(Mecanica)

reforerarie a mllut

COLECCION PRIMERA

DE COMPENDIOS

DE ARITMÉTICA, GEOMETRÍA

Y MECÁNICA,

en tres pequeños volúmenes, que contienen los elementos mas sencillos de estas ciencias,

POR D. J. DE O., ETC.

VOLUMEN III.° — MECANICA.

MADRID.

IMPRENTA Y FUNDICION DE DON EUSEBIO AGUADO.

1849.

CUADERNO PRIMERO DE MECANICA.

IDEAS ELEMENTALES

SOBRE

LAS FUERZAS Y LOS EFECTOS DE MOVIMIENTO O DE EQUILIBRIO EN EL CUERPO INSTADO POR ELLAS.

Definiciones preliminares.

ARTÍCULO 1. *Cuerpo* es cualquiera porcion de *materia* limitado en todos sentidos, y que tiene por consiguiente forma y volumen determinados, llamándose *masa* del cuerpo la cantidad de materia de que está compuesto.

La masa del cuerpo se considera como un conjunto de moléculas ó *puntos materiales*.

Se dice cuerpo *sólido* cuando las moléculas de que se compone están adheridas unas á otras tanto que no se pueden separar facilmente, y á esta clase pertenecen los metales, las piedras, las maderas, etc. Y se dice que es *fluido* el cuerpo cuyas moléculas están unidas unas á otras con adherencia tan débil que se dejan separar facilmente. De los cuerpos fluidos, unos son *líquidos*, como por ejemplo el agua, el mercurio en su estado comun, etc.; y otros son *gaseosos*, como por ejemplo el aire, el vapor del agua, etc.

Todo cuerpo es *móvil*, es decir, que puede pasar de un lugar á otro del espacio. Está en *movimiento* cuando todo él ó sus partes van ocupando sucesivamente nuevos lugares en el espacio. Y está en *reposo* cuando sus partes permanecen todas sin variar de lugares en el espacio. Y como en la Geometría la posicion de un objeto se refiere siempre á las posiciones de otros objetos, se sigue que, tanto el movimiento como el reposo necesariamente son considerados como *relativos.*

2. La materia es *inerte*, voz significativa de que todo cuerpo necesita la accion de alguna causa estraña para pasar del estado de reposo al de movimiento, ó viceversa, como tambien para que despues de puesto en movimiento pueda suceder cambio en el modo con que se mueve. Estas causas estrañas, que producen ó modifican ó tienden á producir ó modificar el movimiento, se llaman *fuerzas.*

Una de las principales de la naturaleza es el *peso;* fuerza que constantemente sigue instando á que los cuerpos se muevan hácia el centro del globo terrestre.

Otra de las fuerzas mas comunmente empleadas es la que ejercen los individuos racionales ó irracionales, llamada fuerza *animal* ó *muscular*.

La fuerza de *dilatacion* de los cuerpos sólidos por el calor y la de *contraccion* por la ausencia del calor son enormes, y se emplean á veces con utilidad. Pero es mas comun el uso que se hace de la fuerza de dilatacion de los cuerpos gaseosos por el calor, especialmente la del vapor del agua, que en el dia es uno de los motores principales de las grandes máquinas.

Tambien la *elasticidad* ó fuerza que los muelles oponen á ser violentados hace servicios considerables en la industria.

Además de las fuerzas mencionadas, que en general se llaman *activas*, y que unas veces accionan como *movientes* y otras veces como *resistentes*, hay las llamadas en general *pasivas*, que siempre son resistentes; como por ejemplo el *rozamiento*, que se suscita cuando un cuerpo camina ó tiende á caminar rozándose contra otro; el *embarramiento* de las cuerdas, especialmente siendo nuevas, ó resistencia que por su rigidez oponen á sufrir inflexiones convenientes para ajustarse sobre superficies curvas; etc.

3. Se llama *accion* de la fuerza contra un cuerpo el impulso que este recibe de la fuerza en cada instante. De suerte que el efecto sensible de movimiento ó de reposo producido

por la fuerza en el cuerpo, es debido siempre á la suma de infinidad de acciones recibidas por éste durante mas ó menos tiempo. Sin embargo, está en uso el distinguir con diferentes nombres estos dos efectos relativos á la duracion del tiempo, diciéndose *fuerza de presion* cuando produce un efecto sensible por la sucesiva y contínua repeticion de acciones ejercidas durante un tiempo sensible; y fuerza de *percusion* ó *choque* cuando produce un efecto sensible accionando durante un brevísimo tiempo, inapreciable por nuestros sentidos, pero que en realidad es algo. Y por consiguiente, la percusion debe ser considerada como una suma de presiones ejercidas por la fuerza con grande intensidad durante un tiempo muy breve.

Por ejemplo, la fuerza que una prensa ejerce en el cuerpo prensado se dice que es de presion, y la fuerza que ejerceria un mazo al descargar el golpe contra aquel cuerpo mismo, para reducirle á menor volumen ó á diferente forma, se dice que es fuerza de percusion. Tambien cuando algun cuerpo pesado está retenido por un obstáculo, ó desciende en virtud de su propio peso en el aire, la fuerza que el peso ejerce contra el obstáculo ó contra la resistencia del aire es presion, y la que al fin del descenso desde cierta altura ejerce aquel cuerpo contra otro que le recibe es percusion.

4. Por estos ejemplos vemos indicado un hecho que la razon y la esperiencia generalizan, á saber, que tanto el reposo como el movimiento de un cuerpo son estados que resultan de accionar simultáneamente dos fuerzas contrarias á lo menos, una moviente y otra resistente. Si esta última es asaz poderosa para contrarestar exactamente ni mas ni menos á la primera, resulta *equilibrio* entre ellas y reposo en el cuerpo, y si la moviente es mas poderosa que la resistente resulta *movimiento* en el cuerpo. La *Estática* ó ciencia del equilibrio, y la *Dinámica* ó ciencia del movimiento constituyen pues la llamada *Mecánica*.

5. Comunmente son mas de dos las fuerzas movientes y resistentes que accionan en el cuerpo para producir el equilibrio ó el movimiento, las cuales luchan entre sí ó cooperan comunicándose por conducto de la masa del cuerpo á quien están aplicadas. El efecto (equilibrio ó movimiento) de su accion simultánea depende de las cuatro circunstancias que vamos á examinar.

I.ª *Direccion* de la fuerza. Se indica por una línea recta indefinida, como *FA* (*fig.* 1), segun la direccion en que el cuerpo *A*, ó por mejor decir el punto material *A* libre, deberia moverse por la accion de la fuerza *F* en caso de que ella fuese la única aplicada.

II.ª *Punto de aplicacion.* La figura representa ser *A* el punto de aplicacion de la fuerza *F* en el cuerpo. Pero en realidad puede considerarse como punto de aplicacion cualquiera de los de la recta *FA* dentro del cuerpo sólido, porque todos los puntos de esta recta son conductores de la fuerza, que la comunican á la parte lineal comprendida dentro del cuerpo sólido, desde la cual se comunica á todos los de la materia que le constituye.

Por lo mismo tambien se puede considerar como punto de aplicacion de una fuerza cualquiera otro de su direccion, con tal de que estuviere ligado al cuerpo invariablemente, es decir, que aunque situado fuera de la masa principal esté ligado á ella como todos los demás que la componen. Mas no se debe confundir esta definicion de punto invariable con la de algun otro punto que llamaremos *punto fijo*, para significar que este permaneceria inmoble aunque al rededor de él se moviesen ó pudieran moverse todos los demás del cuerpo.

III.ª *Sentido en que acciona.* El distinguir esta circunstancia interesa, para saber hácia cual de las estremidades de la direccion *FA* deberia moverse el cuerpo por la accion de la fuerza *F*; y se indica con una flecha cuya punta está dirigida hácia aquella estremidad (*fig.* 1). Asi, diremos que la fuerza es *impulsiva* cuando la punta de la flecha va encaminada hácia el cuerpo, y que la fuerza es *atractiva* cuando la punta de la flecha se dirije á alejarse del cuerpo. Y puesto que la fuerza *F* se puede considerar aplicada en cualquier punto de la direccion *FA* ligado invariablemente al cuerpo, claro está qne la *F* impulsiva por un lado en direccion determinada se puede convertir en equivalente atractiva *F′* por el otro lado, precisamente en la misma direccion que antes.

Se dice que dos fuerzas *F* y *F′* son *directamente opuestas* (*fig.* 2) cuando accionan en sentidos contrarios en direccion de una misma recta.

IV.ª *Valor de la fuerza.* Valor ó *intensidad* de una fuerza es la mayor ó menor energía de su accion; cantidad que se aprecia admitiendo como axiomas fundamentales los dos que á continuacion se espresan.

1.° *Dos fuerzas son iguales cuando aplicadas á un mismo punto de un cuerpo libre y accionando en sentidos directamente opuestos se equilibran.* Y recíprocamente, *si dos fuerzas aplicadas á un punto mismo del cuerpo libre son iguales y accionan en sentidos directamente opuestos, se equilibran entre sí.*

2.° *Una fuerza es múltipla de otra cuando está formada por la reunion de varias iguales á esta última.*

Segun el primer axioma, equilibrando con pesos una fuerza de cualquiera otra naturaleza, el valor de esta fuerza será igual á el peso equilibrante. Y en atencion á que el peso es una fuerza valuable facilmente y con exactitud, está admitido en la Mecánica como término de comparacion para valuar todas las demás. Practicando pues el esperimento de equilibrio, se halla que la fuerza de un hombre sostiene en equilibrio tanto ó cuanto peso; que la fuerza del vapor encerrado en un receptáculo puede sostener en equilibrio una tapadera que pesa cierto número de libras; que la fuerza de un muelle, violentado mas ó menos por un peso mas ó menos grande á quien equilibra, es igual á este peso; etc.

De lo espuesto se infiere, que el valor de una fuerza de cualquiera naturaleza puede ser espresado por número; y asi, cuando digamos fuerza F se ha de entender que F representa el número de unidades de peso á que equivale la que se nombra, como por ejemplo 20 libras. Tambien los valores de las fuerzas pueden representarse por líneas rectas proporcionales á los números mediante escala (*Geom.* 25); y nosotros usaremos de este método geométrico cnando nos convenga en lo sucesivo.

6. Las fuerzas que *simultáneamente* accionan en un cuerpo, cada una segun las cuatro circunstancias mencionadas, forman un *sistema* perteneciente á alguna de las clasificaciones que siguen. 1.ª Sistemas de fuerzas cuyas direcciones concurren todas en un mismo punto. 2.ª Sistemas de fuerzas cuyas direcciones no concurren todas en un mismo punto, sean ó no paralelas. Todavía se subdivide cada una de estas dos clases de sistemas en dos, una de fuerzas cuyas direcciones residen todas en un mismo plano, y otra de fuerzas cuyas direcciones no residen todas en un mismo plano.

Las cuestiones que primeramente vamos á tomar en consideracion serán de hallar, si es posible, una sola fuerza llamada *resultante*, que hiciera por sí sola el mismo efecto que el conjunto de todas las fuerzas *componentes* del sistema que se proponga. Y en caso de que haya resultante, hallaremos con suma facilidad otra fuerza llamada *equilibrante;* esto es, la que por sí sola equilibraria al sistema de todas las componentes, ó bien á la resultante de ellas (5, IV.ª, 1.º *recip.*).

Cuando se trata de hallar la resultante de dos ó mas fuerzas dadas en cualquiera de los mencionados sistemas, se dice en general que se propone hacer *composicion* de fuerzas. Y cuando se trata de formar un sistema de componentes que haga el mismo efecto que una sola fuerza dada, se propone hacer la *descomposicion* de ella.

Sobre la primera de estas dos cuestiones, de cuya resolucion depende la segunda en cada sistema de fuerzas, no podremos estendernos á mas de lo preciso para el objeto de este libro de primeros elementos de Mecánica, que se ampliarán en el correspondiente de la coleccion posterior ofrecida.

PARTE PRIMERA.

Composicion, descomposicion y equilibrio de las fuerzas en general.

Sistemas de fuerzas aplicadas á un punto material en direccion de una misma recta (lám. 1).

7. Cuando dos ó mas fuerzas aplicadas á un punto material accionan en direccion de una misma recta, es indudable *que la direccion de la resultante coincidirá con la de las componentes;* porque no existe en el sistema fuerza alguna que al móvil pueda desviar de aquella direccion (5, I.ª). El valor y el sentido de la resultante dependen de los valores y sentidos de las componentes, como se esplica en las proposiciones que siguen.

I.ª *Si dos ó mas fuerzas de valores F, F'..... accionan en un mismo sentido en direccion de una recta* (fig. 1), *la resultante es una fuerza igual á la suma de las componentes, y acciona en el mismo sentido de ellas.*

Esta proposicion es un comentario del axioma 2.º del artículo (5, IV.ª), pues cuando se dice que una fuerza es múltipla de la que se considera como unidad, se ha de entender que puede componerse de sumandos cuya unidad sea la misma en valor, direccion y sentido.

Hallada pues la resultante de este sistema, ya sea espresada en valor numérico $F+F'+$..... ó ya en lineal, otra fuerza igual y directamente opuesta á ella sería la equilibrante (5, IV.ª, *axioma* 1.º) del sistema propuesto.

II.ª *Si dos fuerzas de valores F y F' desiguales accionan en direccion de una misma recta en sentidos contrarios* (fig. 2), *la resultante es una fuerza igual á la diferencia de las componentes, y acciona en sentido de la mayor.*

Considerando á esta fuerza mayor, F por ejemplo, como compuesta de otras dos, tales que una sea igual á la menor F', estas últimas se equilibrarán entre sí (*art.* 5, IV.ª, *axioma* 1.º), y solo quedará accionando la parte no destruida de F', esto es, una fuerza resultante igual á la diferencia $F-F'$, en valor numérico ó lineal, y que accionará en sentido de la componente mayor.

Otra fuerza igual y directamente opuesta á la resultante $F-F'$ sería la equilibrante (5, IV.ª, *axioma* 1.º) del sistema propuesto.

III.ª *Si en direccion de una misma recta accionan varias fuerzas en un sentido y varias otras en el sentido contrario, la resultante es una fuerza igual á la diferencia que haya entre las sumas de estos dos sistemas, y acciona en sentido de la mayor suma.*

Esta proposicion es consecuencia de las dos que preceden; pues por la primera, todas las fuerzas pueden reducirse á dos sumas ó resultantes de sentidos contrarios; y por la segunda, la diferencia de estas sumas será igual á la resultante final, que accionará en sentido de la mayor de ellas.

Sistemas de fuerzas aplicadas á un mismo punto material en distintas direcciones (lám. 1.ª).

8. Cuando dos fuerzas F y F' aplicadas á un punto material A accionan en direcciones AF y AF' distintas (*figura* 4), la direccion y el valor de la resultante se determinan por las dos proposiciones que formularemos despues de las observaciones preventivas que siguen.

1.ª Sea cualquiera el sentido en que accionare cada una de las dos fuerzas de este sistema, sus direcciones cruzándose en el punto A (*fig.* 3) forman cuatro ángulos: y puesto que, segun la esplicacion III.ª del artículo (5), uno de los cuatro ángulos será siempre de lados en cuyas direcciones las dos fuerzas accionan como atractivas ó como repulsivas, podemos y debemos considerar tales las del sistema propuesto (*fig.* 4) á quien se refiere lo que ahora sigue.

2.ª Cada una de las dos fuerzas F y F' componentes del sistema acciona con tendencia de mover en su propia direccion al punto material A, que no puede moverse por dos caminos á un mismo tiempo. Pero debe moverse, porque dos fuerzas dirigidas asi, aunque fuesen iguales, no pueden equilibrarse una á otra (4, IV, *axioma* 1.º). Luego, *se moverá por un solo camino el punto material A, como si estuviese solicitado en aquella direccion por una sola fuerza, que será la resultante de las componentes F y F'.*

3.ª La direccion de esta resultante no puede menos de ajustarse al plano determinado por las rectas AF y AF' (*Geom.* 55), pues no existe en el sistema otra fuerza alguna que obligue al movil á salir de aquel plano. Ni tampoco el punto movil A puede salir fuera del ángulo FAF', porque cada componente F ó F' le insta hácia su respectiva direccion alejándole de la direccion de la otra. Luego, *la direccion de la resultante dividirá el ángulo FAF' en dos partes, que ahora vamos á determinar* en la siguiente proposicion I.ª, para despues determinar en la II.ª el valor de la resultante.

I.ª *Si dos fuerzas F y F' aplicadas á un punto material A accionan en direcciones AF y AF' distintas* (fig. 4), *la direccion de la resultante coincide con la diagonal del pa-*

ralelógramo construido sobre los lados Af y Af' proporcionales á las componentes F y F', y tomados en las direcciones de estas desde el vértice A.

Ya que el punto movil A no puede menos de caminar alejándose cada vez mas de las direccion AF y AF' simultáneamente, claro está que si A se ha alejado de la direccion AF' la cantidad Af, dicho movil se hallará en alguno de los puntos de la recta fg paralela á AF', al mismo tiempo que si se ha alejado de la direccion AF la cantidad Af', el movil A se hallará en alguno de los puntos de la recta $f'g'$ paralela á AF. Luego, el punto movil A se hallará entonces en el punto z, único comun á las rectas fg y $f'g'$, punto que es vértice opuesto al A en el paralelógramo $Afzf'$ (*Geom.* 32).

Visto que el punto móvil A instado simultáneamente por las fuerzas F y F' del actual sistema se moverá en direccion de la diagonal Az del paralelógramo formado con los alejamientos Af y Af', tratemos de inquirir las relaciones que puedan tener estos alejamientos con los valores F y F' de las fuerzas. En los tratados completos de Mecánica se resuelve esta cuestion de varios modos mas ó menos satisfactorios, y todos ellos prolijos. El rigor geométrico asi lo exige; mas en atencion á que ningun motivo hay para contradecir á lo que la razon natural dicta y la esperiencia confirma, á saber, *que los alejamientos Af y Af' no pueden menos de ser proporcionales á los valores F y F' de las fuerzas que los producen*, podemos admitir este principio á que conducen las demostraciones mas rigorosas de los geómetras, formulado en la proporcion

$$F : F' :: Af : Af'.$$

Esto es, que en el sistema de dos fuerzas F y F' aplicadas á un punto material A en distintas direcciones, la direccion de la resultante coincide con la diagonal Az del paralelógramo formado con los lados Af y Af' proporcionales á las componentes F y F', tomados en las respectivas direcciones de estas desde el vértice A.

Observacion. Segun este principio, el paralelógramo puede ser cuan grande ó pequeño se quiera; y de aqui se sigue tambien que en caso de ser conocida la direccion de la resultante, si en ella se toma cualquiera parte Az grande ó pequeña, y sobre esta como diagonal se construye el paralelógramo, sus lados Af y Af' serán siempre proporcionales á las componentes F y F'.

II.ª *El valor Z de la resultante está representado por la diagonal Az del paralelógramo cuyos lados Af y Af' representen los valores F y F' respectivos de las componentes* (figura 5).

Es decir, que las fuerzas Z, F, F' son proporcionales á la diagonal y los lados del paralelógramo.

Para demostrar esta proposicion sabemos (5, IV.ª, *axioma* 1.º), que si se aplica al punto A una fuerza X igual y directamente opuesta á la incógnita Z, será X equilibrante de Z y por ello del sistema de sus dos componentes F y F'; esto es, que las tres fuerzas F, F', X constituyen un sistema de equilibrio. En este sistema cada una de las tres fuerzas es equilibrante de las otras dos, porque si aquella se suprimiese dejaria de existir el equilibrio: luego tambien la fuerza F' será igual y directamente opuesta á la resultante de F y X. De suerte que tomando en la prolongacion de AF' la parte Ah igual á la Af' que represente á F', la resultante de F y X estará representada en valor y direccion por la parte lineal Ah. Constrúyase pues sobre Ah como diagonal y Af como lado el paralelógramo $Afhx$, y por la observacion hecha al fin de la proposicion I.ª, los lados Ax y Af serán proporcionales á las fuerzas X y F, como se espresa en

$$X : F :: Ax : Af.$$

Por esta construccion ha resultado un tercer paralelógramo $Ahfz$, en que es $Az = hf = Ax$. Y sustituyendo Az al término Ax en la proporcion precedente, como tambien Z al término X en virtud del dato $Z = X$, será

$$Z : F :: Az : Af.$$

Reuniendo esta proporcion á la $F : F' :: Af : Af'$, demostrada en la proposicion I.ª, tendremos finalmente

$$Z : F : F' :: Az : Af : Af',$$

segun en la proposicion II.ª está enunciado.

9. **Observaciones** referentes al paralelógramo de las fuerzas.

1.ª En el paralelógramo $Afzf'$ (*fig.* 4) los triángulos Afz y $Af'z$ son idénticos, por lo cual es indudable, que los mismos tres datos necesarios para determinar uno de estos triángulos (*Geom.* 29) se necesitan y bastan para determinar el paralelógramo; esto es, para resolver las dos cuestiones recíprocas adjuntas. 1.ª *Dados los valores F, F', y las direcciones AF, AF' de dos fuerzas aplicadas á un punto material A formando ángulo, hallar el valor Z y la direccion AZ de la resultante.* 2.ª *Dado el valor Z y la direccion AZ de una fuerza, descomponer esta en dos cuyas direcciones AF, AF' sean dadas.*

En otro artículo resolveremos estas dos cuestiones geométricamente, y ahora vamos á indicar su resolucion numérica ó por el cálculo en caso de ser perpendiculares entre sí las direcciones AF y AF' de las componentes.

Para la cuestion primera (*figs.* 6 *y* 7), dados los valores numéricos F y F' de las componentes perpendiculares, el triángulo rectángulo Afz da (*Geom.* 49, II.ª)

$$Z^2 = F^2 + F'^2 \quad \text{ó bien } Z = \sqrt{F^2 + F'^2}.$$

En la cuestion recíproca, suponiendo dados el valor numérico Z de una fuerza y las direcciones AF, AF' perpendiculares de las dos en que se quiera descomponer, los valores F y F' de estas se tienen mediante las proporciones

$$F : Z :: Af : Az, \quad \text{de donde} \quad F = Z \times \frac{Af}{Az},$$

$$F' : Z :: Af' : Az, \quad \text{de donde} \quad F' = Z \times \frac{Af'}{Az}.$$

Pero en esta última cuestion falta todavía el sustituir á las espresiones $\frac{Af}{Az}$ y $\frac{Af'}{Az}$ otras conocidas, que por ser dadas las direcciones de F y F' respecto de la de Z se podrian obtener, si supiésemos emplear aquí el método llamado trigonométrico de resolver por el cálculo las cuestiones referentes á lados y ángulos de los triángulos; cálculo de que se tratará en los cuadernos suplementarios de Geometría.

2.ª Cuando las componentes F y F' son iguales, formando sus direcciones AF y AF' cualquier ángulo, el paralelógramo será rombo ó cuadrado. Y como en un triángulo á iguales lados se oponen iguales ángulos (*Geom.* 28), se sigue que, *en caso de ser iguales las dos componentes F y F', la direccion de la resultante Z dividirá el ángulo FAF' en dos partes iguales.*

3.ª Siendo desiguales las componentes F y F', el paralelógramo será rombilongo ó cuadrilongo. Y como en un triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo (*Geom.* 28), se sigue que *la direccion de la resultante se acercará mas á la direccion de la componente mayor.*

4.ª La *figura* 6 manifiesta que, segun el ángulo de las componentes F y F' va *decreciendo* desde recto hasta anularse, la resultante Z va *creciendo* desde ser $Z=\sqrt{F^2+F'^2}$ representada por Az en el primer caso, hasta ser al fin $Z=F+F'$ representada por Az'' segun el artículo (7, I.ª). Suponiendo por ejemplo $F=50$ libras y $F'=40$ libras, en el cuadrilongo será $Z=\sqrt{50^2+40^2}=\sqrt{900}=30$ libras; y cuando el ángulo haya decrecido hasta anularse, será

$$Z=50+40=90 \text{ libras.}$$

5.ª Tambien la *figura* 7 manifiesta que segun el ángulo de las componentes F y F' va *creciendo* desde recto hasta dos rectos, la resultante va *decreciendo*, desde ser $Z=\sqrt{F^2+F'^2}$ representada por Az, hasta ser al fin Z igual á la diferencia de las componentes F y F' representada por Az''. Suponiendo como antes $F=50$ libras y $F'=40$ libras, la resultante que en el cuadrilongo es $Z=30$ libras irá decreciendo hasta ser al fin $Z=F-F'=10$ libras.

10. Problemas de composicion y descomposicion de fuerzas aplicadas á un punto material en distintas direcciones, ajustadas todas á un mismo plano.

I.° *Dados los valores F, F' de dos fuerzas aplicadas á un punto material A en distintas direcciones* (fig. 4), *y dado tambien el ángulo FAF' comprendido entre estas, hallar su resultante Z.* Y recíprocamente, *dada una fuerza Z aplicada á un punto material A en la direccion AZ, des-*

componerla en dos cuyas direcciones AF y AF' formen ángulos ZAF y ZAF' dados, siendo la suma de estos menor que dos ángulos rectos (9, 5.ª).

Si para determinar la resultante Z se da descrito el ángulo FAF', y se dan representadas por Af y Af' las fuerzas F y F', constrúyase el paralelógramo $Afzf'$, y su diagonal Az representará en valor y direccion á la resultante Z.

Si para determinar los valores F y F' de las componentes de una fuerza dada Z, suponemos representada esta por la longitud Az y descritos los ángulos ZAF y ZAF', constrúyase sobre Az como diagonal el paralelógramo $Afzf'$, y sus lados Af y Af' representarán los valores F y F' de las componentes.

Cuando se dan espresados por números los datos para resolver una ú otra de las dos cuestiones recíprocas de este problema, hay que traducirlos, describiendo los valores angulares dados mediante el semicírculo graduado, y los valores lineales dados mediante escala y compás. Practicada la traduccion se construye el paralelógramo, y se tendrán representadas por líneas la fuerza ó las fuerzas incógnitas del problema. Ultimamente, se traducen estas á números mediante el compás y la misma escala que sirvió para traducir á líneas los valores numéricos de las fuerzas dadas.

Por ejemplo, suponiendo para la composicion dadas las fuerzas $F=50$ libras y $F'=40$ libras, y descrito el ángulo FAF' cuyo valor haya sido dado en número de grados; se toman por la escala las partes lineales $Af=50$, $Af'=40$, se construye el paralelógramo, y llevando con el compás á la escala la longitud Az de la diagonal, se sabrá el valor numérico de la resultante Z.

Para la descomposicion de una fuerza cuyo valor sea dado en número, como por ejemplo $Z=70$ libras, aplicado á un punto material A en la direccion AZ, y que se quiera descomponer en dos de direcciones dadas por los valores numéricos de los ángulos ZAF y ZAF' que hayan de formar con la direccion de Z; se describen con el semicírculo graduado estos ángulos, se toma en la línea AZ desde A la longitud Az igual á 70 partes de la escala, y construyendo sobre Az como diagonal el paralelógramo $Afzf'$, sus lados Af y Af' representarán los valores de las componentes F y F', que llevados con el compás á la escala se tendrán reducidos á números de libras.

Escusado parece el advertir: 1.° Que las direcciones AF y AF' de las dos fuerzas en que se quiera descomponer una Z dada, hayan de formar ángulo entre sí, porque si no sería imposible el paralelógramo (9, 4.ª). 2.ª Que cuando fuere arbitrario este ángulo conviene elegir el recto, por la ventaja que ofrecerá de poderse emplear las espresiones numéricas de las fuerzas que quedan cifradas en el artículo (9). 3.ª Que es imposible sean ambas componentes F y F' perpendiculares á la fuerza Z que se quiere descomponer, porque se incurriria en el inconveniente de la primera advertencia.

II.° *En un sistema de mas de dos fuerzas* F, F', F''...., *aplicadas á un punto material* A (fig. 8) *en distintas direcciones* AF, AF', AF''...., *ajustadas todas á un mismo plano, determinar la resultante* Z. Y recíprocamente, *dada una fuerza* Z *aplicada á un punto material* A *en la direccion* AZ, *descomponerla en mas de dos cuyas direcciones* AF, AF', AF''...., *sean dadas.*

Para lo primero, con dos de las fuerzas, como por ejemplo las F y F' inmediatas, representadas por las longitudes Af y Af', se forma el paralelógramo cuya diagonal Ah representará á la resultante de F y F'. Ahora, con Ah y la longitud Af'' que representa á la tercera fuerza F'', se forma el paralelógramo cuya diagonal Az representará á la resultante de Ah y Af'', y por consiguiente de Af, Af', Af''. Por este orden se va procediendo en combinar la resultante hallada con otra cuarta fuerza dada, y asi sucesivamente hasta comprender todas. El método mismo nos manifiesta que la resultante final será la del sistema propuesto, como por ejemplo la resultante Z representada por Az en el sistema de las tres componentes F, F', F''.

La cuestion recíproca, ó sea descomponer una fuerza Z representada por Az en varias componentes cuyas direcciones AF, AF', AF''..... sean dadas en el mismo plano de la de Z, se resuelve siguiendo un orden inverso. Para ello, suponiendo ser tres las componentes, se toma sobre la direccion AF'' de la fuerza F'' inmediata una longitud Af'' tal, que construyendo el paralelógramo $Af''zh$ resulte el lado Ah dentro del ángulo FAF' formado por las otras dos fuerzas AF y AF'. Ahora, sobre la diagonal Ah se construye el paralelógramo $Afhf'$, cuyos lados Af y Af' representarán á las fuerzas F y F', asi como Af'' representará á la fuerza F''.

En esta descomposicion hemos tomado la longitud Af'' arbitraria, mas esta arbitrariedad no obsta á que siempre las longitudes Az, Af, Af', Af'' sean proporcionales á las fuerzas Z, F, F', F''.

11. *Tres fuerzas F, F', F'' aplicadas á un punto material A* (fig. 9) *en distintas direcciones AF, AF', AF'' no ajustadas á un mismo plano, dan una resultante Z representada en valor y direccion por la diagonal Az del paralelepípedo formado con las tres aristas Af, Af', Af'', proporcionales á las componentes y tomadas en las direcciones de estas desde el vértice A.*

Sobre los lados Af y Af' constrúyase el paralelógramo, cuya diagonal Ah representará en valor y direccion á la resultante de F y F'. Ahora, sobre los lados Ah y Af'' constrúyase el paralelógramo, cuya diagonal Az representará en valor y direccion á la resultante Z de F, F', F''. Y como Az es á la evidencia diagonal del paralelepípedo construido con las tres aristas Af, Af', Af'', está demostrada la proposicion.

Observaciones referentes á los casos en que las direcciones de las fuerzas aplicadas á un punto no residan todas en un mismo plano.

1.ª Acabamos de probar que en cualquier sistema de los comprendidos en la proposicion, la resultante Z está representada en valor y direccion por la diagonal Az del paralelepípedo, ó bien del paralelógramo diagonal $Ahzf''$. Mas como este paralelógramo está diseñado perspectivamente, lo mismo que su diagonal Az, la figura construida en el papel para demostrar la proposicion es insuficiente por sí sola, sin el auxilio del cálculo, para darnos á conocer el verdadero valor y la efectiva direccion de la resultante Az, por lo cual se necesitará construir el paralelógramo $Ahzf''$ tal como en realidad debe ser. Para ello se forma primeramente un esqueleto de ángulo triedro con las tres aristas Af, Af', Af''; despues en el plano de la faz fAf' se construye sobre los lados Af y Af' el paralelógramo cuya diagonal será Ah; y últimamente, sobre los lados Ah y Af'' se construye el paralelógramo cuya diagonal Az será quien represente el valor efectivo de Z y su direccion.

Por este método práctico, necesario cuando se carece de los recursos del cálculo para las cuestiones de la Geometría del espacio, se podrán evidenciar varias particularidades interesantes que aqui no podemos demostrar con claridad, y entre otras una muy notable; á saber, que la resultante de tres fuerzas iguales cuyas direcciones de dos en dos formen ángulos iguales, ó sea la diagonal Az del paralelepípedo formado con tres aristas Af, Af', Af'' iguales (*fig.* 10), dirigidas como se ha dicho, pasa por el centro C del círculo á cuya circunferencia pertenezcan los tres puntos f, f', f'', y que por consiguiente (*Geom.* 60) dicha diagonal ACz es perpendicular al plano del círculo.

2.ª El problema de practicar la descomposicion de una fuerza Z aplicada al punto A y representada por la longitud Az (*fig.* 9), en tres componentes cuyas direcciones AF, AF', AF'' en el espacio sean dadas, se resuelve dirigiendo desde el punto z tres rectas paralelas á dichas direcciones; y las partes zm, zn, zh comprendidas en estas rectas nuevas entre el punto z y los planos $F'AF''$, FAF'', FAF' representarán los valores F, F', F'' de las componentes de Z pedidas. Porque las aristas zm, zn, zh son respectivamente iguales y paralelas á las aristas Af, Af', Af''. Mas, en la práctica habrá que hacer las construcciones formando el esqueleto de líneas y planos correspondiente.

3.ª En caso de que las direcciones de las tres fuerzas F, F', F'' dadas sean perpendiculares entre sí, la resultante Z será diagonal de un paralelepípedo rectangular, y su valor numérico se deduce facilmente de los valores numéricos de las componentes. En efecto, segun la observacion análoga del artículo (9, 1.ª), tenemos las equivalencias

$$\overline{Ah}^2 = \overline{Af}^2 + \overline{Af'}^2 \quad \text{y} \quad \overline{Az}^2 = \overline{Ah}^2 + \overline{Af''}^2,$$

de las cuales viene $$\overline{Az}^2 = \overline{Af}^2 + \overline{Af'}^2 + \overline{Af''}^2$$

ó bien $$Z^2 = F^2 + F'^2 + F''^2;$$

de donde $$Z = \sqrt{F^2 + F'^2 + F''^2};$$

fórmula que sirve para la composicion de tres fuerzas dadas perpendiculares entre sí.

Para la descomposicion de una fuerza dada Z en tres componentes F, F', F'' perpendiculares entre sí tenemos tambien (9, 1.ª), siendo H la fuerza representada por la diagonal Ah,

$$F = H \times \frac{Af}{Ah}, \qquad F' = H \times \frac{Af'}{Ah},$$

$$H = Z \times \frac{Ah}{Az}, \qquad F'' = Z \times \frac{Af''}{Az}.$$

Y sustituyendo el equivalente de H en las espresiones de F y F', se tienen por fin las de las tres incógnitas de la cuestion

$$F = Z \times \frac{Af}{Az}, \quad F' = Z \times \frac{Af'}{Az}, \quad F'' = Z \times \frac{Af''}{Az};$$

espresiones de cuya utilidad no podemos hacer uso aqui por falta de ideas del cálculo trigonométrico, como se indicó en el artículo (9, 1.ª).

4.ª Cuando son mas de tres las fuerzas aplicadas al punto A en distintas direcciones del espacio, se determina la resultante de tres de ellas como ya está esplicado. Despues con esta resultante y una cuarta fuerza se forma paralelógramo, cuya diagonal será resultante de las cuatro. Y por este orden se sigue hasta comprender en la composicion la última de las componentes dadas.

Bien se deja conocer que el método de construcciones por esqueletos indicado en la observacion 1.ª es todavía mas conducente aqui. De este modo se veria tambien que la resultante de cualquier número de fuerzas iguales, representadas por las aristas de una pirámide regular, pasa por el centro de la circunferencia circunscrita á la base de la pirámide (*fig.* 10).

Fuerzas aplicadas á distintos puntos de un cuerpo en direcciones que no sean paralelas (lám. 1).

---

12. Poco nos detendremos en el estudio de los diversos sistemas de esta clase, indicando lo puramente necesario para que se pueda formar alguna idea de ellos.

1.° Aunque dos fuerzas F y F' estén aplicadas á diferentes puntos B y B' de un cuerpo sólido (*fig.* 11), si sus direcciones están ajustadas á un mismo plano sin ser paralelas, concurrirán precisamente en un punto O, perteneciente ó no al cuerpo (*Geom.*, 19). Hallado pues el punto O de concurso, y construyendo el paralelógramo $Ofzf'$ sobre los lados Of y Of' proporcionales á las fuerzas F y F' tomados en las direcciones de estas, la diagonal Oz representará en valor y direccion á la resultante Z. Esta fuerza, que por sí sola haria el mismo efecto que el sistema de componentes F y F', puede considerarse aplicada en cualquier punto de su direccion que pertenezca ó esté ligado al cuerpo invariablemente (5, II.ª). Suponiendo por ejemplo que los puntos B y B' de aplicacion de las componentes se comunican por la línea rígida BB', el punto A en que á esta línea corta la direccion de la diagonal Oz será un punto notable de aplicacion de la resultante Z.

2.° Pero en caso de que dos fuerzas F y F' aplicadas á diferentes puntos B y B' de un cuerpo (*fig.* 11) tengan direcciones que sin ser paralelas no puedan encontrarse (*Geometría*, 64, 3.ª), el sistema de estas dos fuerzas dejará de ser convertible á una sola resultante. Porque las rectas BF y $B'F'$ no están en un mismo plano; las BF y BB' constituyen uno (*Geom.*, 55); las $B'F'$ y BB' otro distinto: y cada una de las fuerzas F, F' tiende á mover en su plano á la recta rígida BB', que no puede caminar á un mismo tiempo en los dos planos sin variar contínuamente de direccion, esto es, movida por dos resultantes simultáneas, accionando en distintas direcciones como las fuerzas F y F' propuestas.

3.° Cuando son mas de dos las fuerzas F, F', F''...., aplicadas á diferentes puntos B, B', B'' de un cuerpo en distintas direcciones, podrán ser ó no convertibles á una sola resultante segun las circunstancias que vamos á indicar.

4.° Si las direcciones BF, BF' BF''...., de las fuerzas del sistema residen todas en un mismo plano (*fig.* 11), dos cualesquiera de ellas, como por ejemplo BF y BF', concurrirán en un punto O; y formando como está dicho el paralelógramo $Ofzf$ sobre los lados Of y Of' proporcionales á las fuerzas F y F', la diagonal Oz representará á la resultante Z. Prolongando ahora las rectas Oz y $B''F''$, si estas dos no son paralelas, concurrirán precisamente en algun punto O' del plano. En este caso, tomando en la recta $O'Z$

desde O' la longitud $O'a$ igual á Oz, y en la recta $O'F''$ la longitud $O'f''$ que represente á F'', el paralelógramo construido sobre estos lados dará la diagonal $O'z'$ que representará á la resultante Z' de las tres fuerzas F, F', F''. De un modo análogo se procede cuando hay mas de tres fuerzas en el sistema, con tal de que la direccion $O'z'$ de la resultante Z' hallada no sea paralela á la cuarta fuerza, y asi sucesivamente.

5.° Pero si alguna de las resultantes saliese paralela á la componente con quien se hubiera de combinar, como por ejemplo la diagonal Oz y la direccion $B''F''$ de la componente F'', quedará interrumpido el curso de composicion por el método del paralelógramo, y habrá que recurrir al método de composicion de fuerzas paralelas que se esplicará en la inmediata leccion. Entonces se demostrará que el sistema actual admite las mas veces una resultante única, pero que puede haber un caso en que no la haya.

Sistemas de fuerzas aplicadas á diferentes puntos de un cuerpo en direcciones paralelas (lám. 1.ª).

---

13. *Si dos fuerzas F y F' aplicadas á los puntos B y B' de una recta inflexible BB* (fig. 12), *accionan en direcciones BF y BF' paralelas y en un mismo sentido:* 1.° *La resultante Z es igual á la suma de las componentes, paralela á ellas, y acciona en el mismo sentido.* 2.° *Su direccion corta á la recta BB' en un punto A tal, que las distancias AB y AB' están en razon inversa de los valores F y F' de las componentes.*

Para demostrar esta proposicion, cuyas dos partes formuladas en lenguage del cálculo son

$$Z=F+F', \quad \text{y} \quad F : F' :: B'A : BA,$$

usaremos del recurso lícito de agregar al sistema propuesto otro sistema de dos fuerzas que esten equilibradas entre sí, y de suprimirle despues; por ser evidente que este sistema auxiliar no puede alterar el efecto del propuesto. Además es de advertir que todas las líneas de la figura están descritas en un mismo plano, que es el constituido por las dos paralelas BF y BF'.

1.° Sean pues M y M' las dos fuerzas que se agregan iguales y opuestas en direccion de la recta BB', representadas por las líneas iguales Bm y $B'm'$, representando tambien las líneas Bf y $B'f'$ á las respectivas componentes F y F'. Las fuerzas F y M darán la resultante N, representada por la diagonal Bn del paralelógramo formado sobre los lados Bf y Bm; asi como las fuerzas F' y M' darán la resultante N', representada por la diagonal $B'n'$ del paralelógramo formado sobre los lados $B'f'$ y $B'm'$.

Estas resultantes Bn y $B'n'$ irán á concurrir en un punto O; y construyendo sobre las diagonales $OH=Bn$ y $OL=B'n'$ los paralelógramos $OhHm$ y $OlLm'$, cuyos lados sean respectivamente paralelos á los lados de los paralelógramos construidos antes en B y B', se tendrán $Oh=Bf$ y $Ol=B'f'$, como tambien reproducidas las fuerzas iguales y directamente opuestas $Om=Bm$ y $Om'=B'm'$. Y suprimiendo éstas, queda la resultante Z de F y F' en la suma $Oh+Ol$ igual á la suma $Bf+B'f'$, trasladada á la línea Olh paralela á las BF y $B'F'$. Luego, la resultante Z de las fuerzas paralelas F y F' propuestas es paralela á ellas, é igual á la suma $F+F'$.

2.° Prolongando ahora la línea Olh, cortará á la línea BB' en un punto A; y los triángulos semejantes OhH y OAB dan la proporcion

$$Oh:hH::OA:BA, \text{ ó bien, } F:M::OA:BA;$$

de donde $$F\times BA=M\times OA.$$

Tambien los triángulos semejantes OlL y OAB' dan la proporcion

$$Ol:lL::OA:BA, \text{ ó bien, } F':M'::OA:B'A;$$

de donde $$F'\times B'A=M'\times OA.$$

Ultimamente, por ser iguales los segundos miembros de las dos equivalencias halladas, serán iguales los primeros miembros de ellas; y esta conclusion

$$F\times BA=F'\times B'A$$

es como $$F : F' :: B'A : BA.$$

Con lo cual queda completamente demostrada la proposicion.

Es de advertir, que los puntos B y B' de aplicacion de las componentes pueden ser cualesquiera de los del cuerpo sólido comprendidos en las direcciones de ellas (5, II.ª), y que por consiguiente la línea rígida BB' podrá ser oblícua ó perpendicular á las direcciones de las componentes.

Aplicaciones á la práctica. Son de dos clases, componer y descomponer.

I.ª Si se trata de *hallar el valor Z y la posicion de la resultante de dos fuerzas cuyos valores F, F' y direcciones paralelas BF, $B'F'$ se conozcan*, el valor Z se tiene inmediatamente por la fórmula

$$Z = F + F' \ldots\ldots \quad (*)$$

Y para determinar el punto A en que la direccion de Z, paralela á las direcciones de F y F', corta á la recta BB', la proporcion $F : F' :: B'A : BA$ da, componiendo (*Aritm.* 74, III.ª).

$$F+F' : F :: BB' : B'A, \text{ó bien, } F+F' : F' :: BB' : BA \ (**),$$

Una ú otra de estas dos proporciones, en que los tres primeros términos conocemos, basta para determinar la distancia desde el punto B ó B' de la recta BB' dada al punto A, en que la corta la direccion de la resultante Z, que sabemos es paralela á las direcciones de las componentes.

Suponiendo por ejemplo F de 30 libras y F' de 18 libras, el valor de la resultante será, por la fórmula (*),

$$Z = 48 \text{ libras.}$$

El punto A de aplicacion de esta fuerza en la recta BB', que supondremos de 8 pies, se halla despejando BA ó $B'A$ en las proporciones (**), que dan

$$B'A = \frac{BB' \times F}{Z} = \frac{8 \times 30}{48} = 5 \text{ pies.}$$

$$BA = \frac{BB' \times F'}{Z} = \frac{8 \times 18}{48} = 3 \text{ pies.}$$

Obsérvese que, en conformidad de la indicacion hecha anteriormente, cualquiera de estas dos igualdades basta para determinar el punto A; pues una de las distancias BA ó $B'A$ es la diferencia entre la otra y BB'; como aqui $5=8-3$, y $3=8-5$.

Tambien se pueden resolver geométricamente los problemas particulares de este sistema, aun cuando los datos se propusieren espresados por números. Para ello se traducen estos á líneas mediante escala (*Geom.* 25), y se construyen las proporciones (**).

Resuelta la cuestion de la resultante por el método numérico ó por el geométrico, quedan determinados al mismo tiempo el valor y la posicion de la equilibrante del sistema de las F y F' paralelas; fuerza que será igual y directamente opuesta á la resultante, en conformidad del axioma 1.º del artículo (5, IV.ª).

El equilibrio se verificaria tambien, siendo fijo (inmoble) el punto A ó cualquiera otro de la direccion de Z, que estuviese ligado invariablemente al cuerpo en que accionan las fuerzas F y F'

II.ª *Dado el valor Z y la direccion de una fuerza aplicada al punto A de una recta inflexible BB', descomponer Z en dos incógnitas F y F' paralelas á ella y de su mismo sentido, aplicadas á los puntos B y B' cuyas distancias AB y AB' sean dadas.* Esta cuestion se resuelve facilmente, pues las dos proporciones (**) dan, por igualdad del producto de estremos al de medios,

$$F = Z \times \frac{B'A}{BB'} \quad \text{y} \quad F' = Z \times \frac{BA}{BB'}.$$

Suponiendo por ejemplo, Z de 48 libras, BB' de 8 pies, $B'A$ de 5 pies, y por consiguiente BA de 3 pies; resultan

$$F = \frac{48 \times 5}{8} = 30 \text{ libras}, \quad \text{y} \quad F' = \frac{48 \times 3}{8} = 18 \text{ libras.}$$

Tambien se pueden resolver geométricamente los problemas de esta clase, traduciendo á líneas los datos numéricos por la escala, y construyendo las proporciones (**).

14. *Si dos fuerzas F y F' desiguales aplicadas á los puntos B y B' de una recta inflexible BB'* (fig. 13), *accionan en direcciones BF y $B'F'$ paralelas y en sentidos contrarios: 1.° La resultante Z es igual á la diferencia de las componentes, paralela á ellas, y acciona en sentido de la mayor. 2.° La direccion de la resultante corta á la recta BB' prolongada en un punto A tal, que las distancias AB y AB' están en razon inversa de los valores F y F' de las componentes.*

Para demostrar esta proposicion, cuyas dos partes formuladas en lenguage del cálculo, suponiendo $F>F'$, son

$$Z=F-F', \quad \text{y} \quad F : F' : : B'A : BA,$$

seguiremos el orden mismo del artículo anterior.

1.° Agregando al sistema de las fuerzas F y F', representadas por Bf y $B'f'$, el sistema auxiliar de otras dos fuerzas M y M' iguales y opuestas en direccion de la recta BB', representadas por Bm y $B'm'$, constrúyanse dos paralelógramos, el uno sobre los lados Bf y Bm, y el otro sobre los $B'f'$ y $B'm'$. Las fuerzas F y M dan la resultante N representada por la diagonal Bn, asi como las fuerzas F' y M' dan la resultante N' representada por la diagonal $B'n'$.

Estas dos resultantes N y N' irán á concurrir en un punto O, desde donde habrá que prolongar la línea BO para descomponer nuevamente N, con arreglo á la prevencion hecha al principio del artículo (8) sobre el sentido de las dos componentes. Asi, construyendo sobre las diagonales $OH=Bn$ y $OL=B'n'$ los paralelógramos $OhHm$ y $OlLm'$, cuyos lados sean respectivamente paralelos á los de los paralelógramos construidos antes en B y B'; se tendrán $Oh=Bf$ y $Ol=B'f'$, como tambien reproducidas las fuerzas iguales y directamente opuestas Om y Om'. Y suprimiendo estas, quedan las Oh y Ol desiguales accionando en sentidos opuestos, ó sea la diferencia resultante $Oh-Ol=Bf-B'f'$ trasladada á la línea lOh paralela á las BF y $B'F'$. Luego, la resultante de las fuerzas F y F' propuestas es paralela á ellas, igual á la diferencia $F-F'$, y acciona en sentido de la F que se supuso mayor, en conformidad de la proposicion II.ª del artículo (7).

2.° Si ahora se prolonga la línea hOl hácia la recta BB', cortará á esta en un punto A; y para saber su distancia á los puntos B y B', los triángulos semejantes OhH y OAB dan la proporcion

$$Oh : hH :: OA : BA, \quad \text{ó bien,} \quad F : M :: OA : BA,$$

de donde $$F \times BA = M \times OA.$$

Además, los triángulos OlL y OAB' semejantes dan la proporcion

$$Ol : lL :: OA : B'A, \quad \text{ó bien,} \quad F' : M' :: OA : B'A,$$

de donde $$F' \times B'A = M' \times OA.$$

De las dos equivalencias halladas, cuyos segundos miembros son iguales, viene la de sus primeros miembros,

$$F \times BA = F' \times B'A,$$

ó sea la proporcion $F : F' :: B'A : BA.$

Con lo cual queda completamente demostrada la proposicion.

Escusado es repetir aqui la advertencia, de que la línea rígida ABB' puede ser oblícua ó perpendicular á las direcciones de las fuerzas, con tal de que los puntos A, B, B' pertenezcan al cuerpo sólido ó estén invariablemente ligados entre sí.

Aplicaciones á la práctica de componer ó descomponer en el sistema de dos fuerzas paralelas desiguales y de sentidos contrarios.

1.ª Cuando se propone hallar el valor Z y la posicion de la resultante de dos fuerzas F mayor que F paralelas, que accionan en sentidos contrarios y direcciones conocidas, el valor Z se tiene desde luego por la fórmula

$$Z = F - F'. \qquad (*)$$

Para determinar el punto A donde la direccion de la resultante corta á la prolongacion de la distancia BB' conocida, la proporcion $F : F' :: B'A : BA$ da, componiendo (*Aritm.* 74, IV.ª)

$$F-F' : F :: B'B : B'A, \text{ y } F-F' : F' :: B'B : BA \quad (**)$$

Una ú otra de estas dos proporciones, cuyos tres primeros términos conocemos, da la distancia $B'A$ ó la BA que basta para determinar el punto A.

Suponiendo por ejemplo F' de 48 libras y F de 88 libras, tendremos por la fórmula (*)

$$Z = F - F' = 40 \textit{ libras}.$$

A fin de hallar el punto A de aplicacion de esta fuerza en la línea rígida, supongamos BB' de 5 pies; y usando de las proporciones (**), serán

$$BA = \frac{F' \times B'B}{Z} = 6 \textit{ pies}, \quad B'A = \frac{F \times B'B}{Z} = 11 \textit{ pies}.$$

aunque una sola de estas distancias basta, pues restando de 11 pies 5 quedan 6 para BA, asi como sumando 5 y 6 se tienen 11 para $B'A$.

En este ejemplo vemos que la direccion de la resultante pasa por fuera del ámbito de las direcciones de las componentes hácia la mayor de estas, como exige la proporcion general; y conforme á ella está figurado tambien el sentido de la resultante.

Ya se sabe que una fuerza igual y directamente opuesta á la resultante Z sostendrá en equilibrio el sistema de las fuerzas F y F'; y que el equilibrio se verificaria tambien siendo fijo el punto A ó cualquiera otro de la direccion de la resultante que estuviese ligado de un modo invariable á la línea rígida $B'B$.

II.ª *Dada una fuerza cuyo valor Z y direccion AZ se conozcan, aplicada al punto A de la recta inflexible ABB', descomponerla en dos, F mayor que F', de sentidos contrarios, paralelas á Z, y cuyos puntos de aplicacion sean B y B' á distancias AB y AB' dadas.*

En este problema hay que hallar los valores F y F' de las componentes por medio de las proporciones (**). La primera de ellas da

$$F = Z \times \frac{B'A}{B'B}, \text{ y la segunda, } F' = Z \times \frac{BA}{B'B}.$$

Aplicando estas espresiones generales al caso particular en que sean Z de 40 libras, $B'A$ de 11 pies y BA de 6 pies, resulta $B'B = B'A - BA = 11 - 6 = 5$ pies, y con este dato hallaremos

$$F = \frac{40 \times 11}{5} = 88 \textit{ libras}, \quad F' = \frac{40 \times 6}{5} = 48 \textit{ libras}.$$

15. *En el sistema de dos fuerzas F y F' paralelas que sean iguales accionando en sentidos contrarios* (fig. 14), *estas fuerzas no son reductibles á una sola resultante*, y en consecuencia *tampoco hay equilibrante de un tal sistema.*

Sean B y B' en la recta inflexible BB' los puntos de aplicacion de las fuerzas F y F' iguales, que accionen en sentidos contrarios en las respectivas direcciones BF y $B'F'$; y supongamos agregadas á este sistema otras dos fuerzas M y M' iguales, opuestas entre sí en direccion de la recta BB', Representando Bf y Bm los valores F y M, constrúyase sobre estos lados el paralelógramo, cuya diagonal Bn representará el valor N y la direccion de la resultante de las fuerzas F y M. Representando tambien $B'f'$ y $B'm'$ los valores F' y M', constrúyase sobre estos lados el paralelógramo, cuya diagonal $B'n'$ representará el valor N' y la direccion de la resultante de F' y M'. Pero como las direcciones de N y N' son paralelas, no pueden concurrir en punto alguno por mas que se les prolongase; y lo que hemos obtenido es convertir el sistema propuesto de las fuerza F y F' en otro sistema semejante de fuerzas N y N' paralelas é iguales que accionan en sentidos contrarios.

Ya que de este modo no podemos esperar conclusion alguna, recurramos al medio de considerar comprendido el caso actual en el sistema del artículo (14).

Suponiendo pues $F = F'$ en la proporcion $F : F' :: B'A : BA$ de aquel artículo, debe resultar $B'A = BA$. Por la misma suposicion, las fórmulas (**) de dicho artículo vienen á ser *cero* : F :: $B'B$: $B'A$, ó *cero* : F' :: $B'B$: BA; y segun este resultado la distancia $B'A$ ó BA debe ser tanto mayor que $B'B$ cuanto el número F ó F' es mayor que cero.

Y como el resultado anterior $B'A=BA$ es contradictorio al de ser $B'A$ ó BA mayor que $B'B$, se sigue que en el sistema de dos fuerzas iguales y paralelas, que accionan en sentidos contrarios, no hay resultante, sin embargo de que tales fuerzas no se pueden equilibrar entre sí (5, IV.ª, 1.°, *recíproca*). Por lo cual tampoco es posible equilibrar este sistema con otra fuerza sola.

16. Cuando son mas de dos las fuerzas F, F', F''..... paralelas puede haber dos sistemas generales de ellas, segun la concordancia ó discordancia de sentidos en que accionen.

Sistema I.° En caso de que accionen todas en un mismo sentido (*fig.* 15), se halla primero la resultante de dos, como por ejemplo la Z de F y F'; despues la resultante Z' de Z y F''; y asi se continúa hasta incluir en la composicion la última de las componentes.

Si las direcciones de todas están en un mismo plano, la recta inflexible BB' de la primera operacion encontrará á las direcciones de todas las fuerzas del sistema propuesto, y facilmente se podrán determinar los puntos A,..... en que á la recta BB' estarán aplicadas las respectivas resultantes Z,..... sucesivas, hasta la final, cuyo valor será la suma

$$F+F'+F''+\ldots$$

Pero si las direcciones de algunos componentes no están en el plano determinado por dos de ellas (*Geom.* 55), habrá que dirigir distinta recta inflexible para cada operacion. En este último caso, el mecánico tendrá que organizar el prisma cuyas aristas longitudinales sean las direcciones BF, $B'F'$, $B''F''$,..... de las componentes, para practicar en sus faces las construcciones (no para hallar el valor de la resultante, que siempre es igual á la suma de las componentes), sino para determinar su posicion en el espacio, como la *figura* 15 manifiesta y en el siguiente párrafo se esplica.

Ligando con las rectas inflexibles BB', BB'', etc. residentes en el cuerpo, las direcciones BF, BF', $B''F''$, etc. de las componentes del sistema, y hallado el punto A de aplicacion de la resultante Z de F y F', hay que ligar el punto A al B'' con la recta inflexible AB'', para determinar el punto A' de aplicacion de la resultante Z' de Z y F''. Si hay otra fuerza F''', se combina con esta la resultante

Z', ligando sus puntos de aplicacion A' y B''' con otra recta inflexible, para determinar en ella el punto A'' de aplicacion de la tercera resultante. Asi se llega al fin á encontrar el punto á quien está aplicada en el cuerpo la última resultante, cuyo valor será la suma $F+F'+F''+...$ de las componentes, paralela á ellas y del mismo sentido.

Observacion importante. Si las fuerzas F, F', F'',.... sin cesar de ser paralelas entre sí ni de conservar sus propios valores, cambian de direccion hácia cualquiera parte alrededor del cuerpo á quien subsistan aplicadas en los mismos puntos B, B', B'',... siempre la resultante de F y F' pasará por el punto A, como tambien la resultante Z' de Z y F'' por el punto A', etc., y serán paralelas á la nueva direccion comun de las componentes. Luego, *sea cualquiera la direccion de las fuerzas paralelas de un sistema alrededor del cuerpo á quien esten aplicadas, con tal de que subsistan sin alterarse sus valores y puntos de aplicacion, siempre la resultante de estas fuerzas pasará por un cierto punto mismo, y su valor subsistirá siendo igual á la suma de valores de las componentes.* Y este punto que se acaba de mencionar se distingue denominándose *centro de las fuerzas paralelas* en cada sistema de ellas.

Sistema II.° Cuando en el que se proponga de fuerzas paralelas, unas como F, F',..... accionan en sentido contrario de las otras como F'', F''',..... (*figs.* 16 *y* 17), debe hallarse el valor Z y la posicion de la resultante de todas las de un sentido como se ha esplicado en el sistema primero; despues lo mismo el valor $'Z$ y la posicion de la resultante de las que accionan en sentido opuesto; y por último la resultante final de las Z y $'Z$ de sentidos contrarios; resultante que habrá ó no segun que Z y $'Z$ tengan valores desiguales ó iguales (14) y (15). En caso de que haya resultante final, su valor será igual á la diferencia de las sumas Z y $'Z$, accionará paralelamente á ellas en sentido de la mayor suma, y la posicion de esta resultante se determina como ya se sabe (14) respecto de las posiciones de Z y $'Z$.

PARTE SEGUNDA.

Resumen de ideas referentes al peso de los cuerpos sólidos y fluidos, y á la fuerza elástica de los fluidos gaseosos.

Pesantez, peso, y densidad.

17. En el sistema de fuerzas paralelas, todas de un mismo sentido (13), se deben considerar comprendidas las que cooperan á engendrar el peso de todo cuerpo. Pues el globo terrestre ejerce sobre cada molécula material una fuerza atractiva, que combinada con otra menor debida al movimiento del planeta, constituye principalmente la llamada *pesantez ó gravedad*; y la suma de esta infinidad de fuerzas verticales de pesantez compone el *peso* del cuerpo á quien pertenecen dichas moléculas. De suerte que, espresando g la pesantez ó peso de cada molécula, M la masa ó número de moléculas del cuerpo, y P el peso de este, se tiene la espresion fundamental

$$P=M\times g\text{.... (*)}$$

La esperiencia justifica plenamente: 1.º que en un mismo lugar del globo ó de su atmósfera, cada molécula elemental está animada por igual fuerza de pesantez que otra molécula elemental de la misma ó diferente naturaleza, como por ejemplo las de una pluma y de una bala de plomo; 2.º que esta intensidad, comun á todo elemento material, decrece á medida que el cuerpo esté mas distante del centro de la tierra.

Segun el primero de estos dos principios, en otro cuerpo de masa M' y peso P' será tambien

$$P' = M' \times g,$$

y por consiguiente

$$P : P' :: M : M'.$$

Por esta proporcion sabemos que un cuerpo mas pesado que otro tiene mayor cantidad de materia que éste, aun cuando los volúmenes aparenten lo contrario ó sean iguales.

18. Se llama *densidad* ó *peso específico* de un cuerpo la razon de cociente que hay entre el número de unidades de su masa y el número de unidades de su volumen, como se espresa en la equivalencia siguiente, significando D la densidad, M la masa y V el volumen.

$$D = \frac{M}{V}; \text{ de donde } M = V \times D.$$

Sustituyendo en la proporcion de pesos y masas esta espresion de M, y la de $M' = V' \times D'$ correspondiente á otro cuerpo de masa M', volumen V' y densidad D', tendremos

$$P : P' :: V \times D : V' \times D', \text{ ó bien, } \frac{P}{P'} = \frac{V \times D}{V' \times D'}; \; (**)$$

equivalencia de que vamos á deducir otras varias comprendidas en ella.

I.ª En caso de $V = V'$, resulta $P : P' :: D : D'$; (***) espresion formular de que las densidades ó pesos específicos D y D' de dos cuerpos vienen á ser números proporcionales á los pesos *absolutos* P y P' que estos cuerpos tengan en volúmenes iguales. Por este principio se determinan los pesos específicos de muchas materias relativamente á una, que comunmente es el agua pura, cuyo peso específico se adoptare por unidad de los números que representen los pesos específicos de las demás.

Véase la tabla adjunta, estractada de otras mas estensas, que contiene solamente las densidades de ciertas materias de comun uso; advirtiendo que la espresion numérica de la densidad de cada especie de materia es un término medio obtenido por esperimentos hechos con diversos pedazos de la misma especie, que rara vez dejan de diferenciarse algo en calidad.

Tabla *de pesos específicos de algunas materias, referidos al peso específico 1 del agua pura.*

MATERIAS.	PESOS ESPECIFICOS.	MATERIAS.	PESOS ESPECIFICOS.	MATERIAS.	PESOS ESPECIFICOS.
Agua pura.	1	Azufre nativo.	3,0	Acido sulfúrico.	1,84
Platino en alambre.	21	Cristal de roca.	2,6	Acido nítrico.	1,22
Oro fundido.	19,2	Pedernal.	2,6	Agua del mar.	1,02
Mercurio.	13,6	Mármol compacto.	2,4	Vino comun.	0,99
Plomo fundido.	11,3	Sal comun seca.	1,9	Aceite de oliva.	0,91
Plata fundida.	10,5	Salitre seco.	1,9	Alcohol absoluto.	0,79
Cobre fundido.	8,8	Hulla compacta.	1,3	Aire atmosférico en la superficie de la tierra.	0,0013
Bronce.	8,8	Marfil.	1,9	Gas ácido carbónico.	0,0019
Laton.	8,3	Roble seco.	1,6	Gas oxigeno.	0,0015
Acero sin temple.	7,8	Alamo negro id.	0,8	Gas azoe.	0,0013
Hierro ductil.	7,8	Nogal id.	0,6	Gas hidrógeno.	0,00009
Estaño fundido.	7,3	Pino amarillo, id.	0,6	Vapor del agua hirviendo.	0,000589
Hierro fundido.	7,2	Cedro id.	0,5		
Zinc fundido.	6,8	Corcho id.	0,2		

Además han hallado tambien los físicos que un pie cúbico castellano de agua pura pesa 46 libras castellanas próximamente. Con este dato, y los que suministra la tabla de pesos específicos, ya podemos resolver cualquier problema de los comprendidos en el siguiente general, mediante la fórmula (***).

Hallar el peso absoluto P de cada pie cúbico de una materia cuyo peso específico D sea dado.

Proponiéndose por ejemplo saber cuánto pesa un pie cúbico de hierro ductil, vemos en la tabla que su densidad es 7,8 respecto de la densidad 1 del agua pura. Formando pues proporcion con estas dos cantidades y las de pesos absolutos correspondientes, que son el $P' = 46$ libras del pie cúbico del agua y el P incógnito de la cuestion, se tiene

$$1 : 7{,}8 :: 46 : P,$$

que da para el peso del pie cúbico de hierro

$$P = \frac{46 \times 7{,}8}{1} = 358{,}8 \text{ libras.}$$

II.ª La fórmula (**) en caso de $D = D'$ se reduce á

$$P : P' :: V : V'; \qquad (****)$$

que sirve para resolver los problemas comprendidos en los dos siguientes generales.

1.° *Dados el peso P y el volumen V de un cuerpo, como tambien el volumen V' de otro cuerpo, hallar el peso P' de este, siendo iguales las densidades de ambos cuerpos.*

Proponiéndose por ejemplo saber cuánto pesan 100 pies cúbicos de hierro ductil, tenemos ya hallado el peso $P = 358{,}8$ libras correspondiente al volumen $V = 1$ pie cúbico de la materia misma, y la proporcion

$$358{,}8 : P' :: 1 : 100, \quad \text{da} \quad P' = \frac{358{,}8 \times 100}{1} = 35880 \text{ libras.}$$

2.° *Dados el peso P y el volumen V de un cuerpo, como tambien el peso P' de otro cuerpo, hallar el volumen V' de este, siendo iguales las densidades de ambos cuerpos.*

Por ejemplo, ¿cuántos pies cúbicos corresponden á 2000 libras de hierro fundido cuya densidad es 7,2? Aplicando primeramente la proporcion de pesos y densidades (***), se halla el peso P de un pie cúbico de hierro fundido por la proporcion $1 : 7{,}2 :: 46 : P$;

$$\text{y será} \qquad P = \frac{46 \times 7{,}2}{1} = 331{,}2 \text{ libras.}$$

Con este dato que faltaba para emplear la proporcion de pesos y volúmenes (****), en la cuestion actual será

$$331{,}2 : 2000 :: 1 : V',$$

de donde resulta para el volumen V' de 2000 libras de hierro fundido

$$V' = \frac{2000}{331{,}2} = 6{,}03 \text{ pies cúbicos.}$$

III.ª Ultimamente, la fórmula (**) en caso de $P = P'$

$$\text{se reduce á} \qquad V : V' :: D' : D. \qquad (*****)$$

Aqui vemos establecido el principio de que si dos cuerpos diferentes en volumen tienen pesos iguales, sus densidades estarán en razon inversa de sus volúmenes, con tal de que tengan un mismo grado de calor.

Por este principio se puede calcular la densidad D' del aire comprimido hasta reducir al volumen V' el primitivo V, que ocupaba en su estado natural cuando su densidad D era 0,013; ó inversamente, la densidad D' del aire rarefacto ó dilatado hasta ocupar el volumen V', siendo V el que ocupaba en su estado natural cuando su densidad era 0,013. Igualmente se puede aplicar dicho principio á cualquiera de los demás gases que, como el aire, se llaman *permanentes* para distinguirlos de los vapores, entendiéndose que el grado de calor de la materia subsista sin alterarse.

Mas para poderse aplicar el principio de que se trata á la densidad de los *vapores* ó cuerpos gaseosos en que los líquidos se convierten por el calor, hay que tener presentes dos aclaraciones. 1.ª Si el vapor cuya densidad es D y el volumen V en su estado primitivo se estiende á ocupar el volumen V' mayor que V sin variarse su grado de calor, dicho principio será aplicable para determinar la densidad D' correspondiente al volumen V' mayor que V. 2.ª Pero si el volumen V' es menor que el primitivo V sin variarse el grado de calor, la densidad D primitiva no se aumenta ni disminuye, porque la parte de vapor (que si fuera gas permanente se acumularia en el volumen menor) vuelve á convertirse en líquido, quedando en estado gaseoso únicamente la parte que el nuevo volumen admite de la misma densidad primitiva.

Centro de gravedad (lám. 2).

19. Puesto que todas las moléculas de un cuerpo situado de cualquier modo están constantemente solicitadas por iguales fuerzas verticales, la resultante de todas estas fuerzas, que es el peso del cuerpo (17), no puede menos de pasar siempre por un cierto punto mismo, que en general se llamó centro de las fuerzas paralelas (16), y que con referencia á la pesantez se llama *centro de gravedad.*

Hay dos métodos, uno práctico y otro teórico, para determinar la situacion del centro de gravedad en los cuerpos, y consisten ambos en hallar dos líneas rectas ó tres planos que se corten entre sí en donde resida el centro de gravedad (*Geom.* 5 *y* 56).

20. Por el método *práctico* se determinan las dos rectas *FGC* y *HGK* mencionadas (*fig.* 1), bien sea suspendiendo de un punto fijo *F* mediante un hilo fuerte el cuerpo en dos posiciones de equilibrio á tanteos, ó bien sea apoyándole sobre una punta *C* piramidal fija. Este segundo método es mas difícil de practicarse en algunos cuerpos, y por tanto se suele preferir el primero. En cada una de las dos posiciones de equilibrio establecidas por suspension ó por apoyo, el centro de gravedad está precisamente en la vertical del punto fijo, y hay que marcar en la superficie del cuerpo los dos puntos de la vertical correspondientes, empleando para uno de ellos el medio esplicado en la Geometría (*Geom.* 98, IV.º).

Si únicamente se quiere hallar la distancia *HG* desde el estremo *H* del cuerpo á la vertical *FGC* del centro de gravedad, basta una de las dos operaciones mencionadas, esto es, colgarle ó apoyarle en un solo sentido; pero entonces hay que añadir la condicion de que la línea *HGK* en que se mide la distancia *HG* sea horizontal.

Para determinar *prácticamente* el centro de gravedad por la interseccion de tres planos en que resida (*fig.* 2), se apoya el cuerpo sobre una arista aguda y horizontal *CC'* en tres posiciones de equilibrio. En cada posicion se marca sobre la superficie del cuerpo la línea correspondiente al plano vertical de la arista; y como en cada plano de estos tres reside el centro de gravedad *G*, será precisamente el punto de interseccion de ellos.

Observacion. El número de operaciones que en general se deben practicar, para la determinacion de las dos líneas ó de los tres planos en que simultáneamente se halla el centro de gravedad de un cuerpo, se reduce á menos en caso de que este sea de forma simétrica y de materia homogénea. Pues entonces, á cada elemento material situado hácia uno de los lados de la línea ó del plano de simetría corresponderá otro elemento material homogéneo y simétricamente situado en el lado opuesto.

Y asi, el centro de gravedad de un cuerpo homogéneo que tenga eje de figura se halla en este eje, como sucede en los cuerpos llamados de revolucion (*Geom.* 80), y en otros muchos poliedrales, como en los prismas rectos de base regular, en las pirámides rectas y sus troncos de bases paralelas, etc. De suerte que en todo cuerpo homogéneo que tenga eje de figura, bastará una sola operacion de las dos ó las tres para determinar su centro de gravedad, suspendiéndole ó apoyándole en sentido perpendicular á dicho eje.

Si el cuerpo homogéneo tiene centro de figura, este mismo punto será centro de gravedad, como sucede en la esfera, en los elipsóides, en los paralelepípedos rectangulares, etc.; y entonces no se necesitará practicar operacion alguna para hallar el centro de gravedad, á menos de que, por desconfianza en la homogeneidad de la masa ó en la regularidad de la figura, se quiera comprobar.

Cuando el cuerpo de materia homogénea fuere simétrico solamente respecto de un plano, como debe suceder por ejemplo en una hoja de sable, considerándole dividido en dos mitades con un plano que pase por medio del lomo y del filo á lo largo, habrá que equilibrarle en sentido de otros dos planos perpendiculares entre sí y al de simetría, para determinar el centro de gravedad.

21. El método que dijimos *teórico* de hallar el centro de gravedad se emplea en objetos de materias homogéneas cuyas figuras dependan de algunas reglas de Geometría, y es aplicable no solamente á cuerpos sino tambien á superficies y á líneas, considerándolas compuestas de partes proporcionales á pesos. Vamos pues á resolver por este método los dos problemas que siguen.

I.º *Hallar el centro de gravedad de un triángulo rectilíneo ABC* (*fig.* 3).

Desde el vértice A de uno de los ángulos diríjase la recta AD al punto D medio del lado opuesto, como tambien desde el vértice B de otro ángulo la recta BE al punto E medio del lado opuesto. Sabemos (*Geom.* 24, II.ª) que la recta AD dividiria en dos partes iguales cualquiera paralela á BC dentro del triángulo, y que la recta BE cortará tambien lo mismo cualquiera paralela á AC. Si ahora consideramos dividida la superficie del triángulo en infinidad de fajas paralelas á el lado BC, á todas ellas dividirá en mitades la recta AD; y por consiguiente el centro de gravedad de la superficie del triángulo está en la recta AD. Tambien, considerando dividida la superficie del triángulo en infinidad de fajas paralelas á el lado AC, se deduce que el centro de gravedad está en la recta BE. Luego, el punto G en que las rectas AD y BE se cortan es centro de gravedad de la superficie del triángulo.

A fin de completar la solucion del problema, líguense los dos puntos D y E con la recta DE, que será paralela á AB (*Geom.* 80, I.ª) y cerrará el triángulo DCE semejante al BCA, al mismo tiempo que el triángulo DGE semejante al BGA por igualdad de ángulos uno á uno. Comparando lados homólogos de los triángulos DCE y BCA, hay la proporcion

$$BA : DE :: BC : DC :: 2 : 1;$$

y entre los de DGE y BGA hay la proporcion

$$AG : GD :: BA : DE;$$

luego, por igualdad de razones á la $BA : DE$, se tiene la proporcion

$$AG : GD :: 2 : 1.$$

Este resultado nos enseña, que dividiendo en tres partes iguales la recta AD tirada desde el vértice A de uno de los ángulos de cualquier triángulo al punto D medio del lado BC opuesto, el centro G de gravedad de la superficie del triángulo está en la recta AD, á los dos tercios de su longitud tomados desde el vértice, y á un tercio de la longitud tomado desde el lado opuesto.

Asi se halla tambien que el centro de gravedad de un paralelógramo está en el punto de interseccion de sus diagonales; que el de un paralelógramo rectangular, ó el de un polígono regular, ó el de un círculo, etc., coincide con el centro de figura.

Además, el razonamiento dirigido á demostrar que en toda superficie divisible en dos partes simétricas respecto de un plano ó de un eje lineal, el centro de gravedad existe en este plano ó en esta línea, es aplicable á las superficies de los cuerpos. Y asi se halla que el centro de gravedad de la superficie de la esfera coincide con el centro de figura, lo mismo que el de su masa homogénea (20, *Observ.*); que el centro de gravedad de la superficie de un cilindro circular terminada por dos bases paralelas está en el eje, etc.

II.° *Hallar el centro de gravedad de una pirámide triangular* (fig. 4).

Despues que se hayan determinado (I.°) los centros de gravedad K y H de dos faces ABD y BED de la pirámide triangular propuesta, líguense estos puntos á los vértices E y A opuestos á dichas faces con las rectas EK y AH, en las cuales reside el centro de gravedad de la pirámide. Para demostrarlo respecto de EK, recuérdese que todas las secciones paralelas á la base ABD son semejantes á ella (*Geometría* 72), y sus líneas homólogas proporcionales, por lo cual el centro de gravedad de cada una de estas secciones hechas á cualesquiera alturas existe en la recta EK, donde está el de la base; demostracion aplicable tambien respectivamente á la otra recta AH.

Las rectas EK y AH se cortan una á otra en el punto G, puesto que ambas están en un mismo plano AEJ, á causa de pertenecer K á la recta AJ, siendo J el punto medio de BD (I.°). Luego, G es el centro de gravedad del tetraedro. Para saber su situacion, tírese KH, la cual será paralela á EA y tercera parte de esta recta. En efecto, por el problema I.° hay la proporcion $JK : JA :: JH : JE$, y de consiguiente los lados KH y AE determinados por ella estarán tambien en la misma razon de 1 : 3, y serán paralelos en virtud de la semejanza de los triángulos JKH y JAE (*Geom.* 30). De aqui se sigue que tambien los triángulos AGE y KGH son semejantes por igualdad de ángulos uno á uno; y comparando sus lados homólogos, resulta $GK=\frac{1}{3}EG$, y de aqui $GK=\frac{1}{4}EK$: demostracion *de que el centro de gravedad de la pirámide triangular está en la recta que liga el centro de gravedad de una faz con el vértice opuesto á ella, á los tres cuartos de esta línea contando desde el vértice.*

22. Cuando varios cuerpos de iguales ó desiguales pesos y materias están ligados unos á otros de modo invariable (*fig.* 5), el centro de gravedad de un tal sistema se determina aplicando las reglas de la composicion de fuerzas paralelas (16, I.°).

Suponiendo por ejemplo que dos cuerpos, cuyos centros B y B' de gravedad estén ligados entre sí por la recta inflexible BB', tienen pesos p y p' proporcionales á los números m y m', sabemos que el peso total P del sistema es $p+p'$, y que dividiendo la distancia BB' en $m+m'$ número de partes iguales, el centro G de gravedad del sistema está á las distancias $GB=m'$, y $GB'=m$. Hallado el punto G y aplicando en él una fuerza igual y directamente opuesta á P, el sistema propuesto quedaria equilibrado.

Si en el sistema hubiere además otro cuerpo de peso p'', con su centro B'' de gravedad ligado invariablemente á los B y B' al mismo tiempo que al G por la recta inflexible GB'', siendo $p+p'$ y p'' proporcionales á los números $m+m'$ y m'', se divide la distancia GB'' en $m+m'+m''$ número de partes iguales, y el centro de gravedad G' del sistema estará á las distancias $G'G=m''$ y $G'B''=m+m'$.

Cualquiera que sea el número de cuerpos del sistema ligados entre sí como los tres mencionados, el método que se ha seguido para determinar el centro de gravedad del sistema de estos conduce á determinar el centro de gravedad de cuatro, despues el de cinco, y asi sucesivamente.

Las distancias desde unos cuerpos del sistema á los otros, ó bien las que separan sus centros de gravedad, pueden ser mas ó menos grandes ó pequeñas, y de consiguiente un cuerpo sólido viene á ser en realidad un sistema de partes reunidas invariablemente, sin que medie ninguna distancia entre cada parte elemental ó molécula y sus inmediatas. Considerando pues como un cuerpo sólido á todo sistema de partes materiales ligadas entre sí de modo invariable, el método que se acaba de referir para la determinacion del centro de gravedad de cualquier sistema, en conformidad con el general de las fuerzas paralelas de un mismo sentido (16, I.°), justifica las consecuencias que siguen.

1.ª *El centro de gravedad de todo cuerpo reside dentro del ámbito de los centros de gravedad de sus partes.*

2.ª *Si el cuerpo tiene concavidad circundada de materia, el centro de gravedad de su parte material puede bien ser un punto de la parte hueca;* como sucede por ejemplo en un vaso de pared simétrica respecto del eje de figura, con tal de que la pared pese mas que el pie (*fig.* 6).

3.ª El método seguido en la demostracion de la *figura* 5 es aplicable para determinar el centro de gravedad de cualquier poliedro, suponiéndole descompuesto en pirámides triangulares (*Geom.* 71, 87, 88 *y* 89), y hallando el centro de gravedad de cada uno de estos (21, II.°).

4.ª Igualmente se puede aplicar para la determinacion del centro de gravedad de cualquier polígono plano, descomponiéndole en triángulos (*Geom.* 50) y hallando el centro de gravedad de cada uno de estos (21, I.º).

Reparticion del peso de un cuerpo sólido sobre los puntos en que esté apoyado (lám. 2.).

---

23. Los problemas correspondientes á este epígrafe se resuelven descomponiendo la fuerza del peso, cuya direccion sabemos que pasa por el centro de gravedad del cuerpo, en tantas componentes como puntos de apoyo hubiere, debiéndose además atender á las condiciones de equilibrio que vamos á indicar.

1.ª Cuando una fuerza acciona contra la superficie plana de un cuerpo, se llama *presion* la misma fuerza si es perpendicular al plano; y si no, la componente de ella perpendicular al plano. Suponiendo por ejemplo F la fuerza (*figura* 7) cuya direccion FA encuentra en el punto A al plano BC perpendicularmente, la presion de F contra BC será igual á F. Pero si es el plano oblícuo $B'C'$ á quien la direccion de la fuerza F encuentra en el punto A, hay que descomponer F en tres componentes, una perpendicular al plano y dos ajustadas á él, de modo que una sea paralela y otra perpendicular á la $B'C'$, á menos de que se pueda suprimir una de estas últimas por la circunstancia particular de que nos haremos cargo en el siguiente párrafo.

En caso de que la direccion FA resida en plano que sea perpendicular al $B'C'$ al mismo tiempo que paralelo á la línea $B'C'$, basta descomponer F en dos componentes ajustadas á su mismo plano. Suponiendo por ejemplo en este caso representada la fuerza F por la línea AP tomada desde A en prolongacion de FA, se descompone F en dos direcciones, AN perpendicular al plano $B'C'$, y AM interseccion de este plano con el perpendicular en que se halla FA. De suerte que construyendo sobre AP como diagonal el paralelógramo, se tiene la presion representada por el lado AN del paralelógramo, cuyo otro lado AM representa la parte de accion que la fuerza F ejerce en direccion del plano $B'C'$.

2.ª Si la fuerza de que se trata es el peso P de un cuerpo asentado sobre una superficie plana, esta deberá ser horizontal para que resulte presion igual á P. Y en caso de insistir el cuerpo sobre plano $B'C'$ inclinado (*fig.* 8), la presion estará representada por la componente AN, al mismo tiempo que la componente AM representará la fuerza con que el cuerpo tiende á resbalar sobre el plano inclinado; fuerza que, á menos de ser contrariada por la del rozamiento ú otra, hará que el cuerpo se mueva resbalando hácia la parte baja del plano $B'C'$.

3.ª Tanto sobre plano horizontal como sobre plano inclinado, un cuerpo solicitado simultáneamente por la fuerza de su peso y la resistencia del plano sobre que insiste, no podrá sostenerse en equilibrio si la vertical GA de su centro de gravedad G (*fig.* 9) sale fuera del punto b en que se apoya, ó fuera del contorno lineal $bb'b''$..... formado por los puntos en que se apoya ó apoyaba. Porque entonces el peso P que acciona en direccion GA no está retenido por la resistencia del plano en los apoyos, y de consiguiente el cuerpo tiende á volcar.

4.ª Aunque teóricamente se dice *punto de apoyo* de un cuerpo, en la práctica debemos admitir que este punto material tiene su pequeñísima superficie plana, en contacto con la correspondiente del punto material del otro cuerpo sobre quien insiste. Y por tanto, las condiciones 2.ª y 3.ª tienen lugar para el equilibrio de los cuerpos cuyos centros de gravedad se determinan por el método práctico de apoyos esplicado en el artículo (20).

Problema I.° *Apoyándose un cuerpo sólido cuyo peso es P y centro de gravedad G* (fig. 10) *en los puntos Q y Q' de los respectivos planos AC y CB, que forman cualquier ángulo entrante ACB, hallar las presiones N y N' causadas por el peso P en los puntos Q y Q', como tambien las fuerzas con que el cuerpo tiende á resbalar sobre los planos, siendo perpendicular á estos el GQQ'.*

Desde el centro G de gravedad diríjanse las rectas GQ y GQ' á los puntos Q y Q' medios de los apoyos, y tomando en la vertical de G la distancia GP que represente á P, el paralelógramo construido sobre la diagonal GP dará las componentes GH y GH' de P en las respectivas direcciones GQ y GQ' Para descomponer ahora cada una de estas componentes en dos, una perpendicular y otra paralela al respectivo plano de apoyo, tómese en la línea GQ la longitud QK igual á GH, y en la línea $G'Q'$ la longitud $Q'K'$ igual á GH'. Constrúyanse por último sobre las diagonales QK y

$Q'K'$ sus respectivos paralelógramos, y se tendrán las presiones, N representada por QN, y N' representada por $Q'N'$, al mismo tiempo que los otros lados QM y $Q'M'$ representarán las fuerzas con que el cuerpo tiende á resbalar sobre los apoyos.

II.° *Dado el peso P de un cuerpo sólido y su centro G de gravedad* (fig. 11), *repartir este peso en dos p y p' desconocidos, gravitantes en los respectivos puntos B y B' dados, estando los tres en una misma recta inflexible BGB'.*

Este problema se resuelve mediante las dos proporciones (**) del artículo (13), las cuales aqui, á causa de $P=p+p'$ y $BB'=GB+GB'$, vienen á ser

$$P : p :: BB' : GB'; \quad \text{de donde,} \quad p=\frac{P\times GB'}{BB'},$$

$$P : p' :: BB' : GB; \quad \text{de donde,} \quad p'=\frac{P\times GB}{BB'}.$$

Suponiendo por ejemplo $P=15$ arrobas, $GB=3$ pies, $GB'=6$ pies, y por consiguiente $BB'=9$ pies, resultan

$$p=\frac{15\times 6}{9}=10 \text{ arrob.}, \quad p'=\frac{15\times 3}{9}=5 \text{ arrob.}$$

Del mismo modo se puede hacer la descomposicion de cada uno de estos pesos componentes en otros dos, y asi sucesivamente. Proponiéndose por ejemplo descomponer el peso p aplicado en B en dos pesos componentes p'' y p''' aplicados á los puntos B'' y B''' de la recta inflexible horizontal $B''BB'''$ á distancias BB'' y BB''' conocidas, los valores de p'' y p''' serán

$$p''=\frac{p\times BB'''}{B''B'''}, \quad p'''=\frac{p\times BB''}{B''B'''}.$$

En caso de ser $BB''=BB'''$, resulta $p''=p'''=\frac{1}{2}p$; y de este modo el peso $P=15$ arrobas aplicado en G, que se repartió antes en dos aplicados á los puntos B y B', queda repartido ahora en tres componentes $p', p''p'''$, cada una de 5 arrobas, aplicadas á los puntos B', B'', B'''.

Observaciones. Es indeterminado el problema de hallar las distancias GB y GB', desde el punto G de aplicacion de un peso P á los puntos de aplicacion B y B' desconocidos de dos componentes p y p' dados. Porque, tanto en cada una de las dos proporciones (**) del artículo (13) que antes hemos apropiado, como en la (*) del mismo artículo, que aqui sería $p : p' :: GB' : GB$, hay dos términos desconocidos. Es decir, que las distancias GB' y GB pueden ser cuan largas ó cortas se quieran, con tal de que la razon de ellas fuere inversa de la de los pesos componentes p y p'. De aqui proceden las dos adjuntas consecuencias.

1.ª En caso de $p=p'$, será $GB=GB'$, asi como antes hemos demostrado que en caso de $GB=GB'$ será $p=p'$.

2.ª Por la consecuencia 1.ª, conforme con la del artículo (20), cuando el centro G de gravedad del cuerpo está en el eje de figura, los pesos componentes del P del cuerpo paralelos al eje son de dos en dos iguales (*fig.* 11); y para que todos lo sean es preciso que concurra la circunstancia de poderse dividir el cuerpo homogéneo en columnas de iguales bases y alturas.

III.° *Estando un cuerpo sólido cuyo peso es P asentado sobre otro resistente* (fig. 12), *de manera que una faz plana y horizontal del primero se ajuste completamente con la parte superficial ss del segundo, calcular el peso p que gravita sobre cada unidad cuadrada de la superficie ss.*

Para resolver este problema se necesita referirle á casos particulares, y dividiendo entonces el cuerpo en columnas prismáticas cuya base sea la unidad de la superficie ss, calcular el peso p de cada columna segun fuere su volumen y materia, con arreglo á la fórmula (***) del artículo (18).

El caso mas sencillo que puede ocurrir es cuando el cuerpo de peso P conocido sea un prisma ó cilindro recto de materia homogénea, pues entonces todas las columnas prismáticas tendrán pesos iguales, y el valor de cada una se hallará dividiendo el número P de libras ó arrobas, etc. por el número de unidades superficiales de la superficie ss. Suponiendo por ejemplo que P sea 90 arrobas, y que la superficie ss tenga 18 pies cuadrados, el peso p que gravita sobre cada pie cuadrado será

$$p=\frac{90}{18}=5 \text{ arrobas.}$$

Observacion. Por haber supuesto horizontal el plano de apoyo, las presiones total y parciales equivalen á los pesos respectivos. Pero si en vez de ser horizontal fuere inclinado dicho plano, tanto el peso *P* como cada uno de los componentes se divide en dos, uno perpendicular al plano, que será la presion ó peso gravitante, y otro paralelo al plano, que escitará al cuerpo á resbalar. De suerte que en este caso la presion es menor que el peso.

Presiones que el peso de los cuerpos fluidos ejerce contra las superficies bañadas por ellos (lám. 2).

---

24. Los fluidos pesados, cuales son todos los líquidos y muchos de los gaseosos, como por ejemplo el aire atmosférico, tienen dos propiedades debidas al peso y á la movilidad de sus moléculas.

1.ª Cuando toda la masa del cuerpo limitado está en equilibrio, es horizontal la superficie *hh'* (*figs.* 13 *y* 14) superior llamada *de nivel* (*Geom.* 95), ó *libre* porque no necesita estar sujeta por pared que la cubra, como necesita lo demás de la superficie de aquel cuerpo amoldado por las paredes y el fondo del vaso en que está contenido. La superficie libre existe tanto en el fluido contenido por vaso de una sola cavidad (*fig.* 13), como en el contenido por vaso de dos ó mas cavidades comunicantes entre sí (*fig.* 14); con la circunstancia de que la superficie libre del fluido en todas estas cavidades forma una comun de nivel, á menos de que alguna de las cavidades sea tubo muy estrecho llamado *capilar* por esta circunstancia, en cuyo caso la adherencia del fluido con la pared del tubo hace que la superficie libre en este quede mas baja al subir el líquido y mas alta al bajar.

2.ª Cualquiera parte de la superficie del vaso bañada por el fluido recibe por el peso de la masa fluida superior una presion ó esfuerzo perpendicular, equivalente al peso de una columna vertical fluida que tenga por base aquella parte superficial, y por altura la que haya desde cierto punto de dicha parte, llamado *centro de presion*, hasta el nivel *hh'* ó superficie libre (*fig.* 13). La posicion de este punto depende de la forma y de la inclinacion de la parte superficial bañada siendo plana, pues la pared curva, cóncava ó convexa, se debe considerar como poliedral compuesta de infinidad de pequeñísimas faces planas. Mas, no siendo posible recurrir aqui á la teoría sublime y propia para determinar en cualquier caso el centro de presion, adoptaremos como tal el punto medio de la altura de cada pequeña parte superficial bañada.

El error que pueda provenir de esta adopcion de centro tendrá lugar únicamente cuando la pared del vaso sea inclinada ó curva; y aun entonces poco error se cometerá siendo bastante pequeña la parte superficial á que se refiera la presion. Pues en pared vertical dicho centro está efectivamente en medio de la altura de cada parte pequeña ó grande; y en pared ó fondo horizontal todas las columnas fluidas basadas en ella tienen una misma altura, por cuya circunstancia no hace falta para el cálculo de la presion el centro de esta fuerza en cada parte pequeña ó grande de pared horizontal.

25. Admitiendo pues los datos precedentes, que en los tratados completos de estática de fluidos se pueden ver justificados, fácil será resolver cualquiera de los casos comprendidos en el siguiente problema general, primero de este artículo.

I.° *Calcular la presion que un líquido homogéneo contenido en un vaso de cualquier figura ejerce contra cada parte de la superficie interior del vaso* (fig. 13).

Caso 1.° La presion contra la parte *S'S* horizontal del fondo será equivalente al peso de una columna vertical de líquido, que tenga por base la cantidad superficial *S'S* y por altura la distancia *kh* desde ella á la superficie libre *hh'*.

Siendo por ejemplo agua que no se diferencie mucho de la pura en densidad el liquido contenido en el vaso, y 20 pies la altura de la columna, el peso sobre cada pie cuadrado del fondo será el de 20 pies cúbicos de agua. Y como se sabe (18) que cada pie cúbico de este líquido pesa 46 libras próximamente, resulta que cada pie cuadrado de la superficie *S'S* horizontal sufre una carga de 46×20 libras, ó sea 920 libras. Multiplicando este número por el de pies cuadrados del fondo *S'S*, el producto espresará la presion *P* que el fondo sufre.

Tambien se sabe que cada pulgada cúbica de agua pesa

7 adarmes próximamente, y por este dato cada pulgada cuadrada de la superficie $S'S$ recibirá de la columna de 20 pies, ó sea de 240 pulgadas de altura, la carga de 240×7 adarmes, ó bien de 1680 adarmes, que hacen $6\frac{7}{16}$ libras; lo mismo que con corta diferencia resulta dividiendo las 920 libras de la columna gruesa por el número 144 pulgadas contenidas en su base de 1 pie cuadrado, division que da para cada pulgada cuadrada la carga de $6\frac{14}{36}$ libras.

Este resultado $6\frac{14}{36}$ debe ser mas exacto que el $6\frac{7}{16}$, porque un pequeño error que haya en la presion calculada directamente para el pie cuadrado, viene á ser 144 veces menor en la presion deducida de aquella para la pulgada cuadrada, mientras un pequeño error en la presion calculada directamente para la pulgada cuadrada llegará á ser 144 veces mayor en la deducida de esta para el pie cuadrado. De intento nos hemos parado en hacer esta advertencia, con objeto de aconsejar que en toda medicion se procure deducir de lo grande lo pequeño, mas bien que de lo pequeño lo grande.

Caso 2.° Queda dicho en el artículo (24), que si los brazos comunicantes del vaso fueren de altura igual ó mayor que kh (*fig.* 14), en todos quedará el líquido á un mismo nivel hh', por equilibrarse mútuamente las columnas kh y $k'h'$ de iguales alturas. Pero en suposicion de que un brazo sea mas corto, como representa la *figura* 13, y su boca $s's'$ horizontal esté tapada con una losa AA', al mismo tiempo que en el otro brazo comunicante hay una columna de agua cuya altura kh escede á la del primero en la cantidad $k'h$, el líquido ejercerá de abajo arriba contra la losa una presion equivalente al peso de una columna de agua que tenga por base la superficie $s's'$ y por altura $k'h$ (24, 2.ª). Siendo por ejemplo 10 pies la altura $k'h$, cada pie cuadrado de la superficie $s's'$ recibirá de abajo arriba una presion equivalente al peso de 10 pies cúbicos de agua, esto es 46×10, ó 460 libras. El producto de este número por el de pies cuadrados de la superficie $s's'$ dirá la cantidad P de presion recibida por la losa.

Caso 3.° Cuando se ofrece calcular la presion que sufre una parte $'S's$ de la superficie lateral del vaso, se multiplica $'S's$ por la altura $'kh$ desde el medio de $'S's$ hasta la superficie hh' libre del líquido. Asi se sabe la cantidad de presion que sufre cada unidad cuadrada de la compuerta que cierra el buzon de un molino, siendo cualquiera la altura de la compuerta vertical, y pequeña la de la parte de la oblícua á que se aplicare el cálculo (24, 2.ª). En este caso 3.° tambien, despues de hallar la presion que recibe cada unidad de la superficie *'S's* lateral, se multiplica el resultado por el número de unidades cuadradas de *'S's* para tener la presion total que ella sufre. Y si la pared es oblícua, habrá que dividirla en fajas *'S's* de pequeñas alturas, para calcular la presion respectiva á cada faja.

En cualquiera de los tres casos del problema mencionados, es indiferente que el brazo largo sea mas ó menos estrecho arriba que abajo, tanto que bien pudiera ser en su parte superior tan estrecho como un cuello de botella y abajo tan anchuroso como un estanque, ó inversamente, sin que por ello la presion calculada dejase de ser la misma siempre.

Últimamente, por el principio general de ser las presiones ejercidas por los líquidos mas y mas fuertes segun las profundidades, se infiere la necesidad de que proporcionalmente vaya siendo mas fuerte la pared del vaso ó depósito hácia el fondo, para que pueda resistir sin romperse. Y téngase presente además, que la fortaleza del vaso en todas sus partes ha de ser siempre mas que suficiente para resistir la presion de los líquidos segun fueren los pesos específicos de estos.

II.° *Hallar la cantidad de presion que por el peso de la atmósfera recibe cada unidad superficial del globo terrestre.*

En la atmósfera, capa gruesísima de aire con que nuestro globo está cercado, la columna fluida cuyo peso vamos á valuar tiene altura de muchas leguas, y su densidad va decreciendo sucesivamente desde la superficie de la tierra hasta ser nula en la region mas elevada ó superficie libre. Y sin embargo de estas circunstancias especiales de la columna fluida, el ingenio humano ha llegado á pesarla, como se verá por la siguiente descripcion del instrumento inventado para ello.

Tomando un tubo recurvo *ABC* de vidrio (*fig.* 15), cerrado en el estremo *C* del brazo largo y abierto en el estremo *A* del corto, brazos cuya diferencia de longitudes sea de 34 á 40 pulgadas, llénese de mercurio este tubo tendiéndole en un baño de dicho metal ó por otro medio adecuado. Tapando en seguida con la mano la boca *A*, póngase verticalmente el tubo boca arriba, y destapándole entonces saldrá por *A* cierta cantidad de líquido que contenia, hasta quedar su columna larga reducida á *kh* sobre el nivel *lh'* de la columna *Bh'* del brazo corto *BA*, y enteramente vacía de toda materia la parte *Ch* superior del brazo largo. El peso de esta columna *kh* de mercurio equilibra pues al peso de la columna atmosférica, que gravita sobre la superficie *lh'* libre de la columna *Bh'* que está equilibrada con la *Bk* de igual altura.

Si el esperimento se hace en paraje situado á nivel del mar, la altura *kh* de la columna de mercurio en este instrumento, llamado *barómetro*, resulta de 32 á 33 pulgadas castellanas, ó sea $0^{m},76$ del metro francés, y algo menor si el esperimento se hace en paraje mas elevado. Asi han deducido los físicos que el peso de la atmósfera produce sobre cada pulgada cuadrada de la superficie terrestre, ó de cualquier cuerpo espuesto á la influencia del aire libre, una presion que escede algun tanto de 12 libras castellanas.

El mercurio por su gran densidad es el líquido mas propio para el objeto. Si se quisiera emplear el agua fuera menester un tubo de longitud desmesurada, pues por ser este líquido 13,6 veces menos pesado que el mercurio, la columna *kh* de agua equilibrante del peso atmosférico, ó sea 12 libras por pulgada cuadrada, resultaria de 36 pies de altura.

Desde que se supo resolver este problema, tuvo lugar el uso de adoptar el peso atmosférico por unidad de medida de las fuertes presiones ó *tensiones* que los cuerpos gaseosos, como por ejemplo el vapor del agua, emiten contra las paredes de los vasos en que se hallan encerrados, diciéndose presion de una ó de dos ó de tres ó etc. atmósferas, ó sea de una columna de mercurio cuya altura es 32 pulgadas ó 64 pulgadas ó etc., ó bien presion de 12 libras ó 24 libras ó etc., por pulgada cuadrada. Igualmente se dice presion de media atmósfera ó de una columna de mercurio de 16 pulgadas de altura, ó presion de 6 libras por pulgada cuadrada; como tambien presion de $1\frac{1}{2}$ atmósferas, ó de la columna mercurial de 48 pulgadas de altura ó de 18 libras por pulgada cuadrada, etc. Mas adelante se esplicarán los modos de apreciar la cuantía de las presiones ó tensiones de los gases encerrados.

El mercurio con que se carga el barómetro debe estar espurgado de aire, y los fabricantes colocan el tubo despues de cargado en una tabla ó estuche, donde están señaladas con rayas y números las partes iguales en que se divide y subdivide la mayor altura barométrica posible. Y el instrumento asi arreglado, ya sea de tubo recurvo cual se ha descrito, ó ya sea de un solo tubo largo *CB* cuyo estremo inferior *B* abierto está sumergido hasta *k* en mercurio depositado dentro de un pequeño vaso llamado cubeta, sirve para conocer por sus indicaciones algunos fenómenos atmosféricos; hacer ciertos esperimentos en los gabinetes de física; medir las alturas de las localidades respecto del nivel del mar; etc. Mas, omitiendo las muchas esplicaciones que fueran menester si tratásemos aqui de los usos del barómetro, vamos á describir ligeramente otro instrumento de servicio muy diverso que funciona en virtud de la presion atmosférica.

Hablamos del *sifon ABA'* (*fig.* 16) ó tubo de dos brazos comunicantes abiertos en sus estremos *A* y *A'*, que sirve para traspasar líquidos desde un depósito *D* á otro depósito *D'* mas bajo, y hace este servicio en virtud de la presion atmosférica y la de los líquidos como á continuacion se esplica.

Puesto el sifon boca arriba, se llena de líquido mediante embudo colocado en la boca *A'* del brazo largo, al mismo tiempo que se impide la salida por la boca *A* del brazo corto. Lleno el sifon y tapando con las manos ambas bocas, se le da vuelta y se introduce asi la boca *A* en el depósito alto de líquido, con la prevision de que la boca *A'* vaya á parar hácia el depósito inferior. Destapando entonces las dos bocas, resulta establecida una corriente contínua de líquido que sube por el brazo *AB* y baja por el *BA'*, saliendo por la boca *A'*. Esto sucede, porque al descender el líquido del brazo largo *BA'* en virtud de su peso, resulta vacío en el recodo *B*, vacío que en el acto se llena con líquido que sube por el brazo *AB* en virtud de la presion atmosférica, que es mas poderosa en *A* que en *A'*, á causa de que en el primer punto tiene contra sí el peso de una columna líquida cuya altura *hm* es menor que la altura *hm'* de la columna líquida cuyo peso contraría á la presion atmosférica en *A'*.

Mas cómodamente se llena el sifon cuando tiene un embudo fijo en la cima *B* de su recodo, pues colocando desde luego el instrumento vacío y boca abajo con el *A* sumergido en el depósito alto *D*, se llenan los dos brazos echando líquido por el embudo, y tapando en seguida este con un corcho antes de quedar vaciado.

Presiones causadas por la fuerza elástica de los fluidos que tienen esta propiedad (lám. 2).

26. Los fluidos gaseosos que se clasifican en *permanentes*, como el aire atmosférico, etc., y en vapores, como el del agua, etc., encerrados en vasos ejercen fuerza elástica en todas direcciones, y á estos fluidos van á referirse los problemas siguientes.

I.° *Medir la fuerza elástica ó tension del aire encerrado cuando se le obliga á ocupar un espacio menor que en su estado natural* (sin que se haga novedad en su *temperatura*, nombre que significa el grado de calor de las materias que mas adelante valuaremos).

Tomando un tubo *ABC* recurvo de dos brazos verticalmente situados (*fig.* 17) y comunicantes entre sí, el uno largo *AB* abierto en su estremo *A*, y el otro corto *BC* cerrado en su estremo *C* y dividido con rayas en partes de volumen iguales, enciérrese dentro de este último el aire seco sin que sufra violencia. Para conseguirlo, se intercepta su comunicacion con la atmósfera por medio de una pequeña cantidad de mercurio *hBk* cuyo nivel *hk* toque á la pared superior del conducto por donde se comunican los dos brazos. En tal estado hay equilibrio entre el peso atmosférico que gravita en *h* sobre el mercurio, y la presion que el aire encerrado en el espacio *lC* ejerce por su fuerza elástica sola en *l* sobre el líquido. El esperimento hasta aqui no deja pues duda en que, *la fuerza elástica de cualquiera porcion de aire atmosférico encerrado es igual á el peso de la columna atmosférica, siempre que la densidad y la temperatura del aire interior sean respectivamente iguales á las del esterior.*

Si ahora se introduce por la boca *A* del tubo abierto mas mercurio, resultará que el nivel *l'k'* de este líquido en el brazo corto queda mas bajo que el nivel *m* del líquido en el brazo largo. En tal estado, la fuerza elástica ó tension del aire reducido al volumen *l'C* resiste el peso de la columna *h'm* de mercurio, mas el peso de una columna atmosférica que gravita sobre este volumen; es decir, que el aire reducido al volumen *l'C* tiene tanta mas fuerza elástica que el aire del volumen primitivo *lC*, cuanto sea el peso de la columna *h'm* de mercurio. Y como en los volúmenes *l'C* y *lC* de aire son iguales las masas y por consiguiente los pesos, resulta que sus densidades están en razon inversa de la de los volúmenes (18, III.^{a})

Introduciendo sucesivamente mas y mas mercurio por la boca *A* del brazo largo, y midiendo las alturas de las columnas á que se va reduciendo el aire encerrado en el brazo corto, como tambien las alturas de las columnas mercuriales que se elevan sobre el nivel inferior del aire reducido, se observa en general *que la fuerza elástica y la densidad del aire encerrado crecen proporcionalmente á la carga ó presion que sufre*, desde ser esta presion igual á una atmósfera cuando el aire encerrado ocupa su natural volumen *lC*, hasta ser la presion igual á dos ó tres ó etc. atmósferas, cuando el aire encerrado ocupa la mitad ó el tercio ó etc. de su primitivo natural volumen *lC*.

En el problema II.° se hará ver que esta ley de la diminucion de la fuerza elástica y la densidad del aire proporcionalmente á la presion que sufre, sigue siendo la misma desde la presion de una atmósfera hasta la mínima imaginable; ley que se llama de Mariotte, por haberla descubierto el célebre físico de este nombre. Pero ateniéndonos aqui á solo la escala ascendente de presiones desde una atmósfera, nos detendremos un poco en esplicar las vicisitudes del aire condensado por medio de fuelle ó máquina soplante.

Principiando desde el acto en que el espacio hueco del *cilindro M* de una máquina de esta especie (*fig.* 19) está inflado de aire en su estado natural, ó sea á tension de 12 libras por pulgada cuadrada, este aire comprimido despues por el tapon móvil *E* llamado *émbolo*, saldrá por el orificio *B* con una fuerza equivalente á la que le comprime. Suponiendo por ejemplo la fuerza comprimente de 18 libras ó de 1 $\frac{1}{2}$ atmósferas por pulgada cuadrada de la tapa *ee* móvil, igual á esta fuerza será la que el aire comprimido lleve al salir de la boca *B* del fuelle, y la densidad del aire del soplo igual á la densidad del aire comprimido estará con la densidad del aire atmosférico en la razon de 1 $\frac{1}{2}$ á 1. Es decir, que cada pie cúbico del aire del soplo tiene tanta masa como 1 $\frac{1}{2}$ pies cúbicos de aire natural. A la mayor densidad del aire comprimido está aneja mayor cantidad de materia comburente, *oxígeno;* y á esta circunstancia, mas que á la fuerza del soplo, es debido el efecto de avivar el fuego en las materias combustibles.

Ya se sabe que toda máquina soplante, despues de haber espulsado el aire de que estaba inflada, necesita aspirar nuevo aire para repetir la condensacion y la espulsion. La máquina llamada á *piston* ó émbolo representada en la figura 19, aspira nuevo aire por un orificio *A* con ventanilla ó *válvula* *b*, á quien abre de fuera á dentro la presion atmosférica mientras el émbolo *E* sube en el cuerpo *M* ó cilindro donde funciona. Al bajar el émbolo, la válvula *b* se cierra por la presion del aire interior condensado, mas fuerte que la presion atmosférica.

Las intermitencias que resultan en el soplo del fuelle por la alternativa de aspirar é inspirar el aire, son desfavorables para el efecto de avivar el fuego constantemente con el soplo, y se evitan cargando de aire condensado por medio del fuelle un gran depósito *D*, de donde se hace salir soplo contínuo dirigido al hogar en que se caldean ó funden metales. Para ello, en la boca *B* de comunicacion del cilindro *M* con el depósito *D* hay una válvula, á quien abre la presion del aire del fuelle mientras el émbolo *E* baja, asi como mientras este sube dicha válvula se cierra por la presion del aire condensado del depósito *D*. Y como durante ambos períodos el aire del depósito es mas denso que el atmosférico libre, sigue saliendo contínuamente por el buzon *B'* el soplo dirigido al hogar.

II.° *Medir la fuerza elástica del aire menos denso que el atmosférico libre de su misma temperatura.*

Si al cargar de mercurio el barómetro (*fig.* 15) hubiese quedado algo de aire dentro del hueco *hC* cerrado sobre el nivel *h* de la columna *kh* de mercurio, es indudable que la altura *kh* de esta columna sería menor que la verdadera barométrica del lugar. Es decir, que el peso de la atmósfera sería mayor que el peso de la columna mercurial *kh*, ó bien, que el peso de esta columna mas la fuerza elástica del aire poco denso contenido en *hC* sería igual á el peso de la atmósfera. Luego, restando del peso 12 libras por pulgada cuadrada el peso de una columna mercurial que tenga por base una pulgada cuadrada y por altura la *kh*, la diferencia será el valor de la fuerza elástica del aire poco denso encerrado en el espacio hueco hC. Suponiendo por ejemplo que la altura kh sea $\frac{1}{2}$ ó $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{4}$ ú $\frac{11}{12}$, etc. de una columna barométrica, tanto la fuerza elástica y densidad como la presion del aire contenido en el hueco hC, tendrán por medida $12-6=6$ libras por pulgada cuadrada, ó $12-8=4$ libras, ó $12-9=3$ libras, ó $12-11=1$ libra, ó etc. He aqui pues la esplicacion de que la ley de Mariotte comprende toda la escala descendente de presiones, tensiones y densidades del aire, desde el estado natural de este fluido hasta su mas apurada rarefaccion, lo mismo que la escala ascendente hasta su mayor condensacion imaginable.

En los gabinetes de física se hace uso frecuente de una máquina llamada *pneumática* para rarefacer el aire contenido dentro de una campana de cristal, hasta casi la total desaparicion de dicho fluido, esto es, casi formar lo que se llama el *vacío*.

La industria saca tambien gran partido de la ley de Mariotte. En las máquinas llamadas *bombas atraentes*, vulgo *chupones* (*lám.* 6, *fig.* 5), para elevar agua desde un pozo hasta cierta altura, el líquido sube por dentro de un tubo en virtud de la carga atmosférica que le comprime de abajo arriba como á la columna barométrica de mercurio, al mismo tiempo que el aire contenido dentro del tubo se dilata ó va rarefaciéndose, es decir, siendo menos denso, mediante un tapon móvil ó émbolo que lo estrae, como se esplicará algo mas en otra ocasion.

III.° *Medir la fuerza elástica ó tension de los gases encerrados motivada por aumento de calor.*

Antes de tratar sobre el asunto del problema, nos detendremos en hacer una esplicacion breve de los instrumentos llamados *termómetros*, con que se miden los grados de calor ó sean de *temperatura*. Bien conocido es el fenómeno de *dilatarse* todo cuerpo por el aumento de calor, y de *contraerse* por la diminucion de este sér invisible. De suerte que todo cuerpo sólido ó fluido de forma regular y grande altura, para que en esta línea resultasen bien sensibles las diferencias de dilatacion, pudiera servir de termómetro. Pero el usado comunmente para temperaturas que no escedan mucho á la del agua hirviendo, es el termómetro de mercurio (*fig.* 18), el cual consiste en un tubo de vidrio perfectamente calibrado en toda su longitud ab, á quien surte de mercurio un depósito proporcionado d que tiene en su estremo inferior. Fabricado el vaso *dab* de las condiciones requeridas con el estremo *b* abierto, se introduce mercurio hasta llenar la ampolleta *d* y algo mas. En tal estado se espone á calor bastante mas fuerte que el del agua hirviendo, pero no tan fuerte que derrita el vidrio, á fin de que el mercurio dilatado asi ocupe mucha parte del tubo; y cuando haya sucedido esto, se cierra á fuego el estremo *b* á donde haya llegado la columna de mercurio caliente. Dejándole entonces enfriar desciende por contraccion á ocupar menor espacio, que será casi el mismo primitivo, si es que no hubiere salido algo por la boca *b* antes de cerrarla, y queda ya sin aire toda la parte del tubo *ab* sobre el mercurio. Todavía falta la graduacion de las temperaturas; con cuyo objeto, sumergiendo el tubo todo en hielo, el mercurio baja por contraccion hasta un punto que se marca con raya y un cero, y sumergiéndole despues en agua hirviendo, el mercurio sube por dilatacion hasta un punto que se marca con raya, y el número 80 segun Reaumur ó 100 segun los franceses. Ultimamente, dividiendo la distancia que media entre las dos rayas en 80 partes iguales, queda construido el *termómetro de Reaumur*, asi como quedará construido el *centígrado* dividiendo dicha distancia en 100 partes iguales. Comunmente se coloca el termómetro en un estuche ó tableta donde se marcan tambien las rayas y los números de su graduacion; pero se coloca de modo que se pueda facilmente separar cuando se necesite aplicarle á los cuerpos cuya temperatura se quisiere apreciar. El uso de este instrumento es muy sencillo, pues basta ver en cuál de las rayas está la superficie superior de la columna de mercurio del tubo: si por ejemplo está en la raya señalada con el número 10, indica temperatura de 10 *grados sobre cero;* si en la raya señalada con el número 31, indica temperatura de 31 *grados sobre cero;* etc. A fin de apreciar temperaturas inferiores á la del hielo y superiores á la del agua hirviendo, se prosigue la division con rayas y números en partes iguales bajo el cero, y sobre el 80 del termómetro de Reaumur ó sobre el 100 del centígrado, segun permita la longitud del tubo.

Sin detenernos mas en la cuestion incidental de los termómetros, vamos á ocuparnos del problema.

Estando encerrado el gas, aire ó vapor de agua, en un vaso metálico *NN* (*fig.* 20), que se vaya caldeando por el fuego de un hogar *H* adjunto, la tension ó fuerza elástica del gas se va aumentando segun el grado de calor que le insta á dilatarse, sin que las paredes del vaso le permitan ocupar espacio mayor. Y para medir la intensidad de esta fuerza espansiva del gas, que supondremos vapor sobrepuesto en el espacio *D* á el agua que ocupa el espacio *A* de la *caldera NN*, hay diversos aparatos llamados *manómetros*, que se colocan en la pared superior.

1.° Se puede medir por el peso *P*, que aplicado al tapon de un orificio *B* del vaso, equilibre exactamente á la fuerza espansiva del gas. Pero este aparato, en que el peso tiene fuerza constante, no indica tensiones mas débiles ni mas fuertes, por lo cual se usa como *válvula de seguridad* para tapar aquel boquete por donde el gas pueda salir cuando llegue á ser muy intenso, evitándose asi la esplosion del vaso *NN*.

2.° Aplicando á un orificio pequeño del vaso un tubo recurvo *abde* abierto en sus dos estremos *a* y *e*, y depositando en su parte *bdh'* cierta cantidad de mercurio, éste quedará á un mismo nivel en los dos brazos *bd* y *de* cuando el gas encerrado en el vaso tenga tension igual á la del aire atmosférico libre, esto es, de 12 libras por pulgada cuadrada. Pero si en seguida se va caldeando el gas, su fuerza elástica irá creciendo, é impulsando al mercurio, cuya columna en el brazo *bd* irá cada vez siendo mas corta que en el brazo *de*. Asi, el aumento de la fuerza elástica del gas á cada grado de su temperatura será igual á el peso de la columna *h'm* de mercurio elevada sobre el nivel *h* que tenga en el brazo *bd*. Si *h'm* es media columna barométrica, ésta, mas el peso atmosférico, ó bien $1\frac{1}{2}$ atmósferas, ó 18 libras por pulgada cuadrada, será la tension ó fuerza elástica del gas encerrado. Es de advertir que el brazo *de* tiene adjunta una tablilla en donde están las rayas horizontales numeradas que marcan las alturas de la columna mercurial.

3.° Aunque en algunas calderas de las máquinas de vapor (*fig.* 20) se emplea el aparato 2.°, bien se deja conocer que necesitaria brazos *bd* y *de* muy largos para casos en que se hubiese de emplear vapor á tension muy fuerte. Por lo cual se usa con ventaja el aparato 3.°, que viene á ser una caja con cierta cantidad de mercurio sobre el cual queda vacía una parte, que está en comunicacion con el gas de la caldera por medio de un tubo *tt'* abierto en sus dos estremos, al mismo tiempo que el mercurio puede subir por otro tubo *ac* fuerte de cristal, que tiene cerrado su estremo superior *c* y abierto el inferior *a* sumergido en el mercurio de la caja. Asi, la fuerza elástica del vapor que penetra en la parte vacía de la caja lucha contra la fuerza elástica del aire encerrado sobre la columna mercurial del tubo *ac;* y segun la reduccion de volumen de esta cantidad de aire encerrado, como en el problema I.°, será la tension del vapor, la cual se calcula por la ley de Mariotte. Mas para la práctica hay adjunta al tubo *ac* una tablilla en que están marcadas con rayas y números muchas partes iguales de altura; y como el hornèro tiene encargo de que la tension del vapor ha de ser precisamente cual indique la columna mercurial llegando á tal ó cual raya *i* de la tablilla, esfuerza ó mitiga el fuego del horno segun que falte ó sobre tension al vapor.

Este mismo aparato 3.° es el que se suele usar tambien para conocer la tension del aire condensado en un depósito por medio de fuelle (*fig.* 19).

IV.° *Calcular la presion que por la fuerza elástica del aire comprimido sufre la base del émbolo en el cilindro de la máquina soplante, y la presion que por la fuerza elástica del vapor impelente sufre la base del émbolo en el cilindro de las máquinas de vapor.*

Tanto en la máquina soplante (*fig.* 19) como en la de vapor (*fig.* 20), es cilíndrico el hueco *M* del cuerpo llamado cilindro por esta razon, en donde el tapon móvil ó émbolo *E*, cilíndrico tambien con dos bases paralelas *ee* y su opuesta, hace sus *cursos* de ascenso y descenso alternativamente. En la máquina soplante, la fuerza aplicada al *vástago* ó varilla *ll* en su estremo esterior da movimiento al émbolo; y en las máquinas de vapor, la fuerza del gas que viene desde la caldera al cilindro es quien da movimiento al émbolo y á la varilla *ll*, cuyo estremo esterior comunica movimiento á otro cuerpo ligado á él. Entendidas estas abreviadas esplicaciones y las de los problemas precedentes, vamos al asunto del problema IV.°

Consultando al manómetro de la clase 3.ª, descrito en el problema III.°, y que suponemos aplicado al depósito *D* de aire condensado en la máquina soplante, y á la caldera de vapor en las de este nombre, se halla la fuerza elástica de uno ú otro de estos gases medida á peso por pulgada cuadrada de superficie en que acciona, segun el número entero ó fraccionario de atmósferas que indicare la columna mercurial en el tubo *ac* manométrico. Y multiplicando dicha fuerza por el número de pulgadas cuadradas que tenga la base del émbolo espuesta á la accion del gas, el producto que resulte será la presion contra aquella base.

Mas, la base opuesta é igual del émbolo sufre tambien presion por otra fuerza contraria á la primera, y que en la máquina soplante es la carga de la columna atmosférica gravitante sobre la base superior del émbolo, asi como en el cilindro de vapor suele ser la fuerza elástica débil de cierta cantidad de vapor que aún queda del que sirvió para mover al émbolo en el curso precedente, y que se está escapando desde aquella estremidad del cilindro á fuera.

Restando pues de la presion que sufre la base primera la presion que sufre la segunda, la diferencia será el valor de la fuerza esterior que ha de dar movimiento al émbolo de la máquina soplante para comprimir el aire, y el valor de la fuerza interior que resulta para producir movimiento en el émbolo de la máquina de vapor. En este cálculo, cuya marcha se acaba de indicar, no hemos contado con el peso del émbolo y sus adherentes, ni con ciertas otras circunstancias que se debieran tomar en consideracion para mayor exactitud del cálculo. Sin hacernos tampoco cargo de estas omisiones, vamos á practicar el cálculo tal como antes hemos indicado.

Si por ejemplo en la máquina soplante el manómetro indica ser $1\frac{1}{2}$ atmósferas, ó 18 libras por pulgada cuadrada, la tension del aire condensado, habrá que restar de esta cantidad 1 atmósfera ó 12 libras por pulgada cuadrada con que el aire esterior gravita sobre la base superior del émbolo, y resulta la diferencia $\frac{1}{2}$ atmósfera, ó 6 libras por pulgada cuadrada. Y suponiendo que la base del émbolo tenga 100 pulgadas cuadradas, el producto $6 \times 100 = 600$ libras será la fuerza necesaria para impulsar al émbolo en su descenso contra la resistencia del aire interior.

En la máquina de vapor supongamos que sean 2 atmósferas ó 24 libras por pulgada cuadrada la fuerza del vapor, y $\frac{1}{2}$ atmósfera ó 6 libras por pulgada cuadrada la tension del gas debilitado que acciona en la base opuesta del émbolo. La diferencia $24 - 6 = 18$ libras por pulgada cuadrada será el esceso; y suponiendo 100 pulgadas cuadradas la superficie de la base del émbolo, el producto $18 \times 100 = 1800$ libras viene á ser la fuerza que mueve á esta pieza (*).

PARTE TERCERA.

Nociones preliminares sobre el movimiento de los cuerpos.

Definiciones y algunos principios demostrados por la esperiencia (lám. 3).

27. Es indudable que la resultante de un sistema cualquiera de fuerzas no equilibrada por otra igual y directamente opuesta á aquella, produce movimiento en el cuerpo instado por las fuerzas componentes; y que el punto ó puntos del cuerpo situados en la línea de la resultante se mueven en direccion de ella (2) y (5, 1.ª).

Un punto cualquiera del cuerpo que se mueve describe una línea recta ó curva, á la cual se refieren las clasificaciones de movimiento que siguen.

1.ª Cuando el punto móvil A marcha describiendo línea recta AA' (*fig.* 1), se dice que el movimiento es *rectilíneo;* y cuando describe línea curva (*figs.* 2, 3 *y* 4), se dice que el movimiento es *curvilíneo.*

2.ª Si la curva descrita por el punto móvil A es circular (*figs.* 3 *y* 4), el movimiento se llama de *rotacion* al rededor del centro C de aquella circunferencia; para distinguirle del movimiento de *traslacion*, correspondiente al punto móvil que describe línea recta ó curva que no sea circular (*fig.* 1 *y* 2).

(*) No es posible en este opúsculo describir y menos estudiar las diversas clases de máquinas de vapor que se usan. Lo poco que se ha dicho aqui sobre tales máquinas se refiere á la que en su cilindro recibe vapor durante casi todo el curso de ascenso ó de descenso del émbolo, mientras el que recibió para el curso precedente se escapa por el orificio O á un depósito de agua fria donde se liquida, quedando asi debilitado entretanto.

3.ª A veces el punto camina con movimiento compuesto de traslacion y rotacion; como por ejemplo cualquier punto de una rueda de carruaje, que mientras da vueltas al rededor del eje marcha á lo largo del camino; y como sucede tambien á cada punto del globo terrestre, que mientras en un año describe su órbita, hace diariamente una revolucion completa al rededor del eje.

4.ª Tanto el movimiento rectilíneo como el curvilíneo se dice *continuado* cuando el móvil anda un camino sin volver á desandarlo, como por ejemplo una piedra que se arroja, ó una rueda que da vueltas seguidas al rededor de su eje, etc. Y se dice que es *alternativo* ó de *vai-vén* el movimiento cuando el móvil anda y desanda alternativamente un mismo camino, como sucede en el émbolo de una máquina de vapor, en la péndola de un reloj, etc.

5.ª Dícese que un cuerpo camina con *movimiento de traslacion paralelo*, cuando todos sus puntos materiales describen líneas paralelas é iguales moviéndose por traslacion (*fig.* 1), como sucede en un cuerpo que se mueve resbalando sobre la superficie de otro. Y se dice *movimiento de rotacion* de un cuerpo, cuando todos sus puntos materiales describen circunferencias al rededor de sus respectivos centros situados todos en una misma línea recta, perpendicular á los planos en que se mueven los puntos (*figuras* 3 *y* 4), como por ejemplo un torno, ó una péndola, etc.

28. En todo movimiento hay que considerar la concurrencia de tres cantidades, que son (*figs.* 5, 6 *y* 7): el *espacio* lineal AA' caminado por el punto móvil A, el *tiempo* que ha empleado en describir este espacio, y la *velocidad* ó rapidez del movimiento. Las dos primeras de estas cantidades son medibles por sus respectivas unidades, lineal la primera y de tiempo la segunda. Mas, para formar idea de lo que significa la palabra velocidad, hagámonos cargo de que el movimiento será tanto mas rápido cuanto mayor sea el espacio lineal que describa el móvil en un tiempo determinado, ó bien, cuanto menor sea el tiempo que el móvil emplea en describir un espacio determinado. De aquí nacen tres clasificaciones en el movimiento de un punto, que durante cierto tiempo haya descrito un espacio lineal AA'.

1.ª Si dividiendo el tiempo total en unidades, el móvil ha descrito espacios Aa, aa',..... iguales sucesivamente en sucesivas unidades de tiempo (*fig.* 5), el movimiento es *uni-*

forme, y su respectiva velocidad es la unidad *Aa* de espacio caminado en la unidad de tiempo.

2.ª Si en tiempos iguales sucesivos é instantáneos el móvil va describiendo espacios *Aa*, *aa*,'..... cada vez mayores (*figura* 6), el movimiento es *acelerado* y la velocidad *creciente*.

3.ª Y si en tiempos iguales sucesivos é instantáneos el móvil va describiendo espacios *Aa*, *aa'*,.... cada vez menores (*fig.* 7), el movimiento es *retardado* y su velocidad *decreciente*.

29. ¿Cómo valuaremos pues la velocidad que lleva el punto móvil en cada instante de estas dos clases de *movimiento variado?* Para contestar á esta pregunta necesitamos admitir principios consiguientes á la definicion de la inercia (2).

1.° Que *todo cuerpo puesto en movimiento por la superioridad de la fuerza moviente sobre la resistente*, como se dijo en el párrafo primero del artículo (27), *seguiria moviéndose siempre con la velocidad adquirida hasta entonces, si despues no fuese alterada por otras fuerzas de algun sistema en que la moviente fuese mas poderosa ó menos que la resistente.*

De suerte que una vez adquirida por el móvil aquella velocidad primera, desde entonces en el movimiento uniforme la velocidad sigue *constante* por equilibrarse las dos fuerzas entre sí: en el acelerado, la velocidad va creciendo por la contínua superioridad de la fuerza moviente respecto de la resistente; y en el retardado, la velocidad va decreciendo por la contínua superioridad de la fuerza resistente sobre la moviente.

2.° Entendido esto se infiere, que *si en las dos clases del movimiento variado las fuerzas moviente y resistente se equilibrasen al cabo de cierto tiempo, el espacio lineal que desde entonces caminaria el punto móvil con movimiento uniforme en la unidad de tiempo, será la velocidad que llevaba en el instante de cambiarse el desequilibrio de fuerzas en equilibrio.* Citaremos un ejemplo de comprobacion de esta verdad por la esperiencia.

Se sabe que en un cuerpo pesado descendiendo libremente por su vertical (*fig.* 8), la velocidad va siendo cada vez mayor, á causa de que el peso, fuerza mas poderosa que la resistencia del aire hasta cierto grado, insta sin cesar al cuerpo; y el esperimento comprobante de poderse cambiar este movimiento acelerado del cuerpo que desciende en uniforme se hace como ahora se verá. Hay una máquina llamada de Athod, por haberla inventado un físico de este nombre, dispuesta con todos los requisitos para medir los espacios verticales que camina el cuerpo en su descenso, y los tiempos que emplea en andarlos. Además tiene un mecanismo adecuado para que el cuerpo descienda libremente hasta cierto punto de la vertical, en donde repentinamente se equilibra el peso del cuerpo que desciende con otro peso igual. Y desde este punto el móvil sigue descendiendo ya con movimiento uniforme, puesto que en tiempos sucesivos iguales recorre espacios iguales marcados en la máquina; y la velocidad que lleva es ni mas ni menos que la adquirida hasta el punto donde se cambió el movimiento, como se comprueba haciendo el cambio en puntos cada vez mas bajos.

La máquina de Athod comprueba tambien otros principios fundamentales de Dinámica.

3.° Dejando libre á un cuerpo pesado en el punto A (*figura* 8), el *espacio Aa vertical que describe con movimiento acelerado durante el primer segundo de tiempo*, *es mitad del espacio aa' que describe despues con movimiento uniforme durante el segundo de tiempo consecutivo.*

4.ª Este espacio aa' doble de Aa, ambos descritos en el vacío, viene á ser próximamente 35 pies castellanos. Luego, $aa'=35$ *pies resulta ser la velocidad adquirida por todo cuerpo pesado desde que se le deja en libertad de caer en virtud de la fuerza de pesantez, hasta el fin del primer segundo de tiempo:* y designando con la letra g dicha velocidad, se tiene formulada su espresion en

$$g=35 \textit{ pies.....} \quad (*)$$

Esta velocidad, comun de todas las moléculas del cuerpo, es la medida de la fuerza de pesantez que á cada una de ellas anima; fuerza que en el artículo (17) se designó tambien con la letra g para establecer la fórmula (*) de aquel artículo,

$$P=M\times g.$$

5.° Si al cuerpo pesado que cae desde el punto A mismo de antes se le equilibra en otro punto mas bajo ó mas alto que el a, y cuya distancia á el A sea en general E, el esperimento, repetido variando cada vez esta distancia, hace ver que *la velocidad V al fin del espacio E es á la velocidad g al fin del espacio $Aa = \frac{1}{2} g$, como la raiz cuadrada de E es á la raiz cuadrada de $\frac{1}{2} g$;* proporcion formulada en

$$V : g :: \sqrt{E} : \sqrt{\tfrac{1}{2} g}; \quad \text{ó bien,} \quad V^2 : g^2 :: E : \tfrac{1}{2} g.$$

Y de aqui se deduce para la velocidad V que adquiere hasta el fin del espacio vertical ó altura E un cuerpo pesado que cae libremente en el vacío, la espresion

$$V^2 = g^2 E : \tfrac{1}{2} g, \quad \text{que se reduce á} \quad V^2 = g \times 2E;$$

de donde $$V = \sqrt{g \times 2E} \ldots\ldots \quad (**)$$

Suponiendo por ejemplo que la altura E de que el cuerpo cae sea 100 pies, y de consiguiente $2E = 200$; el producto $g \times 2E$ será $35 \times 200 = 7000$. Y como la raiz cuadrada de 7000 es poco menor que 84, resulta que cayendo un cuerpo libremente desde la altura de 100 pies adquirirá hasta el fin de este espacio la velocidad de casi 84 pies por 1″ de tiempo; es decir, que si entonces se equilibrase su peso con una fuerza igual y directamente opuesta, seguiria descendiendo con movimiento ya uniforme y andaria casi 84 pies en cada 1″ de tiempo.

Si la altura E fuese menor que 35 pies, como por ejemplo 2 pies, la velocidad V del móvil cayendo desde esta altura sería

$$V = \sqrt{35 \times 4} = \sqrt{140}, \quad \text{poco menos de 12 pies por } 1''.$$

En caso de ser $$E = \frac{1}{70} \textit{ pies},$$

resulta $$V = \sqrt{\tfrac{70}{70}} = \sqrt{1} = 1 \textit{ pie por } 1''.$$

Bastan estos ejemplos para conocer que un cuerpo abandonado á la sola accion de la pesantez, va en su descenso adquiriendo sucesivamente mas y mas grados de velocidad, desde ser nula al principio en el punto A inicial del descenso hasta ser cuan grande se quiera.

Cada una de estas velocidades respectivas al movimiento descensional de un cuerpo pesado, sirve tambien para espresar la velocidad del movimiento en cualquiera otra direccion. Pues cuando en la Mecánica se dice que la velocidad de un móvil en cierto instante cualquiera de tiempo es de tantos ó cuantos pies por segundo, se ha de entender que si aquel móvil quedase abandonado en aquel instante por las fuerzas que antes le instaban, ó fueren equilibradas estas (*princ.* 2.°), andaria en el segundo inmediato siguiente tantos ó cuantos pies, ó bien, que esta velocidad es la que adquiriria el cuerpo cayendo desde cierta altura correspondiente, segun la fórmula (**).

Relaciones entre las tres cantidades, espacio, velocidad y tiempo en el movimiento de traslacion (lám. 3.ª).

30. Está dicho que en el movimiento de traslacion de un cuerpo (27, 5.ª) todos los puntos materiales del móvil caminan con una velocidad comun V (*figs.* 1 *y* 2), tanto en el movimiento uniforme como en los variados; y por consiguiente las relaciones enunciadas corresponden lo mismo á un solo punto material que á un cuerpo grande.

Uniforme. Segun la definicion del movimiento uniforme (28, 1.ª), el espacio E caminado por cada punto lo mismo que por todo el cuerpo durante un tiempo T, con velocidad V igual á la unidad de espacio, será el producto de V multiplicado por T, como se espresa en la fórmula

$$E = V \times T.$$

Por ejemplo, si un barco que lleva movimiento uniforme anda en cada hora 3 leguas, al cabo de 10 horas habrá andado $3 \times 10 = 30$ leguas.

Variado. Cuando un cuerpo caminare con movimiento de traslacion variado, es decir, creciendo ó decreciendo contínuamente la velocidad, el espacio E caminado durante un tiempo T será la suma de espacios elementales sucesivos caminados con velocidad variable en instantes sucesivos cuya suma es T. Pero no podemos cifrar aqui en general las espresiones de este espacio ni de la velocidad, á causa de que se necesita para ello el lenguage del cálculo infinitesimal, esceptuando los dos casos especiales que siguen.

1.° En caso de que las velocidades sucesivas V y V' del cuerpo vayan *creciendo* proporcionalmente á los tiempos T y T' transcurridos desde el principio; el movimiento, que en este caso se llama *uniformemente acelerado*, seguirá la ley espresada en la proporcion

$$V : V' :: T : T'.$$

Los esperimentos hechos con la máquina de Athood demuestran, que en el descenso libre de los cuerpos pesados se verifica esta ley del movimiento uniformemente acelerado. Es decir, que la velocidad $V' = g = 35$ pies adquirida por el móvil durante el primer tiempo $T' = 1''$, tiene con la velocidad V adquirida hasta el fin de cualquier otro tiempo T, contado en segundos desde el principio, la relacion

$$V : g :: T : 1'', \quad \text{de donde} \quad V = gT.$$

Suponiendo por ejemplo $T = 20''$, el móvil habrá adquirido hasta el fin de este tiempo la velocidad $V = 35 \times 20 = 700$ pies por segundo.

Reuniendo pues á esta espresion general de V las (*) y (**) del artículo (29), se tiene la siguiente coleccion de fórmulas correspondientes al descenso libre de los cuerpos pesados,

$$g = 35 \textit{ pies}, \qquad V^2 = 2gE, \qquad V = gT.$$

2.° Llámase movimiento *uniformemente retardado* cuando las velocidades V y V' sucesivas del móvil van *decreciendo* á proporcion que *crecen* los tiempos T y T', contados desde el principio, como se espresa en

$$V : V' :: T' : T, \quad \text{de donde} \quad V = \frac{V' \times T'}{T}.$$

Aplicando esta fórmula al caso en que la velocidad V' del móvil sea 40 pies por $1''$ al fin del tiempo $T' = 1$, resulta para la velocidad V al fin del tiempo $T = 8''$

$$V = \frac{40}{8} = 5 \textit{ pies por } 1''.$$

Relaciones entre las tres cantidades, espacio, velocidad y tiempo en el movimiento de rotacion (lám. 3).

31. Cuando un cuerpo se mueve girando al rededor de un eje fijo de rotacion, representado por un punto C (*figuras 3 y 4*), las velocidades ó espacios caminados durante la unidad de tiempo, como tambien los caminados durante cualquier tiempo por los diversos puntos del cuerpo, son proporcionales á las circunferencias que describen, y por consiguiente (*Geom.* 21, III.ª) proporcionales á los rádios ó distancias al eje C. De suerte que, representando v la velocidad del punto situado á la distancia 1 desde el eje, y V la velocidad correspondiente al punto situado á la distancia R desde dicha línea, la proporcion

$$V : v :: R : 1 \quad \text{da la igualdad} \quad V = Rv.$$

Y espresando e, E los espacios respectivos caminados por dichos puntos durante un tiempo mismo T cualquiera, la proporcion será

$$E : e :: R : 1; \text{ de donde } E = Re.$$

Estas espresiones de V y E manifiestan, que en el movimiento de rotacion de un movil será V constante ó variable segun v lo sea; es decir, que los espacios E y e serán caminados con respectivos movimientos uniformes ó variados. En el primer caso se dice que el movimiento del cuerpo es de rotacion uniforme, y que en el segundo caso es variado.

La rotacion de una rueda (*fig.* 3) al rededor de eje fijo se procura comunmente que sea uniforme, y entonces, refiriéndose á un punto cualquiera del movil la velocidad V y el espacio E caminado durante un tiempo T, será aplicable la fórmula del de traslacion uniforme (30)

$$E = V \times T.$$

Mas, en la péndola (*fig.* 4), elevándola una vez desde la vertical CA á la posicion CA' por una fuerza estraña, y abandonándola entonces á sí misma, desciende por su peso desde CA' á CA, y con la velocidad adquirida sigue remontándose hasta la posicion $C'A$, desde la cual desciende á CA para subir hácia CA', y asi sucesivamente. El ángulo $'ACA'$, ó bien el arco $'AAA'$ se llama *una oscilacion* de la péndola, y su mitad $'ACA$ ó ACA' es una *semioscilacion*. Al descender, en cada semioscilacion el movimiento es acelerado, y al ascender es retardado.

Cómputo de la velocidad V que por término medio corresponde á cualquier clase de movimiento, habiendo el movil andado un espacio E conocido durante un tiempo T conocido tambien.

32. Las condiciones del movimiento uniforme, tanto de traslacion (30) como de rotacion (31), rara vez son asequibles rigorosamente en la práctica. Y la cuestion que ahora se propone resolver es, prescindiendo de las variaciones que haya podido haber en el movimiento del cuerpo que ha caminado un espacio E durante el tiempo T, calcular la velocidad V del movimiento uniforme con que hubiera andado el mismo camino E durante el mismo tiempo T. Para resolver esta cuestion en que E y T son dadas, tenemos la fórmula del movimiento uniforme de traslacion (30) y de rotacion (31)

$$E = V \times T, \text{ la cual da } V = \frac{E}{T};$$

en donde vemos, que dividiendo el espacio por el tiempo, el cociente sera la velocidad pedida.

Suponiendo por ejemplo que un barco ha caminado 40 leguas en 10 horas, el número V de leguas andadas por hora viene á ser

$$V = \frac{40}{10} = 4 \text{ leguas.}$$

Igualmente; si el émbolo de una máquina de vapor hace 120 cursos simples durante 1 minuto, el número V de cursos por cada $1''$ será

$$V = \frac{120}{60} = 2 \text{ cursos por } 1''.$$

Asi tambien; dado caso de que un punto adoptado por señal en una rueda ó en su árbol describe 1200 vueltas en 4 minutos; el número V de vueltas dadas en cada 1 minuto será

$$V=\frac{1200}{240}=5 \textit{ vueltas por } 1'.$$

Cantidad de velocidad de un cuerpo en el movimiento de traslacion, y modo con que ha sido impresa por la fuerza.

---

33. Este artículo contiene varios principios enlazados entre sí sucesivamente.

1.° Puesto que en el movimiento de traslacion paralelo de un cuerpo, cada molécula lleva la misma velocidad V que las demás de la masa M, es indudable que la *cantidad de velocidad* ó suma de velocidades de todas las moléculas, llamada comunmente *cantidad de movimiento*, debe ser el producto que resulte de multiplicar la velocidad V por el número M de moléculas del cuerpo, esto es

$$M\times V.$$

2.° Un cuerpo de masa M adquiere la velocidad V, acumulándose velocidades elementales v sucesivas en tiempos instantáneos t sucesivos cuya suma es T, impresas por la fuerza F que sigue accionando durante este tiempo; de suerte que la suma $F\times T$ de acciones llega á producir en el cuerpo la cantidad de movimiento $M\times V$.

3.° Recordando ahora lo espuesto en el artículo (3) sobre las significaciones de las palabras *presion* y *percusion*, se viene en conocimiento de que cada accion instantánea de la fuerza F es una presion, y que la suma $F\times T$ de presiones instantáneas sucesivamente repetidas durante el tiempo T, hace que en el cuerpo de masa M se acumule una grande fuerza cuyo valor equivale á $M\times V$, fuerza que vulgarmente se dice de percusion cuando el cuerpo en que va acomulada choca contra otro cuerpo.

La teoría del choque es demasiado estensa para este compendio, por lo cual haremos únicamente las indicaciones que siguen.

Si una masa dura M llega al choque con la velocidad V, y otra masa M' dura con la velocidad V', las fuerzas de choque de estas dos masas contra otra tercera masa recipiente estarán en la razon

$$M \times V : M' \times V',$$

ó bien (17), por ser las masas M y M' proporcionales á los pesos P y P', las fuerzas de choque estarán en la razon

$$P \times V : P' \times V'.$$

Por ejemplo, el golpe de un martillo de 20 libras que choca con la velocidad de 100 pies por 1″ será $20 \times 100 = 2000$; y el golpe de otro martillo que pesa 10 libras y llega al choque con la misma velocidad de 100 pies por 1″ será 1000. Es decir, que el golpe del primero será doblemente mas fuerte que el golpe del segundo.

Tambien, si pesando cada uno de los martillos igualmente 20 libras, el primero llega con la velocidad de 100 pies, y el segundo con la de 50, los golpes de ellos estarán en la razon de 2000 : 1000; por la cual resulta que el golpe del mas veloz será doblemente mas fuerte que el del menos veloz.

Finalmente, si los pesos P, P' y velocidades V, V' fueren tales que resultase $P \times V$ igual á $P' \times V'$, bien por igualdad de pesos y de velocidades, ó bien por compensacion de minoría con mayoría de factores; ambos martillos descargarán golpes igualmente fuertes. Sin embargo de esta igualdad de fuerzas de choque, puede convenir que medie alguna circunstancia particular para lograr el efecto que se apetece, como por ejemplo la circunstancia de ser mas ó menos grande la parte superficial con que el percutor toca al cuerpo que recibe la percusion. En efecto, repartiendo en toda la superficie (*fig.* 9) *ss* del choque una determinada fuerza PV de percusion, cada unidad de la superficie *ss* chocada recibirá de la fuerza PV una parte tanto mayor cuanto menor sea el número de unidades de *ss*: y de consiguiente el percutor penetrará hasta profundidad *is* mayor en la superficie *ss* chocada. Por esto á veces en el trabajo de fragua se emplea un martillo de boca pequeña, y aun cortante, asi como otras veces uno de boca grande. Y por lo mismo, el artillero emplea alguna vez proyectil pequeño con gran velocidad, y otras veces un proyectil grande con poca velocidad, siendo en ambos casos una misma proximamente la cantidad PV ó producto del peso por la velocidad.

De aqui se infiere tambien el modo de valuar la dureza *específica* de cada materia de construccion. Pues dejando caer desde una misma altura una maza de punta prismática sobre la losa fija de cada material (*fig.* 9), las profundidades de las incisiones podrán considerarse proporcionales á las blanduras de los respectivos materiales.

Consideraciones relativas á la inercia de la materia y á la produccion ó la modificacion del movimiento en virtud de ella y de las fuerzas movientes y resistentes.

---

34. En el artículo (2) se definió la inercia diciendo que es la incapacidad de la materia para darse movimiento á sí misma, ó para anular ó modificar la velocidad con que se moviere. Y ahora debemos añadir que la inercia no consiste solo en esto, sino además en cierta resistencia proporcional á la masa, que todo cuerpo opone á sufrir cambio de reposo á movimiento, ó vice-versa, como tambien á recibir aumento ó diminucion de velocidad en su movimiento. Para comprobar estas verdades bastará citar varios hechos que están ocurriendo con frecuencia á nuestra vista.

Observamos en la conduccion de carruajes, que el ganado de tiro necesita para el primer arranque, ó sea para poner en movimiento el vehículo que estaba parado, hacer un esfuerzo mayor que para seguir despues entreteniendo el movimiento adquirido sin aumentar ni disminuir la velocidad. Lo mismo sucede cada vez que al ganado se le obliga á acelerar el movimiento del carruaje. Y estos hechos manifiestan que la masa del vehículo con su carga opone cierta resistencia ó inercia á adquirir y acelerar el movimiento.

Si en vez de acrecentar se quiere disminuir la velocidad con que va marchando el carruaje, el ganado necesita hacer esfuerzo para contener el ímpetu del movil; y este hecho manifiesta que tambien aquel cuerpo se resiste á perder velocidad en su movimiento.

Vamos pues á discurrir un poco sobre las fuerzas movientes y resistentes, inclusa la de inercia, segun los casos.

1.º Tomando en consideracion primeramente los tránsitos de reposo á movimiento ó de velocidad menor á mayor, la teoría dinámica dice que una vez adquirido por el móvil cierto grado de velocidad, y abandonándole entonces á sí propio sin que reciba accion de ninguna fuerza estraña, seguirá moviéndose con aquella misma velocidad (29, I.º), puesto que la materia no es capaz de modificarla. Y efectivamente, la esperiencia comprueba esta verdad teórica, pues para que se realice basta y es necesario que siga accionando en el cuerpo la fuerza moviente precisa y no mas para equilibrar las fuerzas resistentes, que no puede menos de haber, como por ejemplo la resistencia del aire, los rozamientos, etc.

Por otra parte, segun la teoría estática, cuando un cuerpo está en reposo permanecerá en tal estado mientras las fuerzas movientes y resistentes se equilibran unas á otras: es decir, que para poner en movimiento al cuerpo se necesita que la accion de las movientes sea mas poderosa que la accion de las resistentes, y que entre estas últimas debemos contar la de inercia, puesto que nada influye despues en aminorar la velocidad adquirida por el móvil.

Luego en general, *para poner en movimiento un cuerpo que estaba parado, como tambien para acelerar la velocidad adquirida, es necesario que las fuerzas movientes venzan á las resistentes, contando entre estas últimas la inercia del móvil: y para entretener despues el movimiento uniforme con la velocidad adquirida, es necesario y basta que las fuerzas movientes equilibren á las resistentes, sin que ya pertenezca á unas ni otras la de inercia.*

2.º En caso de que el equilibrio de las fuerzas que van entreteniendo la velocidad V adquirida deje de existir, por haberse debilitado la que hasta entonces haya sido moviente, vuelve á suscitarse la de inercia cooperando en sentido contrario, esto es, como moviente por la cantidad MV de velocidad que lleve en sí el móvil, hasta que otra vez ocurra el equilibrio de fuerzas, para seguir el cuerpo con nuevo movimiento uniforme y la velocidad que haya quedado, ó para estinguirse completamente la velocidad, en cuyo caso el móvil quedará en reposo.

3.° Si la resistencia es debida á un obstáculo contra quien chocare el cuerpo que se mueve (33, 3.°), la diminucion de velocidad se efectuará rápidamente, y tal vez quedará estinguida por el choque en un tiempo tan breve que á nuestros sentidos parezca nulo, aunque en realidad será siempre de alguna duracion.

4.° Todo lo espuesto en este cuaderno primero, tanto sobre los efectos estáticos como sobre los dinámicos de las fuerzas, se funda en un principio general de Mecánica, á saber: que *por muy grande que sea una fuerza respecto de otra contraria directamente opuesta, la primera esperimenta una diminucion de valor exactamente igual á la segunda, equilibrándose entre sí en caso de ser iguales, ó quedando reducida la mas fuerte, si son desiguales, á solo el esceso, cuyo valor produce ó modifica en su propia direccion el movimiento del cuerpo á que estuviere aplicada.* Este principio, dado á conocer por Newton, se llama de *la accion igual y contraria á la reaccion.*

Fuerza de rozamiento (lám. 3).

35. Cuando un cuerpo resbala sobre otro (*fig.* 20 *y* 21), la aspereza de las dos superficies enjendra una resistencia llamada de *rozamiento*. Por los numerosos esperimentos que se han practicado para valuar la cuantía del rozamiento entre dos cuerpos, fijo el inferior y movible el superior, cargando sobre este pesos que produjeren mas y mas fuerte presion, se ha venido á concluir que entre dos superficies de naturaleza y pulimento determinados, *el rozamiento es proporcional á la presion.* Y por consiguiente, espresando el número R el rozamiento por la presion N, y R' el rozamiento por la presion N', hay entre estas cuatro cantidades la proporcion

$$N' : N : : R' : R.$$

Suponiendo por ejemplo N' de 20 arrobas y N de 30, como tambien el número R' de valor $\frac{1}{16}$ de N', ó sea $\frac{N'}{16}$, que ahora será $\frac{30}{16}$, tendremos para valuar R la proporcion

$$20 : 30 :: \tfrac{20}{16} : R, \quad \text{ó mas simplemente} \quad 2 : 3 :: \tfrac{5}{4} : R,$$

la cual conduce á la igualdad $R = \frac{15}{8}$.

Con que, habiendo el rozamiento sido $\frac{5}{4}$ ó bien $\frac{10}{8}$ por la presion de 20 arrobas, ha llegado á ser $\frac{15}{8}$ por la presion de 30 arrobas.

Obsérvese que $\frac{15}{8}$ es como $\frac{30}{16}$, y como $\frac{1}{16}$ de 30 arrobas; y que $\frac{10}{8}$ viene de $\frac{1}{16}$ de 20 arrobas. Y esta advertencia nos indica que pudimos hallar el rozamiento de 30 arrobas con solo multiplicar 30 por el quebrado mismo $\frac{1}{16}$ que multiplicaba á 20. Es decir, que para hallar el rozamiento R debido á cualquiera presion N, basta multiplicar N por el quebrado que pertenezca al rozamiento entre dos cuerpos, segun la naturaleza de sus materias y la lisura de estas en la parte donde se rozan. Luego, espresando n el quebrado que ha de multiplicar á cualquiera presion N para hallar el rozamiento R, tendremos la igualdad

$$R = n \times N. \qquad (*)$$

Con este objeto los mecánicos, por medio de muchos esperimentos, han formado tablas en que están escritos los valores de n respectivos á cada dos materias. Véase la siguiente estractada de otras mas completas que se pueden ver en mi tratado de *Mecánica aplicada á las máquinas*, con referencia á piezas alisadas sin pulir.

HECHOS *de esperiencia sobre el rozamiento de las superficies planas despues de haber principiado el movimiento.*

MATERIAS QUE SE ROZAN.	ESTADO DE LAS SUPERFICIES.	DISPOSICION DE LAS FIBRAS ENTRE SI Y CON RELACION AL MOVIMIENTO.	*Valores de* n *para el rozamiento* n × N.
Roble sobre roble.......	En seco...............	Fibras paralelas..	0,48
Id........id.........	Id..................	Fibras cruzadas..	0,32
Id........id.........	Untadas con sebo.......	Fibras paralelas..	0,075
Roble sobre álamo negro.	En seco...............	Fibras paralelas..	0,43
Id........id.........	Untadas con sebo.......	Fibras paralelas..	0,073
Hierro forjado sobre hierro fundido............	Sin unto...............	....	0,19
Id........id.........	Untadas con sebo.......	....	0,103
Id........id..	Id. con aceite de oliva...	....	0,066
Hierro forjado sobre hierro forjado..........	Sin unto..............	Fibras paralelas..	0,14
Id........id.........	Untadas con sebo.......	Id.	0,082
Hierro forjado sobre bronce.	Sin unto...............	....	0,17
Id........id.........	Untadas con sebo.......	....	0,103
Id........id.........	Id. con aceite de oliva..	....	0,078
etc.	etc.	etc.	etc.

Segun esta tabla, y la igualdad $R = n \times N$, la fuerza R de rozamiento producida por una pieza que por ejemplo sea de hierro forjado contra otra pieza de bronce, cargando sobre las superficies en contacto una presion ó fuerza perpendicular de 80 arrobas, se tendrá dando á N el valor 80 arrobas, y á n el valor $\frac{17}{100}$ sin unto, y $\frac{10}{100}$ con unto de sebo. Asi resultan para R los valores rozamiento sin unto $\frac{17\times80}{100}=13\frac{3}{5}$ arrobas;

rozamiento con unto $\frac{10\times80}{100}$ ó sea 8 arrobas.

Basta la aplicacion que acabamos de hacer como ejemplo para cualquier otro caso que ocurriere.

Segun Mr. Morin, á quien son debidos los esperimentos mas modernos y exactos sobre el rozamiento, para las maderas rozantes contra madera, y los metales rozantes contra metal, con untos, la razon n del razonamiento á la presion es sensiblemente la misma, y su término medio el siguiente en cada caso.

Superficies continuamente alimentadas con unto.	*Superficies engrasadas de tiempo en tiempo.*	*Superficies untuosas.*
$\frac{5}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{15}{100}$

El mismo Autor hace varias observaciones utilísimas para la práctica, y entre ellas las siguientes.

1.ª Cuando la presion es muy fuerte, espulsa el unto de aceite y aun de manteca, quedando simplemente untuosas las superficies rozantes; por lo cual, para los casos de ser fuerte la presion y particularmente en tiempo de calor, el unto de sebo es preferible. Mas para mecanismos ligeros en que la presion es leve, conviene unto de aceite poco viscoso.

2.ª El agua debe reputarse como mal unto, principalmente para las maderas y los metales, pues á veces aumenta mas bien que disminuye el rozamiento.

3.ª No es fundada la opinion de que el rozamiento sea siempre menor entre dos materias de especies diferentes que entre las de una misma especie. Pero conviene preferir en general los cuerpos granulosos á los fibrosos, y procurar que sean duros, especialmente la pieza mas costosa de las dos que se rozan.

CUADERNO SEGUNDO.

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO

EN LAS MAQUINAS.

36. *Máquina* es todo artificio que tiene por objeto emplear ventajosamente las fuerzas, para producir el equilibrio ó el movimiento de algun cuerpo. La Mecánica de la naturaleza, creada por la Sabiduría divina, enseña al hombre observador las reglas primeras para la artificial que ha formado, y que sin cesar está enriqueciendo con las producciones de su ingenio. Hay máquinas mas ó menos compuestas de otras, pero siempre las parciales mas simples vienen á ser la *funicular* ó de cuerdas, *la palanca* y *el plano inclinado*. De estas derivan otras menos simples, llamadas *balanza*, *romana*, *poleas*, *torno*, *cuña* y *rosca*.

Vamos á esplicar brevemente lo esencial sobre el equilibrio y el movimiento de cada una de estas máquinas, principiando por las tres mas simples.

Máquina funicular (lám. 3).

37. Todo sistema de cuerdas ó correas ó cadenas destinadas á comunicar acciones de las fuerzas es máquina funicular: en ella, los *ramales* ó porciones de cuerdas flexibles de que tiran las fuerzas se consideran como líneas, mientras no fuere necesario atender á las dimensiones transver-

sales de la cuerda; y como perfectamente flexibles, mientras no haya que atender á cierta rigidez que no puede menos de tener aun la cuerda mas domada por el uso. Hay varios sistemas ó máquinas de esta especie comprendidas en las clases que vamos á examinar.

I.ª La mas simple máquina funicular es cuando dos fuerzas F y F' tiran de un ramal AA' de cuerda en sentidos contrarios horizontalmente (*fig.* 10).

Todo lo espuesto sobre el equilibrio y el movimiento de un cuerpo instado por fuerzas directamente contrarias (7, II.ª *y* 27) es aplicable á este sistema; y por tanto, en caso de ser iguales F y F' resultará equilibrio entre ellas; mas en caso de ser desiguales, producirán una resultante igual á la diferencia de ellas en sentido de la mayor. En ambos casos llámase *tension* ó *tirantez* de la cuerda la fuerza que sufre, y esta será la menor de las dos cuando fueren desiguales, quedando el esceso de la mayor para producir movimiento en sentido de ella, sin que la cuerda padezca mas tirantez que la debida á la menor de las fuerzas (34, 4.º).

Hemos supuesto un ramal de cuerda horizontalmente situado, para poder asi prescindir de su peso, el cual en toda otra posicion del ramal favorece ó perjudica á una de las fuerzas F ó F' mas que á la otra. Tambien hemos prescindido del *pandeo* ó curvatura que el peso propio de una cuerda ó cadena produce en ella siempre que no esté verticalmente situada.

II.ª Cuando una cuerda ABA' está sujeta en sus dos estremos A, A' fijamente (*fig.* 11), supongamos aplicado un peso ó fuerza F por medio de un anillo corredizo á lo largo de la cuerda; y la esperiencia manifiesta que *el anillo con su peso va naturalmente á situarse en la vertical VB que divide en dos partes iguales el ángulo que forman los dos ramales AB y $A'B$.* Admitiendo esta condicion como fundamental del equilibrio en la máquina funicular de que se trata, síguese que *los dos ramales AB y $A'B$ sufren tensiones iguales, contando con solo el peso F* suspendido en *B;* pues representando este peso por la parte Bf de su vertical, y dividiendo esta fuerza en dos componentes paralelas á los respectivos ramales, resulta el paralelógramo compuesto de dos triángulos idénticos, en que el lado Ba, representante de la tension que sufre el ramal AB, es igual á el lado Ba' representante de la tension que sufre el ramal $A'B$.

Luego la tension de cada ramal, y de consiguiente el esfuerzo que en esta direccion sufre el punto fijo á que está asido su estremo, equivale á la componente respectiva de las dos iguales Ba, Ba' en que se descompone el peso F.

Obsérvese que, por estar el punto fijo A mas bajo que el A', el cuerpo resbaladizo ha corrido naturalmente hácia el primer punto mas que hácia el segundo, resultando asi el ramal AB mas corto que $A'B$. Pero que si los puntos fijos A y A' estuviesen en una misma horizontal, serian iguales los dos ramales, y la vertical VB del peso suspendido dividiria en dos partes iguales la distancia horizontal que mediase entre dichos dos puntos.

Pero tanto en un caso como en otro, si se quiere colgar un peso F de una cuerda ABA' de modo que los dos ramales y sus puntos de retencion sufran esfuerzos iguales, hay que elejir el punto B de suspension en que la vertical divida en dos partes iguales el ángulo ABA'; operacion que con un semicírculo graduado y una plomada se practica facilmente, si es que no se quiere dejar correr al mismo peso hasta que por sí quede parado.

III.ª Supongamos ahora (*fig.* 12) que la cuerda $A'B$..... $B'A'$ sujeta en los estremos A y A', está en equilibrio tirada por pesos $'F$,..... F',..... fijamente aplicados á los puntos $'B$,..... B',..... de la cuerda, sin que puedan resbalar en ella. En este sistema de equilibrio la cuerda forma un polígono convexo llamado *polígono funicular*, y todo el tiro que los pesos hacen está repartido en los dos puntos fijos A y A' del modo siguiente. Prolongando los lados $A'B$ y $A'B'$ estremos del polígono hasta que concurran en un punto Z, tómese en la vertical de este punto una parte Zz que represente á la suma de pesos $'F'$,..... F',..... que llamaremos Z; y formando el paralelógramo, sus lados representarán las tensiones de los ramales estremos $A'B$ y $A'B'$ respectivos á dichos lados; ó lo que es lo mismo, los esfuerzos que sufren los puntos A y A'.

Si los pesos $'F$,..... F',..... son de los innumerables puntos materiales de la cuerda misma, el polígono vendrá á tener infinito número de lados, convirtiéndose en línea curva llamada *catenaria*, en que está representado el pandeo de que se hizo mencion en el sistema de la clase I.ª

Tanto en la catenaria como en el polígono funicular, la vertical de la resultante Z y el punto mas bajo C de la cuerda se aproximan al punto de suspension *A* mas bajo, circunstancia que tambien se notó en el sistema de la clase II.ª

IV.ª Por último, haremos mencion de una máquina funicular (*figs.* 13 *y* 14) destinada para trasmitir el movimiento circular de un cilindro recto *AB* al rededor de su eje *C*, á otro cilindro recto *A'B'* al rededor de su eje *C'*. La cuerda ó mas bien correa *AA'B'BA*, que ciñendo á cierta porcion de superficie lateral de cada uno de los dos cilindros que se llaman *tambores*, montados en los ejes respectivos, forma una figura cerrada, se llama *cuerda sin fin*, y sus rozamientos *R*, *R'* en dichas superficies hacen que reciba movimiento de uno de los cilindros, de *AB* por ejemplo, y comunique movimiento al otro cilindro *A'B'*. Para que haya rozamientos, la cuerda habrá de ejercer presion en los dos cilindros (35), y para ejercerla es preciso que la cuerda esté tirante en toda su longitud doble. Cuando la correa pasa sin cruzarse en el camino desde un cilindro al otro, estos se mueven ambos en un mismo sentido, como en la *figura* 13; mas cuando la correa se cruza, como en la *figura* 14, el cilindro moviente se mueve en sentido contrario que el movido.

Palanca (lám. 3).

38. Dos ó mas fuerzas *F*, *F'* cuyas direcciones *FB* y *F'B'* están en un plano (*fig.* 15), aplicadas á los puntos *B* y *B'* de una barra de cualquiera figura, y que solo se puede mover por rotacion al rededor de un eje *A* perpendicular á dicho plano, constituyen la máquina simple llamada *palanca natural*. Y convirtiendo la barra á línea rígida ó inflexible *BB'*, como tambien el eje ó *apoyo* á punto fijo *A*, la máquina viene á ser *palanca matemática*, en la cual supondremos por ahora que la línea *BAB'* es recta.

En esta máquina, asi como en todas generalmente, una de las dos fuerzas, que se nombra *potencia*, tiende á destruir el efecto de la otra, que por esto se nombra *resistencia;* y el eje ó apoyo puede estar dentro ó fuera del ámbito de las direcciones de las fuerzas. La palanca se llama de *primer género* cuando el apoyo *A* está entre los puntos de aplicacion de la potencia y la resistencia, como en la *figura* 16; de *segundo género* cuando la resistencia *F'* está entre el apoyo A y la potencia F, como en la *figura* 17; y de *tercer género* cuando la potencia F está entre el apoyo A y la resistencia F', como en la *figura* 18.

39. Si la direccion de alguna de las fuerzas (*fig.* 15), como por ejemplo H, es oblícua á la recta BA, será H descomponible en dos componentes de modo que una accione en direccion de la recta BA y otra en direccion perpendicular á esta. Representando pues Bh á la fuerza H, los lados Bd y Bf del paralelógramo representarán á dichas componentes. Y como Bd está destruida por la resistencia que el punto fijo A opone á que BA se mueva en su propia direccion, queda la componente Bf, que hará el mismo efecto de rotacion que la fuerza H. Luego, *cuando una fuerza acciona como H en la palanca oblícuamente á la recta BA, que solo se pueda mover por rotacion al rededor del punto fijo A, se pierde parte de dicha fuerza inutilmente y aun con perjuicio. Pero si accionase como F en direccion Bf perpendicular, ninguna pérdida sufrirá*, porque no dará componente en direccion BA. Y por tanto, *el modo mas poderoso de accionar una fuerza en la palanca consiste, en que la direccion de la fuerza sea perpendicular á la recta BA que haya de girar al rededor del punto A.*

Suponiendo pues (*figs.* 16, 17 *y* 18) aplicadas las fuerzas F, F' en la palanca de modo que sus direcciones sean perpendiculares á BB', la teoría de esta máquina viene á ser como la de dos fuerzas paralelas aplicadas á los puntos B, B' de una recta BB' inflexible. Entonces las distancias AB y AB' desde el apoyo A á los puntos de aplicacion B y B' de las fuerzas son los *brazos* de la palanca: el AB brazo de la potencia F y el AB' brazo de la resistencia F'. Con esta simplificacion del sistema general de la palanca, facilmente podemos deducir las circunstancias propias del equilibrio, y las propias del movimiento.

40. **Equilibrio.** Para que este se verifique es precisa y suficiente la condicion de que *la resultante Z de las fuerzas F y F' paralelas pase por el punto fijo A, apoyo de la palanca matemática:* pues entonces quedará equilibrada la resultante por la resistencia que directamente la opone el apoyo A. Veamos cómo se cumplirá esta condicion en cada uno de los tres géneros de palancas.

1.° En la del primer género (*fig.* 16), como en el sistema del artículo (13), Z es la suma de F y F': y el equilibro se verificará con tal de que se cumpla la proporcion siguiente.

$$F : F' :: B'A : BA,$$

ó bien la igualdad de productos

$$F \times BA = F' \times B'A,$$

esto es, con tal de que el producto de la potencia multiplicada por su brazo de palanca sea igual á el producto de la resistencia multiplicada por su brazo de palanca.

2.° En la palanca del segundo género (*fig.* 17), como en el sistema del artículo (14), la resultante Z es la diferencia de las componentes F, F'; y el equilibrio se verificará con tal de que se cumpla la proporcion

$$F : F' :: B'A : BA$$

ó bien la igualdad $\quad F \times BA = F' \times B'A$

esto es, cuando el producto de la potencia por su brazo de palanca sea igual á el producto de la resistencia por su brazo de palanca.

3.° En la del tercer género (*fig.* 18), como en el ya citado sistema del artículo (14), la resultante Z es diferencia de las componentes F, F'; y el equilibrio se verificará con tal de que se cumpla la proporcion

$$F' : F :: BA : B'A$$

ó bien la igualdad $\quad F' \times B'A = F \times BA$

es decir, siempre que el producto de la potencia por su brazo de palanca sea igual á el producto de la resistencia por su brazo de palanca.

Las tres conclusiones precedentes vienen pues á ser una misma; á saber, que en las palancas de los tres géneros, *el estado de equilibrio se verifica cuando el producto de la potencia por su brazo de palanca es igual á el producto de la resistencia por su brazo de palanca,* ó bien, *cuando las fuerzas son inversamente proporcionales á los brazos de palanca:* principio que se espresa en la fórmula

$$\left.\begin{array}{ll} & F : F' :: B'A : BA \\ \text{ó sea} & F \times BA = F' \times B'A \end{array}\right\} \quad (*)$$

Por esta proporcion, dadas tres de sus cuatro cantidades, se halla la cuarta proporcional.

Suponiendo por ejemplo en la palanca del primer género (*fig.* 16) la potencia F equivalente á 50 libras, y la resistencia F' equivalente á 80 libras, al mismo tiempo que $B'A$ de 10 pies; la proporcion $50:80::10:BA$ da para el brazo BA, $\frac{800}{50}$ ó sea $\frac{80}{5}$, que vienen á ser 16 pies.

En la palanca del segundo género (*fig.* 17), la proporcion $50:80::10:BA$ dará tambien para el brazo BA de la potencia

$$\frac{800}{50} \text{ ó sea } \frac{80}{5} \text{ pies, ó bien } 16 \text{ pies.}$$

Finalmente; en la palanca del tercer género (*fig.* 18), la proporcion exige que F' sea menor que F, á causa de que $B'A$ es mayor que BA. Suponiendo pues en ella F' de 50 libras y F equivalente á 80 libras, como tambien BA de 10 pies, la proporcion

$$50:80::10:B'A$$

da para el brazo de palanca $B'A$ de la resistencia F',

$$\frac{800}{50} \text{ ó sea } \frac{80}{5} \text{ ó bien } 16 \text{ pies.}$$

Omitiremos aqui el resolver los otros tres problemas de los cuatro que pertenecen á la proporcion (*), confiando en que el discípulo se los propondrá para ejercitarse en la resolucion de ellos. Téngase tambien presente, que en la palanca del primer género el apoyo sufre una presion igual á la suma de potencia y resistencia en el mismo sentido de ellas; que en la palanca del segundo género, la presion que el apoyo sufre es tan solo el esceso de la resistencia sobre la potencia en sentido de la resistencia; y por último, que en la palanca del tercer género, la presion que el apoyo sufre es el esceso de la potencia sobre la resistencia en sentido de la potencia.

41. Digimos al principio que la barra de la palanca material, y por consiguiente la línea rígida de la matemática, puede tener cualquiera figura, aunque hasta aqui la hemos considerado como una línea recta, en que se hallan los puntos B y B' de aplicacion de las fuerzas y el fijo A de rotacion ó de apoyo.

Pero si este punto A está fuera de la recta BB', como sucede muchas veces (*fig.* 19), principalmente en la del primer género, la palanca matemática es entonces *angular*, formada por dos rectas inflexibles AB y AB' que unidas en el punto A se dirigen á los puntos B y B' de aplicacion de las fuerzas F y F', cuyas direcciones se ajustan al plano BAB'. En este caso tambien se demuestra, como en el de ser línea recta la palanca (39), que la potencia y la resistencia pierden parte de su fuerza siendo sus direcciones oblícuas á las respectivas rectas AB y AB', y que por consiguiente la direccion mas ventajosa de cada una de estas fuerzas es la perpendicular. Asi, se simplifica la teoría de la palanca angular, y en ella vienen á ser *brazos de palanca* las distancias AB y AB' desde el apoyo A á los puntos B y B' de aplicacion de las fuerzas, lo mismo que en la palanca recta.

Suponiendo pues respectivamente perpendiculares á los lados AB y AB' del ángulo BAB' las direcciones BF y $B'F'$ de la potencia F y la resistencia F'; en la palanca angular del primer género (*fig.* 19) estas direcciones irán á concurrir precisamente en un punto O dentro del ángulo BAB'. Y es indudable tambien aqui como en la palanca recta (40), que para el equilibrio de esta máquina se necesita y basta la condicion *de que la direccion de la resultante Z de F y F' pase por el punto fijo A.* De suerte que, representándose Z por la distancia OA y formando sobre esta diagonal el paralelógramo cuyos lados pertenezcan á las direcciones OF y OF', el lado Of representará á la potencia F y el lado Of' á la resistencia F'.

Por esta demostracion vemos que en la palanca angular el apoyo sufre un esfuerzo Z menor que la suma de F y F' que sufriria siendo recta (40, 1.°); pero la proporcion entre estas fuerzas y sus brazos de palanca subsiste la misma que entonces. En efecto, los triángulos ABf y $AB'f'$ son semejantes por tener los ángulos en B y B' rectos, los f y f' iguales por serlo al O del paralelógramo, y los A iguales por suplementarios de los otros dos de cada triángulo. Comparando los lados homólogos de estos triángulos, tendremos la proporcion

$$AB : AB' :: Af : Af';$$

y puesto que en el paralelógramo $AfOf'$ hay la proporcion

$$Af : Af' :: F' : F,$$

resulta por igualdad de razones la proporcion final

$$AB : AB' :: F' : F, \text{ y la igualdad } F \times AB = F' \times AB',$$

que son las mismas de la palanca recta (40, 1.°).

De modos análogos se viene á deducir tambien que en las palancas de los géneros segundo y tercero, siendo angular la línea rígida BAB', se verifican como en las palancas rectas las proporciones y las igualdades de productos del artículo (40, 2.° *y* 3.°). Y por consiguiente, la proporcion y la igualdad de productos contenidos en la fórmula (*) del artículo (40) convienen á todas las palancas rectas y á las angulares.

Ultimamente, sépase desde ahora que en toda palanca recta ó angular de cualquiera de los tres géneros, cada uno de los productos $F \times AB$ y $F' \times AB'$ de la fuerza multiplicada por su respectivo brazo de palanca se llama *momento* de la fuerza; entendiéndose por *brazo de palanca* la distancia perpendicular desde el punto de apoyo hasta la direccion de la fuerza. De suerte que en caso de ser esta direccion oblícua respecto de la línea rígida, sería *momento* de la fuerza el producto de ella por la perpendicular encaminada á su direccion desde el punto de apoyo.

42. **Equilibrio** en la palanca material. Hasta ahora hemos considerado haber solamente dos fuerzas F y F' en la palanca matemática, prescindiendo de otras tres inherentes á toda palanca material, que son: 1.° los pesos p y p' de sus dos brazos; 2.° el rozamiento R del eje material contra su apoyo, fuerza resistente que se suscita siempre en sentido contrario del movimiento. Por lo cual, es preciso completar la igualdad (*) de momentos cifrada en el artícu-

lo (40) para el equilibrio de todas las palancas, combinando los momentos de dichas fuerzas nuevas con los de F y F'. Mas, para ello habremos de considerar á esta máquina en las diversas posiciones de su movimiento circular, sin que F y F' dejaren de seguir siempre accionando perpendicularmente á sus respectivas líneas rígidas representativas de los brazos de la barra, para que asi estas distancias AB y AB' sean brazos de palanca.

1.º Vamos á discurrir primeramente sobre la influencia de los pesos p y p' en el cálculo de las palancas, refiriéndonos á la del primer género por ejemplo, y suponiendo vertical el plano en que se hallan las direcciones de todas las fuerzas.

En la del primer género (*fig.* 15), siendo homogénea la materia de la barra BB' é iguales en toda la longitud de ella sus dimensiones transversales de ancho y grueso, el peso p de un lado de A estará en el punto medio b, y el peso p' del otro lado estará en su punto medio b'. Pero como las reglas de buena construccion exigen que la barra BB' sea mas robusta en donde tenga que resistir á mayor fuerza; habrá que inquirir los valores p, p' y sus puntos de aplicacion b, b' en los respectivos brazos (20 ó 21).

Además, en todas las posiciones de la barra los puntos b y b' permanecerán invariables, pero las direcciones de p y p' respecto de la línea BB' variarán. Cuando la barra esté en posicion horizontal, las direcciones de estos dos pesos serán paralelas á las direcciones de las fuerzas F y F'; mas, en todas las demás posiciones de la barra, estas fuerzas principales, que se han supuesto constantemente paralelas entre sí, dejarán de serlo á las p y p' tambien siempre paralelas entre sí por su naturaleza. El peso p favorecerá á F y el p' á F' mientras la palanca da el primer cuarto de vuelta, y serán contrarias á ellas respectivamente en los dos siguientes cuartos de vuelta, volviendo á serlas favorables en el último cuarto de vuelta, hasta quedar al fin como estaban al principiarse el movimiento. De suerte que, para incluir en la igualdad de equilibrio los momentos de las fuerzas p y p', sería necesario referirla á cada posicion particular de la barra.

Tambien es de advertir que en cada una de estas posiciones, la presion N contra el eje material A de rotacion es en la palanca del primer género la resultante de la suma de fuerzas F y F' combinada con la suma de las p y p'; y que en las del segundo y tercer género la presion N contra su eje respectivo es la resultante de la diferencia de fuerzas F y F' combinada con la suma de las p y p'.

2.° Fijando ahora la consideracion en el rozamiento R, ó sea el producto $n \times N$ de la presion N que el eje material A padece, multiplicada por el número n fraccionario correspondiente á las materias que se rozan (35), deberemos calcular primeramente el valor N de la presion en cada una de las tres palancas, con arreglo á las indicaciones que se han hecho en el párrafo precedente. Hallando pues la resultante ó presion N y multiplicándola por el número n que la tabla (35) diere, la resistencia $n \times N$ será una fuerza R que, aplicada en direccion tangente al círculo cuyo centro es el punto A del eje matemático, accionará en el estremo t de un brazo At de palanca, y siempre en sentido contrario del movimiento, ya sea producido por la potencia F como debe suceder, ó ya sea producido el movimiento por la resistencia F', como indebidamente puede suceder en caso de ser esta fuerza mas poderosa.

Por lo espuesto en este artículo vemos que la igualdad (*), formulada en el artículo (40) para el equilibrio de las palancas matemáticas de cualquier género y forma (41) es incompleta para la práctica, á causa de que en la palanca material hay peso y rozamiento. Hemos indicado ya el modo de completarla; pero á la verdad, el tomar en consideracion los pesos p, p' y sus momentos $p \times Ab$, $p' \times Ab'$ en cada uno de los tres géneros de palancas nos detendria demasiado. Por lo cual, atendiendo solamente á la palanca del primer género (*fig.* 15), supondremos que el peso P de la barra está repartido entre sus dos brazos de manera que los momentos $p \times Ab$ y $p' \times Ab'$, contrarios entre sí, sean iguales en todas las posiciones de la barra; es decir, que abandonándola á solamente la accion de su peso propio, quedaria siempre en equilibrio.

Escluyendo pues asi de la igualdad dichos momentos, no hay que introducir en la fórmula (*) mas que el $R \times At$ del rozamiento, y tendremos para las aplicaciones correspondientes á la palanca del primer género una ú otra de las dos adjuntas fórmulas de equilibrio,

$$\left.\begin{array}{l} F\times AB = F'\times AB' + R\times At \\ F\times AB + R\times At = F'\times AB' \end{array}\right\} (^{**})$$

La primera sirve cuando la máquina tiende á moverse en sentido de la potencia F; y la segunda cuando la tendencia al movimiento sea en sentido de la resistencia F'.

43. MOVIMIENTO. Si en la primera de las igualdades (**) el valor del primer miembro fuere mayor que el del segundo, tanto cuanto bastase para resultar vencida la inercia, la máquina se moverá obedeciendo á la potencia F. Si por el contrario, el momento $F'\times AB'$ de la resistente fuere mayor que la suma de momentos $F\times AB + R\times At$ cuanto bastase para resultar vencida la inercia, la máquina se moverá obedeciendo á la resistencia, tal vez indebidamente.

De aqui se infiere, que cuando se quisiera saber la cuantía de la potencia ó de su brazo de palanca para mover la palanca del primer género, se habrá de calcular antes por la fórmula (**) la cuantía de uno ú otro de estos factores necesaria para el equilibrio, como en los problemas que siguen vamos á practicar.

44. PROBLEMAS de equilibrio y de movimiento en la palanca del primer género, por el orden que se acaba de indicar.

I.º *Calcular por la primera de las igualdades (**) la longitud AB del brazo de la potencia F en el equilibrio de una palanca material del primer género, con los datos adjuntos.*

Peso P de la barra de hierro...........	400 libras.
Potencia F...........................	200 libras.
Resistencia F'........................	500 libras.
Brazo AB de la potencia F...........	
Brazo AB' de la resistencia F'.........	2 pies.
Brazo At del rozamiento R (ó sea el rádio At del eje material cilíndrico de hierro).	2 pulgadas.

En suposicion de ser vertical el plano del movimiento, la presion N contra el eje será la suma de las fuerzas F, F', P, que resulta 1100 libras; y suponiendo el roce de hierro contra hierro con unto, la tabla del artículo (35) da para n el valor $\frac{8}{100}$, y por consiguiente el producto $n \times N$, valor de R, será en libras $1100 \times \frac{8}{100}$, ó bien 88 libras.

Introduciendo ahora las cantidades numéricas del problema en la espresion (**), esta viene á ser

$$200 \times AB^{\text{pulg.}} = 500 \times 24^{\text{pulg.}} + 88 \times 2^{\text{pulg.}}$$

de la cual se deduce

$$AB = \frac{500 \times 24 + 88 \times 2}{200} = \frac{12176}{200} \text{ pulgadas.}$$

Las pulgadas contenidas en este quebrado son poco menos de 61; y dividiendo 61 por 12, resulta que el brazo AB habrá de tener longitud poco mayor de 5 pies.

II.° *Calcular por la primera de las igualdades* (**) *la cantidad F de potencia necesaria en el equilibrio de una palanca material de primer género, con los datos adjuntos.*

Peso P de la barra de hierro...........	400 libras.
Potencia F...........................	
Resistencia F'......................	500 libras.
Brazo AB de la potencia F............	5 pies.
Brazo AB' de la resistencia F'..........	2 pies.
Brazo At del rozamiento R.............	2 pulgadas.

Aqui necesitamos recurrir á la igualdad (*) para computar por ella un valor tal cual aproximativo de F, y obtener asi aproximadamente tambien la cuantía de la presion N ó suma de F, F' y P. Con este objeto la espresion (*) aplicada al caso es

$$F^{\text{libs.}} \times 5 = 500^{\text{libs.}} \times 2,$$

y da para F el valor $F = 200$ libras; las cuales juntamente con 500 libras de F' y 400 de P en caso de ser vertical el plano de movimiento, componen la suma $N=1100$ libras. De suerte que, suponiendo $n=\frac{8}{100}$ como en el problema I.°, tendremos $R=88$ libras.

Ahora la primera de las igualdades (**), considerando en ella incógnito aún el valor de F, y reduciendo á pulgadas las medidas, será

$$F^{\text{libs.}}\times 60=500^{\text{libs.}}\times 24+88^{\text{libs.}}\times 2.$$

Esta dará $\quad F=\dfrac{12176}{60}$ libras,

que vienen á ser casi 203 libras.

Por este resultado se notan dos cosas: 1.ª que el rozamiento ha hecho aumentar casi 3 libras á F; 2.ª que por haber supuesto AB de 5 pies justos en este problema, mientras en el I.° resultó un poco mayor, hay la diferencia correspondiente entre las 203 libras de ahora y las 200 que supusimos en aquel para F.

Bastan los dos modelos precedentes para resolver cualquier problema en que la cantidad incógnita fuere AB', ó F', ó At, ó R, mediante la segunda de las igualdades (**); teniendo entendido que en caso de no ser vertical el plano del movimiento, la presion N contra el eje será resultante de dos presiones, una debida á P y otra á $F+F'$.

III.° *Si con los datos mismos que se dieren para resolver un problema de equilibrio en que la incógnita fuese F, se propusiese determinar el valor de esta fuerza necesario para el movimiento*, la cuestion se resolveria determinando primeramente por la primera de las igualdades (**) el valor de F en el equilibrio, y dando á este valor el esceso necesario (43) desde el mínimo suficiente hasta el mas grande que se quisiese. Por ejemplo, despues de haber calculado con los datos del problema II.°, que la potencia equilibrante es de 203 libras, claro está que si á esta cantidad de potencia se añade la parte que la inercia absorve, la máquina se moverá inmediatamente.

45. El tránsito desde el estado de equilibrio al de movimiento de la palanca, y las vicisitudes que despues admite mientras la máquina se mueve, ofrecen una inmensa mate-

ria de estudio, sobre la cual haremos algunas indicaciones, tal vez agenas de este lugar.

1.ª Desde luego se deja conocer que cuanto mayor sea dicho esceso que á F se dé sobre el valor de equilibrio, el movimiento de la palanca natural resultará mas veloz desde el principio; y que si el esceso sigue siempre, esta velocidad irá creciendo sucesivamente, porque á la adquirida se agrega la nueva que en cada instante va recibiendo (33, 2.°). De suerte que una barra misma con brazos BA, $B'A$ y At determinados, y con cierto esceso constante de la potencia F sobre las dos fuerzas resistentes F' y R, irá adquiriendo mas y mas velocidad cada vez en sentido de la potencia F.

2.ª Pero si en la misma barra, subsistiendo constantes las resistencias F' y R, el esceso de la potencia F cesa de existir en cuanto la barra hubiere adquirido la velocidad que se necesite y no mas, desde entonces la relacion de los momentos ya será la misma primera de las (**) del equilibrio, y por consiguiente (34, 1.°) la máquina seguirá moviéndose constantemente con la velocidad adquirida hasta el instante en que cesó de existir el esceso de la potencia F sobre las resistencias F' y R. Esta velocidad constante, que se llama *régimen* de la máquina, el operario la establece á voluntad. Para ello, estando en equilibrio todo el sistema de fuerzas que accionan en la máquina, esto es, de manera que al menor aumento que se añada á la potencia F se pronuncie el movimiento, agrega á F cierta fuerza de ayuda continuada durante el tiempo necesario para que la máquina llegue á adquirir la velocidad apetecida. Entonces el operario suprime el esceso ó ayuda que dió á F, y desde aquel instante la máquina seguirá moviéndose continuamente con la velocidad adquirida, ni mas ni menos. Todo el que haya observado atentamente funcionar máquinas habrá notado lo que acabamos de decir. En una rueda de agua, por ejemplo, se pone en movimiento la máquina abriendo la compuerta al principio un poco mas de lo que se necesita para el régimen, y despues se suprime el esceso de la abertura de la compuerta. El amolador que mueve la piedra mediante estribo, hace al principio un hincapié mas fuerte que despues. El ganado que tira de un carruaje hace para que se pronuncie el movimiento un esfuerzo mayor que despues de pronunciado el movimiento, etc.

3.ª A veces el régimen de la máquina se establece aumentando la resistencia F' ó R, sin que la potencia deje de subsistir siempre de valor constante desde el principio. Ejemplo de esto nos ofrece el tornero, cuando modera la velocidad de la máquina, añadiendo á las resistencias naturales la artificial que diere la resistencia del buril aplicado á la pieza que labre. Otro ejemplo se ve diariamente en los carruajes, cuando el conductor aplica el *freno* rozante contra el cerco de la rueda al bajar cuestas.

4.ª Otras veces el régimen se establece disminuyendo un poco la potencia y aumentando otro poco la resistencia, hasta quedar en relacion exacta de equilibrio.

5.ª Para la inteligencia de los ejemplos citados hubiera sido menester que antes hubiésemos demostrado que la teoría de la palanca es aplicable á las ruedas. Pero con oferta de justificar mas adelante esta verdad, he creido oportunas desde ahora dichas citaciones, á fin de poder esplicar asi las causas que motivan las vicisitudes de la velocidad en el movimiento de rotacion; aunque á la verdad las simples palancas de cualquiera de los tres géneros, empleadas en las faenas ordinarias de remover algun obstáculo, no dan comunmente vueltas completas y seguidas como las ruedas, sino que se limitan á describir arcos de pocos grados.

Plano inclinado (lám. 3).

46. Cuando sobre un plano que no sea horizontal ni vertical hay un cuerpo instado por dos fuerzas á lo menos, una que acciona con tendencia á que el cuerpo suba y otra con tendencia á que el cuerpo baje, este sistema ó máquina se llama *plano inclinado* (*figs.* 20 *y* 21). Y considerándola matemáticamente, viene á ser un triángulo rectángulo BDB', seccion de la máquina efectiva por un plano vertical, que en direccion de la pendiente $B'B$ del plano inclinado pasa por el centro G de gravedad del cuerpo; punto á que por ahora suponemos aplicadas todas las fuerzas. En dicho triángulo son, la oblícua BB' *longitud* del plano inclinado, la horizontal BD su *base*, la vertical $B'D$ su *altura*, y el ángulo $B'BD$ su *inclinacion*.

La Geometría nos enseña (*Comp. Geom.* 31), que siendo determinado el grandor de este ángulo, se puede considerar cuan larga se quiera la hipotenusa BB' con sus correspondientes catetos BD y $B'D$, sin que por ello deje de ser constante siempre la razon entre cada una de las tres líneas. Y por esta constancia de la razon $B'D : BD$ entre la altura y la base para un determinado ángulo $B'BD$, se dice que el plano es de *inclinacion* $\frac{B'D}{BD}$, como por ejemplo, de $\frac{1}{2}$ cuando la altura es mitad de la base; de $\frac{3}{5}$ cuando la altura es 3 y la base 5; etc.

En caso de ser dadas dos de las tres dimensiones, longitud BB', base BD y altura $B'D$ del plano inclinado, está determinada la tercera; pues nos consta (*Comp. Geom.* 49) que la segunda potencia de la hipotenusa equivale á la suma de segundas potencias de los catetos. Por ejemplo, suponiendo BD de 8 unidades de longitud, y $B'D$ de 6 unidades, la suma de segundas potencias de 8 y 6 viene á ser 64 mas 36, que componen 100; luego, la raiz segunda 10 de esta suma es la hipotenusa ó longitud BB' del plano inclinado relativamente á los otros dos lados del triángulo que se limitaron. Esta idea preventiva nos ha de ser util en las aplicaciones que hagamos de las teorías del equilibrio y del movimiento del cuerpo que insiste sobre el plano inclinado.

47. Comencemos pues á estudiar la teoría de esta máquina, que ya la hemos reducido á matemática en su forma; adoptando primeramente el sistema de fuerzas mas sencillo posible (*fig.* 20), á saber, *el peso P del cuerpo que acciona verticalmente en su centro G de gravedad, y otra fuerza F que aplicada al mismo punto del móvil acciona paralelamente á la longitud BB' del plano inclinado, con tendencia á que el móvil suba.* Tanto en este sencillo sistema de fuerzas como siendo cualquiera la direccion de la potencia F, *el equilibrio exije y basta para ello la condicion de que la resultante N de F y P sea perpendicular al plano* BB', pues entonces esta resultante estará equilibrada por la resistencia de dicho plano (23).

Luego, representando GP el peso P del cuerpo y Gf la potencia F paralela á la longitud del plano inclinado, la diagonal GN del paralelógramo formado con dichas dos fuerzas deberá ser perpendicular á BB' en caso de equilibrio. Asi, en los triángulos rectángulos GNf y $B'BD$, los ángulos en f

y en B' son iguales por el paralelismo de sus lados uno á uno (*Comp. Geom.* 19); los ángulos en G y en D rectos por construccion, y por consiguiente (*comp. Geom.* 28, 4.ª) los terceros ángulos en N y en B iguales. Luego (*Comp. Geometría* 31), dichos triángulos GNf y $B'BD$ son semejantes; y comparando sus lados homólogos resulta, tomando GP por su igual fN, la proporcion de equilibrio

$$Gf : GP :: B'D : BB',$$

ó sea

$$F : P :: B'D : BB',$$

proporcion que, espresando a la altura $B'D$ y l la longitud BB', será finalmente

$$\left.\begin{array}{l} F : P :: a : l, \\ \text{á que corresponde la igualdad de productos } F\times l=P\times a. \end{array}\right\}(*)$$

Esta conclusion del razonamiento traducida á la lengua vulgar dice, que *la potencia paralela á la longitud del plano inclinado es al peso que equilibra del cuerpo asentado sobre dicho plano, como la altura de este es á su longitud.* De aqui se sigue que para equilibrar á un peso dado P, se necesita una potencia F tanto mayor cuanto mas grande sea la altura a del plano inclinado respecto de su longitud l, esto es, cuanto mayor fuere el ángulo de inclinacion $B'BD$, que crece con la razon $\frac{B'D}{BD}$, como se manifestó en el artículo precedente.

Por los mismos triángulos rectángulos semejantes GNf y $B'BD$ resulta, que N y P están relacionadas segun la proporcion

$$\left.\begin{array}{l} N : P :: b : l, \\ \text{ó lo que es lo mismo, segun la igualdad } N\times l=P\times b. \end{array}\right\}(**)$$

En donde se espresa que *la presion N contra el plano es al peso P como la base b del plano es á su longitud l.* De aqui se sigue que el sistema de fuerzas P y F dadas producirá contra el plano inclinado una presion N tanto mayor, cuanto menor sea la longitud l de dicho plano respecto de una base b constante, ó lo que es lo mismo, cuanto menor sea el ángulo de inclinacion, pues asi decrece l respecto de b hasta llegar á igualdad en caso de ser horizontal el plano.

Ultimamente, descomponiendo el peso P en dos fuerzas, una N perpendicular al plano inclinado y otra F' paralela á la longitud de este plano, resulta que F' es igual y directamente opuesta á F en caso de equilibrio entre F y P. Por lo cual, para que tal estado exista, basta que se verifique la igualdad de equilibrio

$$F=F'. \qquad (***)$$

48. Pero tanto en la relacion (*) de equilibrio entre F y P como en la (***) entre F y F', hemos prescindido de una tercera fuerza debida á la presion N, y que es (35) el rozamiento $n\times N$, que en la igualdad (***) hay que añadir á F' ó á F, segun el movimiento que se presuma en el cuerpo sea en sentido de F ó de F'. Luego, la verdadera igualdad de equilibrio, es decir, la que sería alterada por la mas pequeña ventaja de F ó F', debe ser una ú otra de las dos que siguen.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Para el equilibrio de ascenso} & F=F'+n\times N,\\ \text{y para el equilibrio de descenso} & F+n\times N=F'.\end{array}\right\}(****)$$

49. **Problemas** de equilibrio y de movimiento accionando la potencia F paralelamente á la longitud del plano inclinado (*fig.* 20). Si la potencia F recibiera un aumento suficiente en la primera de las igualdades (****), esta igualdad y el equilibrio á que pertenece cesarian de existir, adquiriendo el cuerpo movimiento ascensional en el plano inclinado; y si en la segunda de dichas igualdades recibiera F' un aumento suficiente, esta igualdad y el equilibrio á que pertenece cesarian de existir, adquiriendo el cuerpo movimiento descensional en dicho plano. De aqui nace que, para estudiar las circunstancias del movimiento de un cuerpo sobre plano inclinado, necesitamos primero calcular en cada caso el equilibrio segun la correspondiente ecuacion de las (****). Los ejemplos que siguen podrán servir de ensayo para que el estudiante aprenda el orden de operaciones que habrá de seguir en cualquier otro caso.

I.° Tratándose primeramente del movimiento ascensional, supongamos dadas las siguientes cantidades, para valuar la potencia F equilibrante por la primera de las igualdades (****).

Peso P del cuerpo móvil.................. 240 libras.

Base b del plano inclinado................. 8

Altura a del mismo...................... 4

Y por consiguiente, longitud l aproximativa... 9

Aplicando á este caso la igualdad (*), resulta para F', igual á F segun la (***), el valor $\frac{960}{9}$ libras.

Por la igualdad (**) resulta para N el valor

$$\frac{240 \times 8}{9} \text{ libras} \quad \text{ó sean} \quad \frac{1920}{9} \text{ libras.}$$

Y si por la tabla de rozamientos corresponde á las materias rozantes del móvil y del plano que n sea $\frac{14}{100}$, tendremos para el rozamiento $n \times N$ el valor

$$\frac{14}{100} \times \frac{1920}{9} \text{ libras,} \quad \text{ó sean} \quad \frac{2688}{90} \text{ libras.}$$

Con estos tres valores hallados, la primera de las igualdades (****) viene á ser

$$F = \frac{960}{9}^{\text{libr.}} + \frac{2688}{90}^{\text{libr.}}$$

Reduciendo á comun denominador estos dos quebrados, y sumándolos despues, la suma es $\frac{12288}{90}$, que vale próximamente 136 libras, valor de la potencia F que haya de equilibrar á la suma de resistencias F' y $n \times N$.

Hallado pues el valor 136 libras de la potencia F equilibrante, si se añade un esceso suficiente á este valor, el cuerpo adquirirá movimiento ascensional tanto mas veloz cuanto mayor sea dicho esceso; y si este sigue, la velocidad irá sucesivamente aumentándose. Pero si despues que el móvil haya adquirido cierto grado de velocidad cesa dicho esceso de F sobre la suma de F' y $n \times N$, el móvil seguirá desde entonces moviéndose con aquella velocidad adquirida, ni mas ni menos. En el arrastre de sillares de albañilería y de otros cuerpos, ascendiendo por plano inclinado, vemos diariamente ejemplos de estas modificaciones de la velocidad.

II.° Ya que estamos con la primera de las espresiones (****), á ella corresponde tambien el caso en que, *siendo horizontal el plano BB', se tratare de valuar la potencia F necesaria para equilibrar la resistencia.* En este caso, la presion N es todo el peso P, y nula su componente F'; por lo cual dicha primera igualdad (****) se reduce á $F = n \times P$, que transformada en

$$n = \frac{F}{P},$$

sirve para valuar n, dadas F y P. Asi están determinados los diversos valores del quebrado n para formar la tabla del artículo (35) y las mas completas que allí se citaron.

III.° *Para el movimiento descensional del cuerpo en el plano inclinado*, la segunda de las igualdades (****) nos dará el valor de F' equilibrante de la suma $F + n \times N$, que ahora se oponen á F'. Suponiendo por ejemplo que los datos son los mismos del caso I.°, dicha igualdad será

$$\frac{960}{9}^{\text{libr.}} + \frac{2688}{90}^{\text{libr.}} = F',$$

de que resulta para F' el valor aproximado 136 libras, lo mismo que antes resultó para F. Y por tanto, para que el cuerpo retenido por una fuerza F de $\frac{960}{9}$ libras mas el rozamiento de $\frac{2688}{90}$ libras adquiera movimiento descensional, se necesita que la fuerza F' que le obligue á ello sea algo mayor que 136 libras.

IV.° *En caso de que no exista la fuerza F*, la igualdad de equilibrio descensional queda reducida á

$$N \times n = F',$$

la cual nos dice que, para que el cuerpo abandonado á sí mismo en el plano inclinado esté en equilibrio de descenso, la componente F' del peso P de dicho cuerpo ha de ser igual á el rozamiento. Por ejemplo, en caso de que la componente F' sea 100 libras, el rozamiento $n \times N$ habrá de ser tambien 100 libras. De suerte que, si F' escede á un rozamiento de 100 libras, el cuerpo adquirirá movimiento descensional con tanta mayor velocidad cuanto mayor sea el esceso de F' sobre el rozamiento, y la velocidad irá cada vez en aumento mientras dicho esceso subsista.

Asi vemos precipitarse por las cuestas abajo los cuerpos abandonados á sí mismos; y para conseguir que bajen con velocidad constante sin precipitarse, hay varios artificios ingeniosos, con los cuales cuando el cuerpo ha principiado á moverse por el esceso de F', se agrega al rozamiento $n \times N$ otro nuevo rozamiento ó fuerza de retenida, á fin de equilibrar asi á la fuerza descensional, y lograr que desde entonces el cuerpo vaya bajando con movimiento uniforme.

Daremos fin á este artículo con una advertencia; á saber, que á fin de evitar el cabeceo del cuerpo en su movimiento, el punto de aplicacion de la potencia F en la vertical GP debe ser hallado segun los principios de los artículos (13 *y* 14), atendiendo á que F' acciona en G, y el rozamiento $n \times N$ en el plano BB'.

50. Hasta aqui hemos supuesto que la potencia F acciona paralelamente al plano inclinado, porque en efecto es el modo mas ventajoso. Pero hay ocasiones en que por necesidad tendremos que considerar F accionando paralelamente á la base (*fig.* 21). En este caso el paralelógramo de las fuerzas F y P es rectangular, su mitad NGf un triángulo rectángulo semejante al $BB'D$, y comparando resulta la proporcion en que a es altura y b base del plano inclinado,

$$F : P :: a : b,$$
y la correspondiente igualdad $F \times b = P \times a.$ $\Big\}$ (*****)

En donde vemos, que *la potencia F horizontal es al peso P del cuerpo en equilibrio sobre el plano inclinado como la altura de este es á su base.*

Tambien, descomponiendo el peso P en dos componentes, N' perpendicular y F' paralela al plano inclinado, y formando el correspondiente paralelógramo, resultan las proporciones

$$\left.\begin{aligned} N' : P :: l : b, \\ F' : P :: a : l. \end{aligned}\right\} (******)$$

Mas adelante necesitaremos emplear las tres proporciones de este artículo.

PARTE SEGUNDA.

Máquinas elementales derivadas de las simples.

Balanza y romana (lám. 3).

51. Balanza, es en realidad una palanca del primer género cuyos dos brazos son iguales (*fig.* 22), pues consta; 1.º De una barra derecha BB' con el eje de rotacion A en medio de la barra, en donde tiene perpendicularmente á ella una lengüeta ó *fiel Ah.* 2.º De dos platillos suspendidos con cordones ó cadenillas de las respectivas estremidades B y B', para colocar en uno de los platillos pesas, y en el otro el género cuyo peso se quiere valuar. Las condiciones esenciales de la máquina son, que los dos brazos iguales

BA, *B'A* pesen igualmente, y que tambien pese un platillo con sus cadenas tanto ni mas ni menos que el otro. El eje *A* de rotacion gira en un collarin ó cepo abierto comunmente en una pieza *DE* llamada *alcoba*, que para la pesacion se cuelga de un asidero fijo *D*. Por todas las dichas circunstancias, cuando la balanza está en reposo por sí, la barra *BB'* queda horizontal, y por consiguiente el fiel *Ah* vertical, asi como la alcoba *AD* por su propio peso. Luego, para que el peso *P* del género *O* puesto en un platillo sea igual á el peso *F* de la pesa puesta en el otro platillo, es preciso que con estas cargas añadidas á la máquina quede tambien horizontal la barra *BB'*, y de consiguiente vertical el fiel *Ah*, que tiene esta posicion cuando coincide con la vertical de la alcoba *AD*. Para cerciorarse de si la pesacion ha sido hecha bien, se vuelve á repetir la operacion cambiando el género y la pesa de un platillo al otro; y si aun asi está cabal el peso, será prueba de que la pesacion ha estado bien hecha.

Las balanzas y pesas para pesar materias preciosas y las dosis en los laboratorios químicos, requieren suma finura y precision.

52. ROMANA, viene á ser tambien una palanca del primer género (*fig.* 23), que se distingue de la balanza en que el brazo *AB'* del peso *P* es corto y de longitud invariable en cada romana, mientras el brazo *AB* de la pesa *F* puede ser tan corto como se quiera, y tan largo como permita esta porcion de barra por donde se hace correr la pesa *F*, llamada *pilon*, hasta el punto conveniente para que equilibre al peso del género colgado del otro estremo *B'* del brazo *AB'* constante. En esta máquina, el pilon de peso *F* constante puede equilibrar pesos muchísimo mayores, pues en caso de equilibrio se ha de verificar la proporcion (*) de la palanca (40)

$$F : P :: AB' : AB.$$

Siendo por ejemplo *F* de 10 libras, *P* de 50 libras y *AB'* de 6 pulgadas, la proporcion da para *AB* el valor

$$\frac{50 \times 6}{10} \text{ pulgadas, que son 30 pulgadas.}$$

Pero en la práctica no es necesario hacer este cálculo, pues la parte de barra en que se recorre la pesa para colocarla en el punto B que el equilibrio exija, está dividida en partes iguales en forma de serreta por el constructor de la máquina, de modo que cada raya corresponde á tanto ó cuanto peso de la materia colgada en B'. Entiéndase que el peso del collar anular del pilon está comprendido en el peso F, y que el peso de la porcion AH de barra está equilibrado con la suma de pesos del brazo constante AB' y el asidero ó colgadero del género. La construccion de romanas fieles no deja de ser obra propia de artistas finos é inteligentes.

Poleas (lám. 3).

53. Una rueda (*figs.* 24 *y* 26) cuyo cerco está en parte ceñido por un cordon $FBB'F'$, tirando de sus dos ramales las respectivas fuerzas F y F', de modo que la rueda pueda girar al rededor de su eje A, es la máquina llamada *polea* ó *garrucha*.

En la polea llamada *fija* (*figs.* 24 *y* 25), F es potencia, F' resistencia que opone el cuerpo M, y toda la carga de la máquina está retenida por un colgadero DE sostenido en un garfio D.

En la polea llamada *movible* (*figs.* 26 *y* 27), toda la carga está sostenida por las fuerzas F y F', pendiendo de su eje la resistencia N que opone el cuerpo M.

Estas dos poleas materiales se reducen á matemáticas, considerando cada una como un círculo movible al rededor de su centro A, por las fuerzas F y F' que contrariándose tiran de la línea flexible $FBB'F'$ ajustada al plano del círculo.

54. Polea fija (*figs.* 24 *y* 25). Sea BHB' la parte de circunferencia ceñida por el cordon, tirando la potencia F de un ramal y la resistencia F' del otro ramal en las direcciones respectivas FB, $F'B'$, tangentes por su naturaleza á la circunferencia en los puntos B, B'. Y como estos puntos están ligados al centro A con los rádios AB, AB' perpendiculares á las tangentes (*Geom.* 17) ó direcciones FB, $F'B'$ de las fuerzas F, F', resulta que la teoría de la polea fija viene á ser la misma de la palanca del primer género (41), y por tanto pertenece á ella la proporcion de equilibrio

$$F : F' :: AB' : AB.$$

Mas, aqui hay la particularidad de ser iguales los brazos AB y AB', la cual hace que el equilibrio de la polea fija consista en la igualdad

$$F = F'. \quad (*)$$

Esta conclusion tiene lugar, sea pequeña ó grande la porcion BHB' de circunferencia ceñida por el cordon, es decir, sean cualesquiera las direcciones de los ramales BF y $B'F'$: lo cual está en conformidad con la observacion hecha sobre la palanca angular y la recta (41).

La presion N que el eje A padece por las fuerzas F y F' se valua como en la palanca (42), pues el equilibrio se verifica en virtud de pasar por A la resultante Z de F y F'. Por lo cual, prolongando las direcciones FB y $F'B'$ de las fuerzas hasta su punto de concurso Z, tomando en estas dos rectas las partes Zb y Zb' iguales que representen los valores de F y F', y construyendo el paralelógramo; la diagonal Zz representará el valor de la presion N contra el eje A. Ya se sabe que en este paralelógramo de lados Zb y Zb' iguales, los triángulos Zbz y $Zb'z$ son isósceles idénticos. Tambien tirando la cuerda BB' del círculo, el triángulo BAB' es isósceles y semejante á cada uno de aquellos por igualdad de ángulos uno á uno (*Geom.* 30 *y* 28), á causa de que los ángulos b, b' y A son iguales por suplementarios del doble BZB'. Y comparando lados homólogos, hay la proporcion

$$Zb : Zz :: AB : BB',$$

ó bien, $\quad F : N :: AB : BB',$

ó sea, $\quad F \times BB' = N \times AB. \quad (**)$

En donde vemos que la potencia es á la presion como el rádio del círculo de la polea es á la cuerda del arco ceñido por el cordon. Y como en caso de ser paralelos los ramales (*fig.* 25) la cuerda BB' será diámetro (máxima cuerda), se sigue que en tal caso la presion N será máxima tambien respecto de la potencia F y de su igual resistencia F', y entonces resultará N igual á la suma de F y F'.

55. En el cálculo precedente hemos prescindido del peso de la rueda y de los ramales del cordon; mas en la polea

material pueden ser de alguna importancia estos pesos para aumentar la presion N que el eje padece, y de importancia el esceso del peso de un ramal respecto del otro para aumentar el peso del mas largo la fuerza que tire de él. Pero aun prescindiendo de esta diferencia de pesos de los ramales, el equilibrio en sentido de la potencia F ó de la resistencia F' exige que se cumpla la igualdad respectiva de las adjuntas (*fig.* 24);

$$\left.\begin{array}{ll}\text{en sentido de } F, & F\times AB = F'\times AB' + R\times At; \\ \text{en sentido de } F', & F\times AB + R\times At = F'\times AB';\end{array}\right\}(***)$$

espresando R el rozamiento ó producto $n\times N$ de la presion por el número n (35), y At el rádio del eje material de la polea, como tambien AB y AB' las distancias iguales desde A hasta el medio del grueso del cordon.

Cuando la máquina se halle tan á punto de moverse, como lo estará en caso de que una ú otra de estas igualdades resulte satisfecha por los precisos valores de sus cantidades; para que el movimiento principie en sentido de una de las fuerzas F ó F', bastará que el momento de esta fuerza sea algo mayor que la suma de momentos de la otra fuerza y del rozamiento R que acciona en el estremo t del rádio At del eje. Y por ello, para resolver cualquier problema de equilibrio ó de movimiento en que se trate de calcular el valor de F ó F', hay que valuar primero este rozamiento, como se hará en los siguientes particulares que vamos á proponer por ejemplos.

56. **Problemas** de equilibrio y de movimiento en la polea fija (*figs.* 24 *y* 25).

I.° *Valuar la fuerza F por la primera de las igualdades* (***) *con los datos adjuntos, en caso de que los ramales FB y F'B' sean paralelos* (fig. 25).

Peso F' que se haya de elevar..........	20 arrobas.
Presion N aproximativa $F+F'$ [1]......	40 arrobas.

[1] Suponiéndola igual á el duplo de F segun la fórmula (*), aunque en realidad será algo mayor á causa del esceso de F sobre F' como la fórmula primera de las (***) exige, y además, por el peso de la polea y de los ramales, con el cual no hemos contado.

Quebrado n multiplicador de N para el rozamiento $n\times N$.................... $\frac{24}{100}$.
Rádios AB y AB' de la polea desde el centro del eje á la mitad del grueso del cordon........................ 6 pulgadas.
Rádio At del eje..................... 1 pulgada.

Con estos datos, el rozamiento R ó $n\times N$ será $\frac{24}{100}\times 40$ arrobas, y su momento $\frac{24}{100}\times 40$ arrob.$\times 1$, en que se puede suprimir 1; y la primera de las igualdades (***) aplicada al caso viene á ser

$$F\times 6 = 20\times 6 + \frac{24\times 40}{100}.$$

Reduciendo á quebrado el conjunto $20\times 6 + \frac{24\times 40}{100}$, se convierte á $\frac{1296}{10}$; y partiendo este quebrado, ó lo que es lo mismo multiplicando su denominador por 6, resulta para la potencia F, equilibrante del peso F' y el rozamiento, el valor

$$\frac{1296}{60} \text{ arrobas, ó sean 21 á 22 arrobas.}$$

Con que, una potencia de mas de 21 á 22 arrobas elevará mediante la polea fija un peso de 20 arrobas.

II.° *Valuar F' siendo datos los mismos del problema precedente* (fig. 25).

La segunda de las igualdades (***), haciendo en ella $F=20$ arrobas, conduce á la solucion de que un peso F' de 21 á 22 arrobas equilibraria á la potencia F de 20 arrobas y el rozamiento. Pero si F' escede de 21 á 22 arrobas, vencerá á la potencia F de 20 arrobas y el rozamiento. De suerte que, si fuesen hombres los que accionasen como potencia de estas 20 arrobas, serían ellos elevados al descender el peso, á menos de que soltaran la cuerda para evitar el peligro, en cuyo caso el cuerpo de peso F' descenderia casi como dejado á su libertad.

57. Polea movil (*figs. 26 y 27*). En esta máquina ac-

cionan tres fuerzas, que son: la potencia F aplicada á un ramal del cordon, la tension F' del otro ramal cuyo estremo está asido á un punto fijo, y la resistencia N del cuerpo móvil M afianzado al colgadero AD, accionando N contra el eje A en la direccion NA. La fuerza N equilibrante de las F y F' debe ser igual y directamente opuesta á la resultante de ellas: luego, la resultante de F y F' pasa tambien por el eje A, y entre estas dos fuerzas hay la relacion de la palanca (41)

$$F : F' : : AB' : AB,$$

que por $AB' = AB$, se reduce como en la polea fija á la igualdad (*)

$$F = F'.$$

Para calcular la presion N se discurre lo mismo que se hizo en la polea fija, y asi se viene á deducir que en la móvil se verifica tambien la proporcion (**), esto es,

$$F : N : : AB : BB'.$$

En caso de ser paralelos los ramales (*fig.* 27), la cuerda BB' será diámetro, y N doble mayor que F' ó su igual F, esto es, $F' = \frac{N}{2}$ para el equilibrio en sentido de F, y $F = \frac{N}{2}$ para el equilibrio en sentido de F'.

Dando pues á F' ó á F este valor, tendremos las igualdades de equilibrio de la polea móvil, en sentido de la potencia F, ó de la resistencia F',

$$\left.\begin{aligned} F \times AB &= \frac{N}{2} \times AB' + R \times At, \\ \frac{N}{2} \times AB + R \times At &= F' \times AB', \end{aligned}\right\} \; (****)$$

espresando R el rozamiento $n \times N$, y At el rádio del eje material de rotacion, como tambien AB y AB' las distancias iguales desde el eje lineal A hasta el medio del grueso del cordon.

Cuando la máquina esté á punto de moverse, como lo estará en caso de resultar satisfecha una ú otra de estas igualdades por los precisos valores de los términos que contienen; si el momento $F \times AB$ de la primera igualdad, ó el $F' \times AB'$ de la segunda, recibe esceso capaz de vencer á la inercia, se pronunciará el movimiento, compuesto de rotacion al rededor de A y de traslacion en sentido ascendente ó descendente: motivo por que se llama móvil esta polea.

58. **Problemas** de equilibrio y de movimiento de la polea móvil.

I.° *Valuar por la primera de las igualdades* (****) *la potencia F necesaria para el equilibrio de la máquina, en caso de ser verticales los dos ramales* (fig. 27), *con los datos que siguen.*

Presion N, igual á el peso del móvil en este caso. 40 arrobas.
Rádio AB igual á AB' de la polea........... 6 pulgadas.
Rádio At del eje material................. 1 pulgada.

Factor n del rozamiento $n \times N$........... $\frac{24}{100}$.

Con estos datos serán; $\frac{N}{2} \times AB' = 120;$

$$n \times N, \quad \text{ó bien}, \quad R = 40 \times \frac{24}{100};$$

$$R \times At = 40 \times \frac{24}{100} \times 1 = 40 \times \frac{24}{100}.$$

Reduciendo á un solo término la suma de las partes 120 y $40 \times \frac{24}{100}$, será $\frac{1296}{10}$; y dividiendo este quebrado, ó lo que es lo mismo, multiplicando su denominador por 6 pulgadas, sale para la potencia F equilibrante de la resistencia activa y el rozamiento el valor

$$\frac{1296}{60} \text{ arrobas, ó 21 á 22 arrobas.}$$

Luego, una potencia algo mayor que esta elevará en la polea móvil de cordones paralelos un peso de 40 arrobas.

II.° *Valuar por la segunda de las igualdades* (****) *la fuerza F' equilibrante, siendo F de 20 arrobas, y los demás datos como en el problema anterior.*

El cálculo conduce á la solucion de que una fuerza F' de 21 á 22 arrobas equilibraria á un peso de 40 arrobas. Luego, en caso de ser F' mayor, daria movimiento á la máquina.

59. **Observaciones** acerca de las dos poleas fija y móvil, ambas materiales.

1.ª Por los dos ejemplos primeros de los artículos (56) y (58) vemos que, para elevar en la polea fija un cuerpo M cuyo peso es F', se necesita una potencia F algo mayor que F', y que para elevar en la polea móvil un cuerpo M cuyo peso es doble que en la fija, basta una potencia algo mayor que la mitad de este doble peso; es decir, que en la móvil tiene la potencia una ventaja doble respecto de la fija.

2.ª Veamos ahora cuánto ascenso ganará el cuerpo M en cada una de las dos poleas durante un mismo tiempo. Desde luego es evidente que en ambas poleas el ascenso ganado por M es tanto ni mas ni menos cuanto se acorte el ramal $B'F'$. Y como en la polea fija el ramal $B'F'$ se acorta cuanto el BF se alarga, resulta que en esta polea el cuerpo M sube tanto como un punto cualquiera del ramal $B'F'$ en cada unidad de tiempo. Pero en la polea móvil, un punto cualquiera del ramal BF asciende doble de lo que se acorta el ramal $B'F'$, y por consiguiente doble de lo que asciende el cuerpo M en cada unidad de tiempo. Luego, lo que en la polea móvil se gana de potencia se pierde de avance ó adelanto de camino, respecto de las cantidades análogas en la polea fija durante iguales tiempos.

Aparejos ó máquinas compuestas de poleas fijas combinadas con movibles (lám. 4).

60. Hay diversos sistemas de esta clase. Unos tienen mas poleas movibles que fijas, como por ejemplo el representado en la *figura* 1, compuesto de una polea fija BB', cuyo ramal de resistencia F' es de potencia para la polea móvil $B''B'''$, cuya resistencia N es potencia de otra polea móvil $B^{IV}B^{V}$, etc. Otros tienen igual número de poleas fi-

jas que de movibles, como por ejemplo el llamado de *moton*, cual se representa en la *figura* 2, compuesto de un conjunto de poleas fijas en fila con un eje comun de rotacion, y cuyos cordones pasan á ceñir á las respectivas movibles del moton puestas en fila tambien con su eje comun. Las poleas fijas están colocadas en un receptáculo inmoble HJ, suspendido de un agarradero fuerte D, y las poleas movibles están colocadas en otro receptáculo KL movible por traslacion, y que en su movimiento lleva tras de sí al cuerpo M agarrado con garfios que vienen de KL. Uno de los estremos del cordon está atado á la pieza HJ, y el otro estremo del cordon es donde acciona la potencia F en una de las poleas fijas.

Facilmente se puede calcular la relacion que, sin contar con los rozamientos ni con los pesos propios de los aparejos, tiene la potencia F con la resistencia que oponga el cuerpo M que se haya de mover por medio de estas máquinas, que han sido inventadas para obtener en favor de la potencia mayores ventajas que en una sola polea movible, aunque con mas pérdida de avance del cuerpo M, y por consiguiente gastando mas tiempo en su marcha desde un punto á otro determinados. Vamos pues á indagar las mencionadas relaciones en cada uno de los aparejos de las *figuras* 1 *y* 2, suponiendo paralelos los ramales de cordon en las poleas movibles.

1.° En el sistema de la *figura* 1 se verifican las siguientes igualdades de equilibrio, la primera segun el artículo (54), y las demás segun el artículo (57), considerando paralelos los dos ramales de cordon de cada polea móvil

$$F = F', \qquad F' = \frac{N}{2}, \qquad N = \frac{N'}{2}, \ldots.$$

y asi sucesivamente si hubiese mas poleas movibles.

Multiplicando estas igualdades miembro por miembro, se tiene la compuesta

$$F \times F' \times N \times \ldots. = F' \times \frac{N}{2} \times \frac{N'}{2} \times \ldots.,$$

que suprimiendo factores comunes se reduce á

$$F=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times N'=\frac{1}{2^2}\times N',$$

en caso de que sean dos las poleas movibles.

Si estas fuesen tres, resultaria

$$F=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ N''=\frac{1}{2^3}\ N''.$$

Y en general, si el número de poleas movibles fuese n, en cuyo caso espresaremos por $N^{(n)}$ la resistencia final, ó sea la opuesta por el cuerpo que se trata de mover, resultaria la igualdad de equilibrio

$$F=\frac{1}{2^n}\times N^{(n)}\ ;\qquad \text{ó bien,}\qquad \frac{F}{N^{(n)}}=\frac{1}{2^n}.$$

Por esta demostracion vemos, que en un aparejo compuesto de una polea fija, y n movibles de cordones paralelos, *la potencia F aplicada á la polea fija, es á la resistencia $N^{(n)}$ aplicada al eje de la última polea móvil, como la unidad es al número 2^n que resulta elevando el 2 á la potencia del grado n.* De suerte que, en caso de dos poleas movibles, la potencia F equilibrará una resistencia cuatro veces mas fuerte que F.

Pero esta gran ventaja de la potencia es á espensas del tiempo necesario para que el cuerpo resistente camine un espacio determinado, ó lo que es lo mismo, caminando menos en un tiempo determinado. En efecto, puesto que segun el artículo (59) en cada polea móvil tanto como gana la potencia pierde de avance la polea, se sigue que en el aparejo compuesto de una polea fija y una móvil, el cuerpo atado al eje de este avanzará la mitad de lo que avanzaria si estuviere atado á un ramal de la polea fija; que siendo dos las poleas móviles, el cuerpo avanzará la cuarta parte de lo que avanzaria si estuviese atado á un ramal de la polea fija, etc.

2.º En el sistema de la *figura* 2, espresando F la potencia aplicada al ramal de la primera polea fija, y P el peso del cuerpo M pendiente del moton, el peso P está repartido en $2n$ componentes paralelas iguales á F, dirigidas por los $2n$ ramales paralelos de las n poleas móviles. Con que, hay la ecuacion de equilibrio

$$P = 2nF, \quad \text{de donde} \quad \frac{F}{P} = \frac{1}{2n};$$

la cual dice, *que la potencia aplicada á la primera polea fija es á la resistencia P aplicada al moton, como la unidad es al duplo del número n de poleas móviles.* De suerte que, en caso de $n = 3$, será $F = \frac{P}{6}$.

Pero esta ventaja de la potencia es á espensas del tiempo necesario para que el cuerpo del peso P avance un espacio determinado, ó lo que es lo mismo, caminando menos durante un tiempo determinado. En efecto, si el aparejo tuviere una polea fija y una móvil, el cuerpo avanzará (59) la mitad del espacio que avanzaria si estuviese aplicado al ramal de la polea fija. Si hay dos móviles en el aparejo, el cuerpo avanzará la cuarta parte del espacio que avanzaria si estuviese aplicado á un ramal de la polea fija. Si hay tres móviles, el cuerpo avanzará la sesta parte de lo que avanzaria si estuviese aplicado á un ramal de la polea fija, etc.

Torno (lám. 4).

61. La máquina compuesta de dos poleas fijas ó cilindros C y C' con un eje comun EE' de rotacion (*fig.* 3), encajado en collares fijos abiertos en los apoyos D y D', es un *torno.* Las fuerzas F y F' contrarias, que por ahora supondremos aplicadas á dos cordones FB y $F'B'$ ceñidos á los respectivos cilindros, accionan con tendencia á vencerse recíprocamente, á manera que en la polea fija; y para distinguir las dos actuales, llamaremos *rueda* á la C de mayor diámetro, y *cilindro* á la C' de menor diámetro.

62. Para esplicar la teoría del equilibrio y del movimiento del torno material, le consideraremos reducido primeramente á matemático, compuesto de un círculo C, seccion plana de la rueda; otro círculo C', seccion plana del cilindro paralela á la primera; una recta EE' que pasando

por los centros A y A' de los círculos perpendicularmente á ellos, representa el eje material de quien es eje matemático; y finalmente, dos fuerzas F y F' que tiran de las líneas flexibles FB y $F'B'$, ajustadas á los planos de las circunferencias y tangentes á estas. Supongamos todavía que en el círculo grande C del torno matemático está descrito desde su centro A otro círculo c igual á el pequeño C', y que tenemos aplicada á la circunferencia c en b una fuerza Q igual á F' y del mismo sentido, contraria á F. Los rádios AB de la rueda y Ab del cilindro descritos en un mismo plano, y las fuerzas contrarias F y Q con las direcciones tangentes en B y b á las circunferencias, constituyen una palanca del primer género con los brazos desiguales AB, Ab perpendiculares á las direcciones de las fuerzas F, Q, y por consiguiente há lugar la igualdad de equilibrio del artículo (40)

$$F \times AB = Q \times Ab,$$

la cual, á causa de $Q = F'$ y $Ab = A'B'$ y por consiguiente $Q \times Ab = F' \times A'B'$, viene á ser como

$$F \times AB = F' \times A'B',$$

provenida de la proporcion

$$F : F' :: A'B' : AB, \quad (*)$$

demostracion de que en *el equilibrio del torno matemático, la fuerza F aplicada á la rueda es á la F' aplicada al cilindro como el rádio de este es al rádio de la rueda.*

63. Para el cálculo precedente no hemos tomado en cuenta los rozamientos del eje material en sus dos apoyos E y E', rozamientos debidos á las presiones N y N' que padecen por el peso del torno y por las fuerzas F y F'. El peso P del torno gravitará en su centro de gravedad, centro que por la simetría de este cuerpo se halla en un punto G del eje matemático EE' mas ó menos cerca de E que de E', segun que la parte de torno comprendida desde la vertical de G á E sea mas ó menos pesada que la comprendida desde dicha vertical á E'.

La resultante X de las fuerzas F y F' ofrece dificultades para determinar su valor y direccion. Pero considerando verticales dichas fuerzas, y trasladadas á los centros

A y A' respectivos, será $X = F + F'$ aplicada á un punto H del eje EE'; y entonces, la resultante Z de P y X será $Z = P + F + F'$, aplicada á un punto K de EE'.

Suponiendo por ejemplo $A'B'$ de 6 pulgadas, AB de 5 pies y F de 3 arrobas, la igualdad (*) da para F' el valor

$$\frac{3\ arrobas \times 60\ pulgadas}{6} \text{ ó sea 30 arrobas.}$$

Y si el peso P de la máquina es 15 arrobas, Z será 48 arrobas.

Despues de haber determinado en la máquina las fuerzas X y Z y sus puntos de aplicacion H y K por la teoría de las fuerzas paralelas (13), hay que repartir el peso Z en dos paralelas, una N en el apoyo E y otra N' en el apoyo E', como está esplicado en el artículo (20, III), y la proporcion será

$$N : N' :: KE' : KE, \qquad (**)$$

juntamente con la igualdad $KE + KE' = EE'$.

A fin de hallar prácticamente N y N', divídase EE' en tantas partes iguales como unidades de peso tenga Z, que supongamos de 48 arrobas; y asi la razon $N : N'$ será la misma que resulte entre el número de divisiones de la parte KE' del eje y el número de divisiones que resulten á KE. Suponiendo por ejemplo que de las 48 partes iguales de EE' toquen 20 á KE' y 28 á KE, tendremos valuadas las presiones, N de 20 arrobas en E, y N' de 28 arrobas en E'.

Halladas ya N y N', los rozamientos serán $n \times N$ y $n \times N'$, espresando n el factor quebrado del rozamiento que dieren las tablas, y que supondremos ser uno mismo para los dos apoyos, por ser las materias rozantes en E de la misma naturaleza que en E'. Y puesto que Z equivale á la suma de N y N', se sigue que $n \times Z$ es igual á la suma de $n \times N$ y $n \times N'$: por lo cual emplearemos con preferencia la espresion $n \times Z$ del rozamiento del torno material en lo que sigue.

Para que el torno cuyo eje material tenga el rádio Et esté á punto de moverse en sentido de F ó de F' contando con el rozamiento, es necesario que añadiendo en la igualdad (*) á $F' \times A'B'$ ó á $F \times AB$ el momento $n \times Z \times Et$, resulte una ú otra de las adjuntas igualdades de equilibrio

$$\left.\begin{array}{ll}\text{en sentido de } F, & F\times AB = F'\times A'B' + n\times Z\times Et \\ \text{en sentido de } F', & F\times AB + n\times Z\times Et = F'\times A'B'\end{array}\right\}(***)$$

64. **Problemas** *de equilibrio y de movimiento.* En un torno construido, los rádios AB, $A'B'$, Et, son determinados, por lo cual el problema consistirá en hallar F ó F'. Pero como en las igualdades (***) existe tambien Z, hay que valuar antes Z aproximadamente, computando primero la desconocida F ó F' por la igualdad (*), esto es, la fuerza del equilibrio sin contar con el rozamiento, como se ha hecho en el ejemplo del artículo precedente á propósito para ahora.

I.° *Determinar F segun la primera de las igualdades (***) de equilibrio, despues de haberle computado segun la igualdad (*) para determinar Z aproximadamente.* Sean

Rádio $A'B'$ del cilindro.................	6 pulgadas.
Rádio AB de la rueda....................	5 pies.
Fuerza F accionante en la rueda segun la espresion (*)......................	3 arrobas.
Peso P del torno........................	15 arrobas.
Fuerza F' accionante en el cilindro.......	30 arrobas.
Z ó suma de F, F', P................	48 arrobas.
Factor n del rozamiento..................	$\frac{10}{100}$
Rádio Et del eje material................	3 pulgadas.

Con estos datos la primera igualdad (***) viene á ser

$$F^{\text{arrs.}}\times 60^{\text{pulg.}} = 30^{\text{arrs.}}\times 6^{\text{pulg.}} + \frac{10}{100}\times 48\times 3,$$

de la cual, haciendo las operaciones aritméticas indicadas en ella, resulta para F el valor

$\frac{1944}{600}$ arrobas, que vale 3 arrobas y 6 libras.

II.° *Determinar F' por la segunda de las igualdades* (***) *de equilibrio con los mismos datos del problema precedente, siendo ahora F de 3 arrobas, y hallando por la igualdad* (*) *ser F' de 30 arrobas, á fin de valuar Z que asi resulta de 48 arrobas.*

Con estos datos tendremos la igualdad de equilibrio

$$3\times 60+\frac{10\times 48\times 3}{100}=F'\times 6:$$

y haciendo las operaciones aritméticas indicadas en ella, resulta para F' el valor

$$\frac{1944}{60}$$ que vale 32 *arrobas y* 10 *libras.*

III.° Si en las igualdades (***) pertenecientes al equilibrio del torno á punto de pronunciarse el movimiento, se alterase la relacion que entre los elementos de ellas hay para el objeto, claro está que cesará de existir aquel tan preciso estado, bien sea por mayoría de $F\times AB$ en la rueda ó bien sea por mayoría de $F'\times A'B'$ en el cilindro.

En un torno dado, las cantidades variables son F y F'; por lo cual, si valuada una relativamente á la otra por la respectiva igualdad de equilibrio (***) recibe un aumento pequeño suficiente, la máquina principiará á moverse. Luego, *para que el torno con los datos del problema* I.° *se ponga en movimiento en sentido de F aplicada á la rueda, bastará que esta fuerza sea algo mayor que* 3 *arrobas y* 6 *libras*, mientras que, si no existiera rozamiento, bastaria que la fuerza F escediese de 3 arrobas. Y *para que el torno* con los datos del problema II.° se ponga en movimiento en sentido de F' aplicada al cilindro, bastará que esta fuerza sea mayor que 32 arrobas y 10 libras, aunque, si no existiera rozamiento, bastaria que F' escediese de 30 arrobas.

65. *Consideraciones* acerca del movimiento del torno. Patentizado ya que la teoría de esta máquina se conforma con la de la palanca, se comprende facilmente que aqui deben tener lugar las observaciones que hicimos en el artículo (45).

1.ª La velocidad del movimiento inicial del torno será tanto mas rápida, cuanto mayor sea el esceso del momento de la fuerza moviente F ó F' respecto de la suma de momentos de las fuerzas resistentes, que son la otra de dichas fuerzas y el rozamiento.

2.ª Desde el principio del movimiento la velocidad irá creciendo sucesivamente, si subsiste siendo mayor el momento de la fuerza moviente que la suma de momentos de las resistentes. Pero si, desde el instante en que la velocidad llegue á ser cual conviene para el régimen de la máquina, se suprime el esceso de la fuerza moviente sobre las resistentes, ya desde entonces la máquina se moverá sin ganar ni perder velocidad; es decir, con velocidad constante, ó lo que es lo mismo, con movimiento uniforme adoptado para el régimen. De suerte, que este movimiento durará mientras en la máquina se verifique la primera de las igualdades (***) si F es fuerza moviente, y la segunda de ellas si es F' la fuerza moviente.

3.ª En caso de que la velocidad establecida por la supresion del esceso de la potencia sobre las resistencias fuere demasiado rápida para el régimen, se moderará disminuyendo algun tanto la fuerza moviente mientras llega la velocidad á disminuirse lo necesario, y restituyendo entonces á la fuerza moviente la parte que se la quitó. Pues asi la máquina seguirá despues con aquella velocidad misma, por haberse restituido á la fuerza la parte quitada provisionalmente, y que la es necesaria para que se verifique la respectiva condicion (***) de equilibrio, y por consiguiente la constancia de la velocidad segun el nuevo régimen adoptado.

4.ª Cuando se quiere que la máquina cese de andar, se suprime del todo la fuerza moviente; y desde entonces irá la velocidad aminorándose, por las resistencias que sin oposicion siguen trabajando, hasta cesar del todo el movimiento.

66. A la máquina que en general hemos llamado torno, pertenecen las muchísimas variedades con que el movimiento circular de la rueda produce movimiento circular tambien del cilindro, ó inversamente, para comunicarse de este á aquel. Lo primero sucede generalmente en las máquinas llamadas ruedas hidráulicas y otras muchas; y lo segundo, para comunicar el movimiento desde el cilindro de un torno á la rueda ó al cilindro de otro torno. En este último caso cada torno de los dos que se comunican tiene su respectivo eje, y uno de estos ejes puede ser paralelo ó perpendicular al otro, y aun ser oblícuos.

Los dobles tornos para tornear, barrenar, etc., suelen tener ejes paralelos; y para comunicar un dulce movimiento de un torno al otro se emplea la cuerda sin fin de que se hizo mencion en el artículo (37). Para ciertas obras en que se necesitan fuerzas enormes, la cuerda sin fin apenas puede rozar con la energía suficiente, y en tales casos hay que comunicar el movimiento de un torno al otro por el método llamado de *engranaje*. Este método consiste en que una rueda de un torno y un cilindro del otro torno, erizados de dientes en sus cercos (*fig.* 4), se comuniquen el movimiento engargantándose los dientes del que impele en los dientes del impelido, debiéndose siempre procurar que el encuentro se verifique sin golpeo. Hay varios sistemas de engranajes, cuyas descripciones principales pueden verse en mi tratado sobre el *trabajo de las máquinas.*

Tambien al fin de este cuaderno haremos mencion de los engranages, pero ya que estamos hablando de combinaciones de tornos, conviene decir ahora que la rueda y el cilindro de cada torno supondremos convertidos en una *rueda dentada* grande y otra pequeña llamada *piñon*, y que estos tornos se combinan de manera que el piñon de un torno esté engranado con la rueda de otro, como representa por ejemplo la *figura* 4.

Refiriéndonos pues á esta combinacion, supongamos F la fuerza aplicada á la rueda del primer torno, y F' la resistencia aplicada á su piñon. En el siguiente torno será F' la potencia aplicada á la rueda, y supongamos F'' la resistencia aplicada á su piñon. En el tercer torno será F'' la potencia aplicada á la rueda, y supongamos F''' la resistencia aplicada á su piñon, etc. Sean tambien R y r los rádios de la rueda y del piñon del primer torno; R' y r' los rádios análogos del segundo torno; R'' y r'' los del tercero; etc. Y las proporciones de equilibrio parciales, sin contar con los rozamientos, serán (62),

$$F : F' :: r : R$$

$$F' : F'' :: r' : R'$$

$$F'' : F''' :: r'' : R''$$

etc., etc.

Multiplicando término por término estas proporciones y suprimiendo factores comunes en la razon compuesta de fuerzas, resulta

$$F : F''' :: r \times r' \times r'' : R \times R' \times R''.$$

Y esta proporcion dice, que en una combinacion de tornos ligados de manera que el piñon de uno engrane en la rueda de otro, *la fuerza aplicada á la rueda del primer torno es á la resistencia aplicada al piñon del último torno, como el producto de rádios de todos los piñones es al producto de rádios de todas las ruedas.*

Pero la gran ventaja que asi resulta á la potencia F respecto de la resistencia F''', va acompañada de la desventaja en la economía de tiempo necesario para que dé cada vuelta el torno á quien está F''' aplicada. En efecto, por ser condicion precisa de los engranages, que además de la igualdad de dientes y de sus huecos en la rueda y el piñon engranados, los números D dientes de la rueda y d dientes del piñon sean proporcionales á las circunferencias C y c, ó lo que es lo mismo á los rádios R y r; se sigue que en un tiempo dado, los números de revoluciones ó vueltas del piñon y de la rueda engranada con él estarán en razon inversa de los números de sus dientes respectivos, ó lo que es lo mismo, en razon inversa de sus rádios. Suponiendo pues n el número de vueltas del primer torno cuyo piñon tiene el rádio r, el segundo torno cuya rueda tiene el rádio R' dará el número n' de vueltas correspondientes á la proporcion

$$n : n' :: R' : r.$$

Siendo n' el número de vueltas del segundo torno cuyo piñon tiene el rádio r', el número n'' de vueltas del tercer torno cuya rueda tiene el rádio R'' será cual exige la proporcion

$$n' : n'' :: R'' : r'.$$

El mismo razonamiento es aplicable para deducir del número n'' de revoluciones del tercer torno el número n''' de revoluciones del cuarto torno, y asi sucesivamente. Mas nuestro objeto actual es hallar la razon de los números de vueltas que en un mismo tiempo darán los tornos primero y último; para lo cual, multiplíquense las proporciones término por término, y suprimiendo factores iguales en la razon compuesta de los números de vueltas, tendremos para la combinacion de tres tornos

$$n : n'' :: R' \times R'' : r \times r'.$$

En donde vemos que, *mientras el torno último á cuyo piñon ó cilindro está aplicada la resistencia F''', da el número de vueltas espresado por el pequeño producto $r \times r'$ de radios de los piñones primero y segundo, el torno primero á cuya rueda está aplicada la potencia F tendrá que dar el número de vueltas espresado por el gran producto $R' \times R''$ de radios de las ruedas segunda y tercera.*

Si por el contrario, fuese potencia la fuerza F''' aplicada al piñon ó cilindro del tercer torno, y resistencia la F aplicada á la rueda del primer torno; las dos proporciones compuestas ya deducidas manifiestan, que la potencia F''' sería mayor que la resistencia F en razon del producto de los rádios de todas las ruedas al producto de los rádios de todos los piñones, pero que el número de vueltas del torno tercero sería menor que el número de vueltas del torno primero, en razon del producto de rádios de los piñones primero y segundo al producto de rádios de las ruedas segunda y tercera.

Todas las conclusiones que se han deducido para los tornos de engranages son aplicables igualmente á los tornos lisos, que se mueven ligando con cuerda sin fin (37, IVª) el cilindro de un torno á la rueda de otro torno, el cilindro de este á la rueda de otro, y asi sucesivamente, desde el primer torno á cuya rueda esté aplicada una fuerza F hasta el último torno á cuyo cilindro esté aplicada la fuerza contraria F''', como en el sistema de engranages (*fig.* 4).

Rosca (lám. 4).

67. Si en la superficie lateral de un cilindro recto MM' de base circular (*figs.* 5 *y* 6) se labra un filete uniforme $E E_{,} E' E_{,,} \ldots$ prismático cuadrangular (*fig.* 5), ó triangular (*fig.* 6), de modo que tenga el filete en todos sus puntos

la misma inclinacion respecto del eje *CC'* del cilindro, resulta *rosca* en la superficie, y la pieza se llama *tornillo.* Si la rosca de este *macho* se estampa en la pared de un cilindro hueco abierto en una pieza *HH*, resulta moldeada en esta otra rosca que se llama *tuerca* ó *hembra* del tornillo. Como el filete saliente ha impreso uno cóncavo de sus mismas dimensiones en la tuerca, bien se concibe que estando inmoble una de estas piezas, que por ejemplo sea la tuerca, no se puede mover el tornillo de otro modo que girando al rededor del eje *CC'*, al mismo tiempo que resbala el asiento de su filete sobre el de la tuerca, á manera que un cuerpo sobre el plano inclinado; y de aqui resultará el ir avanzando el tornillo en la direccion *CC'* hácia uno ú otro de los estremos de esta durante su movimiento giratorio. Si el tornillo fuere quien estuviese inmoble, la tuerca no se podria mover sino resbalando el asiento de su filete sobre el del filete del tornillo al rededor del eje *CC'*, al mismo tiempo que avanzando hácia uno ú otro de los estremos.

68. Considerando al filete *EE,E'*..... reducido á línea, esta formará una figura llamada *espiral en hélice* (*figura* 7), que se distingue de la *espiral plana* (*Comp. de Geom.* 108), como se distingue la figura de un alambre enroscado á lo largo de la superficie lateral de un cilindro, respecto del mismo alambre enroscado sobre un plano. Esta hélice lineal es quien sirve de guia para formar la de relieve ó filete; y vamos á manifestar el modo de trazarla, adoptando antes la nomenclatura propia. Cada vuelta completa, como por ejemplo la *EE,E'*, es un *paso de la rosca;* la distancia constante, como por ejemplo *EE'*, que debe haber de un paso á otro, es *altura* del paso de la rosca.

Por los rudimentos de Geometría sabemos (*Compendio de Geometría*, 82), que la superficie lateral del cilindro recto *MM'* (*fig.* 7) desarrollada (*fig.* 8), es un paralelógramo rectangular de la misma altura que el cilindro, y cuya base *"EE"* es la circunferencia de la base del cilindro estendida en línea recta. Si este desenvolvimiento fuera hecho despues de estar exactamente trazada la hélice lineal sobre la superficie del cilindro, la hélice se estenderia en una série de líneas rectas, como la recta *'EE* desenvolvimiento del paso *EE,E'*, como la recta *''EE*, desenvolvimiento del segundo paso *E'E,,E''*, y asi sucesivamente; resultando la hélice toda desenvuelta en la série de rectas paralelas $'EE$, $''EE'$, etc. Luego, para dibujar sobre la superficie lateral de un cilindro recto MM' cualquiera (*fig.* 7) la espiral lineal $EE, E'E_{\prime\prime}E''$...., se traza sobre un papel muy delgado el paralelógramo rectangular (*fig.* 8), desenvolvimiento de dicha superficie; se divide su altura en tantas partes iguales EE', $E'E''$,.... cuantos pasos haya de tener la hélice comprendidos en aquella altura; se marcan tambien en el lado opuesto los puntos divisorios $'E$, $''E$,....; y tirando las oblícuas $'EE$, $''EE'$....., estas serán las que, ciñendo al cilindro (*fig.* 7) con el papel en que estén trazadas, marcarán la hélice lineal que ha de servir de guia para labrar la rosca, prismática, cuadrangular (*fig.* 5) ó triangular (*fig.* 6); operacion que los torneros practican por medio de una herramienta ó buril llamado *peine*, que se mueve en sentido longitudinal del cilindro mientras el torno sigue con movimiento circular.

Hay otros modos ingeniosos de construir con máquina tornillos y tuercas de ambas clases, y de diámetros y pasos cuan grandes ó pequeños se quieran, sin trazar en la superficie del cilindro la espiral ó hélice. Los tornillos y las tuercas de pequeño diámetro hasta de $1\frac{1}{2}$ pulgadas se construyen con *terraja*, que es una tuerca de acero templado para enroscar el tornillo, ó un tornillo de acero templado para construir la correspondiente tuerca. Mas los tornillos y las tuercas de grandes diámetros se labran á torno y buril, arreglando los movimientos rectilíneo de este y circular de aquel segun conviene para el objeto.

69. Suponiendo la rosca material convertida á lineal, su desenvolvimiento representado en la *figura* 8 nos va á servir para esplicar la teoría del equilibrio y del movimiento de esta máquina.

Al principio se indicó que tanto el tornillo móvil como la tuerca móvil participan de dos movimientos; de rotacion al rededor del eje CC', como un torno, al mismo tiempo que de traslacion á lo largo de esta línea. Y por tales circunstancias, la teoría de esta máquina comprende la teoría del torno y juntamente la de un cuerpo sobre plano inclinado.

En caso de ser móvil el tornillo y fija la tuerca (*fig.* 5), la potencia F aplicada al punto B de una barra CB arraigada en el centro C de la base del tornillo, y la resistencia P que en direccion del eje CC' se opone al movimiento de traslacion, constituyen el sistema. Y en caso de ser móvil la tuerca y fijo el tornillo (*fig.* 6), la potencia F aplicada á un punto B de la barra arraigada en la pieza de tuerca, y la resistencia P que accionando en esta pieza en direccion de CC' se opone al movimiento de traslacion de ella, constituyen el sistema. En ambos casos supondremos que la direccion de la barra es perpendicular á CC', ó lo que es lo mismo, á la direccion de P, y aun supondremos que P sea un peso, ó bien que CC' es vertical, y de consiguiente CB horizontal. Además, prolongando BC hasta B' (*figs.* 5 *y* 9), el equilibrio entre F y P no se altera aunque se apliquen á B' dos fuerzas horizontales Q y Q' directamente opuestas é iguales entre sí, la Q en sentido favorable á F, y la Q' en sentido contrario.

Tomando primeramente en consideracion el equilibrio respectivo al plano inclinado (*fig.* 10), como un elemento que es de la máquina, el peso P existe sobre los asientos de la rosca; de suerte que á cada paso de rosca corresponde una parte p de P, asi como de la fuerza Q paralela á la base del tornillo corresponde á cada paso de rosca una parte q. Por lo cual, en caso de equilibrio respectivo al plano inclinado, se ha de cumplir la igualdad (*****) del artículo (50) entre la potencia q, resistencia p, altura a del paso de rosca, y circunferencia b de la base del cilindro estendida en línea recta,

$$q : p :: a : b.$$

Y como la razon $q : p$ de las fuerzas parciales respectivas á cada paso de rosca es indudablemente igual á la razon $Q : P$ de las fuerzas totales, podemos sustituir esta última en lugar de aquella, y asi resultará la proporcion de equilibrio para el plano inclinado,

$$\left.\begin{array}{ll} & Q : P :: a : b, \\ \text{ó bien la igualdad} & Q \times b = P \times a. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Considerando ahora el equilibrio respectivo al torno (*fig.* 9), que es un segundo elemento de la máquina, será CB el rádio de la rueda ó brazo de palanca de la potencia F, y CB' el rádio del cilindro ó brazo de palanca de la resistencia Q', igual y directamente opuesta á Q. Supongamos pues f la parte de potencia que de F acciona para el equilibrio del torno, respectiva á cada paso de rosca, como tambien q' la parte de resistencia que de Q' acciona en contra, y tendremos por la proporcion (*) del torno (62) la respectiva á cada paso de rosca

$$f : q' :: CB' : CB.$$

La razon $CB' : CB$ de los rádios es igual á la razon $b : L$ de sus circunferencias, espresando como antes b la circunferencia de la base del cilindro y L la circunferencia de la rueda que describe el rádio CB en la vuelta, y asi la proporcion anterior viene á ser

$$f : q' :: b : L.$$

Tambien la razon $f : q'$ entre las fuerzas parciales respectivas á cada paso de rosca es igual á la razon $F : Q'$ de las fuerzas totales respectivas á todo el tornillo; por lo cual, escribiendo Q en vez de su igual Q', tendremos

$$\left.\begin{array}{l} F : Q :: b : L, \\ F \times L = Q \times b. \end{array}\right\} (2)$$

ó bien la igualdad

Ultimamente, por ser $Q \times b$ igual á $P \times a$ en la igualdad (1), y tambien la misma cantidad $Q \times b$ igual á $F \times L$ en la (2), resulta la igualdad final de cantidades iguales á una tercera,

$$\left.\begin{array}{l} P \times a = F \times L, \\ F : P :: a : L, \end{array}\right\} (*)$$

que da la proporcion

en caso de ser móvil el tornillo y fija la tuerca.

Veamos ahora cuál será la relacion de equilibrio en caso de ser móvil la tuerca y fijo el tornillo (*fig.* 6), suponiendo las mismas que antes y representadas con las mismas letras las cantidades respectivas. Razonando como en el caso precedente, vendremos á deducir para el equilibrio del plano inclinado la misma espresion (1), y para el equilibrio del torno la misma espresion (2); á que se sigue ser cierta para el equilibrio de la máquina, en caso de ser móvil su tuerca, la misma espresion (*) que resultó en el caso de ser móvil el tornillo.

Luego, *en el equilibrio de la rosca, la potencia F que acciona en el tornillo ó en la tuerca perpendicularmente al eje CC′ de rotacion, es á la resistencia P que acciona en direccion de este eje, como la altura a del paso de rosca es á la circunferencia L descrita por el punto de aplicacion B de F, con rádio igual á BC.*

De esta conclusion derivan las consecuencias siguientes.

1.ª En una rosca dada, la ventaja para la potencia es tanto mayor cuanto mas lejos del eje CC' se aplicare.

2.ª En dos roscas diferentes, y siendo una misma la distancia desde el eje al punto de aplicacion de la potencia, la ventaja para esta es tanto mayor cuanto mas corta es la altura del paso de la rosca.

3.ª Facilmente se puede notar que en ambos casos la ventaja de la potencia es á espensas del mas largo camino que el punto de su aplicacion debe andar; pues en la consecuencia 1.ª, alargándose el rádio CB, sucede lo mismo á la circunferencia L; y en la consecuencia 2.ª, acortándose la altura a, necesita describir el rádio CB mas circunferencias para que un punto del eje llegue á donde convenga.

4.ª Inversamente, cuando se quiere que el eje camine mucho mientras da poca vuelta el rádio CB, conviene rosca en que la altura a del paso sea grande, contando con la suficiente potencia y rádio CB para lograr el efecto, como sucede en los tornillos grandes de taller, en los volantes de sellar moneda y lentejuela, etc. Véanse en la citada obra mas completa las descripciones de estas máquinas, y de otras que pertenecen á la rosca.

70. En la espresion (*) del equilibrio se prescinde del rozamiento, y ahora vamos á ampliarla contando con esta resistencia pasiva. Para ello es indudable que el peso P gravita todo entero contra el asiento superior ó inferior del filete, como aplicado en la hélice descrita en el medio t de dicho asiento (*fig.* 9). Considerando pues que la presion N causada por P y F sea equivalente á P aplicada en el estremo t del rádio Ct, resultará el rozamiento $n \times P \times Ct$. Y segun esta resistencia accione en contra ó en favor de F, las igualdades de equilibrio serán,

contra la potencia, $\left.\begin{array}{l} F\times L = P\times a + n\times P\times Ct; \\ F\times L + n\times P\times Ct = P\times a. \end{array}\right\}(**)$ en favor de la potencia,

71. **Problemas** de equilibrio y de movimiento en la rosca.

I.° *Determinar F por la primera de las igualdades* (**) *con los siguientes datos:*

Peso P que se quiere elevar. . . . . 50 arrobas.
Circunferencia L correspondiente al rádio CB. 10 pies.
Altura a del paso de rosca. . . . . 2 pulgadas.
Rádio Ct de la hélice media del asiento. . . . 4 pulgadas.
Factor n para el rozamiento. . . . . $\frac{14}{100}$.

Dicha primera igualdad de las (**) viene á ser aquí:

$$F^{\text{arrob.}}\times 120^{\text{pulg.}} = 50^{\text{arrob.}}\times 2^{\text{pulg.}} + \frac{14}{100}\times 50^{\text{arrob.}}\times 4^{\text{pulg.}}$$

de la cual, practicando las operaciones aritméticas indicadas, resulta para la potencia F el valor

$\frac{128}{120}$ arrobas, que es poco mas de una arroba,

ó próximamente, 27 libras escasas.

II.° *Por la segunda de las igualdades* (**), *calcular la altura a de rosca que fuere menester para el equilibrio, siendo F de* 1 *arroba, y las demás cantidades las mismas del problema* I.°, *excepto la desconocida a.*

Con tales datos, la igualdad de equilibrio de descenso será

$$1^{\text{arrob.}}\times 120^{\text{pulg.}} + \frac{14}{100}\times 50^{\text{arrob.}}\times 4^{\text{pulg.}} = 50^{\text{arrob.}}\times a,$$

de la cual resulta para la altura a de rosca proximamente, 3 pulgadas escasas.

III.ª El desequilibrio tendrá lugar siempre que la igualdad de equilibrio (**) se altere por aumento ó diminucion de alguno de los elementos. Para que en esta máquina principie á moverse el tornillo ó la tuerca en sentido de ascenso cuando *P* acciona como peso, bastará que *F* reciba un aumento suficiente sobre su valor de equilibrio segun la primera de las igualdades (**). Luego, *en caso del ejemplo* I.°, *si F escede de 27 libras, se moverá el tornillo ó la tuerca*. Tambien, para que en la máquina principie á moverse el tornillo ó la tuerca en sentido de descenso, cuando *P* acciona como peso, bastará que la altura *a* de rosca esceda poco ó mucho del valor que en la segunda de las igualdades (**) de equilibrio la corresponde. Luego, *en caso del ejemplo* II.°, *si a tiene mas de* 3 *pulgadas, se moverá el tornillo ó la tuerca.*

Cuña (lám. 4).

72. Esta máquina (*fig.* 11) es comunmente un prisma recto de bases *AA'C*, *BB'C'* triangulares isósceles, cuya arista ó *filo CC'* se introduce en la hendidura de un cuerpo por la fuerza *F* aplicada perpendicularmente á la faz *AB'* opuesta al filo, y que se llama *cabeza* de la cuña. El cuerpo espuesto á la accion de ella opone en los dos labios de su hendidura resistencias contra las faces cuadriláteras *AC'* y *A'C'*, *lados* de la cuña; resistencias cuyas resultantes *E* y *E'* (*fig.* 12) supondremos que concurren en un punto *O* de la direccion de *F*, encontrando á los lados en los puntos *D* y *D'*.

73. Si descomponemos las resistencias *E* y *E'*, cada una en dos componentes, una perpendicular y otra paralela á el lado de la cuña en los puntos *D* y *D'*, descomponiendo tambien la potencia *F* en dos *Q* y *Q'* paralelas á ella en los puntos *D* y *D'*, podremos considerar el sistema de las tres fuerzas *F*, *E*, *E'* convertido á otros dos sistemas nuevos: uno el de las tres fuerzas *E*, *N*, *Q* concurrentes en el punto *D*, y otro el de las tres fuerzas *E'*, *N'*, *Q'* concurrentes en el punto *D'*. Asi, cada uno de estos dos nuevos sistemas viene á ser como el de un plano inclinado, siendo *Q* y *Q'* potencias paralelas á la base *HC*, comun á ambos planos inclinados *CA* y *CA'*, al mismo tiempo que *E* y *E'*

perpendiculares á dicha base, y N y N' presiones contra los respectivos planos CA y CA'. Acudiendo pues ya á la teoría del plano inclinado, segun el artículo (50), en donde eran F y P las fuerzas que ahora son Q y E ó Q' y E', como tambien $a=HA=HA'$ altura y $b=HC$ bases de dichos planos, tendremos las proporciones

$$Q : E :: a : b \quad \text{y} \quad Q' : E' :: a : b, \quad (*)$$

las cuales dicen que en la cuña de base triangular isósceles impelida por una potencia F, perpendicular á su cabeza en su punto medio H y descompuesta en dos iguales y paralelas Q y Q', cada una de estas componentes y la resistente E ó E' de su lado son proporcionales á las dimensiones HA ó HA' y HC.

De aqui se sigue que en el equilibrio de la cuña, cuanto mayor sea el grueso AA' de la cabeza respecto de la largura HC de ella, tanto mayor tendrá que ser cada una de las semi-potencias Q y Q' para equilibrar las respectivas resistencias E y E', asi como la potencia F para equilibrar la suma de resistencias E y E'.

Por la misma teoría del plano inclinado (50), se tienen

$$N : E :: l : b; \quad N' : E' :: l : b, \quad (**)$$

de las cuales se deduce que en el equilibrio de la cuña, cuanto mas largo sea el lado $AC=A'C=l$, y por consiguiente mas gruesa la cabeza respecto de la largura $HC=b$ de la cuña, mayor presion N ó N' habrá contra dicho lado, y por consiguiente mas fuerte rozamiento resultará procedente de las resistencias E ó E'.

Ultimamente, por la teoría del plano inclinado (47) se tienen las proporciones de equilibrio respectivas á las resistencias S y S', que paralelamente á los lados CA y CA' de la cuña resultan de las E y E',

$$S : E :: a : l \quad \text{y} \quad S' : E' :: a : l, \quad (***)$$

las cuales manifiestan que la resistencia S ó S' es tanto mayor cuanto mas gruesa sea la cabeza respecto de la largura del lado AC de la cuña, y por consiguiente respecto de la largura HC de ella.

74. De los tres sistemas de proporciones de equilibrio se viene á concluir, que la potencia F (comunmente percusion) aplicada á la cabeza de una cuña perpendicularmente, tiene que luchar contra las resistencias $n \times N$ y $n \times N'$ de rozamiento y las S y S', todas en direccion de los lados CA y CA'; resistencias tanto mas fuertes cuanto mas gruesa sea la cabeza de la cuña respecto de su longitud.

En caso de ser vencidas estas resistencias por la potencia F, la cuña penetrará mas y mas en la hendidura del cuerpo, segun sea mayor el esceso de F sobre la suma de ellas. Pero tambien es de notar que la latitud DD' de la hendidura será menor por una cuña delgada que por otra gruesa iguales en largura, ó por una larga que por otra corta iguales en grueso. Luego, si bien la cuña delgada y larga es favorable á la potencia para la penetracion, puede no ser conveniente para producir una hendidura de latitud tal, cual se necesite para consumar el efecto de rajar ó encuñar completamente la pieza que se quiera.

En la práctica, las resistencias E y E' dependen de infinidad de circunstancias difíciles de ser apreciadas con regular exactitud, motivo por que las proporciones (*) solo pueden servir para valuar dichas resistencias en casos particulares, siendo dadas F y las dimensiones de la cuña. Valuadas asi E y E', se podrán determinar N y N' por las proporciones (**), como tambien S y S' por las (***). Con tales datos ya se podrán establecer las igualdades de equilibrio contando con el rozamiento de cada caso, para calcular el valor que F habrá de tener para que resulte movimiento.

75. Pero dejando á la aplicacion del discípulo el dedicarse á estos cálculos, vamos á concluir con las observaciones que siguen.

1.ª Hasta aqui hemos discurrido bajo el supuesto de que la cuña prismática triangular no toca á la hendidura sino en las dos faces cuadriláteras; y ahora debemos decir, que cuando además toca en las faces triangulares (*fig.* 11), habrá cuatro resistencias parciales E, E', E'', E''', una contra cada faz, y de consiguiente cuatro presiones respectivas N, N', N'', N''', y cuatro resistencias S, S', S'', S'''.

2.ª A la máquina llamada cuña pertenecen tambien las de figura piramidal, como por ejemplo los clavos, y aun las de figura cónica, como por ejemplo las agujas. Y supérfluo tuera el decir que todos estos, y demás instrumentos punzantes, penetran sufriendo resistencias en toda su parte superficial desde la punta hasta donde llegue el labio de la hendidura.

PARTE TERCERA.

Algunas ideas sucintas sobre las fuerzas motoras y sobre las partes de las máquinas.

76. Las fuerzas empleadas ordinariamente para mover máquinas son de cuatro clases. 1.ª La fuerza animal, de hombre ó de las bestias. 2.ª La del agua por su peso ó por su corriente, saliendo de un alto depósito, mientras este depósito va recibiendo reemplazo contínuo de la que sale á operar en la máquina. 3.ª La del vapor de agua, en virtud de la fuerza elástica que adquiera por el calor. 4.ª La del viento, en molinos de este nombre, fuerza que por su inconstancia se emplea solamente para operaciones groseras, como moler granos, aserrar maderas, etc.

Bien se deja conocer que segun sea la naturaleza y el modo de accionar del motor, deberá tener la máquina una organizacion propia para recibirle, y que la resistencia opuesta por la obra que haya de ejecutar sea proporcionada á la potencia del motor; debiéndose además tener en consideracion las siguientes circunstancias.

Los *motores inanimados* ofrecen una inmensa y económica potencia, con la ventaja de ser incansables; pero las máquinas adecuadas á ellos requieren cierta estabilidad, circunstancia que las hace inaplicables á algunos servicios; esceptuando sin embargo el viento, que desde hace siglos se emplea en mover las embarcaciones; y el vapor, que ya se emplea en lo mismo y en mover los carruajes por los caminos, especialmente los de carriles de hierro.

Los *motores animados* ofrecen la ventaja de cierta inteligencia individual para modificar su accion segun las necesidades; pero son débiles y cansables. Por su debilidad no pueden aplicarse á faenas de fuerte resistencia, sino accionando muchos individuos, á una todos; y por el cansancio no pueden trabajar sino durante pocas horas del dia, que por esta razon se dice *dia laboral*, resultando de aqui el ser cara toda potencia animada, particularmente la del hombre. Aun asi, el individuo necesita interrumpir la seguida de horas del dia laboral con descansos para recuperar sus fuerzas debilitadas; y en cada faena el cansancio depende del esfuerzo que habrá de hacer con sus miembros, la velocidad con que los haya de mover, y el tiempo durante el cual haya de seguir asi. Por lo cual en faenas duras, ya sea por la gran fuerza que haya de emitir ó ya por la celeridad con que necesita mover sus miembros, deben ser frecuentes las interrupciones ó descansos, y además no de mucha duracion la tarea diaria. En comprobacion de esta verdad vemos por ejemplo, que un clavetero ó forjador de pequeño martillo resiste diariamente 14 ó 15 horas de trabajo, mientras el forjador de martillo grueso no puede resistir 10 horas. En uno y otro de estos dos modos de accionar hay sus intermitencias de esfuerzo, por la alternativa de elevar el martillo y descargar el golpe; pero en el oficio del clavetero son menores el esfuerzo y la duracion de cada intermitencia, y por consiguiente se acerca mas al modo de accion continuada con pequeño esfuerzo. Por otra parte, el alimento, la estacion y el clima influyen á que sea mayor ó menor el trabajo exigible de las fuerzas animadas; verdad tan evidente que nos exime de alegar pruebas.

77. En toda máquina compuesta de varias simples, cada una de estas es un *miembro* de aquella, y cada miembro consta de partes llamadas *órganos* de la máquina. El miembro á que inmediatamente esté aplicada la potencia se llama *receptor*, y el miembro á que esté aplicada la *resistencia util* de la obra que se haya de ejecutar se llama *operador*, y los miembros que haber pueda *intermedios* entre aquellos dos sirven para comunicar el movimiento desde el uno al otro. Hay máquinas de un solo miembro, en que uno de sus órganos hace oficio de receptor, y otro órgano el de operador.

No sería propio de este reducido libro de rudimentos el estendernos á dar ideas completas sobre la organizacion particular de cada una de las muchísimas clases de máquinas que la industria emplea actualmente, ni aun siquiera reproducir cuanto se dice en la ya citada obra de Mecánica aplicada. Por lo cual, nos limitaremos á solo ciertas nociones generales sobre los nombres y servicios de algunas partes mas comunes de las máquinas.

Engranajes (lám. 4).

78. Se llama engranaje todo sistema compuesto de dos piezas *dentadas*, ruedas ambas (*fig.* 13), ó rueda la una y barra la otra (*fig.* 15), ó bien modificaciones de estos dos sistemas, para comunicar una de dichas piezas movimiento á la otra por encuentro de sus dientes. De dos ruedas que asi se engranan mútuamente, como por ejemplo las de la *figura* 13, la de mayor diámetro se dice que es *rueda*, y la de menor diámetro *piñon*. Si una de estas piezas tiene varillas (*figs.* 14, 17 *y* 18) y no dientes, se llama *linterna*. La *figura* 16 representa un engranaje *cónico*, llamado asi porque las dos ruedas tienen forma de conos truncados.

En el artículo (66) se indicó, y aqui volvemos á repetir, que hay dos condiciones precisas en los engranajes. 1.ª Que tanto los dientes como los huecos intermedios sean iguales en las dos piezas que se engranan. 2.ª Que los números d y d' de dientes de dos ruedas que se engranan sean proporcionales á las circunferencias respectivas. Escusado es decir que se habla de ruedas montadas en distintos ejes, pues aunque en uno mismo puede haber dos ó mas ruedas dentadas, estas no pueden engranarse entre sí. A estas dos condiciones no puede menos de ser aneja una tercera, á saber, que deben ser números enteros los d y d' : y todavía se necesita la cuarta condicion, de que los dientes tengan la fortaleza suficiente para no romperse por los esfuerzos á que estén espuestos; fortaleza que depende de la anchura y el grueso del diente, como tambien de la naturaleza de su material. Pero es de advertir, que aun teniendo los dientes estas circunstancias, estarán espuestos á romperse en caso de que deje de cumplirse la condicion 1.ª, cuyo objeto es que el diente motor prenda dulcemente al movido, y no por choque consiguiente á ser los huecos mas anchos que los dientes.

Estos preceptos de construccion están relacionados con los diámetros de las dos ruedas que se hayan de combinar, ó lo que es lo mismo, con los números de vueltas que ha de dar cada una de ellas. Y la proporcion $n : n' :: r' : r$ establecida en el citado artículo (66), entre el número n vueltas y r rádio de una rueda dentada, y n' número de vueltas y r' rádio del piñon ó de la linterna correspondiente, sirve para determinar una de las cuatro cantidades cuando son dadas las otras tres. La razon $n : n'$ entre los números de vueltas depende del servicio á que se destina la máquina, y con esta prescripcion el ingeniero constructor calcula el rádio r de la rueda ó el r' del piñon, es decir, de la pieza que haya de ser movida por la otra, cuyo rádio puede ser tal vez arbitrario.

Si por ejemplo r es 3 veces mayor que r', el número n' de vueltas dadas por la pequeña rueda será triple del número n de vueltas dadas por la grande durante un tiempo mismo, ó bien, mientras la rueda pequeña da una vuelta, la grande no dará mas que un tercio de su vuelta.

A veces conviene que la grande sea *moviente* y la pequeña *movida;* mas otras veces conviene que esta sea la moviente y aquella la movida. El primero de estos dos sistemas sirve, para que un receptor que se mueva lentamente produzca en el operador una velocidad cuan grande convenga para la obra que se haya de ejecutar; y el segundo sistema sirve inversamente para que el movimiento rápido del receptor ó pequeña rueda produzca movimiento menos rápido en la grande.

Ya se sabe (66) que la proporcion entre las cuatro cantidades r, r', n, n', relativa á las ruedas dentadas, rije igualmente en la trasmision del movimiento de la rueda lisa de un torno al cilindro liso ó *tambor* de otro torno, ligados entre sí por medio de cuerda ó correa sin fin (37).

Véanse en mi tratado de máquinas las variedades que hay en el sistema de engranajes, y las esplicaciones sobre la debida construccion de ellos, tanto para el movimiento uniformemente seguido de los tornos, como para comunicar el intermitente que necesitan los grandes mazos de forja y los pilones de triturar materiales.

Manubrio y biela (lám. 5).

79. La primera de estas piezas, llamada tambien *manibela ó cigüeña*, es una pieza *mnq* de hierro (*figs.* 1, 2 *y* 3), de figura comunmente angular, con dos brazos, el uno *mn* recto ó curvo acoplado fijamente al eje ó arbol de las máquinas tornantes, siendo el otro brazo *nq* el mango á que se aplica el motor de ciertas máquinas. El manubrio de cualquier forma viene á ser esencialmente un brazo *en* de palanca que hace veces de rádio de la rueda ó del cilindro del torno.

En las pequeñas máquinas movidas por hombre (*fig.* 1), este acciona aplicando sus manos al mango *nq* del manubrio, como se ve diariamente en los tornos usados para sacar de pozos profundos agua, tierra, etc.; y los amoladores mueven su máquina (*fig.* 2) aplicando el pie al mango ó mas bien á un estribo ó *pedal p* pendiente de él. Pero de este último modo resulta en la máquina un movimiento variado, porque el pie acciona solo mientras el mango describe la media vuelta descendente, y la velocidad adquirida durante este período se va gastando en la media vuelta ascendente. Cuando son las manos quienes accionan, el movimiento resulta menos variado, pero no uniforme; pues aunque de este modo la accion es mas continuada, nunca puede ser igual durante toda la vuelta, por no permitirlo la estructura humana. Este defecto se remedia bastante, y al mismo tiempo se emplea mayor potencia, dotando á la máquina con dos manubrios, uno en cada estremo del eje (*figura* 1), de manera que los brazos *cn* de palanca estén cruzados perpendicularmente entre sí, á fin de que á las intermitencias de menor potencia de la fuerza aplicada á uno de estos manubrios correspondan las de mayor potencia de la fuerza aplicada al otro manubrio.

En las máquinas de vapor (*fig.* 3), la accion del motor se trasmite al manubrio *mn* por medio de una barra *B'H* larga llamada *biela*, articulada en sus dos estremos de manera que pueda jugar en ellos, para ejercer en el mango del manubrio fuerza de impulsion y de traccion alternativamente, á manera que la mano del hombre hace en las pequeñas máquinas. Pero aun así resultan siempre alternativas de mas y de menos velocidad durante cada vuelta.

La *figura* 4 indica un *doble manubrio* $mnn'm'$ propio para que la biela $B'H$ pueda jugar dando movimiento á dos ejes mc, $m'c'$, situados en direccion de una misma recta.

Volante (lám. 5).

80. Esta pieza es una gran rueda de cerco VV' muy pesado (*fig.* 3), con que se dota á las máquinas tornantes movidas á manubrio, para que adquiriendo grande cantidad de movimiento mientras la potencia acciona fuertemente en el manubrio, preste luego una parte de aquella fuerza á la demás de la máquina durante el período en que la potencia acciona con debilidad. Asi, el movimiento de la máquina viene á resultar sensiblemente uniforme, cual conviene á las que hayan de operar con régimen constante (31) para ejecutar la obra que requiera uniformidad en el movimiento del miembro operador. En las máquinas de vapor empleadas con este objeto, el motor acciona mediante biela y manubrio, á pausas como la mano del hombre (78), por lo cual requieren volante. Las máquinas movidas por alguna grande rueda hidráulica, aunque haya manubrio y biela para trasmitir el movimiento al miembro operador, están algo mas exentas de necesitar volante, porque suple algun tanto la misma gran rueda hidráulica, cuyo cerco es bastante pesado por sí, y además concurre la circunstancia de ser continuado el movimiento de la rueda, y no alternativo como el del émbolo del cilindro de vapor (27, 4.ª), pivariable la fuerza como la del brazo ó del pie del hombre (79).

En las máquinas de tornear movidas á mano, aunque dotadas de manubrio, la gran rueda á quien este se halla inmediatamente unido hace oficio de volante. Lo mismo sucede en la piedra de amolar que tenga considerable diámetro y peso, aunque menos completamente; y cuando la piedra es de pequeño diámetro, cual usan los amoladores de fino, estos hacen mover la pequeña piedra por medio de cuerda sin fin y rueda grande, como los torneros su máquina.

Embolo y válvulas (lám. 5).

81. *Embolo ó piston* es una pieza *E* cilíndrica que se mueve á vaivén rectilíneo dentro de un cilindro *C* hueco del mismo diámetro (*figs.* 3, 5 *y* 6). A todo émbolo está ligado un vástago metálico *ll* que sale fuera del cilindro, con objeto de que sirva como conductor de la fuerza desde el receptor, que es el émbolo en las máquinas de vapor, á otro miembro, ó desde este al émbolo, que es operador en las máquinas soplantes, en las bombas de elevar agua, etc. Despues hablaremos acerca de los modos de ligar el vástago á las piezas moviente y movida.

Para que el rozamiento del émbolo contra la pared del cilindro sea suave, al mismo tiempo que entre estas dos piezas no haya huelgo por donde pueda escaparse el fluido, se suele forrar de cuero la superficie cilíndrica del émbolo y mantener untado el cuero.

Otras veces el cerco del émbolo es metálico á fin de que se desgaste menos con el uso; y para que llene bien el hueco sin gran rozamiento, está dotado de muelles interiores. El émbolo que actualmente se reputa como preferible para las grandes bombas de elevar agua es un cilindro metálico sin cuero ni muelles, de mucha mayor longitud que los antedichos.

Válvula es toda pieza que sirve para permitir é impedir alternativamente la entrada ó la salida del fluido en los cilindros donde funciona el émbolo. Hay válvulas de diferentes clases, como son; la *b* (*fig.* 5), *labial*, que se mueve á charnela y se asemeja á una ventanilla; la *b'* (*fig.* 6) de *vástago*, que se asemeja á una copa y se mueve verticalmente por traslacion, resbalando el vástago *b' d* en sus guias fijas; y finalmente la válvula de *llave* (*fig.* 7), que se mueve circularmente y tiene orificio trasversal, usada comunmente en las espitas de las cubas de vino. En las mas de las máquinas de vapor hacen oficios de válvulas los émbolos *b* y *b'* (*fig.* 3), ligados por un vástago *bb'*, que funcionan con movimiento alternativo rectilíneo dentro de una cámara cilíndrica, adjunta al gran cilindro *C* donde trabaja el vapor. Las válvulas *b* y *b'* están dispuestas de manera que, mientras una permite la entrada del vapor activo en el cilindro *C*, la otra permite salida al vapor que sirvió en el curso precedente.

Por lo espuesto se viene en conocimiento de que el émbolo *E* del gran cilindro y las válvulas correspondientes forman un sistema de órganos anexos, que se han de mover con la regularidad y precision adecuadas á su destino. Sobre los modos de funcionar estas piezas en la máquina soplante á piston y en las máquinas de vapor, se ha podido formar alguna idea por las pocas esplicaciones de este artículo y de los problemas del artículo (26).

82. Pero nada hemos dicho todavía relativamente á dichas piezas en las máquinas de elevar agua, llamadas *bombas*, de cuyas diversas clases vamos á citar dos.

1.ª Una bomba *atraente-elevatoria* (*fig.* 5) tiene tres tubos: el *cuerpo C* de mayor calibre en donde juega el émbolo *E* dotado con su bálbula *b*; el tubo *Y* de *aspiracion*, cuyo estremo inferior está sumergido en el depósito ó pozo de agua, y el superior está unido al cuerpo *C*, en cuya union hay otra válvula *b'*; siendo tercer tubo el *S*, llamado *ascendente*, ó si no un caño por donde se escapa el agua que el émbolo arrastra sobre sí cuando llega el caso.

La primera vez que el émbolo hace su curso de ascenso, la válvula *b* que tiene se cierra por sí misma, y la válvula *b'* inferior se abre tambien por sí misma; la primera, porque la presion del aire esterior sobre el émbolo es mas fuerte que la presion del aire rarefacto interior del cuerpo *C*; y la segunda, porque el aire del tubo *Y* es mas denso tambien que el rarefacto del cuerpo *C*, en donde entra impeliendo á la válvula *b'* intermedia. De suerte que cuando el émbolo se halla en su mayor altura, el aire de estos dos cuerpos es menos denso que al esterior, y por consiguiente el agua sube hasta cierta altura sobre el nivel del pozo en el tubo *Y* de aspiracion (26, II.º).

Bajando ahora al émbolo, comprime al aire del cuerpo *C*, á lo cual es consiguiente el cerrarse por sí la válvula *b'* inferior y el abrirse la *b* del émbolo, escapándose por el orificio ó *diafragma* de éste el aire del cuerpo *C* cuando el émbolo haya terminado su descenso.

Volviendo á elevar el émbolo como la primera vez, el agua sube por el tubo ascendente hasta mayor altura que entonces; y bajando en seguida el émbolo, sale por su orificio el aire del cuerpo *C*, al mismo tiempo que se cierra por sí la válvula inferior, bajo la cual queda aire poco denso sobre la columna de agua en el tubo *Y*.

Si esta columna es bastante alta, al principiarse el nuevo ascenso del émbolo el agua llegará á penetrar en el cuerpo *C*, en donde subirá hasta cierta altura; y al bajar nuevamente el émbolo el líquido montará sobre esta pieza. Desde entonces, al subir el émbolo llevará sobre sí la cantidad de agua que tenia encima hasta el caño de desagüe ó hasta el tubo *S* de ascension, al mismo tiempo que la columna líquida inferior habrá llenado todo el tubo *Y* de aspiracion y todo el cuerpo *C* de la bomba, para pasar á la parte superior del émbolo al bajar de nuevo esta pieza, sobre la cual será arrastrada al subir; y asi sucesivamente segun se vayan repitiendo los cursos alternativos de ascenso y descenso del émbolo.

2.ª La bomba *atraente-impelente* (*fig.* 6). Se compone tambien de tres tubos, que son: tubo *Y* de aspiracion, cuerpo *C* de la bomba, y tubo *S* ascendente. El émbolo *E* de esta bomba no tiene orificio ni válvula; funciona en el cuerpo *C* desalojando en su primer decenso al aire que se escapa por el tubo ascendente, abriendo por su fuerza elástica la bálbula *b* que hay en la union de este tubo con el cuerpo *C*, y cerrando la válvula *b'* que hay entre el cuerpo *C* y el tubo *Y* de aspiracion.

Al subir ahora el émbolo, el aire del tubo *Y* se dilata pasando á ocupar el vacío que va quedando en el cuerpo *C*, y al mismo tiempo el agua del pozo sube por el tubo *Y* hasta cierta altura, y tal vez penetra en el cuerpo *C* si el tubo de aspiracion es bastante corto, como suele ser en las bombas de esta clase.

Desde que el agua penetra en el cuerpo *C*, el émbolo al bajar impulsa al líquido, que se ve precisado á subir por el tubo *S* franqueando su válvula, y cerrando la que hay en la union del cuerpo *C* con el tubo *Y*, ocupado ya totalmente de líquido.

Volviendo á subir el émbolo, el agua del tubo *Y* pasa á llenar el cuerpo *C*, al mismo tiempo que es remplazada por la del pozo. De suerte que al descender nuevamente el émbolo, el agua del cuerpo *C* pasa al tubo *S* subiendo por él hasta cierta altura, ó tal vez hasta salir por el estremo superior de este tubo.

Bastan estas ligeras esplicaciones para comprender que el agua sube por *aspiracion* hasta el cuerpo *C* como en la bomba de la clase 1.ª, pero que la diferencia está en el modo de espulsar despues al líquido hácia fuera; pues en la atraente-elevatoria el émbolo al subir eleva sobre sí al líquido, mientras en la atraente-impelente el émbolo al bajar impele al líquido obligándole á que suba por el tubo *S*.

En ambas bombas el agua no puede subir por aspiracion, ó sea por la carga atmosférica, á mayor altura que 36 pies desde el nivel del pozo (25, II.°); ni aun tanto, porque el vacío que teóricamente se necesitaria formar en el cuerpo *C* de la bomba, para obtener una columna líquida de 36 pies de altura, nunca tiene lugar en estas máquinas.

Finalmente, haremos la advertencia de que en toda bomba conviene que el estremo inferior del tubo *Y* de aspiracion tenga un rallo con muchos agujeros no muy grandes, para impedir que juntamente con el agua suba légamo ú otra especie de suciedades, que obstruirian el juego libre de las válvulas y del émbolo.

Balanzadera (lám. 5).

83. Esta pieza es una palanca material *BAB'* de primer género (*figs.* 3 *y* 5), que oscilando sobre su eje *A* trasmite el movimiento de un miembro á otro. En las grandes máquinas movidas por fuerzas incansables poderosas, la balanzadera recibe en uno de sus estremos la accion de la potencia y en el otro estremo la de la resistencia, mediante bielas ú otros conductores adecuados. Suponiendo por ejemplo que una de vapor está destinada á mover algun miembro rotante, uno de los estremos de la balanzadera da movimiento á la biela *B'H* con quien está articulada en el estremo *B'*, mientras el otro estremo *B* recibe movimiento del émbolo *E* mediante el vástago *ll*, con quien está articulado como luego se dirá.

Mas, cuando la balanzadera está movida á mano (*fig.* 5), uno de los brazos *AB* tiene forma de mango, como sucede en las bombas pequeñas de elevar agua.

Para concordar en las máquinas de vapor el movimiento alternativo rectilíneo del émbolo *E* con el circular alternativo del estremo *B* de la balanzadera, ó sea para articular el estremo *B* de esta pieza con el estremo superior del vástago *ll* del émbolo, de manera *que ll conserve una misma direccion en lo posible cuando se mueve*, los ingenieros han inventado varios artificios que satisfacen con mas ó menos precision al problema.

1.° Primeramente se usó el artificio representado en la *figura* 8, que consiste en ligar el vástago *ll* á una pieza circular *aa'* de la balanzadera por medio de dos cadenillas, *ad'* que tira de abajo arriba y *da'* que tira de arriba abajo, obligando asi al vástago á moverse siempre en una misma direccion, tangente al punto medio del arco que describe el estremo *B* de la balanzadera.

2.° Despues el célebre ingeniero Wat inventó el artificio llamado *paralelógramo* (*fig.* 3), cual representa la figura *Bltc*, y que en cada una de las faces laterales del brazo *AB* de la balanzadera consta de tres barretas *Bl*, *ct*, *lt*, ligadas entre sí por ejecillos horizontales *B*, *l*, *t*, *c*, de modo que puedan girar libremente. El estremo *B* de la balanzadera en su movimiento circular tiende á que el estremo *l* del vástago describa el mismo arco que él, mientras una cuarta barreta *Kt* llamada *brida*, ligada por el estremo *K* con ejecillo horizontal á un cuerpo fijo y por el otro estremo al eje *t*, tiende á que el estremo *l* del vástago se incline hácia el arco que *t* describe. Asi pues, el vástago *ll*, obligado por dichas dos tendencias contrarias, se mueve sin desviarse casi de la direccion en que se mueve el émbolo *E* del gran cilindro *C*.

Ligando tambien al eje *t* del mismo paralelógramo el vástago de los pequeños émbolos *b* y *b'*, que digimos hacen oficio de válvulas para la entrada y salida del vapor en el cilindro *C*, resulta que dicho vástago no se desvia casi de la direccion en que se mueven estos émbolos.

Uno de los problemas que la construccion del paralelógramo ofrece es, determinar la longitud *Kt* de la brida con relacion á la longitud del brazo *AB* de la balanzadera y á la longitud del curso del émbolo. Véanse sobre esto la obra de Tredgold y otras en que se trata con estension el asunto.

3.° Nuestro sábio compatriota Betancourt, inventó el artificio que en la *figura* 5 está indicado, el cual consta de dos barretas *B't* laterales y la brida *Kt*, giratorias al rededor de ejecillos horizontales *B'*, *t*, *K*, estando el estremo *l* del vástago del émbolo ligado tambien asi á las barretas *Bt* en un punto l intermedio. El estremo B' de la balanzadera en su movimiento circular tiende á que el vástago ll se incline hácia él, al mismo tiempo que el estremo t de la brida Kt en su movimiento circular tiende á que se incline hácia el arco que él describe; y de estas dos tendencias contrarias resulta que el vástago ll se mueva en una direccion intermedia. Si las longitudes AB y Kt son iguales y el punto l divide á la longitud $B't$ en dos partes iguales, el vástago ll se moverá precisamente sin desviarse nada de la direccion en que se mueve el émbolo E.

4.º Ultimamente, el modo mas simple pero el mas imperfecto de concordar el movimiento circular de la balanzadera con el rectilíneo del émbolo, es cual se indica en la *figura* 9. Se reduce á ligar un estremo del vástago ll al émbolo y el otro estremo al B' de la balanzadera con ejecillos horizontales perpendiculares al plano del arco que B describe. Asi, el vástago se mueve desviándose de la direccion del movimiento debido del émbolo E, ya hácia un lado ya hácia el opuesto; de que resulta pérdida de fuerza moviente, al mismo tiempo que irregularidad en el movimiento del émbolo y en el desgaste de la superficie cilíndrica de esta pieza. Unicamente en caso de que sea muy corto el curso del émbolo de una bomba de mano, como sucede en las de apagar incendios y en alguna otra casera, puede ser admisible el sistema indicado en este párrafo.

CUADERNO TERCERO.

TRABAJO DE LAS FUERZAS

EN LAS MAQUINAS.

Teoría (lám. 5).

84. En el cuaderno precedente se han establecido las condiciones para el equilibrio y para el movimiento de las máquinas, consideradas como elementales de otras mas compuestas. Y ahora vamos á ocuparnos de un asunto puramente dinámico, á saber, *el cálculo del trabajo que hacen las fuerzas movientes y resistentes que accionan en la máquina cuando se mueve.*

85. Primeramente diremos que se llama *cantidad de trabajo* de una fuerza, *el producto de esta fuerza por el espacio lineal que en su misma direccion camina el punto á que está aplicada:* como en los tres siguientes casos generales.

1.º Siendo por ejemplo F el valor de una fuerza aplicada en el punto A de la máquina (*fig.* 10) segun la direccion AH, y suponiendo AA' el espacio descrito por este punto mientras los demás del movil describen sus espacios correspondientes, la cantidad de trabajo de la fuerza F será el producto $F \times AA'$

2.º Estando (*fig.* 11) F aplicada al punto A en la direccion AH, si este punto se ve obligado por combinacion de dicha fuerza con otras á describir el espacio AC fuera de la direccion AH de ella, como sucede en el plano inclinado cuando no es paralelo á la direccion de la fuerza (50), supóngase F descompuesta en dos componentes perpendiculares entre sí, de las cuales una sea en la direccion AC. Representando pues la fuerza F por la longitud AH, y formando sobre esta diagonal el paralelógramo, los lados AD y AE representarán las respectivas componentes f y f'. Segun la definicion, el trabajo de f será $f \times AC$, y el trabajo de f' será nulo, puesto que no resulta espacio caminado por el movil en direccion de esta componente. Luego, el trabajo de F se reduce á solo el $f \times AC$ de su componente f.

Tambien se puede espresar de otro modo la cantidad de trabajo de la fuerza F, cuyo punto de aplicacion A describe el espacio AC en direccion distinta de la AH propia de F. Pues bajando la perpendicular CB á la recta AH, los triángulos rectángulos ABC y ADH semejantes dan la proporcion

$$AC : AB :: AH : AD :: F : f,$$

de donde $$f \times AC = F \times AB.$$

Por esta equivalencia vemos que el trabajo de la fuerza F puede ser medido, no solo por el producto de su componente f multiplicada por el espacio AC caminado en direccion de esta componente, sino tambien por el producto de la fuerza F multiplicada por el espacio AB que en direccion propia de ella determina la perpendicular CB.

3.° Si el punto móvil A se mueve describiendo línea poligonal (*fig.* 12) ó curva (*fig.* 13), por variar de direccion sucesivamente la fuerza F; la cantidad de trabajo de F será suma de sus trabajos parciales $F \times AA'$, $F \times A'A''$, etc.

En caso de ser AA', $A'A''$ lados de polígono, la suma tendrá número de términos limitado; y en caso de ser línea curva el espacio $AA'A''$..... descrito, la suma tendrá infinito número de términos. Pero en ambos casos será reductible al producto $F \times AA'A''$..... de la fuerza F por el espacio lineal anguloso ó curvo que el punto A móvil hubiere descrito, siguiendo siempre la direccion de F.

A lo espuesto en este artículo sobre los casos generales 1.°, 2.° y 3.°, hay que añadir una advertencia, á saber: que en cada uno de los tres la espresion de la cantidad de trabajo será cual se ha dicho, con tal de que el valor de F

no varíe durante la marcha del móvil en describir aquel espacio. Pues si este valor varía, habrá que aplicar dichas espresiones para solo el espacio en que F subsista de valor constante en cada período que medie desde una variacion á otra, y al fin sumar los trabajos parciales respectivos al punto móvil A.

86. Cuando son varias las fuerzas que simultáneamente accionan en una máquina, aplicadas á un mismo punto ó á distintos puntos de ella, la cantidad de trabajo de cada fuerza es el producto de esta por el espacio que en direccion de ella camina su punto de aplicacion; y para deducir la relacion que haber pueda entre estos diferentes trabajos, es preciso que hayan sido hechos todos en un mismo tiempo.

Suponiendo por ejemplo (*fig.* 14) que dos fuerzas F, F', aplicadas á un mismo punto A en las respectivas direcciones AB, AB', hacen caminar al móvil A la distancia AC, se encaminan desde C las perpendiculares CB, CB' á las direcciones de las fuerzas, y en conformidad del caso 2.º serán $F\times AB$ y $F'\times AB'$ las cantidades de trabajo de ellas.

Proponiéndose tambien por ejemplo una palanca AA' del primer género (*fig.* 15), que se mueve al rededor de su eje E en virtud de la potencia F aplicada al estremo A, y la resistencia F' aplicada al estremo A', ambas constantemente perpendiculares á la palanca mientras gira, supongamos AB el arco circular descrito por el estremo A, como tambien $A'B'$ el descrito por A', y ab el descrito por el estremo a del rádio del eje en que acciona el rozamiento R, y tendremos, en conformidad del caso 3.º del artículo precedente

$F\times AB$	trabajo de la potencia F.
$F'\times A'B'$	el de la resistencia F'.
$R\times ab$	el del rozamiento R.

87. En general hay que distinguir en toda máquina que se mueve, el trabajo que se emplea, el que se utiliza y el que se pierde. Pues el trabajo hecho por la potencia es *trabajo empleado;* el hecho por la resistencia util vencida, como por ejemplo el peso de un cuerpo á quien se haga caminar de abajo arriba, es *trabajo utilizado;* y el gastado

inútilmente por ciertas resistencias *nocivas*, como por ejemplo el rozamiento, es *trabajo perdido*. En el movimiento de toda máquina intervienen trabajos de estas tres clases, y la ventaja consiste en *obtener una combinacion de ellos tal, que el trabajo utilizado sea el mayor posible con la potencia determinada que se tenga disponible*, ó lo que es lo mismo, *con un determinado gasto, salvo el anhelo de lograr la mayor perfeccion posible en la obra ejecutada.*

Mas, para las aplicaciones de esta máxima industrial necesitamos establecer primero la relacion de trabajos movientes y resistentes propia de cada máquina, asunto de que vamos á ocuparnos ahora.

88. En el cuaderno segundo hemos hecho varias veces uso de los principios esplicados en el artículo (34). 1.° Que para dar movimiento á una máquina en sentido de la potencia F, se necesita que esta potencia sea al principio algo mas fuerte que la equilibrante de las resistencias, y que con aquel esceso seguido durante cierto tiempo, la máquina va adquiriendo mas y mas velocidad. 2.° Que llegado el instante de haber adquirido la máquina cierta velocidad adecuada al régimen ó movimiento uniforme conveniente del móvil, se suprime el esceso que F tuvo hasta entonces, para que restableciéndose asi la relacion de equilibrio de fuerzas, la máquina siga moviéndose en lo sucesivo con velocidad constante, ó lo que es lo mismo, con movimiento uniforme propio para la obra que haya de ejecutar. Tenemos, pues, que tomar en consideracion dos períodos de movimiento, uno poco duradero mientras la velocidad va creciendo, y otro mientras la velocidad sigue constantemente sin perder ni ganar rapidez, que es el período largo durante el cual hace la máquina el trabajo util ú obra á cuya ejecucion está destinada.

89. *Período* 1.° Por el esceso de la potencia sobre su valor de equilibrio, la masa M de la máquina llega á adquirir hasta el fin de este período cierta velocidad v, como si esta masa cuyo peso sea P hubiese caido libremente desde la altura a. El trabajo asi hecho por la fuerza P es $P\times a$; y en vista de las equivalencias (29, 4.° y 5.°)

$$P = M \times g, \qquad a = \frac{v^2}{2g},$$

se tiene la $$Pa = \frac{M \times v^2}{2}.$$

En donde vemos que el trabajo hecho por el esceso de la fuerza moviente sobre las resistentes, que accionan en la máquina durante el primer período, viene á ser $\frac{M \times v^2}{2}$: trabajo que la máquina lleva depositado en su masa desde aquel instante final del primer período, y que equivale al trabajo $P \times a$ que haria el peso P cayendo de la altura a. Prescindamos por ahora de este trabajo primero $\frac{M \times v^2}{2}$, que tomaremos en cuenta despues de hallar el del período siguiente.

90. *Período* 2.º Durante este largo período, la máquina no gana ni pierde velocidad, porque las fuerzas movientes y resistentes accionan con relacion de equilibrio entre sí. Y vamos á demostrar que de esta relacion de equilibrio de las fuerzas podemos deducir facilmente la relacion de sus trabajos, en cada máquina que marcha con movimiento uniforme.

Supongamos en primer lugar rectilíneo el movimiento de todos los puntos materiales del móvil, en que accionan la potencia F, la resistencia util F' y la resistencia nociva F'', todas paralelamente á la direccion del movimiento, como sucede por ejemplo en el plano inclinado por donde sube un cuerpo, segun se consideró en el artículo (48), en donde F' era la componente del peso, y F'' era el rozamiento R. De suerte que para todos los casos de movimiento rectilíneo, la igualdad de equilibrio establecida entonces viene á ser en general

$$F = F' + F''.$$

Todos los puntos del cuerpo, y de consiguiente los de aplicacion de estas tres fuerzas en el movimiento de traslacion, describen espacios iguales; y como una igualdad no se altera aunque se multipliquen todos sus términos por un mismo factor (*Aritm.* 70, 2.º), se sigue que multiplicando por el espacio comun e los tres términos de la igualdad de equilibrio, la de trabajos será

$$F \times e = F' \times e + F'' \times e.$$

Supongamos en segundo lugar que el movimiento uniforme sea circular al rededor de un eje material de rotacion, como sucede en la palanca y en todas las demás máquinas derivadas de ella, siendo f el brazo de la potencia F, como tambien f' el de la resistencia util F' y últimamente f'' el de la resistencia nociva F'', cual es el rozamiento contra el eje. La igualdad de equilibrio en sentido de la potencia F en tales máquinas rotativas, tiene la forma

$$F \times f = F' \times f' + F'' \times f''.$$

Los brazos f, f', f'', son proporcionales á los arcos circulares e, e', e'', ó espacios lineales que describen sus estremos ó puntos de aplicacion de las fuerzas F, F', F''; por lo cual, sustituyendo los espacios á los rádios en la igualdad de equilibrio, tendremos la de trabajos

$$F \times e = F' \times e' + F'' \times e''.$$

Cuya forma es la misma de la igualdad respectiva al movimiento rectilíneo uniforme.

Por estos resultados conformes entre sí, durante el segundo período que es de movimiento uniforme rectilíneo ó circular en la máquina, vemos que el trabajo moviente que hace la potencia F equivale á la suma de trabajos resistentes que hacen la resistencia util F' y la nociva F''; es decir, que estas resistencias absorven cabalmente todo el trabajo que hace la potencia, ó bien que el trabajo $F' \times e'$ utilizado es menor que el $F \times e$ empleado, tanto cuanto sea el perdido $F'' \times e''$. Quede pues consignado este principio, en la igualdad de trabajos hechos con movimiento uniforme rectilíneo ó circular de cualquiera máquina,

$$F \times e - (F' \times e' + F'' \times e'') = 0. \quad (*)$$

91. Mas, puesto que en el primer período, durante el movimiento acelerado, resultó hecho por el esceso de la po-

tencia, y desde entonces lleva la máquina en su masa M el trabajo $\frac{M\times v^2}{2}$; resulta que, comprendiendo en F y e los escesos del primer período, la relacion de trabajos hechos por las fuerzas desde que principió á moverse la máquina hasta el fin del tiempo total es

$$F\times e-(F'\times e'+F''\times e'')=\frac{M\times v^2}{2}. \qquad (**)$$

En la Mecánica se llama *fuerza viva* el producto $M\times v^2$ de la masa de un cuerpo multiplicada por la potencia segunda de la velocidad que lleva, y por esta razon se dice que es *igualdad de fuerzas vivas* la (**), para distinguirla de la (*) llamada de *trabajos virtuales.*

92. Bastan estas dos igualdades para esplicar las ideas sencillas que sobre el trabajo nos proponemos desenvolver en este cuaderno de rudimentos, siendo rectilíneos ó circulares los espacios descritos por los diversos puntos de la máquina, y escluyendo la infinidad de espacios curvilíneos de otras formas diferentes que puede haber en el trabajo.

Aun limitándonos á solamente los movimientos rectilíneo y circular, cada uno de ellos puede ser *continuado* ó *alternativo*. Por ejemplo, cuando un hombre saca agua de un pozo con un cubo, el movimiento del cubo mientras baja ó mientras sube es rectilíneo continuado; pero considerando el movimiento de subida y de bajada, este doble movimiento es rectilíneo alternativo. Cuando una rueda sigue moviéndose siempre en un mismo sentido, el movimiento es circular continuado; pero el movimiento de la péndola de un reloj es movimiento circular alternativo.

Además de la distincion que se hace de estas cuatro variedades de movimiento posibles en uno de los miembros ó partes de una máquina, puede suceder que en la transicion desde este miembro á otro inmediato haya de cambiarse el movimiento del primero en otro diferente, aunque siempre ambos pertenecientes á los cuatro mencionados. Por ejemplo, el movimiento circular continuado del eje de la rueda hidráulica de una ferrería, produce con sus *levas* ó dientes movimiento circular alternativo vertical en el mazo que bate al metal sobre el yunque; y si en vez del mazo se emplease maza de corredera vertical, esta maza recibirá movimiento rectilíneo alternativo vertical, producido por el circular continuado de las levas del eje de la rueda.

Estas advertencias nos hacen ver, que la igualdad (*) ó la (**) del trabajo se ha de aplicar solamente á cada miembro ó parte de una máquina compuesta; y que si aquel miembro simple se mueve á vaivén, hay que aplicar dicha igualdad de trabajos á cada uno de los movimientos seguidos que componen el de vaivén. Es decir que, por ejemplo, en el mazo de mango ó en la maza de corredera, la igualdad se aplica primero al movimiento de ascenso y despues al de descenso.

Ensayos de aplicar las espresiones (*) y (**) á casos en que las cantidades son todavía generales.

93. Principiemos por el caso simple de elevar agua desde un pozo hasta su brocal por medio de un cubo y una soga á mano. Sea F la fuerza que el hombre emplea, y e la altura desde el nivel del agua al del brocal, como tambien F' el peso del agua que sube, y F'' el peso del cubo y de la soga tirante. En este movimiento rectilíneo, que podemos considerar uniforme, hay que emplear la igualdad (*) para calcular uno de sus tres términos cuando los otros dos fueren conocidos; y por ser tan fácil dicha aplicacion, escusamos decir mas ahora.

94. Tratándose del movimiento alternativo rectilíneo, puede servir de ejemplo el movimiento de un pilon para triturar, ó de una maza de corredera vertical análoga á la de hincar pilotes en tierra, ó del émbolo de una bomba para sacar agua, etc. Fijando pues la consideracion en cualquiera de los dos *percutores*, pilon ó maza; sea F' su peso, y e' la distancia vertical que corre; F'' el rozamiento que sufre en las correderas ó guias que determinan el camino al móvil; y finalmente F la potencia vertical que le eleva. Prescindiendo de la fuerza viva en el ascenso, rige la igualdad (*)

$$F \times e = F' \times e' + F'' \times e''.$$

En el descenso, el percutor baja con movimiento acelerado por su propio peso F', y llega al fin del descenso con una velocidad v, sin que la potencia F accione. Por lo cual es la igualdad (**) quien debe ser aplicada ahora, desechando de ella el término $F\times e$; y asi la relacion de trabajos en el descenso del percutor viene á ser

$$F'\times e'-F''\times e''=\frac{M\times v^2}{2}.$$

Si ahora queremos computar los trabajos, empleado, utilizado y perdido durante los dos viajes que componen el alternativo; claro está que al subir el percutor se empleó el trabajo $F\times e$, se utilizó el $F'\times e'$, y se perdió el $F''\times e''$; y que al bajar se ha empleado el trabajo $F'\times e'$ utilizado antes, se ha utilizado el $\frac{Mv^2}{2}$, y se ha perdido el $F''\times e''$.

Luego, en toda la operacion de ascenso y descenso, los trabajos vienen á ser

Empleado.................... $F\times e.$

Utilizado.................... $\frac{M\times v^2}{2}.$

Perdido...................... $2\times F''\times e''.$

95. El mazo de batir metal en una ferrería ofrece un ejemplar de movimiento aternativo circular. Es una palanca de alguno de los tres géneros, con percutor en un estremo que se eleva hasta cierta altura, en virtud de la potencia del diente ó la leva de la rueda, aplicada al brazo que convenga de dicha palanca. Cuando el percutor ha llegado á su mayor altura, queda abandonado á sí mismo, y desde entonces el peso del percutor que fue resistencia al subir, se convierte en potencia al bajar. Sea pues F la potencia del diente que eleva al percutor, y e el espacio circular que describe el punto de aplicacion de esta leva; como tambien F' el peso que resulta en el centro de gravedad del percutor, incluso su brazo de palanca ó parte del mango, y e' el espacio circular que describe este punto; y por último, F''

el rozamiento del eje de la palanca, y e'' el espacio circular que describe el punto del rozamiento.

Al elevarse el mazo, si se desprecia la fuerza viva, la igualdad (*) será

$$F \times e = F' \times e' + F'' \times e''.$$

Al bajar el mazo cesa F; el peso F' se convierte en potencia; la masa M considerándola concentrada en el percutor, ó sea despreciando la del mango, llegará al yunque con la velocidad v, y la igualdad (**) será aqui

$$F' \times e' - F'' \times e'' = \frac{Mv^2}{2}.$$

Fácil es deducir aqui las cantidades de trabajo empleado, utilizado y perdido durante los dos viajes de ascenso y descenso, á manera que se hizo en el ejemplo anterior.

96. Pero en las máquinas percutoras, y casi podíamos decir que en todas, el trabajo utilizado que por el cálculo resulta se trasmite á la *manobra* ó cosa que se elabora, como por ejemplo el trabajo utilizado $F' \times e'$ en el movimiento uniforme se trasmite al cuerpo que opone la resistencia F', y como el $\frac{Mv^2}{2}$ en el movimiento acelerado de descenso en los percutores se trasmite á la materia del metal que se bate. Y puesto que muchas veces no es fácil apreciar todos los datos necesarios para el cálculo, su resultado puede entonces discrepar algo respecto del resultado que la esperiencia diere. Por esta razon, el mecánico que ha de construir una máquina para cierta operacion industrial, se sirve de la igualdad (*) ó la (**) para calcular con los datos que se le dieren la cantidad de trabajo moviente que necesita, sin perjuicio de someter á la esperiencia la máquina despues de construida, para comparar el resultado del cálculo con el efectivo práctico. Asi es como los constructores de máquinas llegan á adquirir la maestría necesaria en la ejecucion de sus obras, si es que no proceden por solo imitacion copiando lo que ven hecho por otros.

Adopcion de unidades propias para valuar las cantidades de trabajo, y cálculo numérico de estas cantidades en casos particulares.

97. Desde que se principió á crear este ramo de Mecánica aplicada, mereció predileccion la unidad mas simple, cual es el producto de una de las unidades legales de peso, como libra, arroba, etc., multiplicada por una de las unidades legales de distancias, como pie, vara, etc. Pero habiéndose posteriormente dilatado los límites del cálculo industrial con enormes fuerzas y máquinas correspondientes, se ha visto que resultan en el cálculo números muy grandes á causa de tan pequeña unidad de trabajo, por lo cual en el dia para las grandes cantidades de trabajo está admitida la unidad llamada *caballo de máquina*, que próximamente equivale á

585 libras elevadas á 1 pie de altura en 1″ de tiempo,

ó lo que es lo mismo, 195 libras elevadas á 1 vara de altura en 1″ de tiempo.

Esta equivalencia de valores del caballo de máquina consiste en que,

del primer modo es	$585^{\text{libs.}} \times 1^{\text{pie}}$,
y del segundo modo es	$195^{\text{libs.}} \times 3^{\text{pies}}$,
que viene á ser	$585^{\text{libs.}} \times 1^{\text{pie}}$.

Convendremos pues en tomar por unidades del trabajo,

la unidad pequeña $1^{\text{libr.}}$ elevada á 1^{pie}, que designaremos 1^{lp}.

la unidad grande $\begin{cases} \text{1 caballo de máquina, que designaremos } 1^{\text{c}}, \\ \text{ó sea } 585^{\text{lp.}} \text{ en } 1'' \text{ de tiempo.} \end{cases}$

98. Para que se forme idea de la numeracion del trabajo de las fuerzas, supongamos que la F es equivalente á

200 libras, y que su punto de aplicacion describe un espacio lineal e de 100 varas, ó sea de 300 pies, en $4'$ de tiempo. La cantidad de trabajo hecho será

$$200 \times 100 = 20000 \text{ libras elevadas á 1 vara en } 4',$$

á que corresponden 5000 en $1'$, 300000 en 1 hora, 7200000 en 24 horas, y en 8 horas, que supondremos ser el dia laboral, 2400000.

Y puesto que 20000 libras elevadas á 1 vara en $4'$ equivalen á 60000 libras elevadas á 1 pie en $4'$, dividiremos 60000 por 240, que son los segundos de $4'$, y se tendrá el número 250 libras elevadas á 1 pie en $1''$: luego, el poder de la máquina en caballos viene á ser algo menor que medio caballo de máquina.

99. A fin de aclarar mas las ideas, vamos á resolver algunos problemas.

I.º *¿Cuánto trabajo emplea en un dia laboral de* 10 *horas un animal aplicado á una noria, ejerciendo la fuerza de* 8 *arrobas y dando dos vueltas de á* 15 *varas en cada minuto?*

Tenemos los datos

$$F = 8 \times 25 = 200 \text{ libras},$$
$$e = 15 \times 2 = 30 \text{ varas} = 90 \text{ pies en } 1',$$

y la cantidad de trabajo será,

$200 \times 90 = 18000$ libras elevadas á 1 pie en $1'$;

$18000 \times 60 = 10800000$ libras elevadas á 1 pie en 1 hora;

$1080000 \times 10 = 10800000$ libras elevadas á 1 pie en un dia laboral.

Si queremos reducir á caballos de máquina la cantidad de trabajo hallada, dividiremos 18000 por $60''$ que tiene $1'$, y resultará el número 300 libras elevadas á 1 pie en $1''$, ó sea algo mas de medio caballo de máquina. Este ejemplo ha sido propuesto para manifestar la diferencia que hay entre el trabajo de un caballo natural y el trabajo llamado caballo de máquina. El gran esceso de este poder ó trabajo sobre el que razonablemente puede hacer un caballo natural en 1″, dió motivo á discordias sobre la adopcion de la unidad de trabajo; discordia que al fin ha cesado, conviniendo todos en el nombre y el significado de *caballo de máquina.*

II.° *Se pide saber la cantidad de trabajo utilizado en la noria, sacando desde la profundidad de 12 varas, 5 pies cúbicos de agua por minuto durante el dia laboral de 10 horas, y suponiendo 47 libras el peso de cada pie cúbico de agua.*

Con estos datos, que son

resistencia util $F' = 47 \times 5 = 235$ libras,

y el espacio $e' = 12$ varas $= 36$ pies,

resulta la cantidad de trabajo utilizado

$235 \times 12 = 2820$ libras elevadas á 1 vara en 1′;

169200 libras elevadas á 1 vara en 1 hora;

1692000 libras elevadas á 1 vara en 1 dia laboral.

Si para obtener este trabajo util, que viene á ser 5076000 libras elevadas á 1 pie en 1 dia laboral, se empleó el trabajo 10800000 libras elevadas á 1 pie en dicho tiempo, segun el problema 1.°; restemos de este aquel, y resultará para el trabajo $F'' \times e''$ perdido

5724000 libras elevadas á 1 pie en el dia laboral;

luego, segun las condiciones del problema, el trabajo perdido es algo mas que el utilizado, y algo mas que la mitad del empleado. Esta pérdida de trabajo se debe atribuir á el agua vertida en el camino, á los rozamientos de la máquina, etc.

III.° *Valuar la cuantía del trabajo que hará el rozamiento F'' de un eje de hierro de 1 pie de diámetro contra sus apoyos de bronce con unto de sebo, dando aquel 10 vueltas en cada minuto, y ejerciendo presion equivalente á 100 arrobas.*

Las tablas de rozamientos (35) dan el factor $\frac{10}{100}$, ó sea

$\frac{1}{10}$ para el rozamiento F'', que será $\frac{1}{10} \times 100$ arrobas, ó mas simplemente 10 arrobas; y tendremos

$$F'' = 250 \text{ libras.}$$

El espacio e'' en cada minuto es 10 circunferencias, y suponiendo la circunferencia triple del diámetro de 1 pie (*Geometría* 8), será en 10 vueltas por minuto

$$e'' = 30 \text{ pies.}$$

Con estos valores de F'' y e'', el trabajo hecho, ó en realidad absorvido por el rozamiento, viene á ser

$$250 \times 30, \quad \text{ó} \quad 7500 \text{ libras elevadas á 1 pie en } 1'.$$

IV.° *Computar aproximadamente la cantidad de trabajo que emplea el forjador de grueso con martillo de 15 libras, elevándole hasta la altura de 3 varas desde el punto inferior de su curso, 2560 veces en el dia laboral, estando el yunque á una vara de altura sobre dicho punto inferior.*

En esta faena, despues de haber descargado el martillo su golpe, baja desde el yunque á dicho punto inferior adquiriendo mas y mas velocidad; por la cual, si se moviera como una péndola el martillo, subiria por sí hasta la altura del yunque en el ascenso siguiente. Pero como el obrero principia á esforzar la subida casi desde el punto inferior de la línea curva que el martillo describe en su ascenso, bien se puede computar que el trabajo empleado por el obrero y absorvido por el móvil en este espacio es producto de 15 libras elevadas á 3 varas cada vez, ó sea

$$15 \times 3 = 45 \text{ libras elevadas á 1 vara.}$$

Además, el obrero sufre la fuerza que el martillo hace para escapársele hácia fuera de las manos, fuerza que se debe tener en cuenta para el cansancio del individuo, á que contribuyen tambien la precipitacion de los movimientos, el gran calor vecino, etc.

Si ahora quisiésemos valuar el trabajo que el martillo llevará en sí cuando llegue al yunque, considérese que al fin del ascenso queda en el móvil el trabajo debido á su descenso desde el yunque al suelo despues del golpe precedente; esto es, que cuando principia á caer desde su mayor altura tiene ya en sí el trabajo de $15^{l.v.}$, y que en su descenso desde allí hasta el yunque, que dista 2 varas, adquiere el nuevo trabajo 15×2, ó sea $30^{l.v.}$. Añadiendo pues esta cantidad á $15^{l.v.}$, resulta que el martillo traerá en sí al descargar el golpe un trabajo de

45 libs. elevadas á 1 vara, ó sean 135 libs. elevadas á 1 pie.

V.° *Calcular la cantidad de trabajo que se utiliza por cada curso simple de émbolo en una máquina de vapor de las de doble efecto y condensador, suponiendo que el gas acciona á tension de* $2\frac{1}{2}$ *atmósferas, que el émbolo tiene* 200 *pulgadas cuadradas de base, que su curso es de* 6 *pies y lo anda en* 3″.

Para valuar primeramente la fuerza F empleada, tenemos el dato de que la fuerza intrínseca ó elasticidad del vapor ejerce presion equivalente al peso de $2\frac{1}{2}$ atmósferas, que es 30 libras por pulgada cuadrada de base del émbolo (25, II.°). Con que, tenemos $F=30\times 200=6000$ libras.

El peso del émbolo juntamente con su vástago favorece á la potencia en su descenso tanto como le contraría en el ascenso; por lo cual prescindiremos de esta fuerza. Tampoco por ahora contaremos con el rozamiento del émbolo contra la pared del cilindro, sin embargo de no ser tan despreciable esta resistencia. Asi, la única fuerza resistente del problema viene á ser la que el émbolo sufre por la base opuesta, y que aqui es debida á la tension del vapor debilitado que huye hácia el condensador.

Suponiendo pues de $\frac{1}{2}$ atmósfera ó 6 libras por pulgada cuadrada la tension de este gas, su resistencia F'' sobre la base del émbolo será $F''=6\times 200=1200$ libras, que se ha de restar de F para obtener la fuerza utilizada F', ó sea la diferencia

$$F'=F-F''=4800 \text{ libras.}$$

Multiplicando esta fuerza por el espacio 6 pies que anda el émbolo en su curso de subida ó de bajada, resulta que el trabajo utilizado ó restante del empleado en uno de estos viajes, viene á ser

4800×6, ó bien 28800 libras elevadas á 1 pie en 3″,

cuya tercera parte será 9600 libras elevadas á 1 pie en 1″.

Para deducir á cuántos caballos de máquina equivale esta cantidad de trabajo, divídase por 585, y se hallará que el poder de la máquina de vapor de dichas circunstancias es de

16 á 17 caballos de máquina.

Algunos constructores calculan así el *poder* ó *fuerza disponible* de las máquinas de vapor que fabrican, pero no es en realidad tanto el poder de ellas. Porque la fuerza intrínseca del vapor, como en nuestro ejemplo $2\frac{1}{2}$ atmósferas, está medida en la caldera; y en el tránsito desde allí hasta la base del émbolo en el cilindro, el gas pierde calor y de consiguiente parte de su fuerza elástica. Además hay que descontar el trabajo perdido por el rozamiento del émbolo, etc. Y estas observaciones deben servir de aviso á los compradores que encarguen la fabricacion de tales máquinas.

100. Cuando se trasportan por camino horizontal cargas á lomo ó en carruaje, la carga marcha en direccion perpendicular á la de su accion vertical, y de consiguiente no conviene en este caso la definicion del trabajo (83, 2.°), y deja de ser aplicable al efecto conseguido del trasporte. Vamos pues á aclarar el asunto por los siguientes ejemplos.

I.° *Calcular el trabajo que emplea una mula en dia laboral de* 8 *horas, tirando de un cuerpo cuyo peso sea* 30 *arrobas, llevado por camino horizontal en un carruaje que opone resistencia de rozamiento y demás equivalente á* 2 *arrobas, y caminando media legua por hora.*

En este problema, la fuerza F que la bestia emplea es igual á la resistencia F'' de 2 arrobas directamente opuesta; los espacios e y e' caminados son cada uno 10000 pies por hora; y con tales datos tendremos las cantidades, de trabajo empleado

$2 \times 10000 = 20000$ arrobas elevadas á 1 pie por hora;

de trabajo perdido

$2 \times 10000 = 20000$ arrobas elevadas á 1 pie por hora:

sin que aparezca en este caso trabajo alguno utilizado segun la igualdad (*) de trabajos. Pero en realidad existe el efecto obtenido, 30 arrobas trasportadas á 10000 pies por hora. ¿Cómo es pues esta aparente anomalía de resultar un efecto util mayor que el empleado? Facil es conocer que indudablemente consiste en que el peso no camina en su direccion propia, sino en la perpendicular á ella, y que de consiguiente el producto 30 arrobas multiplicado por 10000 pies no es trabajo conforme á la definicion (84, 2.°), pero sí un efecto dinámico comparable solamente á otros de su especie. Luego, en el trasporte horizontal hay que comparar los efectos útiles obtenidos con velocidades diferentes, para computar cuál de ellas conviene mejor para obtener mayor efecto á igualdad de cansancio del animal. Si el trasporte se hiciese por camino inclinado, entonces habria una resistencia componente F' del peso en direccion del camino, y resultaria por la igualdad (*) el trabajo empleado $F \times e$ mayor que el utilizado $F' \times e'$, á causa de la pérdida $F'' \times e''$. Para calcular estos tres trabajos, dada la distancia e por hora, hay que hallar primero los valores de F' y F'' por la teoría del plano inclinado, para deducir la equilibrante F.

II.° *Llevando una bestia acuestas* 10 *arrobas de peso por un camino horizontal durante* 8 *horas, con velocidad de* 10000 *pies por hora, calcular el trabajo empleado.*

Aqui, ni aun el trabajo empleado podemos deducir, como en el problema precedente, por no saber cuál sea la resistencia nociva; ni aparece tampoco resistencia útil, por ser nula en direccion horizontal la componente del peso.

Pero en la faena de andar cargado un animal hay la particularidad, de que el individuo en cada paso tiene que levantar algun tanto su lomo y de consiguiente la carga, que vuelve á bajar en seguida otro tanto sostenida por el lomo. Asi resulta un escalonado de subidas y bajadas consecutivas durante toda la marcha, y la suma de alturas de estos escalones multiplicada por el peso 8 arrobas, será el trabajo empleado igual á el perdido. Mas no aparece el trabajo utilizado, y solo sí el efecto útil de haber trasportado 8 arrobas por hora á la distancia horizontal de 10000 pies: cantidad comparable solamente á otra de su especie que se obtenga con diferente velocidad, para saber cuál de estas es mas ventajosa á igualdad de cansancio.

Si el camino es inclinado, el peso dará componente F' en esta direccion; la potencia F empleada en la misma direccion será igual á F', pero no tenemos resistencia nociva F'' en dicha direccion; de suerte que dado el espacio e caminado por hora, solo se podrán calcular los trabajos iguales $F\times e$ empleado y $F'\times e$ utilizado á lo largo del camino inclinado. Al mismo tiempo existen los trabajos empleado y perdido iguales, por las subidas y bajadas del peso formando escalones como en el camino horizontal. Con que, agregando el trabajo empleado de este modo al empleado en direccion del camino inclinado, resulta un total mucho mayor que el empleado en camino horizontal á igualdad de velocidades y de jornadas; resultado que la esperiencia comprueba diariamente por el cansancio de los animales.

Método práctico de medir la velocidad del régimen en algunas máquinas.

---

101. Para cada clase de obra conviene que la máquina se mueva con cierta velocidad propia, que se llama *régimen* de aquella máquina como está ya dicho.

1.° En las que pertenecen á la clase general de tornos trabajando con movimiento sensiblemente uniforme (31), la velocidad del régimen consiste en que haga un determinado número de revoluciones durante cada unidad de tiempo. A fin de observar si en efecto da este número de vueltas, ó mas ó menos, se señala un punto del árbol ó de la rueda, y se cuenta el número de veces que aquel punto pasa por el frente de otro fijo que se haya elegido fuera de la máquina, durante el tiempo trascurrido desde que se principió la cuenta hasta que se acaba, medido por un reloj. Y conviene que este tiempo sea bastante largo para mayor exactitud de la cuenta. Suponiendo por ejemplo que en 4 minutos ha dado la máquina 40 vueltas, la velocidad será 10 vueltas por minuto. De suerte que si la velocidad del régimen hubiere de ser 8 vueltas por minuto, habrá que disminuir la fuerza de la potencia, ó aumentar la resistencia, hasta la cantidad necesaria para el régimen.

Conocida la velocidad de una máquina tornante, fácil es calcular los espacios descritos por sus diversos puntos. En efecto, si por ejemplo el punto señalado para la observacion fue uno de la superficie del árbol cuyo rádio tenga 1 pie de longitud, y por consiguiente $2\times3,1415.....$ la circunferencia (*Geom.* 41); el espacio caminado por aquel punto al cabo de 10 vueltas será $10\times2\times3,1415.....$ pies, que viene á ser próximamente 63 pies por minuto. Y como los espacios caminados por los puntos de la máquina rotante son proporcionales á sus distancias al eje geométrico de rotacion ó central del árbol, se sigue que un punto del cerco de la rueda distante 15 pies de dicho eje habrá caminado el espacio x de la proporcion

$$1 : 63 :: 15 : x,$$

esto es, $$x=63\times15=945 \text{ pies por minuto.}$$

Sin embargo de las grandes diferencias que puede haber en los espacios caminados por los puntos de una máquina tornante, segun sus distancias al eje lineal de rotacion, es de advertir que *el trabajo medido con relacion á un punto, es igual á el trabajo medido con relacion á otro punto cualquiera de ella.*

Para demostrar esta verdad importante, sabemos que en la palanca del primer género, á que en realidad pertenece el torno, el equilibrio exige que la suma de momentos de las resistencias sea igual á el momento de la potencia. De suerte que si este momento $F\times h$ de la potencia F multiplicado por su brazo h de palanca satisface á la igualdad de equilibrio, tambien satisfará otro momento $f\times H$ de una potencia menor f multiplicada por su mayor brazo H de palanca, si entre estos dos momentos hay la igualdad

$$F \times h = f \times H$$

ó bien la proporcion $F : f :: H : h.$

Y como entre los brazos ó rádios H, h y los espacios E, e descritos por sus estremos hay la proporcion

$$H : h :: E : e,$$

resulta $F : f :: E : e$, ó sea, $F \times e = f \times E$;

demostracion de la verdad enunciada. Esto es, que el trabajo de la gran potencia F medido en un punto del árbol ó de la rueda que describe el pequeño espacio e, es igual á el trabajo de la pequeña potencia f medido en un punto del cerco de la rueda qne describe el espacio E grande.

Si conociendo la potencia f que acciona en la circunferencia de la rueda, y el espacio E que su punto de aplicacion camina en la unidad de tiempo, y por consiguiente el trabajo $f \times E$ medido en dicha circunferencia, se quiere saber la cuantía de trabajo $F \times e$ medido en la circunferencia del árbol, se determina primero F por la proporcion $h : H :: f : F$, y el espacio e por la proporcion

$H : h :: E : e$, para formar el producto $F \times e$.

De un modo análogo se resuelve el problema inverso, ó sea calcular el trabajo medido en la circunferencia de la rueda, sabiendo la cuantía del trabajo medido en la circunferencia del árbol.

2.° En las máquinas de vapor, en las soplantes á piston y en las bombas de elevar agua, la velocidad media del émbolo por cada unidad de tiempo se halla por el número de cursos simples que hace durante cierto tiempo de observacion. Suponiendo por ejemplo que hace 56 cursos simples en 4 minutos, se divide 56 por 4 y resultan 14 por minuto. De suerte que si la velocidad del régimen debiera ser 16 por minuto, habrá que aumentar la potencia ó disminuir la resistencia.

Aunque el poder de la máquina de alguna de estas clases se aprecia por solo el trabajo de un curso simple, á manera que en el problema V.º del artículo (99), con las correcciones indicadas entonces; el trabajo utilizado en cada unidad de tiempo, hora ó dia, etc., se calcula multiplicando el de cada curso por el número de cursos hechos en cada unidad de tiempo, ó lo que es lo mismo, multiplicando la fuerza utilizada en el émbolo por la suma de longitudes de los cursos hechos durante dicha unidad de tiempo.

En cuanto á si una máquina de vapor es ó no tan económica como otra, el cálculo se hace comparando los gastos de combustible por hora con las cantidades de trabajo que hacen en este tiempo.

Método práctico de medir la cantidad de trabajo disponible ó utilizado en una máquina tornante (lam. 5).

—

102. De los varios mecanismos que se han ideado para medir prácticamente la cantidad de trabajo disponible en el árbol de una máquina tornante, ninguno ha merecido mas general aceptacion que el *freno* inventado por Mr. Prony (*figura* 16), cuya organizacion y servicio vamos á referir.

Estando parada la máquina, se ciñe al árbol un collar *C* de hierro fundido, compuesto de dos mitades, de modo que su superficie interior quede ajustada al árbol *E*, al mismo tiempo que la superficie esterior cilíndrica y lisa quede perfectamente centrada respecto del eje lineal de rotacion, por medio de ocho tornillos, cuatro en cada estremo del collar, como la figura representa. En la parte intermedia de este cilindro se acomodan dos quijadas *Q* y *Q* de madera fuerte, de las cuales una está encajada á cola de milano en la pieza larga *AB* de madera, que es la palanca del freno; y sujetándolas con pernos pasadores por medio de las correspondientes tuercas *t* y *t'*, queda formado el freno, á quien solo falta un plato de balanza suspendido del estremo *B* de la palanca para colocar pesas en él.

Puesto ya el freno en el árbol de la máquina mientras ha estado parada, y desligando de este miembro el movido á cuya resistencia va á sustituir el rozamiento de las quijadas del freno contra el collar, se pone en accion la potencia del agua en la rueda hidráulica, ó del vapor en la máquina de este nombre, etc.: y bien se concibe que el freno todo giraría juntamente con el árbol, si no se le impidiera poniendo pesas en el plato de balanza, hasta componer tanto peso como se necesita para equilibrar á la fuerza de rozamiento del collar contra las quijadas. Mas, no es posible hacer esta pesacion tan pronto ni tan justamente, ni el movimiento de la máquina será tal vez tan uniforme, que la barra AB deje de oscilar; y para detener la oscilacion entre límites cercanos, se habrán puesto de antemano dos banquillos J, J' fuertes que sufran los zapatazos de la barra. El observador sabrá la velocidad del régimen habitual de la máquina, es decir, cuántas vueltas ha de dar en cada tiempo determinado, y no cesará de apretar ó aflojar los tornillos t y t' por medio de sus tuercas, y en consecuencia de aumentar ó disminuir con pesas la carga del plato, hasta que la velocidad llegue al necesario término, y que la barra quede poco mas ó menos en equilibrio. Al cabo de cierto tiempo de observacion para asegurarse de que la máquina sigue con su régimen debido, y que la barra no tiende á oscilar mas en un sentido que en otro, la operacion práctica estará concluida; y tomando el observador nota exacta de la cantidad P de peso que gravita en el estremo B de la palanca, hará que la máquina pare suprimiendo la potencia, á fin de desmontar el freno.

Cuando las fuerzas son grandes, como sucede en las máquinas á que ordinariamente se aplica este freno, poco puede influir en el cálculo que vamos á plantear ahora la diferencia de pesos de los brazos de la barra, á cuyo fin se habrá tambien procurado construirla y aderezarla de manera que poco mas ó menos pese lo mismo un brazo que otro. Y asi, conociendo el peso P que gravita en el estremo B, la distancia l horizontal desde el centro E del árbol á la vertical del punto B, y el rádio r del collar en cuya superficie esterior acciona el rozamiento R incógnito, se tiene la igualdad de equilibrio

$$R\times r=P\times l.$$

Por esta espresion resulta determinada la fuerza R; y hallando tambien el espacio e descrito por un punto de la superficie esterior del collar, como en el artículo precedente se ha esplicado, se tendrá la cantidad de trabajo $R\times e$, que es igual á el disponible de la máquina, es decir, el que este miembro trasmitia íntegramente al miembro movido que se desligó.

Tambien se puede hallar el trabajo del rozamiento R sin calcular el valor de esta fuerza. Para ello sabemos (*Geometría* 8), que espresando π la razon general de la circunferencia al diámetro, será $2r\times\pi$ la circunferencia del collar, y que multiplicando por este número el rozamiento R, se tiene la cantidad de trabajo $R\times2r\times\pi$ en cada vuelta, asi como el hecho durante n vueltas será $R\times2r\times\pi\times n$, ó bien,

$$R\times r\times2n\times\pi.$$

Luego, sustituyendo á $R\times r$ su equivalente $P\times l$, resulta la espresion del trabajo del rozamiento

$$P\times2n\times\pi\times l;$$

para cuyo cálculo basta conocer el peso P que gravita en el estremo B de la barra, la longitud l, y el número n de vueltas de la máquina durante la unidad de tiempo, pues la razon $\pi=3{,}1415$..... es conocida.

Para las esplicaciones precedentes nos hemos referido á la *figura* 16, en que el árbol es horizontal. Y ahora añadiremos, que en caso de ser vertical ó inclinado el árbol, habrá que suspender el plato de una cuerda, que pasando por una polea fija vaya á parar al estremo B de la barra perpendicularmente á la longitud de esta pieza, y sustituir á los banquillos otros obstáculos adecuados para sufrir los zapatazos de la barra.

Sea horizontal ó vertical el árbol de la rueda en que se haga el esperimento con el freno de Prony; entiéndese que ha de pertenecer á máquina estable y no á locomotiva.

Aplicaciones á la investigacion del trabajo perdido en las máquinas rotantes.

103. En toda máquina se pierde alguna parte, mas ó menos considerable, del trabajo empleado por el motor; y la pérdida en una máquina rotante se valua, restando del trabajo empleado $F\times e$ el $2\pi rnPl$ hallado en el árbol por

medio del freno, como está esplicado en el artículo precedente.

Para las aplicaciones de este método general, se necesita primero hallar la cantidad del trabajo empleado por el motor en cada caso; con cuyo objeto vamos á referirnos á las ruedas hidráulicas, indicando brevemente y en general el curso del cálculo, ya que no podemos aqui avanzar mas en el campo inmenso de la ciencia hidráulica, ni aun siquiera en el poco menos estenso de la respectiva á las ruedas movidas por el agua.

Hay diversas clases de ellas; unas, verticales con árbol horizontal; y otras, horizontales con árbol vertical; recibiendo todas en su cerco, armado de paletas ó cajones ó etc., á el agua, que acciona en virtud de la fuerza de su peso cayendo desde un depósito hasta el punto en que abandona á la rueda, despues de haberla comunicado mas ó menos cantidad del trabajo que hace en este curso.

Sea pues F el peso de la cantidad de agua que acciona durante la unidad de tiempo en la rueda, mientras esta da n número de vueltas; a la altura ó *caida* ó *salto* del agua, desde el nivel superior del depósito hasta el punto en que abandona á la rueda; y por consiguiente, Fa la cantidad de trabajo empleado por el motor. Restando de esta cantidad la $2\pi rnPl$ hallada en el árbol mediante el freno, se tendrá la cantidad T de trabajo perdido.

$$T = Fa - 2\pi rnPl.$$

104. Por este sencillo método se resuelven muchas cuestiones de grande interés para la industria, de las cuales apuntaremos las siguientes; aunque á la verdad exigen conocimientos preliminares que fuera necesario poseer para bien esplicarlas y entenderlas.

1.ª *Siendo constante la altura a para una determinada rueda, y variando la abertura del orificio por donde el agua sale del depósito; hallar cuál es la abertura conveniente para obtener la mayor cantidad posible de trabajo utilizado.*

A fin de indicar el método de resolver esta cuestion, supongamos Fa el trabajo empleado en un caso, y $2\pi rnPl$ el medido con el freno; como tambien $F'a$ el trabajo empleado en otro caso, y $2\pi rn'P'l$ el correspondiente trabajo medido con el freno; etc. Restando del trabajo empleado en cada caso el medido, se tendrá el perdido T en un caso, el perdido T' en otro caso, etc., y la abertura á quien corresponda el menor de estos trabajos perdidos será la conveniente para obtener el *máximo* trabajo relativo utilizado.

2.ª *Habiendo calculado teóricamente* (como se puede ver en los tratados fundamentales sobre ruedas hidráulicas) *la cantidad de trabajo disponible de una rueda, cantidad que siempre es menor que Fa por muchas causas, y midiendo con el freno la cantidad efectiva de trabajo disponible; deducir por la resta el esceso del trabajo teórico sobre el práctico; ó mas bien, la razon geométrica que hay entre estas dos cantidades.*

Supongamos por ejemplo que, siendo Qe la cantidad de trabajo formulada por la teoría, sea $2\pi r n P l$ el hallado por el freno como término medio de muchos resultados; y que entre estas cantidades haya la razon

$$\frac{Qe}{2\pi r n P l}=\frac{10}{7}, \quad \text{de donde} \quad Qe\times\frac{7}{10}=2\pi r n P l.$$

Luego, multiplicando la fórmula teórica Qe por el *coeficiente de correccion* 0,7, se podrá admitir como fórmula práctica, aplicable á las ruedas de circunstancias iguales á las dadas para el cálculo, la espresion

$$0{,}7\,Qe.$$

3.ª *Gastando iguales cantidades de agua con igual caida dos ruedas de una misma ó de diferente especie; deducir cuál de ellas produce mayor cantidad de trabajo utilizado.*

Para resolver esta cuestion, se hallan con el freno las cantidades de trabajo disponibles de las dos ruedas; y la razon entre estas dos cantidades manifestará cuál de las ruedas es mas ventajosa en cuanto á economía del trabajo.

105. Análogas cuestiones ofrecen las máquinas de vapor destinadas á mover miembros rotantes; pero los cálculos del trabajo del vapor son todavía mas complicados que los referentes al del agua; aunque el freno de Prony es igualmente aplicable al árbol de cualquiera rueda de máquina estable.

FIN DEL COMPENDIO DE MECÁNICA.

en cada caso el medido, se tendrá el perdido T en un caso, el perdido T' en otro caso, etc., y la abertura á quien corresponda el menor de estos trabajos perdidos será la conveniente para obtener el máximo trabajo relativo utilizado.

2.ª *Habiendo calculado teóricamente (como se puede ver en los tratados fundamentales sobre ruedas hidráulicas) la cantidad de trabajo disponible de una rueda, cantidad que siempre es menor que Pa por muchas causas, y midiendo con el freno la cantidad efectiva de trabajo disponible; deducir por la resta el exceso del trabajo teórico sobre el práctico; ó mas bien, la razon geométrica que hay entre estas dos cantidades.*

Supongamos por ejemplo que, siendo Qe la cantidad de trabajo formulada por la teoría, sea $2\pi r n P t$ el hallado por el freno como término medio de muchos resultados; y que entre estas cantidades haya la razon

$$\frac{Qe}{2\pi r n P t}=\frac{10}{7},\ \text{de donde}\ \ Qe\times\frac{7}{10}=2\pi r n P t.$$

Luego, multiplicando la fórmula teórica Qe por el coeficiente de correccion 0,7, se podrá admitir como fórmula práctica, aplicable á las ruedas de circunstancias iguales á las dadas para el cálculo, la espresion

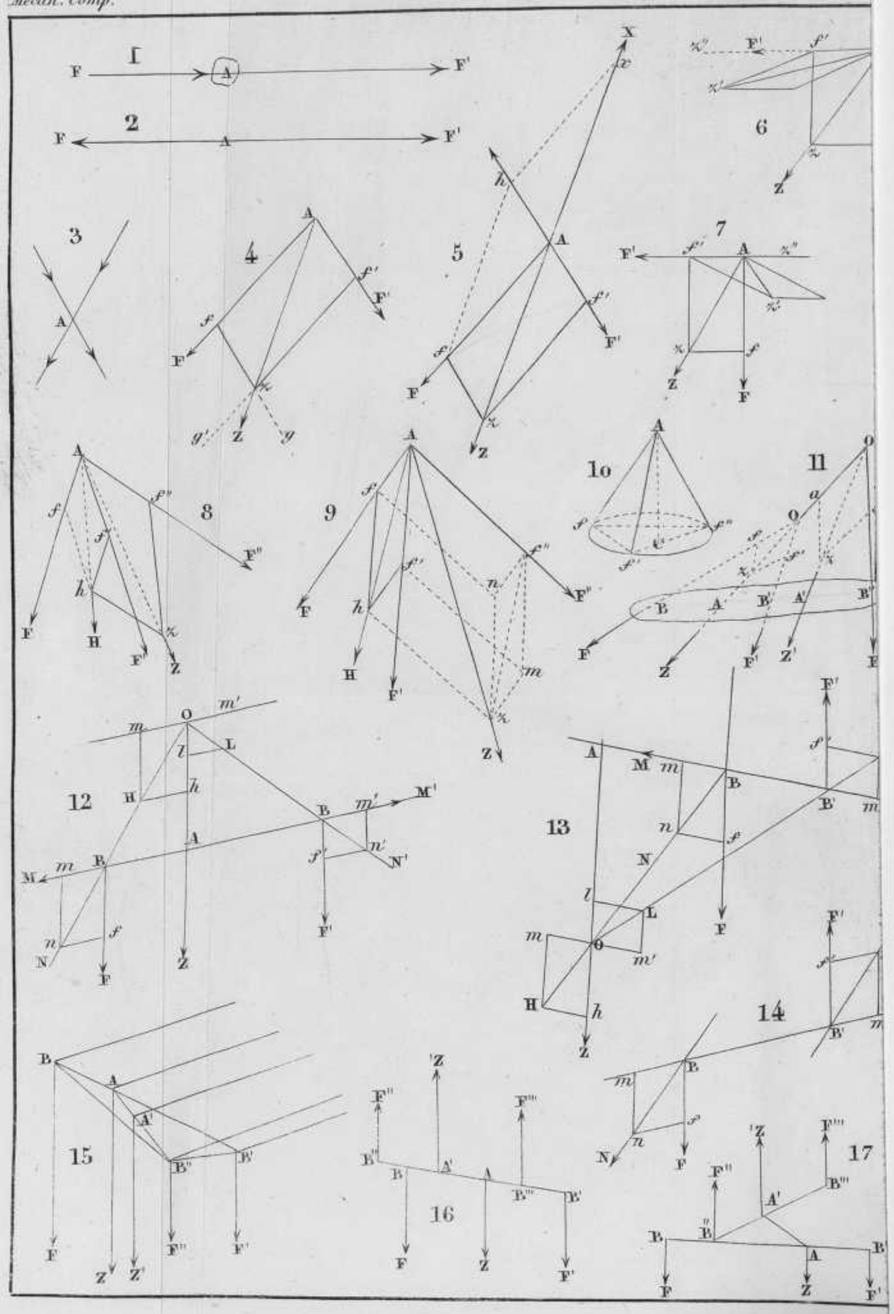
$$0{,}7Qe.$$

3.ª *Gastando iguales cantidades de agua con igual caida dos ruedas de una misma ó de diferente especie; deducir cuál de ellas produce mayor cantidad de trabajo utilizado.*

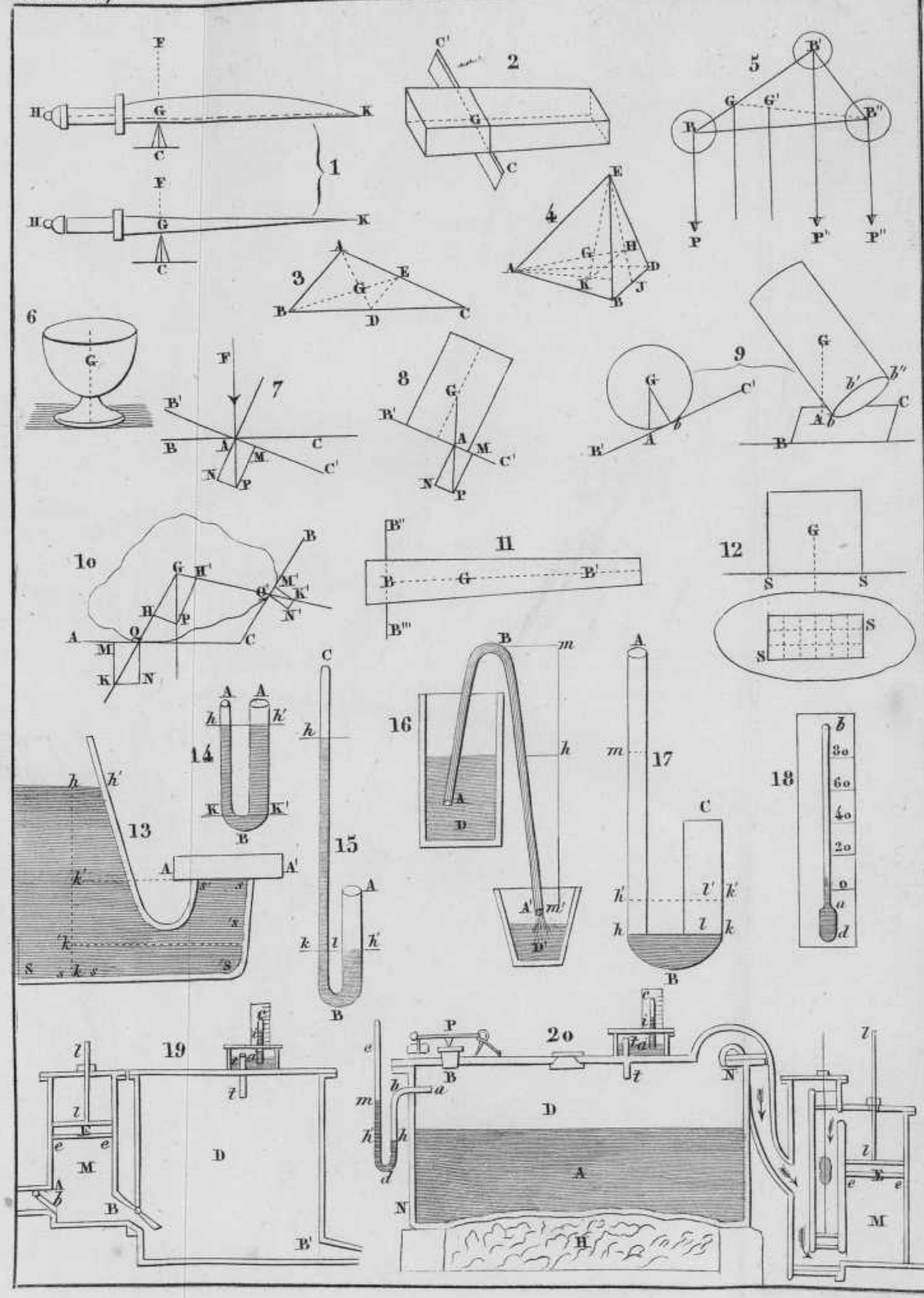
Para resolver esta cuestion, se hallan con el freno las cantidades de trabajo disponibles de las dos ruedas; y la razon entre estas dos cantidades manifestará cuál de las ruedas es mas ventajosa en cuanto á economía del trabajo.

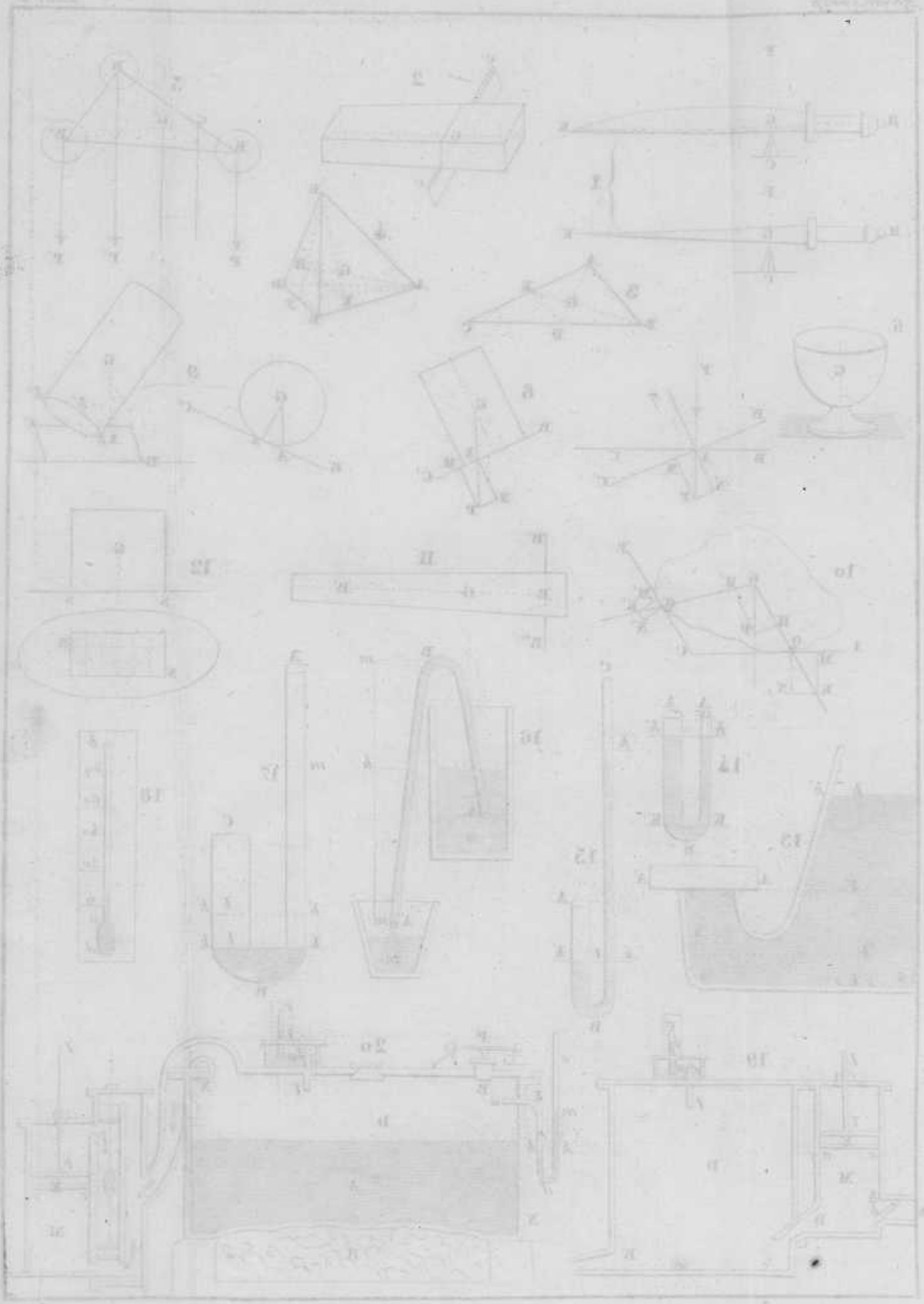
105. Análogas cuestiones ofrecen las máquinas de vapor destinadas á mover miembros rotantes; pero los cálculos del trabajo del vapor son todavía mas complicados que los referentes al del agua; aunque el freno de Prony es igualmente aplicable al árbol de cualquiera rueda de máquina estable.

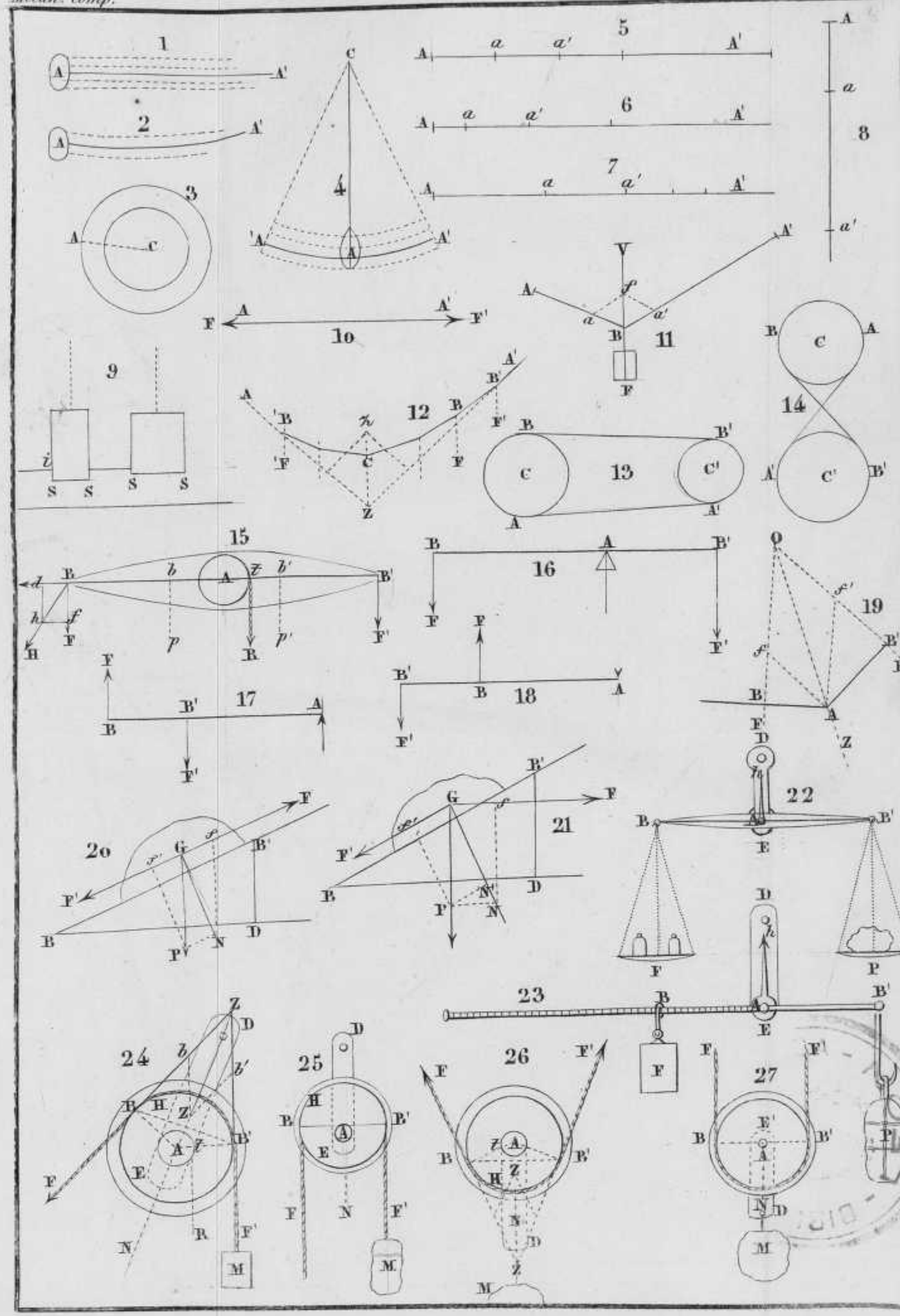
FIN DEL COMPENDIO DE MECÁNICA.

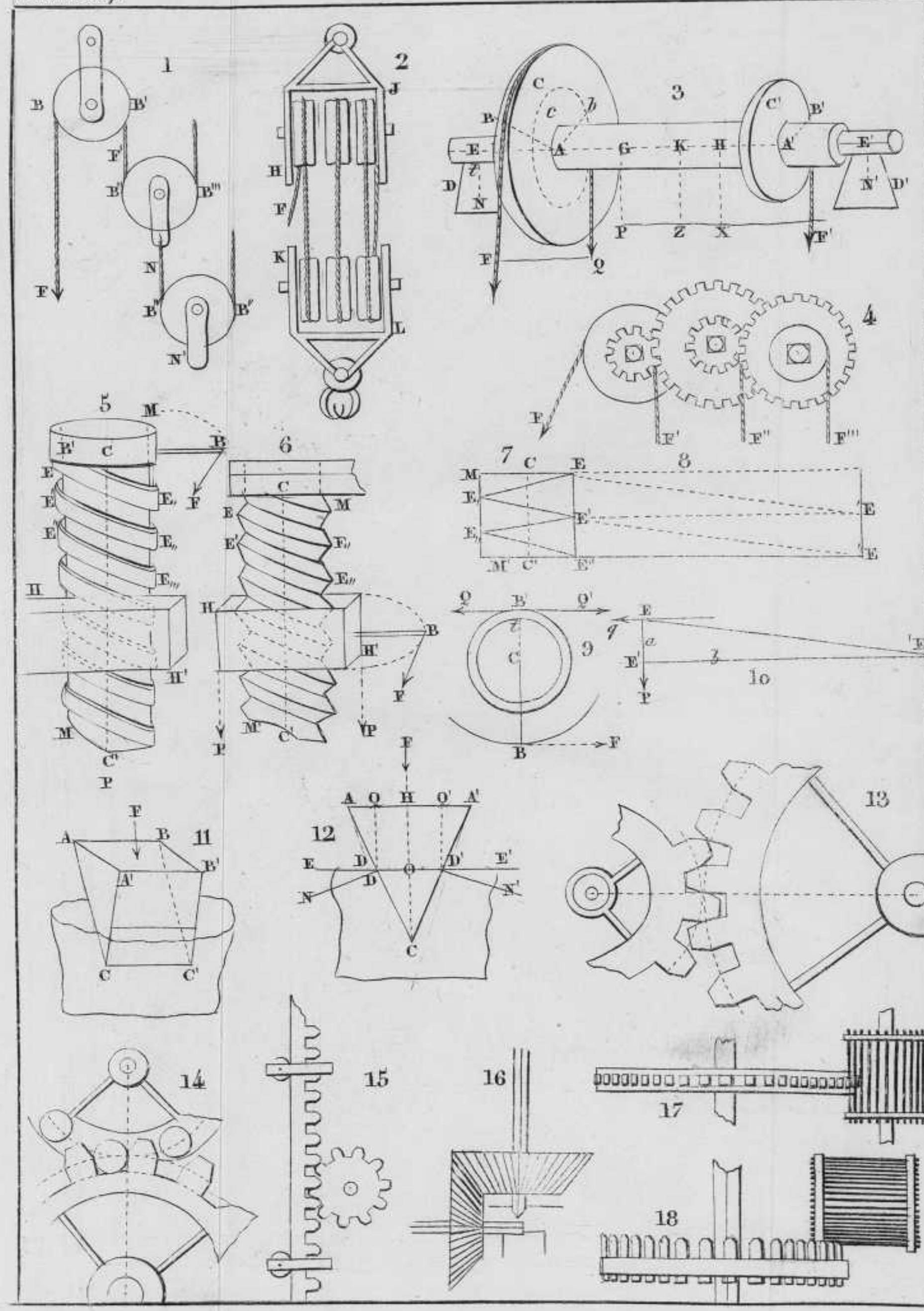


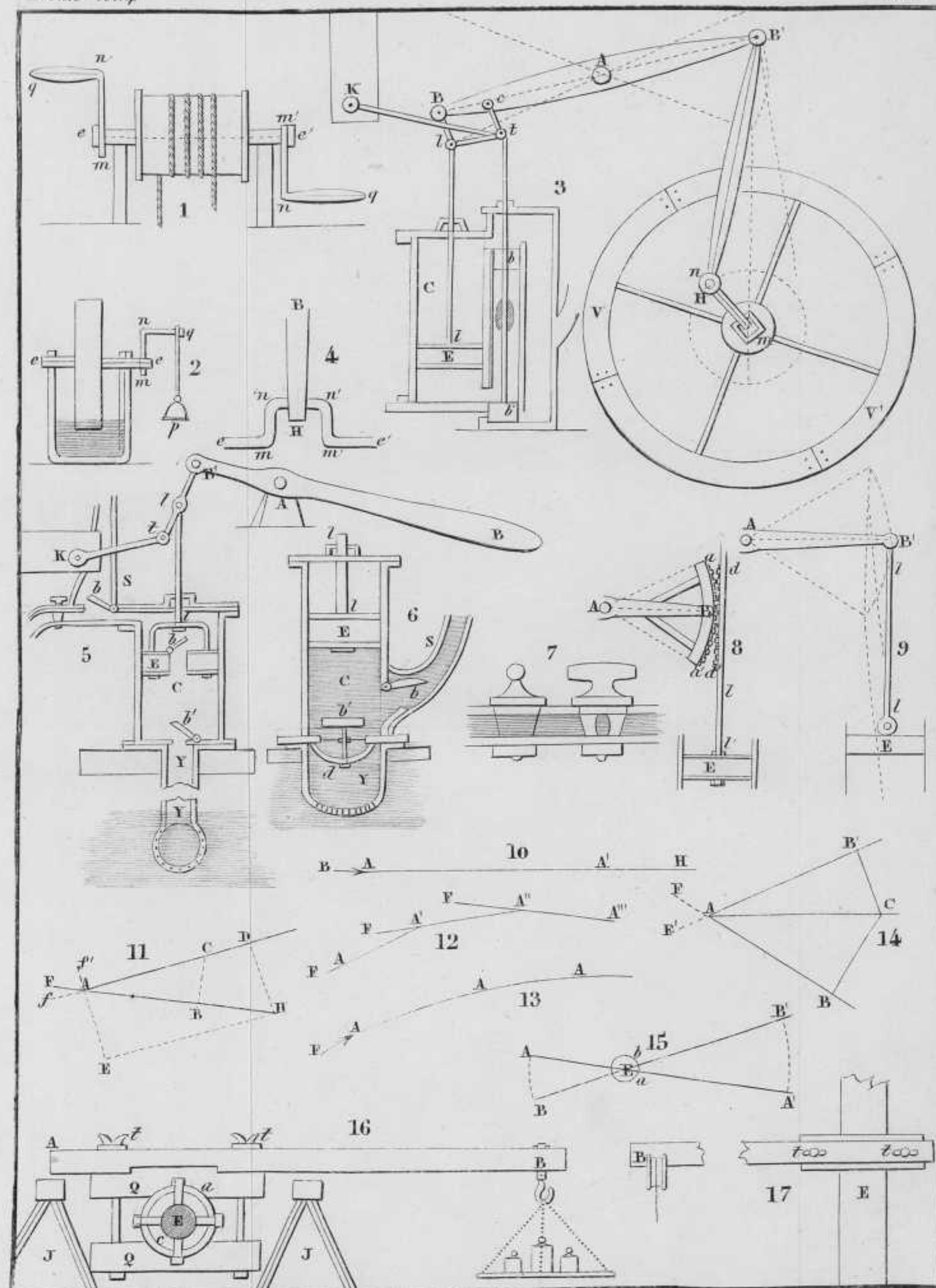
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18



ARITHMET