TRATADO

DE

ARITMÉTICA

POR

D. Z. G. DE GALDEANO,

Doctor graduado, Licenciado en Ciencias exactas,

CATEDRÁTICO NUMERARIO

DEL INSTITUTO DE TOLEDO

MIEMBRO CORRESPONSAL DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

TOLEDO

IMPRENTA Y LIBRERÍA DE FANDO Y HERMANO

Alcázar, 20-Comercio, 31

1884

PRÓLOGO.

En el desenvolvimiento de la ciencia matemática sorprende que, despues de haberse sucedido tantas generaciones de genios ilustres, de inventores infatigables que han hecho de la misma un cúmulo inmenso de verdades sólidamente establecidas, no se haya llegado á su organizacion en un plan donde, desde un foco ó centro irradien las diversas gerarquías de verdades, con riguroso encadenamiento subordinadas y coordinadas entre sí; y aun más sorprende que, efecto sin duda de lo defectuosa que hoy aparece la exposicion y la enseñanza de la Matemática, se siga desconociendo la naturaleza de esta ciencia, generalmente considerada como árida, repulsiva y algún tanto envuelta en cierta oscuridad que inclina á juzgarla difícil y resistente al esfuerzo de las inteligencias.

No conformes con estas apreciaciones, hoy aspiramos á dar el primer paso hácia una organizacion de dicha ciencia, acogiéndonos á cuanto han producido, ya los grandes inventores, ya otros más modestos cuyos descubrimientos, sin embargo, son de gran valía, y yacen hoy sepultados en el olvido, ó dispersos en obras numerosas sin haber hallado todavía el lugar que les corresponde en el plan de la ciencia; y además de reunir estas dispersas ideas, hasta hoy fuera del plan de enseñanza, pretendemos desenvolver una parte que creemos esencial para la exposicion y progreso de la Matemática, á saber: la *crí-*

tica matemática que ha de facilitar la síntesis de sus verdades, dándoles un encadenamiento lógico, á la par que conduce á un conocimiento filosófico de las mismas, y constituye una preparación para la Metafísica de esta ciencia.

Claridad y sencillez para que los alumnos, además de hallar accesibles á sus inteligencias los primeros conocimientos matemáticos, experimenten el natural agrado que ocasiona la posesión de la verdad, lo cual les sirva de estímulo para encontrar más suave la pendiente que les ha de elevar á conocimientos superiores, cuya afinidad con los elementos debe hacerse ostensible, gracias al método. Esto es lo que pretenderíamos ver en un tratado elemental de Matemáticas, y, ya que nosotros nos hallemos sin fuerzas para realizarlo, presentamos un primer ensayo encaminado á dicho fin, haciendo entrar en el plan de enseñanza las teorías modernas, fundidas en las únicamente hasta hoy admitidas en la enseñanza clásica, cuya ampliacion es hoy absolutamente indispensable.

Pero la realizacion de nuestro propósito ha de luchar, desde luégo, con la indiferencia que persigue constantemente en nuestro país este linaje de estudios que hace escaso el número de lectores y propagandistas, así como muy crecido el de los que miren con recelo toda separacion de la antigua rutina, ya hoy algun tanto puesta en evidencia y aun amenazada, si todavía no vencida; y otro obstáculo más difícil de vencer hallamos para la realizacion de nuestro propósito, en el plan vigente de enseñanza, que algun dia debe ser modificado para ampliar el cerco estrecho en el cual hoy encuadra la Matemática, en particular, y los estudios científicos en general, y, huyendo de entrar en detalles que nos conducirían demasiado lejos, y concretándonos á nuestro trabajo, deberemos anunciar como una reforma capital, en el órden de prioridad de las asignaturas correspondientes á la parte elemental, la anteposicion de la Geometría al Álgebra, pues si, desde luégo, la historia hace ver la aparicion de la Geometría de Euclides, que hoy es nuestra Geometría elemental, unos seiscientos años antes que el Álgebra de Diofanto, hoy los progresos de la teoría de las cantidades imaginarias, juntamente con la necesidad de dar cuerpo á las numerosas abstracciones del Álgebra que hacían tan ingrato su estudio, conduciendo al subterfugio de las *convenciones*, por las cuales resultaba transformada la rama más importante de la ciencia matemática en una *ciencia convencional*, exigen que el Álgebra, como dijo en su Teoría trascendental de las cantidades imaginarias el sábio filósofo y matemático Rey y Heredia, sea el tronco comun donde se reunen la Aritmética y la Geometría, puesto que abarca en su superior generalidad el número y la extension, la cantidad y su cualidad.

A pesar de esto, hemos procurado, ya que no sea posible contar desde luégo con las reformas exigidas en el plan de enseñanza, escribir un tratado elemental de Matemáticas, conforme con estas exigencias y compatible con dicho plan vigente, pues, aun anteponiéndose el Álgebra á la Geometría, segun lo hasta ahora universalmente admitido, son tan ligeras las nociones geométricas necesarias para dar cuerpo ó forma á los conceptos del Álgebra, que dicho obstáculo resulta de poca trascendencia, por más que, desapareciendo, permitiría ventajas considerables en la exposicion científica.

Despues de este preliminar para dar nocion del espíritu dominante en el nuevo tratado de Matemáticas, bastará consignar algunas particularidades del mismo. Respecto á la Aritmética, hemos creido conveniente separar en dos tratados distintos el número abstracto del número concreto, pues de la especial naturaleza de cada uno se derivan inmediatamente sus diversas propiedades; y en cada tratado hemos creido necesario distinguir cuidadosamente el cálculo ó seccion práctica de la seccion teórica, que si bien es una ramificacion del Álgebra, permite, desprendiéndose de su tronco, hacer de la Aritmética, no puramente el arte de contar, sino un estudio preliminar de aquélla. El Álgebra caracterizada por las ecuaciones cuyo estudio se refiere á las funciones implícitas, contiene tambien, como preliminar obligado, el estudio de las funciones explícitas, bajo las cuales se comprende la cantidad en todas sus manifestaciones cualitativas, y segun las elevadas concepciones de Wronski, sobre el sistema de esta ciencia, la funcion seno, independiente de toda idea geométrica, aparece como un algoritmo que resuelve el problema recíproco de la funcion logarítmica, sin que el concepto puramente racional ó abstracto de estos algoritmos impida hacer el estudio de sus correspondencias geométricas, mediante las cuales, la periodicidad de la una y la multiplicidad de los valores de la otra se hace visible; y, como resúmen ó síntesis de la teoría de las funciones explícitas, hemos creido indispensable presentar una *teoría general de las operaciones y de las cantidades*, en la cual se hace ver, cómo, por una generalizacion sucesiva de los conceptos de una y otra, se consiguen resolver los problemas cada vez más complejos del Álgebra.

Por último, el estudio de las ecuaciones ó funciones implícitas no había de discordar con el plan seguido en las explícitas, y, aparte de las correspondencias geométricas que dan forma visible á todas las transformaciones algébricas, propias para convertir una funcion implícita en explícita, es decir, para resolver ecuaciones, encuentran los conceptos de órden y combinacion aplicaciones en la representacion y reproduccion periódica de las raíces de las ecuaciones binomias y de las ecuaciones de congruencia.

En cuanto á la Geometría, convencidos de que poseer los métodos es disponer de instrumentos preciosos para demostrar los teoremas, segun corresponda á la naturaleza de las verdades que expresan, hemos tratado de ponerlos de relieve hasta el punto de que la demostracion de los teoremas sirva de motivo para alcanzar dicha posesion, con lo cual se quitará á la enseñanza de la Matemática el carácter mecánico de que ahora adolece y se convertirá en gimnasia de la inteligencia. Además, es evidente que una clasificacion ó distincion de las ideas ha de permitir establecer puntos de vista que subordinen las particulares á las superiores ó fundamentales, aliviando á la inteligencia del abrumador cúmulo de ideas sin trabazon, enlace ni dependencia que resultan como efecto de esa tendencia al detalle y falta completa de generalizacion predominante en casi la totalidad de los tratados conocidos. Por este motivo, en nuestro tratado señalamos los conceptos de existencia, determinacion y coexistencia, hacemos visibles las correlaciones existentes entre las verdades, así como las equivalencias ó distinta extension de las proposiciones geométricas; separamos por completo las verdades referentes á las ideas de igualdad, mayoridad ó minoridad, de las verdades referentes á la idea de medida en las cuales interviene el número como expresion de las cantidades geométricas para obtener su determinacion mediante relaciones de igualdad entre productos ó razones de segmentos rectilíneos. La homotecia, de la cual es una variante la semejanza de las figuras geométricas, y las relaciones métricas entre los ángulos y los lados de un triángulo que permiten fundir la Trigonometría en la Geometría ó convertirla en un capítulo de la misma, son las cuestiones de determinacion que citaremos como constituyendo una de las innovaciones que introducimos en nuestro plan de exposicion de las Matemáticas elementales.

Hemos creido necesario, en nuestro plan de propaganda científica, principiar por una exposicion rigurosamente didáctica de la Matemática, como base sobre que ha de apoyarse la doctrina que pensamos desenvolver en obras posteriores, cuyo objeto será realizar la desaparicion de erróneas preocupaciones, todavía demasiado arraigadas aun entre personas dedicadas á la enseñanza, respecto á esa ciencia que posee el carácter de ser una especie de creacion de nuestro entendimiento, razon que obligó al filósofo Vico, á considerarla como la ciencia más cierta, ó el prototipo de lo verdadero en la ciencia humana, y que hoy permite á los sabios considerarla como la ciencia que además realiza sus conceptos en el mundo físico, cuyos fenómenos son la traduccion individual de las leyes generales abarcadas en cada fórmula. Así, pues, necesitamos hoy para terminar esta contienda, en que las antiguas preocupaciones y rutinas se desmoronen al impulso de las modernas ideas, constituir una *filosofía matemática* que exponga el criterio de la verdad matemática, una *literatura matemática* que organice el mundo de lo bello matemático por la exposicion de las infinitas armonías del número y el espacio, y una *pedagogía matemática*, que consagre las leyes de la exposicion científica armonizada con el modo de ser de nuestra inteligencia; y esto será el objeto de nuestras próximas publicaciones, destinadas á consolidar nuestro modo de exposicion didáctica.

INTRODUCCION.

Ciencia es un conjunto de verdades subordinadas á un corto número de principios y coordinadas entre sí.

La ciencia comprende dos ramas denominadas *teoría* y *técnica*: la teoría comprende las proposiciones que se refieren á la *especulacion* ó ejercicio de nuestra *inteligencia*, la técnica comprende las proposiciones que se refieren á los *hechos* ó ejercicio de nuestra *voluntad*.

Teoría es una parte de la ciencia que comprende un conjunto coordinado de verdades relativas á algun objeto particular de aquélla.

Las proposiciones teóricas son de dos clases: *axiomas* y *teoremas*.

Axioma es una verdad evidente que no necesita demostracion.

Teorema es una proposicion que necesita demostrarse para admitirse como verdad.

Los axiomas son las primeras verdades de una ciencia ó de una teoría. En matemáticas son, *generales*, es decir, aplicables á todas las ramas de la ciencia, ó *particulares*, es decir, relativos á cada rama.

Los principales axiomas generales son los siguientes:

El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.

Si con dos objetos iguales se hacen operaciones iguales, los resultados serán iguales.

Variedades del teorema son el *lema* y el *corolario.*

Lema es un teorema que debe anteponerse á otro para facilitar su demostracion.

Corolario es una consecuencia del teorema.

El teorema consta de dos partes: *hipótesis* y *tésis*. *Hipótesis* es lo que se supone, *tésis* lo que se vá á demostrar.

Demostracion es un razonamiento por medio del cual se hace evidente un teorema.

Las proposiciones que se refieren á la práctica se llaman *técnicas* y son: el *problema* y el *porisma.*

Problema es un enunciado en que se propone hallar una cosa desconocida por medio de otras conocidas. La parte desconocida se llama *incógnita*, lo conocido *datos*.

Resolver un problema es hallar la incógnita por medio de los datos.

Porisma es una proposicion que participa del teorema y del problema, pues además de haber en él por *demostrar* una verdad enunciada, hay que *buscar* la manera de ser de ciertas cosas, mencionadas en el enunciado de esta verdad.

Todas las proposiciones matemáticas pueden reducirse á problemas, pues en realidad los teoremas son enunciados de los resultados obtenidos al resolver problemas.

PARTE PRIMERA.

TRATADO DEL NÚMERO ABSTRACTO.

SECCION PRIMERA.

CÁLCULO DEL NÚMERO ABSTRACTO.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES.

1. MATEMÁTICA *es la ciencia que trata de la cantidad.*

2. CANTIDAD *es la cualidad en virtud de la cual concebimos las cosas como susceptibles de aumento ó disminucion.*

Ejemplo: La arena que hay en una playa, el agua que hay en un estanque, los bancos colocados en un paseo.

3. La cantidad se nos presenta bajo la forma de espacio y tiempo que son el fondo comun de las verdades matemáticas, hasta el punto de poderse decir que: MATEMÁTICA *es la ciencia de las leyes del espacio y tiempo.*

4. UNIDAD *es una cantidad arbitraria que se toma como tipo de comparacion de todas las de su especie.* Así, para medir pesos se usa un peso determinado que se llama gramo ú otro que se llama kilógramo, y antiguamente se empleaban exclusivamente pesos llamados arroba ó libra, etc.

5. MEDIR UNA CANTIDAD *es compararla con la unidad de su especie.* Así, medir una pieza de tela es comparar su longitud con la longitud de una parte determinada de la misma, tomada como unidad.

6. NÚMERO *es el resultado de comparar la cantidad con la unidad.* Así, las veces que la longitud de la tela, tomada como unidad, en el anterior ejemplo, se halla contenida en la pieza de tela, será el número que mida ésta y en tal caso el NÚMERO *es una reunion ó pluralidad de unidades;* pero la longitud de tela puede no hallarse exactamente contenida en la pieza, y sí una parte de dicha longitud, en cuyo caso esta parte de la unidad será la nueva unidad que sirva de medida, pudiéndose decir entonces que: NÚMERO *es una reunion de unidades ó de partes de la unidad.*

7. *Se llama* NÚMERO FRACCIONARIO Ó QUEBRADO *una reunion de partes de la unidad.*

8. Los números se dividen en *abstractos* y *concretos.*

9. NÚMERO ABSTRACTO Ó ABSOLUTO *es el que simplemente designa una pluralidad sin expresar la especie de ésta.*

Ejemplo: siete.

10. NÚMERO CONCRETO *es el que designa la especie á que se refiere.*

Ejemplo: 9 kilógramos.

11. Los números concretos se dividen en *homogéneos* y *heterogéneos.*

12. NÚMEROS HOMOGÉNEOS son los que se refieren á una misma unidad y HETEROGÉNEOS los que se refieren á unidades diferentes.

Ejemplos: 6 litros, 11 litros, son homogéneos; 9 litros y 8 kilógramos son heterogéneos.

13. ARITMÉTICA *es la ciencia que trata de la generacion elemental de los números y de las propiedades que se refieren inmediatamente á dicha generacion.*

14. Los modos elementales de generacion de los números son: la *numeracion* que constituye el modo primitivo, pues que de él dependen todos los demás y las llamadas operaciones fundamentales: *adicion*, *multiplicacion* y *elevacion á potencias* con sus inversas respectivas *sustraccion*, *division* y *extraccion de raíces*.

La numeracion, juntamente con las operaciones fundamentales, constituyen el cálculo de los números, de manera que: *la Aritmética práctica tiene por objeto el cálculo de los números*.

15. Además de la Aritmética, la Matemática comprende la Geometría que estudia la cantidad extensa y figurada y el Álgebra que incluye el estudio de dichas ramas en la superior generalidad de sus leyes y aun otras más superiores como son las diferentes especies de geometrías á saber: la *Geometría analítica*, la *descriptiva*, la *proyectiva*, el *cálculo infinitesimal*, etc.

CAPÍTULO II.

NUMERACION.

16. **Definicion.**—NUMERACION *es el modo de generacion y expresion de los números por medio de un número determinado de éstos que se consideran como elementos ó números elementales*.

17. La expresion de los números puede hacerse por medio del lenguaje oral ó del escrito, y por eso la numeracion se divide en *oral* ó *hablada* y *escrita*.

18. **Principio general de la numeracion.**—*Un número no es solo un conjunto de unidades simples ó iguales entre sí, sino que tambien puede concebirse como un conjunto de unidades de distintos órdenes, tales, que* CADA UNIDAD DE UN ÓRDEN CONTENGA UN NÚMERO DE VECES CONSTANTE Á LA DEL INMEDIATO INFERIOR.

19. **Definicion.**—*Se llama* BASE *de un sistema de numeracion el número de veces que una unidad de un órden contiene á la del inferior inmediato*, y el sistema recibe un nombre derivado del de la base.

20. **Generacion y expresion de los números.**— Todo número se engendra por la agregacion sucesiva de la unidad.

Los números elementales se expresan cada uno con un nombre y un signo ó guarismo particular. Así, la reunion de uno y uno se expresa con la palabra *dos* y con el guarismo 2, la reunion de dos y uno se llama *tres* y se expresa con el signo 3, la palabra *cuatro* y el guarismo 4 designan la reunion de tres y uno, de manera que la expresion oral y escrita de los números elementales es como sigue:

uno,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*,	*siete*,	*ocho*,	*nueve*,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

suponiendo que nos proponemos emplear nueve números elementales, pues si deseáramos emplear más, bastaría añadir las palabras y los guarismos correspondientes.

A la reunion del último número elemental nueve y de la unidad se llama *diez* que se considera, no como *diez unidades* sino como *una sola unidad diez veces mayor que la unidad absoluta ó simple*, y es la unidad de *segundo órden* que se escribe así 10, empleando el signo 0, llamado *cero* que no tiene ningun valor, para hacer que las cifras ocupen el lugar expresado por su órden.

Tomando, pues, esta agrupacion de unidades simples como una nueva unidad, se engendrarán los números simples de segundo órden diciendo: una decena ó *diez*, dos decenas ó *veinte*, tres decenas ó *treinta*, de manera que la expresion oral y escrita de los números simples de segundo órden es como sigue:

diez, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*,
10, 20, 30, 40, 50, 60,

setenta, *ochenta*, *noventa*.
70, 80, 90.

Habiéndose contado todos los números simples de segundo órden, el siguiente obtenido agregando á nueve unidades de segundo órden otra tambien de segundo, recibirá un nuevo nombre, el de *centena*, *ciento* ó *unidad de tercer órden* que se escribe así, 100, ocupando el lugar de su órden; y repitiendo cuanto anteriormente se ha dicho respecto al segundo órden, se tendrá la expresión oral y escrita de los números simples de tercer órden.

ciento, *doscientos*, *trescientos*, *cuatrocientos*, *quinientos*,
100, 200, 300, 400, 500,

seiscientos....., *novecientos*.
600, 900.

Nueve unidades de tercer órden con una del mismo forman la *unidad de cuarto órden*, que se llama *mil* ó *millar* y se escribe así: 1.000, siendo la expresión de los números simples de cuarto órden, la siguiente:

mil, *dosmil*, *tresmil*, *cuatromil.....*, *nuevemil*.
1000, 2000, 3000 4000 9000.

De igual manera se formarán y expresarán los números simples de quinto y sexto órden que se llaman *decenas de millar* y *centenas de millar*, pasándose á la generacion de la unidad de séptimo órden que se llama *millon* y las siguientes: *decena de millon*, *centena de millon*, *millar de millon*, etc., hasta llegar al millon de millon que se llama *billon*, y así sucesivamente.

La agregacion sucesiva de la unidad hace pasar de un número elemental de decenas al siguiente por el intermedio de nueve números consecutivos. Así se tiene:

diez, *diez y uno*, *diez y dos*, *diez y tres*....., *diez y nueve*,
10, 11, 12, 13, 19,

debiéndose observar que en vez de diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, se dice por brevedad: *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, *quince*,

veinte, *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*....., *veintinueve*,
20, 21, 22, 23, 29,

....

noventa, *noventa y uno*, *noventa y dos*, *noventa y tres*,
90, 91, 92, 93,
noventa y nueve,
99;

formados y expresados todos los números consecutivos hasta ciento, será fácil formar y expresar los comprendidos entre cada dos números simples de centenas, y se tendrá:

ciento, *ciento uno*, *ciento dos*, *ciento tres*,
100, 101, 102, 103,
ciento noventa y nueve,
199,

doscientos, *doscientos uno*, *doscientos dos* , *doscientos tres*,
200, 201 202 203,
doscientos noventa y nueve,
299,

....

novecientos, *novecientos uno*, *novecientos dos*,
900, 901, 902,
novecientos tres....., *novecientos noventa y nueve*,
903 999.

Formados y expresados todos los números consecutivos hasta mil, podrán formarse y expresarse los números comprendidos entre cada dos números consecutivos de millares y lo mismo se dirá del millon, billon, etc.

Este análisis nos lleva á enunciar como consecuencia inmediata la siguiente

Regla.—*Para enunciar ó escribir un número compuesto cualquiera, se enuncian ó escriben sucesivamente las palabras ó guarismos que expresan los números simples de las unidades de sus diversos órdenes; si faltan unidades de algun órden, se expresará el lugar de éste con un cero.*

Ejemplos: El número 3749, se lee: tres mil setecientos cuarenta y nueve, el 504 se lee: quinientos cuatro.

Observacion.—Si en vez de emplear nueve signos ó diez, contando el cero, y la *ley décupla* de subordinacion entre las unidades de los órdenes consecutivos, se hubiera empleado otro número de signos y su ley correspondiente, el sistema se habría llamado *binario* ó *ternario*, ó *cuaternario* etc., segun el número de cifras empleadas, y bastaría repetir lo anteriormente dicho con alguna ligera modificacion de palabras.

Ejemplo: En el sistema cuaternario el número 3221 expresa unidades de distintos órdenes, cada una de las cuales contiene cuatro del inmediato inferior.

CAPÍTULO III.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

§ 1.º—Adicion.

21. **Definiciones.**—SUMA ó ADICION *es una operacion que tiene por objeto reunir las unidades de varios números en uno solo. Los números que se suman se llaman* SUMANDOS *y el resultado* SUMA. La operacion se indica con el signo + que se escribe entre los sumandos y se lee *más*.

La suma es una generalizacion de la numeracion y engendra los números por medio de pluralidades ó conjuntos de unidades ó números formados ya por la numeracion, y se efectúa agregando al primer sumando sucesivamente las unidades del segundo, al resultado sucesivamente las unidades del tercero, y así se continúa hasta agregar las unidades del último.

La suma posee, pues, las propiedades siguientes:

22. **Propiedad asociativa.**—*Una suma no altera cualquiera que sea el modo de agrupacion de los sumandos sin alterar su órden.* Sea, en efecto, la suma $3+5+2+4$.

Considerando los tres primeros sumandos, se tendrá

$$3+5+2=(3+5)+2=3+(5+2),$$

pues agregar 5 al 3 y al resultado 2 es pasar, á partir del 3, 5 lugares en la escala de la pluralidad, y á partir del resultado, 2 lugares más. Para llegar, por consiguiente, á la pluralidad total ó suma faltarán al 3 5 lugares más que al $3+5$, como indica la relacion anterior.

Dicha relacion se convertirá en la siguiente, para 4 lugares más en la escala de la pluralidad:

$$3+5+2+4=(3+5+2)+4=(3+5)+(2+4)=$$
$$=3+(5+2+4)=3+(5+2)+4,$$

expresion que extendida á cualquier número de sumandos puede traducirse en el enunciado siguiente:

Todo sumando, agregado ó quitado al PRINCIPIO DE UN GRUPO, *disminuirá ó aumentará el número de sus unidades* AL CONJUNTO DE GRUPOS ANTERIORES, *para que la suma sea constante.*

Todo sumando aumentado ó disminuido al FIN DE UN GRUPO, *disminuirá ó aumentará el número de sus unidades al* CONJUNTO DE GRUPOS POSTERIORES, *para que la suma sea constante.*

La propiedad asociativa puede expresarse tambien en el siguiente

Teorema.—*Si en una suma que no altera, uno de los sumandos aumenta ó disminuye, el conjunto de los demás ha de disminuir ó aumentar en el mismo número de unidades.*

23. **Propiedad conmutativa.**—*Una suma no altera cualquiera que sea el órden de los sumandos.*

Si se trata de dos sumandos, se tiene evidentemente, por ejemplo,

$$3+5=5+3$$

pues, en virtud de la propiedad asociativa

$$3+5=3+(2+3)=(3+2)+3=5+3,$$

porque si el mayor sumando que forma un grupo se convierte en el menor que forma el otro grupo, disminuyendo; el menor sumando se ha de convertir en el mayor aumentando lo que éste disminuyera.

Tambien puede decirse que al mismo grado de la pluralidad se llega contando la série de unidades

$$(1+1+1)+(1+1+1+1+1)$$

principiando por la derecha que por la izquierda, y el teorema queda demostrado más sencillamente.

Sea ahora la suma $2+3+4+5$. Se tiene, en virtud de lo que se acaba de decir, y de la propiedad asociativa

$$\begin{aligned}2+3+4+5&=(2+3)+(4+5)=(2+3)+(5+4)=\\&=(2+3+5)+4=[(2+3)+5]+4=[5+(2+3)]+4=\\&=(5+2+3)+4=5+2+3+4.\end{aligned}$$

De manera que el sumando 5 y cualquiera, por consiguiente, puede ocupar un lugar cualquiera.

En estas propiedades de la suma se funda la siguiente

Regla.—*Para sumar números de varias cifras, se su-*

man todas las cifras de cada uno de los órdenes diversos, principiando por las de órden inferior, y se escriben las unidades agregando las unidades de órden superior sobrantes á la suma de las de órden inmediato. Los números dígitos, que son los sumandos de cada órden, se suman de memoria.

Ejemplos: 1.º Sumar, en el sistema decimal, 4328, 6549 y 3268.

$$\begin{array}{r} 4328 \\ 6549 \\ 3268 \\ \hline 14145 \end{array}$$

Para efectuar la operacion, se procede diciendo: 8 y 9 son 17, 17 y 8 son 25, escribo cinco unidades y sobran 2 decenas: 2 y 2 son 4; 4 y 6 son 10, etc. .

2.º Sumar, en el sistema de base 7, los números 4654, 3256 y 6265

$$\begin{array}{r} 4654 \\ 3256 \\ 6265 \\ \hline 20541 \end{array}$$

Teniendo presente que cada unidad de un órden contiene 7 del inmediato inferior, se dirá: 4 y 6 son 10 (1); 10 y 5 son 15, es decir, 2 sietes ó unidades de segundo órden y una unidad de primero que se escribe; 2 que sobran y 5 son 7, 7 y 5 son 12, 12 y 6 son 18, es decir, dos sietes de segundo órden ó dos unidades de tercero y cuatro de segundo, etc.

24. **Definicion.**—PRUEBA *de una operacion es otra*

(1) El sistema decimal, que es el adoptado, sirve de base para contar en cualquier sistema.

operacion que se efectúa para cerciorarse de la exactitud de la primera.—En la adicion se reduce á efectuarla inversamente, es decir, de abajo á arriba, ó en otro órden cualquiera, siempre que no se omita ni repita ningun sumando.

§ 2.º—Sustraccion.

25. **Definiciones.**—RESTA ó SUSTRACCION *es una operacion que tiene por objeto hallar la diferencia que existe entre dos números. El número que se resta se llama* SUSTRAENDO, *aquél del cual se resta* MINUENDO *y el resultado,* RESTO, EXCESO ó DIFERENCIA. La operacion se indica con el signo — que se lee *menos.*

La sustraccion es un modo de generacion de los números análogo á la suma, pero en sentido inverso, pues se propone engendrar números inferiores al minuendo en virtud de la oposicion de la afeccion de las unidades del sustraendo, respecto á las del minuendo, que puede enunciarse en el siguiente:

26. **Principio fundamental.**—*Cada unidad del minuendo ó sustraendo tiene una afeccion contraria á cada unidad del sustraendo ó minuendo*, es decir, *cada unidad de uno de los datos tiende á disminuir en su valor al otro.*

Desarrollos de este principio son las propiedades siguientes:

27. **Propiedad asociativa del sustraendo.**—*Una diferencia no altera, cualquiera que sea el modo de agrupacion de las sustracciones entre las partes del minuendo y las partes del sustraendo, sin alterar el órden de unas y otras.* En efecto, evidentemente se tiene

$$20-(3+4+2)=(20-3)-(4+2)=(20-3-4)-$$
$$-2=20-3-4-2,$$

pues, si una parte del sustraendo se resta del minuendo, eso menos faltará que restarle para obtener el resto.

Estas relaciones pueden expresarse diciendo que: *si aumenta ó disminuye uno de los datos de la sustraccion ha de aumentar ó disminuir en el mismo número el otro para que el resto no altere,* segun se observa pasando de un miembro al siguiente ó de éste á aquél.

Corolarios.—*Si al minuendo se aumenta ó disminuye en un número, el resto aumenta ó disminuye en el mismo. Si al sustraendo se aumenta ó disminuye en un número, el resto disminuye ó aumenta en el mismo.*

Propiedad asociativa del minuendo.—El principio fundamental permite tambien descomponer el minuendo en tantas partes como tiene el sustraendo, respectivamente mayores á las de éste, pudiendo haber algunas iguales y restarlas, resultando, por ejemplo:

$$20-(3+4+2)=(5+7+8)-(3+4+2)=$$
$$=(5-3)+(7-4)+(8-2),$$

relacion que puede expresarse en el siguiente

Teorema.—*La diferencia de dos números es igual á la suma de las diferencias entre las diversas partes del sustraendo é igual número de partes del minuendo, no menores ninguna de éstas á aquéllas que les son correspondientes.*

Ejemplo: $874-543=(800+70+4)-(500+40+3)=$
$$=(800-500)+(70-40)+(4-3).$$

Podrá, pues, de igual manera, enunciarse, como equivalente, la siguiente

Regla.—*Para restar números enteros, se restan las unidades de los diferentes órdenes del sustraendo de las correspondientes del minuendo, principiando por las de órden inferior con objeto de que, si en alguna sustraccion parcial el sustraendo es mayor que el minuendo, se agreguen á éste diez unidades de su órden*, ó en general, *para* *cualquier sistema de numeracion, tantas unidades como contiene las de un órden superior á la del inferior inmediato, y dicha unidad se suprimirá al minuendo parcial siguiente ó se aumentará á su sustraendo, para que el resto no altere. La diferencia de dos números dígitos debe saberse de memoria.*

Ejemplos:

8974		6473	
5632	(sistema decimal)	4236	(sistema de base 8).
3342		2235	

En el primero se dirá: de 2 á 4, 2; de 3 á 7, 4, etc. En el segundo, de 6 á 3 no puede ser, pero añadiendo 8 unidades que tiene una de segundo órden son 11, menos 6 son 5, de 3 á 6 ó de 4 á 7 van 3, etc.

27. **Prueba.**—*Para que la sustraccion esté bien hecha, el sustraendo, sumado con el resto, ha de dar el minuendo.*

§ 3.º—Multiplicacion.

28. **Definiciones.**—MULTIPLICAR *un número entero por otro es hacer tantas veces mayor el primero como unidades tiene el segundo, ó formar un tercer número con el multiplicando de igual manera que el multiplicador lo está con la unidad. El número que se multiplica se llama* MULTIPLICANDO, *aquél por el cual se multiplica,* MULTIPLICADOR, *y el resultado* PRODUCTO.

La multiplicacion se expresa con el signo $\times$ ó . que se escribe entre el multiplicando y multiplicador y se lee *multiplicado por*.

El multiplicando y el multiplicador se llaman *factores del producto.*

29. Segun la definicion, multiplicar 7 por 5 es formar el producto con 7 como el 5 resulta formado con la unidad,

De manera que si

$5=1+1+1+1+1$, el producto es$=7+7+7+7+7=35$.

La multiplicacion de números enteros es, pues, el caso de la suma en que los sumandos son iguales, y engendra los números por agregaciones sucesivas de una misma pluralidad ó multiplicando, como la numeracion, los engendra por la agregacion de unidades. Es un procedimiento más rápido de generacion.

30. **Propiedades.**—La multiplicacion posee las propiedades siguientes:

1.ª *El producto de cero por cualquier número ó de cualquier número por cero es cero.*

2.ª PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.—*El producto de un número por otro* (1) *es igual á la suma de los productos de cada sumando ó parte del multiplicando por cada uno de los sumandos ó partes del multiplicador.*

En efecto, siendo, por ejemplo,

$$1\times9=1+1+1+1+1+1+1+1+1=(1+1)+$$
$$+(1+1+1+1)+(1+1+1)=2+4+3,$$

análogamente se tendrá

$$8\times9=8+8+8+8+8+8+8+8+8=(8+8)+$$
$$+(8+8+8+8)+(8+8+8)=8.2+8.4+8.3.$$

es decir, que

$$8\times(2+4+3)=8.2+8.4+8.3.$$

Siendo, á su vez, por ejemplo, $8=1+4+3$, se tendrá

$$8.2=(1+4+3)\times2=(1+4+3)+(1+4+3)=$$
$$=1+1+4+4+3+3=1.2+4.2+3.2,$$

---

(1) Se entiende, que en esta primera parte, sólo se trata de números enteros.

y continuando así, resultará

$$(1+4+3)\times(2+5+6)=(1+4+3)\times 2+(1+4+3)\times 5+$$
$$+(1+4+3)\times 6=1.2+4.2+3.2+1.5+4.5+3.5+$$
$$+1.6+4.6+3.6.$$

De la propiedad distributiva resulta como corolario la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, basta multiplicar sucesivamente las unidades de cada órden del multiplicando por la cifra del multiplicador, principiando por las de órden inferior, y se suman los productos parciales, para lo cual basta escribir las unidades simplès de cada uno de éstos, reservando las unidades de órdenes superiores para agregarlas á la multiplicacion parcial siguiente. Los productos de los números dígitos deben saberse de memoria.*

Ejemplo: Multiplicar 8569 por 7

$$\begin{array}{r} 8569 \\ \times 7 \\ \hline 59983 \end{array}$$

Para efectuar dicha multiplicacion, se dice: 9 por 7 son 63, escribo 3 y llevo 6; 6 por 7 son 42 y 6, 48, escribo 8 y van 4, etc. En efecto

$$8569\times 7=(8000+500+60+9)\times 7=8000.7+500.7+$$
$$+60.7+9.7,$$

y el producto de 8 millares por 7 es 56 millares, así como el de 5 centenas por 7 es 35 centenas, etc., es decir, que: *el producto de una cifra seguida de ceros por una cifra será el producto de dichas cifras seguido de tantos ceros como siguen á la del multiplicando.*

Definicion.—*Producto de varios factores es el resul-*

tado que se obtiene multiplicando el primero por el segundo, el producto obtenido por el tercero, y así sucesivamente.

3.ª PROPIEDAD CONMUTATIVA.—*Un producto de varios factores no altera, cualquiera que sea el órden de la colocacion de éstos.*

Sea el producto de dos factores 4×3; se tiene

$$4=1+1+1+1 \text{ y multiplicando por } 3,\ 4\times3= \\ =3+3+3+3=3\times4.$$

Sea ahora el producto 5.7.3.4.2.6 de varios factores. Vamos á demostrar que un factor cualquiera, el 4 por ejemplo, puede permutarse con el que le precede ó con el que le sigue, sin alterar el producto. En efecto, siendo 3 el factor que le precede, se tiene

$$5.7.3=5.7+5.7+5.7$$

y, multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 4,

$$5.7.3.4=5.7.4+5.7.4+5.7.4=5.7.4.3;$$

multiplicando, en fin, por los factores que siguen, resultará

$$5.7.3.4.2=5.7.4.3.2,\ 5.7.3.4.2.6=5.7.4.3.2.6.$$

Se permutará el 4 con el factor que le sigue, escribiendo

$$5.7.3.4=5.7.3+5.7.3+5.7.3+5.7.3,$$

y, multiplicando por 2,

$$5.7\ 3.4.2=5.7.3.2+5.7.3.2+5.7.3.2+5.7.3.2= \\ =5.7.3.2.4,$$

y, en fin,

$$5.7.3.4.2.6=5.7.3.2.4.6.$$

Cualquier factor, pues, por una série de permutaciones con el que le precede ó el que le sigue, podrá colocarse en el lugar que se desee.

4.ª PROPIEDAD ASOCIATIVA.—*Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, el producto quedará multiplicado por el mismo.*

Un producto de varios factores no altera, aunque se sustituyan varios de éstos por su producto, ó aunque alguno de ellos se descomponga en sus factores.

Un producto de varios productos no altera, aunque los factores de unos pasen á los otros ó formen nuevos factores.

En efecto: 1.º Para multiplicar $2.7.5$ por 3, basta multiplicar por 3 cualquiera de sus factores, es decir, que

$$2.7.5\times3=6.7.5=2.21.5=2.7.15$$

pues

$$6.7.5=2.3.7.5=2.7.5\times3;\ 2.21.5=21.2.5=$$
$$=3.7.2.5=2.7.5\times3, \text{ etc.}$$

2.º Se tiene

$$3.5.7.4.2=(7.4)\times3.5.2=7.4.3.5.2=5.7.2.5.4=$$
$$=(5.7.2)\times5.4.$$

3.º Se tiene, inversamente, que

$$6.5\times(3.4.2)\times9=(3.4.2)\times6.5.9=3.4.2.6.5.9.$$

4.º $(2.3.4)\times(5.7)\times(8.6)=2.3.4\times(5.7)\times(8.6)=$
$$=(5.7)\times(2.3.4)\times(8.6)=5.7.2.3.4\times(8.6)=(8.6)\times$$
$$\times(5.7.2.3.4)=8.6.5.7.2.3.4.$$

Observacion.—El mecanismo de las demostraciones anteriores se reduce á hacer pasar al primer lugar el producto que se va á descomponer ó los factores que se van á convertir en un producto.

Corolarios.—1.º *Para multiplicar un número por un producto indicado, basta multiplicarlo sucesivamente por cada uno de los factores.*

Ejemplo: $9 \times (2.3.4) = 9.2.3.4$, pues, $9 \times (2.3.4) =$
$= (2.3.4.) \times 9$, etc.

2.º *Para multiplicar dos cifras significativas seguidas de ceros, se multiplican dichas cifras, y al producto se le añaden tantos ceros como hay en el multiplicando y multiplicador.*

En efecto

$$8000 \times 700 = 8.1000 \times 7.100 = 8.7.1000.100 =$$
$$8.7.10000 = 56 \text{ centenas de millar.}$$

En las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa se funda la siguiente

Regla general.—*Para multiplicar dos números de varias cifras, colóquese el multiplicador debajo del multiplicando; multiplíquese todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, principiando por las de órden inferior, de manera que se harán tantas multiplicaciones parciales como cifras haya en éste, y se escribirá cada producto parcial de manera que sus unidades se hallen debajo de la cifra del multiplicador que las ha producido, para efectuar en seguida la suma de todos ellos.*

En efecto

$$8749 \times 358 = 8749 \times (300 + 50 + 8) =$$
$$= 8749.300 + 8749.50 + \text{etc.},$$

y se tendrá

$$\begin{array}{r} 8749 \\ \times 358 \\ \hline 69992 \\ 43745 \\ 26247 \\ \hline 3132142 \end{array}$$

diciéndose: 8 por 9 son 72, escribo 2 y llevo 7; 4 por 8 son 32 y 7, 39, etc.

Ejemplo 2.º: Multiplicar, en el sistema de base 7, los números 546 y 54.

$$\begin{array}{r} 546 \\ \times 54 \\ \hline 3153 \\ 4032 \\ \hline 43503 \end{array}$$

Se dirá: 6 por 4 son $24=3.7+3$ ó 3 unidades de segundo órden y 3 de primero, que se escriben; 4 por 4 son 16, y 3, $19=2.7+5$ ó 2 unidades de tercer órden y 2 de segundo que se escriben, etc.

31. **Prueba.**—*Para probar si una multiplicacion está bien hecha, tómese el multiplicando por multiplicador y éste por aquél*, y *el nuevo producto ha de ser igual al primero.*

§ 4.º—Division.

32. **Definiciones.**—*Dividir un número por otro tambien entero, es hallar las veces ó el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor. El número que se divide se llama* DIVIDENDO, *aquél por el cual se divide*, DIVISOR *y el resultado* COCIENTE. *Si el dividendo contiene exactamente al divisor*, *la division es* EXACTA *é* INEXACTA *en el caso contrario.*

La division se indica con el signo: que se escribe entre el dividendo y el divisor, y se lee *dividido por.*

Segun la definicion, dividir, por ejemplo, 20 por 4 es averiguar las veces que el divisor se puede quitar ó restar del dividendo. Así

$20-4=16$; $16-4=12$; $12-4=8$; $8-4=4$; $4-4=0$.

Sean 23: 6, se tendrá

$23-6=17$; $17-6=11$; $11-6=5$.

En el primer caso el cociente es 6, en el segundo es 3 y sobran 5 unidades; de esto resulta que: *En la division inexacta el cociente, que se llama* COCIENTE ENTERO, *indica el mayor número de veces que el divisor está contenido en el dividendo. La diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero se llama resíduo.* Esta es la

Relacion fundamental.—Dividendo=divisor×cociente entero+resíduo.

La division de números enteros puede considerarse como una sustraccion abreviada. Es una sustraccion sucesiva de sustraendos iguales.

33. **Propiedad distributiva respecto al dividendo.**—*El cociente de un número por otro es igual á la suma de los cocientes parciales de cada parte ó sumando del dividendo por todo el divisor, más el cociente de la suma de los restos.*

En efecto, el divisor estará contenido en el dividendo tantas veces como agrupaciones iguales al divisor puedan formarse con las unidades contenidas en el dividendo. Así

$$8756 : 4 = 8000 : 4 + 700 : 4 + 50 : 4 + 6 : 4 = 2000 + 175 + \\ + 12 + 1 + (2+2) : 4.$$

Observacion.—Por este teorema se ve que la division no es generalmente distributiva y sólo lo es, únicamente respecto al dividendo, cuando cada sumando ó parte del dividendo es exactamente divisible por el divisor. En este caso se verifica la relacion

$$(a+b+c+d) : n = a : n + b : n + c : n + d : n$$

expresando las letras a, b, c, d números divisibles por el número representado por n.

34. A la propiedad distributiva se refiere la siguiente

Regla.—*Para dividir un número de varias cifras por otro entero cualquiera, se toman en el dividendo, á contar desde la izquierda, el menor número de cifras suficientes* *para formar un número mayor ó, por lo ménos, igual al divisor, y se tendrá el primer dividendo parcial que dividido por el divisor dará las unidades de órden superior del cociente; se resta del dividendo el producto de estas unidades por el divisor. A la derecha del resto se baja la cifra del dividendo que sigue al primer dividendo parcial tomado, y se formará así el segundo dividendo, que dividido por el divisor dará la segunda cifra del cociente, ésta se multiplica por el divisor, y el producto se resta del segundo dividendo parcial. Y del mismo modo se continuará hasta haber dividido el último dividendo parcial que contendrá las unidades del total.*

Sea, en efecto, dividir 30759 por 94.

Se dirá: 3 decenas de millar divididas por 94 no pueden dar decenas de millar en el cociente, ni 30 millares divididos por 94 pueden dar millares; pero 307 centenas divididas por 94 pueden dar centenas, que no podrán llegar á diez, pues entonces habría millares en el cociente contra lo que acaba de verse. Multiplicando el 94 sucesivamente por 1, 2, 3, etc., se ve que el mayor número de veces que puede restarse el divisor del dividendo parcial es 3 centenas y sobran 25 centenas que con las 5 decenas forman el segundo dividendo parcial 255 decenas, el cual dividido por 94 dará las decenas del cociente, etc. La operación se ejecuta en la forma que sigue:

30759	94
282	327
255	
188	
679	
658	
21	

Las distribuciones sucesivas hechas entre las partes del dividendo, se expresan como sigue:

$$30759=30700+59=28200+2550+9=28200+1880+$$
$$+679=28200+1880+658+21$$

y $$30759:94=28200:94+1880:94+658:94+21:94=$$
$$=300+20+7+21:94.$$

Observacion.—En vez de escribirse los productos de cada cifra del cociente por el divisor para restarlos del dividendo parcial correspondiente, pueden hacerse, para brevedad, simultáneamente ambas operaciones, diciendo 3 por 4 son 12 al 17 van 5, 3 por 9 son 27 y 1, 28 al 30 van 2, etc.

Ejemplo: Dividir 3546 por 24, en el sistema de base 7:

$$\begin{array}{r|l} 3546 & 24 \\ \cline{2-2} 114 & 132 \\ 66 & \\ 15 & \end{array}$$

Se dirá: dividir 35 unidades de tercer órden por 24 de primero, en el sistema de base 7, equivale á dividir $3.7+5=$ $=$veintiseis de tercero por $2.7+4=$diez y ocho de primero en el sistema decimal. El cociente es 1 y el resto ocho, en el sistema decimal$=7+1=11$ en el sistema de base 7.

Dividir 114 por 24 en el sistema de base 7 equivale á dividir $(7+1)\times 7+4=60$ por $2.7+4=18$ en el sistema de base 10, obteniéndose 3 unidades de segundo órden en el cociente y el resto 6.

En fin, $66_7:24_7=48_{10}:18_{10}$, obteniéndose 2 por cociente y por resíduo $12_{10}=7+5=15_7$, indicándose con un subíndice el sistema en que se halla tomado cada número.

35. **Definicion.**—*Si la division de un número por otro*

es exacta ó no deja resíduo, la relacion fundamental (32) se reduce á

$$\textit{dividendo} = \textit{divisor} \times \textit{cociente}$$

y entonces se dice que el primero es DIVISIBLE *por el segundo ó* MÚLTIPLO *de éste que á su vez se llama* DIVISOR, SUBMÚLTIPLO *ó* PARTE ALÍCUOTA *del primero*. También se dirá, segun la relacion anterior, que: *un número es* DIVISIBLE *por otro ó* MÚLTIPLO *de este otro, cuando es igual al producto de multiplicarle por un número entero.*

36. Además de la regla de la division, se deducen de la propiedad distributiva los siguientes

Corolarios. 1.º *Si un número divide exactamente á otros varios, divide tambien á su suma*, pues siendo, por hipótesis,

$$a:n = \text{núm.º ent.º},\ b:n = \text{núm.º ent.º},\ c:n = \\ = \text{núm.º ent.º},\ d:n = \text{núm.º ent.º},$$

el primer miembro de la relacion

$$(a+b+c+d):n = a:n + b:n + c:n + d:n \text{ (1)}$$

será la suma de varios números enteros, ó un número tambien entero, es decir,

$$(a+b+c+d):n = \text{núm.º ent.º},$$

y, por consiguiente, $a+b+c+d$ es divisible por n.

2.º *Si un número divide á otro, divide á sus múltiplos*, pues si $a:n =$ núm.º ent.º, sé tendrá

$$(a+a+a+\ldots\ldots):n = a:n + a:n + \ldots\ldots = \text{núm.º ent.º}$$

3.º *Si un número divide exactamente á una suma de*

(1) Es conveniente sustituir en los razonamientos los números por letras que pasan á ser símbolos generales de los mismos, es decir, números cualesquiera sometidos á las condiciones de los enunciados. Así se evita el error que resultaría de creer los razonamientos sólo aplicables á los números que se emplean como ejemplos.

varios números y á todos ellos menos uno, dividirá tambien al otro, pues si

$$(a+b+c+d):n,\ a:n,\ b:n \text{ y } c:n$$

son números enteros, el sumando restante $d:n$ ha de ser tambien un número entero.

En particular: *Si un número divide á una suma de dos sumandos y á uno de éstos, divide al otro*, ó tambien en virtud del núm. 27, *si un número divide al minuendo y al sustraendo, divide al resto.*

4.º *Si un número divide al dividendo y al divisor de una division inexacta, divide al resto*, y recíprocamente: *si divide al divisor y al resto divide al dividendo.* Esto se deduce inmediatamente de los corolarios 1.º y 3.º aplicados á la relacion fundamental (32)

$$\textit{dividendo} = \textit{divisor} \times \textit{cociente} + \textit{resíduo}.$$

5.º De esta relacion se deduce

$$\textit{dividendo} \times \mathrm{n} = (\textit{divisor} \times \textit{cociente}) \times \mathrm{n} + \textit{resíduo} \times \mathrm{n}$$

$$\text{ó } \textit{dividendo} \times \mathrm{n} = (\textit{divisor} \times \mathrm{n}) \times \textit{cociente} + \textit{resíduo} \times \mathrm{n},$$

en virtud de la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicacion, es decir que : *si el dividendo y divisor de una division inexacta se multiplican por un número, el cociente entero no altera y el resíduo queda multiplicado por el mismo número.*

6.º *Si el dividendo y divisor de una division inexacta se dividen por uno de sus divisores comunes, cuando le tienen, el resíduo queda dividido por el mismo*, pues, segun el corolario 2.º dicho divisor ha de dividir al (*divisor* × n) × *cociente*, y segun el corolario 4.º tambien al resíduo, y se tendrá:

$$(\textit{divisor}:\mathrm{n}) \times \textit{cociente} + \textit{resíduo}:\mathrm{n} = (\textit{divisor} \times \textit{cociente} + \textit{resíduo}):\mathrm{n} = \textit{dividendo}:\mathrm{n}$$

$$\text{ó } \textit{dividendo}:\mathrm{n} = (\textit{divisor}:\mathrm{n}) \times \textit{cociente} + \textit{resíduo}:\mathrm{n},$$

en virtud de la propiedad distributiva de la division que tiene lugar en este caso, relacion cuyo enunciado es el siguiente: *Si se dividen el dividendo y divisor de una division inexacta por un número, el cociente entero no altera y y el resíduo queda dividido por el mismo.*

37. **Divisores comunes.**—Cuando el divisor no está contenido exactamente en el dividendo, podrá buscarse si hay algun otro número contenido exactamente en los dos, ó si tienen algun divisor comun. Entre los divisores comunes á dos números hay que considerar muy especialmente el mayor de todos ellos que se llama el *máximo comun divisor*, y con respecto á éste deberá enunciarse, como caso particular del corolario 4.º, el siguiente

Corolario 5.º—*El m. c. d. de dos números es igual al m. c. d. del menor y del resto de su division.*

Ejemplo: Siendo $68=12.5+8$; el m. c. d. de 68 y 12 es el mismo que el de 12 y 8.

38. Del corolario anterior resulta la siguiente

Regla.—*Para hallar el máximo comun divisor de dos números se divide el mayor por el menor, éste por el resíduo, este primer resíduo por el obtenido en la segunda division, y así sucesivamente hasta que se llegue á una division exacta. El resíduo de ésta será el m. c. d. buscado.*

Ejemplo: Sea hallar el m. c. d. de 250 y 78. La operacion se dispone como sigue:

	3	4	1	7
250	78	16	14	2
16	14	2	0	

Despues de dividir 250 por 78, se divide el divisor 78 por el resto 16, pues el m. c. d. de éstos es el mismo que el de 250 y 78; luégo se divide el 16 por el resto 14, y así sucesivamente; 2 es el m. c. d. buscado.

39. **Propiedad del máximo comun divisor.**—*Si dos números se multiplican ó dividen por otro, su* m. c. d. *queda multiplicaho ó dividido por el mismo.*

Esta proposicion es una consecuencia de los corolarios 5.º y 6.º y de la regla anterior.

40. **Prueba.**—*Para averiguar si una division está bien hecha, se multiplica el divisor por el cociente, y este producto sumado con el resto, que es cero cuando la division es exacta, ha de producir el dividendo.*

§ 5.º—Elevacion á potencias.

41. **Definiciones.**—*Elevar un número á una potencia es tomarlo sucesivamente varias veces por factor. El número que se eleva se llama* BASE, *el resultado* POTENCIA *y el número de veces que aquél se toma como factor,* EXPONENTE. La operacion se indica colocando el exponente á la derecha de la base, un poco más elevado, así: 5^4, y se lee *cinco elevado á cuatro.* Las potencias de segundo y tercer grado se denominan *cuadrado* y *cubo.*

Segun la definicion, la elevacion á potencias es una multiplicacion sucesiva de factores iguales. Así

$$7^5=7\times7\times7\times7\times7$$

42. **Propiedad distributiva.**—*La potencia de cierto grado de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de cada uno de los factores.* En efecto

$$(5.7.4)^3=(5.7.4)\times(5.7.4)\times(5.7.4)=$$
$$=5.5.5.7.7.7.4.4.4=5^3.7^3.4^3.$$

43. **Desarrollos de potencias de sumas.**—TEOREMA 1.º *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.* En efecto, se tiene

$$(5+7)^2=(5+7)\times(5+7)=(5+7)\times5+(5+7)\times7=$$
$$5.5+7.5+5.7+7.7;$$

pero $\quad 5.5=5^2,\ 7.5=5.7,\ 7.7=7^2;$

luego $\quad (5+7)^2=5^2+2.5.7+7^2;$

Corolario 1.°—*El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades es igual al cuadrado de las decenas más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

$$79^2=70^2+2.70.9+9^2.$$

Corolario 2.°—*La diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor más* 1, pues si los números son 47 y 48, se tiene

$$48^2-47^2=(47+1)^2-47^2=47^2+2.47+1-47^2=2.47+1.$$

Corolario 3.°—*La diferencia entre los cuadrados de dos decenas consecutivas es igual al duplo de la menor por* 10, *más el cuadrado de* 10.

Ejemplo: $80^2-70^2=70^2+2.70.10+10^2-70^2=$
$$=2.70.10+10^2.$$

Teorema II.—*El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.* En efecto, se tiene

$$(5+7)^3=(5+7)^2\times(5+7)=(5^2+2.5.7+7^2)\times(5+7)=$$
$$=(5^2+2.5\ 7+7^2)\times5+(5^2+2.5.7+7^2)\times7=5^3+2.5^2.7+$$
$$+7^2.5+5^2.7+2.5.7^2+7^3$$

pero $\quad 2.5^2.7+5^2.7=3.5^2.7$ y $5.7^2+2.5.7^2=3.5.7^2;$

luego $\quad (5+7)^3=5^3+3.5^2.7+3.5.7^2+7^3.$

Corolario 1.°—*El cubo de un número que consta de decenas y unidades es igual al cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, más el cubo de las unidades.*

$$86^3=(80+6)^3=80^3+3.80^2.6+3.80.6^2+6^3.$$

Corolario 2.°—*La diferencia entre los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más* 1, por ejemplo,

$$87^3-86^3=86^3+3.86^2+3.86+1-86^3=3.86^2+3.86+1.$$

Corolario 3.°—*La diferencia entre los cubos de dos decenas consecutivas es igual al triplo del cuadrado de la menor por* 10, *más el triplo de la menor por* 100, más 1000.

Ejemplo: $60^3-50^3=50^3+3.50^2.10+3.50.10^2+$
$+10^3-50^3=3.50^2.10+3.50.10^2+10^3.$

Teorema III.—*La cuarta potencia de la suma de dos números es igual á la cuarta potencia del primero, más cuatro veces la tercera potencia del primero por el segundo, más seis veces la segunda potencia del primero por la segunda potencia del segundo, más cuatro veces el primero por la tercera potencia del segundo, más la cuarta potencia del segundo.* En efecto, se tiene

$$(5+7)^4=(5+7)^3\times(5+7)=(5^3+3.5^2.7+3.5.7^2+7^3)\times$$
$$\times5+(5^3+3.5^2.7+3.5.7^2+7^3)\times7=5^4+3.5^3.7+$$
$$3.5^2.7^2+7^3.5+5^3.7+3.5^2.7^2+3.5.7^3+7^4;$$

pero $3.5^3.7+5^3.7=4.5^3.7,\ 3.5^2.7^2+3.5^2.7^2=$
$=6.5^2.7^2,\ 5.7^3+3.5.7^3=4.5.7^3;$

luego $(5+7)^4=5^4+4.5^3.7+6.5^2.7^2+4.5.7^3+7^4.$

Corolario.—*La cuarta potencia de un número que* *consta de decenas y unidades es igual á la cuarta potencia de las decenas, más* etc. Así

$$56^4=(50+6)^4=50^4+4.50^3.6+6.50^2.6^2+4.50.6^3+6^4.$$

Observacion.—Este procedimiento nos conduciría á seguir hallando los desarrollos de potencias de cualquier grado de sumas, no sólo de dos sumandos, sino de cualquier número de éstos haciendo para $5+7+4+6$, por ejemplo, el desarrollo de la suma de dos sumandos $(5+7+4)+6$; despues considerando $5+7+4$ como $(5+7)+4$, y así sucesivamente.

§ 6.º Raíces.

44. **Definiciones.**—*Se llama* RAÍZ CUADRADA *de un número, otro número que elevado al cuadrado produce el primero.*

Así, la raíz cuadrada de 36 es 6, porque $6^2=36$.

Los cuadrados de los diez primeros números, que deben saberse de memoria, son:

números	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
cuadrados	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Los primeros son las raíces cuadradas de los respectivos de la segunda línea, siendo éstos los únicos números, entre los cien primeros de la série entera, que tienen raíces exactas. Los demás números sólo tienen lo que se llama RAÍZ CUADRADA ENTERA, *que es la raíz exacta del mayor cuadrado contenido en el número dado.* Así, 7 es la raíz entera de 58 porque $7^2=49$ es el mayor cuadrado contenido en 58.

La raíz entera difiere de la verdadera en ménos de una unidad, pues, por ejemplo, la raíz de 58 está comprendida entre 5 y 6, raíces respectivas de los cuadrados consecutivos 49 y 64, entre los que se halla comprendido el 58.

Se llama RAÍZ CÚBICA *de un número, otro número que elevado al cubo produce el número dado.*

Así, la raíz cúbica de 64 es 4, porque $4^3=64$.

Los cubos de los diez primeros números, que conviene saber de memoria son:

números	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
cubos	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

Los primeros son las raíces enteras de los respectivos colocados en la segunda línea, siendo éstos los únicos números, entre los mil primeros de la série entera, que tienen raíces exactas. Los demás sólo tienen RAÍZ CÚBICA ENTERA, *que es la raíz exacta del mayor cubo contenido en el número propuesto.*

Así, 89 no tiene raíz exacta, y la raíz entera es 4.

Se llama RESÍDUO *la diferencia entre un número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera ó el cubo de su raíz cúbica entera*, etc.

La extraccion de raíces se indica con el signo $\sqrt{\ }$, entre cuyas ramas se coloca un número llamado *índice* que expresa el grado de la raíz, y debajo de dicho signo se coloca el número de que se va á extraer la raíz. Así $\sqrt[5]{29}$, $\sqrt[3]{54}$ expresan respectivamente, la raíz quinta de 29 y la raíz tercera ó cúbica de 54. Para la raíz cuadrada se escribe el radical sin índice alguno.

45. **Regla para extraer la raíz cuadrada.**—*Para extraer la raíz cuadrada de un número mayor que* 100, *despues de dividirlo con comas en secciones de á dos cifras, principiando por la derecha:* 1.° *Se extrae la raíz cuadrada exacta ó la raíz cuadrada entera de la primera seccion de la izquierda, y se tendrá la cifra de órden superior de la raíz buscada.* 2.° *Despues de bajar á la derecha del resto la seccion siguiente y de separar las unidades del número*

que resulta, se dividen sus decenas por el duplo de la cifra hallada, y el cociente será la segunda cifra ó un número mayor que ésta. 3.º *Para averiguarlo, se coloca el cociente á la derecha del divisor, y el número así formado se multiplica por dicho cociente; si el producto se puede restar del dividendo unido á la cifra separada, el cociente será la segunda cifra de la raíz; si no puede restarse, se rebajará á dicho cociente una unidad, repitiéndose la comprobacion hasta que la sustraccion sea posible.* 4.º *A la derecha del resto se bajará la tercera seccion, y se continuará, como anteriormente, hasta haber bajado la última seccion del número propuesto.*

Demostracion.—Esta se funda en que: Todo número mayor que 100 tiene una raíz cuadrada mayor que 10, y, por consiguiente compuesta de decenas y unidades, de manera que dicho número consta *del cuadrado de las decenas de la raíz, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, más el resíduo, si le hay*. Esto sentado, se demuestra cada parte de la regla como sigue:

1.º Representando por d el número de decenas y por u la cifra de las unidades de la raíz, se tiene (43 *cor.* 3.º)

$$[(d+1)0]^2 - d0^2 = 2.d0\times 10 + 10^2,$$

$$\textit{duplo de decenas} \times \textit{unidades} + (\textit{unidades})^2 =$$
$$= 2d0\times u + u^2 = \text{ó} < 2d0\times 9 + 9^2,$$

pues el mayor número posible de unidades es 9;

pero $$2d0\times 10 + 10^2 > 2d0\times 9 + 9^2;$$

luego las centenas que pueden provenir del duplo de decenas por unidades, etc. y hallarse sumadas, en las centenas del número propuesto, con las que provienen del cuadrado de decenas de la raíz, no pueden contribuir á hacer variar la raíz entera de las centenas; luego *extrayendo la raíz cuadrada entera de las centenas, se obtendrán las decenas de la raíz buscada.*

2.° Si se supone determinada la raíz cuadrada entera de las centenas, ó, segun acaba de verse, las decenas de la raíz buscada, en virtud del principio arriba sentado; *si se resta del número propuesto el cuadrado de las decenas de la raíz, el resto se compondrá de las demás partes*, á saber: DOBLE PRODUCTO DE DECENAS POR UNIDADES, CUADRADO DE UNIDADES Y RESÍDUO DE LA RAÍZ, es decir,

$$2d0 \times u + u^2 + r,$$

y como r puede tener por valor, desde 0, que es su mínimo, hasta $2du$ ó $2d0 + 2u$, que es su máximo; dicho resto tendrá alguno de los valores comprendidos

desde $2d0 \times u + u^2 + 0 = (2d0 + u)u$ hasta $2d0 \times u + u^2 + 2d0 + 2u = (2d0 + 2d0 + u + 2) \times u$,

ó dividiendo por $2d0$, se tendrán las expresiones

$$\frac{2d0+u}{2d0} \times u, \qquad \frac{2d0+2d0+u+2}{2d0} \times u,$$

cuyos cocientes enteros son: u, para la primera y mayor que u para la segunda: luego *dividiendo las decenas del resto por el duplo de las decenas de la raíz, el cociente será las unidades ó un número mayor que éstas.*

3.° *Para determinar la raíz cuadrada entera de las centenas, que arriba se supuso determinada, si éstas no llegan á* 100, es decir, *si el número propuesto no tiene más de cuatro cifras, se procederá como en el caso de los números menores que* 100; *si el número de centenas excede de* 100, *se considerará como unidades simples, á las que se continuará aplicando el razonamiento expuesto hasta llegar á un número cuyas centenas no lleguen á contener más de* *dos cifras*, es decir, *hasta considerar la primera seccion de la izquierda del número propuesto.*

Ejemplo: Sea extraer la raíz cuadrada de 119723. Segun acaba de verse, la cuestion se reduce desde luégo á extraer la raíz entera de las centenas 1197, consideradas como unidades, y este nuevo problema á extraer la de las 11 centenas, consideradas como unidades, y se dirá: la raíz entera de 11 es 3, primera cifra de la raíz; 3 elevado al cuadrado es 9, de 9 á 11 van 2, que son decenas de millar, con 97 centenas son 297 centenas; 29 dividido por $2.3=6$, son 4 de cociente entero; $64\times4=256$ puede restarse de 297; luego 4 es la segunda cifra de la raíz, etc. La operacion se ejecuta en la forma siguiente:

$\sqrt{11,97,13}$	345		
9			
29,7	6	64	
25 6	4	4	
		256	
411,3	68	686	685
342 5	6...5	6	5
68 8		4116	3425

El análisis de esta operacion puede hacerse como sigue:

$$119713=345^2+698=340^2+2.340.5+5^2+688$$

$$\begin{aligned} 340^2&=115600 \\ 2.340.5&=\ \ \ 3400 \\ 5^2&=\ \ \ \ \ \ 25 \\ 688&=\ \ \ \ \ 688 \end{aligned} \qquad 119713=\begin{cases}115600 \\ +4123=\begin{cases}3400 \\ 25 \\ 688\end{cases}\end{cases}$$

por el cual se vé que en las 411 decenas del resto 4113, además de $2.340.5=3400$ ó 340 decenas que provienen del duplo de decenas por las unidades, hay 68 decenas solamente del resíduo, que influyen para que el cociente sea 6 en vez de 5, que son las verdaderas unidades.

46. **Regla para extraer la raiz cúbica.**—*Para extraer la raiz cúbica de un número mayor que* 1000, *despues de dividirlo con comas en secciones de á tres cifras, principiando por la derecha:* 1.º *Se extrae la raiz cúbica exacta ó la raiz cúbica entera de la primera seccion de la izquierda, y se tendrá la cifra de órden superior de la raiz buscada:* 2.º *Despues de bajar á la derecha del resto la seccion siguiente, y de separar las dos primeras cifras de la derecha del número que resulta, se dividen sus centenas por el triplo del cuadrado de la cifra hallada, y el cociente será la segunda cifra ó un número mayor que ésta.* 3.º *Para averiguarlo, se forman aparte el triplo del cuadrado de la primera cifra por dicho cociente, el triplo de la primera cifra por el cuadrado del cociente y el cubo del cociente, y considerando la primera parte como centenas, la segunda como decenas y la tercera como unidades, se sumarán. Si la suma puede restarse del dividendo unido á las dos cifras que se separaron, dicho cociente será la segunda cifra de la raiz; si no puede restarse, se volverá á hacer la comprobacion, rebajando al cociente en una unidad, hasta que la sustraccion sea posible, en cuyo caso se habrá hallado la segunda cifra de la raiz. Y así se continuará para hallar la tercera*, etc.

Demostracion.—Esta se funda en que: Todo número mayor que 1000 tiene una raíz cúbica mayor que 10, y, por consiguiente, compuesta de decenas y unidades, de manera que dicho número consta del *cubo de las decenas de la raiz, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, más el residuo, si le hay*. Esto sentado, se demuestra cada parte de la regla como sigue:

1.º Representando por d el número de decenas y por u la cifra de las unidades de la raíz, se tiene

$$[(d+1)0]^3-d0^3=3d0^2\times10+3\,.d0\,.\,10^2+10^3,$$

triplo del cuadrado de decenas$\times$*unidades*+etc.$=3d0^2.u+$
$$+3d0.u^2+u^3= \text{ ó } <3d0^2.9+3d0.9^2+9^3,$$

pues la mayor cifra posible de las unidades es 9;

pero $\quad 3d0^2.10+3.d0.10^2+10^3>3d0^2.9+3.d0.9^2+9^3$

luego los millares que pueden provenir del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más etc. y hallarse sumadas, en los millares del número propuesto, con las que provienen del cubo de las decenas de la raíz, no pueden contribuir á hacer variar la raíz entera de los millares; luego *extrayendo la raíz cúbica entera de los millares, se obtendrán las decenas de la raíz buscada.*

2.º Si se supone determinada la raíz cúbica entera de los millares, ó, segun acaba de verse, las decenas de la raíz buscada; en virtud del principio arriba sentado: *si se resta del número propuesto el cubo de las decenas de la raíz, el resto se compondrá de las demás partes*, á saber: TRIPLO DEL CUADRADO DE LAS DECENAS POR LAS UNIDADES, etc. es decir,

$$3.d0^2.u+3\,d0.u^2+u^3+r,$$

y como r puede tener por valor, desde 0, que es su mínimo, hasta $3du^2+3du=3(d0^2+2d0+u^2)+3d0+3u$, que es su máximo; dicho resto tendrá alguno de los valores comprendidos

desde $\quad 3d0^2.u+3.d0.u^2+u^3$ hasta $3d0^2.u+3d0.u^2+$
$$+u^2+3d0^2+3.2d0+3u^2+3d0+3u,$$

ó, dividiendo por $3d0^2$, se tendrán las expresiones

$$\frac{3d0^2+3d0.u+u^2}{3d0^2} \qquad \frac{3d0^2.u+3d0.u^2+u^2+3d0^2+\text{etc.}}{3d0^2}$$

cuyos cocientes enteros son, u para la primera y mayor que u para la segunda; luego *dividiendo las centenas del* *resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente será las unidades ó un número mayor que éstas.*

3.º *Para determinar la raíz cúbica entera de los millares, que arriba se supuso determinada, si éstos no llegan á* 1000, es decir, *si el número propuesto no tiene más de seis cifras, se procederá como en el caso de los números menores que* 1000, *si el número de millares excede de* 1000, *se considerará como unidades simples á las que se continuará aplicando el razonamiento expuesto hasta llegar á un número cuyos millares no lleguen á contener más de tres cifras*, es decir, *hasta considerar la primera seccion de la izquierda del número propuesto.*

Ejemplo: Sea extraer la raíz cúbica de 195104, segun acaba de verse, la cuestion se reduce desde luego á extraer la raíz entera de los millares 195, considerados como unidades absolutas, que es 5. Elevando 5 al cubo resulta 125 que restado de 195 dá 70. Bajando el siguiente período, resulta 70104. Dividiendo las 701 centenas por $3.5^2=75$ se obtendrá 9 por cociente entero, que resultará ser mayor que la cifra buscada, practicando la comprobacion indicada en la regla.

La operacion se ejecuta en la forma siguiente:

$\sqrt[3]{195,104}$	57				
125					
701,04	75	$3.50^2.9$	67500	$3.50^2.7$	52500
601 93	9..8..7	$3.50.9^2$	12150	$3.50.7^2$	7350
99 11		9^3	723	7^3	343
					60193

SECCION SEGUNDA.

TEORÍA DEL NÚMERO ABSTRACTO.

LIBRO PRIMERO.

TEORÍA DEL NÚMERO-FACTOR.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES.

47. **Definiciones.**—*Un número es* PRIMO, SIMPLE *ó* ELEMENTAL *cuando no es divisible por ningun número inferior al mismo, excepto la unidad, que es el divisor ó elemento comun de todos los números abstractos.* En este caso tambien se dice que el número es PRIMO ABSOLUTO. *Un número es* COMPUESTO *cuando es divisible por alguno de los números inferiores al mismo, distinto de la unidad.*

Ejemplo: 7, que no es divisible por 6, 5, 4, etc., es un número primo. 8, divisible por 4 y 2, es compuesto.

Dos ó varios números son PRIMOS ENTRE SÍ *ó* PRIMOS RELATIVOS, *cuando su máximo comun divisor es* 1.

Varios números son primos relativos 2 á 2, 3 á 3.... n á n, *cuando, considerados* de 2 en 2, de 3 en 3, etc., *su máximo comun divisor es* 1.

Los números primos 2 á 2, lo son tambien 3 á 3, 4 á 4, etc.; los primos 3 á 3, lo son 4 á 4, etc.

Varios números son equimúltiplos, cuando admiten algun divisor comun mayor que 1.

Entre los múltiplos comunes de varios números se considera especialmente su MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO, *ó sea el menor de todos ellos, así como entre los divisores comunes el* MÁXIMO COMUN DIVISOR.

FORMA *de un número, es la expresion que indica su modo de generacion.* Este se reduce siempre á una combinacion de operaciones fundamentales.

Ejemplos: $3a+2$, $a.b.c$, son dos formas numéricas.

48. **Observacion.**—La teoría de los números, considerados como factores ó productos, se reduce al estudio de los elementos ó factores primos *comunes* ó *propios* que entran en su constitucion ó generacion. Lo comun es como un núcleo comun de la generación de varios números considerados simultáneamente, lo propio es lo distinto de cada uno con respecto á los demás, lo que caracteriza á cada uno ó constituye su naturaleza propia.

49. **Expresiones simbólicas de los razonamientos.**—Conviniendo, para la claridad y comprension sintética de los razonamientos matemáticos, el empleo del menor número posible de palabras, ó sustituir al lenguaje ordinario la forma schemática, es decir, simbólica, que brevemente condensa, ó reduce á lo esencial los razonamientos, emplearemos las siguientes notaciones abreviadas:

LA EXPRESION.	LÉASE.
$\overset{\cdot}{\overline{m}}$ $\overset{\cdot}{\overline{m.n}}$ $\overset{\cdot}{\overline{m\text{ y }n}}$......	múltiplo de m, de $m.n$, de m y n
$\stackrel{\perp}{=}$ $\dot{m}$.............	no es igual á múltiplo de m
$\overset{:}{\overline{m}}$ $\overset{:}{\overline{m.n}}$ $\overset{:}{\overline{m\text{ y }n}}$.......	divisor de m, de $m.n$, de m y n
$\stackrel{\perp}{=}$ $\overset{:}{m}$.............	no es igual á divisor de m
$D(a, b, c)$........	máximo comun divisor de a, b y c
$M(a, b, c)$........	mínimo comun múltiplo de a, b y c

$D(a, b, c) > 1$..... divisor comun de a, b y c; a, b y c son equimúltiplos.
$D(a, b, c) = 1$..... múltiplo comun de a, b y c; a, b y c son primos relativos.
$E(a:b)$........... cociente entero de $a:b$.
$n!$............... $1.2.3.4.5.....n$.

Además de estas expresiones abreviadas se emplean los signos $\perp$, $\not>$, $\not<$ que se leen respectivamente: *no es igual*, *no es mayor*, *no es menor*. Otros hay tambien que se darán á conocer en su respectivo lugar.

Observacion.—En la exposicion de la teoría de los números emplearemos alternativamente, segun convenga, el lenguaje ordinario y el razonamiento simbólico que llamaremos *schemático* ó *sintético*.

CAPÍTULO II.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE NÚMEROS PRIMOS.

50. **Teorema.**—*Si un número primo absoluto no divide á otro, los dos son primos relativos*, pues no teniendo el último por divisor al primero, no tendrá ya con él más factor comun que la unidad.

Demostracion schemática.

$$\textit{Hipótesis}\ldots\begin{cases} p = \dot{p} \\ 1 = \dot{p} \end{cases}, \; p \perp \dot{n}; \; (\textit{tésis}) \; D(n, p) = 1.$$

Corolario.—*Los números primos absolutos son primos relativos* 2 á 2, y por consiguiente, 3 á 3 etc., pues ninguno de dichos números divide á ninguno de los demás.

51. **Regla para la obtencion de los números primos.**—*Para obtener todos los números primos, hasta cierto límite, escríbanse todos los números hasta dicho límite; á partir del 2 váyanse tachando los números que*

distan entre sí dos lugares; á partir del primer número no tachado, 3, *váyanse tachando los números que distan entre sí tres lugares; á partir del primer número no tachado,* 5, *váyanse tachando los números que disten entre sí cinco lugares* etc. *Los números que resulten sin tachar serán números primos absolutos, y compuestos los tachados.*

Demostracion.—Los números tachados serán, respectivamente:

$$2+2, 2+2+2, \ldots\ \text{ó}\ \dot{2},\ 3+3,\ 3+3+3, \ldots\ \text{ó}\ \dot{3},$$
$$5+5,\ 5+5+5, \ldots\ \text{ó}\ \dot{5} \qquad (36\ \textit{cor.}\ 1.^{\circ})$$

y los no tachados serán de las formas siguientes:

$$\dot{2}+1,\ \cancel{\dot{3}+1},\ \dot{3}+2,\ \dot{5}+1,\ \dot{5}+2,\ \dot{5}+3,\ \dot{5}+4, \text{etc.},$$

es decir, los que no son múltiplos de 2, ni de 3, ni de 5, etc. (*contrario de* 36, *cor.* 3.º)

Luego los primeros son todos los compuestos, y los segundos todos los primos.

Aplicando la regla á los números comprendidos entre 1 y 40, se tiene:

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40

Observacion.—Los números de caractéres gruesos representan los no tachados.

52. **Regla para averiguar si un número es primo.**—*Divídase el número dado, sucesivamente, por los números primos* 2, 3, 5, *etc. Si se llega, sin obtener cociente exacto, á una division en que el cociente entero sea menor que el divisor tomado, el número será primo.*

En efecto, el cociente de cada division no puede ser mayor que el de la anterior, pues el divisor va aumentando; luego si no se llega á obtener cociente exacto, se llegará al caso de un cociente menor que el divisor, y entonces se sabrá que no puede llegarse á un cociente exacto; pues si se llegase, como el dividendo sería divisible por el cociente, sería divisible por un número menor que el último divisor tomado, lo cual se ha visto prácticamente que es imposible.

Ejemplo: Sea 47 el número dado. Se tiene:

$$47:2=23 \text{ (cociente entero)};\ 47:3=15 \text{ (coc. ent.)};$$
$$47:5=9 \text{ (coc. ent.)};\ 47:7=6 \text{ (coc. ent.)}$$

Es inútil continuar la operacion, pues 47 no es divisible por ningun número primo menor que 7, y con mayor razon que ningun compuesto (36, 2.º).

Demostracion schemática.

Hipótesis... $N<11^2$ y $N\perp 2$, $N\perp 3$, $N\perp 5$, $N\perp 7$, $N\perp 11$;

luego $N\perp\overline{2.N'}$, $N\perp\overline{3.N'}$, $N\perp\overline{5.N'}$, etc.

Tésis..... Se tendrá: $N\perp\overline{11+n}$

pues si $N=\overline{11+n}$ ó $=(\text{núm.}>11)\times C$,

sería $C<11$ (*hipótesis*), es decir, ó 2, ó 3, ó 5, etc., lo cual no puede ser.

53. **Caso de un sistema cualquiera de numeracion.**—La regla anterior que se ha aplicado á los números escritos en el sistema decimal, es aplicable á otro sistema cualquiera. Sea, por ejemplo, el de base 7.

El 1, el 2 y los números impares inferiores á 100 (1), escritos en el sistema de base 7, son:

1, 2, 3, 5, 10, **12**, 14, 16, **21**, 23, 25, **30**, 32, **34**, **36**, 41, 43, **45**, **50**, **52**, **54**, 56, 61, **63**, 65, **70**, **72**, 74, **76**, **81**, 83, 85, **90**, **92**, 94, **96**,

(1) Se suprimen desde luégo los pares, que son múltiplos de 2.

Los números marcados con caractéres gruesos son los múltiplos de 3, de 5, etc., que se hallan contando desde 3, de 3 en 3 lugares, desde 5, de 5 en 5, etc. Los otros números son los primos absolutos, idénticos á los obtenidos escritos en el sistema decimal, pues, en efecto,

$$10 <> 7,\ 14 <> 7+4=11,\ 16 <> 7+6=13,$$
$$23 <> 14+3=17, \text{ etc.}$$

54. **Teorema.**—*Todo número que no es primo* (1) *es divisible por un número primo.*

Demostracion.—Si el número N no es primo, será divisible por otro $N'>1$, y se tendrá:

$$N=\dot{N}'.$$

Si N' no es primo, será divisible por otro N'', y así sucesivamente; de manera que se tendrá:

$$N'=\dot{N}'', N''=\dot{N}''' \text{ etc., siendo } N''>1, N'''>1, \text{ etc.}$$

y como N', N'', N''', etc. van siendo cada vez menores, se llegará á un factor primo que llamaremos p y se tendrá:

$$N=\dot{p}.$$

Corolario 1.º—*Todo número que no es primo es un producto de números primos*, pues siendo

$$N=\dot{p}=p.C \text{ y } C=\dot{p}'\,C', \text{ y } C'=\dot{p}''.C'', \text{ etc.}$$

resultará: $N=p.p'.p''.....$

Corolario 2.º—*Dos ó más números equimúltiplos admiten siempre un divisor comun primo absoluto*, pues

Hipótesis... Si $N=\dot{D}$, $N'=\dot{D}$, $N''=\dot{D}$, etc. y $D=\dot{p}$.

Tésis..... Se tendrá (36, *cor.* 2.º) $N=\dot{p}$, $N'=\dot{p}$, $N''=\dot{p}$, etc.

(1) Cuando se diga simplemente que uno ó varios números son primos, se sobrentenderá que son absolutos.

CAPÍTULO III.

TEORÍA DE LOS FACTORES PROPIOS.

55. **Principio de la divisibilidad** (1).—*Todo número primo contenido exactamente en alguno de los factores, está contenido exactamente en su producto, y,* **recíprocamente**, *todo factor primo contenido exactamente en un producto de varios factores, está contenido en alguno de éstos.*

1.º **Demostracion.**—Siendo $n=a.b.c$ y $b=\dot{d}$, por ejemplo, se tendrá (36, *cor.* 2.º):

$$n=a.b.c=b.a.c=\dot{d}.a.c=\dot{d}.$$

2.º *(Caso de dos factores.)*

Hipótesis $a.b=\dot{d}$, $D(a \text{ y } d)=1.$

Tésis $d=\dot{b}.$

Demostracion.—La série de operaciones necesarias para hallar el m. c. d. de a y d podrá indicarse como sigue:

Relaciones auxiliares ó intermedias.....
$$\left\{\begin{array}{l} a = \dot{d} + r_1 \\ d = \dot{r}_1 + r_2 \\ r_1 = \dot{r}_2 + r_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2} = \dot{r}_{n-1} + r_n \end{array}\right. \qquad [1]$$

y multiplicando por b.
$$\left\{\begin{array}{l} a.b = \dot{d}.b + r_1 b \\ \dot{d}.b = \dot{r}_1.b + r_2 b \\ r_1.b = \dot{r}_2.b + r_3 b \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2}.b = \dot{r}_{n-1}.b + r_n b. \end{array}\right. \qquad [2]$$

---

(1) Este principio hace referencia á lo conteniente y lo contenido de los números, y por ésto pudiera llamarse *de lo conteniente y contenido.*

Si r_n es el máximo comun divisor se tendrá:

$$r_n=1, \text{ porque } D(a,\ b)=1 \ (\textit{hipótesis.})$$

Pero, en virtud de las relaciones [2] y del núm. 36, *cor.* 3.°, se tendrá

$$d=\overset{:}{\overline{b.r_1}},\ d=\overset{:}{\overline{b.r_2}},\ d=\overset{:}{\overline{b.r_3}},....$$

y, en fin, $d=\overset{:}{\overline{b.r_n}}=\overset{:}{\overline{b.1}}=\overset{:}{b}$ (*tésis demostrada.*)

3.° (*Caso de varios factores.*)

Demostracion.—Sea $n=a.b.c.d.$ Se dirá: $a.b.c.d$ se puede considerar como el producto de dos factores a y $b.c.d$; y, segun se acaba de demostrar, p dividirá á a ó á $b.c.d$; en el caso de dividir á $b.c.d=b\times cd$, producto de b por cd, tendrá que dividir á b ó á c,d, y, continuando, si es preciso, el razonamiento, resultará que p debe dividir á alguno de los factores.

Demostracion schemática.

Hipótesis $\quad p=\overset{:}{\overline{a.b.c.d}}$

Relaciones intermedias.. $\begin{cases} \text{si } p\overset{:}{\perp}a, \text{ será } D(a,p)=1\ (50); \text{ luego } p=\overset{:}{\overline{b.c.d}}; \\ \text{si } p\overset{:}{\perp}b, \text{ será } D(b,p)=1\ (50); \text{ luego } p=\overset{:}{\overline{c.d}}; \\ \text{si } p\overset{:}{\perp}c, \text{ será } D(c,p)=1\ (50); \text{ luego } p=\overset{:}{d}, \end{cases}$

(*tésis demostrada*); luego si $p\overset{:}{\perp}a$, ni $p\overset{:}{\perp}b$, etc., será $p=\overset{:}{d}$.

Corolario.— *Todo número primo contenido en otro, lo está en sus potencias, y* **recíprocamente:** *si está contenido en una potencia de un número, lo estará tambien en éste*, pues una potencia es el caso de un producto de varios factores iguales.

Corolarios. 1.° *Si un número primo* p *no divide á*

2.° **Recíproco.** *Si un número primo* p *no divide* *cada uno de los factores de un producto* a.b.c.d, *es decir, si es primo con cada uno de ellos* (50), *lo será con éste.*

Demostracion ad absurdum.

1.º (*Negacion de la tésis.*) Si p no fuese primo con el producto.

2.º (*Conclusion*) lo dividiría; luego dividiría á alguno de los factores (55 *recip.*), contra la hipótesis.

á un producto a.b.c.d, *es decir, si es primo con éste* (50), *lo será con cada uno de sus factores.*

Demostracion ad absurdum.

1.º (*Negacion de la tésis.*) Si p no fuese primo con todos los factores.

2.º (*Conclusion*) dividiría á alguno; luego dividiría al producto (55), contra la hipótesis.

Observacion.—Para demostrar *ad absurdum* ó por reduccion al absurdo, se supone falsa la tésis del teorema propuesto, y de esta hipótesis ha de resultar una conclusion contraria á la hipótesis de dicho teorema, ó un absurdo.

Corolarios.

1.º **Directo.** *Si dos números son primos relativos, sus potencias tambien lo serán*, pues siendo cada potencia un producto, todos los factores de cada uno serán primos con los del otro.

2.º **Recíproco.** *Si dos potencias son números primos relativos, lo serán sus números correspondientes*, pues siendo primos los productos, lo serán sus factores.

3.º *Si dos números compuestos ó productos, son primos relativos, sus factores primos tambien lo serán*, pues uno de dichos números será primo con los factores del otro (55, 2.º) y sus factores lo serán respecto á éstos. (55, 2.º)

Demostracion schemática.—Sean $n = a \cdot b \cdot c$, $n' = a' \cdot b' \cdot c'$.

Hipótesis. $D(n, n')=1$ ó $D(a.b.c, a'.b'.c')=1$

Luego... $\begin{cases} D(a.b.c, a')=1,\ D(a.b.c, b')=1,\ D(a.b.c.\ c')=1 \\ D(a, a'.b'.c')=1, D(b, a'.b'.c')=1, D(c, a'.b'.c')=1 \end{cases}$

Luego... $D(a, a')=1$, $D(a, b')=1$, $D(a, c')$ etc.

56. **Principio de la composicion de un número.** 1.º *Todo número compuesto* SÓLO *puede reducirse de una manera á un producto de factores primos*, es decir, *que no admite dos descomposiciones distintas en factores primos.*

2.º Sean $A.B.C$ y $E.F.G.H$ dos formas distintas de un número N como producto de factores, por lo general compuestos, y $a.b.c.d.....$ su forma como producto de factores primos que llamaremos *descomposicion elemental*, es decir,

$$N=A.B.C,\ N=E.F.G.H,\ N=a.b.c.d.....$$

Siendo a factor de N en la forma elemental, lo será de algun factor de las otras dos formas. Sea, por ejemplo, $A=a.A'$, $G=a.G'$; se tendrá:

$$N=a.A'.B.C;\ N=E.F.a.G'.H;\ N=a.b.c.d.....$$

y dividiendo por a (suponiendo $N'=N:a$), se tendrá:

$$N'=A'.B.C;\ N'=E.F.G'.H;\ N'=b.c.d.....$$

Si se repite lo dicho, para el factor b, se tendrá, por ejemplo:

$$N'=A'.B'.b.C';\ N'=E.F.G'.H'.b;\ N'=b.c.d.....,$$

y dividiendo por b',

$$N''=A'.B'.C;\ N''=E.F.G'.H';\ N=c.d.....$$

y así se continúa hasta haber considerado el último factor de la descomposicion elemental, en cuyo caso se habrán dividido sucesivamente las dos formas propuestas por todos los factores de la elemental, y reducídose las tres á la unidad.

Observaciones. 1.ª El principio de la única descomposicion de un número en factores no es más que una variante del principio de lo conteniente y contenido y así como de éste se ha pasado á aquél, inversamente, la única manera de composicion elemental de un número conduce á concluir la inclusion de cada factor primo en los factores del producto ó en éste.

2.ª El razonamiento empleado para establecer la única descomposicion elemental de un número no exige que sean a, b, etc. desiguales, así, pues, es aplicable sean todos ellos desiguales ó haya varios iguales entre sí.

3.ª Es evidente que la proposicion directa del principio de lo conteniente y contenido es cierta, sea el número supuesto primo ó no; pero la recíproca sólo es cierta para los números primos. Así, por ejemplo, el 20 divide al producto 60 de 10 por 6 y no divide á ninguno de éstos, pues en este caso los factores primos del 20 se hallan distribuidos entre los factores del 60.

Corolario 1.º—*Un número no puede ser divisible por otro, si no contiene todos los factores de éste y repetidos tantas veces, por lo ménos, como en él se hallen,* é inversamente: *un número no puede ser divisor de otro si contiene algun factor primo distinto de los de éste ó repetido mayor número de veces*, pues si un número N es divisible por otro A, al contener á éste como uno de sus factores, ha de contener todos sus factores primos, y se tendrá:

$$N=\dot{A}=(\overline{p.p'.p''.....}),$$

designando por p, p', p''..... los factores primos de A.

Inversamente, dicha igualdad no podrá verificarse si, por ejemplo, algun factor p de A no fuera factor de N, porque entónces un número admitiría dos descomposiciones distintas en factores primos.

Corolario 2.º—*Todo número* N *divisible por varios* a, b, c,..... *primos dos á dos, es divisible por su producto*, pues N ha de contener todos los factores primos distintos de sus factores.

Demostracion schemática.

Hipótesis... 1.° $N=\overline{a.b.c...}$ 2.° $D(a,b)=1, D(a,c)=1$, etc.

Relaciones intermedias...
$$\begin{cases} N=a.a'=\dot{b},\ D(a,b)=1 \text{ (hip.)}; \\ \text{luego } a'=\dot{b}=b.b'. \\ N=a.b.b'=\dot{c},\ D(a,b,c)=1 \text{ (hip.)}; \\ \text{luego } b'=\dot{c}=c.c'. \\ N=a.b.c.c'=\dot{d},\ D(a,b,c,d)=1 \text{ (hip.), etc.} \end{cases}$$

57. **Descomposicion de un número.**—*Para descomponer un número en sus factores primos, divídase por uno de los factores primos que lo divida; el cociente por el mismo, si todavía es divisor, ó por otro que lo divida, y así sucesivamente hasta llegar á un cociente que sea primo. El producto de éste por los diversos divisores correspondientes á las divisiones efectuadas será el número expresado por medio de sus factores primos.*

Ejemplo: Sea el número 360. Se dice:

$$360:2=180,\ 180:2=90,\ 90:2=45,\ 45:3=15,\ 15:3=5,$$

$$\text{luego } 360=180.2=90.2.2=45.2.2.2=15.3.2.2.2= \\ =5.3.3.2.2.2=5.3^2.2^3.$$

La operacion se acostumbra á efectuar bajo la forma siguiente:

360	2	1	2	4	8
180	2	3	6	12	24
90	2	9	18	36	72
45	3	5	10	20	40
15	3	15	30	60	120
5	5	45	90	180	360
1					

colocándose los divisores á la derecha de una raya vertical y los cocientes sucesivos á la izquierda.

58. **Divisores compuestos.**—*Para hallar todos los divisores compuestos de un número, se escribe en una línea la unidad y las diversas potencias del primer factor primo obtenidas en la descomposicion; se multiplican dichos números por la primera potencia del segundo factor, luégo por la segunda, si entra dos veces en la descomposicion, y así sucesivamente. Despues de multiplicar por las diversas potencias del segundo factor primo, se multiplicarán todos los números obtenidos por el tercer factor primo,* etc., ó de otro modo, *los términos del producto*

$$(1+a+a^2+\ \ldots a^m)\,(1+b+b^2+\ldots b^n)\,(1+c+c^2+\ldots c^p)$$

son TODOS LOS DIVISORES DEL NÚMERO

$$N=a^m\,.\,b^n\,.\,c^p$$

pues, segun la propiedad distributiva de la multiplicación, se ha de multiplicar cada sumando ó término de un factor por cada sumando ó término de los demás.

59. **Máxima potencia de un número primo contenida en el producto** $n!$—Esta cuestion se reduce al siguiente

Problema.—*Hallar el exponente de la máxima potencia de un número primo* p *contenida en el producto*

$$n!=1.2.3.\ \ldots n.$$

Resolucion.—1.° El producto

$$p.2p.3p\ldots E(n:p).p=1.2.3\ldots E(n:p)\times p^{E(n:p)}$$

contiene *todos* los factores del propuesto divisibles por p.

2.° El producto $1.2.3\ldots E[E(n:p):p].p^{E(n:p)}$ es igual á

$$1.2.3\ldots\ldots E[E(n:p):p].p^{E(n:p)}.p^{E[E(n:p):p]}$$

contiene todos los factores del último producto, y por consiguiente, del propuesto, divisibles por p, y así sucesivamente, de manera que la expresion de la máxima potencia buscada, será

$$p^{E(n:p)}\,p^{E[E(n:p):n]}\,.....=p^{E(n:p)+E[E(n:p):n]+\cdots}$$

Ejemplo: Sea hallar la mayor potencia de 2 contenida en el producto

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.$$

Para 17! será $2\times2.2\times2.3\times2.4\times2.5\times2.6\times2.7\times2.8=$
$=2^8.1.2.3.4.5.6.7.8$
para 8! será $2\times2.2\times2.3\times2.4=2^4.1.2.3.4$
para 4! será $2\times2.2 \qquad =2^2.1.2$
para 2! será $2 \qquad =2$;
luego la potencia buscada $=2^{1+2+4+8}$.

Corolario.—*Si se verifica la igualdad*

$$m=n+p+q+.....,$$

el producto m! *es divisible por el producto*

$$n!\times p!\times q!....$$

Demostracion.—Sea a un factor primo cualquiera de $n!\,p!\,q!....$ se tendrá

$$E(m:a)\gtreqless E(n:a)+E(p:a)+E(q:a)+.....$$

Dividiendo de nuevo por a estos cocientes se tendrá:

$$E[E(m:a):a]\gtreqless E[E(n:a):a)]+E[E(p:a):a]+$$
$$+E[E(q:a):a]+.....$$

Continuando así hasta que todos los cocientes enteros sean menores que a, y sumando ordenadamente las relaciones halladas, resultará:

$$E(m:a)+E[E(m:a):a]+.....\gtreqless E(n:a)+$$
$$+E[E(n:a):a]+....E(p:a)+E[E(n:a):a]+....$$

donde se ve que la máxima potencia de a contenida en m es igual ó mayor que la suma de las máximas potencias de a contenidas, respectivamente, en $n!$ en $p!$ etc., luego no existirá en $n!\,p!\,q!....$ ningun factor primo con el exponente superior al que tenga en $m!$; luego (56 *cor.* 1.º)

$$m!=\overline{n!\times p!\times q!}$$

CAPÍTULO III.

SOBRE EL NÚMERO DE FACTORES PRIMOS.

60. **Teorema.**—*El número de números primos que existen en la série entera es ilimitado.*

Demostracion.—Sea p un número primo cualquiera. El número expresado por la forma

$$p!+1$$

es primo ó compuesto. En el primer caso es un número primo *mayor* que p, en el segundo es divisible por un número primo que no es ninguno de los comprendidos en la série

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,.....\ p,$$

pues dicha expresion consta de un sumando divisible y otro no divisible por cualquiera de ellos; luego será divisible por un número primo *mayor* que p.

61. **Teorema.**—*El número de números primos con otro dado* N, *inferiores á éste, es igual al mismo, disminuido sucesivamente en los cocientes que resultan de dividirlo, por cada uno de sus factores primos distintos, por cada uno de los productos distintos que resultan tres á*

tres, y, en general un número impar de veces y además sumado sucesivamente con los cocientes que resultan de dividirlo por cada uno de los productos distintos de dichos factores tomados dos á dos, cuatro á cuatro, y en general, un número par de veces, es decir que

$$\varphi(N)=N-N:a-N:b-N:c-.....+N:a.b+$$
$$+N:a.c+N:b.c+.....-N:a.b.c-.....$$

Designando por la expresión $\varphi(N)$ dicho número buscado (1).

Demostracion.—De la série de los N números

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ .....\ N \qquad [1]$$

hay que suprimir los números de las séries

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ .....\ (N:a).a=N \qquad [2]$$
$$b,\ 2b,\ 3b,\ 4b,\ .....\ (N:b).b=N \qquad [3]$$
$$c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ .....\ (N:c).c=N \qquad [4]$$

que contienen, respectivamente, los números divisibles por a, por b, por c.....

Suprimiendo de la série [1] los números de la série [2], cuyo número es $N:a$, quedarán

$$N-N:a$$

números no divisibles por a.

Al suprimir de este resultado los números de la série [3], cuyo número es $N:b$, se observará que, los de la série [2] se han suprimido ya algunos múltiplos de b, á

(1) La expresion $\varphi(N)$ se lee: funcion φ de N, y expresa, segun el significado de dicha palabra, que la expresion depende del número y valor de los factores de N, es decir, del valor de N.

saber, los que tambien son múltiplos de a; luego *hay que aumentar al resultado el número de términos divisibles á la vez por* a *y por* b, es decir, $N : a.b$, y no quedará más que el número de términos dado por la expresion

$$N - \overline{N : a} - \overline{N : b} + \overline{N : (a.b)}.$$

Al suprimir de este número resultante el de los múltiplos de c, ó de los números que no son múltiplos de a ni de b los que son múltiplos de c, es decir, los términos de la série [4], se observará que en las supresiones anteriores se ha verificado: la de los múltiplos de c que lo son de a y de b, cuyos números son, respectivamente, $N : (c.a)$, $N : (b.a)$. Y, por consiguiente, éstos de menos hay que suprimir, resultando el número de términos

$$N - \overline{N : a} - \overline{N : b} - \overline{N : c} + \overline{N : (a.b)} + \overline{N : (a.c)} + \overline{N : (b.c)}.$$

Pero entre los múltiplos de c y de a hay $(N : c.a) : b = N : (a.b.c)$ múltiplos de b, y entre los múltiplos de c y de b hay $(N : c.b) : a = N : (a.b.c)$ múltiplos de a, es decir, que al agregarse el número de términos

$$\overline{N : (c.a)} \text{ y } \overline{N : (c.b)},$$

se ha agregado dos veces el número $N : a.b.c$. Por consiguiente, será preciso restar una vez dicho valor para obtener el número de términos no divisibles por a, por b ni por c, es decir, primos con estos factores, cuya expresión será:

$$N - \overline{N : a} - \overline{N : b} - \overline{N : c} + \overline{N : (a.b)} + \overline{N : (a.c)} + \\ + \overline{N : (b.c)} - \overline{N : (a.b\,c)};$$

y así se continuará hasta haber suprimido todos los números divisibles por los factores primos inferiores á N.

CAPITULO IV.

TEORÍA DE LA COMPOSICION DE LOS NÚMEROS POR SUS FACTORES COMUNES Y PROPIOS.

62. **Teorema.**—*El máximo comun divisor de varios números es el producto de todos sus factores primos* COMUNES *distintos, elevado cada uno á la* MENOR *potencia contenida en aquéllos.*

Demostracion.—Sean los números

$$A=a^3.b^4.c^5,\ B=a^2.b^3.c^7.d,\ C=a^4.b.c^2.d$$

cuyos factores primos son a, b, c, etc. El número

$$D=a^2.b.c^2$$

es divisor comun de todos ellos, pues todos sus factores primos se hallan *contenidos* en aquéllos (56 *cor.* 1.º) Además es el *mayor divisor comun*, porque si contuviera algun otro factor primo igual ó desigual á los que ya contiene, tendría un factor que no se hallaría en alguno de los números propuestos, ó estaría repetido mayor número de veces como factor, y D no sería divisor comun (56 *c.* 1.º)

63. **Teorema.**—*El mínimo comun múltiplo de varios números es el producto de todos los factores primos* DISTINTOS, *elevado cada uno á la* MAYOR *potencia contenida en aquéllos.*

Demostracion.—Sean los números

$$A=a^2.b^3.c^2d,\ B=a^2.b^3.c,\ C=a.b^2.c^3.f$$

cuyos factores primos son a, b, c, etc. El número

$$M=a^2.b^3.c^3.d.f$$

es múltiplo comun de todos ellos, pues *contiene* todos los factores primos de cada uno (56 *cor.* 1.º) Además es el *menor múltiplo comun*, porque suprimiendo cualquiera de sus factores primos, ya no contendrá todos los factores primos de alguno de los números propuestos, y entónces no será múltiplo comun (56 *corolario* 1.º)

64. Del teorema anterior se deduce la siguiente

Regla.—*Para hallar el máximo comun divisor de varios números, se descomponen en sus factores primos, y se forma un producto de todos los que sean* COMUNES, *elevado cada uno á la* MENOR *potencia obtenida en dichas descomposiciones.*

Ejemplo: Sean los números

840, 360, 1260, 132.

Descompuestos en sus factores primos, son

$$840=2^3\times3\times5\times7,$$
$$360=2^3\times3^2\times5,$$
$$1260=2^2\times3^2\times5\times7,$$
$$132=2^2\times3\times11.$$

Su máximo comun divisor es

$$D=2^2.3=12.$$

66. **Corolario:**—*El* MÁXIMO COMUN DIVISOR *de varios números es igual al* MÁXIMO COMUN DIVISOR *de dos de ellos* DIVIDIDO *por el producto de los factores primos*

65. Del teorema anterior se deduce la siguiente

Regla.—*Para hallar el mínimo comun múltiplo de varios números, se descomponen en sus factores primos, y se forma un producto de todos los que sean* DISTINTOS, *elevado cada uno á la* MAYOR *potencia obtenida en dichas descomposiciones.*

Ejemplo: Sean los números

840, 360, 1260, 132.

Descompuestos en sus factores primos, son

$$840=2^3\times3\times5\times7,$$
$$360=2^3\times3^2\times5,$$
$$1260=2^2\times3^2\times5\times7,$$
$$132=2^2\times3\times11.$$

Su mínimo comun múltiplo es

$$M=2^3.3^2.5.7.11=27720.$$

67. **Corolario:**—*El* MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO *de varios números es igual al* MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO *de dos de ellos* MULTIPLICADO *por el producto de los factores pri-*

iguales ó desiguales COMUNES *á los mismos*, *que no lo son del tercero*, DIVIDIDO *despues por el producto de los factores primos iguales ó desiguales* COMUNES *á los tres primeros y no pertenecientes al cuarto*, *y así sucesivamente*, lo cual puede expresarse simbólicamente como sigue:

$$D(a, b, c, d.....) =$$
$$= \{[D(a,b) : f_c(a,b)] : f_c(a,b,c)\} :$$
$$: f_c(a, b, c, d), \text{ etc.},$$

representando por $f_c(a, b)$,... los factores exclusivamente comunes de a, b..... con respecto á los anteriores.

Ejemplo: Sean los números arriba propuestos. Se tiene:

m. c. d. de 840 y 360 $= 2^3.3.5.$

$$\text{m. c. d. de} \left\{\begin{matrix} 840 \\ 360 \\ 1260 \end{matrix}\right\} =$$
$$= 2^3.3.5 : 2 = 2^2.3.5.$$

$$\text{m. c. d. de} \left\{\begin{matrix} 840 \\ 360 \\ 1260 \\ 132 \end{matrix}\right\} =$$
$$= 2^2.3.5 : 5 = 2^2.3.$$

mos iguales ó desiguales del tercero NO PERTENECIENTES *á los mismos*, MULTIPLICADO *despues por el producto de los factores primos iguales ó desiguales del cuarto* NO PERTENECIENTES *á los tres primeros*, *y así sucesivamente*, lo cual puede expresarse simbólicamente como sigue:

$$M(a, b, c, d.....) =$$
$$= \{[M(a, b) . f_p(c)] . f_p(d)\} .$$
$$. f_p(e), \text{ etc.},$$

representando por $f_p(c)$,... los factores primos propios de cada número con respecto á los anteriores.

Ejemplo: Sean los números arriba propuestos. Se tiene:

m.c.m. de 840 y 360 $= 2^3.3^2.5.7$

$$\text{m. c. m. de} \left\{\begin{matrix} 840 \\ 360 \\ 1260 \end{matrix}\right\} =$$
$$= 2^3.3^2.5.7 \times 1 = 2^3.3^2.5.7.$$

$$\text{m. c. m. de} \left\{\begin{matrix} 840 \\ 360 \\ 1260 \\ 132 \end{matrix}\right\} =$$
$$= 2^3.3^2.5.7 \times 11.$$

68. **Caso particular.** *El mínimo comun múltiplo de dos números es igual al* PRODUCTO *de uno de ellos por el cociente que resulta de dividir el otro por el máximo comun divisor de los dos.*

Sean A y B los números dados, D su m. c. m. Se tiene:

$$A=a.D,\ B=b.D$$

llamando a y b los cocientes de su division por D, segun la regla conocida, su m. c. m., que representaremos por M, será (63):

$$M=a.D.b=A.b=B.a.$$

Ejemplo: Sean los números

$$2520=2^3.3^2.5.7$$
$$300=2^2.3.5^2,$$

cuyo m. c. d.$=2^2.3.5$

ó m. c. d.$=60$.

Se tiene:

$$2520.(300:60)=$$
$$=2520.5=12600;$$

69. **Caso particular.** *El máximo comun divisor de dos números es igual al* COCIENTE *de uno de ellos dividido por el cociente de dividir su mínimo comun múltiplo por el otro.*

Sean A y B los números dados, D su m. c. d. Se tiene:

$$A=a.D,\ B=b.D,$$

llamando a y b los cocientes de su division por D, y multiplicando dichas igualdades,

$$A.B=a.D.b.D;$$

luego $B=a.D.b.D:A=$
$=A.b.D:A=b.D;$

es decir, $B=b.D$;
luego $D=B:b=B:(M:A)$(68).

Ejemplo: Sean los números

$$2520=2^3.3^2.5.7$$
$$300=2^2.3.5^2,$$

cuyo m. c. m$=2^3.3^2.5.7$

ó m. c. m.$=12600$.

Se tiene:

$$2520:(12600:300)=$$
$$=252:42=60;$$

ó de otro modo:

$$2^3.3^2.5.7.(2^2.3.5^2:2^2.3.5)=$$
$$=2^3.3^2.5.7\times5=2^3.3^2.5^2.7,$$

y tambien

$$300.(2520:60)=$$
$$=300.42=12600,$$

ó de otro modo:

$$2^2.3.5^2.(2^3.3^2.5.7:2^2.3.5)=$$
$$=2^2.3.5^2\times2.3.7=2^3.3^2.5^2.7.$$

ó de otro modo:

$$2^3.3^2.5.7:(2^3.3^2.5^2.7:2^2.3.5^2)=$$
$$=2^3.3^2.5.7:2.3.7=2^2.3.5$$

y tambien

$$300:(12600:2520)=$$
$$=300:50=60;$$

ó de otro modo:

$$2^2.3.5^2:(2^3.3^2.5^2.7:2^3.3^2.5.7)=$$
$$=2^2.3.5^2:5=2^2.3.5.$$

LIBRO SEGUNDO.

TEORÍA DEL NÚMERO-RESTO.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS CONGRUENCIAS.

70. **Definiciones.**—*Dos números se dicen* CONGRUENTES, CÓNGRUOS *ó* EQUIVALENTES *entre sí con relacion á un divisor* M, *cuando divididos por éste, dan el mismo resto. Dicho divisor se llama* MÓDULO.

Ejemplo: Los números $39=5.7+4$ y $25=3.7+4$, que dan el mismo resto, divididos por 7, son cóngruos ó congruentes con relacion á este módulo.

La congruencia de dos números a y b se expresa por los notaciones

$$a=b\pm\dot{M} \quad \text{ó} \quad a\equiv b\,(\text{mód. } M)$$

que se leen: a igual á b más ó ménos un múltiplo de M, ó a congruente con relacion al módulo M.

Corolario.—*Si dos números son congruentes con relacion á un módulo, su diferencia es múltiplo de éste.* En efecto

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a\equiv b\ (\text{mód. } M)\\ \text{ó } a=\dot{M}+r,\ b=\dot{M}+r\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{resultará, restando: } a-b=\dot{M}+r-\\ \quad -\dot{M}-r=\dot{M},\end{array}$$

puesto que la diferencia de dos múltiplos de M es múltiplo de M.

Ejemplo: Siendo $32 \equiv 17$ (mód. 5) se tiene:

$$32-17=15=\dot{5}.$$

RESTO *de un número entero* a, *con relacion á un módulo* M, *es cualquier otro número que aumentado ó disminuido en cierto múltiplo de* m, *dé por resultado* a.

El resto de los múltiplos de un número es cero.

Así $$20=\dot{5}+0,\ 28=\dot{7}+0.$$

RESTOS MÍNIMOS *son los dos restos menores que el módulo obtenidos restando del número dado el producto del módulo por el cociente entero, ó restando del producto del módulo por el cociente aumentado en una unidad, el número dado. El primero es el* RESTO MÍNIMO POR DEFECTO Ó ADITIVO, *y el segundo es el resto* MÍNIMO POR EXCESO Ó SUSTRACTIVO.

Observacion.—En este tratado sólo emplearemos los restos mínimos aditivos, que son los que resultan de la division ordinaria.

Corolario.—*Los dos restos mínimos son complementarios*, es decir, *sumados dan el módulo,* pues el uno excede á un múltiplo del módulo lo que el otro es excedido por el múltiplo inmediato, es decir, que mediante su suma, se pasa de un múltiplo á su inmediato.

Ejemplo: Los restos mínimos de 37, con relacion á 11, son 4 y 7 pues

$$4=37-3.11 \text{ y } 7=4.11-37.$$

Números INCONGRUENTES *con relacion á un módulo son los que divididos por éste, dan restos diferentes.* La incongruencia se expresa de la manera siguiente:

$$a \pm b \pm \dot{M},$$

Los números incongruentes de otro, con relacion á un módulo, se llaman NO RESTOS *de aquél con respecto á éste.*

71. **Propiedades fundamentales.**—1.ª y 2.ª *La suma ó diferencia de dos congruencias, con relacion á un módulo* M, *son tambien congruentes con respecto al mismo módulo,* es decir,

si $$a \equiv b \text{ (mód. } M), \ a' \equiv b' \text{ (mód. } M),$$

se tendrá

$$a+a' \equiv b+b' \text{ (mód. } M), \ a-a' \equiv b-b' \text{ (mód. } M)$$

ó $$a \pm a' \equiv b \pm b' \text{ (mód. } M).$$

Demostracion.—Siendo

$$a = b + \dot{M}, \ a' = b' + \dot{M},$$

se tendrá, sumando ó restando, miembro á miembro,

$$a \pm a' = b + \dot{M} \pm b' \pm \dot{M} = b \pm b' + \dot{M},$$

pues la suma ó diferencia de dos múltiplos de M es múltiplo de M,

ó $$a \pm a' \equiv b \pm b' \text{ (mód. } M).$$

Observacion.—En virtud de la propiedad asociativa de la suma y de la resta, estas propiedades se extienden á varias congruencias; así, por ejemplo, de

$$a \equiv a' \text{ (mód. } M), \ b \equiv b' \text{ (mód. } M), \ c \equiv c' \text{ (mód. } M)$$

resulta $$a+b-c \equiv a'+b'-c' \text{ (mód. } M).$$

3.ª *Los productos de dos números congruentes por un número son tambien congruentes con respecto al mismo módulo*, es decir,

si $$a \equiv b \text{ (mód. } M), \text{ será } a.n \equiv b.n \text{ (mód. } M),$$

pues de $a \equiv b$ (mód. M), se deduce $a+a+a... \equiv b+b+b+...$ (mód. M)

4.ª *Los productos, miembro á miembro, de varias congruencias, con relacion á un mismo módulo, son tambien congruentes*, es decir,

si $a \equiv a'$ (mod. M), $b \equiv b'$ (mod. M), $c \equiv c'$ (mod. M),

resultará $\quad a.b.c \equiv a'.b'.c'$ (mód. M),

En efecto, de

$$a=a'+\dot{M},\ b=b'+\dot{M}$$

resulta, multiplicando miembro á miembro,

$$a.b=a'.b'+a'.\dot{M}+b'.\dot{M}+\dot{M}.\dot{M}=a'.b'+\dot{M}$$

ó $\quad a.b \equiv a'.b'$ (mód. M),

multiplicando ahora, miembro á miembro, las igualdades

$$a.b=a'.b'+\dot{M},\ c=c'+\dot{M},$$

se tiene

$$a.b.c=a'.b'.c'+\dot{M}.c'+a'.b'.\dot{M}+\dot{M}.\dot{M}=a'.b'.c'+\dot{M}$$

ó $\quad a.b.c \equiv a'.b'.c'$ (mód. M).

En el caso de ser las congruencias iguales, resulta la propiedad

5.ª *Las potencias del mismo grado de números congruentes son tambien congruentes, con relacion al mismo módulo*. Así, de

$a \equiv b$ (mód. M) resulta $a^m \equiv b^m$ (mód. M).

6.ª *Los cocientes de dividir los términos de una con-*

gruencia por un factor primo con el módulo, son tambien congruentes (1), es decir,

si $a.m \equiv b.m$ (mód. M), m. c. d. $(m, M)=1$,

resultará $a \equiv b$ (mód. M).

En efecto; la congruencia propuesta se reduce á

$$m.a = m.b + M.q,$$

llamando q el cociente de $m.a$ dividido por $m.b$ y, dividiendo por m,

$$a = b + (M.q : m);$$

y, como M y m son primos entre sí, será preciso que m divida á q.

72. **Propiedades de los resíduos.**—Sean n, n', n''... varios números y r, r', r'' sus resíduos respectivos, con relacion á un módulo M; las relaciones anteriores se reducirán á las siguientes:

$$1.^{\text{a}} \text{ Si } \left.\begin{array}{l} n \equiv r \text{ (mód. } M) \\ n' \equiv r' \text{ (mód. } M) \\ n'' \equiv r'' \text{ (mód. } M) \end{array}\right\} \text{resultará} \left\{\begin{array}{l} n+n'+n'' \equiv \\ \equiv r+r'+r'' \text{(mód.} M) \\ \text{ó } S_n \equiv S_r \text{ (mód. } M), \end{array}\right.$$

representando $n+n'+n''$ por S_n la suma de los números y por S_r la suma de los restos, es decir, que:

El resíduo de la suma de varios números es igual á la suma de los resíduos respectivos de dichos números, con relacion á un mismo divisor.

$$2.^{\text{a}} \text{ Si } \left.\begin{array}{l} n \equiv r \text{ (mód.} M) \\ n' \equiv r' \text{ (mód.} M) \end{array}\right\} \text{resultará} \left\{\begin{array}{l} n-n' \equiv r-r' \text{ (mód.} M) \\ D_n \equiv D_r \text{ (mód. } M), \end{array}\right.$$

representando por D_n y D_r las diferencias respectivas de los números y de los restos, es decir, que:

(1) Esta propiedad no es general, como se vé, y exige que los términos de la congruencia sean divisibles por el factor considerado.

El resíduo de la diferencia de varios números es igual á la diferencia de los resíduos respectivos de dichos números.

3.ª Si $\begin{matrix} n \equiv r \text{ (mód. } M) \\ n' \equiv r \text{ (mód. } M) \end{matrix} \Big\}$ resultará $\Big\{ \begin{matrix} n.n' \equiv r.r' \text{ (mód. } M) \\ \text{ó } P_n \equiv P_r \text{ (mód. } M), \end{matrix}$

representando por P_n y P_r los productos respectivos de los números y de sus restos, es decir, que:

El resíduo del producto de dos números es igual al producto de los resíduos respectivos de dichos números.

4.ª Si $\begin{matrix} n \equiv r \text{ (mód. } M) \\ n' \equiv r' \text{ (mód. } M) \end{matrix} \Big\}$ resultará $\Big\{ \begin{matrix} n{:}n' \equiv r{:}r' \text{ (mód. } M) \\ C_n \equiv C_r \text{ (mód. } M), \end{matrix}$ (1)

representando por C_n y C_r los cocientes respectivos de los números y sus restos, es decir, que:

El resíduo del cociente de dos números es igual al cociente de los resíduos de dichos números.

5.ª Si $n \equiv r$ (mód. M), resultará $n^e \equiv r^e$ (mód. M),

es decir, que:

El resíduo de la potencia de cierto grado de un número es igual á la potencia del resto y tambien al resíduo de la potencia del mismo grado de dicho resto.

Ejemplos:

1.º Si $7 \equiv 2$ (mód. 5), $9 \equiv 4$ (mód. 5), $13 \equiv$(mód. 5) resulta que

$$7+9+13=5+2+5+4+10+3=5+5+10+2+4+3=$$
$$=5+2+4+3$$

es decir $7+9+13 \equiv 2+4+3$ (mód. 5),

(1) Esta proposición sólo es cierta cuando los términos de la congruencia dividendo son divisibles por sus respectivos de la congruencia divisor, y los términos de ésta primos con el módulo.

2.° Si $17 \equiv 5$ (mód. 6), $9 \equiv 3$ (mód. 6.),

resulta que $17-9=5+\dot{6}-3-\dot{6}=5-3+\dot{6}$

es decir que $17-9 \equiv 5-3$ (mód. 6).

3.° Siendo $22 \equiv 2$ (mód. 5), $34 \equiv 4$ (mód. 5), resulta que

$$22.34=(2+\dot{5})(4+\dot{5})=2.4+\dot{5}.4+2.\dot{5}+\dot{5}.\dot{5}=\dot{5}+2.4$$

es decir, que $22.34 \equiv 2.4$ (mód. 5).

4.° Sea la congruencia

$$68 \equiv 26 \text{ (mód. 7)}.$$

Dividiendo por 2, que es primo con 7, resulta:

$$34 \equiv 13 \text{ (mód. 7)}.$$

5.° Sea la congruencia

$$18 \equiv 3 \text{ (mód. 5)};$$

elevando al cubo, resulta:

$$18^3 \equiv 3^3 \text{ (mód. 5.)}$$

CAPÍTULO II.

Teoría de los sistemas de números incongruentes ó de los sistemas de restos de las formas numéricas.

73. **Formas de los números.**—Elegido como tipo un número entero M, todos los demás enteros pueden ser representados, mediante aquél, por la forma

$$n=aM+r, \text{ ó}=\dot{M}+r,$$

en la cual el factor a que multiplica á M es un número cualquiera y r uno de los M números

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots M-1,$$

de manera que, entre cada dos múltiplos consecutivos de M existen siempre M números, á saber,

$$a.M, a.M+1,\ a.M+2, \ldots\ a.M+(M-1).$$

Ejemplo: Para el tipo 4, los números de la série entera se hallan comprendidos en alguna de las siguientes formas

$$4a,\ 4a+1,\ 4a+2,\ 4a+3,$$

cuando se sustituyen por a todos los valores sucesivos desde cero, así se tendrá:

para $a=0$, $4a=0$, $4a+1=1$, $4a+2=2$, $4a+3=3$
para $a=1$, $4a=4$, $4a+1=5$, $4a+2=6$, $4a+3=7$
para $a=2$, $4a=8$, $4a+1=9$, $4a+2=10$, $4a+3=11$
....

74. **Forma de los restos.**—Siendo los múltiplos de un número congruentes con 0, respecto al mismo.

Si $$n \equiv r \text{ (mód. } M)$$

se tendrá tambien:

$$n \equiv (r+a.M) \text{ (mód. } M),$$

de manera que la forma general de los restos de un número n, respecto al módulo M, es

$$r+a.M$$

suponiendo que a recorra toda la série de los números enteros, á contar desde 0.

75. **Clases de números.**—Siendo un número cualquiera congruente con su resíduo mínimo aditivo, respecto á un módulo cualquiera, M, le corresponderá como tal uno, y sólo uno, de los restos

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ M-1.$$

De esta consideracion resulta la distribucion de números en clases, segun los restos que den respecto del divisor ó módulo tomado por tipo.

Ejemplo: Todos los números, respecto al módulo 5, se dividen en las 5 siguientes clases:

$$\text{nums.} \equiv 0 \ (\text{mód. } 5), \equiv 1 \ (\text{mód. } 5), \equiv 2 \ (\text{mód. } 5) \ldots \equiv 4 \ (\text{mód. } 5.)$$

Cada número, ó indivíduo de una clase, representa á todos los indivíduos de la misma; y si se toma un indivíduo de cada clase, se formará un sistema de M números respectivamente cóngruos con el sistema

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ M,$$

que se llama *sistema completo de restos*, *ó sistema completo de números incongruentes*, respecto al módulo M.

Ejemplo: Respecto al módulo 5, los números

$$20 \equiv 0, (\text{mód. } 5),\ 11 \equiv 1 \ (\text{mód. } 5),\ 7 \equiv 2 \ (\text{mód. } 5),$$
$$33 \equiv 3 \ (\text{mód. } 5),\ 19 \equiv 4 \ (\text{mód. } 5)$$

son los *representantes de las diversas clases de números.*

Observacion.—La forma $a.M$, como acaba de verse, es un caso particular de la forma general $a.M+r$, por esta razon la teoría del número-producto ó múltiplo queda incluida en la teoría de las congruencias, y pronto se verá que sus proposiciones son casos particulares de las de ésta.

76. **Lema.**—*Los productos*

$$a,\ 2.a,\ 3.a,\ 4,a, \ldots\ (M-1).a \qquad [1]$$

de los M—1 *primeros números de la série entera*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ M-1 \qquad [2]$$

por un número a, *primo con* M, *forman un sistema completo de números incongruentes, respecto al módulo* M, es decir, *los términos de la série* [1] *serán congruentes á los de la série* [2], *aunque en un órden distinto.*

Demostracion.—1.º Ningun término de la série [1] es divisible por M, es decir, da cero de resíduo, porque constan de un factor menor que M y de otro primo con M (55, *cor.* 1.º)

2.º Dos términos $5.a$ y $3.a$, por ejemplo, de la série [1] no pueden ser cóngruos entre sí, es decir, dar el mismo resto respecto de M, porque entonces su diferencia

$$5.a - 3.a = (5-3).a$$

debería ser divisible por M, lo cual es imposible (1.º)

Luego los términos de la série [1] son un sistema de $M-1$ términos incongruentes, respecto al módulo M, y deben dar, en cierto órden, toda la variedad de restos posible, expresada por la série [2].

Corolario.—*Siendo* M *y* a, *primos relativos y* n *un número cualquiera, la série de los* M *términos*

$$n,\ n+a,\ n+2.a,\ n+3.a, \ldots\ n+(M-1).a \qquad [3]$$

forma un sistema completo de números incongruentes, ú origina un sistema completo de restos, respecto al módulo **M**, pues la série [3] se reducirá, en un cierto órden, á la série

$$n,\ n+1,\ n+2, \ldots\ n+(M-1),$$

sustituyendo por los sumandos a, $2.a$, $3.a$, etc. sus respectivos restos de la série [2].

Ejemplo: Siendo 5 primo con 6, la série

$$4,\ 4+5,\ 4+10,\ 4+15,\ 4+20,\ 4+25,$$

contendrá, como la série

$$4,\ 4+1,\ 4+2,\ 4+3,\ 4+4,\ 4+5,$$

el sistema completo de restos, respecto al módulo 6.

77. **Teorema de Fermat.**—*Si el número* a *no es divisible por el número primo* p, *la diferencia* $a^{p-1}-1$ *es divisible por* p, es decir se tiene

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (mód. } p).$$

Demostracion.—Siendo el sistema de restos de la série [1] (76) igual al sistema de la série [2] (76), el producto de los términos de la una será congruente con el producto de los términos de la otra, es decir,

$$a.2a.3a..... (p-1)\,a \equiv 1.2.3..... (p-1) \text{ (mód. } p)$$

ó $$1.2.3....(p-1).a^{p-1} \equiv 1.2.3.4....(p-1) \text{ (mód. } p)$$

y, dividiendo por el producto 1.2.3..... $p-1$ (71, 6.ª)

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ (mód. } p)$$

Ejemplo: Sea $a=4$, $p=5$, se tiene:

$$4=4,\ 4^2=16=\dot{5}+1,\ 4^3=64=\dot{5}+4,\ 4^4=256=\dot{5}+1.$$

78. **Teorema de Euler ó de Fermat generalizado.**—*Si los números* a *y* M *son primos relativos*, *la diferencia* $a^{\varphi(M)}-1$ *será divisible por* M, es decir,

$$a^{\varphi(M)} \equiv 1 \text{ (mód. } M),$$

expresando por $\varphi(M)$ el número de números primos con M, no superiores á éste.

Demostracion.—Sea

$$m,\ m',\ m'',\ m''',..... \qquad [4]$$

la série de los $\varphi(M)$ números primos con M, no superiores á este número; sus productos por a,

$$a.m,\ a.m',\ a.m'',\ a.m''',..... \qquad [5]$$

forman un sistema de números incongruentes, porque si no, la diferencia

$$a.m'''-a.m'=a\,(m'''-m')$$

de dos que fueran congruentes, sería múltiplo de M, lo que es imposible, por ser a primo relativo con él y $m'''-m'<M$; por la misma razon, ningun término de dicho sistema es divisible por M; los resíduos por M de dichos términos forman, pues, un sistema de $\varphi(M)$ números distintos, que serán primos con M, porque lo son los términos del sistema [5] (35, *cor.* 1.º); luego dichos restos son los $\varphi(M)$ números primos con M.

Siendo los términos de las séries [4] y [5] respectivamente congruentes, sus productos tambien lo serán, es decir,

$$am.am'.am''......\equiv m.m'.m'' \text{ (mód. } M)$$

ó $$m.m'.m''.....a^{\varphi(M)}\equiv m.m'.m'' \text{ (mód. } M),$$

y dividiendo por $m.m'.m''$, que es primo con M (71, 6.ª), resulta:

$$a^{\varphi(M)}\equiv 1 \text{ (mod. } M).$$

Ejemplo: Sean $a=8$, $M=15$, los números primos con 15 inferiores á éste, son:

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 14 \text{ y } \varphi(15)=8.$$

Además

$$1.8\equiv 8,\ 2.8\equiv 1,\ 4.8\equiv 2,\ 7.8\equiv 11,\ 8.8\equiv 4,\ 11.8\equiv 13$$
$$13.8\equiv 14,\ 14.8\equiv 7 \text{ (mód. 15)};$$

multiplicando estas congruencias, miembro á miembro, resulta:

$$1.8.2.8.4.8.7.8.8.8.11.8.13.8.14.8\equiv$$
$$\equiv 8.1.2.11.4.13.14.7 \text{ (mód. 15)},$$

y dividiendo por el producto 1.2.4.7.8.11.13.14, resulta

$$8^8\equiv 1 \text{ (mód. 15)}.$$

79. **Definicion.**—*Se dice que un número* a PERTENECE *á un exponente* n, *con respecto á un módulo* M, *cuando* a^n *es la menor potencia que dividida por* M *produce el resto* 1.

Ejemplo: 10 pertenece al exponente 6 respecto al módulo 7, segun se vé en la siguiente série de potencias y resíduos:

potencias	10,	10^2,	10^3,	10^4,	10^5,	10^6,	10^7,	etc.
resíduos	3,	2,	6,	4,	5,	1,	3,	etc.

CAPÍTULO III.

TEORÍA DE LA PERIODICIDAD DE LOS RESTOS POTENCIALES.

80. **Definicion.**—*Se llaman* RESTOS POTENCIALES *los que se obtienen dividiendo las potencias sucesivas de una misma base por un módulo dado.*

81. **Principio de la periodicidad de los restos potenciales.**—*Si* b *pertenece al exponente* n *respecto al módulo* M, *primo absoluto, ó primo relativo con* b, *las* n *primeras potencias de* b

$$b,\ b^2,\ b^3,\ b^4, \ldots\ b^n$$

son entre sí incongruentes, respecto al módulo b, *y forman un periodo*, es decir, *que se repiten indefinidamente y en el mismo órden.*

Demostracion.—1.º Sea $n' < n$ y $n'' < n$. Si se tuviese

$$b^{n'} \equiv b^{n''} (\text{mód. } M)$$

resultaría (71, 6.ª):

$$b^{n'} : b^{n''} \equiv 1 \ (\text{mód. } M) \quad ó \quad b^d \equiv 1 \ (\text{mód. } M),$$

siendo $d = n' - n''$, puesto que se dividen dos potencias de un número restando sus exponentes, como se multiplican sumándolos.

Por consiguiente, n no sería el grado de la menor potencia cóngrua con 1, segun M, contra lo supuesto. Luego dos potencias de grado inferior á n no pueden ser congruentes entre sí, cuando n es el exponente á que pertenece b, segun el mismo módulo.

Además, **recíprocamente**, *si todas las potencias de* b *de grado inferior á* n *son incongruentes entre sí, en la congruencia*

$$b^n \equiv 1 \text{ (mód. } M)$$

n *es el exponente á que pertenece* b, *segun el módulo* M; luego *la incongruencia de todas las potencias de grado inferior á* n EQUIVALE *á la pertenencia de la base* b *al exponente* n. (1)

2.° Siendo $b^n = 1 + \dot{M}$, se tendrá:

$$b^{n+1} = b^n . b = (1 + \dot{M})\, b = b + \dot{M},\ b^{n+2} = b^{n+1} . b =$$
$$= (b + \dot{M})\, b = b^2 + \dot{M}, \text{ etc.};$$

luego

$$b^{n+1} \equiv b,\ b^{n+2} \equiv b^2,\ b^{n+3} \equiv b^3, \ldots\ldots b^{n+m} \equiv b^m \text{ (mód. } M),$$

y, por consiguiente, *los restos se reproducen, á contar de* b^n, *en el mismo órden en que se obtuvieron, á contar desde* b.

82. En fin, de la expresion general

$$b^{n+m} \equiv b^m \text{ (mód. } M) \text{ ó, en general, } b^{\dot{n}+m} \equiv b^m \text{ (mód. } M),$$

resulta que: *los términos distantes entre sí* n *lugares son todos congruentes*, ó mejor: *Si los* EXPONENTES *son cón-*

(1) La demostracion de un teorema directo y su recíproca se reduce á establecer la equivalencia entre la tésis y la hipótesis.

gruos entre sí, con relacion al exponente á que pertenece la base, las POTENCIAS *correspondientes son cóngruas respecto al mismo módulo.*

Ejemplos: 1.º En el sistema de base 10, se tiene respecto al módulo 7,

potencias	10,	10^2,	10^3,	10^4,	10^5,	10^6,
restos	3,	2,	6,	4,	5,	1.

El período de restos es, pues, 3, 2, 6, 4, 5, 1.

Se observará además que el resto 2, por ejemplo, sólo corresponde á las potencias 10^2, $10^8=10^{2+6}$, $10^{14}=10^{2+6.2}$, $10^{20}=10^{2+6.3}$ etc.

2.º En el sistema de base 5 se tiene, respecto al módulo 7, escribiendo en el sistema de base 10:

potencias	5,	5^2,	5^3,	5^4,	5^5,	5^6,
restos	5,	4,	6,	2,	3,	1,

ó escritos en el sistema de base 5

10,	10^2,	10^3,	10^4,	10^5,	10^6
10,	4	11,	2,	3,	1

pues

$$5_{10} <> 10_5,\ 6_{10} <> 11_5, \text{ así como } 7_{10} <> 12_5,$$

es decir que 5, en el sistema decimal, es 10 en el sistema de base 5, etc.

Corolario.—*Si* D (b, M)=1 *y* b *pertenece al exponente* n *respecto al módulo* M, se tendrá $n=\overline{\varphi(\dot{M})}$; y *si* M *es primo absoluto, se tendrá* n=M—1, pues siendo, segun el teorema,

$$b^n=1+\dot{M}, \text{ será } b^{2n}=(1+\dot{M})^2=1+\dot{M},\ b^{3n}=$$
$$=(1+\dot{M})^3=1+\dot{M}, \text{ etc.,}$$

podrá decirse que: *los exponentes de las potencias cóngruas con* 1 *son todos los múltiplos de* n *y sólo ellos*. Por consiguiente, en virtud de los teoremas de Euler y de Fermat $\varphi(M)$ y $M-1$, serán respectivamente múltiplos de n, como se quería demostrar.

83. **Periodicidad incompleta.—Teorema.**—*Si* D (b, M) $>$ 1, *en la série de restos que se obtienen dividiendo las potencias sucesivas de* b *por* M, *no se repiten periódicamente todos los restos, á partir del primero; y habrá tantos irregulares ó no periódicos, anteriores al primer período, como unidades contenga el entero inmediatamente inferior al mayor de los cocientes, que respectivamente se obtienen, dividiendo los grados de los factores primos contenidos en* M *por los de los factores iguales á aquéllos contenidos en* b. *Cada período constará de tantos términos como unidades tiene el exponente á que pertenece* b, *con relacion al módulo* $\dfrac{M}{D(b^e, M)}$, *siendo* b^e *la menor potencia de* b *que contiene sus factores comunes con* M *elevados á igual ó mayor grado que en este módulo* (1).

Demostracion. 1.° Teniendo cada una de las potencias

$$b,\ b^2,\ b^3, \ldots\ b^{e-1}$$

más factores primos comunes con M que las anteriores, lo mismo sucederá á sus restos respectivos (36, *cor.* 4.°)

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots\ r_{e-1};$$

---

(1) Este teorema, demostrado por D. Ricardo Vazquez Illá, le hemos tomado casi literalmente de su obra titulada *Propiedades elementales relativas á la divisibilidad de los números enteros*, por creerle necesario para hacer una exposicion de la Aritmética, donde deba figurar la idea de congruencia aplicada á la de la divisibilidad, en conformidad con el modo de expresion didáctica iniciada por tan distinguido autor, y tan sólo hemos procurado presentar su demostracion con alguna más sencillez ó brevedad.

luego éstos serán todos distintos, y aquéllas incongruentes, respecto á M.

Además, ninguno de estos restos puede ser igual á los de las potencias

$$b^e,\ b^{e+1},\ b^{e+2},\ldots\ b^{e+n}, \qquad [3]$$

porque éstas contienen, por lo menos, todos los factores primos de M comunes con b, iguales ó desiguales, y por consiguiente, tambien los restos mínimos respectivos (36, *cor* 4.º)

$$r_e,\ r_{e+1},\ r_{e+2},\ldots\ r_{e+n}. \qquad [4]$$

2.º Para que r_e sea igual á otro resto r_{e+n} de la série [4], es decir, para que se verifique la congruencia

$$b^{e+n} \equiv b^e \text{ (mód. } M)$$

ó $\quad b^{e+n} - b^e = \dot{M}, \qquad$ ó $\quad b^e(b^n - 1) = \dot{M},$

bastará que contenga $b^n - 1$ los factores de M no comunes á b^n, ó sea, sus factores propios, es decir, que se verifique la relacion

$$b^n - 1 = \frac{M}{D(b^e, M)} \text{ ó la congruencia } b^n \equiv 1 \left(\text{mód.} \frac{M}{D(b^e, M)}\right)$$

posible, porque $D\left(b, \dfrac{M}{D(b^e, M)}\right) = D\left(b, \dfrac{M}{D(b, M)}\right) = 1.$

Siendo posible la congruencia

$$b^n \equiv 1 \left(\text{mód.} \frac{M}{D(b^e, M)}\right),$$

el número de términos del período será el menor valor posible de n, es decir, el *exponente á que pertenece* b, *segun el módulo* $\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{D}(\mathrm{b}^e, \mathrm{M})}$, en conformidad con el enunciado.

Ejemplos: 1.º Sea $b=60=2^2.3.5$, $M=84=2^2.3.7$.

Dividiendo sucesivamente, por 84, las diversas potencias de 60, resultan las siguientes séries de éstas y los restos mínimos que les corresponden:

potencias	60, 60^2, 60^3, 60^4, 60^5, 60^6, etc.
resíduos	60, 72, 36, 60, 72, 36, etc.

2.º Sea $b=30=2.3.5$, $M=336=2^4.3.7$.

Dividiendo sucesivamente, por 336, las diversas potencias de 30, resultan las siguientes séries de éstas y sus restos mínimos que les corresponden:

potencias	30, 30^2, 30^3, 30^4, 30^5, 30^6, 30^7, etc.
resíduos	30, 228, 120, 240, 144, 288, 240, etc.

Observacion.—Para obtener estos resultados no es necesario calcular directamente las potencias sucesivas de b, pues *basta multiplicar cada resto obtenido por la base, y dividir el producto por el módulo.*

Corolario 1.º—*Si la base* b *contiene todos los factores primos del módulo* M, *los restos periódicos no existen y sí un número limitado de restos correspondientes á la parte irregular de la série de restos*, pues en este caso la congruencia

$$b^n \equiv 1 \left(\text{mód.}\ \frac{M}{D\,(b^e, M)}\right)$$

se reduce á

$$b^n \equiv 1 \left(\text{mód.}\ \frac{M}{M}\right) \quad \text{ó} \quad b^n \equiv 1\ (\text{mód. } 1)$$

y, por consiguiente, b^n debe ser igual á la unidad, único número congruente con 1, segun el módulo 1, y el número n de cifras del período debe ser nulo, sin lo cual el número b^n, distinto de 1, sería cóngruo con 1, respecto al módulo 1.

Ejemplos: 1.° Sea $b=2^2.3.5=60$ y $M=2^7.3=384$. Se tendrá:

potencias	$60,\ 60^2,\ 60^3,\ 60^4,\ 60^5$, etc.
residuos	60, 144, 192, 0, 0, etc.

2.° Sea $b=2^2.3.5^2=300$ y $M=2^5.3=96$. Se tiene:

potencias	$300,\ 300^2,\ 300^3,\ 300^4$, etc.
residuos	300, 48, 0, 0, etc.

Corolario 2.°—*Si* D(m, M)=1, *la série de restos de los productos*

$$m.b,\ m.b^2,\ m\ b^3, \ldots\ m.b^n, \ldots$$

consta del mismo número de términos periódicos y no periódicos que la série de restos de las potencias sucesivas

$$b,\ b^2,\ b^3, \ldots\ b^n, \ldots$$

pues, segun el teorema, uno y otro dependen de los factores comunes de b y M.

Ejemplo: Siendo $b=5$ y $M=7$, se tiene:

potencias	$5,\ 5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ 5^5,\ 5^6$, etc.
residuos	5, 4, 6, 2, 3, 1, etc.

y para $2.5,\quad 2.5^2,\quad 2.5^3,\quad 2.5^4,\quad 2.5^5,\quad 2.5^6$, etc.

se tendrá: $2.5\equiv3$, $2.4\equiv1$, $2.6\equiv5$, $2.2\equiv4$, $2.3\equiv6$, $2.1\equiv2$, etc.

84. **Clases de séries de restos.**—*Las séries de restos pueden dividirse en* LIMITADAS, *que constan de un número limitado de términos; en* PERIÓDICAS PURAS, *que constan de períodos, á contar del primero, y en* PERIÓDICAS MIXTAS, *que antes de los períodos contienen un número limitado de restos el cual constituye la parte llamada* IRREGULAR *de la série.*

CAPÍTULO IV.

RELACIONES DE CONGRUENCIA EN CUALQUIER SISTEMA DE NUMERACION.

85. **Principio fundamental.**—*El resto de un número cualquiera de unidades de un órden y sistema de numeracion dados, es igual al producto de su número por el resto de una de ellas, con relacion á un mismo módulo, y el resto de un número cualquiera, expresado en cualquier sistema de numeracion, es igual á la suma de los restos de las unidades de sus diferentes órdenes.*

Demostracion.—Representando por B la base del sistema considerado y por a, b, c,..... p, q las cifras que representan las unidades de los diversos órdenes de un número N, la expresion de éste será:

$$N=q\,B^n+p\,B^{n-1}+.....+c\,B^2+b\,B+a.$$

Sea M un módulo cualquiera y R el resto mínimo aditivo de B, con respecto al mismo. Se tendrá (72, 5.ª):

$$B^n=\dot{M}+R^n,\ B^{n-1}=\dot{M}+R^{n-1},\ldots\ B^2=\dot{M}+R^2,\ \ B=\dot{M}+R$$

y $qB^n=\dot{M}+qR^n,\ pB^{n-1}=\dot{M}+pR^{n-1},\ldots\ cB^2=\dot{M}+cR^2,\ bB=\dot{M}+bR,$

por consiguiente (72, 1.ª),

$$N=\dot{M}+(q\,R^n+p\,R^{n-1}+.....+c\,R^2+b\,R+a),$$

que es lo que se deseaba demostrar.

Ejemplo: Supongamos $N=342130_5$

ó $$N=3.5^5+4.5^4+2.5^3+1.5^2+3.5+0.$$

Siendo 3, 2, 6, 4, 5 los resíduos respectivos de 5^5, 5^4..., con relacion á 7, se tiene:

$$N=\dot{7}+(3.3+4.2+2.6+1.4+3.5).$$

Corolario 1.º—*Si un número se divide en grupos cuyas unidades respectivas son de los grados*

$$\alpha+n,\ \alpha+2.n,\ \alpha+3.n,\ \alpha+4.n,\dots\dots$$

expresando por n *el número de restos que constituyen el período, respecto al módulo dado y* α *un número mayor que el de restos irregulares, el resto de aquél es igual á la suma de los restos de cada grupo considerado como unidades del órden del primer grupo, más el número formado por las unidades de órden inferior á las de éste.*

Demostracion.—Representando por g_1, g_2, g_3,..... los valores de cada grupo, á contar del de órden inferior, y por g_0 la parte del número que precede al primer grupo, siendo b la base del sistema, se tendrá:

$$N=\dots\dots+g_4.b^{4n+\alpha}+g_3.b^{3n+\alpha}+g_2.b^{2n+\alpha}+g_1.b^{n+\alpha}+g^0,$$

pero siendo (82)

$$b^{n+\alpha}\equiv b^{\alpha}\ (\text{mód. } M),$$

resultará:

$$N\equiv(\dots\dots g_4.b^{\alpha}+g_3.b^{\alpha}+g_2.b^{\alpha}+g_1.b^{\alpha})+g_0=$$
$$=(\dots\dots g_4+g_3+g_2+g_1)\,b^{\alpha}+g_0\ (\text{mód. } M.)$$

Observacion.—Cuando los grupos se cuentan desde las unidades simples del número dado, g_0 es igual á cero y resulta como caso particular el siguiente

Corolario 2.º—*Si un número, cuya série de restos es periódica pura se divide, á contar de las unidades simples, en grupos de tantas cifras como restos componen el período, respecto á un módulo ó divisor dado, ó en grupos de tantas cifras como unidades contiene el exponente á que pertenece la base, cuando* M *es primo absoluto ó* b *y* M *primos relativos, será congruente con la suma de los períodos considerados en su valor absoluto.*

En este caso se tendrá:

$$N \equiv .....g_4+g_3+g_2+g_1.$$

Corolario 3.°—*Si un número se descompone en grupos de tantas cifras como restos componen el período, respecto un módulo ó divisor dado, á partir del órden cualquiera α de unidades, superior al número de restos irregulares si los hay, su resto es igual á la suma de los valores absolutos de cada grupo multiplicada por el resto mínimo aditivo correspondiente á los órdenes de unidades de cada grupo, más el valor absoluto del número separado á la derecha del primer grupo.* En efecto, siendo

$$b^{n+\alpha} \equiv r \text{ (mód. } M) \quad \text{ó} \quad b^{n+\alpha} = r + \dot{M}$$

y $N = ...+g_4.b^{4n+\alpha}+g_3.b^{3n+\alpha}+g_2.b^{2n+\alpha}+g_1.b^{n+\alpha}+g_0,$

resultará:

$$N = ...g_4(r+\dot{M})+g_3(r+\dot{M})+.....+g_0$$

ó $$N \equiv (.....+g_4+g_3+g_2+g_1)r+g_0 (\text{mod. } M).$$

Definicion.—*Llamaremos* PERÍODO DE UN NÚMERO, CON RELACIÓN Á UN MODULO Ó DIVISOR DADO, *las partes del mismo formadas de tantas cifras consecutivas como términos contiene la série completa de restos potenciales, con relacion á un módulo cualquiera.*

Ejemplo: Siendo 3, 2, 6, 4, 5, 1, la série de restos de 10, 10^2, 10^3....., con relacion á 7, el número

547284567623154632 84

dividido en períodos, será:

54,728456,762315,463284

ó 5,472845,676231,546328,4

ó 547284,567623,154632,84 etc.

Esta definicion permite abreviar el enunciado del anterior corolario, diciendo que:

El resto de un número es igual á la suma de los valores absolutos de sus períodos multiplicada por el resto correspondiente á los órdenes de sus unidades, más la parte separada á la derecha de los períodos.

Así, el resto del número arriba propuesto será igual á

$$(54+728456+762315+463284)\times 1$$

ó $$(5+472845+676231+546328)\times 3+4$$

ó $$(547284+567623+154632)\times 2+84 \text{ etc.}$$

Corolario 4.°—*Si* $M=\dot{\overline{b^m}}$, es decir, *si* M *es divisor de una potencia de la base del sistema de numeracion, y* α *expresa el número inmediatamente inferior al mayor cociente obtenido dividiendo el exponente de cada factor primo de* M *por su correspondiente de* 6, *el resto de dicho número es igual al del número formado por sus cifras de los* α *primeros órdenes.*

En efecto, siendo

$$N=G.b^{\alpha}+g_0,$$

representando por G el grupo formado por las unidades de órden α,

y $$G.b^{\alpha}=\dot{M} \quad \text{ó} \quad G.b^{\alpha}\equiv 0 \text{ (mód. } M),$$

se tendrá $$N\equiv g_0 \text{ (mód. } M).$$

Ejemplo 1.° Sea $b=10$, $M=2^3.5=40$ y el número 84654_{10}. Se tendrá:

$$N=84654_{10}=84_{10}.10^3+654_{10}=84_{10}.\dot{\overline{40}}+654_{10}$$

ó $$84654_{10}\equiv 654_{10} \text{ (mód. } 40).$$

Ejemplo 2.º Sea $b=2^2.3=12$, $M=2^7.3$ y el número 87546_{12}, escrito en el sistema de base 12. Se tendrá:

$$E(7:2)=3$$

y $$87546_{12}=8_{12}.10_{12}^4+7546=8.\overline{\dot{12}}+7546$$

ó $$87546\equiv 7546 \text{ (mód. } 2^2.3=12).$$

CAPÍTULO V.

APLICACION DE LA TEORÍA DE LA CONGRUENCIA Á LA TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD.

§ 1.º—Teoría.

86. **Principio fundamental.**—*Para que un número sea divisible por otro, es necesario y basta que la suma de los residuos de las unidades de sus diferentes órdenes, con respecto á dicho divisor, sea nulo.*

Demostracion.—Siendo (85)

$$N=\dot{M}+(q.R^n+p.R^{n-1}+\dots\dots c.R^2+b.R+a);$$

para que N sea $\dot{M}$, será preciso que

$$q.R^n+p.R^{n-1}+\dots\dots c.R^2+b.R+a=0.$$

Ejemplo: Sea el número 4323_5 y el divisor 7. Se tiene:

potencias 5, 5^2, 5^3,
residuos 5, 4, 6,

es decir, $5^3=\dot{7}+6,\ 5^2=\dot{7}+4,\ 5=\dot{7}+5;$

luego $4.5^3=4(\dot{7}+6),\ 3.5^2=3(\dot{7}+4),\ 2.5=2(\dot{7}+5),$

y, en fin, $4323_5=4(\dot{7}+6)+3(\dot{7}+4)+2(\dot{7}+5)+3=$

$$=\dot{7}+4.6+3.4+2.5+3$$

y si $$4.6+3.4+2.5+3=0,$$

será $4323_5=\dot{7}$, y no lo será en el caso contrario.

Corolario.—*Para que un número sea divisible por otro, es necesario y basta que la suma de sus períodos, multiplicada por el resto correspondiente á los órdenes de las unidades de dichos períodos más la parte separada á la derecha de los períodos sea múltiplo del mismo.*

Demostracion.—Siendo (85, *cor.* 1.ª)

$$N=\dot{M}+[(\ldots g_4+g_3+g_2+g_1)\,b^{\alpha}+g_0]$$

para que N sea $\dot{M}$ será preciso que se tenga

$$(\ldots g_4+g_3+g_2+g_1)\,b^{\alpha}+g_0=0.$$

87. **Caractéres de divisibilidad.—Definicion.**—CARACTÉRES DE DIVISIBILIDAD *de los números son las condiciones á que deben satisfacer las unidades de sus diferentes órdenes para que sean divisibles por divisores ó módulos dados.*

88. Para establecer los caractéres de divisibilidad de los números conviene distinguir tres casos, á saber: 1.º Que la base contenga todos los factores primos del divisor dado. 2.º Que la base contenga algunos factores primos del divisor dado. 3.º Que la base no contenga ningun factor primo de la base dada, los cuales dan lugar á los siguientes teoremas:

Teorema I.—*Para que un número escrito en un sistema de base* B *sea divisible por un divisor de una potencia de la base, primo ó compuesto, es necesario y basta que éste divida al número formado por tantas cifras de su derecha como unidades tiene el mayor cociente exacto ó el mayor cociente entero más uno que se obtiene dividiendo los exponentes que afectan á los factores primos de* M *y de* B.

Demostracion.—Siendo e el menor exponente que hace $B^e=M$, un número N cualquiera podrá descomponerse en dos partes, separando del mismo las e cifras de la derecha. Así:

$$N=(abc.....)B^e+mnp.....=\dot{M}+mnp.....,$$

siendo $abc.....$ las cifras que quedan á la izquierda, cuyos órdenes son todos divisibles por $B^e=\dot{M}$, y $mnp.....$ las cifras de la derecha; luego

$$N=\dot{M}+mnp.....$$

Ejemplos: 1.º Sea $B=2^2.3=12$ y $M=2^7.3^4$, y el número

$$4793865_{12}=4790000_{12}+3865_{12}.$$

Pero $10000_{12}=12_{10}^4=\dot{12}$; luego

$$4793865_{12}=\dot{12}+3865_{12}.$$

2.º Sea $B=2.5=10$, $M=2^5.5^2$ y el número

$$35846742_{10}=35800000+46742.$$

Pero $100000_{10}=10_{10}^5=\overline{2^5.5^2}$; luego

$$35846742_{10}=\overline{2^5.5^2}+46742.$$

Teorema II.—*Para que un número escrito en un sistema de base* B *sea divisible por un módulo que no contenga más que factores primos con la base*, es decir, *por un módulo primo con la base, es necesario y basta que la suma de sus períodos multiplicada por el resto de los órdenes de las unidades de cada período, más la parte separada á la derecha, sea divisible por dicho módulo.*

Demostracion.—Siendo (85, *cor.* 3.º)

$$N=\dot{M}+(.....g_4+g_3+g_2+g_1)\,r+g_0,$$

para que N sea igual á un múltiplo de M es necesario que se tenga

$$(.....g_4+g_3+g_2+g_1)\,r+g_0=\dot{0},$$

y si esto no se verifica, N no será $\dot{M}$.

Casos particulares.—*Para que un número, escrito en el sistema de base* 10, *sea divisible por* 7, *es necesario y basta que la suma de los períodos de seis cifras, á contar de las unidades, sea múltiplo de* 7, *ó más general, que la suma de los períodos de seis cifras, á contar de un órden cualquiera, multiplicada* por 1, por 3, por 2, por 6, por 4 ó por 5, *segun que sea este órden* el primero, el segundo, etc., *sea múltiplo de* 7.

Ejemplo: El número 425478932543_{10} es divisible por 7, porque

$$425478 + 932543 = 1358021 = \dot{7}$$

y tambien $4254.2 + 789325.2 + 43 = 1587201 = \dot{7}$.

Teorema III.—*Para que un número, escrito en un sistema de base* B, *sea divisible por un módulo que contenga factores de la base y factores primos con la base, es necesario y basta que, á partir de un órden igual ó superior al número de restos no periódicos, la suma de sus períodos multiplicada por el resto de los órdenes de las unidades de cada período, más la parte separada á la derecha, sea divisible por dicho módulo.*

Demostracion.—La misma que la del teorema anterior.

Ejemplo: Sea el número 457519764, cuyo período respecto al divisor $52 = 13.4$, de sexto órden, es

$$48 \quad 12 \quad 16 \quad 4 \quad 40 \quad 36,$$

siendo 10 el resto no periódico. Se tendrá:

$$457519.12 + 764 = 5490992 = 52.105596 = \dot{52}$$

ó tambien

$$4575.4 + 19764 = 38064 = 52.732 = \dot{52}.$$

§ 2.º—Aplicaciones de la teoría á casos particulares.

89. **Casos de la divisibilidad.**—Se distinguirán primeramente los casos de considerarse los números en el sistema decimal ó en otro sistema cualquiera. Cada uno de estos casos originará tres, á saber: 1.º *que el divisor considerado sea divisor de una potencia de la base*, es decir, *contenga* TODOS LOS FACTORES PRIMOS *de la base*; 2.º *que no contenga* NINGUN FACTOR PRIMO *de la base*, *ó sea primo con ésta*; 3.º *que contenga* ALGUN FACTOR PRIMO *de la base*, *ó que tenga con ésta un máximo comun divisor distinto de la unidad*, *y algunos* FACTORES PRIMOS DISTINTOS *de los de la base*.

90. **Caso de los divisores de potencias de las bases.—Teorema.**—*Un número, considerado en el sistema decimal, será divisible por* 2 *ó* 5, *por* 4 *ó* 25, *por* 8 *ó* 125, *ó en general, por* 2^n *ó* 5^n, *cuando su primera, ó sus dos primeras, ó en general, sus* n *primeras cifras son ceros ó forman un múltiplo de dichos divisores.*

Demostracion.—Está incluida en el razonamiento general del núm. 87, teor. I.

Ejemplos: $30=\dot{\overline{2 \text{ y } 5}}$, $26=\dot{2}$, $35=\dot{5}$

$$700=\dot{\overline{4 \text{ y } 25}}, 648=600+48=\dot{4}+\dot{4}=\dot{4}, 350=$$
$$=300+50=\dot{25}+\dot{25}=\dot{25}$$
$$8000=\dot{\overline{8 \text{ y } 125}} \quad 7880=7000+880=\dot{8}+\dot{8}=\dot{8},$$
$$4500=4000+500=\dot{125}+\dot{125}=\dot{125}.$$

91. **Caso de los divisores primos con la base.—Teorema.**—*Si un número se divide en grupos de á tres cifras, desde las unidades, y se multiplican respectivamente, por* 1, *por* 3 *y por* 2, *las unidades decenas y*

centenas de aquéllos; cuando la suma de los productos correspondientes á los grupos de lugar impar, disminuida en la de los correspondientes á los grupos de lugar par, sea cero ó múltiplo de 7, el número será divisible por 7.

Demostracion.—Se tiene

unidades	1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,	etc.
restos por 7	1,	3,	2,	6=7−1,	4=7−3,	5=7−2,	1,	etc.

Ejemplo. Sea el número 423654. Se tiene

$$4.1+5.3+6.2-(3.1+2.3+4.2)=31-17=14;$$

luego $$423654=\dot{7}.$$

92. **Teorema.**—*Si un número se divide en grupos de á tres cifras, desde las unidades, y se multiplican, respectivamente por* 1, *por* 10, *por* 9, *las unidades decenas y centenas de aquéllos; cuando la suma de los productos correspondientes á los grupos de lugar impar; disminuida en la de los correspondientes á los grupos de lugar par, sea cero ó múltiplo de* 13, *el número será múltiplo de* 13.

Ejemplo. El número 439686 es divisible por 13, porque

$$6.1+8.10+6.9-(9.1+3.10+4.9)=140-75=65=\dot{13}.$$

93. **Teorema.**—*Un número, considerado en el sistema decimal, será divisible por*

17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ó.....

cuando la suma de sus períodos de

16, 18, 22, 28, 15, 3, 5, 21, ó.....

cifras, forma un múltiplo, respectivamente, de cada uno de estos divisores.

Demostracion.—Los períodos de restos de

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000,.....

son, respectivamente, para

17... 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12,
19... 1, 10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13, 16, 8, 4, 2,

....

31... 1, 10, 7, 8, 18, 25, 2, 20, 14, 16, 5, 19, 4, 9, 28,

....

94. **Teorema.**—*Un número, considerado en el sistema decimal, será divisible*

por $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, ..$	cuando la suma de sus grupos de 1, 3, 9, 27,..... cifras	forme un múltiplo de 9, 27, 81, 243.....
por 11 ó $11^2=121$.	cuando la suma de sus grupos de 2 ó de $2.11=22$,..... cifras	forme un múltiplo de 11 ó de 121,.....
por 7 ó $7^2=49$....	cuando la suma de sus grupos de 6 ó de $6.7=42$,..... cifras	forme un múltiplo de 7 ó de 49,.....
por 13 ó $13^2=169$.	cuando la suma de sus grupos de 6 ó de $6.13=78$,..... cifras	forme un múltiplo de 13 ó de 169,.....

Ejemplos: 1.º $7254 = 7000 + 200 + 50 + 4 =$

$$=7(\dot{9}+1)+2(\dot{9}+1)+5(\dot{9}+1)+4=\dot{9}+(7+2+5+4)=\dot{9}.$$

2.º $22887738 = 27 + 22 + 887 + 738 = \dot{27} + 1647 =$

$$=\dot{27}+27.61=\dot{27}.$$

3.º $37421894532492 = \dot{81} + 37421 + 894532492 =$

$$=\dot{81}+894569913=\dot{81}+81.11044073=\dot{81}.$$

4.º $9614=\dot{11}+96+14=\dot{11}+110=\dot{11}.$

95. **Reglas de los periodos.**—1.ª *Para el módulo* $3^3=27$, *cuéntese desde* 10 *hasta* $28 \equiv 1$, *de nueve en nueve unidades*, así:

10 19 1.

2.ª *Para el módulo* $81=3^4$, *cuéntese desde* 10 *hasta* $82\equiv1$, *de nueve en nueve unidades*, así:

$$10\ 19\ 28\ 37\ 46\ 55\ 64\ 73\ 82\equiv1.$$

3.ª *Para el módulo* $243=3^5$, *cuéntese desde* 10 *hasta* $244\equiv1$, *de nueve en nueve unidades*, así:

10	19	28	37	46	55	64	73	82
91	100	109	118	127	136	145	154	163
172	181	190	199	208	217	226	235	244

ó tomándolos ahora, contando de tres en tres, resulta:

10	37	64	91	118	145	172	199	226
19	46	73	100	127	154	181	208	235
28	55	82	109	136	163	190	217	$244\equiv1$

quedando formados tres ciclos de restos congruentes, respecto al módulo 27, *correspondientes respectivamente á los órdenes de unidades.*

10^1	10^4	10^7	10^{10}	10^{13}	10^{16}	10^{19}	10^{22}	10^{25}
10^2	10^5	10^8	10^{11}	10^{14}	10^{17}	10^{20}	10^{23}	10^{26}
10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}.

4.ª *Para el módulo* $49=7^2$, *cuéntese respectivamente, desde* $3\equiv10$, 2, 6, 4, 5, 1, *de* 7 *en* 7 *unidades, y se obtendrán las séries de números*

3	10	17	24	31	38	45
2	9	16	23	30	37	44
6	13	20	27	34	41	48
4	11	18	25	32	39	46
5	12	19	26	33	40	47
1	8	15	22	29	36	43

ó, tomando, respectivamente, los términos de 3 *en* 3, 2 *en* 2, 6 *en* 6, 4 *en* 4, 5 *en* 5 *y* 1 *en* 1,

3	24	45	17	38	10	31		10	31	3	24	45	17	38
2	16	30	44	9	23	37		2	16	30	44	9	23	37
6	48	41	34	27	20	13	ó	20	13	6	48	41	34	27
4	32	11	39	18	46	25		4	32	11	39	18	46	25
5	40	26	12	47	33	19		40	26	12	47	33	19	5
1	8	15	22	29	36	43		8	15	22	29	36	43	1

y, tomando sucesivamente un término de cada una de las últimamente obtenidas, resultará la série total de restos

10 2 20 4 40 8 31 16 13 32 26 15.....

correspondientes á las potencias sucesivas de 10,

que contienen los restos respectivos de las potencias

10^1 10^7 10^{13}.....; 10^2 10^8 10^{14}..... ; 10^3 10^9 10^{12}
10^4 10^{10} 10^{16}.....; 10^5 10^{11} 10^{17}.....; 10^6 10^{12} 10^{18}

y que componen, tomando sucesivamente un término de cada una, la série total de restos

10 2 20 4 40 8 31 16 13 32 26.....

5.ª *Para el módulo* $121=11^2$ *cuéntese desde* $10=11-1$ *y desde* $12=11+1$, *de* 11 *en* 11 *unidades, y se tendrán las siguientes séries:*

10 21 32 43 54 65 76 87 98 109 120
12 23 34 45 56 67 78 89 100 111 $122\equiv1$

que equivalen á la série

10 12 21 23 32 34 43 45 54 56 65 67 etc.

formada contando, alternativamente, de 2 *en* 2 *y de* 9 *en* 9 *unidades.*

6.ª *Para el módulo* $13^2=169$, *cuéntese, respectivamente, desde* 10, 9, 12, 3, 4, 1, *de* 13 *en* 13 *unidades, y se obtendrán las séries de números*

10	23	36	49	62	75	88	101	114	127	140	153	166
9	22	35	48	61	74	87	100	113	126	139	152	165
12	25	38	51	64	77	90	103	116	129	142	155	168
3	16	29	42	55	68	81	94	107	120	133	146	159
4	17	30	43	56	69	82	95	108	121	134	147	160
1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157,

ó tomando, respectivamente, los términos de 7 *en* 7, 5 *en* 5, 11 *en* 11, 6 *en* 6, 8 *en* 8 *y* 2 *en* 2,

10	101	23	114	36	127	49	140	62	153	75	166	88
9	74	139	35	100	165	61	126	22	87	152	48	113
12	155	129	103	77	51	25	168	142	116	90	64	38
3	81	159	68	146	55	133	42	120	29	107	16	94
4	108	43	147	82	17	121	56	160	95	30	134	69
1	27	53	79	105	131	157	14	40	66	92	118	144,

y escribiéndolas, á contar desde los seis primeros restos 10, 100, 155, 29, 121, 27, *resultarán las séries de números*

10	101	23	114	36	127	49	140	62	153	75	166	88
100	165	61	126	22	87	152	48	113	9	74	139	35
155	129	103	77	51	25	168	142	116	90	64	38	12
29	107	16	94	3	81	159	68	146	55	133	42	120
121	56	160	95	30	134	69	4	108	43	147	82	17
27	53	79	105	131	157	14	40	66	92	118	144≡1,	

que componen, tomando sucesivamente un término de cada una, la série total de restos

10 100 155 29 121 27 101 165 129 107,.....

CAPÍTULO VI.

CARACTÉRES DE DIVISIBILIDAD INDEPENDIENTES DEL SISTEMA DE NUMERACION.

96. **Teorema.**—*En el sistema de numeracion cuya base es* b, *todo número* D, *divisor de* b^n-1, es decir, *de una potencia de la base disminuida en* 1, *dividirá á todo número cuyos grupos de* n *cifras formados á contar desde las unidades, y sumados, formen un múltiplo de* D.

Demostracion.—Consideremos el número

$$N=\ldots\ g_4\, g_3\, g_2\, g_1$$

en el cual, g_1, g_2, g_3,..... representan sus grupos sucesivos de n cifras.

Siendo $$b^n-1=\dot{D},$$

y, por consiguiente

$$b^{2n}-1=\dot{D},\ b^{3n}-1=\dot{D},\ b^{4n}-1=\dot{D},\ldots$$

resultará

$$N=g_4.b^{3n}+g_3.b^{2n}+g_2.b^n+g_1\equiv(\ldots g_4+g_3+g_2+g_1)\ (\text{mód. } D)$$

ó $$N=\dot{D}+(\ldots g_4+g_3+g_2+g_1).$$

97. **Corolario.**—*En el sistema decimal, un número será divisible por* 3 *y* 9, *por* 11, 33 *y* 99, *por* 111, 333, *y* 999 etc., *cuando la suma de sus períodos de* 1, 2, 3, etc. *cifras sean múltiplos respectivos de dichos divisores.*

Ejemplos: Se tiene: $2+1+6=9$;

luego 216 ó 126 ó $612=\overline{\dot{3}\text{ y }\dot{9}}$; $24+13+52=99=\overline{\dot{11}\text{ y }\dot{33}}$;

luego 135234 ó 521334, etc. $=\overline{\dot{11}\text{ y }\dot{33}}$ $251+748=999=\overline{\dot{111}}$;

luego 251748 ó $748251=\overline{\dot{111}}$.

98. **Teorema.**—*En el sistema de numeracion cuya base es* b, *todo número* D, *divisor de* b^n+1, es decir, *de una potencia de la base aumentada en* 1, *dividirá á todo número cuyos grupos de* 2n *cifras, formados á contar desde las unidades, y sumados, producen un múltiplo de* D.

Demostracion.—Sea el número

$$N = \ldots\ldots g_5 g_4 g_3 g_2 g_1,$$

en el cual, g_1, g_2, g_3,..... representan sus grupos sucesivos de $2n$ cifras.

Por hipótesis

$$b^n+1=\dot{D}; \quad ó \quad b^n=\dot{D}-1;$$

luego

$$b^{2n}=(\dot{D}-1)^2=\dot{D}^2+2.\dot{D}+1=\dot{D}+1, \text{ ó } b^{2n}\equiv 1 \text{ (mód. } D)$$

y, por consiguiente,

$$b^{4.n},\ b^{6.n},\ b^{8.n}, \ldots\ldots \overline{b^{2n}}\equiv 1 \text{ mód. } D) \ (82);$$

luego

$$N\equiv(\ldots\ldots g_4+g_3+g_2+g_1) \text{ (mód. } D).$$

Corolario.—*En el sistema de base* b, *un número*

$$N=\ldots\ldots g_5\, g_4\, g_3\, g_2\, g,$$

será divisible por b^n+1, es decir, *por una potencia de la base aumentada en* 1, *ó por un divisor* D, *de* b^n+1, *cuando la diferencia entre las sumas de sus grupos de lugar impar y de lugar par, de* n *cifras, contados desde las unidades, forman un múltiplo de dichos divisores.*

Demostracion.—Siendo $b^n=(b^n+1)-1$, resulta (82)

$$b^{3n},\ b^{5n},\ b^{7n}, \ldots\ldots b^{2n+1}=\overline{\dot{b^n+1}}-1$$

y, por consiguiente, siendo g_1, g_3, g_5,..... los grupos de lugar impar de n cifras y g_2, g_4,..... los grupos el lugar par, se tendrá:

$$N=\dot{\overline{b^n+1}}+(\ldots\ldots g_5+g_3+g_1)-(\ldots\ldots g_4+g_2);$$

luego, si

$$(\ldots\ldots g_5+g_3+g_1)-(\ldots\ldots g_4+g_2)=\dot{\overline{b^n+1}} \text{ ó } =\dot{\overline{D}}$$

N será divisible por b^n+1 ó por cualquier divisor D de este módulo.

Ejemplo: Siendo $1000+1=11.13$ y

$$573+432-823=182=\dot{\overline{13}},$$

se tendrá:

$$573823432=\dot{\overline{13}},\ 432823573=\dot{\overline{13}}.$$

PARTE SEGUNDA.

TRATADO DEL NÚMERO CONCRETO.

SECCION PRIMERA.

CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO COMENSURABLE.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO INDETERMINADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

FRACCIONES ORDINARIAS.

§ 1.º—Nociones preliminares.

99. **Definiciones.**—NÚMERO FRACCIONARIO Ó QUEBRADO *es un conjunto de partes de una unidad concreta indeterminada. Unidad* CONCRETA *es todo objeto real ó existente en la naturaleza.* UNIDAD FRACCIONARIA *es cada una de dichas partes.*

Refiriéndose toda especie de cantidad matemática al espacio ó al tiempo, ó presentándose bajo una de estas formas, hay que distinguir en su concepto y expresion dos elementos separables, á saber: 1.º *El número resultante de su comparacion con una unidad de su especie.* 2.º *La distincion y designacion de dicha especie* que es la misma que la de la cantidad. Pero cuando la cantidad que se mide no contiene exactamente á la unidad medida, es preciso medir la cantidad, no por medio de esta unidad sino por otra unidad inferior que resulta de dividir la primera en 2, 3, 4, etc. partes iguales. Estos números que resultan de medir la cantidad, no con la unidad, sino con una de sus partes alícuotas, se llaman números fraccionarios.

Los números fraccionarios, segun acaba de indicarse, contienen en su expresion dos elementos: *la pluralidad* ó *número* de unidades fraccionarias y la *especie* de la unidad fraccionaria, la cual depende del número de partes iguales en que se ha dividido la unidad para medir la cantidad. Así pues:

Un quebrado consta de dos términos: NUMERADOR *que expresa el número de unidades fraccionarias en aquél contenidas y* DENOMINADOR *que expresa la denominacion ó especie de dichas unidades fraccionarias, cuya magnitud está determinada por el número de partes en que se ha dividido la unidad absoluta ó entera.*

100. **Numeracion.**—*Un quebrado se expresa escribiendo el numerador, debajo una raya y debajo de ésta el denominador.* Así, 5 unidades fraccionarias que resultan de dividir la unidad entera en 8 partes iguales se escribirán como sigue: $\frac{5}{8}$.

Un quebrado se lee nombrando el numerador, como número cardinal ó absoluto, y en seguida expresando la denominacion por medio de los partitivos MEDIO, TERCIO, CUARTO, etc. *hasta* DÉCIMO, *si el denominador es uno de los diez primeros números, y, en adelante, añadiendo la terminacion* AVO *al número cardinal que expresa dicho denominador.* Así: $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{13}$ se leerán, respectivamente, tres séptimos, dos quintos, seis treceavos. Y, como estas expresiones no indican cuál sea la unidad cuyos tres séptimos, etc. se dan, se vé que los quebrados son, concretos de unidad indeterminada.

101. **Division.**—*Un quebrado se llama* PROPIO *cuando el numerador es menor que el denominador é* IMPROPIO *cuan-*

do es igual ó mayor. El quebrado propio no llega á valer la unidad, pues no se toman tantas partes como las en que se ha dividido. El quebrado impropio vale igual ó más que la unidad, pues se toman todas ó mayor número que el correspondiente á una unidad.

Ejemplos: $\frac{5}{7}$ es quebrado propio, $\frac{6}{6}$ y $\frac{7}{4}$ son impropios.

Los quebrados impropios se llaman, en general, *números fraccionarios*.

Se llama NÚMERO MIXTO *á la reunion de un número entero y un quebrado*. Así $4 + \frac{6}{9}$ es un número mixto.

QUEBRADOS Ó FRACCIONES DECIMALES *son aquéllos que tienen por denominador la unidad seguida de ceros*.

Ejemplos: $\frac{7}{10}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{47}{1000}$.

Los quebrados decimales impropios se llaman *números decimales*.

102. **Orígen.**—La generacion de los números fraccionarios se verifica por medio de la division, pero no una *division de pluralidades*, como se consideró en la teoría del número abstracto ó entero, sino una *division de la unidad*, y esta division de la unidad sirve de complemento á la division de pluralidades, pues hace posible la division en todos los casos, lo cual no se verificaba siempre en el caso del número entero ó abstracto. Así, la division 17 : 5, imposible por pluralidades, se hace posible mediante la fraccion $\frac{17}{5}$ que expresa una division de la unidad, sin alteracion del número ó numerador, ó sea una sustitucion de la unidad entera por la unidad fraccionaria cinco veces menor, es decir, por $\frac{1}{5}$.

Por esta razon: *Un quebrado equivale á una division cuyo dividendo es el numerador y cuyo divisor es el denominador.*

§ 2.º—Propiedades de los quebrados.

103. **Principio general.**—*Un número concreto se hará cierto número de veces mayor ó menor, no sólo haciendo el número de sus unidades ó su pluralidad dicho número de veces mayor ó menor, sino haciendo dicho número de veces mayor ó menor la unidad fraccionaria.*

El *número* de partes varía de *igual manera* que el *numerador* que las expresa, la *magnitud*, *inversamente* al *denominador*, pues que las partes de la unidad, ó unidades fraccionarias, son tanto más pequeñas ó mayores, cuanto mayor ó menor es el número de partes en que se ha dividido la unidad principal.

Ejemplo: $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, porque entre 4 partes de éstas componen lo mismo que entre 8 de aquéllas, es decir, la unidad.

104. Del principio enunciado se deducen las siguientes:

Propiedades.—1.ª *Si aumenta ó disminuye el numerador, aumenta ó disminuye el quebrado, y si aumenta ó disminuye el denominador, disminuye ó aumenta el quebrado.* Así $\frac{7}{8} > \frac{3}{8}$, $\frac{5}{9} < \frac{5}{7}$.

2.ª *Si el numerador de un quebrado se hace cierto número de veces mayor ó menor, el quebrado se hace el mismo número de veces mayor ó menor*, pues como varía el numerador, así varía el número de partes.

Ejemplo: $\frac{20}{7}$ es 5 veces mayor que $\frac{4}{7}$.

3.ª *Si el denominador de un quebrado se hace cierto número de veces mayor ó menor, el quebrado se hace el* *mismo número de veces menor ó mayor*, pues la magnitud de las partes varía inversamente á como varía el denominador, haciéndose tantas veces menor ó mayor aquéllas como veces mayor ó menor se hace éste.

Ejemplo: $\frac{7}{15}$ es 3 veces menor que $\frac{7}{5}$.

4.ª *Si el numerador y el denominador se multiplican ó dividen á la vez por un mismo número, el quebrado no altera*, pues en el nuevo quebrado hay cierto número de veces más ó menos partes, pero el mismo número de veces menores ó mayores.

Ejemplo: El quebrado $\frac{12}{18}$ y el $\frac{2}{3}$ equivalen al $\frac{4}{6}$.

5.ª *Un entero puede reducirse á quebrado de denominador dado, multiplicándole por éste, y poniendo al producto dicho denominador*, porque el nuevo número consta de un número de unidades cierto número de veces mayor, pero el mismo número de veces más pequeñas.

Ejemplo: 7 es igual $\frac{14}{2}$ á $\frac{21}{3}$ á $\frac{28}{4}$ etc.

6.ª *Un quebrado impropio es igual á un número mixto cuya parte entera es el cociente entero que resulta de dividir el numerador por el denominador y cuyo quebrado tiene por numerador el residuo y por denominador el del quebrado*, y recíprocamente, *un número mixto puede reducirse á quebrado multiplicando el entero por el denominador y agregando al producto el denominador, que se pondrá como denominador del resultado.*

Ejemplos: $\frac{39}{9} = \frac{36}{9} + \frac{3}{9} = 4 + \frac{3}{9}$,

$$5 + \frac{2}{7} = \frac{35}{7} + \frac{2}{7} = \frac{37}{7}.$$

7.ª *Si aumentan los dos términos de un quebrado, en un mismo número, el quebrado aumenta, si es propio, y disminuye, si es impropio.* Así:

$$\frac{5+3}{7+3} > \frac{5}{7}.$$

En efecto: aumentando las cinco unidades del numerador en 3, á cada una corresponde un aumento de $\frac{3}{5}$; aumentando las 7 unidades del denominador en 3, á cada una corresponde un aumento de $\frac{3}{7}$; luego el número de partes ha aumentado más que disminuido la magnitud de éstas, y, por consiguiente, el valor del quebrado ha aumentado.

Si el quebrado fuese $\frac{7}{5}$, se tendría:

$$\frac{7+3}{5+3} < \frac{7}{5},$$

pues cada unidad del numerador habría aumentado en $\frac{3}{7}$ y cada unidad del denominador en $\frac{3}{5}$, es decir, el denominador menos que el numerador.

En general se tiene, pues,

$$\frac{a}{a+b} < \frac{a+n}{a+b+n}, \quad \frac{a}{a} = \frac{a+n}{a+n}, \quad \frac{a+b}{a} > \frac{a+b+n}{a+n}$$

hallándose expresados los aumentos respectivos del numerador y denominador, en cada caso, por

$$\frac{n}{a} \text{ y } \frac{n}{a+b} \text{ (1.º)}; \quad \frac{n}{a} \text{ y } \frac{n}{a} \text{ (2.º)}; \quad \frac{n}{a+b} \text{ y } \frac{n}{a} \text{ (3.º)}.$$

Dependiendo el valor del incremento del numerador y denominador del valor de n resulta además que: *Un quebrado propio aumentará tanto más, cuanto mayor sea el número que se aumente á sus dos términos, y un quebrado impropio disminuirá tanto más, cuanto mayor sea el número que se aumente á sus dos términos.*

§ 3.º—Adicion y sustraccion.

105. **Definicion.**—SUMAR ó RESTAR *números fraccionarios es hallar, en número y magnitud, el valor de la suma ó diferencia de dichos números.*

106. **Magnitud y número de las unidades.**—En la adicion y sustraccion de los números fraccionarios hay que considerar, además del número de unidades fraccionarias, su magnitud; pero si los números considerados, se reducen á unidades de la misma magnitud ó especie, sin alterar su valor, dichas operaciones se reducirán á las de los números absolutos, sin más que asignar al resultado la especie ó denominacion correspondiente. Así, es necesaria la

107. **Reduccion á una misma especie ó á un comun denominador.**—**Regla.**—*Para reducir quebrados á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás*, pues así no alteran (104, 4.ª).

Ejemplo: Sean los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{4}{6}$. Se tiene:

$$\frac{2}{3} = \frac{2.7.6}{3.7.6}, \frac{5}{7} = \frac{5.3.6}{7.3.6}, \frac{4}{6} = \frac{4.3.7}{6.3.7},$$

ó $$\frac{2}{3} = \frac{84}{126}, \frac{5}{7} = \frac{90}{126}, \frac{4}{6} = \frac{84}{126},$$

108. **Propiedades.**—*Como en el caso del número entero, la adicion y sustraccion de los números fraccionarios son* ASOCIATIVAS *y* CONMUTATIVAS.

109. **Regla.**—*Para sumar ó restar números quebrados, de iguales denominadores, se suman ó restan los numeradores, afectando al resultado del denominador comun. Si los quebrados propuestos tienen distintos denominadores, se reducirán á un comun denominador, quedando reducidos al caso anterior.*

Si los sumandos son números mixtos, se sumarán aparte los enteros, despues de haberse sumado los quebrados, y si de éstos resultan algunas unidades enteras, se agregarán á la parte entera del resultado. En este último caso pueden reducirse las expresiones mixtas á quebrados, quedando reducido al anterior.

Ejemplos:

1.º $$\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=\frac{11}{7}.$$

2.º $$\frac{8}{9}-\frac{6}{9}=\frac{2}{9}.$$

3.º $$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}=\frac{2.5.7}{3.5.7}+\frac{4.3.7}{5.3.7}+\frac{6.3.5}{7.3.5}=$$
$$=\frac{70}{105}+\frac{84}{105}+\frac{90}{105}=\frac{244}{105}.$$

4.º $$3\frac{7}{9}+5\frac{6}{8}=3+5+\frac{7}{9}+\frac{6}{8}=8+\frac{56}{72}+$$
$$+\frac{54}{72}=8+\frac{110}{72}=8+1+\frac{38}{72}=9\frac{38}{72}$$

ó $$3\frac{7}{9}+5\frac{6}{8}=\frac{34}{9}+\frac{46}{8}=\frac{272}{72}+\frac{414}{72}=\frac{686}{72}=9\frac{38}{72}.$$

5.º $$\frac{7}{8}-\frac{4}{5}=\frac{35}{40}-\frac{32}{40}=\frac{3}{40}.$$

6.º $$6-\frac{3}{8}=5+\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=5\frac{5}{8}.$$

§ 4.º—Multiplicacion y division.

110. **Definicion.**—MULTIPLICAR *un número entero ó quebrado por otro entero ó quebrado, es formar un tercer número, con uno de ellos, como el otro se ha formado con la unidad, ó hallar un tercer número que sea respecto de uno de ellos, como el otro lo es respecto de la unidad.*

Así, multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{6}$ es formar un tercer número con el $\frac{3}{4}$, como $\frac{5}{6}$ se halla formado respecto á la unidad; pero el $\frac{5}{6}$ se ha formado dividiendo la unidad en seis partes iguales y tomando 5 de éstas; luégo el producto buscado se formará hallando $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$ y multiplicando el resultado por 5, es decir:

$$Producto=\left(\frac{1}{6}\text{ de }\frac{3}{4}\right)\times 5;$$

111. **Reciprocamente.**—DIVIDIR *un número entero ó quebrado por otro entero ó quebrado, es formar un tercero con el cual se halle formado uno de ellos, como el otro se ha formado con la unidad, ó hallar un tercer número respecto al cual sea uno de los dados como el otro lo es respecto de la unidad.*

Así, dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{6}$ es formar un tercer número, con el cual deba hallarse formado el $\frac{3}{4}$ como el $\frac{5}{6}$ está formado con la unidad, y si el $\frac{3}{4}$ es los $\frac{5}{6}$ del número que se busca, éste será, inversamente, los $\frac{6}{5}$ de $\frac{3}{4}$; luego el cociente buscado se formará hallando $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ y multiplicando el resultado por 6, es decir:

$$Cociente=\left(\frac{1}{5}\text{ de }\frac{3}{4}\right)\times 6$$

pero $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}=\frac{3}{6.4}$ (104, 3.°);

luego: *producto*$=\frac{3.5}{4.6}$.

Luego: **Regla.**—*Para multiplicar dos números quebrados, se multiplican los numeradores, y al resultado se pone por denominador el producto de los denominadores.*

112. **Corolario.**—*Para multiplicar dos números mixtos, se reducen á quebrados, y despues se practica la regla anterior.*

pero $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}=\frac{3}{5.4}$ (104, 3.°);

luego: *cociente*$=\frac{3.6}{4\ 5}$.

Luego: **Regla.**—*Para dividir un número quebrado por otro, se multiplica el dividendo por el divisor invertido.*

113. **Corolario.**—*Para dividir dos números mixtos, se reducen á quebrados, y despues se practica la regla anterior.*

114. **Funciones del multiplicando y dividendo respecto al multiplicador y divisor.**—El multiplicando y el dividendo ejercen funciones distintas á las del multiplicador y divisor. Los primeros son simplemente números ya formados, los segundos pueden considerarse como sus modificadores, destinados á transformarlos en otros números (productos ó cocientes) ó á realizar su generacion. El multiplicador modifica al multiplicando como él es respecto á la unidad; el divisor modifica al dividendo de una manera inversa á como él es respecto á la unidad. Por el multiplicador, el multiplicando asciende en la escala de las pluralidades, como por el divisor el dividendo desciende en la escala de las unidades. Así, *multiplicando* es sinónimo de *numerador*, como *divisor* es sinónimo de *denominador*, segun la idea que ya se ha dado de estos términos del quebrado.

En el multiplicador y en el divisor fraccionarios, los términos del mismo nombre ejercen entre sí funciones inversas, mientras que los de distinto nombre ejercen las mismas, de manera que:

El numerador del multiplicador MULTIPLICA, *como el numerador del divisor* DIVIDE, *y el denominador del multiplicador* DIVIDE *como el denominador del divisor* MULTIPLICA;

así, pues,

el numerador del multiplicador <> *al denominador divisor,*
(pues ambos multiplican)

como

el denominador del multiplicador <> *al numerador del divisor,*
(pues ambos dividen).

Ejemplo: Sean $\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}=\frac{3.5}{7.9}$, $\frac{3}{7}:\frac{5}{9}=\frac{3.9}{7.5}$.

El 5 del multiplicador multiplica, como el 5 del divisor divide, y el 9 del multiplicador divide, como el 9 del divisor multiplica. En resumen, el 5 del multiplicador y el 9 del divisor multiplican, como el 9 del multiplicador y el 5 del divisor dividen.

115. **Corolario.**—*En el multiplicador y divisor, los términos de igual nombre ejercen funciones inversas, é idénticas los de nombres distintos.*

Siendo la division siempre posible mediante la consideracion de las fracciones, pueden establecerse las siguientes proposiciones:

116. **Definicion.**—*Producto ó cociente sucesivo de varios números enteros ó fraccionarios es el resultado de multiplicar ó dividir los dos primeros números, despues el resultado obtenido por el siguiente factor ó divisor, y así sucesivamente.*

Ejemplos de multiplicaciones y divisiones sucesivas :

1.º $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}=\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{6}=\frac{12}{35}\cdot\frac{2}{6}=\frac{24}{210}.$

2.º $\frac{4}{5}:\frac{6}{7}:\frac{3}{9}:\frac{2}{8}=\left(\frac{4}{5}:\frac{6}{7}\right):\frac{3}{9}:\frac{2}{8}=\frac{28}{30}:\frac{3}{9}:\frac{2}{8}=$

$=\left(\frac{28}{30}:\frac{3}{9}\right):\frac{2}{8}=\frac{252}{900}:\frac{2}{8}$ etc.

117. **Reglas.**—1.ª *Para multiplicar sucesivamente un quebrado por otros varios, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores tambien entre sí; el primer producto será el numerador y el segundo el denominador.*

2.ª *Para dividir sucesivamente un quebrado por otros, se multiplica el numerador del dividendo por el producto de los denominadores de los divisores sucesivos y el denominador del dividendo por el producto de los numeradores; el primer producto será el numerador y el segundo el denominador del cociente.*

118. **Propiedad conmutativa.**—1.ª *El producto sucesivo de varias fracciones no altera, cualquiera que sea el órden en que se efectúen las multiplicaciones.* Así, siendo

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{3.5.6}{7.9.8} \text{ y } \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{8}=\frac{5.3.6}{9.7.8},$$

ambos productos serán iguales, pues $3.5.6=5.3.6$ y $7.9.8=9.7.8$ (30, 3.º).

2.ª *El cociente sucesivo de varias fracciones no altera, cualquiera que sea el órden en que se tomen los diversos divisores.* Así, siendo

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}:\frac{7}{9}=\frac{3.6.9}{4.5.7} \text{ y } \frac{3}{4}:\frac{7}{9}:\frac{5}{6}=\frac{3.9.6}{4.7.5},$$

ambos cocientes serán iguales, pues $3.6.9=3.9.6$ y $4.5.7=4.7.5$.

119. **Propiedad asociativa.**—1.ª *El producto sucesivo de varias fracciones no altera, aunque se sustituyan varios factores consecutivos por su producto efectuado, ó cualquiera de los factores por un producto indicado equivalente.* Así:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{24}{45}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{168}{360}\cdot\frac{2}{3}=\frac{336}{1080} \text{ etc.}$$

120. De la propiedad asociativa se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar ó dividir un número entero ó fraccionario por un producto de números enteros y fraccionarios ó todos fraccionarios, basta multiplicarlo ó dividirlo, sucesivamente, por cada uno de los factores.*

Ejemplos: 1.º $\frac{5}{9}\times\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{13}=\frac{5.6.4.8}{9.7.5.13}=\frac{960}{4095}.$

2.º $\frac{6}{7}:\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6.5.8.7}{7.4.3.2}=\frac{1680}{168}.$

121. **Propiedad distributiva.**—1.ª *Para multiplicar un número mixto, ó una suma de fracciones, por otro número mixto ó una suma de fracciones, basta multiplicar cada parte ó sumando del multiplicando por cada parte ó sumando del multiplicador, ó tambien, se reducen el multiplicando y multiplicador á un comun denominador y despues se efectúan los productos.*

Ejemplo: Multiplicar $4+\frac{6}{9}$ por $5+\frac{7}{8}$. Se tiene:

$$\left(4+\frac{6}{9}\right)\times\left(5+\frac{7}{8}\right)=\left(4+\frac{6}{9}\right)\times5+\left(4+\frac{6}{9}\right)\times\frac{7}{8}=$$
$$=20+\frac{30}{9}+\frac{28}{8}+\frac{42}{72}=20+\frac{228960}{51840}=27+\frac{2160}{5184}=27+\frac{5}{8}$$

y tambien podrá obtenerse el resultado, como sigue:

$$\left(4+\frac{6}{9}\right)\times\left(5+\frac{7}{8}\right)=\frac{42}{9}\times\frac{47}{8}=27+\frac{30}{72}=27+\frac{5}{12}.$$

2.ª *Para dividir un número mixto, ó una suma ó diferencia de fracciones, por un número entero ó fraccionario, basta dividir cada parte ó sumando del dividendo por el divisor.*

Ejemplo: Dividir $5+\frac{7}{9}$ por $\frac{3}{8}$. Se tiene:

$$\left(5+\frac{7}{9}\right)\times\frac{3}{8}=5\cdot\frac{3}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{8}+\frac{21}{72}.$$

CAPÍTULO II.

FRACCIONES DE FORMA ENTERA.

§ 1.—Nociones generales.

122. **Numeracion.**—Las fracciones, cuyos denominadores son la base del sistema de numeracion que se considera, ó potencias de esta base, admiten una expresion oral y escrita análoga á la de los números considerados en dicho sistema.

Sea un sistema de base b. Si cada unidad se considera dividida en b partes iguales, se tendrán unidades de un órden inferior al de las unidades de primer órden, que serán con respecto á éstas, como éstas respecto á las de segundo.

Dichas unidades son las unidades fraccionarias *de primer órden.* Si cada unidad de éstas se considera dividida en b partes iguales, se obtendrán b unidades de *segundo órden;* y continuando de esta manera, se obtendrá la série de unidades

$$\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^4}, \ldots\ldots$$

tales, que *cada unidad de un órden contendrá* b *del órden inmediato inferior*. Así:

$$1=\frac{1}{b}.b;\ \frac{1}{b}=\frac{1}{b^2}.b;\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^3}.b;\ldots\ldots,$$

y, por consiguiente,

$$1=\frac{1}{b}.b=\frac{1}{b^2}.b^2=\frac{1}{b^3}.b^3=\ldots\ldots$$

De estas consideraciones resulta que: *Todo número compuesto de unidades fraccionarias, obtenidas dividiendo la unidad entera y cada una de las que así resulten en tantas partes iguales como unidades tiene la base del sistema de numeracion, puede escribirse bajo forma entera colocando, sucesivamente, las unidades fraccionarias de los diferentes órdenes á continuacion de las enteras, de las cuales se separarán con una coma.*

Ejemplo: $1453{,}642_7$ es un número fraccionario de forma entera, considerado en el sistema de base 7, cuya forma explícita es:

$$1.7^3+4.7^2+5.7+3+6.\frac{1}{7}+4.\frac{1}{7^2}+\frac{2}{7^3}.$$

123. **Fracciones decimales.**—En el caso de ser $b=10$, las unidades fraccionarias de primero, segundo, tercero...., órden, se llaman respectivamente

décimas, *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, ...

es decir, que: *tienen denominaciones análogas, respectivamente, á las unidades enteras que se componen de la unidad absoluta, como ésta se compone de aquéllas, y se colocan de igual modo hacia la derecha.* Así:

diez y *décima*	se escriben	10 y 0,1
cien y *centésima*	»	100 y 0,01
mil y *milésima*	»	100 y 0,001

. . . .

supliéndose con un cero el lugar de las unidades.

Regla.—*Para escribir un número decimal, se escribe la parte entera, á continuacion una coma, y despues la parte decimal, colocando en el primer lugar la cifra que expresa las décimas, en el segundo las centésimas*, etc., y **recíprocamente**, *para leer un número decimal, se lee la parte entera, y á continuacion la parte decimal, como si fuera un número entero, añadiendo despues la denominacion de la última cifra.*

Principio.—*Todo número decimal es igual al número entero formado por el conjunto de sus cifras, afectado de la denominacion correspondiente al órden de la última de éstas.*

Ejemplo: 238,56 es igual á 23865 centésimas$=\dfrac{23865}{100}$.

124. **Propiedades.** 1.ª *Un número fraccionario, expresado en cualquier sistema de numeracion, se multiplica ó divide por una potencia de la base, corriendo la coma hácia la derecha ó la izquierda tantos lugares como unidades tiene el exponente.* Así:

$$476{,}5432_8=4{,}765432_8 . 8^2, \quad 476{,}5432_8=476543{,}2_8 : 8^3.$$

2.ª *Un número fraccionario de forma entera, expresado en cualquier sistema de numeracion, no altera aña-*

diendo ceros á su derecha, pues la parte entera no varía, y las unidades fraccionarias de cada órden aumentan por su número, cuanto disminuye, en valor, por su denominación. Así:

$$37{,}49_{10}=37{,}4900_{10},$$

pues $0{,}49=\frac{49}{100}$ $0{,}4900=\frac{4900}{10000}=\frac{49}{100}$.

§ 2.º—Cálculo de las fracciones de forma entera.

125. **Adicion y sustraccion.—Regla.**—*Para sumar ó restar fracciones de forma entera, se colocan los sumandos, ó el minuendo y sustraendo, en columna, de manera que se correspondan las unidades de los mismos órdenes, y se efectúan dichas operaciones con los números enteros.*

Ejemplos: 1.º Efectuar las siguientes adiciones

$$\textit{Sistema decimal.}\left\{\begin{array}{r}87{,}464\\54{,}693\\823{,}546\\\hline 965{,}703\end{array}\right.\qquad \textit{Sistema de base 8.}\left\{\begin{array}{r}23{,}564\\43{,}236\\54{,}347\\\hline 143{,}371\end{array}\right.$$

2.º Efectuar las siguientes sustracciones:

$$\textit{Sistema decimal.}\left\{\begin{array}{r}46{,}572\\32{,}856\\\hline 13{,}716\end{array}\right.\qquad \textit{Sistema de base 5.}\left\{\begin{array}{r}23{,}421\\12{,}431\\\hline 10{,}440\end{array}\right.$$

126. **Multiplicacion y division.—Regla.**—*Para multiplicar ó dividir dos fracciones de forma entera, se multiplican ó dividen los números, poniéndose al producto la denominacion correspondiente al producto de los denominadores, y al cociente, el cociente del número correspon-*

diente á la denominacion del divisor dividido por el número correspondiente á la denominacion del dividendo.

Demostracion.—Siendo, por ejemplo,

$$84{,}7\times 5{,}63=\frac{847}{10}\times\frac{563}{100}$$

y $$84{,}7:5{,}63=\frac{847}{10}:\frac{563}{100}=\frac{847.100}{563.10}.$$

resulta :

$$84{,}7\,.\,5{,}63=\frac{847\,.\,563}{1000} \text{ y } 84{,}7:5{,}63=\frac{847}{563}.\frac{100}{10}=\frac{8470}{563}.$$

LIBRO SEGUNDO.

CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO DETERMINADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES.

127. **Definiciones.**—NÚMERO CONCRETO *es un conjunto de unidades concretas determinadas.*

ESPECIES *de unidades concretas son las variedades de éstas que existen, segun su diversa naturaleza.*

En cada especie de unidades concretas se distinguen, como en los números abstractos, varios órdenes; cuya dependencia es arbitraria, segun las localidades donde se emplean.

NÚMEROS INCOMPLEJOS *son los números concretos simples ó que constan de un solo órden de unidades.*

Ejemplo: 7 arrobas.

NÚMEROS COMPLEJOS *son los números concretos compuestos de diversos órdenes de unidades.*

Ejemplo: 4 arrobas, 9 libras y 5 onzas.

SISTEMA *de números concretos* ó SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS *es el conjunto de unidades de diversas especies y órdenes empleados en una localidad, en las relaciones comerciales ó sociales.*

En el sistema de unidades concretas, hoy vigente, se distingue, para cada especie de unidades, una *unidad principal ó fundamental* cuyos múltiplos ó submúltiplos constituyen la variedad, que en la misma se admite.

128. **Especies de unidades concretas.**—Las especies de unidades concretas son muy diversas y varían á medida que se dilatan los horizontes de las ciencias físico-naturales, perteneciendo su definicion á las teorías de estas ciencias que de ellas se ocupan. Así, por ejemplo, la mecánica considera el *kilográmetro* ó unidad de fuerza, la calorimetría define la *caloría* ó unidad de calor, etc. En Aritmética se consideran las unidades fundamentales á las cuales todas las demás se refieren, ó de las cuales se componen, éstas son:

longitudes, *superficies*, *volúmenes*, *capacidades*, *pesos* *unidades monetarias* y *unidades de tiempo*.

129. **Concepto del número concreto.**—El concepto del número concreto consta de dos elementos: el *número abstracto* resultante de comparar una cantidad concreta ó magnitud con la unidad de su especie y *la designacion de esta especie;* pero estando expresada la dependencia de cada órden de unidades, respecto á las demás, por el número de veces que cada una contiene ó está contenida en otras, la denominacion de cada órden es lo mismo que el denominador de los números fraccionarios. Por esta razon: *Todo número concreto, referido á otro de un órden superior, puede considerarse como un número fraccionario cuyo denominador está expresado por las veces que su órden se halla contenido en aquél á que se refiere*, es decir, que: *todo número concreto puede considerarse como un número* FRACCIONARIO *implícito*.

Ejemplo: 7 reales$=\dfrac{7}{20}$ de duro; porque un real es la veinteava parte del duro.

CAPÍTULO II.

NUMERACION DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

130. **Sistemas antiguos ó de ley de dependencia variable.**—Entre los sistemas de pesas y medidas adoptados en los diversos países, convendrá citar como ejemplo, el admitido hasta poco há en España, cuya nomenclatura es la siguiente:

UNIDADES DE LONGITUD. La *legua*$=1666\frac{2}{3}$ estadales; el *estadal*$=4$ varas; la *vara*$=3$ piés; el *pié*$=12$ pulgadas; la *pulgada*$=12$ líneas; la *línea*$=12$ puntos.

En la navegacion se emplean las unidades longitudinales siguientes: la *legua marina*$=3$ millas; la *milla*$=9\frac{7}{30}$ cables; el *cable*$=12$ brazas; la *braza*$=6$ piés.

MEDIDAS DE SUPERFICIE. Son cuadrados que tienen por lados las unidades longitudinales, y son: la *fanega*$=576$ estadales cuadrados; la *aranzada*$=400$ estadales cuadrados.

MEDIDAS DE VOLÚMEN Ó CÚBICAS. Son cubos que tienen por aristas magnitudes iguales á las unidades de longitud.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA ÁRIDOS. Son las siguientes: el *cahiz*$=12$ fanegas; la *fanega*$=12$ celemines; el *celemin*$=4$ cuartillos.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA LÍQUIDOS. El *moyo*$=16$ cántaras; la *cántara*$=4$ cuartillas; la *cuartilla*$=2$ azumbres; la *azumbre*$=4$ cuartillos; el *cuartillo*$=4$ copas.

MEDIDAS DE PESO. Son: la *tonelada*$=20$ quintales; el *quintal*$=4$ arrobas; la *arroba*$=25$ libras; la *libra*$=16$ onzas; *la onza*$=16$ adarmes; el *adarme*$=3$ tomines; el *tomin*$=12$ granos.

UNIDADES MONETARIAS. Son: la *onza*$=16$ duros; el *duro*=20 reales; el *real*=34 maravedises. Además se conocen el *centen*=100 reales; el *doblon*=80 reales, el *escudo de oro*=40, etc., la *peseta*=4 reales y otras de cobre que ya no se usan.

UNIDADES DE TIEMPO. Son: el *siglo*=20 lustros; el *lustro*=5 años; el *año*=12 meses; el *mes*=30, 31, 28 ó 29 dias, segun los casos; el *dia*=24 horas; la *hora*=60 minutos; el *minuto*=60 segundos.

131. **Sistema moderno ó de ley de dependencia constante.**—El sistema moderno, de ley de dependencia constante, se llama *sistema métrico decimal*, porque su base es el *metro* y la ley de dependencia es la ley decimal, empleándose para expresar los múltiplos y submúltiplos de las diversas unidades, las palabras griegas

miria, *kilo*, *hecto*, *deca*, y *deci*, *centi*, *mili*,

que significan respectivamente,

10000, 1000, 100, 10, 0,1, 0,01, 0,001.

Su nomenclatura es la siguiente:

UNIDADES DE LONGITUD. El **metro**, unidad fundamental del sistema, es una longitud igual á la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por Paris. Se expresa por su inicial *m*. Las demás unidades son:

el *miriámetro*, *kilómetro*, *hectómetro*, *decámetro*,
decímetro, *centímetro* y *milímetro*,

que se expresan con las iniciales:

Mm, *Km*, *Dm*, *dm*, *cm*, *mm*.

UNIDADES SUPERFICIALES. Son cuadrados que tienen por lados las unidades lineales, y son: el *miriámetro cuadrado* (Mm^2), el *kilómetro cuadrado* (Km^2), el *hectómetro cuadrado* (Hm^2) que se llama *hectárea*, el *decámetro cuadrado*

(Dm^2) que se llama *área*, el *metro cuadrado* (m^2) que se llama *centiárea*, etc.

Unidades de volúmen. El *decímetro cúbico* (dm^3), el *centímetro cúbico* (cm^3) y el *milímetro cúbico* (mm^3) (1).

Unidades de capacidad. El **litro**, unidad principal, es una vasija cuya cabida es igual al volúmen de un decímetro cúbico. Se expresa con la inicial l, las demás unidades son:

el *kilólitro* (Kl), *hectólitro* (Hl), *decálitro*, (Dl), etc.

Unidades de peso. El **gramo** (g), unidad principal, es un peso igual al del agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados sobre cero, que llena una vasija de un centímetro cúbico de capacidad. Las demás unidades son:

el *kilógramo* (kg), *hectógramo* , (hg), etc.

132. **Forma compleja de los números concretos.**—*Todo número complejo puede considerarse como un número abstracto compuesto de tantos órdenes de unidades como órdenes de unidades concretas lo componen, dependientes entre sí, no segun una base ó ley constante como en los sistemas de numeracion de los números abstractos, sino segun bases distintas, por lo general, y referidas todas á la inferior especie.*

Si se emplean letras para expresar el número absoluto de unidades de cada órden concreto y un subíndice para indicar la ley de dependencia de cada unidad respecto á su inmediata inferior, las formas de los números complejos, pertenecientes á los sistemas de pesos y medidas considerados, son las siguientes :

---

(1) Los múltiplos del metro cúbico no se usan generalmente.

Sistema antiguo:

$\mathbf{a}_{1666\frac{2}{3}}\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{c}_3\ \mathbf{d}_{12}\ \mathbf{e}_{12}\ \mathbf{f}_{12}\ \mathbf{g}$ *puntos...*	*(para las unidades longitudinales.)*
$\mathbf{a}_{12}\ \mathbf{b}_{12}\ \mathbf{c}_4\ \mathbf{d}$ *cuartillos............*	*(unidades de capacidad para áridos.)*
$\mathbf{a}_{16}\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{d}_4\ \mathbf{e}_4\ \mathbf{f}$ *copas...........*	*(unidades de capacidad para líquidos.)*
$\mathbf{a}_{20}\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{c}_{25}\ \mathbf{d}_{16}\ \mathbf{e}_{16}\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{g}_{12}\ \mathbf{h}$ *granos...*	*(unidades de peso.)*
$\mathbf{a}_{16}\ \mathbf{b}_{20}\ \mathbf{c}_{34}\ \mathbf{d}$ *maravedises.........*	*(unidades monetarias.)*
$\mathbf{a}_{20}\ \mathbf{b}_5\ \mathbf{c}_{365}\ \mathbf{d}_{24}\ \mathbf{e}_{60}\ \mathbf{f}_{60}\ \mathbf{g}$ *segundos...*	*(unidades de tiempo.)*

Sistema métrico decimal:

$\mathbf{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}_{10}$ *milímetros ......*	*(unidades de longitud.)*
$\mathbf{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}_{100}$ *milíms. cuadrs. .*	*(unidades superficiales.)*
$\mathbf{f\ g\ h}_{1000}$ *milíms. cúbicos...*	*(unidades de volúmen.)*
$\mathbf{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}_{10}$ *mililitros.......*	*(unidades de capacidad.)*
$\mathbf{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}_{10}$ *miligramos . ...*	*(unidades de peso.)*

133. **Forma incompleja de los números concretos.**—*Todo número complejo puede considerarse como una fraccion ordinaria ó decimal, segun que pertenezca á un sistema de dependencia variable ó al sistema métrico decimal, cuyo numerador sea el número absoluto de unidades de inferior especie que contiene y cuyo denominador sea el número de veces que la unidad, en la cual se quiere expresar, contiene á la inferior.* Así:

$$\mathbf{a}_{16}\,\mathbf{b}_{20}\,\mathbf{c}_{34}\,\mathbf{d}\ \textit{maravedises} = \frac{N}{34}\ \textit{reales} = \frac{N}{640}\ \textit{duros} = \ldots$$

$$\mathbf{a}_{20}\,\mathbf{b}_{4}\,\mathbf{c}_{25}\,\mathbf{d}_{16}\,\mathbf{e}_{16}\,\mathbf{f}_{3}\,\mathbf{g}_{12}\,\mathbf{h}\ \textit{granos} = \frac{N}{12}\ \textit{tomines} =$$
$$= \frac{N}{36}\ \textit{adarmes} = \frac{N}{576}\ \textit{onzas} = \ldots..$$

$$\mathbf{abcdefgh}_{10}\ \textit{milímetros} = \mathbf{abcde,fgh}\ \textit{metros} = \ldots$$

Ejemplos: 1.° Reducir el complejo 7 *arrobas*, 9 *libras* y 8 *onzas* á incomplejo de arroba. Se tiene:

$$7\,@.\,9\,lb.\,8\,onz. = (7.25+9)\,lb. + 8\,onz. = [(7.25+9).16]\,onz. +$$
$$+ 8\,onz. = 2952\,onz. = \frac{2952}{400}\ @.$$

2.° Reducir 478,563 *centímetros* á incomplejo de *metro* ó de *kilómetro*. Siendo 1 *centímetro*=0,01 *metro*= =0,00001 *kilómetros*. Se tiene:

$$478{,}563\ cms. = 4{,}78563\ ms. = 0{,}00478563\ kms.$$

Observacion.—Los números absolutos que expresan los diversos órdenes de unidades complejas en el sistema métrico decimal, dependiendo entre sí segun la misma ley, no forman sino un número expresado en el sistema de la base 10, ó si se trata de unidades superficiales ó cúbicas, en los sistemas de base 100 ó 1000, respectivamente. Por esta razon los números concretos del sistema moderno se presentan ya bajo la forma incompleja.

CAPÍTULO III.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

§ 1.°—Adicion y sustraccion.

134. **Regla.**—*Para efectuar estas operaciones, se procederá, como en el cálculo de los números abstractos,*

expresando, en cada suma ó diferencia parcial, la especie de unidades correspondientes.

Suma.	7 @.	19 *lb.*	13 *onz.*	*Resta.*	17 *ds.*	14 *rs.*	9 *ms.*
	8 »	22 »	14 »		4 »	10 »	13 »
	15 »	41 »	27 »		13 »	3 »	20 »
ó. . . .	16 »	17 »	11 »				

§ 2.º—Multiplicacion.

135. **Definicion.**—*Multiplicar un número concreto por otro es hallar el valor de un número concreto de cierta especie, cuando se dá el valor de la unidad de su especie, en unidades de otra especie distinta.*

Ejemplo: Hallar el valor de 7 *varas* y 2 *piés*, cuando se sabe que el valor de 1 vara es 3 *duros* y 8 *reales*, es multiplicar 3 *duros* y 8 *reales* por 7 *varas* y 2 *piés.*

136. **Regla.**—*Para multiplicar un número concreto equivalente á una unidad concreta de otra especie, por un número concreto de ésta, basta multiplicar el multiplicando por el número entero ó fraccionario que expresa el valor del multiplicador, en la unidad cuyo valor es el multiplicando.*

Ejemplo: Hallar lo que pesan 6 *cahíces*, 9 *fanegas* y 3 *celemines*, sabiendo que la *fanega* pesa 3 *arrobas*, 14 *libras* y 8 *onzas*. Se tiene que

$$3 \text{ @. } 14\,lbs. \text{ y } 8\,onzs. \times 6\,cahs.\ 9\,fans.\ 3\,cels. =$$
$$= 3 \text{ @. } 14\,lbs.\ 8\,onzs. \times \frac{(6.12+9)\,12+3}{12}$$

pues, en efecto, siendo el multiplicador

$$6\,cahs.\ 9\,fans.\ 3\,cels. = \frac{(6.12+9)\times 12+3}{12}\,fans. =$$
$$= \frac{975}{12} \text{ de fanega,}$$

el producto se obtendrá, hallando el número de partes alícuotas del multiplicando expresado por el multiplicador, es decir, las 975 doceavas partes; por consiguiente,

$$3 \text{ @. } 14 \textit{ lbs. } 8 \textit{ onzs.} \times 6 \textit{ cahs. } 9 \textit{ fans. } 3 \textit{ cels.} <>$$

$$<> \mathbf{3}_{25}\, \mathbf{14}_{16}\, \mathbf{8} \textit{ onzs.} \times \frac{975}{12}.$$

La multiplicacion de dos números complejos queda, pues, reducida á multiplicar un número de órdenes de unidades de base variable por un número fraccionario.

§ 3.º—Division.

137. **Definición.**—*Dividir un número concreto por otro es obtener, en unidades de una especie, el valor de la unidad de otra especie distinta, cuando se conoce el valor de un número de ésta, correspondiente á un número de la especie primera*, ó también, *cuando se conocen dos números de una misma especie y otro número de una especie distinta, correspondiente á uno de ellos, hallar el valor correspondiente á una unidad cualquiera del otro.*

Así: 1.º Dividir 3 *onzas*, 12 *duros*, 7 *reales* por 7 *arrobas*, 9 *libras*, 6 *onzas*, es hallar, en número de la primera especie, el valor de una unidad de la segunda especie, y, siendo

$$7 \text{ @. } 9 \textit{ lbs. } 6 \textit{ onz.} = [(7.25+9).16+6] \textit{ onz.} = 2950 \textit{ onz.} =$$

$$= \frac{2950}{16} \textit{ lbs.} = \frac{2950}{400} \text{ @.}$$

$$3 \textit{ onz. } 12 \textit{ ds. } 7 \textit{ rs.} : 7 \text{ @. } 9 \textit{ lb. } 6 \textit{ onz.} <> \mathbf{3}_{16}\, \mathbf{12}_{20}\, \mathbf{7} \textit{ rs} : 2950$$

$$\text{ó} \quad <> \mathbf{3}_{16}\, \mathbf{12}_{20}\, \mathbf{7} \textit{ rs.} : \frac{2950}{16} \quad \text{ó} \quad <> \mathbf{3}_{16}\, \mathbf{12}_{20}\, \mathbf{7} \textit{ rs.} : \frac{2950}{400},$$

segun que se busque el valor de la *onza*, de la *libra* ó de la *arroba*.

2.º Dividir 24 *arrobas* 13 *libras* 8 *onzas* por 3 *arrobas* 7 *libras* 6 *onzas* es hallar un número de otra especie, que debe corresponder al dividendo, como el divisor corresponde á una unidad de uno de sus órdenes, y siendo

$$24\,@.\ 13\ lb.\ 8\ onz.=[(24.25+13).16+8]\ onz.=9886\ onz.$$

$$3\,@.\ 7\ lb.\ 6\ onz.=[(3.25+7).16+6]\ onz.=1318\ onz.$$

el número que se busca será, respecto á la unidad que se busca, como el número que expresa el dividendo 9816 es al número que expresa el divisor 1318, es decir: $\frac{9816}{1318}$ y se tendrá:

$$24\,@.\ 13\ lb.\ 8\ onz.:3\,@.\ 7\ lb.\ 6\ onz.<>24_{25}\,13_{16}\,8:3_{25}\,7_{16}\,6=$$
$$=9816:1318\ ds.\ rs.,\ \text{etc.},$$

segun que el valor del divisor sea el de 1 *duro* ó un *real* ó una unidad de otra especie cualquiera.

§ 4.—Reduccion de unidades de distintos sistemas.

138. **Método de reduccion á la unidad.—Regla.** *Para hallar el valor de varias unidades de una especie, cuya correspondencia con las de otra se halla dada, se obtendrá primero el valor de una, dividiendo, y despues el valor del número buscado, multiplicando.* En efecto, sea

$$n\ fans.=n'\ rs.$$

la relacion conocida entre las especies fanegas y reales. Se deducirá:

$$1\ fans.=\frac{n'}{n}\ rs. \quad \text{ó} \quad \frac{n}{n'}\ fans.=1\ real;$$

luego la expresión de un número N de fanegas ó de reales, será:

$$N\,fans. = \frac{n'}{n}\cdot N\,rs. \qquad N\,rs. = \frac{n}{n'}\cdot N\,fans.$$

Ejemplo: Si 7 *libras* valen 243 *reales*, ¿cuánto valdrán 9 *libras*?

Siendo 7 *libras*=243 *reales*, se tendrá:

$$1\,lb. = \frac{243}{7}\,rs. \text{ y } 9\,lbs. = \frac{243}{7}\cdot 9\,rs. = \frac{2187}{7}\,rs. = 312\frac{3}{7}\,rs.$$

139. **Regla conjunta.**—*Para resolver un problema de regla conjunta, es decir, para hallar el valor de una especie en unidades de otra, ligadas por una série de igualdades tales, que el segundo miembro de cada una es de la especie del primero de la siguiente, se multiplicarán respectivamente todos los números abstractos de los primeros miembros y todos los de los segundos. El primer producto, expresado en unidades de la primera especie, será igual al segundo, expresado en unidades de la última.*

Demostracion. 1.º Sean $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ y $\mathbf{e}''$ tres especies distintas de unidades. Si se tiene:

$$a\mathbf{e} = b\mathbf{e}', \qquad c\mathbf{e}' = d\mathbf{e}'',$$

expresando a, b, c, d los números correspondientes, se tendrá evidentemente, multiplicando la primera igualdad por el número abstracto c y la segunda por el número abstracto b,

$$a.c\,\mathbf{e} = b.c\,\mathbf{e}' \quad \text{y} \quad c.b\,\mathbf{e}' = d.b\,\mathbf{e}'';$$

luego $$a.c\,\mathbf{e} = d.b\,\mathbf{e}''$$

2.º Sea la série de relaciones

$$a\mathbf{e} = b\mathbf{e}',\ c\,\mathbf{e}' = d\,\mathbf{e}'',\ f\mathbf{e}'' = g\,\mathbf{e}''',\ h\,\mathbf{e}''' = i\,\mathbf{e}''''\ .....$$

Se tendrá, sucesivamente, segun el primer caso:

$$a.c\mathbf{e}=b.d\mathbf{e}'',\quad f\mathbf{e}''=g\mathbf{e}''',\quad h\mathbf{e}'''=i\mathbf{e}''',\ldots..$$

$$a.c.f\mathbf{e}=b.d.g\mathbf{e}''',\quad h\mathbf{e}'''=i\mathbf{e}'''',\text{ etc.}$$

Ejemplo: Hallar cuántos *rublos* corresponden á 1720 *pesetas*, sabiendo que 5 *duros* equivalen á 24,75 francos, 126 *francos* á 5 libras esterlinas, 40 *libras esterlinas* á 468 florines alemanes y 24 *florines* á 12,25 *rublos?*

Se tiene la série de equivalencias:

x *rublos* =1720 *pesetas.*
25 *pesetas* =24,75 *francos.*
126 *francos* = 5 *libras esterlinas.*
40 *lbs. ests.* = 468 *florines.*
23 *florines* =12,25 *rublos,*

por consiguiente:

$$x.25.126.40.23\,\textit{rublos}=1720.24{,}75.5.468.12{,}25\,\textit{rublos}$$

$$x\ \textit{rublos}=\frac{1720.24{,}75.5.468.12{,}25}{25.126.40.23}\ \textit{rublos}.$$

SECCION SEGUNDA.

TEORÍA DEL NÚMERO CONCRETO CONMENSURABLE.

LIBRO PRIMERO.

TEORÍA DEL NÚMERO FRACCIONARIO ORDINARIO EXPLÍCITO Ó IMPLÍCITO.

CAPÍTULO PRIMERO.

EXPRESION GENERAL DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS DE IGUAL VALOR.

140. **Definicion.**—*Una fraccion se llama* IRREDUCIBLE *cuando no es igual á otra cuyos dos términos sean respectivamente menores que los suyos.*

141. **Principio fundamental.**—*Toda fraccion, cuyos términos son primos entre sí, es irreducible*, y **recíprocamente**, *toda fraccion irreducible tiene sus dos términos primos entre sí.*

1.º HIPÓTESIS. $D(a, b)=1$;

TÉSIS. $\frac{a}{b} \underline{\perp} \frac{m}{n}$, cuando $m < a$ y $n < b$.

Demostracion.—Si $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, resultará $m = \frac{a.n}{b}$, siendo m un número entero, por hipótesis;

luego $b=\overset{:}{\overline{a.n}}$; pero $D(a.b)=1$; luego $b\overset{:}{=}n$ (55 recíp.);

$$\left.\begin{array}{l}\text{luego } m=a.\dfrac{n}{b}=a.\text{núm.º entero}\\ \text{además } n=b.\dfrac{n}{b}=b.\text{núm.º entero}\end{array}\right\};\text{ luego } m>a \text{ y } n>b.$$

2.º **Demostracion ad absurdum.**—Si los dos términos de la fraccion $\frac{a}{b}$ no fuesen primos entre sí, tendrían un factor comun, y, dividiéndolo por éste, resultaría una fraccion de menores términos, equivalente, lo cual es contra la hipótesis.

Corolario.—*Toda fraccion equivalente á otra fraccion, cuyos dos términos son primos entre sí*, es decir, *á una fraccion irreducible, tiene sus términos equimúltiplos de los de ésta;* de otro modo: *la expresion general de todos los números fraccionarios equivalentes á una fraccion irreducible* $\frac{a}{b}$ es

$$\frac{a.n}{b.n},$$

siendo n *un número entero ó fraccionario cualquiera.* Esto resulta de ser (*teor.*)

$$m=a.\frac{n}{b},\ n=b.\frac{n}{b}.$$

142. Del teorema último resulta la siguiente

Regla.—*Para reducir un número fraccionario á su expresion más sencilla, se dividen sus dos términos por su máximo comun divisor,* pues, suprimiendo sus factores comunes, sólo quedarán los factores propios de cada uno.

Ejemplo: Siendo D (910 y 936) = 26, se tiene

$$\frac{910}{936}=\frac{910:26}{936:26}=\frac{35}{36}.$$

143. **Propiedades de los números fraccionarios de igual valor.** — *Si dos números fraccionarios* $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ *son de igual valor, los productos* $\alpha.\delta$ *y* $\beta.\gamma$ *del numerador de cada uno por el denominador del otro son iguales, y,* **recíprocamente,** *si dos productos* $\alpha.\delta$ *y* $\beta.\gamma$ *son iguales, también lo serán los números fraccionarios que resultan, tomando como términos de distinto nombre, los factores de cada uno.*

Demostracion.—1.º Si $\frac{a}{b}$ representa el número fraccionario irreducible equivalente á los dados $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$, las expresiones de éstos serán de la forma

$$\frac{a.n}{b.n} \quad \text{y} \quad \frac{a.m}{b.m},$$

designando n y m los factores comunes á los dos términos de cada número fraccionario; y, por consiguiente, los productos de los términos de distinto nombre constarán de los mismos factores; luego serán iguales, es decir:

$$(a.n)\times(b.m)=(a.m)\times(b.n) \quad \text{ó} \quad \alpha.\delta=\beta.\gamma$$

2.º De esta igualdad de productos se deducen las siguientes igualdades fraccionarias:

$$\frac{(a.n)\times(b.m)}{(a.n)\times(a.m)}=\frac{(a.m)\times(b.n)}{(a.n)\times(a.m)}, \quad \frac{(a.n)\times(b.m)}{(a.n).(b.n)}=\frac{(a.m)\times(b.n)}{(a.n).(b.n)}$$

$$\frac{(a.n)\times(b.m)}{(b.m)\times(a.m)}=\frac{(a.m)\times(b.n)}{(b.m)\times(a.m)}, \quad \frac{(a.n)\times(b.m)}{(b.m)\times(b.n)}=\frac{(a.m)\times(b.n)}{(b.m)\times(b.n)}$$

$$\text{ó} \quad \frac{b.m}{a.m}=\frac{b.n}{a.n}, \quad \frac{b.m}{b.n}=\frac{a.m}{a.n}, \quad \frac{a.n}{a.m}=\frac{b.n}{b.m}, \quad \frac{a.n}{b.n}=\frac{a.m}{b.m}$$

ó sustituyendo por $a.n$, $b.n$, $a.m$, $b.m$, respectivamente, α, β, γ, δ,

$$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta},\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Ejemplos: 1.° Siendo $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$, se tendrá:

$$5.12=6.10.$$

2.° Siendo $5.12=6.10$, se tendrá:

$$\frac{12}{10}=\frac{6}{5},\quad \frac{12}{6}=\frac{10}{5},\quad \frac{5}{10}=\frac{6}{12},\quad \frac{5}{6}=\frac{10}{12}.$$

144. **Regla.**—*Cuando se conoce el numerador ó denominador de un quebrado equivalente á otro dado, se hallará su denominador ó su numerador, multiplicando este quebrado, ó su inverso, por el término conocido.* Así, siendo

$$\frac{\cdot}{21}=\frac{8}{56}\quad \text{ó}\quad \frac{4}{\cdot}=\frac{7}{42},$$

designando por medio de un punto el término que se busca (1), se tendrá:

$$\text{término buscado}=\frac{8}{56}.21,\qquad \text{término buscado}=4.\frac{42}{7}.$$

En efecto: en el primer caso, conocido un cociente $\frac{8}{56}$ y el divisor 21, se busca el dividendo, lo que equivale á multiplicar, en el segundo, conocido el dividendo 4 y el cociente $\frac{7}{42}$ se busca el divisor, lo que equivale á dividir (110, 111).

(1) En Álgebra, los valores que se buscan, ó incógnitas, se expresan por medio de las últimas letras del alfabeto, x, y, z.

145. **Transformaciones de las igualdades fraccionarias.**—1.ª *Si dos números fraccionarios son iguales, lo son los quebrados formados tomando, en el mismo órden, los términos del mismo nombre, y tambien lo son sus inversos.* En efecto, siendo

$$\frac{a.n}{b.n}=\frac{a.m}{b.m}, \text{ se tendrá }, \frac{a.n}{a.m}=\frac{b.n}{b.m}$$

y

$$\frac{b.n}{a.n}=\frac{b.m}{a.m}, \quad \frac{a.m}{a.n}=\frac{b.m}{b.n},$$

lo cual resulta del núm. 104, 4.ª, pues dichas igualdades fraccionarias se deducen, simplificando, á las identidades

$$\frac{n}{m}=\frac{n}{m}, \quad \frac{b}{a}=\frac{a}{b}, \quad \frac{m}{n}=\frac{m}{n}.$$

2.ª *En toda igualdad fraccionaria pueden sumarse, á los términos de una de sus fracciones, los términos de igual nombre de las otras*, y tambien, *á los numeradores ó á los denominadores sus denominadores ó numeradores respectivos.*

En efecto, se tiene

$$\frac{a.n}{b.n}=\frac{a.m}{b.m}=\frac{a.n+a.m}{b.n+b.m}=\frac{a(n+m)}{b(n+m)}$$

$$\frac{a.n+b.n}{b.n}=\frac{a.m+b.m}{b.m} \text{ ó } \frac{a.n+b.n}{a.n}=\frac{a.m+b.m}{a.m}.$$

que evidentemente son igualdades fraccionarias.

Ejemplos:

1.° De $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$ resulta $\frac{7+21}{8+24}=\frac{7}{8}$ y $\frac{7+21}{8+24}=\frac{21}{24}$.

2.° De $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$ resulta $\frac{7+8}{8}=\frac{21+24}{24}$ y $\frac{7}{7+8}=\frac{21}{21+24}$

y, tambien, segun las transformaciones conocidas:

$$\frac{7+8}{21+24}=\frac{8}{24}, \frac{7+8}{21+24}=\frac{7}{21}.$$

Observacion.—Una fraccion se considera como una *relacion* ó *razon* entre el numerador y denominador que, en este caso, se llaman *antecedente* y *consecuente*. Las igualdades fraccionarias se llaman *proporciones*, y sus términos pueden considerarse como números proporcionales, es decir, tales, que la relacion del primero al segundo es igual á la del tercero al cuarto.

La igualdad fraccionaria $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se escribe así:

$$a : b : : c : d$$

y se lee: *a* es á *b* como *c* es á *d*.

CAPÍTULO II.

TEORÍA DE LAS MAGNITUDES PROPORCIONALES.

§ 1.º—Nociones sobre la relacion de dos magnitudes.

146. **Definiciones.**—RAZON *ó* RELACION *de dos magnitudes de la misma especie es el número que expresa la primera, cuando se toma por unidad la segunda.* La primera se llama *antecedente*, la segunda *consecuente* y las dos juntas, *términos* de la relacion.

147. **Expresion de las relaciones.**—Debiéndose distinguir en toda magnitud el número que expresa su medida con relacion á la unidad de su especie y ésta, se empleará, en su expresion general, una letra minúscula que designe aquél y una letra griega que designe ésta; así, $a\,\alpha$ expresa a unidades de la especie α. Tambien, brevemente, se expresará una magnitud por medio de una

letra mayúscula. La relacion de dos magnitudes A y B se indica de esta manera: $A : B$ ó $\frac{A}{B}$, lo cual se enuncia diciendo A es á B.

Corolario.—*La magnitud antecedente es igual á la consecuente multiplicada por la razon, y la consecuente es igual á la antecedente multiplicada por el valor inverso de dicha razon.* Así, siendo n el número que mide A, por medio de B, se tendrá:

$$A : B = n \quad \text{y} \quad A = B . n$$

y, evidentemente,

$$B : A = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad B = A . \frac{1}{n}.$$

148. Este corolario puede enunciarse tambien bajo la forma de la siguiente

Regla.—*Dada la relacion de dos magnitudes, se obtendrá la antecedente, efectuando sobre la consecuente las mismas operaciones que con la unidad se efectuaron para obtener el número que expresa dicha relacion.*

149. **Teorema.**—*Si dos magnitudes de la misma especie se miden por medio de una tercera, su relacion será la misma que la de los números que las miden.*

Demostracion.—Sean A y B las magnitudes dadas, C la tomada por unidad, a y b los números que las miden. Se tendrá:

$$A = C . a, \qquad B = C . b;$$

pero (148) $C = B \cdot \frac{1}{b}$; luego $A = \left(B \cdot \frac{1}{b}\right) . a = B \cdot \frac{a}{b}$ (119).

Así, pues,

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

§ 2.º—Principios de la proporcionalidad de las magnitudes.

150. **Definiciones.**—*Cuando dos magnitudes varían simultáneamente, de manera que la relacion de dos valores cualesquiera de la primera es igual á la de los valores correspondientes de la segunda, se dice que dichas magnitudes son* DIRECTAMENTE PROPORCIONALES Ó VARÍAN EN LA MISMA RELACION; *y, cuando la relacion de dos valores cualesquiera de una de ellas es la inversa de la relacion de dos valores correspondientes de la otra, se dice que son* INVERSAMENTE PROPORCIONALES Ó VARÍAN EN RELACION INVERSA.

Ejemplos: El jornal de un obrero es proporcional á la duracion de su trabajo, así como varias fanegas y su peso correspondiente. El tiempo necesario para terminar una obra y el número de obreros empleados son inversamente proporcionales.

Se dice que una magnitud es proporcional á otras varias cuando, permaneciendo constantes todas éstas menos una, la primera es proporcional á la que varía.

Ejemplo: La cabida de un salon es proporcional á su largo, ancho y altura, pues permaneciendo invariable su altura y su ancho, la cabida será proporcional á su largo, etc.

Observacion.—En las cuestiones que por lo general resuelve la Aritmética, la proporcionalidad se admite como un hecho convencional ó hipotético; así, por ejemplo, sucede con el precio de las varas de una mercancía y su número; en geometría la proporcionalidad de las magnitudes se demuestra, y en las ciencias físicas resulta como un hecho ó como un resultado aproximado.

151. **Principio fundamental.**—*Si dos magnitudes son directa ó inversamente proporcionales, y se multiplica un valor particular de la una por un número entero ó*

fraccionario cualquiera, el valor correspondiente de la otra quedará, respectivamente, multiplicado ó dividido por dicho número, y, **recíprocamente.**

Demostracion.—1.º Sean A y B dos magnitudes de la misma ó de distinta especie, que suponemos directamente proporcionales. Sean $a_1\,\alpha$, $a_2\,\alpha$ las expresiones explícitas de dos valores de la primera; sean $b_1\,\beta$, $b_2\,\beta$ las expresiones de los valores correspondientes de la segunda. Se tendrá (149):

$$\frac{a_2\,\alpha}{a_1\,\alpha}=\frac{a_2}{a_1}, \qquad \frac{b_2\,\beta}{b_1\,\beta}=\frac{b_2}{b_1};$$

pero, por hipótesis,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=n,$$

designando por n el valor de la relacion entre dichos números abstractos;

luego $\quad a_2\,\alpha=(a_1\,\alpha).n \quad$ y $\quad b_2\,\beta=(b_1\,\beta).n$

Además, si estas relaciones se verifican, es decir, si multiplicando por un mismo número n los valores de dos magnitudes, se obtienen dos valores correspondientes, las magnitudes consideradas son proporcionales.

2.º Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales, se tendrá (149):

$$\frac{a_2\,\alpha}{a_1\,\alpha}=\frac{a_2}{a_1} \qquad \frac{b_2\,\beta}{b_1\,\beta}=\frac{b_2}{b_1};$$

y, por hipótesis,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{\frac{b_2}{b_1}}=\frac{b_1}{b_2}=n,$$

designando por n el valor de la relacion de los primeros números, por lo cual designará $\frac{1}{n}$ la relacion entre los dos segundos;

$$\text{luego} \quad a_2\alpha=(a_1\alpha).n \quad \text{y} \quad b_2\beta=(b_1\beta)\cdot\frac{1}{n}.$$

Además, si estas relaciones se verifican, es decir, si multiplicando por los valores inversos n y $\frac{1}{n}$ dos valores correspondientes de las magnitudes dadas, resultan valores tambien correspondientes, serán inversamente proporcionales.

152. **Proporcion numérica.**—Las igualdades fraccionarias

$$\frac{a_2\alpha}{a_1\alpha}=\frac{b_2\beta}{b_1\beta}, \qquad \frac{a_2\alpha}{a_1\alpha}=\frac{b_1\beta}{b_2\beta}$$

que expresan la proporcionalidad directa ó inversa de las magnitudes de las especies α y β, suelen sustituirse por las igualdades fraccionarias numéricas

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{b_1}{b_2}$$

para pasar de la realidad del mundo físico ó de la vida social á los dominios del cálculo, reemplazando así la consideracion de los objetos reales por la de sus símbolos correspondientes. Hecha dicha sustitucion, y sometidos los números abstractos á las operaciones del cálculo, se tiene cuidado de expresar, en los resultados finales, las especies á que éstos se refieren.

§ 3.º—Cuestiones que se refieren á las magnitudes proporcionales ó inversamente proporcionales.

153. **Problema general.**—(CASO DE DOS ESPECIES.) *Conocidos dos valores de una magnitud de una especie, hallar todos los pares de valores de otra magnitud de distinta especie que estén en razon directa ó inversa de los dos primeros.*

Resolucion.—Las expresiones

$$a_2\,\alpha = (a_1\,\alpha).\frac{b_2}{b_1},\quad a_2\,\alpha = (a_1\,\alpha).\frac{b_1}{b_2}$$

correspondientes á la proporcionalidad directa é inversa de las magnitudes de la especie α y β indican que: *Si el valor numérico* $\frac{b_2}{b_1}$ *de la relacion entre dos valores de una magnitud de especie* β *es conocido, los valores de otra especie* α, *multiplicados ó divididos por dicha razon, darán todos los sistemas de sus valores correspondientes de la misma especie, en razon directa ó inversa á los expresados por la relacion dada.* Así, á la série de valores

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha, \ldots\ldots$$

corresponderán las séries

$$\alpha.n,\ 2\alpha.n,\ 3\alpha.n,\ 4\alpha.n\ldots\ldots\ \text{ó}\ \alpha:n,\ 2\alpha:n,\ 3\alpha:n,\ 4\alpha:n,$$

en razon directa ó inversa, expresada por la letra n.

CASO DE VARIAS ESPECIES. *Conocidos valores correspondientes de varias magnitudes proporcionales de diversas especies, hallar el valor correspondiente á un valor dado de otra nueva magnitud proporcional á aquéllas*, es decir, que: *siendo*

$$a_1\,\alpha,\ b_1\,\beta,\ c_1\,\gamma,\ d_1\,\delta,$$
$$a_2\,\alpha,\ b_2\,\beta,\ c_2\,\gamma,\ d_2\,\delta,$$

un sistema de valores correspondientes de las magnitudes *de especies* α, β, γ, δ; *se busca el valor* $f_2\,\varphi$, *correspondiente á otra magnitud* $f_1\,\varphi$, *proporcional á aquéllas.*

Resolucion.—1.º Si $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$, se tiene (150 y caso anterior)

$$f_2\,\varphi = f_1\,\varphi.\frac{d_2}{d_1} \quad \text{ó} \quad f_2\,\varphi = f_1\,\varphi : \frac{d_2}{d_1} = f_1\,\varphi.\frac{d_1}{d_2},$$

segun que la proporcionalidad de las especies δ y φ sea directa ó inversa.

2.º Si solo $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, se tendrá análogamente, para el valor que corresponde á $f_1\,\varphi.\frac{d_2}{d_1}$ ó $f_1\,\varphi.\frac{d_1}{d_2}$,

$$f_1\,\varphi.\,\frac{d_2}{d_1}.\frac{c_2}{c_1} \text{ ó } f_1\,\varphi.\frac{d_2}{d_1}.\frac{c_1}{c_2};\quad f_1\,\varphi.\,\frac{d_1}{d_2}.\frac{c_2}{c_1} \text{ ó } f_1\,\varphi.\frac{d_1}{d_2}.\frac{c_1}{c_2},$$

continuando así se obtendrá, como expresion del valor buscado, la siguiente:

$$f_1\,\frac{d_{2\text{ ó }1}}{d_{1\text{ ó }2}}.\frac{c_{2\text{ ó }1}}{c_{1\text{ ó }2}}.\frac{b_{2\text{ ó }1}}{b_{1\text{ ó }2}}.\frac{a_{2\text{ ó }1}}{a_{1\text{ ó }2}}\,\varphi.$$

es decir que: *se obtendrá el valor que se busca, multiplicando el número de unidades de la especie cuyo valor se conoce, por las razones directas ó inversas entre los valores correspondientes á la magnitud desconocida y los correspondientes á la conocida.*

154. **Problemas particulares.**—1.º REGLA DE TRES *es la que sirve para obtener el valor de una magnitud ligada á otras conocidas por la relacion de la proporcionalidad. Regla de tres* SIMPLE *es la que se resuelve por medio de una relacion de proporcionalidad y* COMPUESTA *la que se resuelve por dos ó más.*

Ejemplo 1.º: Si 7 *fanegas* pesan 84 *libras* ¿cuántas *libras* pesarán 9 *fanegas*?

Resolucion: 9 *fanegas* pesarán $84.\frac{9}{7}$ *libras.*

2.º Si 6 *obreros*, en 7 *dias*, trabajando 8 *horas* han hecho 56 *varas* de un trabajo ¿cuántas *varas* del mismo harán 13 *obreros* en 9 *dias* y 5 *horas* cada dia? Se tiene:

6 *obrs.*, 7 *ds.*, 8 *hs.*, 56 *vs.*,
13 *obrs.*, 9 *ds.*, 5 *hs.*. x *vs.*

Resolucion.—Como todas las especies de magnitudes se hallan en razon directa con el número de varas que se busca, se tendrá:

$$x \text{ varas}=56\ vs.\ \frac{13}{6}.\frac{9}{7}.\frac{5}{8}=\frac{13.9.5.56}{6.7.8} \text{ varas.}$$

3.er *ejemplo:* Si 19 *obreros*, en 56 *dias*, trabajando 9 *horas* han hecho una obra ¿en cuántos dias la harán 27 *obreros*, trabajando 8 *horas*? Se tiene:

19 *obrs.*, 56 *ds.*, 9 *hs.*,
27 *obrs.*, x *ds.*, 8 *hs.*

Resolucion.—Como el tiempo que se tarda está en razon inversa del número de obreros, se tendrá:

$$x \text{ dias}=56 \text{ dias } .\frac{19}{27}.\frac{8}{9}=\frac{19.8.56}{27.9} \text{dias.}$$

2.º Regla de interés *es la que sirve para hallar lo que produce una cantidad de dinero, con la condicion de que cada cien unidades produzcan una ganancia determinada.* La *ganancia* producida por 100 se llama *tanto por ciento*, la cantidad que produce se llama *capital*, y lo producido por ésta *interés*.

En la regla de interés se supone el interés directamente proporcional al capital y al tiempo en que éste se halla produciendo.

Ejemplo: Averiguar el interés que producen 8500 reales en 7 meses, sabiendo que en un año 6 rs. producen 100.

Resolucion.—Llamando i al interés que se busca, y recordando que el año tiene 12 meses, resulta

$$i=8500 \text{ rs.} \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{7}{12} = \frac{6.7.8500}{1200} = 297 \frac{1}{2} \text{ reales.}$$

3.º Regla de descuento *es la que sirve para hallar lo que se debe descontar de una letra ó pagaré, cuando quiere hacerse efectivo su valor antes de su vencimiento.* El valor expresado en una letra se llama *valor nominal*, el valor que tiene la letra, no en el dia señalado para su cobro, sino el dia en que se la considera, se llama *valor actual* ó *efectivo*, y la diferencia entre el valor nominal y el actual se llama *descuento.*

Resolucion.—Hay dos modos de hallar el descuento de un pagaré: el primero consiste en considerar su valor nominal como un capital y el descuento como su interés, quedando en este caso el problema reducido al anterior; así se procede en el comercio. El otro método de descontar se reduce á emplear el razonamiento siguiente:

Si 100 produce r en un año, producirá $r\,t$ en el tiempo t, considerado en años ó fraccion de año; luego cien unidades *actuales* corresponden á $100 + r\,t$ *nominales;* y $\frac{100}{100+rt}$ será la razon por la cual se ha de multiplicar el valor nominal de la letra para hallar el valor actual.

Ejemplo: Hallar el descuento de un pagaré de 46500 reales que vence dentro de 9 meses, siendo 5 el tanto por 100. Se tendrá:

$$\textit{valor efectivo}=46500.\frac{100}{100+5\cdot\frac{9}{12}}\ rs.=44819\frac{345}{1245}\ rs.$$

$$\textit{descuento}=46500\ rs.-44819\ \frac{345}{1245}\ rs.=1682\ \frac{900}{1245}\ rs.$$

4.º Regla de compañía *que tiene por objeto repartir la ganancia ó pérdida de un capital social entre los sócios, proporcionalmente á los capitales de cada uno y al tiempo que los han tenido impuestos.*

Resolucion.—Representando por c', c'', c'''....., los capitales que han impuesto los diversos sócios, por t', t'', t''', los tiempos respectivos que han estado impuestos, las ganancias parciales serán proporcionales á $c'.t'$, $c''.t''$, $c'''.t'''$,.....; luego dichas ganancias estarán representadas por $c'.t'.n$, $c''.t''.n$, $c'''.t'''.n$, siendo n una razon comun; luego la ganancia total estará representada por $c'.t'.n+$ $+c''.t''.n+c'''.t'''.n$. La razon de cada ganancia parcial á la total estará dada, pues, por las expresiones

$$\frac{c'.t'.n}{c'.t'.n+c''.t''.n+c'''.t'''.n}, \quad \frac{c''.t''.n}{c'.t'.n+c''.t''.n+c'''.t'''.n}$$
$$\frac{c'''.t'''.n}{c'.t'.n+c''.t''.n+c'''.t'''.n}, \ldots\ldots,$$

ó $$\frac{c't'}{c't'+c''t''+c'''t'''}, \quad \frac{c''t''}{c't'+c''t''+c'''t'''},$$
$$\frac{c'''t'''}{c't'+c''t''+c'''t'''} \ldots\ldots;$$

luego (153) para una ganancia G, las ganancias de los sócios estarán expresadas por los productos.

$$G\cdot\frac{c't'}{c't'+c''t''+c'''t'''}, \quad G\cdot\frac{c''t''}{c't'+c''t''+c'''t'''},$$
$$G\cdot\frac{c'''t'''}{c't'+c''t''+c'''t'''}, \ldots\ldots$$

Ejemplo: Repartir 32000 pesetas proporcionalmente á los capitales 18000, 27000 y 22500 de los sócios y á los tiempos 16, 6 y 12 meses, durante los cuales han estado impuestos, respectivamente. Llamando g', g'', g''' la ganancia de cada uno, y siendo

$$18000.16+27000.6+22500.12=720000$$

se tendrá:

$$g'=32000\cdot\frac{288000}{720000},\quad g''=32000\cdot\frac{162000}{720000},$$

$$g'''=32000\cdot\frac{270000}{720000},$$

$$g'=32000\cdot\frac{2}{5}=12800,\quad g''=32000\cdot\frac{9}{40}=7200,$$

$$g'''=32000\cdot\frac{3}{8}=12000.$$

5.° REGLA DE ALIGACION *que tiene por objeto determinar el precio de una mezcla ó la ley de una aleacion*, *y*, **recíprocamente,** *conocidos éstos, calcular las cantidades que deben mezclarse ó alearse.* Se llama *aleacion* la mezcla que resulta de la fusion de dos ó más metales. *Precio* de una sustancia es la relacion que existe entre su valor, expresado en unidades de dinero, y la cantidad de la misma, expresada en especie conveniente; se representa por la expresion

$$p=\frac{v}{c},$$

designando por p, v, c el precio, el valor y la cantidad. *Ley* de una aleacion cualquiera es la relacion entre el peso del metal *fino* (oro ó plata en las monedas) y el peso total (oro y cobre ó plata y cobre). Se representará por la relacion

$$l=\frac{p}{P},$$

designando l, p, P las tres especies de magnitudes consideradas.

La regla de aligacion, como se ha manifestado, comprende los dos siguientes problemas:

1.º **Problema directo.**—*Conociendo las cantidades que entran en una mezcla y sus precios respectivos, determinar el precio de dicha mezcla.*

Resolucion.—Sean $c', c'', c''',.....$ las cantidades que se mezclan, $p', p'', p''',.....$ sus precios correspondientes y P_m el precio medio.

Tomando como unidad la cantidad total $c'+c''+$ $+c'''+.....$, la expresion de cada cantidad será:

$$\frac{c'}{c'+c''+c'''}, \quad \frac{c''}{c'+c''+c'''}, \quad \frac{c'''}{c'+c''+c'''},$$

y sus precios respectivos,

$$\frac{c'\,p'}{c'+c''+c'''}, \quad \frac{c''\,p''}{c'+c''+c'''}, \quad \frac{c'''\,p'''}{c'+c''+c'''};$$

luego la expresion del precio total P_m será:

$$P_m = \frac{c'\,p'+c''\,p''+c'''\,p'''}{c'+c''+c'''};$$

luego: *para hallar el precio de una mezcla, se multiplican las cantidades mezcladas por sus precios respectivos, y la suma de los productos se divide por la suma de dichas cantidades.*

2.º **Problema inverso.**—*Conocido el precio de una mezcla y los de las sustancias que han de formarla, hallar las cantidades que deben mezclarse.*

Resolucion.—1.º Siendo solo dos las sustancias mezcladas, de la relacion

$$p_m.(c'+c'') = p'.c'+p''.c'' \text{ ó } p_m.c'+p_m.c'' = p'.c'+p''.c',$$

se deduce, restando primero $p'c'$ de los dos miembros y despues $p_m c''$,

$$(p_m-p').c'=(p''-p_m).c'' \quad \text{ó} \quad \frac{c'}{c''}=\frac{p''-p_m}{p_m-p'};$$

luego: *las cantidades de dos sustancias mezcladas son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus precios respectivos y el precio de la mezcla.*

2.º Cuando sean más de dos las sustancias mezcladas, se obtendrán las cantidades respectivas de dos, lüégo se considerará una de ellas con otra de las propuestas, repitiéndose el razonamiento anterior, y así sucesivamente.

Ejemplos: 1.º Siendo 0,960 y 0,870 las leyes de dos barras de plata y sus pesos respectivos 5 y 7 kilógramos, hallar la ley de su aleacion.

Resolucion.—Siendo los pesos de metal fino de cada barra 0,960.5 y 0,870.7 kilógramos, y 5+7 kilógramos el peso total, se tendrá:

$$\textit{ley de la aleacion} = \frac{0{,}960.5+0{,}870.7}{5+7}.$$

2.º Se tienen dos barras de plata de ley de 0,865 la primera y 0,974 la segunda, ¿en qué relacion se tomarán cantidades de una y otra para producir plata de ley de 0,900?

Resolucion.—Representando c' la cantidad de la primera barra que se tome y c'' la de la segunda, se tendrá:

$$\frac{c'}{c''}=\frac{0{,}974-0{,}900}{0{,}900-0{,}865}=\frac{0{,}074}{0{,}035}=\frac{74}{35}.$$

SECCION TERCERA.

TEORÍA Y CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO INCONMENSURABLE.

LIBRO PRIMERO.

TEORÍA DEL NÚMERO INCONMENSURABLE.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRINCIPIOS DE LA TEORÍA DE LOS LÍMITES.

155. **Definicion.**—*Si una cantidad* V *varía de tal manera, que se aproxima indefinidamente á una cantidad fija* L, *pudiendo llegar á diferenciarse de ella en valores susceptibles de ser menores que cualquier valor designado, por pequeño que sea, sin llegar á ser jamás igual á la misma, se dirá que ésta es el* LÍMITE DE AQUÉLLA. De otro modo, *una cantidad fija* L *será el* LÍMITE *de una cantidad variable* C, *cuando la diferencia* L—V ó V—L, *segun que* V *sea* $<$ *ó* $>$ *que* L, *tienda indefinidamente á ser cero.*

La diferencia entre la cantidad variable y su límite se dice que es una *cantidad evanescente*, si se representa por α, la cantidad variable podrá representarse por

$$L+\alpha \quad ó \quad L-\alpha,$$

segun que se aproxime á su límite, disminuyendo ó aumentando.

Ejemplo: Todo número fraccionario propio ó fraccionario impropio, cuyos dos términos aumentan en un mismo valor, disminuye ó aumenta respectivamente, (104, 7.ª) aproximándose á la unidad en los dos casos, de manera que se tendrá, por ejemplo,

$$1 > \frac{7+n}{8+n}, \qquad \frac{8+n}{7+n} < 1$$

y además,

$$1-\frac{7+n}{8+n}=\frac{8+n-7-n}{8+n}=\frac{8-7}{8+n},$$

$$\frac{8+n}{7+n}-1=\frac{8+n-7-n}{7+n}=\frac{8-7}{7+n},$$

valores fraccionarios susceptibles de ser tan pequeños como se quiera, haciendo el valor de n, suficientemente grande (104, 1.ª).

1 es pues el límite comun de los números fraccionarios que varían, aumentando sus dos términos en un mismo número indefinidamente.

156. **Teorema I.**—*Dos cantidades variables que permanecen constantemente iguales, tienen el mismo límite.*

Demostracion.—Sean V y V' las cantidades variables, L y L' sus límites respectivos.

Si $L \neq L'$, será $L <$ ó $> L'$. Sea por ejemplo, $L < L'$, y llamemos δ la diferencia evanescente entre V y su límite L; y se tendrá la série de cantidades

$$L-\delta, \quad L, \quad L+\delta, \quad L',$$

colocadas por órden de magnitud.

Siendo L el límite de V, llegará un momento en que V quede comprendida en el intervalo de $L-\delta$ á $L+\delta$, y por consiguiente, no podrá acercarse indefinidamente á L'; pero lo mismo sucederá á su igual V'; luego V' no se podrá acercar indefinidamente á L', y entónces L' no será el límite de V', contra la hipótesis.

157. **Teorema II.**—*Si dos cantidades constantes* C *y* C′ *se hallan comprendidas entre dos variables* V *y* V′, *cuya diferencia puede ser tan pequeña como se quiera, aquéllas serán iguales.*

Demostracion.—Si C' fuera, por ejemplo, mayor que C, colocando dichas cantidades por órden de magnitudes, se tendría la série de las mismas:

$$V, \ C, \ C', \ V'$$

absurda, porque V y V', susceptibles de acercarse entre sí indefinidamente, llegarían á hallarse en el intervalo de valores comprendidos entre C y C', mientras no sea $C=C'$.

158. **Teorema III.**—*El límite de la suma de varias cantidades variables es igual á la suma de sus límites.*

Demostracion.—Sean V, V', V'',..... las cantidades variables, L, L', L'' sus límites, δ, δ', δ'',..... sus diferencias evanescentes.

Se tendrá:

$$V+V'+V''+.....=(L+\delta)+(L'+\delta')+(L''+\delta'')+.....=$$
$$=L+L'+L''+.....+(\delta+\delta'+\delta''+.....),$$

y si se llama λ la mayor de las cantidades δ, δ', δ'',.....

$$V+V'+V''+.....<L+L'+L''+.....+(\lambda+\lambda+\lambda+.....)$$

ó $$<L+L'+L''+.....+n\lambda,$$

llamando n el número de sumandos. Y como λ tiene por límite cero, lo mismo sucederá á $n\lambda$, es decir, que será una diferencia evanescente, y $L+L+L'+.....$ será el límite de $V+V'+V''+.....$

159. **Teorema IV.**—*El límite de la diferencia de dos cantidades variables es la diferencia de sus límites.*

Demostracion.—Sean V y V' las cantidades variables, L y L' sus límites, δ y δ' sus diferencias evanescentes. Se tendrá:

$$V-V'=L+\delta-L'-\delta'=L-L'+(\delta-\delta'),$$

siendo $\delta-\delta'$ una cantidad evanescente, y por consiguiente, $L-L'$ el límite de $V-V'$.

160. **Teorema V.**—*El límite del producto de varios factores variables es igual al producto de sus límites.*

Demostracion.—Empleando igual notacion que anteriormente, se tendrá:

$$V.V'=(L+\delta)\times(L'+\delta')=L.L'+L.\delta'+L'.\delta+\delta.\delta'=L.L'+\lambda,$$

llamando λ la suma de las cantidades evanescentes $L.\delta'+L'.\delta+\delta.\delta'$ que es tambien evanescente; luego

$$L.L'=\text{lím. } V.V'.$$

Lo mismo se razonará para varios factores.

Corolario 1.°—*El límite de la potencia de una cantidad variable es igual á la potencia del mismo grado del límite de dicha variable*, es decir,

$$\text{lím. } V^n=L^n.$$

Corolario 2.°—*El límite del cociente de dos cantidades variables es el cociente de sus límites*, pues siendo V y V' las cantidades variables y V'' su cociente, L, L' y L'' sus límites respectivos, se tendrá:

$$\frac{V}{V'}=V'',\ V=V'.V'',\text{lím. } V=L'.L'',\ \frac{L}{L'}=L''.$$

Corolario 3.°—*El límite de la raiz cuadrada de una cantidad variable es la raiz cuadrada del límite de dicha variable*, pues se tiene

$$\sqrt{V}=V',\ V=V'^2,\ \text{lím. } V=(\text{lím. } V')^2, L=L'^2, L'=\sqrt{L}.$$

CAPÍTULO II.

LAS FRACCIONES ORDINARIAS COMO LÍMITES DE FRACCIONES DE FORMA ENTERA.

161. **Definicion.**—*Se llama* FRACCION GENERATRIZ, *la fraccion ordinaria equivalente á una fraccion de forma entera, ó de la cual ésta procede.*

162. **Regla.**—*Para reducir una fraccion ordinaria á fraccion de forma entera, basta efectuar la division del numerador por el denominador, multiplicar el resto por la base del sistema de numeracion en que quiere expresarse, y el cociente entero será la cifra de primer órden de la fraccion de forma entera, y así se continuará, obteniendo las de los demás órdenes.*

Ejemplos: Sean las fracciones $\frac{9}{8}$, $\frac{19}{33}$, $\frac{17}{45}$, que se quieren reducir á forma entera, en el sistema decimal.

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 8 \\ \cline{2-2} 10 & 1{,}125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 190 & 33 \\ \cline{2-2} 250 & 0{,}57\ldots\ldots \\ 19 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 170 & 45 \\ \cline{2-2} 350 & 0{,}37\ldots\ldots \\ 35 & \end{array}$$

En el primer ejemplo, la fraccion de forma entera se ha obtenido exactamente, en el segundo, el primer resto 19 se ha repetido, lo que indica que la fraccion obtenida se compondrá del número 57 repetido indefinidamente, en el tercer caso, la repeticion del segundo resto 35 indica la repeticion indefinida de la cifra 7 del número fraccionario buscado.

163. **Definiciones.**—*Se llama fraccion decimal* EXACTA, *la que consta de un número limitado de cifras, y* PERIÓDICA

la que contiene cifras que repiten, en el mismo órden, indefinidamente. El número formado por las cifras que se repiten, se llama PERÍODO. *Una fraccion periódica se llama periódica pura, cuando el período principia en las unidades fraccionarias de primer órden y* PERIÓDICA MIXTA, *cuando el período principia en un órden distinto del primero.*

El teorema núm. 83, referido á los cocientes, expresa las siguientes:

164. **Propiedades de las fracciones de forma entera.**—*Toda fraccion ordinaria, irreducible:* 1.° *si no contiene, en el denominador, más que factores primos de la base del sistema, reducida á forma entera, se compondrá exactamente de tantas cifras como unidades tenga el mayor exponente de los factores primos de la base.*

Ejemplo: $$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3.5}=0{,}175.$$

2.° *Si no contiene, en el denominador, más que factores primos con los de la base del sistema, su forma entera constará, á contar desde las unidades de primer órden, de un período cuyo número de cifras será el número á que pertenezca la base del sistema, con relacion al denominador.*

Ejemplos:

1.° $\frac{3}{7}=0{,}428571\ 428571...$ (en el sistema de base 10).

2.° $\frac{6}{41}=0{,}14634\ 14634...$ (en el sistema de base 10).

3.° *Si contiene factores primos de la base y factores primos con la base, su forma entera constará, además del período, de una parte no periódica que precederá, cuyo número de cifras será igual al mayor exponente de los factores primos de la base contenidos en el denominador.*

Ejemplos:

1.° $\frac{7}{12}=0,58\,3333...$ (en el sistema de base 10).

2.° $\frac{1}{336}=0,22010\,211225\,211225...$ (en el de base 30).

Observacion.—Si las fracciones propuestas no estuvieran bajo la forma irreducible, el enunciado de esta última propiedad recibiría la modificacion expresada en el teorema 83.

Corolarios.—1.° *Las fracciones ordinarias de igual denominador tienen igual número de cifras periódicas* (en el mismo sistema).

2.° *Los períodos, correspondientes á dos fracciones irreducibles* $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, *tienen el mismo número de cifras cuando* B *y* B′ *sólo difieren entre sí por potencias de la base del sistema.*

165. **Propiedades de las fracciones generatrices.**—*La generatriz de una fraccion de forma entera, periódica, es el* LÍMITE *hácia que converge el valor de ésta, cuando se considera un número cada vez mayor de períodos.*

Demostracion.—Sea, por ejemplo, la fraccion

$$f=0,29\,457\,457\,457\ldots\ldots$$

cuyo período es 457, siendo 29 la parte no periódica; y consideremos, para sencillez, que el número n de períodos sea igual á 4.

Se tendrá:

$$f=0,29\,457\,457\,457\,457+f\cdot\frac{1}{10^{4.3}}. \qquad [1]$$

Multiplicando los dos miembros por 10^2, y despues por $10^{3+2}=10^5$, se tendrá:

$$10^2.f=29{,}457457457457+f\cdot\frac{1}{10^{4.3-2}}. \qquad [2]$$

$$10^5.f=29457{,}457457457+f\cdot\frac{1}{10^{3.4-5}}. \qquad [3]$$

Restando, miembro á miembro, las igualdades obtenidas, resulta:

$$(10^5-10^2)f=29457-29-\frac{457}{10^{4.3}}+f\left(\frac{1}{10^{4.3-5}}-\frac{1}{10^{4.3-2}}\right)$$
$$=29457-29-\frac{457}{10^{4.3}}+f.\left(\frac{10^3-1}{10^{3.4-2}}\right)$$

y, dividiendo por 10^5-10^2,

$$f=\frac{29457-29}{10^5-10^2}-\frac{457}{10^5-10^2}\cdot\frac{1}{10^{4.3}}+f.\left(\frac{10^3-1}{10^{3.(4-1)}}\right),$$

pero tomando, en vez de 4, un número de períodos suficientemente grande, los dos últimos términos, cuyos denominadores se harán suficientemente grandes, llegarán á adquirir valores tan pequeños como se quiera; luego

$$\text{lím. } f=\frac{29457-29}{99900}. \qquad [4]$$

166. **Caso particular.**—Cuando la fraccion es periódica pura, el sustraendo del numerador se reduce á cero, así como $10^{3+2}-10^2$ á 10^3-1, pues entónces, de la igualdad [3], en la cual no existen las cifras 2 9, no se restará la [2], sino la [1], y se tendrá:

$$f=\text{lím. }\frac{457}{999},$$

pues dividiendo por 10^3-1 despues de dichas operaciones, resulta

$$f=\frac{457}{10^3-1}+\frac{457}{10^3-1}\cdot\frac{1}{10^{4.3}}+\frac{1}{10^{4.3-3}}=$$
$$=\frac{457}{999}-\frac{457}{999}\cdot\frac{1}{10^{4.3}}+\frac{1}{10^{4.3-3}}\cdot\frac{1}{10^3-1};$$

pero tomándose un número de períodos, que en el ejemplo considerado es 4, suficientemente grande, los dos últimos términos del segundo miembro se hacen tan pequeños como se quiera; luego

$$\text{lím. } f=\frac{457}{999}.$$

Las expresiones de los límites obtenidos pueden enunciarse bajo la forma de los siguientes

Corolarios.—1.º *El límite del valor de una fraccion decimal periódica pura es una fraccion ordinaria cuyo numerador es el período y cuyo denominador está formado por tantos nueves como cifras tiene el período.*

2.º *El límite del valor de una fraccion periódica mixta es un quebrado ordinario cuyo numerador es el número formado por la parte no periódica, juntamente con el primer período, ménos este primer período, y cuyo denominador consta de tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras no periódicas hay.*

CAPÍTULO III.

NOCIONES SOBRE LAS CANTIDADES INCONMENSURABLES.

167. **Definicion.**—*Se dice que dos magnitudes son* INCONMENSURABLES, *cuando no existe ninguna otra de su especie que sea su comun medida.*

Medidas de las magnitudes inconmensurables.—Sean n, n', n''...., números tales que $n<n'<n''<$.... Sean U y M la magnitud tomada como unidad y la magnitud que se va á medir.

No estando U contenida exactamente en M, ni las nuevas unidades $\frac{U}{n}$, $\frac{U}{n'}$, $\frac{U}{n''}$,..... sucesivamente menores, que se van tomando para medirla, puesto que M se supone inconmensurable; si se forman las séries de magnitudes

$$\frac{U}{n},\ 2\frac{U}{n},\dots m\frac{U}{n} \qquad M \qquad (m+1)\frac{U}{n},\dots$$
$$\frac{U}{n'},\ 2\frac{U}{n'},\dots\dots m'\frac{U}{n'} \qquad M \qquad (m'+1)\frac{U}{n'},\dots\dots$$
$$\frac{U}{n''},\ 2\frac{U}{n''},\dots\dots m''\frac{U}{n''}\ M\ (m''+1)\frac{U}{n''},\dots\dots,$$

la magnitud M se encontrará sucesivamente comprendida entre dos magnitudes consecutivas

$$m\frac{U}{n} \text{ y } (m+1)\frac{U}{n},\ m'\frac{U}{n'} \text{ y } (m'+1)\frac{U}{n'},\ m''\frac{U}{n''} \text{ y } (m''+1)\frac{U}{n''}\dots,$$

cuyas diferencias respectivas $\frac{U}{n}$, $\frac{U}{n'}$, $\frac{U}{n''}$, sucesivamente menores, indican que comprenden á la magnitud M, con tanta mayor aproximacion, cuanto mayores se tomen los divisores sucesivos de la unidad de medida; por consiguiente, los números

$$\frac{m}{n} \text{ y } \frac{m+1}{n},\ \frac{m'}{n'} \text{ y } \frac{m'+1}{n'},\ \frac{m''}{n''} \text{ y } \frac{m''+1}{m''},\dots,$$

que respectivamente las miden, irán comprendiendo cada vez, con mayor aproximacion, el número que mide la magnitud M; pero ésta es el límite de las magnitudes sucesivamente consideradas, puesto que su diferencia con ellas puede hacerse tan pequeña como se quiera, luego podrá decirse que: *el número que mide una magnitud inconmensurable, es el límite de los números que miden séries sucesivas de magnitudes conmensurables, cuyo límite es aquélla.*

168. **Números irracionales.—Definicion.**—*Se llaman números* IRRACIONALES Ó RADICALES *las raíces de cualquier grado de los números enteros que no las tienen exactamente, en forma entera ó fraccionaria.*

169. **Teorema.**—*Las raíces de los números enteros, que no se pueden obtener exactamente en números enteros, son inconmensurables.*

Demostracion.—Sea N un número, cuya raíz $\sqrt[n]{N}$ de grado n no es exactamente un número entero. Tampoco podrá ser exactamente un número fraccionario $\frac{a}{b}$, porque entónces se tendría, reduciendo á la forma irreducible $\frac{a'}{b'}$, si ya no lo está,

$$\left(\frac{a'}{b'}\right)^n = \frac{a'^n}{b'^n} = N$$

y como a' y b' son primos relativos (141 *recíp.*), tambien lo serán a'^n y b'^n (55 *cor.* 1.º); luego $\frac{a'^n}{b'^n}$ será un número fraccionario irreducible (141); que sería igual al número entero N, lo cual es absurdo; luego N no puede tener una raíz fraccionaria exacta; luego $\sqrt[n]{N}$ es un número inconmensurable.

170. **Conmutabilidad de las potencias y raíces.—Teorema.**—*La potencia de un grado cualquiera de*

un producto ó cociente, es igual al producto ó cociente de las potencias de igual grado de los números que se multiplican ó dividen, y **recíprocamente,** *la raíz de un grado cualquiera de un producto ó de un cociente es igual al producto ó cociente de las raíces del mismo grado de los números que se multiplican ó dividen.*

Demostracion.—1.º Siendo 5.3 y 17 : 6 el producto y el cociente propuestos, se tendrá, por ejemplo,

$$(5.7)^3=5.^3 7^3, \text{ pues } (5.7)^3=5.7.5.7.5.7=5.5.5.3.3.3$$

$$17:6\ )^4=17^4:6^4, \text{ pues } \left(\frac{17}{6}\right)^4=\frac{17}{6}.\frac{17}{6}.\frac{17}{6}.\frac{17}{7}=\frac{17^4}{6^4}.$$

2.º Se tendrá tambien, para dicho producto y cociente,

$$\sqrt{5.3}=\sqrt{5}.\sqrt{3}, \text{ porque } (\sqrt{5}.\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2.(\sqrt{3})^2=5.3$$

$$\sqrt{9:6}=\sqrt{9}:\sqrt{6}, \text{ porque } (\sqrt{9}:\sqrt{6})^2=(\sqrt{9})^2:(\sqrt{6})^2=9:6;$$

luego 5.3 es la raíz cuadrada de $\sqrt{5}.\sqrt{3}$ y 17 : 6 es la raíz cuadrada de $\sqrt{17}:\sqrt{6}$.

Corolario.—*Toda raíz inconmensurable, del grado* g, *de un número puede obtenerse, con la aproximacion del órden decimal* n, *multiplicándole por* $10^{n.g}$, *y dividiendo la raíz entera por* 10^n, pues, por ejemplo,

$$\sqrt[3]{26.10^{5.3}}=\sqrt[3]{26}.\sqrt[3]{10^{5.3}}=\sqrt[3]{26}.10^5$$

luego $$\frac{\sqrt[3]{26000000000000000}}{100000}=\sqrt[3]{26},$$

con una aproximacion de ménos de $\frac{1}{10^5}$.

LIBRO SEGUNDO.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES Y APROXIMADOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES GENERALES SOBRE LOS ERRORES.

171. **Definiciones.**—*Cuando un número exacto* n *se sustituye por otro* n', *su diferencia se llama* ERROR ABSOLUTO *y el número* n' *se llama* APROXIMADO POR DEFECTO Ó POR EXCESO, *segun que se tenga*

$$n' < n \quad \text{ó} \quad n' > n.$$

ERROR RELATIVO *de un número aproximado es el cociente de su error absoluto por su valor exacto*, por consiguiente: *el error absoluto es igual al producto del error relativo por el número exacto.*

Llamando ε_a y ε_r los errores absoluto y relativo de un número n, se tendrá:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_a}{n} \quad [1] \qquad \varepsilon_a = \varepsilon_r . n. \quad [2]$$

Ejemplo: Sea un número exacto 49,8653. Si se desprecian las dos últimas cifras, se desprecia un valor inferior á 0,01. El error absoluto será menor que 0,01; el valor aproximado 49,86; el error relativo será menor que

$$\frac{0{,}01}{49{,}8653} \text{ ó que } \frac{1}{4986{,}53}.$$

Se llama LÍMITE SUPERIOR DE UN ERROR *absoluto ó relativo, á un número mayor que éstos.*

172. **Reglas de los límites de los errores.**—

1.ª *Dividiendo el error absoluto de un número por un valor de éste, aproximado por defecto, se obtiene un límite superior de su error relativo.*

2.ª *Multiplicando el error relativo de un número por un valor de éste, aproximado por exceso, se obtiene un límite superior de su error absoluto.*

En efecto; siendo n' un valor del número n, aproximado por defecto y n'' un valor aproximado por exceso; de las expresiones [1] y [2] se deducirá:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{n} < \frac{\varepsilon_a}{n'}, \quad [3] \qquad \varepsilon_r = \varepsilon_r . n < \varepsilon_r . n'' \quad [4]$$

173. **Cuestiones fundamentales.**—Las cuestiones relativas al cálculo de los números aproximados, se reducen á las dos siguientes:

1.ª *Conocido el grado de aproximacion de los datos, hallar el grado de aproximacion que debe tener el resultado.*

2.ª *Conocido el grado de aproximacion que debe tener el resultado, hallar el grado de aproximacion con que han de tomarse los datos.*

174. **Reglas de los errores con respecto á las cifras exactas.**—1.ª *Si* C *es la cifra de órden superior de un número, cuyas* n+1 *primeras cifras son exactas, el límite superior de su error relativo será:*

$$\frac{1}{C.10^n}.$$

En efecto, sea el número 4,78934, cuyas cuatro primeras cifras son exactas; su error absoluto 0,00034 es menor que 0,001; luego el límite superior de su error relativo será (172, 1.ª)

$$\frac{0{,}001}{4} \quad ó \quad \frac{1}{4000}=\frac{1}{4.10^3}.$$

2.ª *Si* C *es la cifra de órden superior de un número aproximado, que tiene por límite superior de su error relativo la fraccion* $\frac{1}{C'.10^n}$, *sus* n+1 *ó sus* n *primeras cifras serán exactas*, segun sea $C' > C$ ó $C' \leqq C$.

En efecto, sea el número aproximado 426,537, cuyo error relativo es inferior á $\frac{1}{7.10^3}$. Su error absoluto tiene por límite superior el producto (172, 2.ª)

$$\frac{1}{7.10^3}.500=\frac{500}{7000}=\frac{5}{70}<\frac{1}{10}.$$

Siendo el error absoluto $<0{,}1$, las cuatro primeras cifras son exactas.

Supóngase ahora el número aproximado 62,7869, cuyo error relativo tiene por límite superior la fraccion $\frac{1}{5.10^4}$. El límite superior de su error absoluto será

$$\frac{1}{5.10^4}.70=\frac{70}{50000}=\frac{7}{5000}<\frac{50}{5000} \quad ó \quad \frac{1}{100}.$$

En este caso hay sólo cuatro cifras exactas.

En fin, para el número 62,7869 aproximado y el límite del error $\frac{1}{6.10^4}$, se tendría:

$$\frac{1}{6.10^4}.70=\frac{70}{60000}=\frac{7}{6000}<\frac{60}{6000} \quad ó \quad \frac{1}{100}.$$

CAPÍTULO II.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS APROXIMADOS.

§ 1.º—Adicion de los números aproximados.

175. **Regla.**—*Para obtener la suma de varios números, con un número determinado de cifras exactas, bastará tomar una cifra más en cada uno de los sumandos, calculándolos por defecto, efectuar la suma de estos valores aproximados, y suprimir la última cifra, aumentando una unidad á la última cifra conservada.*

Ejemplo: Obtener la suma de los números 47,8594; 126,54579; 35,8749, en ménos de 0,01. Se tendrá:

$$\begin{array}{r} 47{,}859 \\ 126{,}545 \\ 35{,}874 \\ \hline 210{,}278 \end{array}$$

La suma buscada será 210,28. En efecto, el error absoluto de cada sumando es menor que 0,001; luego la suma de los errores será menor que $10 \times 0{,}001$ ó 0,01 (1), y la suma buscada estará comprendida entre 210,278 y $210{,}278 + 0{,}01$, y con mayor razon, entre 210,27 y 210,29; luego será 210,28, en menos de 0,01, por defecto ó por exceso.

§ 2.º—Sustraccion de los números aproximados.

176. **Regla.**—*Para obtener, con un número determinado de cifras exactas, la diferencia de dos números, basta tomar ambos, por defecto ó por exceso, con tantas cifras como se piden en el resultado, y efectuar la sustraccion de los números aproximados obtenidos.*

(1) Se supone que el número de sumandos no excede de 10, pues si excediere se tendría que modificar la regla.

Ejemplo: Hallar la diferencia de 867,53259 y 654,38654; en menos de 0,001. Se tendrá:

$$\begin{array}{r} 867{,}532 \\ 654{,}386 \\ \hline 213{,}146 \end{array}$$

Conservando, en efecto, sólo hasta las milésimas, los errores absolutos del minuendo y sustraendo son, por defecto, menores que 0,001; luego, con mayor razon lo será el resto.

§ 3.º—Multiplicacion de los números aproximados.

177. **Principios de los errores relativos.**—1.º *El error relativo del producto de dos factores, uno exacto y el otro aproximado, es igual al error relativo del factor aproximado.*

Siendo el factor aproximado $a-\alpha$ y el factor exacto b, se tendrá:

$$(a\pm\alpha)\times b=ab\pm\alpha b;$$

el error absoluto es, pues, αb y el relativo será: (171)

$$\frac{\alpha b}{ab}=\frac{\alpha}{a}.$$

2.º *El error relativo del producto de dos factores, aproximados ambos por defecto, tiene por límite superior la suma de los límites superiores de los errores relativos de dichos factores.*

Siendo los factores $a-\alpha$ y $b-\beta$, el valor aproximado será:

$$(a-\alpha)\times(b-\beta)=ab-\alpha b-a\beta+\alpha\beta;$$

el error absoluto es, pues, $\alpha b+a\beta-\alpha\beta$ y el relativo

$$\frac{\alpha b+a\beta-\alpha\beta}{ab}=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b},$$

expresion que demuestra que: *el error relativo del producto de dos factores, aproximados por defecto, es igual á la suma de los errores relativos de los dos factores, disminuida en el producto de estos mismos errores.*

3.º *El error relativo del producto de dos factores, aproximados por exceso, es igual á la suma de los errores relativos de los factores, aumentada en el producto de estos mismos errores*, pues

$$(a+\alpha)\times(b+\beta)=ab+\alpha b+b\beta+\alpha\beta \text{ y } \varepsilon_r=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}.$$

4.º *El error relativo del producto de dos factores aproximados, uno por defecto y otro por exceso, es igual á la diferencia de los errores relativos de los factores aumentada ó disminuida en el producto de dichos errores*, pues

$$(a+\alpha)\times(b+\beta)=ab+\alpha b-a\beta-\alpha\beta \text{ y } \varepsilon_r=\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha}{a}.\frac{\beta}{b}.$$

5.º *El error relativo del producto de dos factores aproximados, tiene por límite superior la suma de los errores relativos de los factores*, pues siendo, por lo general, los errores relativos valores muy pequeños, su producto $\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b}$ será muy pequeño con relacion á cada uno, y en el caso de los factores aproximados por exceso, la suma de los límites superiores de los errores relativos excederá, generalmente á la suma de los tres términos arriba obtenidos; en los otros dos casos la proposicion es evidente.

Regla del problema directo.—*Para obtener el producto de dos números aproximados con* m *cifras exactas, basta tomar* m+1 *en cada uno de los factores, si la primera cifra de la izquierda es distinta de la unidad, y* m+2, *en el caso contrario.*

En efecto, para que el resultado tenga *m* cifras exactas, basta que su error relativo sea menor que $\frac{1}{10^m}$ (174, 2.ª), y, por consiguiente, que el error relativo de cada uno de los factores tenga por límite superior $\frac{1}{2.10^m}$ (177, 2.º); y esto se verifica cuando se toma cada número con $m+2$ cifras exactas, y $m+1$, en el caso de ser la primera >1, porque entonces el error relativo es menor que $\frac{1}{10^{m+1}}$, y con mayor razon menor que $\frac{1}{2.10^m}$.

Ejemplo: Calcular, en menos de 0,001, el producto $P=356\,(\sqrt{17}-2)$.

Teniendo tres cifras la parte entera de P, se pide el resultado con 6 cifras exactas, y deberá calcularse cada factor 356 y $\sqrt{17-2}$ con 8 exactas; pero en este caso, siendo el primero exacto, bastará obtener el segundo con 7.

Regla del problema inverso.—*El producto de dos números aproximados podrá obtenerse con* m—2 *cifras exactas, cuando aquél de los números que contiene menos exactas contiene* m.

En efecto, el límite superior del error relativo de cada factor es $\frac{1}{10^{m-1}}$, y, por consiguiente, el del resultado será $\frac{2}{10^{m-1}}$, inferior á $\frac{1}{10^{m-2}}$.

§ 4.º—Division de los números aproximados.

178. **Principios de los errores relativos.**—1.º *El error relativo del cociente de un número aproximado por un número exacto, es igual al error relativo del dividendo,* pues siendo $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+\alpha}{b}$ los cocientes exacto y aproxi-

mado, por exceso, se tendrán las expresiones siguientes de los errores absoluto y relativo

$$\varepsilon_a = \frac{a+\alpha}{b} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{b} \quad \text{y} \quad \varepsilon_r = \frac{\alpha}{b} : \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{a}.$$

2.° *El error relativo del cociente de dos números aproximados, tiene por límite superior la suma de los límites superiores de los errores relativos de estos números.*

En efecto, siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, el límite superior de su error relativo es la suma de los errores relativos del divisor y del cociente (177) y, recíprocamente, el límite superior del error relativo del cociente será la suma de los errores relativos del dividendo y del divisor.

179. **Regla del problema directo.**—*Para hallar el cociente de dos números aproximados con* m *cifras exactas, basta tomar* m+1 *en cada uno de los números que principien por una cifra diferente de la unidad y* m+2, *en el caso contrario.*

En el primer caso, como cada número tiene $m+1$ cifras exactas, sus errores relativos tendrán por límite comun $\frac{1}{2.10^m}$, luego el error relativo del cociente deberá ser menor que $\frac{1}{10^m}$ y tendrá, por consiguiente, m cifras exactas, por lo ménos.

En el segundo caso, tomando $m+2$ cifras exactas, en el número que principia por la unidad, su error relativo será $\frac{1}{10^{m+1}}$ y tambien $\frac{1}{2.10^m}$; pero como los números dados principian por la unidad, se calculará cada uno con $m+2$ cifras exactas, el límite comun del error relativo será $\frac{1}{10^{m+1}}$ y el del cociente $\frac{2}{10^{m+1}} = \frac{1}{5.10^m} < \frac{1}{10^m}$, de manera que éste contendrá *m* cifras exactas. Cuando uno sólo de los números principie por la unidad, éste se tomará con $m+2$ cifras exactas, y el otro con $m+1$, lo cual es fácil deducir razonando como en los casos anteriores.

Ejemplos: Calcular con 4 cifras decimales el cociente $\frac{\pi}{257}=\frac{3{,}14159...}{257}$.

Siendo el órden de las centésimas la primera cifra del cociente, y no teniendo influencia en la evaluacion del error relativo más que las cifras significativas, se piden 3 cifras exactas en el cociente, y como el dividendo es el sólo número aproximado, se tomará con 4 cifras, es decir, $\pi=3{,}1415$, y efectuando la division abreviada, se obtiene el cociente 0,0122.

§ 5.º—Potencias y raíces de los números aproximados.

180. **Teorema.**—*El error relativo de la potencia de un número aproximado tiene por límite superior el producto del exponente por el límite superior del error relativo de dicho número.*

Este teorema resulta inmediatamente del núm. 117.

Recíprocamente.—*El error relativo de la raíz de un número aproximado tiene por límite superior el error relativo de este número dividido por el índice de la raíz.*

181. **Reglas para las potencias.**—*Para obtener con* m *cifras exactas las potencias de un número aproximado, se calculará éste con* m+2, *cualquiera que sea su primera cifra, siempre que el exponente no exceda de* 10, *y* **recíprocamente,** *siendo* m *el número de cifras exactas de un número aproximado, puede contarse con* m—2 *en una potencia cuyo exponente no sea superior á* 10.

182. **Reglas para las raíces.**—1.ª *Para obtener la raíz cuadrada de un número, con* m *cifras exactas, basta co-*

nocerlo con m+1 *ó con* m *cifras exactas, segun que su primera cifra significativa de la izquierda sea ó no menor que* 5.

En efecto, para contar con m cifras exactas en la raíz, su error relativo ha de ser menor que $\frac{1}{10^m}$, lo cual se verificará, si el error relativo del número de que se extrae es menor que $\frac{2}{10^m}$ ó que $\frac{1}{5.10^{m-1}}$.

Pero tomando dicho número con $m+1$ cifras exactas, su error relativo es menor que $\frac{1}{10^m}$, y con mayor razon, que $\frac{1}{5.10^{m-1}}$. Si el número principia por una cifra igual ó mayor que 5, basta tomarlo con m cifras exactas, pues entonces, su error relativo, menor que $\frac{1}{C.10^{m-1}}$, expresando C dicha cifra, será tambien menor que $\frac{1}{5.10^{m-1}}$.

Recíprocamente.—*Dado un número aproximado con* m *cifras exactas, se puede calcular su raíz cuadrada con* m—1 *ó con* m *exactas, segun que la primera cifra significativa de la izquierda sea ó no menor que* 5.

En efecto, siendo C la primera cifra de la izquierda del número dado, su error relativo será ménos que $\frac{1}{C.10^{m-1}}$, y, por consiguiente, el error relativo de su raíz cuadrada será menor que $\frac{1}{2.C.10^{m-1}}$. El valor de esta expresion será evidentemente menor que $\frac{1}{10^{m-1}}$ para cualquier valor de la cifra C; pero si ésta es 5 ó mayor que 5, dicho valor será menor que $\frac{1}{10^m}$; en el primer caso se podrán contar m—1 cifras exactas, y m en el segundo.

Observacion.—Los teoremas anteriores son aplicables á la raíz cúbica, sustituyendo la cifra 4 á la 5, en sus enunciados.

Ejemplos: 1.º Calcular $\sqrt{\pi}$ en menos de 0,001.

Teniendo el valor π una cifra entera, se deberá hallar el resultado con 4 exactas, y como la primera cifra 3 es menor que 5, se considerarán las 5 primeras cifras de su valor.

2.º Extraer la raíz cuadrada de 38,76 con la mayor aproximacion posible, sabiendo que dicho número se halla aproximado por defecto, en ménos de 0,01.

Siendo la primera cifra de la izquierda menor que 5 y constando el número propuesto de cuatro cifras exactas, no se podrá contar más que con tres en la raíz (181 *recíp.*) Obteniendo, pues, ésta con 0,01 de error, por exceso, para compensar el error cometido sobre el número propuesto, al darlo aproximado por defecto, será 6,23 en ménos de 0,01, por exceso ó por defecto.

FIN.

ÍNDICE
DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN LA OBRA.

LIBRO SEGUNDO.

TEORÍA DEL NÚMERO RESTO.

PARTE SEGUNDA.

TRATADO DEL NÚMERO CONCRETO.

SECCION PRIMERA.

CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO CONMENSURABLE.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO INDETERMINADO.

Páginas.

LIBRO SEGUNDO.

CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO DETERMINADO.

SECCION SEGUNDA.

TEORÍA DEL NÚMERO CONCRETO CONMENSURABLE.

LIBRO PRIMERO.

TEORÍA DEL NÚMERO FRACCIONARIO ORDINARIO EXPLÍCITO Ó IMPLÍCITO.

SECCION TERCERA.

TEORÍA Y CÁLCULO DEL NÚMERO CONCRETO INCONMENSURABLE.

LIBRO PRIMERO.

TEORÍA DEL NÚMERO INCONMENSURABLE.

ERRATAS.

Pág.	Línea.	Dice.	Léase.
58	7	primeros.	primeros, no suprimidos.
58	8	cuarto...	cuarto, no suprimido.
58	8	primeros.	primeros, no introducidos.
76	30	expresion	exposicion.
122	9 á la 13	**a b c**...	$\mathbf{a}_{10}$ $\mathbf{b}_{10}$ $\mathbf{c}_{10}$.

194

M

945
945
1725
1380
7035
119025

GALDEAN

ARITMET