al peso dado del vaso, y á la unidad; y en dicha quarta proporcional se tendrá el volumen que debe tener el fluido, para que (271) su peso sea igual al peso del vaso: luego si el volumen del vaso se hace algo mayor que el volumen hallado, el vaso baxo de un mismo volumen contendrá menor peso que el fluido, y por consiguiente tendrá aquel menor gravedad específica que éste: luego (273) el vaso se sostendrá sobre el fluido dado. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

293. Dadas las dimensiones del sólido DE, y la gravedad específica del fluido existente en el vaso BF; determinar la gravedad específica que debe tener di-

cho sólido, para que la parte MD de éste quede fuera del fluido, y tenga el máximo peso. *Fig.* 147.

Llámense, G la gravedad específica dada del fluido, x la del sólido, y su volumen dado b. Consta ser en el caso del equilibrio (275) la gravedad específica del fluido contenido en el vaso BF á la del sólido ED como el volumen del mismo sólido al volumen del fluido que se contendrá en EMN, esto es, $G : x = b : \frac{bx}{G}$ que será igual al volumen EMN; por consiguiente el volumen NMD será igual á $b - \frac{bx}{G}$, y el peso del sólido NMD será (232) igual á $bx - \frac{bx^2}{G}$: luego en el caso del máximo peso será (III. 281) su diferencial $bdx - \frac{2bxdx}{G} = 0$; y partiendo por bdx, se tendrá $1 - \frac{2x}{G} = 0$, de donde resulta ser $x = \frac{1}{2}G$. Por tanto la gravedad específica del sólido que se busca debe ser la mitad de la del fluido contenido en el vaso BF. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

294. Si en el vaso BD se contienen los fluidos $AFED$ menos denso, y $FBCE$ mas denso, como

tambien el sólido M, cuya gravedad específica sea mayor que la del primer fluido, y menor que la del segundo, y se suponen dadas sus gravedades específicas, y además el volumen de dicho sólido; en el caso del equilibrio de dichos fluidos y sólido determinar el volumen de la parte del mismo sólido inmersa en el fluido BE mas denso. *Fig.* 148.

Llámense; G, g y h las respectivas gravedades específicas de los fluidos AE, EB, y del sólido M; U y v los volúmenes de las respectivas partes del sólido M inmersas en los fluidos AE y EB; P y p los pesos de los dichos fluidos que se contendrán en los volúmenes U y v. Por tanto será $U \times h - U \times G$ la potencia vertical (272) que impele hácia abaxo la parte GH del sólido M en el fluido AE; y $v \times g - v \times h$ será (273) la potencia vertical que impele hácia arriba la parte IH de dicho sólido M en el fluido BE: luego para que el sólido M quede en equilibrio, se tendrá $U \times h - U \times G = v \times g - v \times h$; por consiguiente será $g - h : h - G = U : v$, y componiendo se tendrá $g - G : h - G = U + v : v$; esto es, el volumen v que se busca será el quarto proporcional á la diferencia de las gravedades específicas de los dos fluidos, á la diferencia de las gravedades específicas del sólido M y del fluido menos denso, y al volumen del mismo sólido. Que es &c.

De las principales propiedades del Ayre deducidas de las experiencias; y de la presion del ayre sobre las superficies.

EXPERIENCIA I.

295. El ayre es un fluido pesado que se equilibra como qualquier otro fluido. *Fig.* 149.

Tómese un tubo cilíndrico *AB* de vidrio cerrado herméticamente en uno de sus extremos *A*, y la altura de él sea cerca de 34 pulgadas. Por el otro extremo *B* llénese perfectamente dicho tubo de mercurio; y entonces puesto un dedo en *B* inmérgase algun tanto el mismo tubo dentro del vaso *CD* en quien haya tambien mercurio: quitado ahora el dedo, se observará que el mercurio del tubo baxa hasta que su altura sobre la superficie superior del mercurio existente en el vaso sea cerca de $27\frac{1}{2}$ pulgadas. Este experimento demuestra claramente el peso del ayre. El mercurio pues contenido en el vaso, donde dicho tubo está inmerso, no actua sobre la coluna del mercurio contenido en el tubo que á proporcion (244) de la distancia de la superficie del mercurio contenido en el vaso hasta el agujero *B*: por consiguiente el mercurio contenido en dicho vaso no puede tener equilibrada la referida coluna: luego el equilibrio del mercurio contenido en el tubo hasta la altura de cerca $27\frac{1}{2}$ pulgadas deberá depender de la presion del ayre sobre la superficie superior del mercurio contenido en el vaso; de donde se infiere el peso del ayre sobre dicha superficie ó qualquiera otra, esto es, que la presion del ayre sobre la superficie de los cuerpos equivale á la presion que haria sobre la misma superficie una coluna de mercurio, cuya altura fuese cerca de $27\frac{1}{2}$ pulgadas. Si en lugar del mercurio se hace el experimento con qualquier otro fluido, se observará que la altura del primero está con la del segundo en la razon recíproca de las gravedades específicas de los mismos fluidos: luego el ayre es un fluido pesado que se equilibra como qualquiera otro fluido.

ESCOLIO.

296. Adviértase que la referida altura del mercurio contenido en el tubo varía en un mismo lugar segun el estado del ayre. Asimismo varía dicha altura segun la altura del lugar donde se haga el experimento, de suerte que transfiriéndose el barómetro de un lugar á otro mas elevado ó mas baxo, el mercurio se baxará en el primer caso, y se elevará en el segundo; pero la máxima altura no llega comunmen-

te á 29 pulgadas, y la mínima á 26. Adviértase tambien que el mercurio contenido en el tubo esté bien limpio de ayre.

EXPERIENCIA II.

297. El ayre se puede comprimir sensiblemente en la razon de los pesos que actuan sobre él. *Fig.* 150.

Tómese un tubo curbo *ACF* de vidrio cerrado herméticamente por uno de sus extremos *F*, en quien la altura *AB* sea cerca de 40 pulgadas, y el brazo *DF* del tubo tenga en todas partes el mismo diámetro. Por el extremo *A* viértase el mercurio en el tubo, hasta que quede llena la parte mas baxa de él, esto es, *BCD*: póngase ahora dicho tubo sobre una tablita graduada, y nótese la altura *DF* que supongo ser de 10 pulgadas: viértase de nuevo otra cantidad de mercurio en el tubo, hasta que el exceso de la altura del mercurio en *AB* sobre la del mercurio en *DF* sea cerca de $27\frac{1}{2}$ pulgadas; y se observará, que el ayre que ocupaba antes toda la parte *DF*, no ocupará ahora sino la mitad *EF*; y continuando en verter mercurio en el tubo *AB* (en cuyo caso convendria ser éste mas alto) hasta que el exceso de la altura del mercurio en *AB* sobre la del mercurio en *DF* fuese dupla, tripla, &c. de $27\frac{1}{2}$ pulgadas, el ayre en *DF* no ocuparia sino las partes tercera, quarta &c. de *DF*. Supuesto este experimento, es evidente que mientras el mercurio quedaba solo hasta *BD*, el ayre contenido en *DF* estaba cargado del peso de la atmósfera correspondiente al agujero *A* del tubo, cuyo peso equivale (295) á una coluna de mercurio con la altura de $27\frac{1}{2}$ pulgadas; pero añadida una coluna de mercurio de la misma altura se ha cargado el ayre contenido en *DF* de un peso duplo, y su volumen se ha reducido á la mitad *FE* del que ocupaba antes; y asi añadidas del mismo modo dos, tres, &c. de dichas colunas, se cargaria el ayre contenido en *DF* de un peso triplo, quadruplo, &c. quedando reducido su volumen á la tercera, quarta, &c. parte de *DF*: luego el ayre se comprime en la razon de los pesos que actuan sobre él; por consiguiente las densidades del ayre serán proporcionales con los pesos que lo comprimen, y los volúmenes en que se puede reducir el ayre tendrán entre sí la razon inversa de dichos pesos.

EXPERIENCIA III.

298. El ayre es un fluido elástico, y su elasticidad es igual á la fuerza que lo comprime. *Fig.* 150.

Demuéstrase la expresada propiedad, deshaciendo con método inverso la experiencia que anteriormente se ha manifestado: sea pues el volumen, en que quedó cerrado el ayre, la quarta parte del volumen *FD*; y será la potencia que comprime dicho ayre, igual á la de quatro colunas de mercurio que tengan de altura $27\frac{1}{2}$ pulgadas. Ahora si del brazo *AB* se quita sucesivamente el mercurio, de suerte que los pesos sean iguales á los de tres, dos, &c. de las referidas colunas, el mismo ayre pasará á ocupar la tercera parte, la mitad, &c. del volumen *FD*: luego la elasticidad del ayre es igual á la fuerza que lo comprime.

De otro modo.

Supuesta la experiencia que se ha manifestado anteriormente (295) se cierra perfectamente el vaso *CD* (*Fig.* 149.) dexando entre el tapon del vaso y la superficie del mercurio contenido en el mismo vaso una parte del ayre que antes oprimia la dicha superficie; y se observará que el mercurio queda en el tubo *AB* á la misma altura: luego la fuerza elástica del ayre contenido en el vaso *CD*, esto es, entre el tapon y la superficie del mercurio, es igual á la presion de la coluna del ayre con quien comunicaba antes que se cerrase el vaso *CD* con tapon.

COROLARIO I.

299. Luego la elasticidad del ayre se aumenta ó disminuye á proporcion que se aumenta ó disminuye

su densidad; por consiguiente la elasticidad en parte mas alta de la atmósfera será menor que en otra parte mas baxa.

COROLARIO II.

300. Por tanto si el ayre se comunica con la atmósfera, ó bien si el mismo ayre queda cerrado, comprimirá la superficie de los cuerpos del mismo modo, esto es, con el peso con que la comprimiria una coluna de mercurio cuya altura fuese cerca de $27\frac{1}{2}$ pulgadas; y si la densidad de dicho ayre cerrado es dupla, tripla, &c. de la que tiene en su estado natural, entonces su presion será dupla, tripla, &c.

ESCOLIO.

301. No consta aun por la experiencia qual es el máximo grado de densidad á que el ayre puede reducirse por la presion continua: es evidente que existirá este límite en la naturaleza, porque llegando las partes del ayre á un perfecto contacto, no podrán cerrarse mas, si no se penetran, lo que es contrario á la naturaleza de la materia. El doctísimo Señor Hales pudo cerrar una cierta cantidad de ayre en un espacio 1838 veces menor que el que ocupaba en su estado natural. Nótese tambien que la presion producida por la elasticidad del ayre cerrado excede en

mucho á la presion causada por la gravedad del mismo ayre.

EXPERIENCIA IV.

302. El volumen del ayre rarefacto por un grado de calor capaz de hacer ascua al vidrio está con el volumen del mismo ayre condensado por el frio del yelo como tres á uno.

Tómese un tubo de vidrio cerrado solamente en uno de sus extremos, cuya altura sea cerca de quince pulgadas, y que tenga por todas partes un mismo diámetro: póngase despues el mismo tubo sobre algunos carbones encendidos hasta hacerle ascua, y téngase de este modo el tubo por la parte del agujero en un vaso de mercurio que hierva. Déxese todo enfriar, y entonces póngase por algunos minutos en el yelo machacado, para que el ayre llegue á tener un grado de frialdad conocida: y se observará que el ayre contenido entre la extremidad del tubo que está cerrada, y la superficie del mercurio que está en el tubo, ocupa sensiblemente la tercera parte de la altura del tubo: luego una cierta porcion de ayre, que tiene el mismo temperamento del yelo, y que está oprimido por el peso de la atmósfera, tiene la tercera parte del volumen que tuviera con la misma presion, pero con un calor capaz de hacer ascua al vidrio.

Por medio de semejantes experimentos tambien se determina que el volumen del ayre en el frio del yelo está con el volumen que ocupa en el calor del agua que yerve como dos á tres. Adviértase que en los mismos experimentos se encuentran muchas veces unas diferencias notables, no tanto por razon de las diferencias del estado natural del ayre, como tambien por razon de los vasos que sirven para ellos.

ESCOLIO.

303. Los vapores y las exhalaciones que se mezclan en el ayre, están sujetas á las mismas leyes de los fluidos mezclados entre sí, con tal que se considere que la densidad del fluido aereo disminuye á proporcion que se aumenta su distancia á la superficie de la tierra. Dichos vapores y exhalaciones, que durante el dia se rarefacen por el calor del sol, se elevan en la atmósfera hasta encontrar un ayre de la misma densidad; y si este ayre se condensa por otra qualquiera causa, los mismos vapores y exhalaciones subirán nuevamente del mismo modo; pero si el ayre se rareface, baxarán hasta encontrar un ayre de la misma densidad. Dígase lo mismo, si quedando el ayre de la misma densidad, los vapores y exhalaciones se rarefacen ó se condensan. Por estas causas se observan las nubes, y los demas metéoros

áqüeos é igneos, ya distantes, y ya próximos á la superficie terrestre hasta caer en ella. Por lo demas las citadas propiedades del ayre han dado margen para el descubrimiento de diferentes máquinas é instrumentos útiles, de los que se indicarán los principales á continuacion.

Del Barómetro.

304. El barómetro comun es el instrumento que sirve para conocer el mayor ó menor peso del ayre. Dicho instrumento está descrito en la experiencia primera (295) con la advertencia que el tubo está colocado verticalmente (*Fig.* 151.) sobre una tabla de madera graduada, y que el vaso donde está colocado el tubo está tapado á fin de que no entre polvo. En vez de colocar el tubo en un vaso, se suele usar de un tubo que tiene dos brazos verticales, de los quales (*Fig.* 152.) el uno es mas alto, y está cerrado en su extremo *A*, y el otro mas pequeño se termina en una especie de embudo ancho *EDGF*: sobre la superficie del mercurio en dicho embudo hace presion el ayre, y segun el peso de éste sube ó baxa el mercurio en el otro tubo.

Adviértase que segun las diferentes observaciones que se han hecho desde un siglo en casi todas las partes del globo terrestre, ha resultado que la altura media de la coluna del mercurio al nivel del mar es de 27 pulgadas y diez ú once lineas. Y las observaciones mas recientes y exâctas demuestran que desde el nivel del mar hasta la altura de mil y doscientas toesas sobre el mismo nivel, se pueden contar cerca de diez toesas de altura por cada linea que baxa el mercurio en el barómetro, añadiendo un pie á la primera decena de toesas desde dicho nivel, dos pies á la segunda, tres pies á la tercera, y así sucesivamente.

Del Termómetro.

305. El Termómetro es un instrumento que sirve para conocer los grados del calor y del frio: y se construye del modo siguiente. Se toma un tubo capilar *AB* (*Fig.* 153.) terminado por un vaso cilíndrico *A* de una capacidad proporcionada al diámetro del tubo. Las divisiones de la altura de dicho tubo no se notan en su longitud por partes iguales, sino echándole sucesivamente una pequeña cantidad de mercurio, y siempre la misma, se señalan los grados del termómetro, y dichas divisiones son mas ó menos grandes segun el tubo sea menos ó mas ancho por dentro. Graduada ya la altura del tubo, se pone en el cilindro y en el tubo una cierta cantidad de mercurio bien limpio de ayre; y á fin de que todo el mercurio no se introduzca por su condensacion

dentro del cilindro, en el invierno se pone dicho cilindro en una taza con yelo machacado; y si es en el verano se pone en agua manantial impregnada de salitre; y se nota el punto del tubo adonde llega el mercurio: despues se pone el mismo cilindro en el agua hirviendo, y se nota el punto adonde llega el mercurio; y á corta distancia del mismo punto se cierra la abertura del tubo. Ahora entre dichos dos puntos se aplica por una y otra parte la escala graduada, cuyas divisiones se representan en la citada Figura, ya segun el método del Señor Reaumur, ó ya sea segun él del Señor Farenheit. Es evidente como este instrumento servirá para hacer conocer los grados del calor y del frio; porque siendo el mercurio capaz de rarefaccion y condensacion, subirá ó baxará en el tubo, y las dichas divisiones indicarán los grados correspondientes del calor y del frio.

De la Máquina Pneumática.

306. Máquina Pneumática se llama aquella, por cuyo medio se quita, ó á lo menos se rarefacé considerablemente el ayre contenido en un vaso.

La Máquina Pneumática simple (*Fig.* 154.) consta de cinco partes, que son:

1ª. La Platina *NM* de metal cubierta de cuero de buey mojado, sobre la qual se pone el recipiente ó

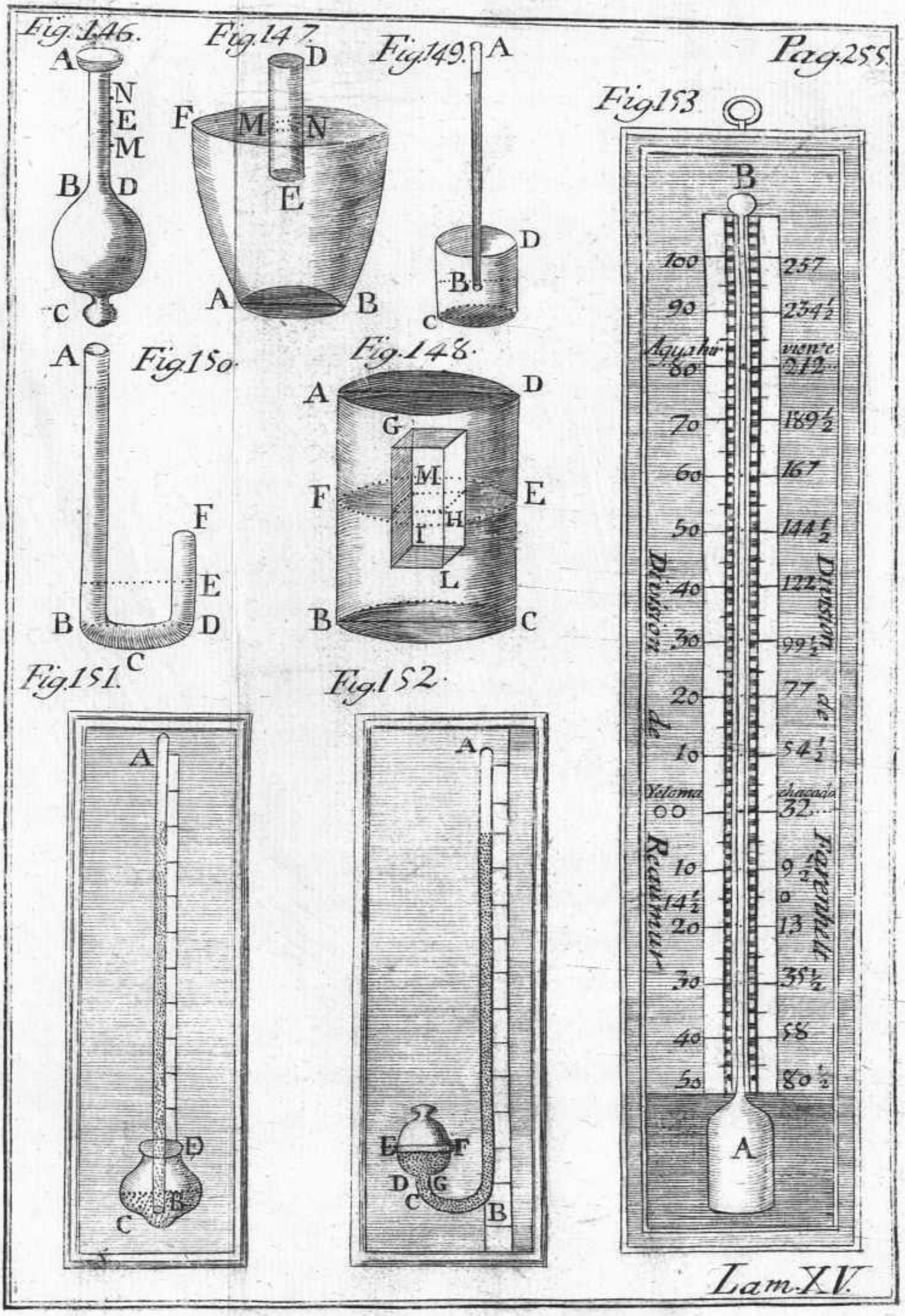


Fig.146.
A
N
E
M
B
D
C
Fig.147.
D
F
M
N
E
A
B
Fig.149.
A
D
B
C
Fig.150.
A
F
E
B
D
C
Fig.148.
A
D
G
M
F
E
H
I
L
B
C
Fig.151.
A
E
B
C
Fig.152.
A
E
F
D
G
C
B
Pag.255.
Fig.153
B
100
257
90
234½
Agua hir
viente
80
212
70
189½
60
167
50
144½
40
122
30
99½
20
77
10
54½
Yeloma
chacada
00
32
10
9½
0
14½
20
13
30
35½
40
58
50
80½
Division de Reaumur
Division de Farenheit
A
Lam.XV.

campana de vidrio *E.*

2ª. La Canilla *OQ*, cuyas partes se manifiestan en las Figuras 155, 156 y 157: la parte *OR*, que está hueca por dentro, se comunica por *O* con la platina, y por *R* con la caxa *RQ*, la qual se cierra perfectamente con la llave *ST*: en esta llave hay un agujero *V* que la pasa de parte á parte, y se comunica con otro en el fondo de la caxa; y además dicha llave tiene una ranura ó canal curba *XYZ.*

3ª. La Bomba ó tubo vertical *AD* de cobre, que tiene su superficie interior perfectamente cilíndrica, de modo que el hueco de la bomba comunica con el referido agujero abierto en el fondo de la citada caxa.

4ª. El Émbolo, ó cilindro (*Fig.* 158.) capaz de llenar exâctamente el hueco de dicha bomba, cuyo mango *B* acaba en un estribo para baxar el émbolo con el pie, y al mismo mango *B* está unida una especie de palanca encorbada que tiene su puño *C* para levantar el mismo émbolo con la mano. Este émbolo puede ser de corcho cubierto de cuero de buey bien untado con aceyte.

5ª. Los pies *GF* con sus tablitas *H* que se pueden levantar ó baxar.

Es evidente que si está ajustado el émbolo dentro de la bomba, y se pone la llave, de suerte que su agujero quede vertical y corresponda á los de la platina y de la bomba, y si en esta disposicion se baxa el émbolo; el ayre del recipiente pasará tambien á ocupar el hueco de la bomba, y en conseqüencia se dilatará él del recipiente. Ahora muévase la llave, de suerte que el agujero quede en situacion horizontal, y la canal hácia la parte inferior de la bomba, y por consiguiente quede cerrada la comunicacion del ayre del recipiente con el de la bomba, y abierta la comunicacion del ayre de la bomba con el exterior por medio de dicha canal; y despues súbase el émbolo, hasta que llene toda la concavidad de la bomba: y si en esta disposicion se mueve la llave, de suerte que quede abierta la comunicacion entre la bomba y el recipiente, y si se vuelve á baxar el émbolo; el ayre del recipiente baxará tambien á ocupar el hueco de la *bomba*, y *en* conseqüencia se dilatará de nuevo. Ahora dando una vuelta á la llave como antes, subiendo el émbolo, y operando sucesivamente como se ha dicho, se dilatará cada vez mas el ayre del recipiente.

La Máquina Pneumática compuesta se representa en la Figura 159: *A*, *A* son dos bombas que entran en la caxa *FF* cerrada exâctamente: *B*, *B* dos mangos de émbolos, que forman una especie de cric capaz de recibir la rueda dentada *C* (representada en la Figura 160) que está encerrada en una caxa de