En Segovia hoy 9-1-40

PROGRAMA RAZONADO

DE

UN CURSO ELEMENTAL

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA,

POR

D. Eduardo Mateo de Iraola,

Licenciado en la Facultad de Ciencias, Catedrático de Matemáticas en el Instituto, y Profesor de Aritmética y Geometría en la Escuela de Artes y Oficios de Segovia, Académico correspondiente de la de Bellas Artes de San Fernando, etc.

2.ª EDICIÓN

CORREGIDA Y AUMENTADA.

SEGOVIA:
EST. TIP. DE SEGUNDO RUEDA,
JUAN BRAVO, NÚM. 20.

1894

Esta obra, así como el **Programa razonado de Geometría y Trigonometría** del mismo autor, han sido declaradas de mérito, de conformidad con el dictàmen emitido por el Consejo de Instrucción Pública, por Real orden de 26 de Julio de 1893.

PRÓLOGO.

CUANDO tantas obras de matemáticas elementales se han publicado en estos últimos años, y algunas de gran valer, el Programa razonado, que hoy damos á luz, ha menester de alguna explicación que justifique su conveniencia ya que no su necesidad.

En modo alguno pretendemos llevar un sólo grano de arena al soberbio edificio de esta ciencia, ni introducir en su exposición novedades á veces peligrosas: mas modestos son nuestros propósitos.

El mejor cumplimiento de nuestros deberes profesionales es únicamente el que inspira este pequeño trabajo, en que tan sólo hemos atendido al deseo de presentar desembarazados de obstáculos los primeros pasos de una ciencia á que la mayoría suele cobrar injustificada repulsión, por las aparentes dificultades que su estudio presenta en edad harto temprana.

En nuestro humilde juicio, la mayoría de nuestras obras de texto adolecen del defecto de ser harto latas para las actuales necesidades de la segunda enseñanza.

Precisa, pues, el profesor hacer un trabajo minucioso para separar lo absolutamente necesario, de lo que excede á las condiciones de preparación y desarrollo intelectual de los alumnos, no menos que al tiempo disponible.

Esta labor del Catedrático no siempre produce los debidos efectos, pues viene, en cierto modo, á aumentar el rudo trabajo de los jóvenes alumnos, por la confusión que en su espíritu produce; no siendo raro, á pesar de los esfuerzos de aquél, verles confundir lastimosamente lo esencial con lo accesorio.

Además, la poca costumbre de tomar apuntes en estos primeros años de su vida escolar, dificulta gravemente las variaciones que introduce el profesor en la obra de texto, al objeto de aclarar ó simplificar las cuestiones mas áridas ó complejas.

Estas, y solo estas, son las razones que nos han movido á condensar en un pequeño cuerpo de doctrina, adaptado al número y forma de las lecciones de nuestro programa, las nociones que estimamos deben exigirse á un alumno de segunda enseñanza, de un primer curso de matemáticas elementales. La concisión extremada con que presentamos las teorías todas, al objeto de no imponer al alumno más que el trabajo mínimo indispensable, acostumbrándole á la vez á la precisión del lenguaje matemático, le dá hecho el extracto de las explicaciones del profesor, que amplían, exclarecen y detallan cada una de ellas. La omisión de la parte práctica, obedece al propósito de que no leída, sino ejecutada por el propio alumno, consolidando así las teorías, venga á completar, con el cuaderno de clase que acompaña en blanco á cada ejemplar, el *Programa razonado*. Este procedimiento, cuya bondad nos justifica la experiencia, vendrá á ser, si acaso, la única novedad que en la disposición de nuestra obra pueda apreciarse.

No hemos de encarecer su mérito, que no es mucho; pero sí hemos de permitirnos rogar a nuestros comprofesores ensayen el procedimiento, en la seguridad de que ha de satisfacerles el resultado. Son contados los que *leyendo* aprenden un curso de matemáticas; pero son mas contados aún los que, calculando y ejecutando ejercicios y problemas, no llegan á adquirir conocimientos generales de estas ciencias.

Este principio, para nosotros axiomático, es el que hemos tratado de poner en práctica con la publicación de una obra que obliga al alumno á *practicar los ejercicios todos de la lección del día*. En nuestro país, donde las enseñanzas teóricas dejan tan poco que desear, forzoso es dedicar algo, en todas las ciencias, á la enseñanza práctica.

Si el propósito es bueno, no faltará quien sepa realizarlo, ya que por nuestra parte no podamos tener tamaña pretensión.»

Esto decíamos al publicar la 1.ª edición de esta obra, que tan benévolamente juzgada ha sido por el Consejo de Instrucción Pública á quien somos acreedores de eterna gratitud.

Hoy, recien publicado el Real Decreto de 16 de Septiembre, que tan radicalmente cambia el plan de estudios de segunda enseñanza, y que tan conforme se halla con el espíritu que inspiró nuestras anteriores palabras, confirmando, en cierto punto, nuestras teorías; al hacer la segunda edición de nuestro Programa razonado de Aritmética y Álgebra, hemos tenido que atender necesariamente á satisfacer el diverso concepto de esta asignatura para los alumnos de 2.º y 5.º año. Señalamos con caractéres distintos la parte que á unos y otros corresponde, á más de los asteriscos que indican la reservada á los últimos.

De esta suerte creemos responder al pensamiento del legislador, consiguiendo la congruencia apetecida en el concepto, extensión y fines académicos de esta asignatura en los dos años señalados.

ARITMÉTICA.

I.

PRELIMINARES.

1. Se dá el nombre de *ciencia* á un conjunto de verdades enlazadas unas á otras y apoyadas en principios evidentes.

Proposición, es la expresión oral de un juicio.

Las proposiciones matemáticas reciben las siguientes denominaciones.

Demostración, es el razonamiento que empleamos para hacer ver la certeza de una proposición.

Definición, es la breve enunciación oral de una idea.

Axioma, es una verdad evidente por sí misma, que ni tiene, ni necesita demostración.

Postulado, es una verdad de carácter práctico, que no tiene, aunque necesitaría demostración.

Teorema, es una proposición cuya certeza necesita demostrarse.

Esta proposición recibe el nombre de enunciado, y consta de dos partes: hipótesis y tésis.

Hipótesis, es lo que se supone cierto y sirve de fundamento á la demostración.

Tésis, es el resultado ó consecuencia de la hipótesis y es el fin de la demostración.

Lema, es un teorema auxiliar que se antepone á otro más importante para facilitar su demostración.

Corolario, es una consecuencia del teorema; del que se deduce, bien sin necesidad de nuevo razonamiento, ó á lo sumo con ayuda de alguno muy sencillo.

Escolio, es una proposición que sirve de enlace á otras varias ó indica sus aplicaciones.

Problema, es una proposición en que se propone un fin para conseguirle. La proposición recibe el nombre de enunciado. Todo problema consta de resolución y demostración.

Resolución, es el procedimiento que empleamos para conseguir el fin apetecido. La demostración justifica este procedimiento.

2. *Matemáticas*, son las ciencias que tratan de las leyes del tiempo y del espacio.

Se dividen en dos grandes ramas según indica la definición.

Aritmética, que trata de las leyes del tiempo, es decir, de cuanto es numerable.

Geometría, que trata de las leyes del espacio, es decir, de cuanto es medible.

3. *La Aritmética*, es la ciencia que trata de los números, es decir, de su construcción, composición y descomposición.

4. *Magnitud*, es todo lo que es susceptible de aumento ó disminución.

Cantidad, es la magnitud que se puede medir.

Número, es el resultado de medir la cantidad.

Unidad, es el tipo que tomamos para medir la cantidad. De suerte, que el número resulta de comparar la cantidad con la unidad, que es lo que llamamos medir la cantidad.

5. El número se divide en *abstracto* y *concreto*.

Es *abstracto*, cuando no determina la especie de la unidad á que se refiere, y *concreto* cuando la precisa.

También se divide en *comensurable* é *incomensurable*.

Comensurable, cuando contiene exactamente á la unidad varias veces, ó á una de las partes iguales de la unidad.

Incomensurable, cuando no contiene exactamente á la unidad ni á ninguna de sus partes.

NÚMEROS ABSTRACTOS.

II.

Numeración de enteros.

1. *Numeración, es la parte de la Aritmética que nos enseña á expresar los números.*

Se divide *en verbal y escrita.*

Numeración verbal, es el medio adoptado para expresar los números con pocas palabras.

Su artificio es por demás sencillo.

La unidad se designa con la palabra...... uno.

La reunión de uno y uno con la palabra...... dos

La de dos y uno; tres.

La de tres y uno, cuatro; la de cuatro y uno, cinco; la de cinco y uno, seis; la de seis y uno, siete; la de siete y uno, ocho; la de ocho y uno, nueve; y la de nueve y uno, *diez*.

La reunión de diez unidades se considera como una nueva unidad que se llama *decena*, y se cuenta por decenas lo mismo que hemos hecho por unidades; así se dice una decena ó diez; dos decenas ó veinte; tres decenas ó treinta; cuatro decenas ó cuarenta; cinco decenas ó cincuenta; seis decenas ó sesenta; siete decenas ó setenta; ocho decenas ú ochenta; nueve decenas ó noventa; diez decenas ó *ciento.*

Entre cada dos decenas consecutivas quedan nueve lugares, que se designan añadiendo al nombre de la primera, los de las nueve primeras unidades.

Así se dice: diez y uno ú once; diez y dos ó doce; diez y tres ó trece; diez y cuatro ó catorce; diez y cinco ó quince; diez y seis; diez y siete; diez y ocho, y diez y nueve.

Y del mismo modo: veintiuno, veintidos, veintitres; veinticuatro,..... veintinueve, etc.

La reunión de diez decenas, se considera como una nueva unidad llamada *centena*, y se cuenta por centenas como por decenas y unidades; así diremos:

Una centena ó ciento; dos centenas ó doscientos; tres centenas ó trescientos; cuatro centenas ó cuatrocientos; cinco centenas ó quinientos; seis centenas ó seiscientos; siete centenas ó setecientos; ocho centenas ú ochocientos. nueve centenas ó nuevecientos; diez centenas ó *mil.*

Entre cada dos centenas consecutivas, quedan noventa y nueve lugares, que se expresan añadiendo al nombre de la primera los de los noventa y nueve primeros números.

Así se dice: ciento uno, ciento dos, ciento tres.... ciento noventa y nueve.

La reunión de diez centenas se mira como una nueva unidad que se llama *millar*, y contamos por millares lo mismo que hemos contado por unidades, decenas y centenas.

Un *millar* ó *mil;* dos millares ó dos mil; tres millares ó tres mil; cuatro millares ó cuatro mil; cinco millares ó cinco mil; seis millares ó seis mil; siete millares ó siete mil; ocho millares ú ocho mil; nueve millares ó nueve mil; diez millares ó diez mil.

Entre cada dos millares consecutivos hay comprendidos nuevecientos noventa y nueve números que se designan con el nombre del primer millar y los de los nueve cientos noventa y nueve primeros números.

Es decir, mil uno, mil dos, mil tres..... hasta mil nueve cientos noventa y nueve.

El conjunto de diez millares se llama *decena de millar;* el de diez decenas de millar, *centena de millar;* y el de diez centenas de millar, millar de millar ó *millón.*

Y se cnenta por millones lo mismo que por unidades sencillas, diciendo: *unidades de millón; decenas de millón; centenas de millón; unidades de millar de millón; decenas de millar de millón; centenas de millar de millón,* y millar de millar de millón ó *billón.*

Todas estas unidades se clasifican también por órdenes y se designan respectivamente unidades de primero, segundo, tercero..... etc., las unidades, decenas, centenas..... etc. como se observa en el cuadro adjunto.

CUADRO DE LA NUMERACIÓN.

Unidad	=	uno...........	de primer orden
Decena		diez...........	de segundo
Centena		ciento.........	de tercero
Unidad	de millar.	mil...........	de cuarto
Decena		diez mil.......	de quinto
Centena		cien mil.......	de sexto
Unidad	de millón.	millón.........	de séptimo
Decena		diez millones....	de octavo
Centena		cien millones...	de noveno

Unidad	de millar de millón	mil millones....	de décimo
Decena		diez mil millones	de undécimo
Centena		cien mil millones	de duodécimo
Unidad	de billón.	billón.........	de décimo tercio
Decena		diez billones....	de décimo cuarto
Centena		cien billones....	de décimo quinto
Unidad	de millar de billón.	mil billones	de décimo sexto
Decena		diez mil billones.	de décimo séptimo
Centena		cien mil billones.	de décimo octavo
Unidad	de trillón.	trillón.........	de décimo nono
Decena		diez trillones....	de vigésimo
Centena		cien trillones ...	de vigésimo primero
Unidad	de millar de trillón.	mil trillones....	de vigésimo segundo
Decena		diez mil trillones	de vigésimo tercero
Centena		cien mil trillones.	de vigésimo cuarto

Con tan sencillo artificio y con solos los nombres de los diez primeros números y los de *ciento*, *mil* y *millón*, combinados convenientemente, pueden expresarse, según hemos visto todos los números.

3. Todo el fundamento del sistema estriba, pues, en los dos principios siguientes.

Todo número entero es la reunión de unidades de diversos órdenes, siendo menos de diez las de cada órden.

La reunión de diez unidades de cualquier órden, constituye una del órden inmediato superior.

4. Este número diez se llama *base*; y por eso el sistema se llama decimal.

Los diferentes sistemas de numeración se distinguen por su base, ó sea el número de unidades de un órden que se precisan para formar una unidad del órden inmediato superior.

5. *Para enunciar un número entero, bastará designar*

sucesivamente el número de unidades de cada órden que contiene, empezando por las de órden superior.

6. La *numeración escrita* tiene por objeto representar todos los números con pocos caracteres ó cifras.

Desde luego se advierte que no pudiendo llegar á diez las unidades de cada órden que un número contiene, serán nueve los caracteres precisos. Estos caracteres son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que se leen uno, dos, tres, cuatro........ nueve, y se llaman *cifras significativas*. Para distinguir si estas cifras representan unidades de uno ú otro órden, se ha *convenido que cada cifra represente unidades del órden indicado por el lugar que ocupa, contando de derecha á izquierda*; y como puede darse el caso de que el número carezca de unidades de un órden determinado, se expresará la carencia de estas unidades con la cifra 0 llamada cero.

7. De aquí se deduce que admitimos desde luego en todo número dos valores: uno, que llamaremos *absoluto*, es el que tiene por su figura; y el otro, que se llama *relativo*, es el que le corresponde por el lugar que ocupa.

8. Por consiguiente, *si á la derecha de un número entero colocamos un cero, el número quedará hecho diez veces mayor;* pues sus unidades pasarán á ser decenas, las decenas, centenas, etc.; y si todas sus unidades se han hecho diez veces mayores, el número es evidente que resultará también diez veces mayor.

Del propio modo se demuestra que se hace cien, mil... veces mayor, agregando á su derecha dos, tres. ... ceros.

9. Por el contrario, *un número entero, no varía colocando á su izquierda ceros*, toda vez que sus cifras no cambian de valor absoluto, ni relativo.

10 *Para escribir un número entero bastará escribir*

sucesivamente de izquierda á derecha las unidades de cada órden que el número contenga, empezando por las del orden superior.

II. *Para leer un número entero, enunciaremos sucesivamente las unidades de cada órden que contenga comenzando por las de órden superior.*

Ejemplos.—1.° ¿Cuál es el número que tiene *nueve* unidades de 1.er órden, *cinco* de segundo, *cuatro* de cuarto, *dos* de quinto, *tres* de sexto, *cinco* de noveno, *siete* de décimo y *ocho* de undécimo?

2.° Escribir en guarismos el número anterior.

3.° Leer el número 10750004320013504.

12 *Numeración romana.*—El sistema de numeración que acabamos de esponer fué introducido en España por los árabes, de donde aún tardó en propagarse por el resto de Europa. Los romanos tenían un modo bién imperfecto de representar los números enteros.

Los signos de su numeración eran los siguientes:

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
uno	cinco	diez	cincuenta	ciento	quinientos	y mil

Cada letra puede repetirse tres veces; así CCC se lee trescientos; pero cuatrocientos se escribía CD, mediante el convenio de que toda letra colocada á la izquierda de otra de mayor valor, la disminuye en el valor que tiene; por eso la C disminuye en ciento á la D, escribiéndola á la izquierda.

Como XL se leerá cuarenta; y IV cuatro.

Los números en cuya parte superior se escribe una línea horizontal representan mil veces su valor; así $\overline{\mathrm{V}}$, se lee cinco mil; $\overline{\mathrm{X}}$, diez mil.

Ejemplos:—1.° Leer el número:

$\overline{\mathrm{MMM}}$ $\overline{\mathrm{CDLXV}}$ DCCCXLIX.

2.º Escribir en números romanos, dos millones quinientos setenta y nueve mil trescientos ocho.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

III.

Adición de enteros.

13. En aritmética se conocen con el nombre de *operaciones*, los diversos modos de construir los números.

Las operaciones *fundamentales*, así llamadas, porque en ellas se funda todo el cálculo aritmético, son cuatro: adición, sustracción, multiplicación y división.

14. *Adición es la operación de sumar.*

Sumar es construir con varios números uno solo.

Sus elementos son los números que se han de sumar, y que reciben el nombre de *sumandos*, y el resultado de la operación que se llama *suma*.

El signo de esta operación es +, que se lee más.

En la adición pueden distinguirse dos casos: que los sumandos tengan una sola cifra y que tengan dos ó más.

15. El primer caso se resuelve sabiendo de memoria la tabla de sumar, que se construye fácilmente con el solo conocimiento de la numeración.

Basta para ello escribir en línea horizontal los diez primeros números, empezando por cero, y debajo los que les siguen en la escala natural de los mismos, hasta que escribamos la décima línea que comenzará por nueve. Evidentemente los números de la segunda línea tienen una unidad más que los de la primera, luego representan las sumas respectivas de los números de ésta con uno. Los de la tercera, tienen una unidad más que los de la segunda, y como estos tienen ya una unidad más que los de la primera, tendrán dos unidades más que los respectivos de la primera, y representan, por tanto, las sumas de los diez primeros números con dos. Del propio modo, y empleando el mismo razonamiento, llegaríamos á comprobar que los números de la última línea horizontal son las sumas de los respectivos de la primera con nueve.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Separando, pues, unos de otros por medio de líneas horizontales y verticales, bastaría para tener la suma de dos números de una sola cifra, buscar el uno en la primera línea y el otro, en la primera columna y en el punto de encuentro de ambas se hallará la suma pedida.

16. Para sumar números de varias cifras basta observar que, debiendo ser la suma el conjunto de todos los sumandos, las unidades de la suma deberán ser el conjunto de las unidades de todos los sumandos; las decenas de la suma deberán ser el conjunto ó suma de las decenas de todos los sumandos y así sucesivamente.

17. Se vé, por tanto, que el procedimiento consiste en suponer descompuestos los sumandos en sus diversas unidades, sumar estas separadamente, y reunir todas las sumas.

18. Al efectuar esas sumas parciales, podrá suceder que alguna de ellas exceda de diez, en cuyo caso, dicho se está, que deberemos escribir tan solo las unidades y guardar las decenas para agregarlas, como nuevo sumando, á la suma parcial inmediata.

19. De donde se deduce finalmente, que *para sumar números enteros, basta sumar las unidades del mismo órden de todos los sumandos, empezando para mayor facilidad, por las de primer orden, reservando las decenas que resulten de cualquiera de estas sumas parciales para agregarlas á la de las unidades del orden inmediato superior.*

Ejemplos.—1.º Sumar,

$$38754 + 149615 + 237854$$

$$+ 695314 + 157 + 7896 + 38975 + 3156392$$

2.º $34576 + 3157892 + 689715 + 24315 +$

$$157328 + 4896 + 318997 + 683295 + 61325$$

IV.

Sustracción de enteros.

20. *Sustracción es la operación de restar.*

Restar es descomponer una suma en dos sumandos, siendo uno de estos concidos.

La suma dada toma el nombre de *minuendo.*

El sumando conocido el de *sustraendo;* y el sumando que se busca se llama *resto*, *exceso* ó *diferencia.*

El signo de esta operación es —, que se lee menos.

En la sustracción pueden ocurrir dos casos: 1.º, que el sustraendo tenga una sola cifra, y 2.º, que tenga varias.

21. Para resolver el primer caso basta buscar el número que sumado con el sustraendo nos dé el minuendo, ó bien quitar una á una del minuendo las unidades del sustraendo.

22. Respecto al segundo caso, teniendo en cuenta que el minuendo es, según la definición, la suma del sustraendo y del resto y que, por tanto, las diferentes unidades del minuendo, representan las sumas respectivas de las unidades del mismo orden del sustraendo y del resto, claro se está, que bastará restar las unidades del sustraendo de las del mismo orden del minuendo para tener las del resto.

Podrá suceder que alguna cifra del minuendo sea menor que la correspondiente del sustraendo, lo cual querrá decir que la suma parcial que aquella representa fué mayor que diez; y en este caso, bastará restablecer la suma primitiva, lo que conseguiremos fácilmente tomando de la cifra siguiente del minuendo la decena agregada, con lo que se hará ya fácilmente la sustracción parcial correspondiente.

23. Podemos, por tanto, decir que *para restar dos números enteros basta restar las cifras del sustraendo de las del mismo orden del minuendo. Si alguna cifra del sustraendo es mayor que la correspondiente del minuendo, se agregan á esta diez unidades y se disminuye una á la inmediata superior.*

EJEMPLOS.—1.º Restar 897315 de 10023004.

2.º Restar del número 32573124 el número 9876956.

V.

Propiedades de la adición y de la sustracción.

24. *El valor de la suma es independiente del orden de los sumandos.* Sea la suma $2+3+5$, digo que es igual á $5+2+3$. En efecto; $2+3+5$ representa la suma de $\underline{1+1}+\underline{1+1+1}+\underline{1+1+1+1+1}$ que en cualquier orden que se cuenten sus unidades siempre contiene las mismas.

Prueba de una operación, es otra operación que se ejecuta para asegurarnos de la exactitud de la primera.

Luego, según la propiedad anterior, *la prueba de la adición* puede efectuarse sumando en orden distinto todos los sumandos.

25. *La diferencia entre el minuendo y el resto es el sustraendo.*

En efecto, puesto que el minuendo es la suma del sustraendo y del resto, es evidente que si de esa suma restamos uno de los dos sumandos, resultará el otro.

De donde se deduce que podrá hacerse la *prueba de la sustracción*, restando del minuendo el resto, y deberá resultar el sustraendo; ó bien, con arreglo á la definición, sumando el sustraendo con el resto, y deberá resultar el minuendo.

26. *Si uno de los sumandos aumenta un número cualquiera, y los otros no varían, la suma resultará aumentada en el mismo número.*

En efecto, al aumentar ese sumando en dicho número, es como si este número entrara á constituir un sumando mas, y por lo tanto, la suma resulta aumentada en ese sumando.

27. *Si uno de los sumandos disminuye en un número cualquiera, y los otros no varían, la suma disminuye en el mismo número.*

En efecto, al disminuir el sumando en ese número es tanto como si la suma constase de un sumando menos, y por consiguiente resultará disminuída en dicho número.

28. De estos dos principios se deduce: *que si varios sumandos aumentan, y los otros no varían, la suma aumentará en la suma de aquellos incrementos: que si varios sumandos disminuyen, y los otros no varían, la suma disminuirá en la suma de los números disminuídos por los sumandos.*

29. *Y por último, que si uno ó varios sumandos aumentan el mismo número que disminuyen otros sumandos, la suma no varía,* puesto que disminuye por el segundo concepto, según lo expuesto, lo mismo que aumenta por el primero.

30. *Si el minuendo aumenta ó disminuye un número cualquiera, y el sustraendo no varía, el resto aumenta ó disminuye el mismo número.*

En efecto, el minuendo es la suma del sustraendo y del resto, y para que la suma aumente ó disminuya, es preciso, según hemos visto, que alguno de los sumandos lo efectúe; el sustraendo no varía, según la hipótesis, luego tendrá que aumentar ó disminuir el resto.

31. *Si el minuendo no varía, y el sustraendo aumenta ó disminuye, el resto disminuye ó aumenta en el mismo número.*

En efecto, el minuendo que es la suma no ha variado á pesar de aumentar ó disminuir el sustraendo (uno de los sumandos) luego habrá sido preciso, que el otro sumando, ó sea el resto, disminuya ó aumente en el mismo número.

32. De estos dos principios se deduce que *si minuendo y sustraendo aumentan ó disminuyen, ambos en el mismo número de unidades*, el resto no varía.

Escolio 1.º En este principio se funda la costumbre establecida en la sustracción de enteros, cuando la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo, de añadir una unidad á la cifra siguiente del sustraendo en lugar de restársela á la del minuendo.

2.º En esta propiedad encontraremos también el modo de restar de un número dado, la diferencia de otros dos.

Si, por ejemplo, quisiéramos restar de 35 la diferencia 17—8; diríamos: si tuviéramos que restar de este número el 17, la diferencia sería 35—17; pero el sustraendo propuesto tiene 8 unidades menos, luego el resto debe tener 8 unidades más, ó lo que es lo mismo, el resto será

$$35 - 17 + 8.$$

Luego para restar de un número dado la diferencia de otros dos, basta restar el primero y añadir el segundo.

33. *Complemento* de un número, es la diferencia entre dicho número y la unidad inmediata superior á la primera cifra de su izquierda. Así el complemento de 8 es 2; el de 35 es 65; diferencias de dichos números á 10 y 100 respectivamente.

Como el minuendo es siempre la unidad seguida de ceros, se sigue de aquí que para hallar el complemento de un número, bastará restar todas sus cifras de 9, menos la primera de la derecha que se restará de 10.

Los complementos convierten la sustracción en adición por la consideración siguiente:

425—231 es lo mismo que 425+1000—231—1000;
y esto equivale á 425 + Cto. 231 — 1000.

Luego *para restar dos números, se añade al minuendo el complemento del sustraendo, y de la suma se quita una unidad del orden inmediato superior al sustraendo.*

EJEMPLOS. 1.º Restar, por medio del complemento, de
45786849 el número
87654.

2.º Calcular por medio de complementos la expresión siguiente:

517—484+6837—4592+118—525—19.

VI.

Multiplicación de enteros.

34. *Multiplicación es la operación de multiplicar.*

Multiplicar es hallar un tercer número, llamado producto, que sea respecto del primero, ó multiplicando, lo que el segundo, ó multiplicador, es respecto de la unidad.

El signo de esta operación es × ó . que se lee multiplicado por.

De la definición de la multiplicación se deduce que según el multiplicador sea mayor, igual ó menor que la unidad, el producto será mayor, igual ó menor que el multiplicando, y que en el caso de multiplicación de enteros, multiplicar es repetir al multiplicando tantas veces por sumando como unidades tiene el multiplicador.

Tomar un número dos veces por sumando, ó multiplicarle por 2, se llama *duplicarle.*

Tomarle tres, cuatro, cinco, seis veces, etc., por sumando, ó multiplicarle por 3, 4, 5 ó 6, etc., se llama *triplicarle*, *cuadruplicarle*, *quintuplicarle*, *sextuplicarle*, *etc.*

En la multiplicación de números enteros conviene distinguir tres casos: 1.°, *Que el multiplicando y el multiplicador tengan una sola cifra;* 2.°, *que el multiplicando tenga varias y el multiplicador una;* y 3.°, *que multiplicando y multiplicador tengan varias cifras.*

35. El primer caso, se resuelve fácilmente con ayuda de la tabla de multiplicación, llamada comunmente de Pitágoras, del nombre de su inventor.

Para construirla, basta colocar en línea horizontal los nueve primeros números; y debajo las sumas de estos números consigo mismos. La tercera línea se forma sumando los números de la primera con los de la segunda, y así en general, es decir, sumando siempre los de la primera línea con los de la última hallada.

La explicación es muy sencilla.

En la primera línea están tomados los nueve primeros números una vez, luego representan sus productos por 1.

En la segunda están sumados consigo mismos, ó tomados dos veces por sumando, es decir, que representan los productos de esos nueve primeros números por 2.

La tercera, suma de la 1.ª y la 2.ª, claro está, que contiene dichos números tres veces por sumando ó representa sus productos respectivos por tres, etc.

Para hallar el producto de dos números se procede de modo análogo al empleado en la tabla de sumar.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

36. 2.° Caso. Supongamos que tratemos de multiplicar 5327×4. Diremos, multiplicar un número por 4 es tomarle cuatro veces por sumando, luego

$$5327 \times 4 \text{ equivale á } \begin{array}{r} 5327 + \\ 5327 \\ 5327 \\ 5327 \end{array}$$

Ahora bien, para efectuar esta suma hay que tomar el 7 cuatro veces por sumando, ó sea multiplicarle por 4; después repetir el 2 cuatro veces por sumando ó multiplicarle por 4; y repetir del mismo modo cuatro veces el 3 y el 5.

De donde se deduce que, para resolver el segundo caso de la multiplicación de enteros, basta multiplicar cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador. Desde luego se comprende que las decenas que resulten de cada producto deberán reservarse para agregarlas al siguiente.

37. 3.er Caso. Para la mayor facilidad en la explicación de este caso, conviene distinguir primero dos casos particulares.

1.º *Multiplicar* un entero por la unidad seguida de ceros. Según demostramos en la numeración, bastará agregar á la derecha del multiplicando tantos ceros como tenga la unidad.

2.º *Multiplicar* un entero por cualquier cifra significativa seguida de ceros.

Sea, por ejemplo, 8645 × 3000.

Multiplicar 8645 por 3000 es repetirle tres mil veces por sumando, y esta suma la podremos descomponer, para mayor facilidad, en mil sumas parciales de tres sumandos cada una.

Cada una de estas sumas parciales es el producto de 8645 × 3, y como hay mil de éstas, tendremos que multiplicar ese producto por mil ó sea agregarle tres ceros.

Luego para multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, basta multiplicarle por dicha cifra significativa y al producto que resulte agregarle tantos ceros como tenga el multiplicador expresado.

Resueltos estos dos casos no ofrece dificultad alguna la inteligencia del 3.er caso de la multiplicación.

Supongamos que se quisiera multiplicar 3826 por 286.

Diríamos, multiplicar 3826 por 286 es repetir al 3826 286 veces por sumando, y es claro que conseguiremos esto si le repetimos 200 veces, más 80 veces, más 6 veces, lo que equivale á multiplicarle por 6, por 80 y por 200 y á sumar estos productos, como se expresa á continuación:

$$
\begin{array}{rl}
3826 & \\
286 & \\
\hline
22956 & \text{producto por } 6 \\
306080 & \text{producto por } 80 \\
765200 & \text{producto por } 200 \\
\hline
1094236 & \text{producto por } 286
\end{array}
$$

En la práctica se suprimen los ceros que figuran á la derecha de los productos parciales y que nada influyen en la suma, resultando la siguiente regla: *Para multiplicar dos números de varias cifras, se multiplica todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, los productos parciales se escriben debajo de la cifra del multiplicador que los produce, y su suma nos dará el producto total.*

38. Esta regla puede simplificarse, en virtud de las consideraciones expuestas, en algunos casos particulares.

1.º Si uno de los dos factores, ó ambos terminan en ceros, pueden multiplicarse prescindiendo de los mismos y agregándolos después á la derecha del producto.

2.º Cuando el multiplicador es 11, 21, 31....91, basta agregar al multiplicando su producto por las decenas del multiplicador, corriéndole un lugar á la izquierda.

3.º Si el multiplicador es 11, 12, 13.....19, se agrega al multiplicando su producto por las unidades del multiplicador, corriendo este un lugar á la derecha.

4.º Si el multiplicador es 9, 99, 999....., y en general un número compuesto solo de nueves, basta agregar al multiplicando tantos ceros como nueves tenga el multiplicador y restar del resultado el multiplicando dado. Puesto que repetir nueve veces el multiplicando como sumando es lo mismo que tomarle diez veces y restarle una vez, etc.

EJEMPLOS.—1.º Multiplicar 867594767900 por 9000576000

2.º 97816 $\times$ 1100;
3.º 567894 $\times$ 910;
4.º 687954349 $\times$ 999999.

VII.

Propiedades de la multiplicación.

39. Se llama *igualdad* la expresión de la propiedad de ser iguales dos cantidades.

El signo que la expresa es $=$, que se lee igual y se coloca entre las dos cantidades que gozan esta propiedad.

Se llama *primer miembro* de una igualdad, la cantidad que está á la izquierda del signo igual, y *segundo miembro* la que está á su derecha.

El uso de las igualdades se funda en el siguiente axioma: *Si con cantidades iguales se efectúa la misma operación, los resultados son iguales*.

La propiedad contraria, de no ser iguales dos cantidades, se expresa por medio de los signos $>$ y $<$, que se leen *mayor que*, y *menor que*, y originan la *desigualdad.*

Sentadas estas nociones, pasemos á expresar las propiedades de la multiplicación.

40. *El producto de un entero por otro, es igual al producto del segundo por el primero.*

Sea el producto 5×4, digo que es igual á 4×5.

En efecto, multiplicar 5×4 es repetir el cinco cuatro veces por sumando; pero

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1:$$

luego

$$5 \times 4 = \begin{array}{l} 1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1 \end{array}$$

Ahora bien, como el valor de la suma es independiente del órden de los sumandos, la suma no variará en cualquier órden que la efectuemos. Si la practicamos por líneas, tenemos cuatro de á cinco unidades, ó sea 5×4; y si lo hacemos por columnas, cinco de á cuatro unidades, ó sea 4×5; luego $5 \times 4 = 4 \times 5$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

41. *Si uno de los factores de un producto aumenta un número cu lquiera de unidades y el otro no varía, el producto aumentará el mismo número de veces ese otro factor.*

Pueden distinguirse dos casos: que el factor que aumente sea el multiplicando ó el multiplicador.

1.° Sea el producto 4×9; digo que si al factor 4 le aumento tres unidades, el producto aumentará en 9×3.

En fecto, $4 \times 9 = 4 + 4 + 4 + \ldots$. 9 veces.
y $4+3$ multiplicado por $9 = 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 \ldots 9$ veces.

Ahora bien, comparando estas dos sumas, vemos que contienen el mismo número de sumandos, pero cada sumando de la segunda tiene 3 unidades más que el de la primera, luego la segunda suma resulta aumentada en 9 veces el 3, que es lo que queríamos demostrar.

2.° Sea el producto 9×5; digo que si al factor 5 le añado dos unidades, el producto aumentará en 9×2.

En efecto, multiplicar 9×5 es repetir el 9 cinco veces por sumando; y multiplicar 9 por $5 + 2$, es repetir el 9 cinco más dos veces por sumando; luego en el segundo producto entra el 9 dos veces más por sumando que en el primero, ó ha quedado aumentado en 9×2, que es lo que queríamos demostrar.

42. Del propio modo se demuestra que *si uno de los factores de un producto disminuye un cierto número de unidades, y el otro no varía, el producto queda disminuido en el mismo número de veces el otro factor.*

Para expresar que una suma ó una diferencia indicada han de multiplicarse por un número, se las escribe dentro de un paréntesis.

Así $(4+5+3)7$, quiere decir que la suma $4+5+3$ ha de multiplicarse por siete.

43. *El producto de una suma indicada de varios enteros por otro es igual á la suma de los productos de todos los sumandos por dicho entero.*

Sea la suma $4+5+7$;
digo que $(4+5+7)3=4\times3+5\times3+7\times3$,

En efecto, el producto de 4 por 3 es evidentemente 4×3.

Ahora bien, si al factor 4 le añado 5 unidades, según el teorema anterior, el producto aumentará en 5×3, ó lo que es lo mismo

$$(4+5)3=4\times3+5+3.$$

Si añado nuevamente al multiplicando 7 unidades, el producto aumentará en 7×3, luego

$$(4+5+7)3=4\times3+5\times3+7\times3,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Corolario. *El producto de un entero por una suma indicada de varios enteros es igual á la suma de los productos del multiplicando por cada uno de los sumandos del multiplicador.* Pues según hemos demostrado (40.)

$$4\times(3+5)=(3+5)4=3\times4+5\times4$$

44. *El producto de dos sumas indicadas de varios enteros es igual á la suma de los productos de cada uno de los sumandos del multiplicando por cada uno de los sumandos del multiplicador.*

Sea la suma $4+5+7$ multiplicada por $3+8$, vamos á demostrar que

$$(4+5+7)(3+8)=4\times 3+5+3+7\times 3+ \\ 4\times 8+5\times 8+7\times 8.$$

En efecto, según el corolario anterior,

$$(4+5+7)(3+8)=(4+5+7)3+(4+5+7)8= \\ 4\times 3+5\times 3+7\times 3+4\times 8+5\times 8+7\times 8,$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

45. *El producto de la diferencia de dos enteros por otro es igual á la diferencia de los productos del minuendo y sustraendo por dicho entero.*

Sea la diferencia $9-5$; digo que

$$(9-5)3=9\times 3-5\times 3.$$

En efecto, el producto de 9 por 3 es 9×3; si disminuyo ahora 5 unidades al multiplicando, el producto disminuirá en 5×3; luego

$$(9-5)3=9\times 3-5\times 3,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Escolio. La propiedad anterior

$$(4+5+7)3=4\times 3+5\times 3+7\times 3$$

permite cuando se tiene una suma

$$4\times 3+5\times 3+7\times 3,$$

en que todos los sumandos tienen un factor común 3, escribirla en la forma $(4+5+7(3$, y esta transformación se denomina *separar el factor común*, operación muy frecuente, como veremos en lo sucesivo. Dicho se está que es igualmente aplicable al caso de una diferencia.

46. *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un entero, el producto queda multiplicado por dicho entero.*

Sea el producto 5×7, digo que si uno de los factores 5 se multiplica por 3, el producto quedará multiplicado por 3.

En efecto, $5 \times 3 = 5 + 5 + 5$.

Multiplicando ambos miembros de esta iguaidad por 7, tendremos

$$5 \times 3 \times 7 = (5 + 5 + 5)\, 7 =$$
$$5 \times 7 + 5 \times 7 + 5 \times 7 = 5 \times 7 \times 3,$$

conforme á lo expuesto.

VIII.

División de enteros.

47. *División* es la operación de dividir.

Dividir es descomponer un producto en dos factores, siendo uno de ellos conocido

El producto toma el nombre de *dividendo*, el factor conocido el de *divisor*, y el factor que se busca el de *cociente*.

La división se indica con el signo : que se lee dividido por.

La división de enteros puede ser *exacta* ó *completa*, é *inexacta* ó *incompleta*.

Se llama *exacta* cuando multiplicando el divisor por un entero reproduce el dividendo; é *inexacta* cuando no hay ningún entero que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo.

Así 8 : 4 es división exacta, porque $4 \times 2 = 8$, y 11 : 4 es inexacta, porque el entero 2 es pequeño para cociente, toda vez que $4 \times 2 = 8$ menor que 9; y 3 es grande, porque $4 \times 3 = 12$ mayor que el dividendo 11.

En este caso, el 2 se llama *cociente entero*, y la diferencia entre el dividendo 11 y el producto 4×2 del divisor por el cociente entero, se llama *resíduo*.

* El 2 se llama *cociente por defecto* y el resto 3 se dice *resto aditivo*.

En el mismo ejemplo, 3 será el *cociente por exceso* y el resto *1*. en que 12 excede al dividendo 11 se llama *resto sustractivo*;

En el primer caso; $11 = 4 \times 2 + 3$

En el segundo; $11 = 4 \times 3 - 1$

Mientras otra cosa no se advierta siempre se entiende que el cociente es por defecto.*

De modo análogo á lo dicho en la multiplicación, en la división de enteros conviene distinguir tres casos.

1.º *El divisor y el cociente tienen una cifra.*

2.º *El divisor tiene varias cifras y el cociente una, y*

3.º *El cociente tiene varias cifras.*

48. El *primer caso* se resuelve con ayuda de la tabla de multiplicar. Basta buscar el número que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo ó nos dé el producto menor más próximo al dividendo.

49. 2.º *caso*. Si se tiene en cuenta que es el inverso del 2.º de la multiplicación, se comprenderá que el dividendo ha de ser el producto del cociente por cada una de las cifras del divisor, y, por tanto, las unidades de cada órden del dividendo representan el producto de las unidades del mismo órden del divisor por el cociente, aumentadas tal vez por las decenas que pudieran resultar del producto anterior. Por consiguiente, dividiendo las unidades de órden superior del dividendo por las del

mismo órden del divisor, tendremos con seguridad el cociente buscado.

Supongamos, por ejemplo, que se trata de hallar el cociente de dividir 89756 por 9874, diremos, después de repetir el razonamiento anterior; los 89 millares del dividendo son evidentemente el producto de los 9 millares del divisor por el cociente, aumentados con los que resultaron de multiplicar las centenas del divisor por dicho cociente, luego si dividimos los 89 millares del dividendo por los 9 del divisor, tendrémos el cociente buscado ó un número mayor que ese cociente, pero nunca uno menor. Ochenta y nueve entre nueve á 9, luego 9 es el cociente ó un número mayor que el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 89756 & 9874 \\ \cline{2-2} 88866 & 9 \\ \cline{1-1} 00890 & \end{array}$$

Para ver si es el cociente, bastará multiplicarle por el divisor, y si el producto es menor que el dividendo, estaremos seguros de que es el cociente buscado, y si es mayor le disminuiremos una unidad y repetiremos la comprobación.

50. *3.er caso. Que el cociente tenga varias cifras.*

Lo primero que necesitamos es saber el número de cifras del cociente, y esto se obtiene con facilidad multiplicando sucesivamente el divisor por 10, 100, 1000..... hasta que nos dé un número mayor que el dividendo, en cuyo caso es evidente que el cociente estará comprendido entre los dos últimos multiplicadores empleados, y por tanto, conoceremos con exactitud el número de cifras de que consta.

Supongamos que se tratare de dividir 3875432 por 5314 Para saber las cifras que tiene el cociente diremos:

$$\begin{aligned} 5314 \times 10 &= 53140 < 3875432 \\ 5314 \times 100 &= 531400 < 3875432 \\ 5314 \times 1000 &= 5314000 > 3875432, \end{aligned}$$

luego el cociente buscado está comprendido entre 100 y 1000 y, por consiguiente, tiene tres cifras, luego constará de unidades, decenas y centenas

Ahora bien, como este caso es el inverso del tercero de la multiplicación, recordando lo que allí decíamos, deduciremos que el dividendo propuesto es la suma de los productos parciales del divisor por las centenas, decenas y unidades del cociente. Si nosotros, por tanto, pudiéramos separar en el dividendo el primero de estos productos, dividiéndole por el divisor tendríamos las centenas del cociente. Ahora bien, el producto del divisor por centenas es un número exacto de centenas, luego no puede estar contenido ni en las unidades, ni en las decenas del dividendo. Separo, pues, las decenas y unidades, y en las 38754 centenas del dividendo sé que estará comprendido el producto del divisor por las centenas del cociente, con más alguna centena que haya podido resultar de los otros dos productos parciales. Dividiendo las 38754 centenas del dividendo por el divisor (caso anterior) tendré las 7 centenas del cociente.

$$
\begin{array}{r|l}
3875432 & 5314 \\ \cline{2-2}
15563 & 729 \\
49352 & \\
1526 &
\end{array}
$$

Si ahora restamos del dividendo propuesto el producto del divisor por las 7 centenas del cociente, es evidente que el resto que obtengamos será la suma de los productos parciales del divisor por las decenas y unidades del cociente, y si separamos el primer producto, dividiéndole por el divisor tendremos las decenas del cociente.

El producto del divisor 5314 por 7 restado del dividendo nos dá 1556 centenas que, con las 3 decenas y 2 unidades componen 155632 unidades, suma de los productos parciales del divisor por las decenas y unidades del cociente: pero como el producto del divisor por las decenas del cociente es un número exacto de decenas, separaremos las unidades, y en las 15563 decenas tendremos el producto del divisor por las decenas del cociente, más alguna decena que haya podido resultar del producto del divisor por las unidades del cociente

Dividiendo, pues, 15563 por el divisor tendremos las 2 decenas del cociente, y si ahora restamos el producto del divisor por las 2 decenas del cociente, es evidente que el resto 4935 decenas, que con las 2 unidades del dividendo, componen 49352 es el producto del divisor por las unidades del cociente; por consiguiente, dividido por el divisor, nos dará las 9 unidades del cociente, con lo que habremos terminado la operación.

51. De donde se deduce que la regla de la división será: *separar de la izquierda del dividendo tantas cifras como tenga el divisor ó una más, si las primeras forman un número menor que éste, y dividir sucesivamente este dividendo parcial, y los que resulten de agregar á los restos sucesivos las restantes cifras del dividendo una á una, por el divisor.*

52. *Casos particulares.* 1.° *Que el divisor tenga una sola cifra.*

La operación se efectúa mentalmente como en el siguiente ejemplo:

	32645 : 5	32 entre 5 á 6 y sobran 2
cociente	6509	25 entre 5 á 5
		4 entre 5 á 0 y sobran 4
		45 entre 5 á 9

2.° *Que el divisor sea la unidad seguida de ceros.*

Basta separar de la derecha del dividendo con una coma tantas cifras como ceros tenga la unidad. El número que queda á la izquierda de la coma es el cociente, y el que resulte á la derecha es el resto.

3.° *Que dividendo y divisor terminen en ceros.*

Se efectúa la división después de suprimir en ambos tantos ceros como haya en el que tenga menos.

4.° *Que solo el divisor termine en ceros.*

Se suprimen los ceros del divisor y se separan de la derecha del dividendo otras tantas cifras; se efectúa la división y á la derecha del resíduo hallado se agregan las cifras separadas en el dividendo.

EJEMPLOS.—1.° Dividir 875'64325 por 100000;

2.° 97654000 por 357000; y

3.° Dividir 785678'432 por 945000.

IX.

Propiedades de la división.

53. *El resultado de dividir el dividendo por el cociente en la división completa es el divison.*

Puesto que siendo el dividendo el producto de dos factores (divisor y cociente) si se le divide por uno de ellos resultará el otro.

54. *El resultado de dividir la diferencia entre el dividendo y el resto por el cociente, en la división incompleta, es el divisor.*

En efecto, el dividendo es igual al divisor por el cociente mas el resto; luego quitándole el resto, será igual al producto del divisor por el cociente y dividiendo por uno de los dos factores resultará el otro.

De estos dos principios se deduce que la prueba de la división puede efectuarse dividiendo el dividendo por el cociente, en el caso que la división sea completa, y debemos obtener el divisor; ó bien dividiendo la diferencia entre el dividendo y el resíduo por el cociente, si la división es incompleta, y deberá resultar también el divisor.

55. *El cociente de dividir una suma indicada de varios enteros por otro es igual á la suma de los cocientes que resultan de dividir cada uno de los sumandos por el divisor.*

En efecto, sea la suma $7+5+8$ y el divisor 3, digo que

$$(7+5+8):3=7:3+5:3+8:3.$$

En efecto,

$$(7:3+5:3+8:3)\,3=7:3\times3+5:3\times3+8:3\times3=7+5+8$$

luego $7:3+5:3+8:3$

es, en efecto, el cociente de dividir la suma dada por 3, puesto que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

56. *Todo divisor de varios números es divisor de la suma de éstos*, puesto que el cociente de dividir la suma por el divisor es la suma de los cocientes de dividir dichos números por el mismo divisor.

Por la misma razón, *si un número divide á uno de dos sumandos y no divide al otro, no dividirá á la suma.*

57. *Todo divisor de un número es divisor de los múltiplos de éste*, puesto que un múltiplo de un número es una suma de sumandos iguales á dicho número.

58. *El resto de dividir una suma de dos números por un divisor de un sumando que no lo sea del otro, es el mismo resto que resulta de dividir este último por dicho divisor.*

En efecto, sea $(25+19):5$ que sabemos es igual á $25:5+19:5$; como el primer cociente $25:5$ no deja resto es claro que el resto de dividir la suma dada por 5 es el mismo que el de 19 : 5.

59. *El cociente de dividir una diferencia indicada por un entero es la diferencia de los cocientes de dividir el minuendo y el sustraendo por dicho entero.*

Sea la diferencia $34-18$ y el divisor 4, digo que

$$(34-18):4=34:4-18:4.$$

En efecto,

$$(34:4-18:4)\,4=34:4\times4-18:4\times4=34-18$$

Así pues, $34:4-18:4$ multiplicado por el divisor dá el dividendo, luego es el cocieute.

60. *Todo divisor de dos números es divisor de su diferencia*, pues el cociente de dividir esta diferencia por el divisor es la diferencia de los cocientes de dividir dichos dos números por el mismo divisor.

61. *Si el dividendo y divisor de una división incompleta se multiplican por un entero, el cociente no varía pero el resto queda multiplicado por dicho entero.*

Sea el dividendo 45 y el divisor 6; el cociente entero es 7 y el resíduo 3

Tendremos, pues, $45=6\times7+3$.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por un mismo entero, 4 por ejemplo, tendremos:

$$45\times4=(6\times7+3)\,4=6\times4\times7+3+4$$

igualdad que demuestra que el cociente de dividir 45×4 por 6×4 es el mismo cociente primitivo 7, y el resto es 3×4; es decir, el resto primero multiplicado por cuatro, que es lo que nos proponíamos demostrar.

62. De aquí se deduce: 1.º *que si dividendo y divisor de una división incompleta se dividen por un factor común á ambos, el cociente entero no varía, pero el resto queda dividido por el mismo factor, y*

2.º *Que si dividendo y divisor de una división completa se multiplican ó dividen por un mismo número, el cociente no varía.*

63. *Todo factor de dividendo y divisor de una división incompleta es factor del resíduo; y todo factor de divisor y resíduo es factor del dividendo.*

Sea 60 el dividendo y 8 el divisor, el cociente entero es 7 y el resíduo 4.

Tendremos con arreglo á la definición de resíduo

$$60 - 8 \times 7 = 4.$$

Ahora bien, en esta igualdad, todo factor de 60 y de 8, por serlo de 8 lo será de su múltiplo 8×7, y siéndolo del minuendo 60 y del sustraendo 8×7 lo será del resto 4, que es lo que queríamos probar.

Pero también tenemos

$$60 = 8 \times 7 + 4$$

y todo factor de 8 y de 4, por serlo de 8 lo será de 8×7, que es múltiplo de 8 y siéndolo de los dos sumandos lo será de su suma 60.

PROPIEDADES DE LOS ENTEROS.

X.

Productos de varios factores.

64. Se llama *producto de varios factores* el resultado de multiplicar el producto de dos factores por un tercero, este producto por otro factor y así sucesivamente.

65. Esto sentado, vamos á demostrar que *el valor de*

un producto de varios factores es independiente del órden en que se coloquen.

En el caso en que los factores son dos hemos visto ya que el principio es cierto.

Vamos á demostrar ahora que si los factores son tres, pueden permutarse los dos últimos, sin que el producto se altere.

Sea el producto $4\times5\times7$, digo que es igual á $4\times7\times5$.

En efecto,

$$4\times5=4+4+4+4+4;$$

multiplicando por 7 los dos miembros de esta igualdad, tendremos

$$4\times5\times7=4\times7+4\times7+4\times7+4\times7+\\4\times7=4\times7\times5$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si los factores son varios, decimos que se pueden permutar dos consecutivos, sin que varíe el producto.

Es decir, que

$$4\times5\times7\times3=4\times7\times5\times3.$$

En efecto, acabamos de ver que

$$4\times5\times7=4\times7\times5,$$

luego multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 3, tendremos

$$4\times5\times7\times3=4\times7\times5\times3,$$

que es lo que nos proponíamos probar.

Demostrado este principio, queda demostrado el teorema propuesto, pues podremos, cambiando de lugar cada factor con su inmediato, colocarle en el sitio que deseemos.

Corolarios. 1.º *Si uno de los factores de un producto* *indicado se multiplica por un entero, el producto queda multiplicado por dicho entero.*

Sea el producto 4. 5, 7; digo que

$$4 . 5 \times 3 . 7 = 4 . 5 . 7 \times 3.$$

En efecto,

$$4 . 5 \times 3 . 7 = 4 . 5 . 7 \times 3,$$

según el teorema.

De donde se deduce que *para multiplicar un producto indicado por un entero, basta multiplicar uno de sus factores por dicho entero.*

2.º *Si uno de los factores de un producto indicado se divide por uno de sus divisores, el producto queda dividido por dicho divisor.*

Sea el producto 5 . 6 . 7; digo que

$$5 . 2 . 7 = 5 . 6 . 7 : 3.$$

En efecto,

$$5 . 2 . 7 \times 3 = 5 . 6 . 7,$$

luego 5 . 2 . 7 es, en efecto, el cociente de dividir 5 . 6 . 7 por 3.

De aquí se deduce *que para dividir un producto indicado por un divisor de uno de sus factores, basta dividir este factor por dicho divisor.*

66. *El cociente completo de dividir otro cociente por un número, es igual al cociente de dividir el primer dividendo por el producto de los dos divisores.*

Sea N el dividendo, d el divisor y c el cociente, tendremos $N = d \times c$; si dividimos ahora c por un factor f y llamamos q al cociente, resultará $c = f \times q$ y reemplazando este valor de c en la igualdad anterior,

$$N = d \times f \times q,$$

conforme á lo expuesto.

67. *Potencia* de un número es un producto de factores iguales á este número. Así

$$5 \times 5 \times 5 \times 5$$

es una potencia de 5.

El número que se repite se llama *base*.

El número de factores que componen la potencia designa su *grado*. Así la potencia anterior es de 4.º grado, puesto que consta de cuatro factores.

Exponente de una potencia es el número que indica su grado, y se escribe en la parte derecha superior del número. Así

$$5 \times 5 \times 5 \times 5$$

se escribirá 5^4 y se lee 5 elevado á cuatro.

La segunda potencia se llama *cuadrado*, así como la tercera *cubo*, por razones que expondremos en geometría.

68. *El producto de varias potencias de un mismo número, es otra potencia del mismo número, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.*

Digo que

$$5^3 \times 5^4 \times 5^6 = 5^{3+4+6}.$$

En efecto,

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5; \qquad 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5; \text{ y}$$

$$5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resultará

$$5^3 \times 5^4 \times 5^6 = 5 \times 5 \times 5 \ldots.$$

repetido tres más cuatro, más seis veces $= 5^{3+4+6}$, con arreglo al enunciado.

69. *La potencia de una potencia es otra potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es el producto de los dos exponentes.*

En efecto,

$$(5^4)^3 = 5^4 \times 5^4 \times 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{3\times 4}$$

70. *La potencia de un producto es el producto de las potencias del mismo grado de todos los factores.*

En efecto,

$$(5.3.7)^4 = 5.3.7 \times 5.3.7 \times 5.3.7 \times 5.3.7 = 5.5.5.5 \times 3.3.3.3 \times 7.7.7.7 = 5^4 \times 3^4 \times 7^4$$

71. *El cociente de dos potencias de un mismo número es otra potencia del mismo número, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor.*

Digo que $5^7 : 5^3 = 5^4$.

En efecto, $5^4 \times 5^3 = 5^7$, luego 5^4 es el cociente de dividir 5^7 por 5^3.

Escolios. 1.° Las potencias de 10 son la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente.

2.° Las potencias de 10 son el producto de las potencias del mismo grado de 2 y de 5.

XI.

Divisibilidad de los números.

72. Se llama *número par* al que es divisible por 2, el *impar* al que no lo es.

73. *Para que un entero sea divisible por* 10, *es necesario y suficiente que su primera cifra de la derecha sea cero.*

Pues según hemos visto en la división, para dividir un número por 10 basta separar la primera cifra de su derecha.

Por idéntica razón podremos decir que para que un entero sea divisible por una potencia cualquiera de 10, es necesario y suficiente que termine en tantos ceros como unidades tenga el exponente de la potencia.

74. *Para que un entero sea divisible por 2, es necesario y suficiente que su primera cifra de la derecha sea cero ó par.*

En efecto, si es cero, el número será divisible por 10, según acabamos de ver, y siéndolo por 10, lo será por 2, factor de 10. Si acaba en cifra par, como 416, le descompondremos en decenas y unidades. Así $416 = 410 + 6$ 410 es divisible por 2, por terminar en 0; 6 lo es por ser cifra par, luego la suma 416 también lo será.

Cuando no se cumpla una de estas dos condiciones, claro es que el número no es divisible por 2.

75. *Para que un entero sea divisible por 4 ó 2^2, es necesario y suficiente que sus dos primeras cifras de la derecha, sean ceros ó compongan un múltiplo de 4.*

En efecto, si las dos primeras cifras de la derecha son ceros, el número será divisible por $100 = 2^2 \times 5^2$, y por tanto también lo será por su factor 2^2.

Si las dos primeras cifras componen un múltiplo de 4, le descompondremos en centenas, y decenas y unidades. Así; $416 = 400 + 16$; 400 es múltiplo de 4, 16 también lo es, luego la suma 416 es múltiplo de 4.

Cuando no se verifique una de estas dos condiciones, es evidente que el número no es divisible por 4.

76. *Para que un entero sea divisible por 5, es necesario y suficiente que su primera cifra de la derecha sea 0 ó 5:*

77. *Para que un entero sea divisible por 25, ó 5^2, es necesario y suficiente que sus dos primeras cifras sean ceros ó formen un múltiplo de 25.*

Se demuestran como los dos anteriores.

Escolio. De modo análogo demostraríamos también los caractéres de la divisibilidad por $2^3 = 8$, $5^3 = 125$ y en general por una potencia cualquiera de 2 ó 5.

78. *Todo entero es igual á un múltiplo de* 9 *más la suma de los valores absolutos de sus cifras.*.

Para la demostración de este teorema antepondremos dos lemas.

1.º *La unidad seguida de ceros es un múltiplo de* 9 *más uno.*

En efecto,

$$10 = 9 + 1; \quad 100 = 99 + 1; \quad 1000 = 999 + 1.....$$

y en general la unidad seguida de ceros es igual á un número compuesto de tantos nueves como ceros tenga la unidad, más uno.

Todo número compuesto de nueves es múltiplo de 9, luego la unidad seguida de ceros es un múltiplo de 9, más uno.

2.º *Toda cifra significativa seguida de ceros, es un múltiplo de* 9, *más el valor absoluto de dicha cifra.*

En efecto,

$$700 = 7 \times 100 = 7\,(\text{m}.\,9 + 1) = \text{m}.\,9 \times 7 + 7.$$

Ahora bien, un múltiplo de 9 multiplicado por 7 es otro múltiplo de 9, luego

$$700 = \text{m. de } 9 + 7,$$

con arreglo al enunciado.

Pasemos ya á la demostración del teorema.

Sea el número 4597, tendremos con arreglo á lo expuesto,

$$\begin{array}{rl} 4000 = & \text{m}.\,9 + 4 \\ 500 = & \text{m}.\,9 + 5 \\ 90 = & \text{m}.\,9 + 9 \\ 7 = & \phantom{\text{m}.\,9 +{}} 7 \\ \hline 4597 = & \text{m}.\,9 + 4 + 5 + 9 + 7 \end{array}$$

y sumando ordenadamente estas igualdades y teniendo en cuenta que la suma de varios m. de 9 es otro m. de 9, que es lo que queríamos probar.

79. *La condición necesaria y suficiente para que un entero sea divisible por* 9, *es que la suma de los valores absolutos de sus cifras significativas sea múltiplo de* 9.

Pues según el teorema anterior, todo número es una suma de dos sumandos, un múltiplo de 9 y la suma de los valores absolutos de sus cifras. El primer sumando es múltiplo de 9, luego si el segundo lo es, la suma lo será; y no lo será en el caso contrario.

Corolario. *La condición necesaria y suficiente para que un entero sea divisible por* 3, *es que la suma de los valores absolutos de sus cifras significativas sea múltiplo de* 3.

Pues, en el ejemplo anterior, el primer sumando m. de 9 es siempre divisible por 3, luego si el segundo lo es la suma, ó sea el número, también lo sera; y no lo será en el caso contrario.

80. *Todo entero es igual á un múltiplo de* 11, *más la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar (contadas de derecha á izquierda) menos la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par.*

Para demostrar este teorema conviene anteponer cuatro lemas.

1.° *La unidad seguida de un número par de ceros es un múltiplo de* 11, *más uno.*

En efecto,

$$10000 = 9999 + 1, \text{ pero } 11 \times 9 = 99$$

nos indica que todo número par de nueves es múltiplo de 11, luego

$$10000 = \text{m. de } 11 + 1,$$

conforme al enunciado

742 = 700 + 42
700 = 9 + 1

2.º *La unidad seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de* 11, *menos uno.*

En efecto,

$$1000 = 100 \times 10 = (\text{m. } 11 + 1)\,10 = \text{m. } 11 \times 10 + 10 = \text{m. de } 11 + 11 - 1 = \text{m. de } 11 - 1,$$

que es lo que queríamos probar.

3.º *Toda cifra significativa seguida de un número par de ceros es un múltiplo de* 11, *más el valor absoluto de dicha cifra.*

En efecto,

$$80000 = 10000 \times 8 = (\text{m. } 11 + 1)\,8 = \text{m. de } 11 \times 8 + 8 = \text{m. de } 11 + 8,$$

con arreglo á lo expuesto.

4.º *Toda cifra significativa seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de* 11, *menos el valor absoluto de dicha cifra.*

En efecto,

$$7000 = 1000 \times 7 = (\text{m. de } 11 - 1)\,7 = \text{m. de } 11 \times 7 - 7 = \text{m. de } 11 - 7.$$

Pasemos ya á la demostración del teorema.

Sea el número dado 8597, tendremos con arreglo á lo expuesto

$$\begin{aligned} 8000 &= \text{m. de } 11 - 8 \\ 500 &= \text{m. de } 11 + 5 \\ 90 &= \text{m. de } 11 - 9 \\ 7 &= \phantom{\text{m. de } 11 +{}} 7 \\ \hline 8597 &= \text{m. de } 11 + (5+7) - (8+9) \end{aligned}$$

y sumando ordenadamente estas igualdades y teniendo en cuenta que la suma de varios m. de 11 es otro m. de 11 que es lo que queríamos demostrar.

81. *La condición necesaria y suficiente para que un entero sea divisible por* 11, *es que la diferencia entre la*

suma de las cifras de lugar par (contadas de derecha á izquierda) y las sumas de las de lugar impar sea cero ó m. de 11.

En efecto, según el teorema anterior, todo número es la suma de dos sumandos, un múltiplo de 11 y la diferencia entre las sumas de los valores absolutos de sus cifras de lugar par é impar; luego si esta diferencia es 0 ó m. de 11, el número será también m. de 11 y no lo será en caso contrario.

* Las anteriores reglas de divisibilidad por la base y sus potencias, los factores de la base y la base más ó menos la unidad, pueden deducirse todas de un solo enunciado general, que comprende no solo las referentes á los citados, sí que también las de cualquier otro factor.

Teorema *Todo número entero se compone de dos partes, una divisible por un factor cualquiera* K, *y otra que expresa los caracteres de divisibilidad de dicho número por este factor.*

Sea el número N cuyas diversas cifras representamos por a, b, c, d.....; tendremos

$$N = a + b \times 10 + c \times 100 + d \times 1000 + \ldots$$

Dividamos ahora 1, 10, 100 1000 .. por K, hasta que obtengamos uno de los resíduos ya hallados, en cuyo caso se repetirán los sucesivos, y tomemos el resíduo por exceso ó por defecto, á fin de emplear el menor, será:

$$1 = 0 \times K + 1; \qquad 10 = m \times K \pm r;$$
$$100 = n \times K \pm r'; \qquad 1000 = p \times K \pm r'' \ldots$$

llamando m, n, p. . á los cocientes respectivos y r, r', r''... á los resíduos.

$$b \times 10 = b \times m \times K \pm b \times r;$$
$$c \times 100 = c \times n \times K \pm c \times r';$$
$$d \times 1000 = d \times p \times K \pm d \times r'' \ldots$$

de donde

$$N = a + b \times m \times K \pm b \times r + c \times n \times K \pm c \times r' + d \times p \times K \pm d \times r'' + \ldots.$$

ó bien

$$N = K(b \times m + c \times n + d \times p + \ldots\ldots) + (a \pm b r \pm c \times r' \pm d \times r'' \ldots\ldots)$$

y representando la suma

$$b \times m + c \times n + d \times p + \ldots\ldots \text{ por } q;$$

$$(1)\ N = K q + (a \pm b r \pm c r' \pm d r'' \pm \ldots)$$

igualdad que nos dice que N se compone de dos sumandos; el primero es múltiplo de K, luego si el segundo lo es, también N lo será; y no lo será en caso contrario, conforme al enunciado.

Aplicando este principio al factor 2; tendremos

$$r = 0, \quad r' = 0, \quad r'' = 0, \ldots\ldots$$

y la igualdad (1) nos dará

$$N = 2 q + a.$$

Si hacemos K = 5; la misma igualdad nos dará

$$N = 5 q + a$$

Si hacemos

$$K = 9; \quad r = 1; \quad r' = 1; \quad r'' = 1; \ldots\ldots; \text{ y}$$

$$N = 9 q + (a + b + c + d + \ldots\ldots)$$

Si hacemos

$$K = 11; \quad r = -1; \quad r' = 1; \quad r'' = -1; \ldots\ldots; \text{ y}$$

$$N = 11 q + (a - b + c - d + \ldots\ldots)$$

conforme á las reglas anteriormente halladas.

Si hacemos

$$K = 7; r = 3; r' = 2; r'' = -1; r''' = -3; r^{\mathrm{IV}} = -2; \text{ y}$$

$$N = 7 q + (a + 3 b + 2 c - d - 3 e - 2 f + \ldots\ldots)$$

Lo que nos dice que *para ver si un número es divisible por 7; le dividiremos en grupos de tres cifras, y sumaremos las unidades, con el triple de las decenas, y el duplo* *de las centenas, en cada grupo; sumando las correspondientes á los grupos de lugar impar y las de los de lugar par, si esta diferencia es 0 ó múltiplo de 7, el número será divisible por 7; y no lo será en caso contrario.*

Del mismo modo hallaríamos los caracteres de divisibilidad por cualquier otro número. *

XII.

Números primos.

82. *Número primo ó simple* es el que tan solo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Los números primos menores que 100 son, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

El número que no es primo se llama *compuesto.*

83. *Todo número compuesto es un producto de varios números primos.*

Sea N el número compuesto y d un divisor suyo, tendremos $N = d \times c$, llamando c al cociente de la división. Si d y c son primos el teorema está demostrado. Si suponemos que c no lo es, tendrá un divisor e, y llamando q al cociente, tendremos la igualdad $c = e \times q$; de donde

$$N = d \times e \times q.$$

Si estos factores son primos, el teorema queda demostrado, y si no lo fueran, las mismas consideraciones expuestas nos llevarían á patentizar, por fin, la certeza de la proposición.

84. *Averiguar si un número dado es primo.*

Sea el número 241, que dividido por los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 no dá cociente exacto y al dividirle por 17 nos dá un cociente entero 14 menor que el divisor; digo que este número es primo.

En efecto, si 241 fuera divisible por algún número mayor que 17 lo sería por el cociente de la división (que sería menor que 14) lo cual hemos visto que es imposible. No es divisible por ningún número menor que 17, ni puede serlo por ninguno mayor que 17, luego es un número primo.

Por consiguiente, *si dividido un número por los primos* 2, 3 5, 7,.... *se llega, sin obtener cociente exacto, á un cociente entero menor que el divisor, ese número es primo.*

Ejemplo. Averiguar si es primo el número 9791.

85. *Existen infinitos números primos.*

En efecto, si así no fuera, habría un número primo mayor que todos los demás, al que podremos llamar p.

Ahora bien, el número

$$2\times 3\times 5\times 7\times\ldots\times p+1,$$

formado por el producto de todos los números primos más la unidad, tendría que ser un número compuesto y por tanto divisible por alguno de los números primos 2, 3, 5..... p. El primer sumando es divisible por dicho número primo, el segundo 1 no lo es, luego la suma no lo será. Esta suma, pues, sería un número primo mayor que p, ó lo que es lo mismo, no hay número primo mayor que todos los demás, es decir, que su número es ilimitado.

86. *Criba de Eratóstenes.*=Así se llama, del nombre de su autor, un procedimiento muy sencillo de formar la série de todos los números primos hasta un límite dado.

Supongamos que quisiéramos hallar todos los números primos menores que 100000.

Prescindiríamos desde luego de los números pares, que no pueden ser primos, á excepción del 2, y escribiríamos todos los impares desde 1 hasta 100000. Si á partir del 3, contamos de tres en tres, todos estos números serán múltiplos de 3 y deberemos eliminarlos. Por la misma razón á partir del 5 contaremos de 5 en 5; á partir del 7, de 7 en 7, etc., y así iremos suprimiendo todos los números compuestos.

87. Se llaman *números primos entre sí*, los que no tienen más factor *común* que la unidad. Así, 4, 8, y 25 son primos entre sí.

Se llaman *primos entre sí dos á dos* varios números, cuando cada uno de ellos es primo, son cada uno de los demás, como 4. 9 y 25.

A la simple vista de estos dos ejemplos se observa que varios números primos entre sí pueden no ser primos entre sí dos á dos; pero que los números primos entre sí dos á dos son siempre primos entre sí.

88. *Dos números no primos entre sí tienen, por lo menos, un divisor primo común mayor que* 1.

Siendo estos números no primos entre sí tienen que tener un divisor común mayor que 1; si éste es primo, el teorema está demostrado, y si es compuesto, los números dados serán divisibles por los factores primos de este compuesto

Consecuencias. *Dos enteros consecutivos son primos entre sí*, pues si tuvieran algun factor común tendría que dividir á su diferencia, lo que es imposible.

Un número primo y otro cualquiera que no sea múltiplo suyo, son primos entre sí, pues no pueden tener ningún factor común.

Los números primos, son primos entre sí, y primos dos á dos, por la definición de números primos.

XIII.

Máximo común divisor.

89. *Máximo común divisor de varios números* es el mayor divisor común de todos ellos.

Se indica abreviadamente *m. c. d.*

90. *El máximo común divisor del dividendo y divisor de una división incompleta es igual al máximo común divisor del divisor y resíduo.*

En efecto, hemos demostrado que todo factor del dividendo y divisor lo es del divisor y resíduo, luego si son comunes todos los divisores, el m. c. d. también lo será.

91. Supongamos que queremos hallar el m. c. d. de dos números que, para mayor generalidad, designaremos por A y B, y que B es el menor de los dos.

El mayor divisor de B es B, luego si B fuera divisor de A, B sería el m. c. d. pedido.

$$\begin{array}{c|c|c|c} A & B & R & R' \\ \cline{2-4} R & C & C' & C'' \\ & R' & 0 & \end{array}$$

Para ver si lo es, efectuaremos la división que supondremos nos dá un cociente C y un resto R; luego B no es factor de A; pero hemos demostrado que el m. c. d. de A y B es el mismo que el de B y R, luego hallaremos el de éstos.

El mayor divisor de R es R, luego si R fuera factor de B, R sería el m. c. d. de B y R. Los dividimos y nos dán un cociente C', por ejemplo, y un resto R', luego R no es el m. c. d.; y repitiendo el mismo razonamiento hasta que obtengamos cociente exacto, llegaremos a obtener el m. c. d. R′ pedido.

De donde se deduce *que para hallar el m. c. d. de dos números basta dividir el mayor por el menor, el menor por el resto, y así sucesivamente hasta obtener cociente exacto. El último divisor hallado es el m. c. d pedido.*

92. *Todo divisor común de dos números es divisor de su m. c. d.*

Pues en el ejemplo anterior, todo factor común de A y B lo es de R. y todo factor común de B y R lo es de R′, (62) que es lo que queríamos demostrar.

El recíproco es cierto, pues todo factor de R′ lo es de su múltiplo R; y siéndolo de R y R′ lo será de B: y por serlo de B y R lo es de A; luego todo factor de R′ lo es de A y B, según habíamos dicho.

93. Fundados en este principio, vamos á determinar el m. c. d. de varios números dados A, B, C y D.

Todo divisor de A y B ha de serlo de su m. c. d., que llamaremos M; luego todo divisor común de A, B y C tendrá que serlo de C y M, y por tanto, el m. c. d. de A, B y C será el mismo m. c. d. de C y M que llamaremos M′. Todo divisor de A, B, C y D lo será de D y M′, luego el m. c. d. de A, B, C y D será el mismo que el de D y M′, que llamaremos M″.

De donde resulta que para hallar el m. c. d. de varios números hallaremos primero el de dos de ellos, después el del m. c. d. hallado y otro de los propuestos, y así sucesivamente hasta que empleemos el último de los números dados.

Escolios. Si dos de los números dados fueran primos entre sí, sería innecesaria la investigación.

La operación deberá suspenderse, por la misma razón, si alguno de los residuos fuera primo con el divisor respectivo.

Si alguno de los números dados fuera múltiplo de otro, deberá prescindirse de aquél y operar solo con los restantes.

Ejemplos. 1.º Hallar el m. c. d. de los números 4250, 33252, 30600 y 103152

2.º Determinar el m. c. d. de 345, 2760, 19482, 216354 y 936729.

XIV.

* *Propiedades del máximo común divisor.*

* 94. *Si dos números se multiplican por un mismo entero, su m. c. d. queda multiplicado por dicho entero.*

En efecto, suponiendo que hallamos el m. c. d de A y B, tendremos

$$\begin{array}{r|c|c|c} A & B & R & R' \\ \hline B & C & C' & C'' \\ & R' & 0 & \end{array}$$

luego R' es el m. c. d.; si ahora multiplicamos A y B por un número n, tendremos (61)

$$\begin{array}{r|c|c|c} A\times n & B\times n & R\times n & R'\times n \\ \hline R\times n & C & C' & C'' \\ & R'\times n & 0\times n=0 & \end{array}$$

luego el m. c d. de $A\times n$ y $B\times n$ es $R'\times n$, que es lo que queríamos demostrar

De modo análogo se demostraría que *si dos números se dividen por un mismo entero, su m c d. queda dividido por dicho entero.*

* 95. *Si varios números se multiplican por un mismo entero, su m. c. d. queda multiplicado por dicho entero.*

Sean A, B, C y D los números. Hallo su m. c. d.

$$\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}\text{m. c. d.} = \left.\begin{matrix}M\\C\end{matrix}\right\}\text{m. c. d.} = \left.\begin{matrix}N\\D\end{matrix}\right\}\text{m. c. d.} = P$$

que suponemos es P.

Digo que el m c. d. de $A \times K$, $B \times K$. $C \times K$, y $D \times K$ sera $P \times K$.

En efecto, hallando el m c d. de estos números, tendremos con arreglo al principio anterior

$$\left.\begin{matrix}A \times K\\B \times K\end{matrix}\right\}\text{m.c.d.} = \left.\begin{matrix}M \times K\\C \times K\end{matrix}\right\}\text{m.c.d.} = \left.\begin{matrix}N \times K\\D \times K\end{matrix}\right\}\text{m. c. d.} = P \times K$$

que es lo que queríamos demostrar.

Del mismo modo demostraríamos que *si varios números se dividen por un entero, su m. c. d. queda dividido por dicho entero.*

* 96. *Si varios números se dividen por su m. c. d., los cocientes que resultan son números primos entre sí.*

En efecto, sea, como en el ejemplo anterior, P el m. c. d. de A, B C y D

Si dividimos dichos cuatro números por P, el m. c. d, de los cocientes que obtengamos será 1, luego estos cocientes son números primos entre sí

* 97. *Todo divisor de un producto de dos factores, que sea primo con uno de ellos, es divisor del otro factor.*

Sea $A \times B$ un producto y C un divisor del producto, que suponemos primo con A; digo que será divisor de B.

En efecto, siendo A y C primos, su m. c. d. será la unidad $\left.\begin{matrix}A\\C\end{matrix}\right\}$ m. c. d = 1; multiplicando ambos por B,

tendremos $\left.\begin{matrix}A \times B\\C \times B\end{matrix}\right\}$ m. c. d $= 1 \times B = B$.

Ahora bien, C es divisor, por hipótesis de $A \times B$; lo es evidentemente de $C \times B$, luego lo será del m. c d. de ambos que es B.

* 98. *Todo número primo divisor de un producto de varios factores, es divisor por lo menos de uno de ellos.*

Sea d un divisor primo del producto

$$m \times n \times p \times q,$$

digo que será divisor de uno de ellos. En efecto, este producto le puedo considerar como un producto de dos factores m y $n\,p\,q$,

$$m \times n \times p \times q = m \times n\,p\,q$$

y, con arreglo al principio anterior, siendo d divisor de este producto, si le suponemos primo con m, tendrá que ser divisor de $n\,p\,q$; pero $n\,p\,q = n \times p\,q$; y siendo d divisor de este producto, si le suponemos primo con n, tendrá que ser divisor de $p\,q$; y siéndolo, por fin de $p \times q$, si le suponemos primo con p, tendrá que ser divisor de q, que es lo que queríamos demostrar.

De este principio se deducen varias consecuencias:

1.ª *Todo número primo divisor de una potencia, es divisor de la base.* Con arreglo á la definición de potencia.

2.ª *Si varios números son primos entre sí, sus potencias también lo serán.*

En efecto, estos números no tienen más factor común que 1. Sus potencias no tienen más factores que dichos números, luego no tienen más factor común que la unidad

3.ª *Si un número primo es divisor de un producto de factores primos, es igual á uno de estos*, pues tiene que ser factor de uno de ellos y todos son primos.

* 99 *Todo número divisible por otros dos primos entre sí, es divisible por su producto.*

Sea el número N divisible por 7 y 8 digo que lo será por el producto 7×8

En efecto, $N = 7 \times c$, llamando c al cociente; 8 es factor de N, luego lo será de su igual $7 \times c$ y como es primo con 7, será divisor de c Dividiéndolos, y llamando q al cociente, tendremos $c = 8 \times q$, de donde

$$N = 7 \times 8 \times q,$$

conforme al enunciado.

* 100. *Todo número divisible por otros varios primos entre sí dos á dos, es divisible por su producto.*

Si el número N es divisible por 7, 8, 9 y 25, digo que lo será por

$$7 \times 8 \times 9 \times 25.$$

En efecto, por serlo, por 7 y 8 será, con arreglo al principio anterior,

$$N = 7 \times 8 \times q,$$

9 es factor de N, luego lo será de $7 \times 8 \times q$ y como es primo con 7 y con 8, será factor de q. Luego $q = 9 \times K$, de donde

$$N = 7 \times 8 \times 9 \times K;$$

pero 25 es factor de N y, por tanto, de su igual

$$7 \times 8 \times 9 \times K,$$

es primo con los tres primeros factores, luego es divisor de K, lo que nos dará $K = 25 \times l$, y

$$N = 7 \times 8 \times 9 \times 25 \times l,$$

que es lo que queríamos demostrar.

De aquí se deduce que las condiciones de divisibilidad por los números compuestos deberán ser el conjunto de las de sus números primos. Así para ser un número divisible por $45 = 5 \times 9$, deberá reunir los caracteres de divisibilidad por 5 y por 9.

XV.

Factores de los enteros.

101. *Determinación de los factores simples de un entero dado.*

El procedimiento empleado (83), para demostrar que todo número compuesto es un producto de varios números primos, nos proporciona el que debemos seguir en este caso.

Divídase el número dado y los cocientes sucesivos por su menor factor primo, diferente de la unidad, hasta llegar al cociente 1.

La operación se dispone como en el siguiente ejemplo:

540	2	y tendremos: $540 = 2 \times 270$	$540 = 2 \times 2 \times 135$
270	2	$270 = 2 \times 135$	$135 = 3 \times 45$
135	3		
45	3	$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 45$	$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 15$
15	3	$45 = 3 \times 15$	$15 = 3 \times 5$
5	5		
1		de donde $540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^3 \times 5.$	

* 102. *Cada número admite un solo sistema de factores primos.*

Sea N un número que se ha descompuesto en sus factores primos a, b, c, d. entre los que puede haber algunos iguales. Supongamos que una segunda descomposición nos diera los factores a', b', c', d', tendríamos

$$N = a \times b \times c \times d$$

y también

$$N = a' \times b' \times c' \times d'$$

de donde

$$a \times b \times c \times d = a' \times b' \times c' \times d'.$$

Ahora bien, a es divisor del primer miembro de esta igualdad, luego lo será del segundo, y como éste es un producto de factores primos (98 — 3.º), tendrá que ser igual á uno de ellos Sea $a = a'$.

Dividiendo ordenadamente las dos igualdades, resultará

$$b \times c \times d = b' \times c' \times d'$$

y, por la misma razón, tendremos $b = b'$; de donde

$$c \times d = c' \times d'$$

y, en virtud de lo expuesto, $c = c'$ y por tanto, $d = d'$. Lo que demuestra que N no admite más que una descomposición en factores primos. *

103. *Para que un número sea divisible por otro, es necesario y suficiente que contenga todos los factores de este otro.*

Siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, es evidente que el dividendo contiene no solo todos los factores del divisor, sino también todos los del cociente.

104. ***Determinación de los factores simples y compuestos de un entero dado.***

Los principios demostrados en los números 99 y 100, nos dan el medio de resolver este problema, pues si tomamos el número 540, cuyos factores primos conocemos ya, es evidente que es divisible por la unidad y las potencias 1.ª y 2.ª de 2; lo es también por las tres primeras potencias de 3, luego lo será por los productos de todos estos factores.

Del mismo modo es divisible por 5, y por tanto, lo será por los productos de todos los anteriores por este factor.

1 —	2 —	4
3	6	12
9	18	36
27 —	54 —	108
5 —	10 —	20
15	30	60
45	90	180
135	270	540

Por consiguiente, *para determinar los factores simples y compuestos de un número, se le descompone en sus factores primos y se escribe la unidad y las potencias sucesivas del primer factor simple. Estos números se multiplican por las potencias sucesivas del segundo factor pri-*

mo; todos los anteriores, por las potencias sucesivas del tercero, y así sucesivamente.

Ejemplo. Determinar los factores simples y compuestos del número 907200.

* 105. *El número total de los divisores de un entero es el producto de los exponentes de sus factores primos, aumentado cada uno en una unidad.*

Pues según el procedimiento anterior, y fijándonos en el mismo ejemplo,

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5,$$

hemos multiplicado la unidad y las potencias sucesivas de 2 por las de 3; es decir, $(2 + 1)\,3$ productos que con los primeros harán

$$(2 + 1) + (2 + 1)\,3 = (2 + 1)\,(3 + 1)$$

Estos los hemos multiplicado por 5, luego habrán resultado

$$(2 + 1)\,(3 + 1)$$

productos que añadidos á los anteriores formarán

$$(2 + 1)\,(3 + 1) + (2 + 1)\,(3 + 1) = (2 + 1)\,(3 + 1)\,2$$

conforme á lo expuesto. *

XVI.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

106. ***El producto de las menores potencias de los factores simples comunes de varios números, es el m. c. d. de estos números.***

Sean los números

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5; \quad 396 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \text{ y}$$
$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11;$$

digo que 2×3 es su **m. c. d.**

En efecto, el m. c. d. de estos números no puede contener ningún factor primo diferente de 2 y 3, pues entonces no sería divisor de los tres. Tampoco puede tener estos factores con mayor exponente, pues entonces no sería divisor de 462, luego el m. c. d. de estos números es 2×3.

Luego para determinar el m. c. d. de varios números, se les descompone en sus factores primos, y el producto de las menores potencias de los factores comunes á todos ellos será el m. c. d. pedido.

Ejemplo. Hallar el m. c. d. de los números 140, 245, 455, 2275 y 9100.

Se llama mínimo común múltiplo de varios números el menor número que es divisible por todos ellos. También suele llamarse *múltiplo más simple*, y se designa abreviadamente por m. c. m.

107. *El producto de las mayores potencias de todos los factores simples de varios números es el m. c. m. de estos números.*

Sean los números,

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5; \qquad 396 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \text{ y}$$
$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$$

digo que su m. c. m. es

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

En efecto,

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$$

es múltiplo de los tres números propuestos puesto que contiene todos sus factores primos, falta tan solo demostrar que es el menor de esos múltiplos.

Ahora bien, todo número menor que

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$$

ó carecerá de alguno de estos factores, ó tendrá alguno con menor exponente.

Pero no puede carecer de ninguno de estos factores, pues entonces no sería múltiplo de los tres números propuestos; ni pueden entrar con menor exponente, por la misma razón, luego si ningún número menor que

$$2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$$

es múltiplo de los tres propuestos, este el m. c. m.

108. *Luego para determinar el m. c. m. de varios números, se les descompone en sus factores primos, y el producto de las mayores potencias de todos los factores es el m. c. m.*

EJEMPLO. Determinar el m. c. m. de los números

320—1960—7280—13000 y 25920.

PROBLEMAS

RELATIVOS AL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

I. ¿Cuántos años han transcurrido desde la venida de J. C. hasta la revolución francesa, sabiendo que han pasado

311 Desde J. C. hasta Constantino
165 Hasta Augústulo
146 Hasta Mahoma
178 Hasta Carlo Magno
295 Hasta la 1.ª Cruzada
358 Hasta la toma de Constantinopla
195 Hasta la paz de Westfalia
141 Hasta la revolución francesa

	Millones de francos.
II. La deuda de Inglaterra asciende á.....	16 441
La de Francia á....................	26.005

La de Alemania á	14.167
La de Italia á	12.449
La de Austria Hungría á	13.830
La de España á	5.962
La de Bélgica á	2 314
Y la de Holanda á	2.307

¿Á cuánto asciende la deuda pública de estas ocho naciones?

III.	La superficie de España es de	492.230 Km²
	La de Francia	528.876
	La de Alemania	540.483
	La de Inglaterra	314.628
	La de Italia	286.589
	La de Austria Hungría	625.557
	La de Bélgica	29.457
	Y la de Holanda	33.000

¿Cuál es la superficie total de las ocho naciones?

IV. Un chalán vende cuatro caballos, el 1.° por 450 pesetas; el 2.° por 80 pesetas más que el 1.°; el 3.° por 70 pesetas más que el 2.°; y el 4.° por tanto cuanto han valido los dos primeros: ¿cuánto le ha valido cada caballo y cuánto entre todos?

V. De Madrid á Ávila hay por la línea del Norte 114 kilómetros. De Ávila á Valladolid hay 14 km. más de distancia. De Valladolid á Burgos hay 7 km. más que de Madrid á Ávila; de Burgos á Vitoria hay 2 km. más que entre las dos últimas; y de Vitoria á San Sebastian hay la misma distancia que de Ávila á Valladolid: ¿se pregunta qué distancia hay de Madrid á cada una de esas capitales?

VI ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde la unión definitiva de León y Castilla en 1230 hasta el año actual de 1894?

VII. Un empleado tiene 7.500 pesetas de sueldo; gasta anualmente 5.875 ¿cuánto ahorra cada año?

VIII. El radio del polo es de 6356324 metros; el del ecuador es de 6376984 ¿cuál es el aplanamiento del globo terrestre?

IX. Un labrador acude á una feria con 3175 pesetas; compra 4 mulas y un burro, la 1.ª le cuesta 575 pesetas; la 2.ª 80 menos que la 1.ª; la 3.ª 55 pesetas menos que la 2.ª; la 4.ª tanto como la 1.ª y la tercera menos la 2.ª; y el último lo mismo que la 1.ª y la 4.ª menos la 2.ª y la 3.ª—¿cuánto le ha costado cada animal y cuánto dinero le ha quedado?

X. El Pico de Mulhacen tiene 3554 metros de altitud; la Alcazaba 240 metros menos; Peña Prieta 785 metros menos que esta segunda, Siete Picos 326 metros menos que la anterior; y el Puerto de Guadarrama 673 menos que la última, ¿cuál es la altura de estas cuatro montañas?

XI. La circunferencia tiene 360° Cada grado del Ecuador tiene 20 leguas ¿Cuántas leguas mide el Ecuador?

XII. El sonido recorre en un segundo 340 metros ¿cuántos metr os recorrerá en 15 minutos?

XIII. Sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 metros, y habiendo oído el ruído del trueno 21 segundos después de ver el relámpago, se pregunta ¿á qué distancia se encuentra la nube tempestuosa?

XIV. El Sol dista de la tierra 24000 radios terrestres; el radio medio terrestre tiene 6360 kilómetros ¿á cuántos kilómetros se encuentra el Sol de la Tierra?

XV. Un tren recorre 700 m. por minuto ¿qué distancia andará en 19 h. 15 m.

XVI. Un tren recorre 45 km. por hora; otro que sale tres horas después recorre 42 km. por hora; se pregunta

¿qué distancia llevará el 1.º al 2.º á las seis horas de marcha?

XVII. Un padre deja 17535 pesetas á repartir á partes iguales entre sus cinco hijos ¿cuánto corresponde á cada uno?

XVIII. Cuánto tiempo tardará en oirse el trueno de una nube tempestuosa que dista 306 km., sabiendo que el sonido recorre 340 m. por segundo?

XIX. ¿Cuánto tardará en llegar á San Sebastian, que dista de Madrid 614 km., un tren que marcha con una velocidad de 41 km. por hora?

XX. Dos trenes salen en dirección contraria de dos estaciones que distan 98 km., el uno con una velocidad de 600 m. por minuto y el otro de 800 ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse y qué distancia habrá recorrido cada uno?

XXI. La distancia del Sol á la Tierra es de 152 640 000 kilómetros. Tardando la luz 8 minutos 13 segundos en llegar del Sol á la Tierra ¿cuántos km. anda la luz por segundo?

NÚMEROS FRACCIONARIOS.

XVII.

Numeración de las fracciones.

109. Se ha visto que medir una cantidad es ver cuantas veces contiene á la unidad. De forma que la cantidad viene á hacer oficios de dividendo, la unidad de divisor y el cociente será el número que expresa la cantidad. Ahora

bien, esta división podrá ser exacta ó inexacta. Si es exacta, el cociente será un número entero. Si es inexacta, la cantidad no contiene exactamente á la unidad, pero sí puede contener á una parte de la unidad, que se toma como *unidad fraccionaria*; originando el número fraccionario.

Por esta razón, *el origen aritmético de los números fraccionarios es la división incompleta*.

110. Se llama *fracción ordinaria ó quebrado* la reunión de varias partes iguales de la unidad.

Las partes iguales de la unidad se llaman *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos*, *décimos*, según que la unidad se divide en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ó 10 partes. Si el número de partes es mayor, se denominan por ese número con la terminación *avos*, y se dice catorceavos, quinceavos etc.

Para designar un quebrado habrá que precisar en cuántas partes iguales se considera dividida la unidad, y cuántas de estas partes contiene el quebrado.

Por consiguiente, el quebrado consta de dos *términos*: el *numerador* que indica cuantas partes de la unidad contiene el quebrado, y el *denominador* que indica el número de partes iguales en que está dividida la unidad, y se expresa escribiendo el denominador debajo del numerador, separados por una raya.

Se lee un quebrado, enunciando el numerador y después la unidad fraccionaria que el denominador exprese. Así $\frac{5}{7}$, se lee cinco séptimos; $\frac{4}{17}$ se lee cuatro diez y sieteavos.

111. La comparación de los dos términos del quebrado origina tres casos: que el numerador sea menor que el denominador, en cuyo caso el quebrado contiene menos

partes de las en que hemos dividido á la unidad y es, por tanto, menor quela unidad.

Que el numerador sea igual al denominador, en cuyo caso el quebrado contiene todas las partes en que la unidad está dividida, ó es igual á la unidad; y

Que el numerador sea mayor que el denominador, en cuyo caso el quebrado contiene más partes de las en que hemos dividido á la unidad, ó es mayor que la unidad.

En el primer caso, el quebrado se llama *propio é impropio* en los otros dos.

112. De lo expuesto se deduce que el quebrado impropio siempre contiene un entero. Sea el quebrado $\frac{13}{5}$ La unidad tiene cinco quintos; luego trece quintos tendrá tantas unidades como veces contenga cinco quintos; es decir, como trece contiene á cinco. Efectuando la división, resulta:

$$\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}.$$

Luego *para extraer el entero de un quebrado impropio se divide el numerador por el denominador y al cociente entero se agrega un quebrado cuyo numerador es el resíduo y cuyo denominador es el divisor.*

Este número, compuesto de entero y quebrado, se llama *mixto*.

113. *Hallar el quebrado impropio equivalente á un número mixto.*

Sea el número mixto $2 + \frac{3}{5}$. Basta observar que si la unidad tiene cinco quintos, dos unidades tendrán 2×5 quintos. Luego

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 + 3}{5};$$

luego *para convertir en quebrado un número mixto, se multiplica el entero por el denominador, al producto se añade el numerador, y esta suma es el nuevo numerador, dejando el mismo denominador.*

114. Si observamos que un número cualquiera $6 = \frac{6 \times 5}{5}$, se deduce que *cualquier entero puede ponerse en forma de quebrado de denominador dado, poniendo por numerador el producto del entero por dicho denominador.*

XVIII.

Propiedades de los quebrados.

115. *El cociente completo de toda división de enteros es un quebrado, cuyo numerador es el dividendo y el denominador el divisor.*

En efecto, sea 5 el dividendo y 6 el divisor.

Dividir cinco por seis es partir el cinco en seis partes iguales y tomar una de estas, lo que conseguiremos dividiendo cada unidad en seis partes iguales y reuniendo las cinco partes. Es decir, que $5 : 6 = \frac{5}{6}$, conforme al enunciado.

De aquí se deduce que *producto de un quebrado por su denominador es igual al numerador*, puesto que el producto del cociente por el divisor es el dividendo.

El cociente completo de toda división de enteros, cuando ésta sea inexacta, será un número mixto, cuyo entero es el cociente y cuyo quebrado tendrá por numerador el *residuo y por denominador el divisor*, según lo expuesto en el número 112.

Escolio. Las palabras numerador, denominador y quebrado equivalen por tanto á dividendo, divisor y cociente.

116. *Si varios quebrados tienen el mismo denominador, es mayor el que tenga mayor numerador.*

Sean los quebrados

$$\frac{2}{7},\ \frac{4}{7} \text{ y } \frac{5}{7}.$$

En todos ellos la unidad está dividida en el mismo número de partes, luego éstas son del mismo tamaño; pero el tercero contiene más partes que los otros dos, luego el tercer quebrado es el mayor de los tres.

117. *Si varios quebrados tienen el mismo numerador, es mayor el que tenga menor denominador.*

Sean los quebrados

$$\frac{3}{5},\ \frac{3}{7} \text{ y } \frac{3}{11}.$$

Todos ellos contienen el mismo número de partes, pero en el primero la unidad está dividida en 5 partes iguales, en el segundo en 7, y en el tercero en 11. Ahora bien, cuanto mayor sea el número de partes en que dividamos la unidad, menor será cada una de éstas. Luego las partes del tercer quebrado son menores que las de los otros dos, y por tanto, el tercer quebrado es el menor de los tres.

118. De aquí se deduce que *si el numerador de un quebrado aumenta ó disminuye, sin variar el denominador, el quebrado aumenta ó disminuye.*

Si el denominador de un quebrado aumenta ó disminuye, sin variar el numerador, el quebrado disminuye ó aumenta.

* 119. Se llama *complemento aditivo* de un quebrado

el número que le falta para ser igual á la unidad; y *complemento sustractivo* el que le sobra para ser igual á la unidad.

De donde se deduce que los quebrados propios tendrán complemento aditivo, y los impropios sustractivo.

El complemento aditivo ó sustractivo de un quebrado es otro quebrado del mismo denominador y cuyo numerador es la diferencia de los dos términos del primero; pues á $\frac{4}{5}$ le falta $\frac{1}{5}=\frac{5-4}{5}$ para valer la unidad; y $\frac{5}{4}$ excede en $\frac{1}{4}=\frac{5-4}{4}$ á la unidad.

De donde se infiere que el mayor de varios quebrados propios es el que tiene menor complemento aditivo, pues le falta menos para valer la unidad; y el mayor de varios quebrados impropios será el que tenga mayor complemento sustractivo, pues excede en más á la unidad.

* 120. *Si á los dos términos de un quebrado propio se les aumenta un mismo número, el quebrado aumenta.*

Sea el quebrado $\frac{3}{5}$, digo que $\frac{3+a}{5+a}>\frac{3}{5}$.

En efecto, los complementos aditivos de estos dos quebrados son $\frac{2}{5+a}$ y $\frac{2}{5}$ y como el primero es menor que el segundo, el primer quebrado $\frac{3+a}{5+a}$ será mayor que el segundo $\frac{3}{5}$.

Del propio modo se demuestra que *si á los dos términos de un quebrado propio se les disminuye un mismo número, el quebrado disminuye*

* 121. *Si á los dos términos de un quebrado impropio se les aumenta un mismo número el quebrado disminuye.*

Sea el quebrado $\frac{5}{3}$, digo que $\frac{5+a}{3+a}<\frac{5}{3}$.

En efecto, comparando los complementos sustractivos resulta que $\frac{2}{3+a}<\frac{2}{3}$, luego tambien $\frac{5+a}{3+a}<\frac{5}{3}$.

Lo mismo se demostraría que *si á los dos términos de un quebrado impropio se les disminuye un mismo número, el quebrado aumenta.* *

122. *Si el numerador de un quebrado se multiplica por un entero, y el denominador no varía, el quebrado queda multiplicado por dicho entero.*

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$; digo que

$$\frac{5\times 3}{7}=\frac{5}{7}\times 3.$$

En efecto, comparando los dos quebrados

$$\frac{5}{7} \text{ y } \frac{5\times 3}{7}$$

se ve que el segundo es 3 veces mayor que el primero, ó es igual á este multiplicado por 3.

Del propio modo veríamos que *si el numerador de un quebrado se divide por un entero y el denominador no varía, el quebrado queda dividido por dicho entero.*

Escolio. Este teorema nos indica el modo de multiplicar ó dividir un quebrado por un entero.

123. *Si el denominador de un quebrado se multiplica por un entero y el numerador no varía, el quebrado queda dividido por dicho entero.*

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$; digo que

$$\frac{5}{7\times 3}=\frac{5}{7}:3.$$

En efecto, comparando los dos quebrados

$$\frac{5}{7} \text{ y } \frac{5}{7\times 3}$$

se ve que el segundo es 3 veces menor que el primero ó es igual al primero dividido por tres.

Del mismo modo se demostraría que *si el denominador de un quebrado se divide por un entero y el numerador no varía, el quebrado queda multiplicado por dicho entero.*

Escolio. Con arreglo á este principio podremos también multiplicar ó dividir un quebrado por un entero.

De los dos últimos teoremas se deduce que *si numerador y denominador de un quebrado se multiplican ó dividen por un mismo entero*, el quebrado no varía.

Estos mismos principios pueden aplicarse á la división de enteros con arreglo al escolio del número 115.

XIX.

Transformaciones de los quebrados.

124. *Simplificar un quebrado es reducirle á otro equivalente cuyos términos sean mas pequeños.*

Quebrado irreducible es el de menores términos de todos sus equivalentes.

Reducir un quebrado á su más simple expresión es hallar su quebrado irreducible equivalente.

* 125. *Todo quebrado igual á otro cuyos términos sean primos entre sí, tiene sus dos términos equimúltiplos de los de este otro.*

Sea el quebrado

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$$

digo que a y b son equimúltiplos de 4 y 5 En efecto, multiplicando los dos términos del primer quebrado por 5, y los del segundo por b, resultará

$$\frac{a \times 5}{b \times 5} = \frac{4 \times b}{5 \times b}$$

siendo estos dos quebrados iguales, y teniendo además iguales los denominadores, sus numeradores serán iguales, luego

$$a \times 5 = 4 \times b;$$

pero 5 es factor del primer miembro de esta igualdad, luego tendrá que serlo del segundo, y como 5 es primo con 4, será divisor de b (97), llamando m al cociente, será $b = 5 \times m$ y sustituyendo este valor de b en la igualdad anterior resulta

$$a \times 5 = 4 \times 5 \times m$$

y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 5, $a = 4 \times m$, lo que demuestra que si b es m veces 5, a es m veces 4.

Corolarios.—1.º *Un quebrado cuyos términos son primos entre sí es irreducible*, pues todos sus equivalentes tienen mayores términos.

Recíprocamente, *todo quebrado irreducible tiene sus dos términos primos entre sí*, pues si no lo fueran, tendrían un factor común que, suprimido, nos daría otro de menores términos

2.º *Dos quebrados irreducibles iguales son idénticos*, pues de

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se deduce en este caso, con arreglo al teorema, que a tiene que ser múltiplo de c, y c múltiplo de a, lo cual no es posible á no ser $a = c$ Por la misma razón resulta $b = d$.

3.º *Un quebrado irreducible no puede ser igual á un entero*, pues siendo los dos términos primos entre sí, el numerador no es divisible por el denominador.

126. De lo expuesto se deduce que *se reducirá un quebrado á su más simple expresión, dividiendo sus dos términos por su m. c. d.* (96) El mismo resultado se obtendrá dividiendo los dos términos del quebrado por un

factor común, y repitiendo la operación con los que resulten hasta llegar á uno cuyos términos sean primos entre sí.

Ejemplos.—Reducir á su más simple expresión los quebrados

$$\frac{75600}{4680000};\ \frac{8756}{24079};\ y\ \frac{17355}{0195}$$

127. *Reducir quebrados á común denominador*, es transformarles en otros equivalentes que tengan el mismo denominador.

Es evidente que si multiplicamos los dos términos de cada quebrado por el producto de los demás denominadores, los nuevos quebrados serán equivalentes (123, escolio) á los propuestos, y tendrán el mismo denominador, que será el producto de todos ellos.

Así los quebrados

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{7}$$

son respectivamente iguales á

$$\frac{2\times5\times7}{3\times5\times7},\ \frac{4\times3\times7}{3\times5\times7},\ \frac{6\times3\times5}{3\times5\times7}$$

y tienen el mismo denominador.

Luego *para reducir quebrados á común denominador basta multiplicar los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás.*

Ejemplo.—Reducir á común denominador los quebrados

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{11},\ y\ \frac{7}{13}$$

128. Este medio nos facilita el reducir los quebrados á común denominador, pero tiene el inconveniente de proporcionarnos quebrados cuyos términos son relativa-

mente muy grandes. De ahí la necesidad de reducir los quebrados á su mínimo denominador común

Para esto basta observar que si los quebrados fueran irreducibles, que es el caso más sencillo, el nuevo denominador común tendría que ser forzosamente múltiplo de todos ellos (125), y el menor de estos múltiplos es el m. c. m., luego este sería el denominador más sencillo.

Además, para que los nuevos quebrados sean equivalentes á los propuestos, bastará multiplicar los dos términos de cada uno por los factores que falten á su denominador para componer dicho m. c. m.

Luego para reducir querados al mínimo denominador común, se reducen primero á su más simple expresión, se halla luego el m. c. m. de los denominadores y se multiplican los dos términos de cada quebrado por los factores que falten á su denominador para componer dicho m. c. m.

Ejemplo: Reducir al mínimo denominador común los quebrados

$$\frac{72}{108}, \frac{588}{784}, \frac{875}{1050} \text{ y } \frac{504}{864}.$$

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

XX.

Adición de quebrados.

Las definiciones de las cuatro operaciones dadas para los números enteros son aplicables á los fraccionarios, así como los signos de estas operaciones.

129. En la adición de quebrados conviene distinguir tres casos:

1.º *Sumar quebrados que tengan igual denominador.*
2.º *Sumar quebrados de denominadores desiguales, y*
3.º *Sumar números mixtos.*

* 130. Primer caso. Sean los quebrados

$$\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}.$$

Llamando p, q y r á los cocientes que estos quebrados indican, ó sea

$$\frac{a}{d}=p; \frac{b}{d}=q; \frac{c}{d}=r,$$

tendremos

$$a=d\times p;$$
$$b=d\times q;$$
$$c=d\times r;$$

y sumando ordenadamente estas igualdades, resultará

$$(a+b+c)=d\times p+d\times q+d\times r$$

ó separando el factor común d,

$$(a+b+c)=(p+q+r)\,d$$

y dividiendo ambos miembros de esta igualdad por d,

$$\frac{a+b+c}{d}=p+q+r$$

ó sea, reemplazando p, q y r por sus valores;

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$$ *

Lo que nos indica que *se suman quebrados de igual denominador, sumando los numeradores y partiendo esta suma por el denominador común.*

131. Segundo caso. Reduciendo los quebrados á denominador común, quedará reducido este caso al anterior.

Luego para *sumar quebrados que tengan distinto denominador se reducen á común denominador y se parte la suma de los numeradores por el común denominador.*

Ejemplo.—Sumar

$$\frac{27}{54}+\frac{243}{324}+\frac{175}{280}+\frac{693}{1584}$$

132. Tercer caso. *Para sumar números mixtos se reducen á quebrados y se suman como tales.*

Sin embargo, será más sencillo sumar primeramente los quebrados, después los enteros y reunir ambas sumas.

Ejemplo.—Sumar

$$9\frac{14}{21}+13\frac{72}{90}+25\frac{16}{240}+37\frac{36}{216}$$

XXI.

Sustracción de quebrados.

133. En la sustracción de quebrados pueden ocurrir los mismos casos que en la adicion: 1.º *restar quebrados de igual denominador*; 2.º *restar quebrados de diferente denominador*, y 3.º *restar números mixtos.*

134. 1er caso. *Para restar quebrados de igual denominador, se restan los numeradores y su diferencia se parte por el denominador común* Se demostraría lo mismo que su análogo de la adición; ó bien, podria demostrarse, observando que sumado el quebrado que resulta con el sustraendo, nos dá el minuendo.

135. 2.º caso. *Para restar quebrados de distinto denominador, se reducen á común denominador, se restan*

los nuevos numeradores y la diferencia se parte por el denominador común.

EJEMPLO.—Restar,

$$\frac{120}{216} - \frac{45}{270}$$

136. 3.^{er} caso. Como en la adición de quebrados, *pueden reducirse á quebrados y vendremos á parar á uno de los dos casos anteriores; ó bien, restar separadamente los quebrados y los enteros y reunir los dos restos.*

En este caso, pudiera suceder que el quebrado del minuendo fuera menor que el del sustraendo, dificultad que se obviaría fácilmente añadiendo al primero una unidad, tomada de su entero.

Sea por ejemplo, $9\frac{1}{4} - 3\frac{7}{8}$. Al reducir los quebrados á común denominador para restarlos, resulta $\frac{2}{8} - \frac{7}{8}$ mayor que el minuendo. Tomo una unidad del 9, que vale $\frac{8}{8}$, y añadida á los $\frac{2}{8}$ tendremos $\frac{10}{8}$; de donde

$$9\frac{1}{4} - 3\frac{7}{8} = 8\frac{10}{8} - 3\frac{7}{8} = 5\frac{3}{8}$$

EJEMPLO.—Restar,

$$19\frac{84}{252} - 11\frac{160}{192}$$

137. *Casos particulares.* 1.^{o} *Restar un quebrado de un entero.*

EJEMPLO. $8 - \frac{3}{5} = 7\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$

que nos indica que *basta agregar al entero del minuendo, disminuído en una unidad, el complemento del sustraendo.*

2.^{o} *Restar un mixto de un entero.*

Sea, por ejemplo,

$$8-5\frac{3}{4}=7\frac{4}{4}-5\frac{3}{4}=2\frac{1}{4};$$

luego *basta añadir á la diferencia de los enteros, disminuída en una unidad, el complemento del sustraendo.*

3.º *Restar un entero de un mixto.*

$$5\frac{3}{4}-2=3\frac{3}{4},$$

se restan los enteros y se agrega el quebrado del minuendo.

4.º *Restar un quebrado de un mixto.*

$$5\frac{3}{4}-\frac{5}{7}=5\frac{21}{28}-\frac{20}{28}=5\frac{1}{28},$$

se agrega al entero la diferencia de los quebrados

EJEMPLOS. 1.º $19-\frac{2}{3}$ 2.º $25-7\frac{2}{5}$

3.º $14\frac{2}{7}-8$ 4.º $9\frac{3}{8}-\frac{2}{3}$

XXII.

Multiplicación de quebrados.

138. En la multiplicación de quebrados conviene distinguir tres casos:

1.º *Multiplicar un quebrado ó mixto por un entero.*

2.º *Multiplicar un entero, quebrado ó mixto por un quebrado.*

3.º *Multiplicar un entero, quebrado ó mixto por un mixto.*

139. 1.er caso. *Para multiplicar un quebrado por un*

entero hemos visto (122) *que basta multiplicar el numerador por el entero dejando el mismo denominador.*

Si el denominador del quebrado fuera múltiplo del multiplicador sería preferible (123) *dividir el denominador por el entero, dejando el mismo numerador.*

El caso de *multiplicar un mixto por un entero se reduce al anterior convirtiendo el mixto en quebrado.*

Es preferible, sin embargo, multiplicar separadamente el entero y el quebrado del multiplicando por el multiplicador y reunir los dos productos, teniendo en cuenta que multiplicar por un entero es hallar la suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador.

Ejemplos. $\frac{4}{25} \times 5$; $3\frac{7}{4} \times 9$

140 2.° caso 1.° *Multiplicar un entero por un quebrado.*

Sea, por ejemplo, $5 \times \frac{3}{4}$.

Multiplicar 5 por $\frac{3}{4}$, es hallar un tercer número que sea respecto de 5 lo que $\frac{3}{4}$ es respecto de la unidad; pero $\frac{3}{4}$ indica tres cuartas partes de la unidad, luego el producto debe ser las tres cuartas partes del multiplicando.

Lo expresaremos así: $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ de 5; pero $\frac{1}{4}$ de $5 = \frac{5}{4}$; luego $\frac{3}{4}$ de $5 = \frac{5 \times 3}{4}$, es decir que $5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4}$. Por consiguiente, *se multiplica un* *entero por un quebrado multiplicando el entero por el numerador, y dejando el mismo denominador.*

EJEMPLO. $7 \times \frac{2}{3}$

2.º *Multiplicar un quebrado por otro quebrado.*

Sea, por ejemplo, $\frac{2}{7} \times \frac{4}{5}$.

Tendremos $\frac{2}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ de $\frac{2}{7}$;

pero $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{7} = \frac{2}{7} : 5 = \frac{2}{7 \times 5}$ (123);

así pues $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{7} = \frac{2}{7 \times 5} \times 4 = \frac{2 \times 4}{7 \times 5}$.

Luego para multiplicar dos quebrados se multiplican los numeradores y se parte el producto por el de los denominadores.

EJEMPLO. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

3.º *Multiplicar un mixto por un quebrado.*

Se reduce el mixto á quebrado y queda reducido al caso anterior; ó bien se multiplican separadamente el entero y el quebrado por el quebrado, y se reunen los dos productos, teniendo en cuenta que para tomar del multiplicando las partes que indique el multiplicador, pueden tomarse primero del entero y luego del quebrado, y reunir ambas después.

EJEMPLO. $4\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$

141. 3.er caso. *Este caso se reduce á uno de los anteriores, convirtiendo el multiplicador en quebrado.*

La consideración de los anteriores casos patentiza que *el producto de dos números fraccionarios, ó uno entero y* *otro fraccionario, es independiente del órden de los factores*, haciendo extensivo á todos los números comensurables el principio demostrado en el número 39.

EJEMPLOS. $8 \times 2\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5} \times 3\frac{2}{3}$ $4\frac{2}{3} \times 5\frac{6}{7}$

XXIII.

División de quebrados.

142. En la división de quebrados podemos distinguir los mismos casos que en la multiplicación.

1.° *Dividir un quebrado ó mixto por un entero.*

2.° *Dividir un entero, quebrado ó mixto por un quebrado.*

3.° *Dividir un entero, quebrado ó mixto por un mixto.*

143. 1.er caso. *Dividir un quebrado por un entero. Se resuelve* (123) *multiplicando el denominador del quebrado por dicho entero*, conservando el mismo numerador.

Si el numerador del quebrado fuera divisible por el entero, sería preferible (122) *dividir el numerador por el entero, dejando el mismo denominador.*

El caso de dividir un mixto por un entero, se reduce á este convirtiendo el mixto en quebrado.

También podría efectuarse, dividiendo separadamente el entero y el quebrado del mixto por el divisor, y reuniendo los dos cocientes, lo que se comprueba multiplicando este cociente por el divisor y viendo que reproduce el dividendo.

EJEMPLOS. $\frac{9}{5} : 3$ $3\frac{4}{5} : 6$

144. 2.° caso. 1.° Del mismo modo podríamos probar

que *para dividir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el denominador, y se parte este producto por el numerador*, es decir, *que se multiplica el entero por el quebrado invertido;* pero puede también deducirse de las consideraciones siguientes:

Sea $8 : \frac{4}{5}$ Dividir 8 por $\frac{4}{5}$ es hallar un número que multiplicado por $\frac{4}{5}$ reproduzca el 8; luego, llamando c á ese número, tendremos $c \times \frac{4}{5}$ ó los $\frac{4}{5}$ de $c = 8$; si los $\frac{4}{5}$ de c valen 8,

$$\frac{1}{5} \text{ de } c = \frac{8}{4} \text{ y } c = \frac{8}{4} \times 5 = \frac{8 \times 5}{4}.$$

Ejemplo. $7 : \frac{4}{5}$

2.° Del mismo modo demostraríamos que *para dividir dos quebrados se multiplica el dividendo por el divisor invertido.*

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = c, \frac{2}{7} \text{ de } c = \frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{7} \text{ de } c = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \times 2}; c = \frac{3 \times 7}{4 \times 2}$$

Ejemplo. $\frac{4}{5} : \frac{3}{7}$

3.° *El caso de dividir un mixto por un quebrado se reduce al anterior, convirtiendo el mixto en quebrado.*

Ejemplo. $3 \frac{2}{7} : \frac{2}{5}$

145. 3.er caso. Se reduce al segundo convirtiendo en quebrado el divisor.

Ejemplos. $4 : 5 \frac{3}{7}$; $\frac{3}{5} : 3 \frac{2}{3}$; $4 \frac{3}{5} : 6 \frac{3}{4}$

PROPIEDADES DE LOS QUEBRADOS.

XXIV.

Producto de varios factores fraccionarios.

* Un producto de varios números quebrados ó enteros y quebrados, tiene le misma significación que un producto de enteros (64) y goza de sus mismas propiedades.

* 146. *El producto de varios números comensurables es independiente del orden de los factores.*

Si el producto se compusiera de factores enteros el teorema está demostrado. Si los factores son números quebrados, ó enteros y quebrados, como, por ejemplo,

$$\frac{a}{b} \times c \times \frac{m}{n} \times p,$$

tendremos

$$\frac{a}{b} \times c \times \frac{m}{n} \times p = \frac{a \times c}{b} \times \frac{m}{n} \times p =$$

$$\frac{a \times c \times m}{b \times n} \times p = \frac{a \times c \times m \times p}{b \times n}$$

que nos indica que el producto es un quebrado, que tiene por numerador el producto de los numeradores de los factores por los enteros, y por denominador el producto de los denominadores.

Ahora bien, cualquiera que sea el orden de los factores (65) el valor de estos dos productos, y por consiguiente el del quebrado, no varía, conforme nos proponíamos demostrar. *

147. Así como hemos llamado *quebrado* á un conjunto de partes iguales de la unidad, se llama *quebrado de quebrado á un conjunto de partes iguales de un quebrado.*

De suerte que quebrado de un número cualquiera es un conjunto de partes iguales de es'e número.

Nada más fácil que convertir un *quebrado de quebrado*, ó de entero, en quebrado de la unidad.

Sea, por ejemplo, $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{7}$, Con arreglo á lo expuesto (140) tendremos

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{7 \times 5},$$

luego *para reducir un quebrado de quebrado á quebrado de la unidad, se multiplican los dos quebrados.*

Del mismo modo se reduciría un quebrado de un entero á quebrado de la unidad, multiplicando el quebrado por el entero.

De esta suerte, el cálculo de los quebrados de quebrado se reduce al de los quebrados de la unidad.

Ejemplos.—1.° Calcular la expresión:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \text{ de } \frac{3}{4} - \frac{3}{7} \text{ de } \frac{1}{8}$$

2.° $$\frac{\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} \text{ de } \frac{7}{9}}{\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \text{ de } \frac{5}{7}}$$

148. *Potencia de un quebrado* (67) es un producto de factores iguales á dicho quebrado.

La potencia de un quebrado es igual á la potencia del numerador partida por la potencia del mismo grado del denominador.

Pues $$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{4^3}.$$

La potencia de un número mixto se obtiene reduciéndole préviamente á quebrado.

149. *Las potencias de un quebrado irreducible son también quebrados irreducibles.*

En efecto, siendo el quebrado irreducible, sus dos términos serán números primos entre sí; y sus potencias (98, 2.°) también lo serán.

150. *Las potencias sucesivas de los números mayores que uno aumentan á medida que crece su grado*, puesto que, cuando el multiplicador es mayor que la unidad, el producto es mayor que el multiplicando.

Por la misma razón, *las potencias sucesivas de los números menores que la unidad disminuyen á medida que aumente su grado*, pues, como el multiplicador es menor que la unidad, el producto es menor que el multiplicando.

151. *Se llama raiz de un número, otro número que elevado á la potencia del mismo grado, reproduce el propuesto.*

Las raices de los números se clasifican por *grados*, lo mismo que las potencias, llamándose también raiz cuadrada y raiz cúbica á la segunda y tercera respectivamente.

Se indican por el signo $\sqrt{}$, llamado *radical*, que también se aplica á toda raiz indicada.

Índice del radical, es el número que expresa su grado, y se coloca en la abertura del mismo, escribiendo debajo el número, cuya raiz expresa. Así $\sqrt[4]{64}$, quiere decir, raiz cuarta de 64. Se ha convenido en omitir el índice para la raiz cuadrada, así $\sqrt{9}$, quiere decir, raiz cuadrada de nueve.

XXV.

Proporciones.

152. Se llama *razón de dos números, al cociente de dichos números.* Así la razón de a á b, es $a : b$. Estos números se llaman *términos* de la razón El primero a se llama *antecedente*, y el segundo b, *consecuente.*

De donde se deduce que las ideas de cociente, quebrado y razón son idénticas; así como las de dividendo, numerador y antecedente; y las de divisor, denominador y consecuente.

Dos razones se dicen inversas, cuando el antecedente de una es consecuente de otra y viceversa.

Así $b : a$ es la inversa de $a : b$.

153. Se llama *proporción ó igualdad fraccionaria*, la igualdad de dos razones ó quebrados. Tal es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que también puede leerse, a es b, como c es á d; y escribirse $a : b : : c : d$.

Los cuatro términos de que consta, se designan con los nombres de 1.° y 2.° antecedente, y 1.° y 2.° consecuente, ó bien, antecedente y consecuente de la 1.ª razón, y antecedente y consecuente de la 2.ª razón. Se llaman *términos opuestos*, el 1.° y 4.°, así como el 2.° y 3.° También se llaman *términos extremos* aquellos, y *medios* éstos.

154. La propiedad fundamental de las proporciones es: *En toda proporción, los productos de los términos opuestos son iguales.*

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, digo que $a \times d = b \times c$.

En efecto, multiplicando los dos términos del primer quebrado por d, y los dos del segundo por b, tendremos

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d},$$

de donde $a \times d = b \times c$, que es lo que queríamos demostrar.

155. Recíproco. *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, los cuatro forman proporción, siendo términos opuestos los dos factores de cada producto.*

Digo que si $a \times d = b \times c$, tendremos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En efecto, dividiendo por $b \times d$ los dos miembros de la igualdad dada, resultará

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d},$$

y simplificando los dos quebrados

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

conforme al enunciado

156. El principio fundamental proporciona el medio de hallar un término de una proporción, cuando se conocen los otros tres.

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$,

en que, suponiendo conocidos a, b y c, queremos hallar x. Tendremos $a \times x = b \times c$; y dividiendo por a los dos miembros de esta igualdad, $x = \frac{b \times c}{a}$.

Este término x se llama *cuarta proporcional* á los otros tres a, b, c.

Luego para hallar una cuarta proporcional á tres números dados, se divide el producto de los dos últimos por el primero.

Escolio. Se llama *proporción contínua* la que tiene iguales sus términos medios. Así $\frac{a}{x} = \frac{x}{d}$ es una proporción contínua.

En la proporción contínua el término medio se llama *media proporcional* entre los otros dos. Así x es la media proporcional entre a y d. Según lo demostrado, (154)

$$a \times d = x \times x \quad \text{ó} \quad a \times d = x^2,$$

y, como x^2 es el cuadrado de x, extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros, resultará

$$\sqrt{a \times d} = x.$$

Luego la media proporcional entre dos números es la raíz cuadrada de su producto.

En la proporción contínua, el cuarto término se llama *tercera proporcional á los otros dos.* Así, en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, x es la tercera proporcional á a y b.

De $a \times x = b^2$, resulta, dividiendo por a los dos miembros de esta igualdad, $x = \frac{b^2}{a}$.

Luego para hallar la tercera proporcional á dos números, basta dividir el cuadrado del segundo por el primero.

Ejemplos:

1.º Determinar la cuarta proporcional á los números 14, 8 y 7.

2.º Hallar la tercera proporcional á los números 9 y 6.

3.º Hallar la media proporcional á los números 4 y 9.

157. Del principio fundamental se deduce que se pue-

den cambiar los términos de una proporción, con tal que resulten iguales los productos de los términos opuéstos. Lo que permite escribir una proporción de ocho modos diferentes

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a};\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a};$$

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b};\ \frac{b}{d}=\frac{a}{c};\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c};\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$

en las que siempre se verifica la igualdad $a \times d = b \times c$.

158. *Si dos proporciones tienen dos términos no opuestos comunes, las razones de los otros son iguales.*

Pues de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ resulta $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$.

159. *Si dos proporciones tienen dos términos opuestos comunes, las razones de los otros son inversas.*

Pues de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m}=\frac{n}{d}$, resulta $a \times d = b \times c$; $a \times d = m \times n$; de donde $b \times c = m \times n$ ó $\frac{b}{m}=\frac{n}{c}$ conforme al enunciado.

160. *Los productos ordenados de varias proporciones forman proporción.*

Sean las proporciones,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'};\ \frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades tendremos,

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''} \text{ ó}$$

$$\frac{a\times a'\times a''}{b\times b'\times b''}=\frac{c\times c'\times c''}{d\times d'\times d''}.$$

161. *Los cocientes ordenados de dos proporciones, forman también proporción.*

Pues de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$; resulta $\begin{matrix} a \times d = c \times b \\ a' \times d' = c' \times b' \end{matrix}$

y dividiendo ordenadamente estas igualdades

$$\frac{a \times d}{a' \times d'} = \frac{c \times b}{c' \times b'}, \text{ ó sea}$$

$$\frac{a}{a'} \times \frac{d}{d'} = \frac{c}{c'} \times \frac{b}{b'};$$

de donde se deduce:

$$\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} :: \frac{c}{c'} : \frac{d}{d'} \text{ ó } \frac{a : a'}{b : b'} = \frac{c : c'}{d : d'},$$

conforme al enunciado.

162. *Si á los numeradores de una proporción se les aumenta números equimúltiplos de los denominadores, resulta otra proporción.* En efecto, si á los dos miembros de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se añade un número n, resultará

$$\frac{a}{b} + n = \frac{c}{d} + n \text{ ó } \frac{a + n\,b}{b} = \frac{c + n\,d}{d}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Del mismo modo se demuestra que *si á los numeradores de una proporción se les resta números equimúltiplos de los denominadores, resulta otra proporción.*

Consecuencias. 1.ª Según este teorema de la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ resulta } \frac{a \pm n\,b}{b} = \frac{c \pm n\,d}{d}$$

y haciendo $n = 1$, resulta

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

Luego *en toda proporción, las sumas ó diferencias de antecedentes y consecuentes de cada razón forman razones iguales con sus consecuentes.*

2.ª Comparando las proporciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \text{ resulta (158)}$$

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} \text{ ó } \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

Luego, *en toda proporción, las sumas y diferencias de antecedentes y consecuentes de cada razón, forman razones iguales con sus antecedentes.*

3.ª *En toda proporción; las sumas de antecedentes y consecuentes de cada razón, forman con sus diferencias razones iguales.*

Pues de $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$$\text{resulta } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

4.ª *En toda proporción, la suma ó diferencia de los antecedentes, forma con la suma ó diferencia de los consecuentes razones iguales á la de la proporción.*

En efecto, de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, resulta $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; de donde

$$\frac{a \pm c}{a} = \frac{b \pm d}{b} \text{ ó } \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}.$$

5.ª *En toda proporción las sumas de los numeradores* *y denominadores forman con sus diferencias razones iguales.*

Acabamos de ver que $\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$ y

$$\frac{a-c}{a} = \frac{b-d}{b} \text{ luego } \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

163. Fundados en estos principios, *pueden determinarse dos números cuando se conoce su razón y su suma ó diferencia.*

Supongamos que sea $\frac{m}{n}$ la razón dada, y s la suma de los números que queremos hallar.

Representando estos números por x é y, tendrémos

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}, \text{ de donde } \frac{x+y}{x} = \frac{m+n}{m} \text{ ó}$$

$$\frac{s}{x} = \frac{m+n}{m} \text{ que nos dá } x = \frac{m\,s}{m+n}; \text{ y}$$

$$\frac{x+y}{y} = \frac{m+n}{n} \text{ ó } \frac{s}{y} = \frac{m+n}{n}$$

$$\text{que nos dá } y = \frac{n\,s}{m+n}.$$

Lo mismo se resuelve el problema cuando en vez de la suma se nos dá la diferencia de los dos números.

Ejemplos: 1.º Hallar dos números cuya suma sea 60 y su razón $\frac{1}{3}$.

2.º Hallar dos números cuya diferencia sea 51 y la razón $\frac{1}{4}$.

XXVI.

Série de razones iguales.

164. Se llama *série de razones iguales la igualdad de tres ó más razones.*

Así $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ es una série de razones iguales.

165. *En toda série de razones iguales, la razón de la suma de los numeradores á la suma de los denominadores es igual á la razón de la série.*

Sea la série $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \ldots\ldots;$

digo que

$$\frac{a+c+e+g+\ldots}{b+d+f+h+\ldots} = \frac{a}{b}.$$

Llamando r á la razón de la série, es decir al valor de cada uno de estos quebrados, se tendrá

$$\frac{a}{b} = r; \quad \frac{c}{d} = r; \quad \frac{e}{f} = r; \quad \frac{g}{h} = r; \ldots$$

de donde $a = b \times r$
$c = d \times r$
$e = f \times r$
y sumando ordenadamente estas $g = h \times r$
igualdades, y sacando el factor co- $\vdots$
mún r, tendremos $a+c+e+g+\ldots=(b+d+f+h+\ldots)r$
de donde, dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $b+d+f+h+\ldots\ldots;$

$$\frac{a+c+e+g+\ldots}{b+d+f+h+\ldots}=r=\frac{a}{b}$$

166. *Dividir un número dado en partes proporcionales á otros números dados.*

Sea N el número que queremos dividir en partes proporcionales á los números dados a, b, c; y sean estas partes que queremos hallar x, y, z. Tendremos,

$$x+y+z=\mathrm{N} \quad \text{y} \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

con arreglo al enunciado; de donde

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a} \text{ ó } \frac{\mathrm{N}}{a+b+c}=\frac{x}{a}; \text{ y } x=\frac{\mathrm{N}\times a}{a+b+c}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{y}{b} \text{ ó } \frac{\mathrm{N}}{a+b+c}=\frac{y}{b}; \quad y=\frac{\mathrm{N}\times b}{a+b+c}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{z}{c} \text{ ó } \frac{\mathrm{N}}{a+b+c}=\frac{z}{c}; \quad z=\frac{\mathrm{N}\times c}{a+b+c}$$

Luego para dividir un número en partes proporcionales á otros números dados, se divide dicho número por la suma de éstos y el cociente se multiplica por cada uno de ellos.

Ejemplo. Dividir el número 300 en tres partes proporcionales á los números 5, 6 y 9.

* 167. Se llama *cantidad media entre otras varias, toda cantidad comprendida entre ellas*, es decir, menor que la mayor y mayor que la menor.

Así 9 es media entre 2, 5, 11 y 19.

* 168 *La suma de* n *números dividida por* n, *es una media entre ellos.*

Supongamos que sean estos números ordenados de menor á mayor, $a, b, c, d \ldots u$.

Tendremos que evidentemente

$$\frac{a+b+c+d+\ldots+u}{n}>\frac{a+a+a+a+\ldots+a}{n}=a; \text{ y}$$

$$\frac{a+b+c+d+\ldots+u}{n} < \frac{u+u+u+u+\ldots+u}{n} = u.$$

Luego, en efecto,

$$\frac{a+b+c+d+\ldots+u}{n}$$

es media entre estos números.

Esta medida recibe el nombre de *media diferencial ó media aritmética.*

La media aritmética entre dos números es su semi suma.

EJEMPLOS. 1.° Hallar la media diferencial á los números 7, 15. 19, 24, 36 y 49

2.° Hallar la media aritmética entre 15 y 35.

* 169. *La raíz del grado* n *de un producto de* n *factores es media entre ellos.*

Sean los factores, ordenados de mayor á menor

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots.. u.$$

Evidentemente,

$$a.b.c.d\ldots u \begin{array}{l} > a.a.a.a\ldots a = a^n \\ < u.u.u.u\ldots u = u^n \end{array}$$

y extrayendo la raíz n,

$$\sqrt[n]{a.b.c.d\ldots u} \begin{array}{l} > a \\ < u \end{array}$$

$$\text{luego } \sqrt[n]{a.b.c.d\ldots u}$$

es media entre ellos

Esta media se llama *media factorial ó media geométrica.*

La media factorial ó proporcional entre dos números, es la raíz cuadrada de su producto.

EJEMPLOS 1.° Hallar la media factorial á los números 2, 8 y 32

2.° Hallar la medida geométrica entre 4 y 16.

PROBLEMAS

SOBRE EL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

I. Un comerciante vende $17\frac{1}{3}$ metros de tela de una pieza; más tarde $9\frac{3}{5}$ metros de la misma y, por fin, $11\frac{4}{15}$; le quedan aún $3\frac{4}{5}$ metros ¿cuántos metros tenía la pieza?

II. Un caño arroja $\frac{2}{3}$ de litro de agua por minuto; otro $\frac{5}{9}$, y un tercero $\frac{1}{4}$ de litro en el mismo tiempo; ¿qué cantidad de agua por minuto arrojan los tres caños á la vez?

III. Un obrero hace 3 m. de una obra en 4 h.; otro 7 m. en 9 h.; un tercero 11 m. en 15 h., y un cuarto hace 5 m. en 12 h. ¿cuántos metros por hora hace cada obrero y cuántos entre los cuatro?

IV. Un comerciante en antigüedades compra un mueble por $75\frac{1}{3}$ pesetas; gasta en restaurarle $60\frac{2}{5}$; lo vende y gana en el negocio $35\frac{4}{15}$ ¿en cuánto ha vendido el mueble?

V. Un tren recorre 119 Km. en 3 h ; otro 172 Km. en 5 h. ¿cuál es la diferencia de velocidades?

VI. De una pieza de tela que tiene 28 m. se han vendido $17\frac{3}{4}$ ¿cuántos metros quedan?

VII. Un estudiante recibe para sus gastos $25 \frac{2}{5}$ pesetas; paga al zapatero $13 \frac{1}{4}$ pesetas; á la lavandera $6 \frac{1}{2}$; compra un libro y le quedan $1 \frac{13}{20}$ ¿cuánto le ha costado el libro?

VIII. Tres caños llenan un estanque: el 1.º en 5 h; el 2.º en 3. y el 3.º en 7. Tres bocas le desaguan: la 1.ª en 4 h, la 2.ª en 9 y la 3.ª en 11. Abriendo á la vez los seis orificios, ¿qué parte del estanque se llenará ó vaciará en 1 h?

IX. Un carpintero vende una mesa en $22 \frac{3}{4}$ pesetas; si le hubieran dado por ella $3 \frac{4}{5}$ más, hubiera ganado $6 \frac{1}{20}$ pesetas. ¿Cuánto vale la mesa?

X. Un grado del termómetro centígrado equivale á $\frac{4}{5}$ del de Réamur, ¿$27 \frac{1}{3}$ centígrados á cuántos equivaldrán del de Réamur?

XI. De la vista del relámpago á la audición del trueno han mediado $4 \frac{3}{5}$ segundos ¿á qué distancia está la nube tempestuosa, siendo 340 metros por segundo la velocidad del sonido?

XII. Una señora compra una pieza de tela que tiene $27 \frac{3}{4}$ metros á $3 \frac{1}{5}$ pesetas el metro; cede á una amiga $12 \frac{1}{2}$ metros ¿cuánto importa la tela que la resta y cuánto le debe la amiga?

XIII. ¿Cuántas libras pesan $15\frac{3}{5}$ pesetas en monedas de diez céntimos, sabiendo que un Kg. equivale á $2\frac{7}{40}$ de libra.

XIV. El Puerto de los Baños tiene de altura los $\frac{5}{7}$ de la de Somosierra; que á su vez es los $\frac{7}{11}$ de la de Siete Picos, cuya altura es 2200 metros ¿cuál es la altura de Puerto de los Baños?

XV. La rueda de una bicicleta que tiene $5\frac{2}{3}$ pies de circunferencia dá $2\frac{1}{4}$ vueltas por segundo ¿cuánto andará en 15 minutos?

XVI. Los $\frac{4}{7}$ de un jamón pesan $3\frac{2}{5}$ Kg. ¿cuánto pesa el jamón?.

XVII. Un ciclista recorre en 2 horas 45 Km.; la rueda mayor tiene de circunferencia $3,^{m}754$ y la menor $2,^{m}128$ ¿cuántas vueltas ha dado cada rueda por minuto?

XVIII Siete piezas de tela de $13\frac{3}{4}$ m. cada una han costado $264\frac{1}{16}$ pesetas ¿á cómo sale el metro?

XIX. Un carruaje enganchado cuesta 3500 pesetas; el tiro cuesta los $\frac{3}{4}$ del carruaje ¿cuanto ha costado cada uno?

XX. Con dos piezas de tela se han hecho 12 manteles y 6 docenas de servilletas; los primeros tienen $4\frac{1}{3}$ metros cada uno, y las segundas $1\frac{1}{2}$ ¿cuál es la longitud de cada pieza, siendo la segunda los $\frac{3}{5}$ de la primera.

FRACCIONES DECIMALES.

XXVII.

Numeración de las fracciones decimales.

170. Se llama *fracción decimal á un conjunto de partes decimales de la unidad.*

Partes decimales de la unidad son las que resultan de dividir la unidad por las diversas potencias de 10, como $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$

Las fracciones decimales no son, pues, más que un caso particular de las ordinarias. Así que las propiedades demostradas para estas son aplicables á aquéllas, lo mismo que su cálculo.

Sin embargo, la consideración de su naturaleza especial nos proporciona propiedades particulares que simplifican considerablemente todas las operaciones.

171. Las partes decimales de la unidad se denominan *décimas*, *centésimas*, *milésimas*...... y, en general, se designan con el mismo nombre de las unidades enteras cambiando su terminación en *ésimas*.

Los principios fundamentales de la numeración decimal son los mismos que los de la entera, cuya continuación y complemento es:

Todo número decimal es la reunión de unidades decimales de diversos órdenes, siendo menos de diez las de cada orden.

La reunión de diez unidades decimales de un orden cualquiera, constituye una del orden inmediato superior.

Cada cifra representa unidades decimales del orden indicado por el lugar que ocupa, contando de izquierda á derecha.

172. Así, pues, toda cifra decimal tiene dos valores, como las cifras enteras; uno ***absoluto*** y otro ***relativo.***

Para poder fijar el valor relativo de las cifras decimales basta observar que, conforme á los principios establecidos, las décimas deben colocarse á la derecha de las unidades, las centésimas á la derecha de las décimas, etc. Se distinguen las unidades enteras de las decimales separándolas por una coma.

Así $4\,\frac{37}{1000}$ se escribirá 4,037; $5\,\frac{25}{100000} = 5{,}00025.$

173. De donde se infiere que *para enunciar un número decimal, designaremos primero la parte entera y después la parte decimal, como si fuese un entero, expresando al fin el orden de su última cifra decimal; ó bien se expresa el número total de sus unidades, designándole con la denominación de su última cifra decimal.*

174. *Para escribir un número decimal, se escriben sucesivamente las cifras que expresan las unidades de diversos órdenes que contiene, en sus lugares respectivos, y se separa la parte entera de la decimal, con una coma.*

Si la fracción es propia, la parte entera será cero.

Para leer un número decimal, se enuncia la parte entera, y después la parte decimal, como si fuera un entero, expresando al fin el orden de su última cifra decimal, ó *bien, se enuncia todo el número como si fuera un entero, expresando al fin el orden de su última cifra decimal.*

EJEMPLOS. 1.º ¿Cuál es el número que tiene 3 unidades, 5 centésimas, 7 cienmilésimas, 8 cienmillonésimas y 9 billonésimas?

2.º Escribir en guarismos el número anterior.

3.º Leer el número 105,00000870000345.

175. *Si á la derecha de un número decimal se colocan uno ó más ceros, el número no varía*, puesto que los valores absolutos y relativos de sus cifras son los mismos.

También se podría demostrar esta propiedad fundándose en el escolio del número 123.

Corolarios. 1.º *Un número decimal terminado en ceros no varía suprimiendo éstos.*

2.º *Un entero se puede reducir á decimal, poniendo una coma y añadiendo á su derecha los ceros que se quieran.*

3.º *Para reducir decimales á una denominación comun, basta igualar con ceros el número de sus cifras decimales.*

176. *Si se corre la coma, en un número decimal, uno ó más lugares á la derecha, el decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares hayamos corrido la coma.*

En efecto, el valor absoluto de sus cifras no varía, pero el relativo resulta multiplicado por 10, 100, 1000, etc. según que hayamos corrido la coma uno, dos, tres, etc. lugares á la derecha.

También puede demostrarse este principio con arreglo al segundo enunciado del número 123.

Del mismo modo se demuestra *que si se corre la coma uno ó más lugares á la izquierda, el número decimal queda dividido por la unidad seguida de tantos ceros como lugares hayamos corrido la coma*, ó bien fundándose en el número 123.

Corolario. *Al suprimir la coma en un número decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga*, pues equivale á correr todos estos lugares la coma.

XXVIII.

Transformación de los quebrados en decimales.

177. Las fracciones ordinarias pueden expresarse en forma decimal y viceversa, siendo útiles, y á veces necesarias, estas transformaciones

Para transformar un quebrado en decimal basta observar que todo quebrado es el cociente indicado de su numerador por el denominador. Así pues, si el quebrado es $\frac{7}{4}$, dividiendo 7 por 4 tendremos la parte entera 1 Reduciendo el resíduo á décimas, para lo que bastará agregar un cero, y dividiendo por 4, tendremos 7 décimas y 2 de resíduo.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 1{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Reduzco las 2 décimas á centésimas, para lo que basta agregar un cero, y dividiendo las 20 centésimas por 4, tengo 5 centésimas de cociente exacto; luego $\frac{7}{4} = 1{,}75$.

Luego *para reducir un quebrado ordinario á decimal basta dividir el numerador por el denominador, lo que nos dará la parte entera, y continuar la división agregando un cero á cada resíduo.*

Apliquemos esta regla á los quebrados $\frac{7}{6}$ y $\frac{7}{9}$.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 6 \\ \cline{2-2} 10 & 1{,}166... \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \end{array} \text{ luego } \frac{7}{6}=1{,}166...; \quad \begin{array}{r|l} 70 & 9 \\ \cline{2-2} 70 & 0{,}77... \\ 7 & \end{array} \text{ y } \frac{7}{9}=0{,}77...$$

178 Los ejemplos anteriores patentizan que al reducir un quebrado á decimal pueden presentarse dos casos: que el cociente tenga un número limitado de cifras, como en el ejemplo 1.º: ó que tenga un número ilimitado de cifras, como en el 2.º y 3.º

De ahí la división de las fracciones decimales en *exactas* é *inexactas*.

Las fracciones *inexactas* pueden ser á su vez *periódicas* y *no periódicas*.

Se llama *fracción periódica* aquella en que se repite un grupo de cifras periódica é indefinidamente.

El grupo de cifras que se repite, se llama *periodo*.

Las fracciones periódicas; por último, se distinguen en *periódicas puras*, cuando el periodo empieza desde las décimas, como en 0,77..., y *periódicas mixtas*, cuando el periodo empieza después de las décimas, como en 1,166...

Las cifras decimales situadas delante del periodo se llaman parte no periódica. Así, en este ejemplo, 1 es la parte no periódica, y 6 el periodo.

179. *La fracción decimal equivalente á una fracción ordinaria, es forzosamente exacta ó periódica.*

En efecto, al dividir el numerador por el denominador ó llegaremos á un cociente exacto, ó nó En el primer caso, la fracción decimal es exacta. En el segundo, al cabo de tantas divisiones á lo sumo como unidades menos una tenga el divisor (puesto que el resto siempre ha de ser menor que el divisor) se reproducirá uno de los restos anteriores, ó sea uno de los dividendos parciales anteriores, lo que nos conducirá á uno de los anteriores cocientes, que reproducirá el resto correspondiente, etc., y, por tanto, las cifras del cociente se repetirán desde entonces continua é indefinidamente, originando una fracción periódica.

XXIX.

Transformación de fracciones decimales en ordinarias.

Pasemos ahora á resolver el problema inverso que, según hemos visto, comprenderá tres casos, según que la fracción decimal sea exacta, periódica pura ó periódica mixta.

180. Se llama *generatriz de una fracción decimal, el quebrado ordinario equivalente.*

1.er caso. Si la fracción decimal es exacta basta poner su denominador de manifiesto.

Así $4{,}0257 = \frac{40257}{10000}$; $n, a\,b\,c = \frac{n\,a\,b\,c}{1000}$.

181. 2.º caso. Sea la fracción decimal periódica pura $n, ab\;ab.....$

Llamemos f á su generatriz, tendremos $f = n, ab\;ab...$ y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros, como cifras tenga el período (por 100 en este caso) $f \times 100 = n a b,\; ab\;ab.....$; restando de esta igualdad la anterior, resulta.

$$f \times 99 = n\,a\,b - n, \text{ de donde } f = \frac{n\,a\,b - n}{99}.$$

Luego *la generatriz de una decimal periódica pura es igual á un quebrado, que tiene por numerador la parte entera seguida del periodo, menos la parte entera; y por denominador, un número compuesto de tantos nueves como cifras tenga el periodo.*

Escolio. Aplicando esta regla al caso de una fracción propia, resultará que su generatriz es un quebrado, cuyo numerador es el periodo y cuyo denominador es un número compuesto de tantos nueves como cifras tenga el periodo.

182. 3.^{er} caso. Sea la fracción periódica mixta

$$n, p q a b c a b c \ldots\ldots$$

designando por f su fracción generatriz, será

$$f = n, p q a b c a b c \ldots\ldots$$

y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros, como cifras tenga la parte no periódica, resultará

$$f \times 100 = n p q, a b c a b c \ldots\ldots$$

que, con arreglo al caso anterior, nos dá

$$f \times 100 = \frac{n p q a b c - n p q}{999}$$

y dividiendo por 100 los dos miembros;

$$f = \frac{n p q a b c - n p q}{99900} \,. \text{ (a)}$$

Luego *la generatriz de una decimal periódica mixta es un quebrado, cuyo numerador es la parte entera seguida de la no periódica y del periodo, menos la parte entera seguida de la no periódica; y el denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Ejemplos. 1.º Hallar la generatriz de 8,0000375,

2.º de 0,000000045675.

3.º de 15,128128128.....

4.º de 0,545454.....

5.º de 7.38125125125.....

6.º de 0,246787878.....

Escolios. 1.º Aplicada la regla anterior á una fracción propia, resultará que la generatriz es un quebrado que tiene por numerador la diferencia entre la parte no periódica seguida del período, y la parte no periódica; y el denominador el dicho en el caso general.

* 2.º *El numerador de la generatriz de una decimal periódica mixta no puede terminar en cero*, para lo que precisaría que en el quebrado (a) fuera $q = c$; lo cual determinaría una cifra menos en la parte no periódica.

* 3.º *Las fracciones inexactas, no periódicas, no pudiendo expresarse por un quebrado ordinario* (179), *son números incomensurables.*

XXX.

Relaciones entre las fracciones decimales y sus generatrices.

* 183. *La generatriz de una fracción decimal exacta no contiene en su denominador mas factores primos que 2 y 5.*

En efecto, esa generatriz siempre puede suponerse un quebrado irreducible, pues sino lo fuera, le reduciríamos á su más simple expresión. Ahora bien, si la representamos por $\frac{a}{b}$, nosotros sabemos (177) que para reducirla á decimal no hacemos más que dividir a por b, agregando ceros al dividendo, ó sea multiplicándole por una potencia de 10 con lo que solo introducimos en el dividendo los factores 2 y 5 y para que $a \times 10^m$ sea divisible por b es necesario (97) que 10^m lo sea, y por tanto (103) que b no contenga mas factores primos que 2 ó 5, conforme queríamos probar.

* 184. *La generatriz de una decimal periódica con-*

tiene en su denominador algún factor primo diferente de 2 y 5.

Puesto que para que $a \times 10^m$ no sea divisible por b, es necesario que 10^m no lo sea, para lo que precisa b (103) tener algún factor primo diferente de 2 y 5.

* 185. *El número de cifras decimales de un fracción decimal exacta es igual al mayor de los exponentes de 2 y 5 del denominador de su generatriz irreducible,* pues ese será el número de ceros que habrá que agregar á a para que sea divisible por b.

* 186. *La generatriz de una decimal periódica pura no puede tener en su denominador el factor 2 ni el 5*

En efecto, el denominador de esta generatriz sabemos que es un número compuesto de nueves, por consiguiente, aunque le simplifiquemos, nunca podrá resultar ningún factor 2 ni 5.

* 188. *La generatriz de una decimal periódica mixta tiene siempre en su denominador alguno de los factores 2 ó 5, y algún factor primo con éstos,* sin lo cual sería generatriz de una decimal exacta ó de una periódica pura.

* 189. *Todo número entero, cuyas cifras sean nueves, en número suficiente, puede siempre ser múltiplo de otro entero primo con los factores 2 y 5.*

En efecto, si n es un entero primo con 2 y con 5, $\frac{1}{n}$ será la generatriz de una decimal periódica pura, y representando por p el periodo, (181) $\frac{1}{n} = \frac{p}{999.....}$; de donde se deduce que 999.... es múltiplo de n. (125)

Corolarios 1.º *El cociente completo de dividir por un número primo con los factores 2 y 5, el formado por los nueves necesarios y suficientes, es el periodo de la decimal engendrada por la parte alícuota de la unidad cuyo denominador es ese número.* Pues de la igualdad anterior

$$\frac{1}{n} = \frac{p}{999...} \text{ ; resulta } p = \frac{999...}{n}.$$

2.º *El periodo de la decimal engendrada por un que-*

brado propio irreducible $\frac{m}{n}$, *cuyo denominador sea primo con los factores* 2 *y* 5, *es el producto que resulta de multiplicar por* m *el período engendrado por*

$$\text{puesto que } \frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$$

Ejemplos. 1.º Determinar los períodos de las decimales engendradas por las fracciones

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{17}$$

2.º Determinar los periódos de las decimales engendradas por

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{11},\ \frac{7}{13},\ \frac{9}{17}$$

* 190. *El número de cifras de la parte no periódica de una fracción decimal periódica mixta, es igual al mayor de los exponentes de* 2 *ó* 5 *del denominador de su generatriz irreducible.*

Pues hemos visto que la generatriz de una decimal periódica mixta, tiene por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, y sabemos (183.—*Escolios*:—2.º) que su numerador no puede terminar en cero, de modo que, reducida á su más simple expresión, siempre quedará en el denominador el factor 2 ó el 5 con un exponente igual al número de cifras de la parte no periódica.

Escolio. El denominador de la generatriz de una fracción periódica mixta, se compone de dos factores; uno compuesto de los factores 2 y 5, y otro primo con ellos

El primero determina el número de cifras de la parte no periódica, y el segundo el número de cifras del periodo, con arreglo á lo expuesto.

XXXI.

Adición y sustracción de números decimales.

191. Como la numeración de los decimales se funda en los mismos principios que la de los enteros, cuyo complemento es, las consideraciones hechas para deducir la regla de la adición son también aplicables á estos números, y, por tanto, podemos desde luego establecer que

Para sumar números decimales basta sumar las unidades del mismo orden de todos los sumandos, empezando por las inferiores, reservando las decenas que resulten de cada suma parcial para agregarlas á la suma parcial siguiente:

Caso particular. Si hubiera que sumar quebrados ordinarios y decimales, bastaría reducir los primeros á decimales y vendríamos á parar al caso general.

192. *Escolio.* También podría demostrarse la regla de la adición poniendo los decimales en forma de quebrados y sumándolos como tales.

193. La sustracción de decimales se efectúa también como la de los enteros *restando las unidades del mismo orden de minuendo y sustraendo; aumentando diez unidades á la cifra del minuendo que sea menor que la del sustraendo, y aumentando uno á la cifra siguiente del sustraendo. Si el minuendo tuviera menos cifras decimales que el sustraendo, se igualan agregándole ceros á la derecha.*

Caso particular. Si el minuendo ó el sustraendo fuera un quebrado ordinario se reduciría á decimal.

Escolio. También podría deducirse la regla de la sustracción, de restar los decimales en forma de quebrados.

EJEMPLOS. 1.º Sumar

$$5{,}075+0{,}87546+127{,}04+84{,}0005784+19{,}004575+0{,}157+1574{,}00840057.$$

2.º $6{,}125+\frac{7}{16}+8+0{,}74+\frac{11}{125}$

3.º Restar de 0,25 el número 0,017895432.

4.º Restar de 4 el número 1,00057894.

5.º $\frac{4}{25}-0{,}08975432.$

6.º $0{,}5678-\frac{1}{8}$

XXXII.

Multiplicación de números decimales.

194. La regla de la multiplicación de decimales se deduce fácilmente del siguiente raciocinio. Supongamos que se quiere multiplicar $3{,}425\times0{,}75$.

Si suprimiéramos la coma en el multiplicando (176, cor.) este quedaría multiplicado por mil; y el producto obtenido sería mil veces mayor que el verdadero (46).

Si la suprimimos también en el multiplicador, le multiplicamos por ciento, haciendo el producto cien veces mayor.

Luego, al suprimir la coma en los dos factores, hemos hecho al producto cien mil veces mayor, y, por tanto, para que sea el verdadero habrá que dividirle por cien mil (176, 2.º)

Por consiguiente, *para multiplicar dos números decimales, se prescinde de las comas, se les multiplica como* *enteros y de la derecha del producto se separan con una coma tantas cifras como decimales haya en los dos factores.*

195. *Casos particulares.* Si uno de los factores fuera un número entero, solo habría que separar en el producto tantas cifras como decimales tuviera el otro factor.

Si uno de los factores fuera un quebrado, reduciéndole á decimal entraríamos en el caso general.

Escolio. También puede patentizarse la regla expuesta, poniendo los decimales en forma de quebrados ordinarios y multiplicándoles como tales.

EJEMPLOS. 1.° Multiplicar

$$0,4577895 \times 0,000324.$$

2.° $17 \times 0,000456.$. 3.° $1,17 \times 285$

4.° $\frac{3}{16} \times 0,00057.$ 5.° $0,000125 \times \frac{7}{125}.$

XXXIII.

División de números decimales.

196. Si el dividendo y divisor tuvieran las mismas cifras decimales, podríamos suprimir la coma en ambos (123, esc.) y quedaría reducida la operación á dividir dos números enteros.

Comencemos, pues, por igualar con ceros las cifras decimales (175) del dividendo y divisor, y tendremos resuelto el problema.

Luego *para dividir dos números decimales, se igualan con ceros sus cifras decimales, se suprimen las comas, y se dividen como enteros.*

Si el cociente no es exacto, se podrá aproximar cuanto se quiera, añadiendo un cero á cada resíduo.

197. *Casos particulares.* Si el dividendo ó el divisor fueren números enteros, bastará añadir al entero tantos ceros como decimales tenga el otro.

Si uno de ellos fuera un quebrado ordinario, se reduciría á decimal y estaríamos en el caso general.

Escolio. Al mismo resultado llegaríamos poniendo los decimales en forma de quebrados, y dividiéndolos como tales.

EJEMPLOS. 1.º Dividir 0,125 por 7,1415673

2.º 34: 0,125 3.º 2,65: 25.

4.º $\frac{3}{4}$; 0,0000174 5.º 0,000235 : $\frac{3}{25}$.

PROBLEMAS

RELATIVOS AL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS DECIMALES.

I. Una persona vá á Madrid á pasar unos días y gasta: 43,75 pesetas en billete de ida y vuelta; 4,50 en coche; 115,85 en fonda; 5,40 en lavandera; 15,90 en café; 27,50 en teatros; 29,45 en regalos para la familia y 204,25 en sastre ¿cuánto ha gastado en el viaje?

II. El Estado descuenta á sus empleados el 11 por 100 ¿qué sueldo mensual percibirá uno que tiene 5000 pesetas anuales?

III. Un tabernero compra 1584 litros de vino á 0,16 peseta el litro y lo vende á 0,50 ¿cuánto ha ganado?

IV. Una familia gasta diariamente en el desayuno 1,25 litros de leche á 0,50 pesetas el litro y 0,115 kilógramos de café á 5,25 pesetas el kilógramo; trata de reemplazarlo y gasta 0,115 kilógramos de chocolate á 2,50 pesetas el kilógramo y 0,378 litros de leche á los 0,50 de peseta ¿cuánto economizará al mes?

V. Dos piezas de tela cuestan 115 pesetas; una de ellas tiene 32 metros y ha costado á 2,30 pesetas el metro; la segunda tiene 8 metros menos ¿á cómo ha salido el metro?

VI. En el arreglo de una casa se han gastado 156 pesetas; han trabajado 13 días un maestro, un oficial y un peón; el oficial gana 4 pesetas diarias y el peón 2,50 ¿cuánto gana el maestro?

VII. Un fabricante mezcla 45 hectólitros de harina de 15 pesetas el hectólitro; con 64 de 17,50 pesetas y 39 de 13,25 y vende el hectólitro de la mezcla á 17,45 pesetas ¿cuánto ha ganado en hectólitro y cuánto en total?

VIII. Una familia tiene 7500 pesetas de renta, gasta en los cinco primeros meses del año 3375 pesetas ¿cuánto debe economizar en el gasto diario para que el anual no exceda de las 7500 pesetas?

IX. Dos amigos tienen que repartirse 635,45 pesetas de modo que la parte del uno sea la cuarta parte de la del otro ¿cuánto corresponde á cada uno?

X. Un sugeto gasta diariamente en el café 0,50 de peseta; en tranvía 0,60; y en tabaco 0,75 ¿cuánto lleva gastado en 12 años que tiene adquirida esa costumbre?

XI. Un tabernero echa en 17,75 hectólitros de vino 5,25 hectólitros de agua ¿cuánto vino y cuánta agua tendrá el hectólitro?

XII. Un padre deja dispuesto en su testamento que se entreguen á su mujer los $\frac{2}{5}$ del capital, al hijo mayor $\frac{3}{7}$ del resto, al segundo los $\frac{5}{9}$ de lo que quede y el resto, después de pagar los gastos de testamentaría, á los criados. Satisfechos aquéllos que importan 3124,12 pesetas, perciben éstos 2845 pesetas ¿cuánto corresponde á cada uno?

XIII. Para comprar 25 cigarros le sobran á una persona 0, 50 de peseta; y para comprar 35 le faltan los mismos 0.50. ¿Cuánto dinero tiene y cuánto cuesta cada cigarro?

XIV. Un padre ofrece á su hijo 0,25 de peseta cada día que sepa la lección, á condición de descontarle 0,20 cada día que no la sepa. Al cabo de 15 días ajustan cuentas y el padre debe al hijo 1,50 pesetas ¿cuántos días supo la lección y cuántos no la supo?

XV. Un carpintero tiene 4,50 pesetas de jornal; ha trabajado todo el año excepto los domingos y los días festivos, que han sido catorce, ha ahorrado 375 pesetas ¿cuánto ha gastado cada día?

XVI. Para pagar una semana á tres cuadrillas del mismo número de obreros recibe el encargado de una fábrica 1000 pesetas, de las que le sobran 140,75 pesetas, habiendo pagado á los unos á 1,75 pesetas, á los otros á 2,25 y á los últimos á 3,25 ¿cuántos hombres tiene cada cuadrilla?

XVII. 235 hectólitros de vino han costado 5124,75 pesetas ¿á cómo sale la arroba, sabiendo que 1 Hl.=6,198 arrobas?

XVIII. Cuántas arrobas tienen 37 toneladas, sabiendo que 1 tonelada = 920,186 kg.; y que 1 arroba = 11,502 kilógramos.

XIX. Por 56,25 pesetas se han comprado 25 arrobas de carbón de encina y 25 de cok, ¿cuál es el precio de cada uno, sabiendo que la arroba de encina ha costado cuádruple que la de cok?

XX. Qué economía se podrá obtener mensualmente reemplazando una máquina de vapor que consume en 13 días 273 kg de carbón, por otra que solo gasta 315 kg. en 21 días, saliendo el carbón á 36,80 pesetas la tonelada que tiene 920 kg.?

NÚMEROS INCOMENSURABLES.

XXXIV.

Nociones preliminares.

* 197. Hemos dicho que se llaman *números inconmensurables los que no pueden expresarse exactamente por enteros, ni quebrados*

Se llama *constante, una cantidad que siempre tiene el mismo valor, sin poder recibir otro alguno.*

Por el contrario, llámase *variable toda cantidad que cambia de valor, ó recibe diferentes valores, generalmente en virtud de una ley determinada.*

Límite de una variable es la cantidad constante á la que se aproxima siempre la variable, sin poder nunca igualarla, pero pudiendo diferenciarse de ella en menos de cualquier cantidad.

Este límite será *superior*, si la cantidad variable permanece menor que la constante en todos los estados por que pase; y es *inferior* si la variable permanece mayor que la constante en todos sus estados de magnitud. Por ejemplo, la unidad es el límite superior de los quebrados propios cuyos dos términos aumentan sucesivamente en un mismo número; y el límite inferior de los quebrados impropios sujetos á la misma condición.

* 198. Los números incomensurables solo pueden expresarse aproximadamente y la forma más apropiada es la decimal, en que puede aumentarse el número de cifras hasta alcanzar el límite de aproximación que deseemos.

Estos valores aproximados pueden serlo por exceso ó por defecto, según que sean mayores ó menores que el verdadero; y la diferencia entre el valor exacto y el aproximado se llama *error absoluto*; que dicho se está que será á su vez por exceso ó por defecto.

Así $0{,}3254$ es un valor aproximado por defecto de la fracción $0{,}3254385$, y el error es $0{,}3254385 - 0{,}3254 = 0{,}0000385 < 0{,}0001$; y $0{,}4578$ es un valor aproximado de $0{,}457876$ en que el error por defecto es $0{,}000076 < 0{,}00010$ ó sea $0{,}0001$; mientras que $0{,}4579$ es un valor aproximado en que el error por exceso es $0{,}4579 - 0{,}457876 = 0{,}000024 < 0{,}0001$. Si observamos que en el primer caso el error por defecto es mayor que $0{,}00005$ ó sea media diez milésima; y en el 2.° es menor que $0{,}00005$ ó sea media diez milésima, deduciremos que

1.° *El error cometido al despreciar cierto número de cifras decimales es menor que una unidad de último orden de las empleadas.*

2.° *Si queremos que el error sea menor que media unidad de un órden dado, se suprimirán las cifras siguientes á las de este orden, si la primera de ellas es menor que 5; y si no lo es, se aumenta aquella en una unidad y se suprimen las restantes.*

* 199. Se entiende por error relativo la razón del error absoluto al valor exacto. Así en el ejemplo anterior, el error absoluto por defecto es $0{,}0000385$; y el error relativo es $\dfrac{0{,}0000385}{0{,}3254385} = 0{,}000118$

XXXV.

Operaciones con los números aproximados.— Adición y sustracción.

* 200. No pudiendo efectuarse directamente las operaciones con los números incomensurables por desconocerse la unidad que por su agregación sucesiva les produce; precisa operar con sus valores aproximados, determinando el error de los resultados obtenidos.

* 201. *Adición.*—Esta operación se funda en los siguientes principios:

1.º *El error absoluto de una suma es igual á la suma de los errores absolutos de los sumandos, si todos se han aproximado por exceso, ó todos por defecto.*

2.º *El error absoluto de una suma es igual á la diferencia entre los errores por exceso y por defecto, si se han aproximado los sumandos en distinto sentido.*

Pues en el primer caso, el error total es el conjunto de los errores de todos los sumandos; y en el segundo, la suma resultaría por un lado mayor y por otro menor que la verdadera; luego el error será la diferencia entre ambos.

Consecuencia. *Si se valúan* n *sumandos en el mismo sentido con las mismas cifras decimales, el error de la suma es menor que* n *unidades de su último órden decimal.* Puesto que el error de cada sumando es menor que una unidad de ese órden.

De donde se deduce que para *sumar números aproximados con un error menor que una unidad dada, si son menos de* 10, *se valúan todos en el mismo sentido con un error menor que la unidad inferior inmediata á la dada, se desprecia en la suma la última cifra de la derecha y se añade una unidad á la anterior. Si fueran más de* 10 *y menos de* 100, *se valuarían todos con un error menor que la unidad dos órdenes inferior á la dada, y de la suma se despreciarían las dos últimas cifras de la derecha agregando la unidad á la anterior; y así sucesivamente.*

Ejemplos Hallar con un error menor que 0,001 la suma

$$6{,}7875 + 0{,}145678 + 17{,}97543 + 3{,}257432 + 4{,}57891 + 10{,}?574.$$

202. *Sustracción.* Se funda en el siguiente principio: *El error absoluto de la diferencia de dos números aproximados es la diferencia de los errores de dichos dos números, si ambos están aproximados por exceso ó por defecto; y es la suma de esos errores, si están aproximados en sentido contrario.*

Pues si ambos están aproximados por exceso ó por defecto, al restarlos, restamos los errores; pero si uno lo está por exceso y otro por defecto, al restarlos los acumulamos en el mismo sentido.

Consecuencia. *Si dos números se valúan en el mismo sentido con el mismo número de cifras decimales, el error de la diferencia es menor que la unidad de su último orden decimal.* Pues siendo el error de cada uno menor que la unidad de su último orden, con mayor razón lo será el error de la diferencia.

Luego *para obtener la diferencia de dos números, con un error menor, que una unidad dada, se valúan ambos en el mismo sentido, con un error menor que dicha unidad, y se restan.*

Ejemplo. Hallar con un error menor que 0,00001 la diferencia

$$15{,}4578932 - 3{,}97600241.$$

XXXVI.

Multiplicación de números aproximados.

* 203. La multiplicación se funda en el siguiente teorema:

El error absoluto de un producto de dos factores aproximados en el mismo sentido, es igual al producto de los errores de los factores, más el producto del error de cada uno por el otro factor.

En efecto, llamando A y B á los números cuyos valores aproximados representamos por a y b con los errores por defecto d y d', tendremos:

$$AB = (a + d)(b + d') = ab + bd + ad' + dd';$$

de donde

$$AB - ab = bd + ad' + dd'.$$

Consecuencias. 1.ª *Si uno de los factores es exacto, el error del producto será el producto de este factor por* *el error del otro*. Pues si $B = b$, será $d' = o$, y la igualdad anterior se convierte en

$$AB - a\,B = Bd$$

2.ª De aquí se deduce que *si un número valuado por defecto ó por exceso, con un error menor que una unidad decimal de un orden cualquiera, se multiplica por un entero exacto; el error del producto será menor que tantas unidades de ese mismo orden, como exprese el valor absoluto del multiplicador*; y

3.ª *Que si el multiplicador tiene una sola cifra, el error del producto será menor que la unidad de su penúltimo orden;* puesto que el valor absoluto de aquél es menor que diez.

De donde se deduce que *para obtener el producto de un número aproximado por un entero de una cifra, con un error menor que una unidad de un orden dado, se valúa el multiplicando con un error por defecto menor que la unidad inmediata inferior á la pedida, se efectúa la multiplicación, se desprecia en el producto la última cifra de la derecha, y se aumenta una unidad á la anterior.*

Ejemplos. 1.º Hallar el producto de $0{,}4578965 \times 8$ con un error menor que $0{,}0001$.

2.º Hallar los millares del producto

$$48754976921 \times 9.$$

204. Si el multiplicador tiene varias cifras, basta observar que, para que los errores de los productos parciales tengan el mismo límite, es preciso apreciar una cifra más en el multiplicando, cuando se multiplica por las decenas, que al multiplicar por las unidades; y una cifra menos cuando multipliquemos por las décimas, etc. Siendo de este modo de igual órden todos los errores parciales, el error del producto será menor que tantas unidades de ese órden, como exprese la suma de los valores absolutos de las cifras del multiplicador

De donde se deduce que *para obtener el producto de dos números, con un error menor que una unidad dada, se halla la suma de los valores absolutos de las cifras del* *multiplicador, y si es menor que diez, se determinan todos los productos parciales con un error menor que la unidad inmediata inferior á la dada; si es mayor que diez y menor que ciento, con un error menor que la unidad inferior en dos ordenes á la dada, y así sucesivamente; y en el producto total se desprecia la última cifra de la derecha, aumentando una unidad á la anterior.*

Ejemplo. Hallar el producto

$$0{,}3754785432 \times 4{,}576893$$

con un error menor que 0,001.

Escolios. 1.º En la práctica se facilita la operación, escribiendo debajo del multiplicando las cifras del multiplicador en orden inverso, de modo que la de las unidades esté debajo de la del orden inferior comun á todos los productos parciales; y se forman estos empezando la multiplicación correspondiente por la cifra del multiplicando situada sobre la del multiplicador que le produce, y prescindiendo de las que quedan á la derecha Estos productos parciales se escriben de modo que sus primeras cifras se correspondan, puesto que expresan unidades del mismo orden.

2.º Si las primeras cifras del multiplicador quedan excediendo á la derecha las primeras del multiplicando, se suplen éstas con ceros.

Ejemplo.—Efectuar el producto 513,075432191 × 321 × 28,45004016 con un error menor de 0,001.

```
  513,075'32194321
 6104,005'82
------------------
  1026150864
   410460344
    20523016
     2565375
        2052
           5
------------------
  1459701656
```

Luego el producto será 14597,017 con un error menor que 0,001.

XXXVII.

División de números aproximados.

Para la inteligencia de esta operación, conviene anteponer los siguientes principios en que se funda.

* 205. *El cociente de dividir un número aproximado por defecto, por un número exacto, tiene un error por defecto, igual al cociente de dividir el error del dividendo por el divisor.*

En efecto, llamando D al dividendo, d al divisor, c al cociente y e al error del dividendo; tendremos:

$D = d \times c$; de donde $D - e = d \times c - e$; y por fin;

$$\frac{D - e}{d} = c - \frac{e}{d}.$$

Consecuencia. *Si el error del dividendo es menor que el divisor, siendo éste exacto, el error del cociente es menor que la unidad.*

Pues $\frac{e}{d}$ será un quebrado propio.

* 206. *El cociente de dividir un número exacto, por otro aproximado por defecto, tiene un error por exceso, igual al cociente de su valor exacto multiplicado por el error del divisor, partido por el divisor aproximado.*

En efecto, llamando D al dividendo, d al divisor, c al cociente, y e al error del divisor, tendremos:

$$D = d\,c - c\,e + c\,e = (d - e)\,c + c\,e;$$

de donde

$$\frac{D}{d - e} = c + \frac{c\,e}{d - e} \text{ (a)}$$

Consecuencia. *Si siendo el dividendo exacto, el error por defecto del divisor es menor que la unidad del orden indicado por el número de sus cifras, menos el número* *de las que tenga el cociente entero, el error por exceso del cociente será menor que la unidad.*

Pues teniendo e tantas cifras como d menos las de c menos una, $d - e > c\ e$ que solo tiene á lo sumo tantas como tengan entre c y e, luego el quebrado (a) será propio.

* 207. Si tratamos, por ejemplo, de efectuar la división 486783457951 : 64578345, observaremos: 1.º que el cociente entero ha de tener 4 cifras; 2.º que el divisor debe valuarse, por defecto, en unidades de cuarto orden, número de sus cifras menos las que tiene el cociente, convirtiéndose en 64578000; 3.º que el dividendo debe valuarse, también por defecto, en unidades de séptimo orden, que es el inmediato inferior al superior del divisor, convirtiéndose en 486783000000. De esta suerte, el nuevo divisor nos dará en el cociente un error por *exceso* menor que 1, y el nuevo dividendo un error por *defecto* menor que 1; siendo contrarios habrán de neutralizarse en parte, y el error del cociente será con mayor razón menor que 1.

Dividiendo, pues, 486 783 000 000 por 64 578 000, ó sea

486783000	64'5'7'8
34735	7 5 3 7
2446	
509	
58	

La primera división parcial nos dá los 7 millares del cociente y, para obtener con menor error el resto, agregaremos al producto de 7 × 8 las 2 decenas que resultan del producto del cociente 7 por la primera cifra despreciada 3 del divisor.

Ahora tendríamos que dividir 34735000 por 64578, y como el cociente entero tendrá tres cifras, podremos suprimir una en el divisor, y queda reducido á dividir 34735000 por 64570, ó sea 3473500 por 6457; esta segunda división parcial nos dá 5 para las centenas del cociente y el resto 2446, obtenido como el primero. Habría que dividir enseguida 244600 por 6457, y como el cociente entero tendría dos cifras, podremos suprimir una en el divisor, y dividiremos 244600 por 6450, ó sea 24460 por 645, que nos dá las *3* decenas del cociente y el resto 509, obtenido como los anteriores.

Resta, pues, tan solo dividir 5090 por 645, y como el cociente tiene una cifra, por lo que podremos prescindir de una cifra del divisor, quedará reducido á dividir 5090 por 640, ó sea 509 por 64, que producen las 7 unidades del cociente y el resto 58, completando el cociente 7537 con un error menor que *1*, por exceso ó por defecto.

La determinación del cociente no ofrece duda alguna; pero como no hemos hallado los residuos sucesivos con exactitud, precisa probar que todos estos errores no hacen variar el cociente en una unidad.

Basta para ello observar que el primer residuo se ha obtenido, despreciando, 1.º; las unidades del producto de la primera cifra suprimida *3* del divisor por los 7 millares del cociente; y 2.º el producto completo de las restantes cifras suprimidas del divisor 45 por dicha cifra 7.

Ahora bien ni estas cifras, ni las del divisor pueden ser mayores que 9, luego el error cometido en el primer concepto es menor que 90 millares, es decir,

$$90 \times 1000 = 0{,}9 \times 100000;$$

y en el segundo menor que

$$10 \times 9000 = 90000 = 0{,}9 \times 100000$$

luego la suma de ambos errores no puede llegar á

$$2 \times 0{,}9 \times 100000.$$

Lo mismo podriamos decir del 2.º, 3.º y 4.º residuo; luego, en definitiva, el error cometido en el cociente por los errores de los residuos, es

$4 \times 2 \times 0{,}9 \times 100000 = 720000 <$ que el divisor 64578345 luego el error del cociente es menor que 1; lo cual se vé desde luego observando que el último divisor empleado 64 no es menor que $4 \times 2 \times 0{,}9$ y por tanto

$64 \times 100000 = 6400000$, que es menor que el divisor 64578315, no puede ser menor que $4 \times 2 \times 0{,}9 \times 100000$

Lo propio sucederá siempre que el último divisor empleado no sea menor que el número de cifras del cociente multiplicado por $2 \times 0{,}9$, lo que nos proporciona la siguiente regla:

Para hallar el cociente de dos enteros con un error menor que una unidad, se calcula el número de cifras del cociente entero y se separan de la izquierda del divisor las cifras necesarias para formar un número que no sea menor que el duplo de las cifras del cociente multiplicado por 0,9, *Ese número será el último divisor. Contando á su derecha tantas cifras como tenga el cociente menos una tendremos el primer divisor. Se borran de la derecha del dividendo tantas cifras como había en el propuesto á la derecha del último divisor y tendremos el primer dividendo. Dividiendo el primer dividendo por el primer divisor se tendrá la primera cifra del cociente; se multiplica por el primer divisor, agregando á las unidades del producto las decenas que hubieran resultado de multiplicar esa cifra del cociente por la primera despreciada del divisor, y se resta del dividendo. Se divide el resto por el divisor, suprimida la primera cifra de la derecha, y se tendrá la segunda del cociente; se procede como anteriormente y se continúa así hasta llegar al último divisor.*

Ejemplo.—Hallar con un error menor que 1 el cociente de dividir 45678954326574 por 785632975.

* 208. Hemos explicado ya como se puede obtener el cociente de dos enteros con un error menor que 1; para hallarle con un error menor que una unidad decimal, bastará convertir el dividendo en unidades de dicho orden decimal, por la agregación de ceros, separando de la derecha del cociente que se obtenga, tantas cifras cuantos ceros hayamos agregado.

Ejemplos. 1.° Hallar el cociente de 987567421783 : 456789325 con un error menor de 0,001.

2.° Hallar el cociente de 545,7893213 : 84,489729 aproximado hasta cienmilésimas.

XXXVIII.

Propiedades de los números incomensurables.

* 209 *Todo número incomensurable se halla comprendido entre dos números comensurables, cuya diferencia puede ser tan pequeña como se quiera.*

En efecto, sea N un número incomensurable cualquiera.

Formemos la série indefinida

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots$$

en que, dando á n un valor conveniente, pueden hallarse comprendidos todos los números comensurables. Siendo N incomensurable no podrá formar parte de esta série, pero tendrá que hallarse comprendido entre dos de sus términos consecutivos, y como la diferencia entre estos es $\frac{1}{n}$, que puede hacerse tan pequeña como se quiera, queda demostrado el principio.

* 210 Las propiedades generales de los números comensurables pueden aplicarse á los incomensurables, mediante el siguiente principio, conocido con el nombre de *teorema de los límites*.

Si dos ó más cantidades variables, que tienen límites, son constantemente iguales, sus límites son también iguales.

En efecto, si una variable aumenta solo puede tener un límite superior; y si disminuye un límite inferior; pues en uno y otro caso ha de aproximarse á su límite de modo que se diferencie de él en menos de cualquier cantidad dada, y, por tanto, no podrá aproximarse del mismo modo á otra cantidad mayor ó menor que dicho límite; luego la variable no tiene más que un solo límite.

Sentado esto, varias cantidades variables que son constantemente iguales, no constituyen mas que una sola variable, y, por tanto, solo pueden tener un límite; ó lo que es igual, los límites de esas variables son iguales.

* 211. *El producto de una suma de números comensurables ó incomensurables, por un número comensurable ó incomensurable, es igual á la suma de los productos parciales de todos los sumandos por ese número.*

Sea la suma $a + b + c$ y el multiplicador n; digo que

$$(a + b + c)\,n = a \times n + b \times n + c \times n.$$

Distinguiremos tres casos: que n sea entero, fraccionario ó incomensurable.

1.º Si n es entero, el producto $(a + b + c)\,9$ se obtendrá repitiendo $a + b + c$, 9 veces por sumando, lo que equivale á tomar 9 veces por sumando á cada uno de los números a, b, c; luego $(a + b + c)\,9 = a, 9 + b, 9 + c, 9$.

2.º Si n es fraccionario, el producto $(a + b + c)\,\frac{4}{5}$ indica que hemos de tomar los $\frac{4}{5}$ de $a + b + c$, para lo que basta hallar los $\frac{4}{5}$ de a, b y c, y sumar los resultados; luego

$$(a + b + c) \times \frac{4}{5} = a \times \frac{4}{5} + b \times \frac{4}{5} + c \times \frac{4}{5}.$$

3.º Si n es incomensurable, habrá un valor m comensurable que se diferencie tan poco de n como queramos, y, en virtud de lo expuesto en los dos casos anteriores, tendremos

$$(a + b + c)\,m = a\,m + b\,m + c\,m,$$

pero el límite del primer miembro es

$$(a + b + c)\,n,$$

y el del segundo

$$a\,n + b\,n + c\,n.$$

luego (210)

$$(a + b + c)\,n = a\,n + b\,n + c\,n.$$

* 212. *El producto de la diferencia de dos números comensurables ó incomensurables, por un número comensurable ó incomensurable, es igual á la diferencia de los productos parciales del minuendo ó sustraendo por el multiplicador,*

digo que $(a - b)\,n = a\,n - b\,n.$

En efecto, llamando d á la diferencia de a y b, tendremos

$$a - b = d;\ a = b + d;$$

de donde (211)

$$a\,n = b\,n + d\,n \quad \text{ó} \quad a\,n - b\,n = d\,n$$

y sustituyendo $a - b$ en lugar de d,

$$a\,n - b\,n = (a - b)\,n.$$

* 213. *El producto de varios factores comensurables ó incomensurables es independiente del orden de los factores.*

Sea el producto $a\,b\,c\,d$, y supongamos que a, c, d son incomensurables y b es comensurable, vamos á demostrar que $a\,b\,c\,d = a\,d\,c\,b$.

En efecto, por ser a, c y d incomensurables, los podremos representar por valores comensurables a' c' y d' que se diferencien de ellos en menos de cualquier cantidad. Ahora bien, siendo a', b, c' y d' números comensurables, será $a'\,b\,c'\,d' = a'\,d'\,c'\,b$; pero el límite de $a'\,b\,c'\,d'$ es $a\,b\,c\,d$, y el de $a'\,d'\,c'\,b$ es $a\,d\,c\,b$; luego (210) $a\,b\,c\,d = a\,d\,c\,b$, que es lo que queriamos demostrar.

Del mismo modo podríamos generalizar las demás propiedades demostradas para los números comensurables

* 214. *Las raices de un grado cualquiera de los números enteros ó fraccionarios, que no sean potencias perfectas de dicho grado, son números incomensurables*

En efecto, sea N un número entero y r su raíz del grado n, tendremos $N = r^n$; y r no puede ser entero, porque N no es potencia perfecta del grado n; y no puede ser fraccionario porque reduciéndole á su más simple expresión, su potencia n será también un quebrado irreducible.

Si suponemos que N fuera fraccionario, no podría ser r fraccionario porque N no es potencia perfecta: ni entero porque un entero no puede ser igual á un quebrado irreducible.

No puede ser, en ningún caso, r ni entero ni fraccionario, luego es incomensurable

Escolio. Los números incomensurables que proceden de la extración de raíces se llaman *números irracionales.* *

XXXIX.

Raíz cuadrada de los números enteros.

215. Ya sabemos que *raíz cuadrada de un número es otro número que elevado al cuadrado reproduce el propuesto.* El fundamento de la extracción de raices es la elevación á potencias.

En la extracción de la raíz cuadrada de los números enteros conviene distinguir dos casos: que el número sea menor que 100 ó mayor que 100.

216. 1.er caso. *Que el número sea menor que* 100.

Basta para resolver el problema en este caso, saber de memoria los cuadrados de los diez primeros números,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$$

que son,

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100$$

y se llaman *cuadrados perfectos.* En los cien primeros números solamente 10 son cuadrados perfectos, ó tienen raíz cuadrada exacta, los restantes tienen su raíz cuadrada incomensurable.

Se llama *raíz cuadrada entera* de un número, la del mayor cuadrado perfecto contenido en dicho número.

Residuo de la raíz cuadrada de un número es la diferencia entre dicho número y el mayor cuadrado perfecto contenido en él.

Así la raíz cuadrada entera de 70 es 8, y el resíduo 6; pues el mayor cuadrado perfecto contenido en 70 es 64, cuya raíz es 8, y la diferencia entre 70 y 64 es 6

217. 2.º *caso*. La determinación de la raíz cuadrada de los números mayores que 100, se funda en el siguiente principio.

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Sean los dos números a y b;
digo que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2.$$

En efecto,

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2 + a\,b + a\,b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2.$$

Corolarios. 1.º *El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, se compone de tres partes: cuadrado de decenas, más duplo de decenas por unidades, más cuadrado de unidades.*

Sea el número N, d sus decenas y u sus unidades.

Tendremos $N = d \times 10 + u$;
luego

$$N^2 = (d \times 10 + u)^2 = d^2 \times 100 + 2\,d \times 10 \times u + u^2.$$

2.º *La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor más uno.*

Sean los números n y $n+1$;
digo que

$$(n+1)^2 - n^2 = 2\,n + 1.$$

En efecto,

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1;$$

y restando n^2 de los dos miembros de esta igualdad, resulta

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

3.° *El resíduo de la raíz cuadrada de un número entero es menor que el duplo de la raíz entera más uno.*

Si representamos por r la raíz cuadrada entera del número N, será

$$\sqrt{N} \begin{matrix} > r \\ < r+1 \end{matrix} \quad \text{y} \quad N \begin{matrix} > r^2 \\ < (r+1)^2 \end{matrix};$$

luego la diferencia

$$N - r^2 < (r+1)^2 - r^2 \quad \text{ó} \quad N - r^2 < 2r + 1,$$

conforme al enunciado.

* 218. Demostrados estos principios, podemos desde luego extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100. Sea el número 1369; representemos por d las decenas y por u las unidades de su raíz.

Tendremos

$$1369 = (d \times 10 + u)^2 = d^2 \times 100 + 2d \times 10 + u + u^2,$$

que nos dice que el número propuesto consta de tres partes: cuadrado de las decenas de su raíz,+duplo de las decenas por las unidades de su raíz, y cuadrado de las unidades de su raíz

Si nosotros pudiéramos separar del número propuesto la primera parte, extrayendo su raiz cuadrada, tendríamos las decenas de la raiz. Pero el cuadrado de decenas es siempre

$$\begin{array}{r|l} 1\,3\,6\,9 & 37 \\ \cline{2-2} 4\,6\,9 & 64 \\ 0\,0 & \end{array}$$

centenas, luego no podrá estar en las unidades, ni en las decenas del número propuesto. Las separo con una coma, y sé ya que en las 13 centenas del número propuesto está contenido el cuadrado de las decenas de su raiz, con mas alguna centena que proceda del segundo sumando. Luego si extraigo la raíz cuadrada de 13, tendré las decenas de la raíz, ó una cifra mayor que dichas decenas, pero nunca menor.

Ahora bien, para que dicha cifra fuera mayor que las decenas de la raíz, tendría que ser al menos $d+1$ decenas, y por tanto, la raíz cuadrada de las centenas sería mayor que la raíz de todo el número propuesto, que es $d+u$; lo que es absurdo.

Luego si la raíz cuadrada 3 de las 13 centenas del número propuesto no puede ser mayor, ni menor, que las decenas de la raíz pedida, es en efecto las decenas de esa raíz.

Si ahora restamos del número propuesto el cuadrado de las 3 decenas de su raíz, ó sean 9 centenas, las 469 unidades del resto contendrán las otras dos partes, es decir, el duplo de decenas por unidades de la raíz, más el cuadrado de dichas unidades.

Pero el duplo de decenas por unidades es un número exacto de decenas, luego no puede estar contenido en las unidades del resto. Separo, pues, las 9 unidades con una coma, y en las 46 decenas estará contenido el duplo de decenas por unidades, más alguna decena procedente del cuadrado de unidades Luego si divido las 46 decenas del resto, por el duplo de las 3 decenas de la raíz, tendré las unidades ó un número mayor que las unidades de la raíz, nunca menor.

Para ver si esa cifra es mayor que la verdadera, podríamos elevar 37 al cuadrado, y si podía restarse del número propuesto, estábamos seguros de que 7 eran las unidades de la raíz. Pero como hemos restado ya del número propuesto el cuadrado de las decenas de la raíz, bastará restar del resto las otras dos partes para obtener la misma comprobación.

Pero $2d \times 10 \times u + u^2 = (2d \times 10 + u)\,u$.

Luego agregando al duplo de decenas las unidades (para lo que basta escribir la cifra 7 á la derecha del 6), multiplicando este número por las unidades, y restando el producto del resto 469, tendremos comprobada la raíz hallada.

En el caso actual efectuando la resta nos dá un resto cero, luego la raíz pedida es 37.

Si no pudiera hacerse la sustracción, se disminuye una unidad á la cifra de las unidades y se repite la comprobación. *

219. Las consideraciones expuestas nos conducen á la siguiente regla general.

Para extraer la raíz cuadrada de un número entero, se divide en grupos de á dos cifras, comenzando por la derecha: se extrae la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raíz. Se eleva esta cifra al cuadrado y se resta del primer grupo de la izquierda: al lado del resto se coloca el segundo grupo, y se separa con una coma la primera cifra de la derecha, dividiendo el número de la izquierda por el duplo de la raíz hallada: el cociente entero se coloca á la derecha del divisor y, el número así formado, se multiplica por dicho cociente y se resta el producto del dividendo con más la cifra separada. Si la sustracción es posible, este cociente será la segunda cifra de la raíz. A la derecha del resto se coloca el grupo siguiente y así sucesivamente, hasta bajar el último grupo.

EJEMPLOS:

1.º Extraer la raíz cuadrada de

$$12345678976.$$

2.º $\sqrt{38467425}$.

* 220. *Caracteres de irracionalidad. Un entero, cuya primera cifra de la derecha sea 2, 3, 7 ú 8, no puede ser cuadrado perfecto*

Pues, segun hemos visto (217, cor. 1.º) el cuadrado de un entero, termina en la misma cifra que el cuadrado de sus unidades, y como los cuadrados de los diez primeros números terminan en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9, resulta que los enteros que terminen en 2, 3, 7 y 8 no pueden tener raíz cuadrada exacta.

* 221. *Un entero terminado en 5 y cuya cifra inmediata no sea 2, no tiene raíz cuadrada exacta*. Pues para que un entero terminado en 5 sea cuadrado perfecto, es preciso que su raiz cuadrada termine en 5; es decir que tendrá la forma

$$(d \times 10 + 5)^2 = d^2 \times 100 + 2\,d \times 10 \times 5 + 5^2 =$$
$$d^2 \times 100 + d \times 100 + 25;$$

número que forzosamente termina en 25.

* 222. *Un entero divisible por un número primo, y no divisible por su cuadrado no tiene raíz exacta.* Pues de $\sqrt{N} = a \times b \times c$, llamando a, b y c á los factores primos de la raiz de N, se deduce $N = a^2 \times b^2 \times c^2$.

De aquí se deduce. 1.º *Que para que un entero sea cuadrado perfecto, es necesario y suficiente que todos sus factores primos tengan exponentes pares*. Con arreglo á la igualdad anterior.

2.º *Que todo número par no divisible por 4, tiene su raiz cuadrada irracional*. Pues siendo divisible por 2, no lo es por 2^2.

3.º *Un número impar, que disminuido en una unidad no sea divisible por 4, no puede ser cuadrado perfecto*. Pues esta raíz no puede ser par, según acabamos de ver, y no puede ser impar pues el cuadrado de la cifra de sus unidades, si es impar, es tambien impar.

4.º *Todo entero terminado en un número impar de ceros, tiene su raiz cuadrada irracional*. Puesto que uno de sus factores 2 ó 5, entre con exponente impar.

XL.

Raíz cuadrada de los números fraccionarios.

223. *La raíz cuadrada de un quebrado es igual á la*

raíz cuadrada de su numerador, partida por la raíz cuadrada del denominador.

En efecto,

$$\sqrt{\frac{a}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

porque

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Cuando los dos términos del quebrado son cuadrados perfectos, la aplicación de esta regla no ofrece dificultad alguna; pero si no lo son, pueden presentarse los tres casos siguientes: que el numerador no sea quebrado perfecto, que no lo sea el denominador, ó que no lo sea ninguno de los dos.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{17}{25}} = \frac{\sqrt{17}}{5}; \quad \sqrt{\frac{16}{23}} = \frac{4}{\sqrt{23}}, \text{ y } \sqrt{\frac{17}{23}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{23}}.$$

La primera raíz está comprendida entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{5}$, puesto que $\sqrt{17}$ está comprendida entre 4 y 5; se conoce, pnes, su *raíz aproximada* que se diferencia de la *verdadera* en menos de $\frac{1}{5}$.

Así diremos que $\sqrt{\frac{17}{25}} = \frac{4}{5}$ con un *error* menor que $\frac{1}{5}$.

Pero en el segundo y tercer caso, cuando el denominador no es cuadrado perfecto, no conociéndose exactamente el valor del denominador del quebrado-raíz queda éste sin significación aritmética, por no poderse determinar las partes en que está dividida la unidad. De ahí la necesidad de reducir estos dos casos al primero.

224. Si los dos términos de un quebrado $\frac{a}{b}$, cuyo denominador no es cuadrado perfecto, se multiplican por b, resultará $\frac{a}{b} = \frac{a \times b}{b^2}$.

Luego para transformar un quebrado en otro equivalente de denominador cuadrado perfecto, basta multiplicar sus dos términos por el denominador.

* 225. Observemos ahora que si el quebrado propuesto fuera irreducible, descompuesto su denominador en sus factores primos, tendrían algunos de éstos exponentes impares, puesto que no es cuadrado perfecto; y bastaría multiplicar sus dos términos por el producto de estos factores, para que el nuevoq uebrado tuviera su denominador cuadrado perfecto.

Pero, por ser el quebrado propuesto irreducible, es el de menores términos de todos sus equivalentes y al multiplicar sus dos términos por el producto de los factores primos con exponentes impares del denominador, hemos obtenido el menor múltiplo de este, cuadrado perfectos; luego.

Para reducir un quebrado al mínimo denominados cuadrado, se reduce á su mas simple expresión, y se multiplican sus dos términos por el producto de los factores primos que entran con exponente impar en el nuevo denominador.

226. La raíz cuadrada de un número mixto se obtendrá reduciendo el mixto préviamente á quebrado.

227. La determinación de la raíz cuadrada de los números decimales se deduce fácilmente de la de los quebrados.

En efecto,

$$n, a\,b\,c\,d = \frac{n\,a\,b\,c\,d}{10000},$$

luego

$$\sqrt{n, a\,b\,c\,d} = \frac{\sqrt{n\,a\,b\,c\,d}}{100}.$$

Si el número decimal tuviera un número impar de cifras decimales, su denominador no sería cuadrado perfecto y, aplicando la regla del número 225, bastaría agregar un cero, es decir, multiplicar por 2×5; luego

Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal se le agrega un cero á la derecha, si el número de sus cifras decimales es impar; se extrae la raíz cuadradas, prescindiendo de la coma, y de la derecha de la raíz obtenida, se separan tantas cifras, con la coma, como grupos de cifras decimales hayamos empleado.

Ejemplos:

1.º Extraer la raíz cuadrada de $\frac{868}{7440}$.

2.º $\sqrt{0,000745}$.

3.º $\sqrt{5,1789756}$.

4.º $\sqrt{15\frac{7}{84}}$.

* 228. Caractéres de irracionalidad. De lo dicho anteriormente se deduce que la condición necesaria y suficiente para que un quebrado sea cuadrado perfecto es que lo sean sus dos términos

Los caracteres de irracionalidad de los números fraccionarios se fundan en el siguiente teorema.

La condición necesaria y suficiente para que un que-

brado tenga raíz cuadrada exacta, es que el producto de sus términos sea cuadrado perfecto.

Pues de $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b}$; se deduce $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2}$;

y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por B^2;

$$A\,B = \frac{a^2 B^2}{b^2} = \left(\frac{a\,B}{b}\right)^2.$$

Recíprocamente, siempre que se verifique la igualdad $A\,B = n^2$; se tendrá, dividiendo ambos miembros por B^2;

$$\frac{A}{B} = \frac{n^2}{B^2} = \left(\frac{n}{B}\right)^2.$$

* Consecuencias. 1.ª *Si el producto de los dos términos de un quebrado no es cuadrado perfecto, su raíz cuadrada será irracional.* (Con arreglo al teorema).

2.ª *Todo número decimal, no terminado en ceros, que tenga un número impar de cifras decimales, tiene su raíz cuadrada irracional.*

Pues el producto de sus dos términos termina en un número impar de ceros (222-4.º) *

XLI.

Raíz cúbica de los números enteros.

229. Sabemos que *raíz cúbica de un número es otro número que elevado al cubo reproduce el propuesto.*

En la extracción de la raíz cúbica de los números enteros conviene distinguir dos casos: que el número sea menor que 1000, ó mayor que 1000.

230. 1.er *caso.* Para extraer la raíz cúbica de los nú-

meros menores que 1000, basta saber de memoria los cubos de los diez primeros números.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

que son

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

y se llaman *cubos perfectos*. En los mil primeros números solamente diez son cubos perfectos, ó tienen raíz cúbica exacta, los restantes tienen su raìz cúbica incomensurable,

Se llama *raíz cúbica entera* de un número, la del mayor cubo perfecto contenido en dicho número.

Resíduo de la raíz cúbica de un número es la diferencia entre dicho número y el mayor cubo perfecto contenido en él. Así la raíz cúbica de 560 es 8, y el resíduo 48; pues el mayor cubo perfecto contenido en 560 es 512, cuya raíz es 8; y la diferencia entre 560 y 512 es 48.

231. 2.º *caso*. La determinación de la raíz cúbica de los números mayores que mil, se funda en el siguiente principio:

El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Sean los dos números a y b;

digo que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En efecto

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$$
$$= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+$$
$$2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2 \times b^3.$$

Corolarios. 1.º *El cubo de un número compuesto de* *decenas y unidades, se compone de cuatro partes: cubo de decenas, más triplo de cuadrado de decenas por unidades, más triplo de decenas por cuadrado de unidades, más cubo de unidades.*

Sea N el número, d sus decenas y u sus unidades.

Tendremos

$$N = d \times 10 \times u;$$

luego

$$N^3 = (d \times 10 + u)^3 = d^3 \times 1000 + 3\,d^2 \times 100 \times u + 3\,d \times 10 \times u^2 + u^3.$$

2.° *La diferencia de los cubos de dos números consecutivos es igual al triplo del cuadro del menor, más el triplo del menor, más* 1.

Sean los números n y $n + 1$;

digo que

$$(n + 1)^3 - n^2 = 3\,n^2 + 3\,n + 1.$$

En efecto,

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1;$$

y restando n^3 de los dos miembros de esta igualdad, resulta

$$(n + 1)^3 - n^3 = 3\,n^2 + 3\,n + 1.$$

3.° *El resíduo de la raíz cúbica de un número entero es menor que el triplo del cuadrado de la raíz entera, más el triplo de dicha raíz, más* 1.

Si representamos por r la raíz cúbica entera de N será

$$\sqrt[3]{N} \begin{smallmatrix} > r \\ < r + 1 \end{smallmatrix} \quad \text{y} \quad N \begin{smallmatrix} > r^3 \\ < (r + 1)^3 \end{smallmatrix};$$

luego la diferencia

$$N - r^3 < (r + 1)^3 - r^3, \text{ ó sea } N - r^3 < 3\,r^2 + 3\,r + 1,$$

conforme al enunciado.

* 231. Demostrados estos principios, podemos desde

luego extraer la raíz cúbica de un número mayor que 1000. Sea el número 175616, representemos por d las decenas y por u las unidades de su raíz.

Tendremos

$$175616 = (d + 10 + u)^3 = d^3 \times 1000 + 3 \times d^2 \times 100 \times u + 3 \times d \times 100 \times u^2 + u^3,$$

que nos indica que el número propuesto consta de cuatro partes: cubo de las decenas de su raíz, triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de su raíz, triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades de su raíz y cubo de estas unidades.

Si nosotros pudiéramos separar del número propuesto la primera parte, extrayendo su raíz cúbica, tendríamos las decenas de la raíz. Pero el cubo de decenas es siempre millares, luego no estará en las unidades, ni en las decenas, ni en las centenas del número propuesto.

Las separo con una coma, y sé ya que en los 175 millares del número propuesto está contenido el cubo de las decenas de su raíz, con más algún millar que proceda de las otras partes.

$$\begin{array}{r|l} 175{,}616 & 56 \\ \cline{2-2} 125 & 75 \\ \hline 50{,}616 & \\ 175{,}616 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego si extraigo la raíz cúbica de 175, tendré las decenas de la raíz ó una cifra mayor que dichas decenas, pero nunca menor.

Ahora bien, para que dicha cifra fuera mayor que las decenas de la raíz tendría que ser al menos $d + 1$ decenas, y, por tanto, la raíz cúbica de los millares del número propuesto sería mayor que la raíz de todo el número, que es solo $d + u$; lo que es absurdo.

Luego si la raíz cúbica 5, de los 175 millares del número dado, no puede ser menor, ni mayor que las decenas de la raíz pedida, es, en efecto, las decenas de esa raíz.

Si restamos ahora del número propuesto el cubo de las 5 decenas de su raíz, ó sean 125 millares, el resto 50616 contendrá las otras tres partes, ó sea el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz por sus unidades, triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades de la raíz, y cubo de dichas unidades.

Pero el triplo de cuadrado de decenas por unidades es un número exacto de centenas, luego no puede estar contenido ni en las unidades ni en las decenas del resto, Separo, pues, las dos primeras cifras de la derecha con una coma, y en las 506 centenas estará contenido el triplo del cuadrado de decenas por unidades, más alguna centena que provenga de las otras dos partes.

Luego si divido las 506 centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas, que es 75, tendré las unidades ó un número mayor que las unidades de la raíz, nunca menor. Las divido y obtengo la cifra 6.

Para ver si esta cifra no es mayor que la verdadera, elevo 56 al cubo y me reproduce el numero propuesto, luego 56 es la raíz pedida. En el caso de que el cubo de la raiz hallada fuera mayor que el número propuesto, se disminuye una unidad á la cifra de las unidades y se repite la comprobación.

También podría hacerse la comprobación, restando del resto la suma de las otras tres partes que constituyen el número propuesto, puesto que ya está restado el cubo de decenas.

232. Las anteriores consideraciones dan la siguiente regla general.

Para extraer la raíz cúbica de un número entero, se divide en grupos de á tres cifras, comenzando por la derecha: se extrae la raíz cúbica del primer grupo de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raíz. Se eleva esta cifra al cubo y se resta del primer grupo de la izquierda, al lado del resto se coloca el segundo grupo, y se separan con una coma las dos primeras cifras de la derecha; dividiendo el número de la izquierda por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, tendremos la segunda *cifra de la raíz. Para comprobarla, se eleva al cubo el número formado por las dos cifras de la raíz y se resta del número propuesto. Si la sustracción es posible, dicho número es la raíz buscada; si no puede efectuarse, se irán rebajando de una en una las unidades de esa segunda cifra de la raíz hasta que sea posible la sustracción.*

La operación se continúa del mismo modo hasta agotar el último grupo.

EJEMPLOS:

1.° $\sqrt[3]{346785432}$

2.° $\sqrt[3]{34567893}$

3.° $\sqrt[3]{5478632415}$

* 233. Caracteres de irracionalidad. *Un entero divisible por un número primo, y no divisible por su cubo, no tiene raíz exacta.*

Pues de $\sqrt[3]{N} = a \times b \times c$, llamando a, b y c á los factores primos de la raíz de N,

se deduce $N = a^3 \times b^3 \times c^3$.

Consecuencias. 1.ª *Para que un entero sea cubo perfecto, es necesario y suficiente que todos sus factores primos tengan exponentes múltiplos de 3,* con arreglo á la igualdad anterior.

2.ª *Todo número par que no sea divisible por 8, tiene su raíz cúbica irracional.* Pues siendo divisible por 2, no lo es por 8

3.ª *Todo entero terminado en un número de ceros que no sea múltiplo de 3, tiene su raíz cúbica irracional.*

Puesto que uno de sus factores primos 2 ó 5, entra con exponente que no es múltiplo de 3. *

XLII.

Raíz cúbica de los números fraccionarios.

234. *La raíz cúbica de un quebrado es igual á la raíz cúbica de su numerador, partida por la raíz cúbica del denominador.*

En efecto,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}};$$

porque

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3} = \frac{a}{b}.$$

Cuando los dos términos del quebrado son cubos perfectos, la aplicación de esta regla no ofrece dificultad alguna; pero si no lo son, pueden presentarse los tres casos siguientes: que el numerador no sea cubo perfecto, que no lo sea el denominador, ó que no lo sea ninguno de los dos.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{180}{343}} = \frac{\sqrt[3]{180}}{7}; \quad \sqrt[3]{\frac{125}{376}} = \frac{5}{\sqrt[3]{376}} \text{ y } \sqrt[3]{\frac{189}{376}} = \frac{\sqrt[3]{180}}{\sqrt[3]{376}}.$$

La raíz cúbica del primer quebrado está comprendida entre $\frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$, se conoce, pues, su *raíz aproximada*, que se diferencia de la *verdadera* en menos de $\frac{1}{7}$ Así diremos que $\sqrt[3]{\dfrac{180}{343}}$ es $\dfrac{5}{7}$ con un *error* menor que $\dfrac{1}{7}$.

Pero en el segundo y tercer caso, cuando el denominador no es cubo perfecto, no conociéndose exactamente el valor del denominador del quebrado-raíz, queda sin significación aritmética, toda vez que no pueden determinarse las partes en que la unidad está dividida, De aquí la necesidad de reducir estos casos al primero.

235. Si los dos términos de un quebrado $\frac{a}{b}$, cuyo denominador no es cubo perfecto, se multiplican por b^2, resultará $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times b^2}{b^3}$.

Luego para transformar un quebrado en otro equivalente de denominador cubo perfecto, basta multiplicar sus dos términos por el cuadrado de su denominador.

* 236. Observemos ahora que si el quebrado dado fuera irreducible, descompuesto su denominador en sus factores primos, algunos de estos tendrían exponentes que no fueran múltiplos de 3 puesto que no es cubo perfecto; y bastará multiplicar sus dos términos por el producto de las menores potencias que precisen estos factores primos, para tener exponentes múltiplos de 3, para que el nuevo quebrado tenga su denominador cubo perfecto.

Ahora bien, el quebrado propuesto es de menores términos que todos sus equivalentes; el denominador hallado es el menor múltiplo que sea cubo perfecto; luego.

Para reducir un quebrado al mínimo denominador cubo, se reduce á su más simple expresión, y se multiplican sus dos terminos por el producto de las menores potencias de los factores primos del denominador que se necesiten para que sus exponentes sean múltiplos de 3. *

237. La raíz cúbica de un número mixto se hallará fácilmente reduciéndole primero á quebrado.

238. La determinación de la raíz cúbica de los números decimales se deduce fácilmente de la regla anterior.

En efecto,

1.° $$n, a\,b\,c\,d\,e\,f = \frac{n\,a\,b\,c\,d\,e\,f}{1000000};$$

$$\text{luego } \sqrt[3]{n, a\,b\,c\,d\,e\,f} = \frac{\sqrt[3]{n\,a\,b\,c\,d\,e\,f}}{100}.$$

2.° $$n, a\,b\,c\,d = \frac{n\,a\,b\,c\,d}{10000} = \frac{n\,a\,b\,c\,d\,00}{1000000};$$

$$\text{luego } \sqrt[3]{n, a\,b\,c\,d} = \frac{\sqrt[3]{n\,a\,b\,c\,d\,00}}{100}.$$

Luego para extraer la raíz cúbica de un número decimal, se añaden á su derecha uno ó dos ceros, para que el número de cifras decimales sea múltiplo de 3; se extrae la raíz cúbica del número que resulte, prescindiendo de la coma, y de la derecha de la raíz se separan con la coma tantas cifras como grupos de tres decimales hayamos empleado.

EJEMPLOS:

1.° Extraer la raíz cúbica de $\frac{1645}{84600}$.

2.° $\sqrt[3]{7\frac{6}{108}}$

3.° $\sqrt[3]{0{,}000456789}$

4.° $\sqrt[3]{3{,}1457231}$

* 239 Caracteres de irracionalidad. De lo dicho anteriormente se deduce que la condición necesaria y

suficiente para que un quebrado sea cubo perfecto es que lo sean sus dos términos.

Los caractéres de irracionalidad de los números quebrados se fundan en el siguiente teorema.

La condición necesaria y suficiente para que un quebrado tenga raíz cúbica exacta, es que el producto de su numerador por el cuadrado de su denominador sea cubo perfecto.

Pues de

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b};$$

se deduce

$$\frac{A}{B} = \frac{a^3}{b^3};$$

y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por B^3;

$$A\,B^2 = \frac{a^3\,B^3}{b^3} = \left(\frac{a\,B}{b}\right)^3.$$

Recíprocamente, siempre que se verifique la igualdad

$$A \times B^2 = n^3;$$

se tendrá, dividiendo ambos miembros por B^3;

$$\frac{A}{B} = \frac{n^3}{B^3} = \left(\frac{n}{B}\right)^3.$$

Consecuencias. 1.ª *Si el producto del numerador de un quebrado por el cuadrado de su denominador, no es cubo perfecto, su raíz cúbica será irracional.* Con arreglo al teorema.

2.ª *Todo número decimal, no terminado en ceros, que tenga un número de cifras decimales no múltiplo de 3, tiene su raíz cúbica irracional.* Pues el prodúcto de su numerador por el cuadrado de su denominador no terminará en un número de ceros múltiplo de tres. (233-3.º) *

XLIII.

Aproximación de las raices inconmensurables.

* 240. Hemos visto que las raices de un grado cualquiera de los números enteros ó fraccionarios que no sean potencias perfectas de dicho grado, son números inconmensurables.

En la imposibilidad de obtener con exactitud el valor de las raices irracionales, se determinan con un error menor que cualquier número dado.

* 241. Supongamos que queremos hallar la $\sqrt{N}$ con un error menor que una fracción dada $\frac{m}{n}$.

Tendremos evidentemente,

$$N = \frac{N \times \left(\frac{n}{m}\right)^2}{\left(\frac{n}{m}\right)^2}, \text{ de donde } \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \times \left(\frac{n}{m}\right)^2}}{\frac{n}{m}}$$

Ahora bien, la $\sqrt{N \times \left(\frac{n}{m}\right)^2}$, podemos representarla por r; es decir, que estará comprendida entre r y $r+1$; luego

$$\sqrt{N} \begin{cases} > \dfrac{r}{\frac{n}{m}} = \dfrac{m\,r}{n} \\[2ex] < \dfrac{r+1}{\frac{n}{m}} = \dfrac{(r+1)\,m}{n} \end{cases}$$

luego $\sqrt{N}$ se diferenciará de $\frac{mr}{n}$ en menos de

$$\frac{(r+1)m}{n} - \frac{mr}{n} = \frac{m}{n}.$$

Por consiguiente, *para obtener la raíz cuadrada de un número dado, con un error menor que una fracción dada, se multiplica ese número por el cuadrado de la fracción invertida, se extrae la raíz cuadrada del producto, y esta raíz se multiplica por la fracción de aproximación.*

* 242. Si la fracción de aproximación fuera una parte alicuota de la unidad $\frac{1}{p}$, aplicando la regla anterior, tendremos

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \times p^2}}{p}$$

lo que nos dice que *para extraer la raíz cuadrada de un número dado, con un error menor que una parte alicuota de la unidad, se multiplica el número por el cuadrado del denominador de la parte alicuota, se extrae la raíz cuadrada del producto, y esta raíz se divide por el denominador de la parte alicuota.*

* 243. Si en vez de la raíz cuadrada de N en menos de $\frac{m}{n}$, se tratara de hallar la cúbica, el razonamiento análogo nos daría

$$N = \frac{N \times \left(\frac{n}{m}\right)^3}{\left(\frac{n}{m}\right)^3} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \times \left(\frac{n}{m}\right)^3}}{\frac{n}{m}}$$

y si llamamos r á la raíz del numerador

$$\sqrt[3]{N}\ \begin{array}{l} > \dfrac{r}{\frac{n}{m}} = \dfrac{m\,r}{n} \\[2ex] < \dfrac{r+1}{\frac{n}{m}} = \dfrac{(r+1)\,m}{n} \end{array}$$

luego $\sqrt[3]{N}$ se diferencia de $\frac{m\,r}{n}$, en menos de

$$\frac{(r+1)\,m}{n} - \frac{m\,r}{n} = \frac{m}{n},$$

que es lo que se pedía.

Por consiguiente, *para extraer la raíz cúbica de un número con un error menor que una fracción dada, se multiplica el número por el cubo de la fracción de aproximación invertida, se extrae la raíz cúbica del producto, y esta raíz se multiplica por la fracción de aproximación.*

* 244. Si la fracción de aproximación es una parte alicuota de la unidad $\frac{1}{p}$, la aplicación de esta regla nos dá:

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \times p^3}}{p},$$

luego *para obtener la raíz cúbica de un número, con un error menor que una parte alicuota de la unidad, se multiplica el número por el cubo del denominador de la parte alicuota, se extrae la raíz cúbica del producto, y se divide esta raíz por el denominador de la parte alicuota.*

* 245 Sea la raíz cuadrada, ó cúbica, la que se quiera extraer, la demostración empleada comprende el caso en que la fracción de aproximación, en vez de ser una parte alicuota cualquiéra de la unidad, es una parte decimal.

Es evidente que en este caso queda reducido el procedimiento á añadir doble ó triple número de ceros, según se trate de la raíz cuadrada ó de la cúbica, de los que enga el denominador de la parte decimal, extraer la raíz, y separar de ella con una coma tantas cifras decimales como grupos de ceros hayamos añadido

Este caso suele llamarse *aproximar por decimales una raíz inexacta*, es preferible á los demás, y es casi el único que se emplea en la práctica.

EJEMPLOS.

1.º Hallar la raíz cuadrada de 28 con un error menor de $\frac{3}{4}$.

2º. $\sqrt{156}$ en menos de $\frac{1}{5}$.

3º. $\sqrt{78}$ en menos de 0,001.

4.º $\sqrt[3]{541}$ en menos de $\frac{2}{7}$.

5.º $\sqrt[3]{236}$ en menos de $\frac{1}{12}$.

6.º $\sqrt[3]{587}$ en menos de 0,0001.

7.º $\sqrt{0,00134}$ en menos de 0,01.

8.º $\sqrt[3]{0,0061}$ en menos de 0,001.

NÚMEROS CONCRETOS.

XLIV.

Sistema antiguo de pesas y medidas.

246. Hemos indicado ya que medir una cantidad e compararla con otra de su misma naturaleza que se toma como unidad.

En las numerosas é importantes aplicaciones de la aritmética, las cantidades no solo se determinan, como ha sucedido hasta ahora, en su valor numérico ó *cuantitativo*, sino también en su especie ó valor *cualitativo*, determinando su naturaleza y originando los números concretoss Por eso la unidad no será ya una sola, sinó que habrá tantas unidades como especies distintas de can tidades tengamos que considerar: todas ellas se llaman *unidades concretas*.

247 Además, como la unidad debe ser proporcionada á la cantidad que se quiere medir, es indispensable considerar dentro de cada especie unidades de diversos órdenes.

Se entiende por *sistema de pesas y medidas el conjunto de todas estas unidades de varias especies y de distintos órdenes*, y se las aplica el calificativo *legal*, porque sus valores están determinados por la ley en cada país.

Los sistemas de pesas y medidas son distintos en cada país, y en un mismo pais difieren en épocas distintas,

248. El sistema antíguo de pesas y medidas que ha re-

gido en España hasta hace pocos años, y que aun se emplea en aigunas provincias, carece de una unidad que sirva de fundamento al sistema. Las unidades de las diversas especies son completamente arbitrarias, y las unidades de distinto orden se forman de la principal, sin ley fija que las determine.

En este sistema, las unidades concretas se dividen en siete grupos: *lineales* ó de longitud, *de superficie*, *de volúmen*, *de capacidad*, *de peso*, *de dinero y de tiempo*.

Unidades de longitud.

El patrón ó modelo es la vara de Burgos.

La legua tiene $6666\frac{2}{3}$ varas ó sean 20.000 pies.

El estadal......	4 varas ó	12 pies.
La vara.................		3 pies.
El pié....................		12 pulgadas.
La pulgada...............		12 líneas.

Para la marina.

La legua marina.........	3 millas.
Milla....................	10 cables.
Cable....................	111 brazas.
Braza....................	6 pies.
Codo de rivera..........	2 pies 9 líneas.

Unidades de superficie ó cuadradas.

La legua cuadrada.	$20.000^2 = 400000000$ pies cuadrados.
La vara.........	$3^2 = 9$ pies cuadrados.
El pié..........	$12^2 = 144$ pies cuadrados.

Agrarias.

Fanega de tierra	576 estadales cuadrados.
Aranzada	400 estadales cuadrados.
Estadal cuadrado......	144 pies cuadrados.

Unidades de volúmen ó cúbicas.

La legua cúbica.........	20.000^3=8000000000000 pies cúbicos.
La tonelada de arqueo...	8 codos cúbicos de rivera= 70.189 pies cúbicos.
La vara cúbica.........	3^3=27 pies cúbicos.
El pié cúbico...........	12^3=1728 pulgadas cúbicas.

Unidades de capacidad.

Para áridos.

El patrón es la media fanega de Avila.

El Cahíz...	12 fanegas.
La fanega..	12 celemines.
El celemin..	4 cuartillos.

Para líquidos.

El patrón es la cántara de Toledo.

El moyo...	16 cántaras.
La cántara.	8 azumbres.
El azumbre.	4 cuartillos.
El cuartillo.	4 copas.

Se exceptúa de los líquidos el aceite que se vendía al peso. La arroba de aceite tenía 25 libras. La libra 4 panillas.

Unidades de peso.

El patrón es el marco del Consejo de Castilla.

El quintal....	4 arrobas.
La arroba	25 libras.

Para la farmacia.

La libra	12 onzas.

La libra......	16 onzas.	La onza.....	8 dracmas.
La onza......	16 adarmes.	El dracma ..	3 escrúpulos
El adarme ...	8 tomines.	El escrúpulo.	4 granos.

Para la joyería.

El marco............	3 onzas.
La onza	8 ochavas.
La ochava...........	6 tomines.
El tomin.............	3 quilates.
El quilate............	4 granos.

Unidades de dinero.

La unidad era el real y posteriormente el escudo.

Monedas de oro.		*Monedas de plata.*	
La onza.......	320 reales	El duro ó peso fuerte.	20 rs.
La media onza.	160 „	El medio duro.......	10 „
El centin......	100 „	La peseta..........	4 „
El ochentin...	80 „	La media peseta	2 „
El escudo.....	40 „	El real $8\frac{1}{2}$ cuartos ó 34 marvs.	
El escudito....	20 „	La peseta columnaria.	5 rs.
El escudito viejo	$21\frac{1}{4}$ „	La media id........	$2\frac{1}{2}$ „
		El real id..........	$1\frac{1}{4}$ „

Monedas de cobre.

El medio real..........	17 maravedises.
Dos cuartos	8 „
Cuarto	4 „
Ochavo..............	2 „

El maravedí era moneda imaginaria.

Unidades de tiempo

El siglo....	100 años.	La semana	7 dias.
El lustro...	5 „	El día....	24 horas.
El año.....	12 meses ó 365 dias	La hora..	60 minutos.
El mes común	30 dias.	El minuto.	60 segundos

XLV.

Sistema métrico decimal.

249. El sistema legal de pesas y medidas, vigente en la actualidad, es el sistema métrico decimal.

Se llama métrico porque la unidad fundamental, de la cual se deducen todas las demás, es el metro, tomada directamente y referida á la medida de la tierra; y decimal porque las unidades de cada especie se obtienen multiplicando ó dividiendo la principal por las potencias sucesivas de diez.

El metro es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Es la unidad fnndamental del sistema, y á la vez, la unidad principal de longitud.

Las demás unidades principales son:

De superficie, el metro cuadrado, ó sea un cuadrado que tiene de lado un metro lineal.

De volumen, el metro cúbico, ó sea un cubo que tiene de lado un metro lineal.

De capacidad, el litro, cuya cabida es la de un decímetro cúbico.

De peso, el gramo, peso de un centìmetro cúbico de agua destilada, en el vacio y á la temperatura de 4^0 ce·tígrados.

250. Las unidades de los demás órdenes pueden ser múltiplos ó divisores de la unidad principal.

Los múltiplos se designan anteponiendo al nombre de la unidad principal las palabras griegas *deca*, *hecto kilo* y *miria*, que significan respectivamente *diez ciento, mil* y *diez mil*.

Los submúltiplos ó divisores anteponiendo al nombre de la unidad principal las voces latinas *deci*, *centi*, *mili*, que significan á su vez *décima*, *centésima y milésima*.

246, La exposición del sistema métrico, después de estas nociones, queda hecha en el siguiente cuadro.

Unidades de longitud.

Unidad principal el metro.

Múltiplos.		*Submúltiplos,*	
Miriámetro	=10000 metros	Decímetro	=0,1 de metro.
Kilómetro	= 1000 „	Centímetro	=0,01 „
Hectómetro	= 100 „	Milímetro	=0,001 „
Decámetro	= 10 „		

Unidades de superficie.

Unidad principal del metro cuadrado.

Múltiplos.

Miriámetro	cuadrado=10000^2	=100000000	m^2
Kilómetro	cuadrado=1000^2	=1000000	„
Hectómetro	cuadrado=100^2	=10000	„
Decámetro	cuadrado=10^2	=100	„

Submúltiplos.

Decímetro cuadrado	$= 0,1^2 = 0,01$	m^2
Centimetro „	$= 0,01^2 = 0.0001$	„
Milímetro „	$= 0,001^2 = 0,000001$	„

En agrimensura se emplea como unidad principal el decámetro cuadrado, que se denomina *área*.

De suerte que las unidades agrarias son:

Hectárea ó sea el hectómetro cuadrado=100 áreas.

Area ó sea el decámetro cuadrado=100 centiareas.

Centiárea ó sea el metro cuadrado.

Unidades de volúmen.

Unidad principal el metro cúbico.

Múltiplos.

Miriámetro cúbico	$= 10000^3 = 1000000000000$	m^3
Kilómetro „	$= 1000^3 = 1000000000$	„
Hectómetro „	$= 100^3 = 1000000$	„
Decámetro „	$= 10^3 = 1000$	„

Submúliplos.

Decìmetro cúbico	$= 0,1^3 = 0,001$	m^3
Centımetro „	$= 0,01^3 = 0,000001$	„
Milímetro „	$= 0.001^3 = 0,000000001$	„

El metro cúbico se designa también con el nombre de *tonelada de arqueo*.

Unidades de capacidad.

Unidad principal el litro.

Múltiplos.		*Submúltiplos.*	
Miriálitro =	10000 litros.	Decilitro =	0,1 litro.
Kilolitro =	1000 „	Centilitro =	0,01 „
Hectólitro =	100 „	Mililitro =	0,001 „
Decálitro =	10 „		

Unidades de peso.

Unidad principal el gramo.

Múltiplos.		*Submúltiplos.*	
Miriágramo	=10000 gramos.	Decígramo	=0,1 gramo.
Kilógramo	= 1000 „	Centígramo	=0,01 „
Hectógramo	= 100 „	Milígramo	=0,001 „
Decágramo	= 10 „		

Además se emplean la *tonelada de peso* que tiene 1000 kilógramos, y el *quintal métrico* que tiene 100 kilógramos.

Unidades de dinero.

Monedas de oro.	*Monedas de plata*	*Monedas de bronce*
De 100 pesetas (no acuñada aún)	De 5 pesetas.	De 0,10 de peseta
	De 2 „	De 0,05 „
De 25 „	De 1 „	De 0,02 „
De 10 „	De 0,50 „	De 0.01 „

XLVI.

Numeración de concretos.

252. Los números concretos, de un modo análogo á los abstractos, se forman por agregación de unidades concretas, originando dos clases de números, *complejos* é *incomplejos*.

Número incomplejo es el que consta de unidades de un solo orden, como 7 meses, 4 litros, 15 gramos.

Número complejo es el que consta de unidades de dife-

rentes órdenes pero de la misma especie, como 7 meses, 2 días y 9 horas.

Los números concretos se dicen *homogéneos* cuando son de la misma especie, y *heterogéneos* cuando son de distinta especie.

Los números incomplejos se expresan con las siguientes abrebiaturas: M miria, K kilo, H hecto, D deca, *d* deci, *c* centi, *m* mili; *m* metro, m^2 metro cuadrado, m^3 metro cúbico, *l* litro, *g* gramo, escribiendo el número de unidades que contiene, seguido de la inicial del múltiplo ó submúltiplo y la de la unidad principal, que corresponde á las unidades que expresa. Así 34 kilómetros, se escribirá 34 km.

Los números complejos, expresando las unidades de diversos ordenes que los forman, empezando por las superiores.

En todo complejo conviene tener presente que los incomplejos que le forman deben ser menores que la unidad inmediata superior.

253. Los números métricos incomplejos pueden con suma facilidad expresarse en forma compleja, atendida su formación decimal, con solo escribir separadamente sus diversas cifras. Así $3475^{m} = 3^{Km}$, 4^{Hm}, 7^{Dm}, 5^{m} y $38054^{m^2} = 3^{Hm^2}\ 80^{Dm^2}\ 54^{m^2}$.

Del propio modo, un número complejo métrico se reduce á incomplejo con solo escribir sus diversas unidades, unas á continuación de otras, colocando la coma en en el lugar que la corresponda. Así $3^{Dl}\ 5^{l}\ 6^{cl} = 35^{cl}$, 06.

254. *Reducción de un incomplejo á otro equivalente de orden inferior.* Supongamos que queremos reducir 5 horas á minutos,

Diremos: como 1 hora tiene 60 minutos, 5 horas tendrán 5 veces 60 minutos ó $60 \times 5 = 300$ minutos.

Luego *para reducir un complejo á otro equivalente de orden inferior, basta multiplicarle por el número de veces que la unidad de su especie contiene á la de dicho orden inferior.*

255 *Reducción de un incomplejo á otro equivalente de orden superior.* Supongamos que queremos reducir 300 minutos á horas.

Como 1 minuto es $\frac{1}{60}$ de hora, 300 minutos serán

$\frac{300}{60}$ de hora $= 5$ horas.

Luego *para reducir un incomplejo á otro equivalente de orden superior, se divide por el número de veces que la unidad de su especie está contenida en la de dicho orden superior.*

256 Resueltos estos dos problemas, las transformaciones de números complejos no ofrecen dificultad alguna.

Reducción de un número complejo á incomplejo de su orden inferior.

Reducir, por ejemplo, $7^d\ 15^h\ 14^m$ á minutos.

Se reducen los 7 dias á horas y resultan 168 horas, que, con las 15 del número propuesto, suman 183 horas; se reducen estas horas á minutos y resultan 10980 minutos, que, con los 14 del número dado, componen 10994 minutos.

Luego $7^d\ 15^h\ 14^m = 10994^m$

$$\begin{array}{r} 7^d \\ 24 \\ \hline 168^h \\ 15 \\ \hline 183^h \\ 60 \\ \hline 10980^m \\ 14 \\ \hline 10994^m \end{array}$$

Por consiguiente, *para reducir un número complejo á incomplejo de su orden inferior, se reducen las unidades de orden superior á su inmediato inferior, y se agregan* *las que de este orden contenga el número propuesto; se efectúa lo mismo con esta suma, y se continúa del propio modo hasta llegar al orden inferior.*

257. *Reducción de un número complejo á incomplejo de cualquier orden de su especie.*

Convertir $5^d\ 13^h\ 25^m\ 54^s$ en horas.

Reducido este número complejo á segundos nos dá 480354^s que reducidos á horas son

$$\frac{480354}{3600} = 133^h\ \frac{1554}{3600} = 133^h\ \frac{259}{600}.$$

Se reduce un número complejo á incomplejo de cualquier orden de su especie, reduciéndole á incomplejo de su orden inferior y reduciendo éste á incomplejo del orden pedido.

258. *Conversión de un incomplejo de orden inferior de su especie en complejo.*

Convertir en complejo 480354^s

Convertiremos los segundos en minutos, los minutos en horas y las horas en dias, y obtendremos:

$$\begin{array}{r|l}
480354^s & 60 \\
\cline{2-2}
0005 & \begin{array}{r|l} 8005^m & 60 \\ \cline{2-2} 20 & \begin{array}{r|l} 133^h & 24 \\ \cline{2-2} 13^h & 5^d \end{array} \\ 20 & \\ 25^m & \end{array} \\
54^s &
\end{array}$$

$$480354^s = 5^d\ 13^h\ 25^m\ 54^s$$

Lo que nos dice que *para convertir en complejo un incomplejo del orden inferior de su especie, se reduce al orden inmediato superior, el cociente entero se reduce también á su orden superior inmediato y así sucesivamente.*

El complejo resulta formado por el último cociente entero y todos los restos sucesivos.

259. *Conversión de un quebrado incomplejo en complejo.*

Esta operación, que se llama también *valuar un quebrado concreto*, se dispone del modo siguiente:

Valuar $\frac{83}{25}$ de día.

Dividiendo el numerador por el denominador tendré $3^d\ \frac{8}{25}$; y reduciendo los $\frac{8}{25}$ de día á horas, resultan $7\ \frac{17}{25}$ horas; los $\frac{17}{25}$ de hora se reducen á minutos, y nos dán $40\ \frac{20}{25}$ de minuto; y

$$\begin{array}{r|l} 83^d & 25 \\ \cline{2-2} 8 & 3^d\ 7^h\ 40^m\ 48^s \\ 24 & \\ \hline 192^h & \\ 17 & \\ 60 & \\ \hline 1020^m & \\ 020 & \\ 60 & \\ \hline 1200^s & \\ 200 & \\ 0 & \end{array}$$

convertidos los $\frac{20}{25}$ de minuto en segundos nos resultan 48^s.

Luego $\frac{83}{25}$ de día $= 3^d\ 7^h\ 40^m\ 48^s$.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

XLVII.

Adición y sustracción de concretos.

260. Teniendo en cuenta las consideraciones expues-

tas (246) sobre la naturaleza de los números concretos, se comprende que al operar sobre estos números habremos de tener en cuenta, no solo sus valores numéricos, sinó también su valor cualitativo ó especie.

Por el primer concepto, su cálculo se sujeta á las mismas reglas que el de los números abstractos; por el segundo, será preciso investigar, en cada caso, por la naturaleza de los datos, la del resnltado,

261. *Adición de concretos.* Siendo la suma el conjunto de todos los sumandos, es evidente que las partes deben ser homogéneas con el todo. De suerte que la primera condición, para sumar números concretos, es que sean homogéneos.

Pudiendo ser los sumandos complejos ó incomplejos, en la adición de concretos se podrán distinguir dos casos,

262. Primer caso. *Para sumar números incomplejos, se suman como los abstractos, y la suma será de la misma especie que los sumandos.*

Ejemplo.—El número de nacimientos en España en 1879, fué el siguiente:

En Enero................	357
Febrero.............	373
Marzo...............	351
Abril...............	330
Mayo..............	310
Junio...............	289
Julio...............	276
Agosto.............	283
Septiembre..........	313
Octubre............	311
Noviembre..........	311
Diciembre..........	312

¿Cuál fué el número de nacidos en todo el año?

263. Segundo caso. *Para sumar números complejos, se suman separadamente las unidades de sus diversos ordenes, extrayendo de cada suma parcial las unidades del orden inmediato superior que contenga, para agregarlas á este orden,*

También podrían sumarse reduciéndolos á incomplejos del mismo orden, con lo que quedaría reducido este caso al anterior.

Ejemplo. Un comerciante recibe cuatro cajas de géneros que pesan, respectivamente:

17 quintales	2 arrobas	19 libras	11 onzas
25 „	3 „	15 „	13 „
19 „	1 „	23 „	9 „
28 „	2 „	17 „	12 „

¿cuánto pesan las cuatro cajas?

264. *Sustracción de concretos* Con arreglo á lo expuesto en la adición, para que la sustracción de concretos pueda efectuarse, es preciso que minuendo y sustraendo sean de la misma especie. Páeden ocurrir los mismos dos casos que anteriormente.

265. Primer caso. *Para restar números incomplejos, se restan como los abstractos, y la diferencia será de* la *misma especie que el minuendo y sustraendo.*

Ejemplo. El peso de una caja de mercancías es de 8 arrobas $\frac{3}{5}$ y la caja pesa $\frac{3}{4}$ arrobas ¿cuál es el peso de la mercancía?

Segundo caso. *Para restar numeros complejos, se restan separadamente las unidades del sustraendo de las del mismo orden del minuendo. Si algún sustraendo parcial es mayor que el minuendo correspondiente, se añade á éste una unidad del orden inmediato superior, conver-*

tida en la de aquel, teniendo luego en cuenta la unidad restada al minuendo

EJEMPLO Un reloj marca $7^h\ 8^m\ 49^s$ cuando otro señala $6^h\ 58^m\ 57^s$ ¿cuanto va atrasado el segundo?

266. *Caso particular de la sustracción.* Cuando los datos no estan esplícitos, precisa obtenerlos para realizar la operación. Tal sucede con la resta de fechas. Para averiguar el tiempo transcurrido entre dos fechas cualesquiera, debe tomarse como origen común una fecha anterior á las dos propuestas El minuendo y sustraendo serán respectivamente el tiempo transcurrido desde su origen hasta la fecha más próxima y la más remota de las dos propuestas.

EJEMPLO. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde el 11 de Mayo de 1717, en que Felipe V firmó en Segovia el decreto creando la Universidad de Cervera, hasta el 1.º de Octubre de 1894?

XLVIII.

Multiplicación de concretos.

267. *Multiplicar dos números concretos es hallar un tercer número concreto, que sea, su valor numérico y especie, respecto del multiplicando, lo que el multiplicador es de la unidad de su especie.*

De esta definición se deducen desde luego dos consecuencias importantes: 1.ª *que siendo el multiplicador homogéneo con la unidad, el producto tendrá que ser siempre homogéneo con el multiplicando.* 2.ª *que si consideramos el multiplicando como el valor de la unidad, el producto será también el valor del multiplicador.*

De donde se deduce que el problema general de la multiplicación de concretos será: *conocido el valor de la unidad, hallar el valor de varias unidades de la misma especie.*

268. En la multiplicación de concretos distinguiremos dos casos:

1.° Que el multiplicando, es decir, el valor de la unidad, sea incomplejo.

2.° Que el multiplicando sea complejo.

269. 1.er *caso.* Si el multiplicador expresa unidades del mismo orden que la unidad cuyo valor es el multiplicando, la operación se verifica como la de los números abstractos.

Si el multiplicador no es del mismo orden que la unidad, habrá que convertirle á dicho orden, lo que podrá darle la forma entera, quebrada ó mixta; y la operación se efectúa como la de los abstractos.

Ejemplos. 1.° Un tren recorre 34,75 Km. en 1 hora; ¿cuántos kilómetros recorrerá en 15 horas?

2.° Un tren recorre 37,50 Km. en 1 hora; ¿cuántos kilómetros recorrerán en 35 minutos?

270. 2.° *caso.* Si el multiplicando es complejo, reduciéndole á incomplejo estaremos en el caso anterior.

Sin embargo, en este caso, cuando el multiplicador, reducido al orden de la unidad cuyo valor expresa el multiplicando, es entero, es preferible dejar al multiplicando en su forma compleja, y la operación se efectúa *multiplicando separadameete las unidades de cada orden del multiplicando por el multiplicador, cuidando de extraer de cada producto parcial las unidades del orden superior que contenga, para agregarlas á éste.*

Ejemplos. 1.° La tierra en su movimiento de traslación recorre en 1 día; 59′ 8″,33 ¿cuánto recorrerá en 13 dias, 19 horas, 15 minutos, 45 segundos?

2.º La tierra tarda 1 dìa, 0 horas, 20 minutos, 58,13 segundos en recorrer 1.º de su órbita; ¿cuánto tardará en recorrer 25° 37′ 45″?

Si el multiplicador, reducido al orden de la unidad cuyo valor es el multiplicando, es fraccionario suele emplearse el

Método de las partes alicuotas. Se descompone el multiplicador en partes alicuotas de la unidad que representa el multiplicando, se halla sucesivamente el valor de estas partes y se suman.

Ejemplo. Un reloj atrasa diariamente 6^m 34, 5^s ¿cuánto atrasará en 2^d 16^h y 29^m?

La operación se dispone del siguiente modo, descomponiendo el multiplicador en 2^d $12^h = \frac{1}{2}$ de día.

		6^m	34^s,5
		2^d 16^h	29^m
	Valor de 2 dias.......	13^m	9^s
$12^h = 1/2$ de 1 día	Id. de 12 horas....	3	17,25
$4^h = 1/3$ de 12 horas	Id. de 4 horas.....	1	5,75
Id. de 1 hora que se toma como auxiliar..		(0	16 437)
$20^m = 1/3$ de 1 hora	Id. de 20 minutos...	0	5,479
$5^m = 1/4$ de 20^m	Id. de 5 minutos...	0	1,369
$4^m = 1/5$ de 20^m	Id. de 4 minutos...	0	1,095
	Atrasa en 2^d 16^h 29^m	17^m	39 943^s

Resolver los dos ejemplos últimos por este procedimiento.

XLIX.

División de concretos.

271. Hemos visto en la multiplicación, que el multiplicando y el producto son siempre homogéneos, asi como el multiplicador y la unidad. Como el producto es siempre el dividendo, y el divisor puede ser uno cualquiera de los factores, claro es que podrá ser el multiplicando ó el multiplicador. En el primer caso, *dividendo y divisor son homogéneos; en el segundo heterogéneos*; y originan los dos casos que en la división distinguiremos.

272. Primer caso. Si dividendo y divisor son homogéneos, el cociente representa al mnltiplicador y será de la especie de la unidad cuyo valor es el divisor. En este caso el problema general que esta operación resuelve es el de *hallar el número de veces que un número contiene á otro de su misma especie*. Por consiguiente;

Para dividir dos números concretos homogéneos, se reducen á incomplejos del mismo orden y se dividen como abstractos.

Ejemplos. 1.° Un tren recorre 37,50 Km. en 1 hora, ¿cuántas horas habrá empleado en recorrer 450 Km?

2°. La tierra en su movimiento de traslación tarda 1 día 0 horas 20 minutos 58,13 segundos en recorrer 1° de su órbita; ¿qué arco recorrerá en 35^d 13^h 45^m $54{,}75^s$?

273. Segundo caso. Si dividendo y divisor son heterogéneos, el cociente representará el multiplicando; y el divisor será de la misma especie que la unidad cuyo valor se busca. De donde se infiere que el problema general de

la división, en este caso, será; *determinar el valor de una unidad, conocido el de varias unidades de su especie.*

Luego, *para dividir dos números concretos heterogéneos, se reduce el divisor al órden de la unidad cuyo valor se busca; se convierte el dividendo en incomplejo de cualquiera de sus ordenes, y se dividen como abstractos.*

Ejemplos. 1.° 25 metros de tela han costado 31,25 pesetas ¿á como sale el metro?

2.° Un tren recorre en 9 horas 25 minutos y 45 segundos 424.3125 Kilómetros ¿cuánto anda por hora?

Si el divisor reducido al orden de la unidad, cuyo valor se busca, resulta un número entero, es preferible dejar el dividendo en su forma compleja.

Ejemplo. Un móvil recorre en 8^d y 14^h un arco de $35^0\ 45'\ 50''$. ¿Qué arco recorrerá en 1 hora? El divisor, reducido á la especie de la unidad cuyo valor se busca, es 206^h, y la operación se dispone en esta forma:

35 dividido por 206 dá 0^0; reducidos los 35^0 á minutos se convierten en 2100, que con los 45 dados, hacen 2145 minutos, que divididos por 206 dán 10 minutos; reduzco el resíduo 85 á segundos y agrego los 50 del dividendo, y divido los 5150 que resultan por 206, y tengo el cociente 25.

$$
\begin{array}{r|l}
35^0\ 45'\ 50'' & 206 \\ \cline{2-2}
\underline{60\quad} & 0^0\ 10'\ 25'' \\
2100' & \\
\underline{45'} & \\
2145' & \\
85' & \\
\underline{60\quad} & \\
5100'' & \\
\underline{50''} & \\
5150'' & \\
1030\quad & \\
000\quad &
\end{array}
$$

Luego el móvil recorre en 1 hora un arco de $0^0\ 10'\ 25''$

PROBLEMAS

RELATIVOS AL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

I. Reducir 17 quintales 3 arrobas 19 libras y 9 onzas á incomplejo de su especie inferior.

II. Reducir 34 días 19 horas 24 minutos y 45 segundos á incomplejo de horas.

III. Reducir 17 varas 2 piés 11 pulgadas y 9 líneas á incomplejo de piés.

IV. Reducir 4574681 segundos á complejo.

V. Reducir 18751 lineas á complejo.

VI Reducir $\frac{34}{13}$ de arroba á complejo.

VII. Un almacenista recibe cinco partidas de azúcar, la 1.ª pesa 15 arrobas 13 libras y 9 onzas; la 2.ª 28 arrobas 7 libras y 11 onzas; la 3.ª 34 arrobas 19 libras y 14 onzas; la 4.ª 18 arrobas 12 libras y 8 onzas; y la 5.ª 29 arrobas 21 libras y 13 onzas. ¿Cuánto azucar ha recibido?

VIII. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde el 1.° de Septiembre de 1728, en que Alfonso el Conquistador entró triunfalmente en Segovia de regreso de la toma de Algeciras, hasta el 25 de Diciembre de 1894?

IX. ¿Cual es el peso neto de una mercancía que ha pesado 36 arrobas 7 libras y 6 onzas, siendo el peso del embalage 2 arrobas 11 libras y 13 onzas?

X. Un reloj atrasa cada día 2 minutos 45 segundos; ¿cuánto atrasará en 15 días 19 horas 34 minutos y 50 segundos?

XI La tierra en su movimiento de rotación gira 15° en 1^h ¿cuántos gira en 15 horas 35 minutos y 42 segundos?

XII. Suponiendo que la tierra en su movimiento de traslación invierte 46 dias 1 hora 40 minutos 9, 58^s en recorrer el arco de 45° 24′ 30″ ¿cuánto tiempo invertirá en recorrer el arco 1°?

XIII. Un tren recorre 35,275 kilómetros en 1^h, ¿qué distancia recorrerá en 9 horas 35 minutos 54 segundos?

XIV. Averiguar la hora que será en las siguientes poblaciones, cuando en Madrid sea medio día; Lisboa, cuya longitud es de 5° 25′ Oeste; Atenas, 37° 58′ Este; Bruselas, 8° 4′ Este; y Coruña, 4° 41′ Oeste; del meridiano de Madrid.

XV. ¿Qué distancia habrá de Huesca á Lisboa sabiendo que ésta tiene 5° 25′ de longitud Oeste; y aquella 3° 24″ de longitud Este?

XVI Un tren especial sale de Segovia á la $8.^h$ $15.^m$ de la noche y llega á Medina á las $9.^h$ $40.^m$ después de detenerse $10.^m$ en Santa María de Nieva y 5 en Olmedo. De Segovia á Medina hay 93 kilómetros. ¿A qué hora llegará á Burgos que dista de Medina 163 kilómetros parando 15^m en Valladolid y 5 en Torquemada?

XVII. Un móvil recorre en 1 hora un arco de circunferencia de 26° 35′ 42″, 15 ¿cuánto tardará en recorrer toda la circunferencia?

XIII. Averiguar cuantos kilómetros distan dos pueblos, situados en el mismo meridiano, cuyas latitudes son respectivamente 25° 13′ 45″ y 34° 9′ 38″.

XIX Un peatón, que anda 6 kilómetros por hora, sale á las 8 de la mañana con la correspondencia para un pueblo que dista 23 kilómetros; se ha subastado la conducción á caballo, con la obligación de andar 13 kilómetros por hora ¿cuánto tiempo ganarán los vecinos en recibir el correo?

XX. La tierra en su movimiento de traslación recorre 1º de su órbita en 1 día 0 horas 20 minutos 58ˢ, 13 ¿qué arco recorrerá en 46 días, 1 hora, 40 minutos 5ˢ 58?

PROBLEMAS

RELATIVOS Á LOS NÚMEROS MÉTRICOS.

I. Los billetes de ferrocarril cuestan próximamente 0,11 de peseta por kilómetro los de 1.ª; 0,08 los de 2.ª y 00,5 los de 3.ª ¿cuánto costará el billete de cada clase de Madrid á Burgos que dista 363 kilómetros?

39'93 - 1ª
29'04 - 2ª
18'15 - 3ª

II. Hallar, en metros, la longitud de un grado, de un minuto y de un segundo, sabiendo que la circunferencia tiene 360º; el grado 60′; y el minuto 60″.

III Reducir á kilómetros cuadrados el número 576 Ha; 5 a, 19 ca. = 5'760519 Km²

IV. ¿Cuánto importa la cuenta de un carpintero que contrata la construcción de puertas y ventanas de una casa á 6,25 pesetas el m², y ha hecho en total 65 m², 9 dm² y 14 cm²? = 406'82 pts.

V. Un tablón de madera de 4,25 metros de largo, 0,85 de ancho y 0,11 de grueso ha costado 15,75 pesetas, ¿á cómo sale el m³?

VI. Un propietario compra una finca en 25327 ptas.; la escritura, gastos de inscripciones, etc., le importan 985,65 ptas; emplea en reparaciones 15 albañiles, que ganan: el maestro 6,50 ptas; tres oficiales á 4,25 y 11 peones á 0,75, durante 19 dias; y 8 carpinteros con un jornal de

7,50 el maestro, de 4,50 los cinco oficiales y 1,25 los dos aprendices; que gastan 82 carros de piedra y 34 de arena, costando la piedra á 4,50 ptas. el m^3 y la arena á 2,25, y llevando cada carro de piedra $1m^3$ $87dm^3$ y cada uno de arena $0,975m^3$, ¿A cuánto ha ascendido el coste total de la casa?

VII. Sabiendo que un carro puede llevar $1m^3$ $94dm^3$ de trigo; ¿cuántos carros se necesitarán para transportar 457^{Hl} 59^l ?

VIII. Un estanque está alimentado por dos caños de los que el 1.º da 45^{dl} por minuto y el 2.º 28, pero tiene un orificio de desagüe, por el que salen 115 litros por hora, ¿cuántas horas tendrán que estar abiertos los tres para que el estanque contenga 20^{Hl} 7^l ?

IX. ¿Cuanto pesarán 9^{Hl} 34^l 18^{cl} de agua?

X. Reducir $4m^3$ $89dm^3$ $125cm^3$ á Hl. y Kg?

XI. ¿Cuánto costará el alumbrado á un comerciante que tiene 8 lámparas, que lucen 5 horas en siete meses del año y 4 en los otros cinco, y gasta cada una $2,50^{Hl}$ por hora, costando el m^3 de gas 0,45 de peseta?

XII. Las monedas de 5 pesetas tienen de diámetro $0,037^m$, ¿cuántas se necesitarán para tener una longitud igual á la distancia del polo al ecuador?

XIII. ¿Cuánto costarán $9875m^3$ de piedra, costando 7 pesetas el m^3 y 4,15 pesetas el transporte por Km. y m^3, teniendo que llevarla á 1575 metros de distancia?

XIV. Un ebanista compra $325,75dm^3$ de madera á 0,25 de peseta el Kg. por 107,25 pesetas, ¿cuanto pesará el m^3?

XV. Un comerciante compra 4 docenas de jamones por 1254 pesetas; quiere ganar en ellos 245 pesetas. ¿Se pregunta cuanto pesa el dinero que recibe por la venta de 21 jamones y que capacidad había de tener una vasija capaz de contener una cantidad de agua del mismo peso?

XVI Calculando el peso del litro de trigo en 725 gramos y sabiendo que dá 89 por ciento de harina y el resto de salvado ¿cuánto pesará la harina y el salvado que se obtengan de $7m^3$ de trigo?

XVII. ¿Cuál es la distancia en metros de dos puntos situados en el ecuador que se presenten en el mismo punto del cielo con una diferencia de 5 horas, suponiendo la tierra esférica?

XVIII. ¿Cuántos litros de aire se necesitan para pesar tanto como 1^l de mercurio; sabiendo que éste pesa 13,596 más que el agua, y el agua 733 veces más que el aire?

XIX. Una resma de papel tiene 20 manos; la mano pesa unos 170^g ¿Cuántos quintales métricos de trapo se necesitan para alimentar una máquina que fabrica al año 25000 resmas de papel?

XX, Qué extensión en Km. comprende España, sabiendo que está situada entre los 36° 0' 30'' y 43° 46' 40'' de latitud Norte?

PROPORCIONALIDAD.

L.

Regla de tres.

274. Se llaman *cantidades relativas*, dos cantidades ligadas de tal modo, que toda variación de la una haga variar á la otra.

Las cantidades relativas únicas de que vamos á ocuparnos son las cantidades proporcionales.

Cantidades proporcionales son dos cantidades relativas tales que, con dos valores de la una y sus correspondientes de la otra, se puede formar siempre proporción.

Esta proporción puede formarse de tres modos distintos, lo que origina tres clases de proporcionalidad, que se denominan: *proporcionalidad directa, inversa y recíproca*

275. *Dos cantidades son directamente proporcionales, ó están en razón directa, cuando la razón de dos valores de la primera es igual á la razón de los valores correspondientes de la segunda.*

Sean A y B dos cantidades directamente proporcionales. Si llamamos a y a' á dos valores cualesquiera de A; y b y b' á los correspondientes de B, se tendrá.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

276. Se reconoce que dos cantidades son directamente proporcionales con arreglo al siguiente principio:

Si multiplicando por un número cualquiera el valor de una cantidad, resulta multiplicado por el mismo el valor *correspondiente de su relativa, estas dos cantidades son directamente proporcionales; y no lo serán en el caso contrario.*

En efecto, si de $a = a' \times n$,

se deduce que $b = b' \times n$

resultará $\frac{a}{a'} = n$ y $\frac{b}{b'} = n$; luego $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Proporción que no se verificará en caso contrario.

277. *Dos cantidades son inversamente proporcionales, ó están en razon inversa, cuando la razón de dos valores de la primera, es inversa de la de los valores correspondientes de la segunda.*

Es decir, que si seguimos llamando a y a' á dos valores de A; y b y b' á sus correspondientes de B; la proporción será $\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}$.

278. Se reconoce que dos cantidades son inversamente proporcionales por medio del siguiente principio:

Si multiplicando por un número cualquiera el valor de una cantidad relativa, su correspondiente queda dividido por el mismo número, estas dos cantidades relativas son inversamente proporcionales; y no lo serán en el caso contrario.

En efecto, si de $a = a' \times n$, se deduce que $b = \frac{b'}{n}$.

resultará

$$\frac{a}{a'} = n; \text{ y } \frac{b}{b'} = \frac{1}{n}; \text{ de donde } \frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}.$$

Proporción que no se verifica en caso contrario.

279. *Dos cantidades son recíprocamente proporcionales, cuando con dos valores de la una y los correspon-*

dientes de la otra se puede formar proporción, cuyos términos opuestos sean los dos primeros ó los dos segundos.

Es decir, que la proporción sera en este caso:

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}.$$

280. Se reconoce que dos cantidades son recíprocamente proporcionales por medio del principio siguiente:

Siempre que el producto de dos valores de una cantidad sea igual al producto de los correspondientes de su relativa, estas dos cantidades son recíprocamente proporcionales; y no lo serán en caso contrario.

En efecto,

$$\text{de } a \times a' = b \times b' \text{ resulta (155) } \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}$$

y de no verificarse la primera igualdad, tampoco se verifica la segunda.

281. Se conoce con el nombre de *regla de tres* el procedimiento que empleamos para resolver todas las cuestiones comprendidas en el siguiente enunciado: *dado el valor de varias unidades concretas, hallar el valor de otras varias de su misma especie*, siempre que exista proporcionalidad entre ellas.

La regla de tres se divide en *simple* y *compuesta*, según que el valor que se busca dependa solo del número de unidades, ó que dependa además de otras condiciones.

282. *Regla de tres simple.* El carácter general de las cuestiones que esta regla resuelve es *que entran siempre cuatro cantidades, incluso la incógnita; homogéneas dos á dos y ligadas por una proporcionalidad.*

Ejemplo. Si un móvil recorre en 4 horas con movimiento uniforme 150 km. ¿cuántos recorrerá con el mismo movimiento en 10 h?

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{ll} 4^{h} \ldots\ldots & 150^{km} \\ 10 \ldots\ldots & x \\ \hline \end{array}$$

Diremos: si en 4 horas recorre 150 km, en doble número de horas recorrería doble número de km; luego existe (276) proporcionalidad directa y se tendrá

$$\frac{4}{10} = \frac{150}{x}; x = \frac{1500}{4} = 375$$

283. *Regla de tre compuesta* El carácter general de las cuestiones que esta regla resuelve es el de *entrar siempre un número par de cantidades, incluso la incógnita, homogéneas dos á dos y ligadas por una proporcionalidad.*

Su resolución consiste en descomponerla en varias reglas de tres simples,

Ejemplo. 6 hombres trabajando 10 horas al día, hacen una obra en 14 días; 8 hombres trabajando 7 horas al día ¿cuánto tardarán en hacer la misma obra?

$$\begin{array}{lll} 6^{\text{hombres}} & 10^{\text{horas}} & 14^{\text{días}} \\ 8 & 7 & x \\ \hline \end{array}$$

Diremos: si 6 hombres tardan en hacer una obra 14 días, doble número de hombres tardarán la mitad de días, luego la proporcionalidad es inversa (Suponemos que trabajan las mismas horas.)

$$\left.\begin{array}{ll} 6^{\text{hombres}} & 14^{\text{días}} \\ 8 & y \end{array}\right\} \frac{6}{8} = \frac{y}{14}$$

Si trabajando 10 horas tardan los 8 hombres y días, trabajando 7 ¿cuántos tardarán? Trabajando doble número de horas, tardarán la mitad de días, luego la proporcionalidad es inversa.

$$\left.\begin{array}{ll} 10^{\text{horas}} & y^{\text{días}} \\ 7 & x \end{array}\right\} \frac{10}{7} = \frac{x}{y}$$

Multiplicando ahora ordenadamente estas dos proporciones tendremos:

$$\frac{6 \times 10}{8 \times 7} = \frac{y \times x}{14 \times y};$$

ó bien $\dfrac{6 \times 10}{8 \times 7} = \dfrac{x}{14}$ de donde

$$x = \frac{6 \times 10 \times 14}{8 \times 7} = 15 \text{ días.}$$

284. *Método de reducción á la unidad.* Puesto que hemos dicho que el problema que resuelve la regla de tres, es determinar el valor de varias unidades concretas, dado el valor de otras varias de su misma especie; es indudable que, conocido el valor de varias unidades, podemos hallar el de una; y sabido el valor de una, sabremos el de las varias que nos piden.

Este procedimiento se llama *método de reducción á la unidad*. Aplicado al ejemplo anterior nos conduciría al siguiente razonamiento.

Si 6 hombres tardan en una obra 14 días, un hombre tardará 6 veces más, ó sea 14×6 días. Si un hombre tarda en la obra 14×6 días, ocho hombres tardaran ocho veces menos, es decir

$$\frac{14 \times 6}{8}.$$

Si tardan estos días trabajando 10 horas al día, trabajando 1 hora tardarían

$\dfrac{14 \times 6 \times 10}{8}$; y trabajando 7 horas $\dfrac{14 \times 6 \times 10}{8 \times 7}$

LI.

Interés simple.

285. Se llama *interés la ganancia que produce un capital empleado con la condición de que cada* 100 *unidades produzcan una cantidad determinada al cabo de un año.*

Tanto por ciento es la cantidad que producen 100 *unidades en un año.* Se expresa abreviadamente t p$^0/_0$.

El interes se divide en *simple* y *compuesto*

Es *simple* cuando las ganancias se perciben al término de cada periódo de tiempo, y *compuesto* cuando estas ganancias se acumulan al capital primitivo para producír á su vez, nuevos intereses. Ahora solo nos ocuparemos del primero.

286. La teoría del interés simple se funda en los siguientes principios:

1.º *Para tiempos iguales, los intereses son proporcionales á los capitales.*

2.º *Para capitales iguales, los intereses son proporcionales á los tiempos.*

3.º *Para tiempos y capitales distintos, los intereses son directamente proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

Los dos primeros son evidentes, el tercero se deduce inmediatamente de los dos anteriores.

Llamemos y al interés del capital c en el tiempo t,
y' el interés del capital c' en el tiempo t'.

Si llamamos y'' al interés del capital c en el tiempo t', tendremos comparando sucesivamente y'' con y é y', y teniendo en cuenta los dos primeros principios.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{y''} = \dfrac{t}{t'} \\[2ex] \dfrac{y''}{y'} = \dfrac{c}{c'} \end{array}\right\} \text{ de donde } \frac{y}{y'} = \frac{c \times t}{c' \times t'}$$

conforme al 3er principio.

287. Hemos visto que el interés solo depende del capital y del tiempo, cantidades relativas entre las que existe proporcionalidad, y, por tanto, las cuestiones de interés simple son sencillamente de regla de tres que ya hemos examinado.

Así, cuando el tiempo es 1 año, llamando r al tanto por ciento, y planteando el problema en la forma acostumbrada, tenemos $\frac{100}{c} = \frac{r}{y}$

$$\begin{array}{l} 100 \ldots\ldots\ldots\ldots r \\ c \ldots\ldots\ldots\ldots y \\ \hline \end{array}$$

Cuando el tiempo es diferente de un año, tendremos asi mismo. Si

$$\begin{array}{l} 100 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots r \\ c \ldots\ldots t \ldots\ldots y \end{array}$$

que nos dá $\dfrac{100 \times 1}{c \times t} = \dfrac{r}{y}$.

Este 1 se reemplazará por 12 ó 360, según que el tiempo venga expresado en meses ó días. Esta fórmula nos dá una cualquiera de las cuatro cantidades c, t, r ó y, cuando se conocen las otras tres.

Ejemplos. 1.° ¿Qué capital se necesita para que impuesto al 5,25 p°/₀ produzca una renta de 3250 pesetas?

2.° ¿Qué interés producen 9750 pesetas al 6,75 p°/₀?

3.° Cuánto tiempo se necesita tener impuestas 14275 pesetas para que al 4,75 p°/₀ produzcan 425?

4.° A qué tanto por ciento anual se han de imponer 21315 pesetas, para que en 250 días produzcan 875 pesetas?

LII.

Descuento.

288. *Letra de cambio* es un documento mercantil, por el cual una persona manda á otra que pague una cantidad determinada, á la orden de otra tercera persona.

La letra puede ser á la vista ó á plazo. El tenedor puede *endosarla,* ó sea trasmitir su derecho á otra persona.

Pagaré es un documento por el cual una persona se obliga á pagar cierta cantidad, á la orden de otra, en un plazo dado.

Las letras de cambio y pagarés son negociables, es decir, pueden cobrarse, ó hacerse efectiva , antes de su vencimiento; mas en este caso el tenedor de ella debe pagar el interés del dinero que percibe por el plazo que falta hasta el vencimiento.

De ahí que se llame *valor nominal* al de la letra el día de su vencimíento.

Valor actual, el de la letra antes de su vencimiento, que es siempre naturalmente menor que el nominal, y

Descuento á la diferencia entre el valor nominal y el actual. efectivo

289. El descuento puede ser *racional* y *comercial.*

Descuento comercial es el interés del valor nominal, y

Descuento racional es el interés del valor actual, en el tiempo que falta para el vencimiento.

En el descuento comercial ó usual se cobra, pues, el interés de un capital que no se entrega; percibiendo el tomador de la letra una cantidad mayor de la debida.

La obtención de las fórmulas de uno y otro descuento queda, pues, reducida a la del interés ya conocido.

Asi, llamando A al valor actual, N al nominal y d al descuento, la fórmula del descuento comercial la obtendremos de la ya conocida (287).

$$\frac{100\times 1}{N\times t}=\frac{r}{d};\ \text{de donde}\ d=\frac{N\times t\times r}{100\times 1}.$$

Ejemplos. 1.º Descontar comercialmente una letra de 3500 pesetas, que vence dentro de 95 dias, al 4,75 por 100.

2.º A qué tanto por ciento se ha descontado una letra de 4125 pesetas que vence dentro de 2 meses y por la que se han dado 4094,05 pesetas.

* 290. La fórmula del descuento racional será del mismo modo:

$$\frac{100\times 1}{A\times t}=\frac{r}{d};\ \text{de donde}\ d=\frac{A\,t\,r}{100\times 1}$$

y por lo tanto

$$A=N-\frac{A\,t\,r}{100\times 1}\ \text{ó sea}\ 100\times 1\times A=100\times 1\times N-A\,t\,r;$$

$$100\times 1\times A+A\,t\,r=100\times 1\times N;$$

$$A(100\times 1+t\,r)=100\times 1\times N;$$

$$\text{y, por último,}\quad A=\frac{100\times 1\times N}{100\times 1+t\,r}$$

Ejemplos. 1.º Descontar racionalmente al 3,25 p% una letra de 8750 pesetas que vence dentro de 115 días.

2.º ¿Cuál es el valor nominal de una letra que vence dentro de 3 meses, y por la que se han recibido 3250 pesetas al 4,25 p%.

LIII.

Cuestiones de percentaje.

291. Se conocen, en general, con el nombre de *cuestiones de percentaje* todas las que dependen de un tanto por ciento.

Tanto por ciento de una cantidad es un número determinado de centésimas partes de dicha cantidad.

Así, pues, el uno por ciento de una cantidad es su centésima parte.

Tanto por uno, es el valor del tanto por ciento correspondiente de la unidad. De suerte que el tanto por uno de una cantidad es la centésima parte de su tanto por ciento.

292. Se llama *uno por tantos* de cualquier cantidad, á una parte alicuota de esa cantidad, cuyo denominador es el *tantos*.

El uno por tantos se convierte fácilmente en tanto por ciento.

Llamemos x al tanto por ciento equivalente al uno por r de una cantidad.

Tendremos $\frac{x}{100} = \frac{1}{r}$, de donde $x = \frac{100}{r}$; luego para convertir el uno por tantos en tanto por ciento, se divide 100 por los tantos.

293. Las cantidades que hay que considerar en toda cuestión de percentaje son tres; el número dado, que llamaremos n, el tanto por ciento r, y el valor de ese tanto por ciento del número dado, ó sea el percentaje, que representaremos por p.

Aplicando la fórmula (287) del interés, resulta que la del percentaje será $\frac{100}{n} = \frac{r}{p}$, que nos dá el valor de cualquiera de las tres cantidades n, r, p, cuando se conocen las otras dos.

Ejemplos. 1.º ¿Cuál es el 3,25 p°/₀ de 8970?

2.º ¿De qué número es 415 el 7,50 p°/₀?

3.º ¿Qué tanto por ciento de 625,50 es 75,25?

294 *Seguros*. Se llama *seguro* un contrato por el que una sociedad se obliga á indemnizar á un individuo las pérdidas que causen en su propiedad ciertos accidentes.

Los derechos de seguro, ó *primas*, consisten generalmente en el tanto por ciento del valor de la cosa asegurada.

Ejemplo. ¿Cuánto cuesta asegurar contra incendios una casa tasada en 57500 pesetas al 0.75 p°/₀ de prima?

295 *Taras*. En el comercio se llama peso *bruto* al peso de la mercancía con la cubierta que la encierra, y peso *neto* al peso intrínseco de la misma.

La diferencia entre el peso bruto y el peso de las cubiertas ó embalajes, para obtener el peso neto, se llama *tara*.

Las taras se aprecian; ó á tanto por bulto, ó á tanto por ciento. El primer caso, se resuelve por una sustracción solo, el segundo es una cuestión de percentaje.

296 *Comisiones y corretajes*. *Comisionista* es la persona que se dedica á comprar ó vender por cuenta de otra. La cantidad que recibe por este servicio se llama *comisión*.

Cuando la compra ó venta es de valores en papel ó moneda, el comisionista se llama *corredor*, y la comisión *corretaje*.

Las comisiones y corretajes consisten en un tanto por ciento del valor negociado.

EJEMPLO. Un comisionista tiene señalado 7,50 p°/₀ de comisión; ha vendido géneros por valor de 9750 pesetas, ¿cuánto ha ganado y cuánto tiene que entregar al principal?

297. *Derechos de aduanas.* Reciben este nombre los que recauda el Estado por la importación ó entrada de los productos extranjeros, y por la exportación ó salida de los nacionales.

Estos derechos se perciben en los establecimientos llamados *aduanas*, con arreglo á una tarifa ó *arancel*, y son de dos clases: *ad speciem y ad valorem* ó por avalúo.

Los derechos ad speciem se fijan para cada objeto ó conjunto de objetos, y se resuelven por una multiplicación.

Los derechos ad valorem, según un tanto por ciento del valor de la mercancía, y constituyen una cuestión de percentaje.

EJEMPLO. ¿Cuánto tiene que adeudar una partida de productos químicos valuada en 2375 pesetas que tiene señalados en el arancel el 17,45 p°/₀ de derechos de introducción?

298. *Rentas sobre el papel del Estado.* El gobierno para satisfacer las atenciones del Estado, en los casos de penuria del tesoro público, apela á empréstitos, emitiendo *títulos* que expresan la cantidad prestada y el interés anual estipulado.

Estos títulos pueden negociarse con arreglo á una ley llamada de Bolsa, y se adquieren por un valor efectivo menor generalmente que el nominal.

Renta del papel es el interés efectivo de 100 unidades de valor nominal.

Estas cuestiones son cuestiones de percentaje.

EJEMPLOS. 1.° ¿Cuál es el valor efectivo de 7500 pesetas en títulos del cuatro por ciento amortizable al cambio de 73, 10 por %?

2.º ¿Cuánto papel del cuatro por ciento exterior se puede comprar con 15000 pesetas estando el cambio á 81, 20 por %?

299. *Cambios.* Son los pagos que hace una persona á otra residente en *plaza* distinta.

Se dice que el cambio está á la *par*, *con premio ó con daño*, según que el valor que se pague en una plaza sea igual, menor ó mayor que el recibido en la otra.

El cambio es *directo* cuando solo intervienen dos plazas, y las cuestiones que origina son, en general, de percentaje.

El cambio es *indirecto* cuando intervienen más de dos plazas y originan una regla conjunta.

El estudio completo de todas estas cuestiones pertenece á la Aritmética mercantil.

Ejemplo. Un comerciante de Madrid tiene que pagar géneros comprados en París, por valor de 15750 pesetas, estando el cambio á 11,50 daño ¿Cuánto importan los géneros?

LIV.

Repartimientos proporcionales.

300, Todas las cuestiones de repartimientos proporcionales están reducidas al siguiente problema general.

Dividir un número N *en partes proporcionales á otros números* dados *a*, *b*, *c*...; que hemos resuelto ya (166.)

Los repartimientos proporcionales se aplican á una porción de cuestiones que se resuelven todas mediante el problema general quc acabamos de enunciar, por más que no puedan comprenderse en una denominación común.

Ejemplo. Tres personas juegan un décimo de diez pesetas á la lotería; una ha puesto 2 pesetas, otra 3 y la tercera 5. Obtienen un premio de 500 pesetas, ¿cuanto corresponde á cada una?

301. *Reparto de contribuciones.* Cada ciudadano debe contribuir al sostenimiento de las cargas públicas en proporción á su riqueza; de ahí que las oficinas del Estado tengan la misión de repartir las contribuciónes entre todas las provincias, en proporción á su riqueza imponible; las oficinas provinciales reparten esa cuota provincial en partes proporcionales á la riquezs de sus pueblos respectivos; y cada Ayuntamiento, á su vez, distribuye la cuota del pueblo, en partes proporcionales á la riqueza imponible de sus vecinos.

302. *Cupo de quintas.* De modo análogo se reparte el contingente necesario para el reemplazo del ejército en partes proporcionales á los mozos sorteables.

303. *Socorros mútuos.* Se llaman sociedades de socorros mútuos las que se constituyen con el objeto de reintegrar á los asociados de los daños ó perjuicios que puedan sufrir por accidentes desgraciados, independientes de su voluntad.

Los daños sufridos por uno de ellos se satisfacen entre todos, en partes proporcionales al capital que representa cada uno en la sociedad.

Ejemplo. Seis labradores se constituyen en sociedad para asegurar sus ganados Los del 1.º se tasan en 975 pesetas; los del 2.º en 1315; los del 3.º en 2125; los del 4.º en 1560; los del 5.º en 1125 y los del 6.º en 2374. El segundo experimenta en los suyos una pérdida valuada en 650 pesetas. ¿cuánto debe abonarle cada uno de sus consocios?

LV.

Regla de compañía.

304. La aplicación más importante de los repartimientos proporcionales es la *regla de compañía* Su objeto es *repartir las ganancias ó pérdidas de una sociedad entre los socios, en partes proporcionales al capital de cada uno y al tiempo que lo ha tenido en la sociedad.*

El capital impuesto por cada socio, recibe el nombre de *imposición ó acción*; la suma de las imposiciones forma el *capital social*; las ganancias ó pérdidas de la sociedad, que han de repartirse entre los sócios, se llama *dividendo general*; y la parte que á cada sócio corresponde, *dividendo parcial*.

305. Los principios generales de la regla de compañía son tres:

1.º *Para tiempos iguales, los dividendos parciales son proporcionales á las imposiciones.*

2.º *Para imposiciones iguales, los dividendos parciales son proporcionales á los tiempos.*

3.º *Para imposiciones y tiempos distintos, los dividendos parciales son proporcionales á los productos de las imposiciones por los tiempos*

Los dos primeros son evidentes; el tercero se deduce de ellos, como su análogo del interés simple (286).

El problema general de la regla de compañía consiste en averiguar los dividendos parciales, conocidos el dividendo general, las imposiciones y sus tiempos respectivos.

Su resolución se deduce de los principios fundamentales consignados.

Ejemplos. 1.° Cuatro banqueros forman sociedad para explotar un negocio; el 1.° impone 35670 pesetas; el 2.° 25925; el 3.° 40300; y el 4.° 18750. Ganan 56250 pesetas, ¿cuánto corresponde á cada uno?

2.° Un industrial emprende un negocio con un capital de 147850 pesetas; á los seis meses admite un socio con 75820; á los doce otro con 65320; y a los quince aceptan un cuarto con 59750. A los ocho meses se deshace la sociedad, con una pérdida de 85450 pesetas. ¿Cuánto pierde cada uno?

LVI.

Regla de aligación.

306. Se llama *mezcla la reunión de dos ó más sustancias en cantidad arbitraria, conservando su propia naturaleza.*

Regla de aligación es el modo de resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Dadas las cantidades que se mezclan y sus precios respectivos, hallar el precio medio ó precio de la mezcla.*

2.° *Dados el precio de la mezcla y los de las cantidades que se mezclan, hallar estas cantidades.*

La regla de aligación se divide en *directa é inversa*, según resuelve el primer problema ó el segundo.

307. Sus principios fundamentales son tres:

1.° *La cantidad de la mezcla es igual á la suma de las cantidades mezcladas.*

2.° *El valor de la mezcla es igual á la suma de los valores de las cantidades mezcladas.*

3.° *Cada dos cantidades mezcladas son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus precios respectivos y el precio de la mezcla.*

Los dos primeros sirven de fundamento á la regla de aligación directa, y el tercero á la inversa.

El primero es consecuencia de la definición.

El segundo es evidente, puesto que no se debe ganar ni perder en la mezcla.

El tercero se deduce de los anteriores, pues si llamamamos c y c' á las cantidades mezcladas, p y p' á sus precios respectivos; C á la cantidad de la mezcla y P á su precio; tendremos, con arreglo al segundo principio,

$$c \times p + c' \times p' = C \times P,$$

pero según el primer principio,

$$C = c + c'$$

y sustituyendo en vez de C su valor, en la igualdad anterior,

$$c \times p + c' \times p' = (c + c') P$$

$$\text{ó} \quad c \times p + c' \times p' = c \times P + c' \times P;$$

de donde

$$c \times p - c \times P = c' \times P - c' \times p',$$

$$\text{ó sea} \quad c\,(p - P) = c'\,(P - p')$$

y, por fin, (155),

$$\frac{c}{c'} = \frac{P - p'}{p - P}.$$

308. *Regla de aligación directa.*

Del segundo principio.

$$C \times P = c \times p + c' \times p' + c'' \times p'' + \ldots\ldots$$

se deduce

$$P = \frac{c\ \ p + c' \times p' + c'' \times p'' + \ldots\ldots}{C} =$$

$$\frac{c \times p + c' \times p' + c'' \times p'' + \ldots\ldots}{c + c' + c'' + \ldots\ldots}$$

que origina la siguiente regla.

Para hallar el precio medio ó precio de la mezcla, se divide la suma de los valores de las cantidades mezcladas por la suma de estas cantidades.

Ejemplo. Un cosechero mezcla 16 Hl. de vino de 45 pesetas el Hl., con 24 Hl. de 52 pesetas; con 18 Hl. de 36 y con 12 Hl. de 40. ¿A cómo debe vender el Hl. de la mezcla?

309. *Regla de aligación inversa.* Conviene distinguir dos casos:

1.º Que sean dos las sustancias que se mezclan.

2.º Que sean más de dos.

Primer caso. Si son dos las cantidades mezcladas, de la igualdad.

$$\frac{c}{c'} = \frac{P - p'}{p - P}$$

se deduce *que debe restarse del precio medio el precio menor y se tendrá la cantidad que ha de mezclarse del mayor precio; y se resta del precio mayor el precio medio y tendremos la que debe entrar del precio menor,* pues haciendo en dicha igualdad

$$c = P - p', \text{ y } c' = p - P,$$

resulta

$$\frac{P - p'}{p - P} = \frac{P - p'}{p - P}$$

igualdad evidente,

Escolios. 1.° De $\frac{c}{c'} = \frac{P - p'}{p - P}$, resulta también

$$\frac{mc}{mc'} = \frac{P - p'}{p - P},$$

lo que nos dice que después de hallados los valores de c y c', todos los números equimúltiplos de sus valores corresponden al mismo precio medio, es decir que el problema tiene un número ilimitado de soluciones; por lo cual se dice que es *indeterminado*.

2.° Esta indeterminacion desaparece cuando se dá una de las cantidades, pues si conociéramos c; la proporción

$$\frac{c}{c'} = \frac{P - p'}{p - P}$$

nos haría conocer un solo valor para c'.

Ejemplo. Un fabricante mezcla harina de 130 pesetas el Hl., con otra de 98 pesetas ¿cuántos debe tomar de cada clase para que resulte harina de 110 pesetas?

310. *Segundo caso.* Se reduce al anterior, tomando primero dos de los precios dados que comprendan al precio medio, después otros dos en las mismas condiciones, y así sucesivamente hasta operar con todos ellos.

Ejemplo Un fabricante mezcla harina de 110 pesetas el Hl. con otra de 96; con otra de 90; con otra de 120, y con otra de 104. ¿Cuántos Hl. de cada clase debe tomar para que resulte harina de 98 pesetas?

Escolio. Como las resoluciones parciales en que se descompone este caso corresponden al anterior, dicho se está que resulta la misma indeterminación consignada para aquél.

LVII.

Regla conjunta.

311. Se llaman *cantidades equivalentes las que tienen el mismo valor, por más que expresan unidades diferentes.*

Equivalencia es la expresión de ser equivalente dos cantidades. Se representa por el signo <>, llamado equivalente, que se emplea lo mismo que el signo $=$ en las igualdades.

Se llama *regla conjunta la que nos enseña á hallar la cantidad equivalente en determinada especie á otra dada, por medio de ciertas equivalencias que ligan á ambas.* Se funda en el siguiente principio:

Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias, dispuestas de tal modo que el primer miembro de cada una sea de la misma especie que el segundo de la anterior, los productos serán equivalentes, siendo el primero de la primera especie y el segundo de la última.

Sean las equivalencias

$$a^p = b^q$$
$$c^q = d^r$$
$$m^r = n^s$$

digo que

$$a\, c\, m^p = b\, d\, n^s\,.$$

En efecto, multiplicando los dos miembros de la primera por c, y los dos de la segunda por b, resultará.

$$\left.\begin{aligned} a\, c^p &= b\, c^q \\ b\, c^q &= b\, d^r \\ m^r &= n^s \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \begin{aligned} a\, c^p &= b\, d^r \\ m^r &= n^s \end{aligned}$$

y multiplicando ahora los dos de la primera por m, y los de la segunda por $b\ d$, tendremos

$$\left.\begin{aligned} a\,c\,m^p &= b\,d\,m^r \\ b\,d\,m^r &= b\,d\,n^s \end{aligned}\right\}\ a\,c\,m^p = b\,d\,n^s$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si hubiese más equivalencias, continuando del mismo modo, se demostraría siempre el principio.

312. Teniendo en cuenta que el teorema es general, cualquiera que sea el orden de las equivalencias, con tal de que satisfagan á la condición de que el primer miembro de cada una sea de la misma especie que el segundo de la anterior, y que si la primera y la última especie son homogéneas la equivalencia se convierte en igualdad; los problemas de regla conjunta se resolverán con suma facilidad, con solo atender á la disposición conveniente de las equivalencias.

Supongamos, por ejemplo, que se nos pidiera reducir 8786 pesetas á reis, sabiendo que 1 libra esterlina tiene 4500 reis, que 100 francos equivalen á 4 libras esterlinas y que 5 francos tienen 4,75 pesetas.

Disponiendo las equivalencias, con arreglo al principio demostrado, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x \text{ reis.} &<> 8786 \text{ ps.} \\ 4{,}75 \text{ ps.} &<> 5 \text{ fr.} \\ 100 \text{ fr.} &<> 4 \text{ lb.} \\ 1 \text{ lb.} &<> 4500 \text{ reis} \end{aligned}\right\}\ \text{de donde } x \times 4{,}75 \times 100 \times 1 = 8786 \times 5 \times 4 \times 4500.$$

$$\text{y}\quad x = \frac{8786 \times 5 \times 4 \times 4500}{4{,}75 \times 100} = 1664715 \text{ reis.}$$

PROBLEMAS

RELATIVOS Á LA PROPORCIONALIDAD DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

I. Una pieza de tela de 25^m de largo cuesta 31,50 pesetas ¿cuánto costará una pieza de la misma tela que tiene 37^m,75?

II. ¿Cuántas pesetas importan 700 galloues de vino comprados en Portugal á 12500 reis el Kl, sabiendo que una libra esterlina tiene 240 peniques; 350 gallones 159 litros, 50 peniques equivalen á 5 pesetas y 900 reis á 2 libras esterlinas.

III. ¿Cuál es el 2,25 p. °/₀ de 3570 pesetas?

IV. Sabiendo que los espacios son como los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos, y que un cuerpo recorre 4^m,904 en el primer segundo, se desea saber cuánto tardará en llegar al fondo una piedra desde una altura de 245^m.

V. Un viajante que tiene señalado el 12 p°/₀ de comisión ha colocado géneros por valor de 8570,75 pesetas ¿cuánto le corresponde?

VI. ¿Cuántos Kg. de café de á 4 pesetas; de 5,25; de 6,75; de 7 y de 7,50 pesetas se han mezclado para que resulte café de 6,50 pesetas el Kilógramo?

VII. Ya sabemos que el sonido recorre 340^m por segundo; en su virtud ¿cuánto tiempo tardará en oirse el ruido producido por la caida de un cuerpo desde una altura de 178^m.

VIII. Dispone uno en su testamento que su capital importante 354000 pesetas se reparta entre su padre, dos hermanos, tres hermanas y seis sobrinos del siguiente modo: á los sobrinos á partes iguales; a cada hermano lo que a un sobrino mas la tercera parte; á cada hermana lo que al hermano más la mitad; y al padre lo que á cada hermano más lo que á cada hermana ¿cuanto ha correspondido á cada uno?

IX 14 hombres trabajando 10^h al día y empleando una fuerza representada por 8, hacen una obra cuya resistencia es 5, en 28 dias ¿cuántos dias emplearán 19 hombres, trabajando 8^h al día, con una fuerza como 6 y una resistencia como 9?

X. ¿Qué prima habrá que satisfacer para asegurar una finca que vale 350000 pesetas, siendo la prima de 0,75 p°/₀?

XI. Descontar comercialmente una letra de 8570 pesetas, que vence dentro de 3 meses, al 6,25 p°/₀

XII. El pasivo de un comerciante declarado en quiebra es de 85350 pesetas; el activo es 12570; ¿cuánto corresponde cobrar por un crédito de 3000 pesetas?

XIII. ¿Cuánto cuestan 17000 francos, estando el cambio á 13,75?

XIV. ¿A qué tanto por ciento habrá que imponer 7580 pesetas para que produzcan 454,80?

XV. ¿Qué derechos de aduanas tiene que satisfacer un comerciante por una mercancía que paga el 15 p°/₀ y vale 375800 pesetas?

XVI. A qué tanto por ciento habrá que imponer 45000 pesetas para que en 186 dias produzcan 2134?

XVII. Se mezclan 47 fanegas de trigo de á 15 ptas., con 54 fgs. de 17 50; con 75 fgs. de 14 ptas., y con 48 fanegas de 18 ptas. ¿cuál es el precio de la mezcla?

XVIII. De qué número es 315 el 7 p°/₀?

XIX. ¿Cuánto falta para que venza una letra de 8740 pesetas por la que han dado 8710, siendo 5 el tanto por ciento de descuento?

XX. Cuatro individuos forman sociedad; el 1.º pone 4000 ptas. por 15 meses; el 2.º 1500 por 8 meses; el 3.º 9000 ptas. por 10 meses; el 4.º 12000 ptas. por 6 meses. Ganan 8000 pesetas ¿cuánto corresponde á cada uno?

XXI. ¿Qué capital se necesita para que al 6 p°/₀ produzca en 5 meses 3150 pesetas?

XXII. Una barra de plata tiene 350 Kg. de peso y su ley es de 0 857. ¿Cuántos Kg de plata pura habrá que añadir para elevar su ley á 0.890?

XXIII. A qué tanto por ciento se ha descontado una letra de 4120 ptas., que vence dentro de 2 meses, por la que se han recibido 4080?

XXIV. ¿Cuál es el peso neto de un cargamento de 75000 Kg., siendo la tara el 18 p°/₀?

XXV. Con 38000 pesetas cuánto papel del 4 p°/₀ amortizable se puede comprar, estando en Bolsa al 78.25 p°/₀?

XXVI ¿Cuánto tiempo se necesita tener impuestas 25640 ptas. para que al 6 p°/₀ produzcan 845 ptas?

XXVII. ¿A que cambio se pueden comprar 75000 pesetas nominales, en títulos del 4 p°/₀; con 52340?

XXVIII. 85700 ptas. al 5 p°/₀ en 8 meses, cuánto producirán?

XXIX. Cuál es el valor nominal de una letra que vence dentro de 40 dias, por la que se han recibido 3250 pesetas al 8 p°/₀ de descuento?

XXX. ¿Cuál es el 2,25 p°/₀ de 3750 pesetas?

XXXI. La escala del termómetro Fahrenheit tiene 212°, correspondiendo el grado 32 al cero de las escalas centìgrada y de Reamur. A cuántos grados de estas escalas corresponden 17°, 28° y 45° de la primera?

XXXII. Los cubos de las distancias al Sol de los planetas son proporcionales á los cuadrados de los tiempos de las revoluciones alrededor del sol; ¿cuáles serán estos, siendo el de la Tierra 365^{d} 6^{h} 9^{m} $10{,}75^{s}$, sabiendo que las distancias medias son: Mercurio 0,38709; Venus 0,72333; Tierra 1.00000; Marte 1,52369; Júpiter 5,20277; Saturno 9,53885; Urano 19,18273, y Neptuno 30,03328.

XXXIII. 34 obreros, trabajando 9 horas al día, han tardado 35 días en hacer un muro de 4^{m}, de alto, 158^{m}. de largo y 1,25 de grueso ¿cuántos días tardarán 25 obreros, trabajando 8 horas al día, para hacer uno de 3^{m} de alto, 75^{m} de largo y 0,50 de grueso?

XXXIV. Un prestamista dá 5745 pesetas al 8 p°/₀. A los seis meses, 2350 á la misma persona, con el mismo interés, y finalmente 1530 á los tres meses del último préstamo y en las mismas condiciones. Cuatro meses más tarde le entrega el deudor 1250 pesetas; al cabo de otros seis meses 3425 y dos meses después 3850. ¿Cuanto le resta?

XXXV. Un propietario tiene asegurada su casa estimada en 85000 pesetas al 0,75 p°/₀, durante 4 años 7 meses y 11 días, al cabo de los cuales se produce un incendio que causa daños valuados en los $^{3}/_{7}$ del capital asegurado. ¿cuánto deberá recibir de la compañía á la cual tiene satisfechas las primas correspondientes á las cuatro anualidades?

XXXVI. Un comerciante compra géneros que paga al contado, por lo que el fabricante le rebaja el 5 °/₀ del importe de la factura, con lo que se beneficia en 325,75 pesetas ¿cuánto importa la factura y cuánto ha tenido que pagar?

XXXVII. Un comisionista compra una partida de 84 docenas de abanicos á 8,50 pesetas docena, con una rebaja de un 4 p°/₀; que consigue colocar á los 4 meses á 9,25 pesetas la docena, con un descuento del 2,75 p°/$_0$. Se desea saber lo que gana el comisionista, teniendo en cuenta el interés de su dinero al 5 p°/$_0$

XXXVIII Una persona compra 2250 pesetas de renta del 4 p°/$_0$ amortizable al 78,25 por ciento: Baja el papel á 76,50 y compra doble cantidad; y al subir á 77,80 vende todo el papel. ¿Qué resultado ha obtenido de estas operaciones?

XXXIX. Fundiendo una barra de plata de 500 g de peso y ley de 0,815, con otra de plata pura, ha resultado una barra cuya ley es de 0,905. ¿Cuál es el peso de la barra de plata pura y cual el de la que ha resultado?

XL. Un comerciante deja una fortuna de 75000 pesetas á repartir entre cuatro sobrinos, en partes inversamente proporcionales á los beneficios que el último año hayan obtenido de sus industrias respectivas. Examinados los libros, se vé que el 1.° ha ganado 5240 pesetas; el 2.° 1975; el 3.° 3500 y el 4.° 2225. Los gastos de testamentaría ascienden al 6,50 p°/$_0$ de la herencia. ¿Cuánto le corresponde percibir á cada uno?

ÁLGEBRA.

LVIII.

Nociones preliminares.

1. *Álgebra es la ciencia que estudia las leyes generales de la cantidad.*

En la Aritmética hemos estudiado las leyes del número, ó sea de la cantidad determinada numéricamente, atendiendo, por consiguiente, tan solo á su valor cuantitativo.

En el Álgebra atenderemos también á su cualidad ó modo de ser, considerando la cantidad independientemente de su valor numérico. La Aritmética emplea *signos particulares* referidos á una unidad; en el Álgebra emplearemos *signos generales* sin relación cuantitativa con la unidad.

De aquí resulta que resuelta una cuestión en Aritmética, precisa resolverla de nuevo cuando se presente con distintos datos, porque las operaciones aritméticas no dejan huella de los números que las producen; mientras que los signos que emplea el Álgebra, dejan marcada en cada cuestión la série de operaciones que es preciso hacer con los datos para llegar al resultado.

2. Para la mejor inteligencia de lo expuesto, resolvamos el siguiente problema:

Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar estas cantidades.

Sea s la suma y d la diferencia, que suponemos dadas.

Si llamamos x a la mayor é y á la menor de las cantidades pedidas; tendremos, con arreglo al enunciado,

$$\begin{array}{r} x + y = s \\ x - y = d \\ \hline x + x = s + d \end{array}$$

y sumando estas dos igualdades, tendremos,

de donde, tomando la mitad de los dos miembros,

$$x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

Restando ahora las mismas dos igualdades primeras, resulta

$$y + y = s - d;$$

de donde

$$y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$$

Estas dos expresiones, que marcan los valores de x é y, se llaman *fórmulas*, y nos indican las operaciones que deben efectuarse con los datos para obtener las incógnitas

Traducidas al lenguaje ordinario, nos dicen que *la mayor de las cantidades buscadas es igual á la semi suma mas la semi diferencia, y la menor es igual á la semi-suma menos la semi diferencia.*

De este modo el Álgebra al darnos los valores de las incógnitas, nos revela á la vez las relaciones que con los datos las ligan, bastando en cada caso particular reemplazar, en las fórmulas obtenidas, los datos por sus valores respectivos, para hallar los de las incógnitas.

Así, si se quisiera saber qué cantidades dán 38 de suma y 24 de diferencia; tendríamos

$$x = \frac{38}{2} + \frac{24}{2} = 31;\ y = \frac{38}{2} - \frac{24}{2} = 7.$$

3. *Notación algebráica es el modo de expresar las cantidades y sus leyes generales.*

Las cantidades se representan en álgebra por las letras del alfabeto, empleando las primeras para representar los datos y las últimas para las incógnitas.

Los signos de las operaciones son los mismos de la Aritmética, pero el producto se indica colocando los factores sin interposición de signo.

El multiplicador toma el nombre de *coeficiente* y se coloca á la izquierda de la cantidad que multiplica. Así $4\,a$ quiere decir $a \times 4$, y el 4 se llama coeficiente de a. Como el producto de cualquier cantidad por 1 es la misma cantidad, de ahí que consideremos siempre toda cantidad como un producto cuyo coeficiente es 1.

Por la misma razón consideraremos que toda cantidad sin exponente lleva implícito el exponente 1.

4. *Cantidad literal ó algebráica*, y también expresión algebráica ó literal, es toda cantidad representada por los signos algebráicos.

Tales son $4\,a^2\,b$, $\frac{a^3 - b}{5\,a\,c}$ y $\sqrt{2\,a - m}$

5. *Términos* de una cantidad algebráica son cada una de las partes unidas por los signos $+$ ó $-$.

Así, $a^3 + 4\,a^2\,b - 5\,a\,b^2 + b^3$ tiene cuatro términos.

6 Las cantidades literales reciben los nombres de *monomio*, cuando constan de un solo término; *binomio*, si

tienen dos; *trinomio*, cuando están formadas por tres, etc. y, en general, la expresión que consta de varios términos, se llama *polinomio*.

7. Se llama cantidad *racional* la que no contiene ningún radical. En caso contrario se llama *irracional*.

Expresión algebráica entera es la cantidad racional que no contiene ningún denominador. Si lo tiene se llama *fraccionaria*.

8. *Grado* de un monomio es el número de sus factores literales. Así $4\,a^2\,b^2\,c$ es de 5 º grado.

Está determinado por la suma de los exponentes de sus letras.

Polinomio homogéneo es el que tiene todos sus términos del mismo grado.

9. *Valor numérico* de una expresión algebráica, es el que resulta de reemplazar sus letras por números particulares.

Así el valor numérico del polinomio

$x^3 + a\,x^2 + a^2\,x - a^3$ para $x = 3$, y $a = 2$; será

$$3^3 + 2 \times 3^2 + 2^2 \times 3 - 2^3 = 49:$$

10. Se dice que una cantidad es *función* de otras, cuando su valor depende del que reciban estas otras. Así en el problema resuelto (2) x é y son funciones de s y d.

11. Atendiendo á la cualidad ó modo de ser de las cantidades, obsérvase fácilmente que toda cantidad tiene dos modos de ser opuestos. El debe y el haber, el pasado y el futuro, las distancias contadas hácia la derecha ó hácia la izquierda, etc., nos comprueban esta verdad innegable; como que tanto el tiempo como el espacio los contamos en dos sentidos ó direcciones opuestas.

Estas dos cualidades, que no se definen en su esencia, pero que se determinan por su oposición, las distingue el álgebra con las denominaciones de *positivo* y *negativo*.

De suerte que si llamamos *positivo* al modo de ser de una cantidad, su opuesto será *negativo*, y viceversa.

Las cantidades positivas y negativas se distinguen por los signos $+$ y $-$. Cuando una cantidad no va precedida de signo alguno, se entiende que la antecede el signo $+$.

12. De lo expuesto se deduce que si suponemos colocadas las cantidades positivas por órden creciente de su valor absoluto desde 0 hácia la derecha, y las cantidades negativas desde 0 hacia la izquierda,

$$-n....-3....-2....-1....-\frac{1}{n}....0,\frac{1}{n}....1....2....3....n...$$

si las primeras crecen á medida que nos alejemos de cero, las segundas irán disminuyendo, y el estudio de esta série de valores nos conduce á los siguientes principios.

1.º *Toda cantidad negativa es menor que cero.*

2.º *De dos cantidades negativas, es mayor la que tiene menor valor absoluto.*

Escolio. Este cero límite, de donde arrancan los dos modos de ser de toda cantidad, es un cero *relativo*; el cero *absoluto*, es decir la carencia absoluta de cantidad, no admite nada menor.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

LIX.

Adición y sustracción de expresiones enteras.

13. Las operaciones del Álgebra son las mismas que las de la Aritmética, pero teniendo en cuenta siempre el doble concepto *cuantitativo* y *cualitativo* de las cantidades. No son verdaderas operaciones, en el sentido aritmético de esta palabra, sino mas bien indicación de cálculos que hay que efectuar, ó, á lo sumo, transformaciones que den forma mas sencilla á los resultados.

14. La adición algebráica se diferencia, pues, esencialmente de la aritmética en que no lleva consigo la idea de aumento, toda vez que los sumandos influirán diversamente en la suma, segun su modo de ser.

Si los sumandos tienen el mismo modo de ser, la suma será otra cantidad del mismo modo de ser, cuyo valor será la suma de los valores de los sumandos. El que tiene 8 por un lado y 4 por otro, tiene indudablemente $8+4=12$; así como, si tiene dos deudas, una de 5 y otra de 4, deberá en junto 9; ó sea $-5+(-4)=-9$.

Pero si dos sumandos tienen diferente modo de ser, al reunirse el de menor valor absoluto destruirá en el mayor una parte igual á la que represente; razón por la que la suma podrá ser positiva, cero ó negativa. Así, por ejemplo, el que tiene un crédito de 8, y una deuda de 5, solo tiene 3 de haber. $8 + (-5) = 3$; si tiene 8 y debe 8, su haber es cero, $8 + (-8) = 0$; y si tiene 8 y debe 15, resultará que aún debe, después de entregar lo que tiene 7; $8 + (-15) = -7$.

15. En la adición de expresiones algebráicas pueden distinguirse dos casos: 1.º *sumar monomios;* 2.º *sumar polinomios.*

Adición de monomios. *De las consideraciones expuestas se deduce, que para sumar monomios, deberán colocarse unos á continuación de otros con los signos que tengan.*

Así la suma de $3a^2$, $-5ab^2$, $+8ab^3$ es el polinomio

$$3a^2 - 5ab^2 + 8ab^3.$$

16. Se llaman *términos semejantes* los que tienen la misma parte literal. $5a^2b$ y $7a^2b$ son términos semejantes.

La suma de varios monomios puede simplificarse cuando tiene términos semejantes.

En la reducción de términos semejantes pueden ocurrir dos casos: que los monomios tengan el mismo signo, ó que tengan signos contrarios.

En el primer caso, por ejemplo,

$$3a^2b^2 + 2a^2b^2 = (3+2)a^2b^2 = 5a^2b^2; \text{ y}$$
$$-4ab^3 - 7ab^3 = (-4-7)ab^3 = -11ab^3.$$

Por consiguiente, *para reducir términos semejantes de igual signo, se suman los coeficientes, poniendo á esta suma la parte literal común y el signo de los sumandos.*

En el segundo caso, por ejemplo,

$$4ab^2 - 5a^2b + 7a^2b - 9ab^2 = (4-9)ab^2 + (7-5)a^2b = -5ab^2 + 2a^2b.$$

Luego *para reducir términos semejantes de diferente* *signo, se restan los coeficientes, poniendo á la diferencia la parte literal común y el signo del mayor.*

17. *Adición de polinomios.* Puesto que un polinomio es una suma de monomios, la suma de polinomios será evidentemente la de todos los términos que contengan. Por consiguiente,

Para sumar polinomios, se escriben todos sus términos unos á continuación de los otros, con los signos que tengan.

EJEMPLO. Sumar los polinomios:

$$\begin{array}{r} 3a^3 + 7a^2x - 5ax^2 + 6x^3 \\ -8a^3 - 4a^2x + 6ax^2 - 9x^3 \\ -5a^3 + 6a^2x - 3ax^2 - 2x^3 \\ 4a^3 - 2a^2x + 4ax^2 - 3x^3 \\ \hline \end{array}$$

La suma será, $3a^3 + 7a^2x - 5ax^2 + 6x^3 - 8a^3 - 4a^2x + 6ax^2 - 9x^3 - 5a^3 + 6a^2x - 3ax^2 - 2x^3 + 4a^3 - 2a^2x + 4ax^2 - 3x^3$;

y reduciendo los términos semejantes;

$$-6a^3 + 7a^2x + 2ax^2 - 8x^3.$$

18. *Sustracción de expresiones enteras.* La diferencia sumada con el sustraendo debe dar el minuendo; luego la diferencia tiene que contener ai minuendo, para que aparezca en la suma, y al sustraendo, con cualidad ó signo contrario para que destruyéndose con el sustraendo no aparezca en la suma.

Asi $N - (a + b - c) = N - a - b + c$

puesto que $N - a - b + c + a + b - c = N$.

Luego para restar expresiones enteras se escribe el minuendo y á continuación el sustraendo con los signos cambiados.

EJEMPLO. Restar los polinomios;

$$13\,a^4 - 7\,a^3 x + 6\,a^2 x^2 - 5\,a\,x^3 - 3\,x^4 \quad \text{y}$$
$$9\,a^4 - 5\,a^3 x - 8\,a^2 x^2 + 2\,a\,x^3 - 9\,x^4$$

La diferencia será:

$$13\,a^4 - 7\,a^3 x + 6\,a^2 x^2 - 5\,a\,x^3 - 3\,x^4 - 9\,a^4 +$$
$$5\,a^3 x + 8\,a^2 x^3 - 2\,a\,x^3 + 9\,x^4;$$

y reduciendo los términos semejantes;

$$4\,a^4 - 2\,a^3 x + 14\,a^2 x^2 - 7\,a\,x^3 + 6\,x^4$$

Escolio. En virtud de esta regla pueden cambiarse los signos á varios términos de un polinomio, con solo encerrarlos dentro de un paréntesis precedido del signo menos.

LX.

Multiplicación de expresiones enteras.

19. ***Multiplicar dos cantidades algebráicas es hallar una tercera cantidad que sea en valor y signo respecto del multiplicando, lo que el multiplicador es en valor y en signo respecto de la unidad positiva.***

20. De esta definición se deduce inmediatamente que si el multiplicador es positivo, el producto tendrá el signo del multiplicando; y si el multiplicador es negativo, el producto tendra signo contrario al del multiplicando. Lo que se expresa comunmente diciendo:

$$+ \times + = +$$
$$- \times + = -$$
$$+ \times - = -$$
$$- \times - = +$$

y también, signos iguales dan más; y signos desiguales dan menos.

21. En la multiplicación conviene distinguir tres casos: 1.º *Multiplicar dos monomios;* 2.º *multiplicar un polinomio por un monomio, y* 3.º *multiplicar dos polinomios.*

Multiplicación de monomios. Conocido ya el signo del producto, observaremos que, siendo un monomio un producto de factores enteros, para multiplicar dos monomios bastará formar un producto con todos los factores del multiplicando y multiplicador.

Así

$$3\,a^2\,b^3\,c\,d^5 \times -5\,a\,b^2\,c^2 = -3.a^2.b^3\;c.d^5.5.a.b^2.c^2$$
$$= -3.5.a^2.a.b^3.b^2.c.c^2.d^5 = -15\,a^3\,b^5\,c^3\,d^5$$

lo que nos proporciona la siguiente regla:

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes, se suman los exponentes de las letras iguales, y las letras desiguales entran en el producto lo mismo que en los factores. El signo del producto será + si es el mismo en ambos factores, y — si los dos tienen diferente signo.

22. *Multiplicación de un polinomio por un monomio.*

Multiplicar un polinomio por un monomio es hallar el producto de la suma de los términos del multiplicando por el multiplicador. De suerte que si representamos al multiplicando por $a - b + c$, y al multiplicador por m, será

$$(a - b + c)\,m = a\,m - b\,m + c\,m$$

por tanto,

Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica cada término del multiplicando por el multiplicador, y se suman los productos parciales.

Ejemplo. Multiplicar el polinomio

$$7\,a^5\,x - 4\,a^4\,b\,x^2 - 3\,a^3\,b^2\,x^3 + 6\,a^2\,b\,x^4 - 8\,a\,b^4\,x^5$$

por el monomio

$$-3\,a^2\,b\,c^2\,x^2.$$

23. *Multiplicación de polinomios.* Multiplicar dos polinomios es formar el producto de las sumas indicadas del multiplicando y multiplicador. Si, pues, llamamos al primero $a + b - c$, y al segundo $(m - n)$, tendremos

$$(a + b - c)\,(m - n) = (a + b - c)\,m + (a + b - c)\,n$$
$$= a\,m + b\,m - c\,m - a\,n - b\,n + c\,n.$$

De donde resulta que

Para multiplicar dos polinomios se multiplican todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador, y se suman los productos.

24. Para multiplicar dos polinomios conviene antes ordenarlos con respecto á las potencias de una de sus letras. Ordenar un polinomio es escribir sus términos según las potencias ascendentes ó descendentes de la ordenatriz.

EJEMPLO. Multiplicar el polinomio

$$4\,a^5 - 3\,a^4\,b + 5\,a^3\,b^2 - 7\,a^2\,b^3 + 2\,a\,b^4 - 9\,b^5$$

por $3\,a^2 - 5\,a\,b + b^2$.

25. Si en varios términos de un polinomio entra la letra ordenatriz con el mismo exponente, se consideran todos ellos como uno solo, sacando la letra ordenatriz factor comun, y mirando como coeficiente todo el otro factor.

EJEMPLO:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 \\ -2\,a\,b \\ +\,b^2 \end{array}\right|\; \begin{array}{c} x^2 - 2\,a\,b^2 \\ +\,3\,b^2 \\ \end{array}\;\left|\; \begin{array}{c} x + 6\,a^2\,b^2 \\ -2\,a\,b^3 \\ \end{array}\right.$$

multiplicado por

$$\begin{array}{r|c|l} 3a & x^2 - 2a^2 & x - 5a^2b^2 \\ -2b & -3b^2 & \end{array}$$

26. *Consecuencias de la multiplicación.* 1.ª *Si se cambian los signos á todos los términos de un factor, el producto cambia de signo* En efecto, cambiar de signo á todos los términos de un factor, equivale á multiplicarle por -1; y si uno de los factores se multiplica por -1, el producto queda multiplicado por -1, ó cambia de signo.

2.ª *Si todos los términos de ambos factores cambian de signo el producto no cambia de signo*, pues equivale á multiplicar por -1 cada factor, es decir, á multiplicar el producto por $\quad -1 \times -1 = +1$.

3.ª *El producto de dos polinomios homogéneos es homogéneo y de un grado igual á la suma de los grados de los factores.*, pues si el multiplicando es del grado m, y el multiplicador del grado n, todos los términos del producto serán del grado $m + n$.

4.ª *Si se multiplican dos polinomios ordenados con relación á las potencias de una letra, el primer término del producto proviene sin reducción del producto de los dos primeros términos de los factores, y el último término del producto del de los dos últimos*, pues los primeros términos del multiplicando y multiplicador son aquellos en que la letra ordenatriz entra con mayor exponente, y su producto no podrá reducirse con ningún otro. Lo mismo sucede con los últimos, porque son los que tienen la letra ordenatriz con menor exponente.

5.ª Multiplicando los binomios $a + b$ por $a + b$; $a - b$ por $a - b$; y $a + b$ por $a - b$ tendremos,

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2 \quad ab \qquad \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

Que nos dicen: *que el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, mas el duplo del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo*, y que

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades.

LXI.

División de expresiones enteras.

27. *Dividir es hallar una cantidad que multiplicada por el divisor reproduzca el dividendo.*

28. De aquí se deduce que el signo del cociente será el mismo del dividendo, si el divisor es positivo; y contrario al del dividendo, si el divisor es negativo. Lo que se expresa comúnmente diciendo:

$$\begin{array}{c} + : + = + \\ - : + = - \\ + : - = - \\ - : - = + \end{array}$$

ó bien, signos iguales dan más; y signos desiguales dan menos.

29. En la división distinguiremos tres casos: 1.º *dividir dos monomios;* 2.º *un polinomio por un monomio*, y 3.º *dos polinomios*.

División de monomios. Conocido ya el signo del cociente, y puesto que el cociente multiplicado por el divisor debe reproducir el dividendo, es claro qne el coeficiente del cociente será el cociente de dividir los coeficientes del dividendo y divisor, puesto que multiplicado por el de éste, debe darnos el de aquél. Por la misma razón, el cociente de los factores iguales de dividendo y divisor se obtendrá restando sus exponentes. Lo que nos conduce á la siguiente regla.

Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes, se restan los exponentes de las letras iguales, y las letras del dividendo que no entren en el divisor entran del mismo modo en el cociente. El signo del cociente será + si dividendo y divisor tienen el mismo signo, y — en el caso contrario.

Ejemplo. Dividir

$$-36\,a^4\,b^6\,c^9\,d^3\,e \text{ por } 9\,a^2\,b^5\,c^7\,d^2$$

30. De la regla anterior se deduce que las condiciones necesarias y suficientes para que un monomio sea divisible por otro son tres: que el coeficiente del dividendo sea divisible por el del divisor; que no haya en el dividendo ninguna letra con menor exponente que en el divisor; y que este no contenga letra alguna que no entre en aquél.

Cuando estas tres condiciones no se verifican, el cociente completo no es entero y se expresa en forma fraccionaria.

$$\text{Asi, } 5\,a\,b^3 : 7\,c\,d = \frac{5\,a\,b^3}{7\,c\,d}.$$

31. *División de un polinomio por un monomio.* El cociente será un polinomio y tendrá tantos términos como el dividendo (22). Cada uno de estos términos multiplicado por el divisor reproduce el correspondiente del dividendo,

luego se obtiene el cociente dividiendo cada término del dividendo por el divisor.

Por consiguiente, *para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio y se suman los cocientes.*

32 De aquí se deduce que la condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible por un monomio es que cada término del primero sea divisible por el segundo. Si no lo fueran, se indicaría la operación según hemo dicho.

EJEMPLOS. 1.º Dividir

$$18\,a^4\,b^5\,c^6\,d - 24\,a^3\,b^4\,c^4\,d^3 + 30\,a^2\,b^3\,c^3\,d \text{ por } 6\,a^2\,b^2\,c^2.$$

2.º $27\,a^5\,b^4\,c^3 - 36\,a^4\,b^3\,c^2 - 8\,a^2\,b^2\,c : 9\,a^3\,b^3\,c^2.$

33. *División de polinomios.* Representemos el polinomio dividendo por D, el polinomio divisor por d, y por C el cociente, que puede ser monomio ó polinomio. Tendremos,

$$D = d \times C.$$

Si suponemos ordenados d y C con respecto á las potencias de una misma letra, el primer término de D (26, 4.ª) provendrá sin reducción, de multiplicar el primer término de d por el primero de C. Luego para tener el primer término de C, bastara dividir el primero de D por el primero de d.

Si multiplicamos ahora ese primer término del cociente por d, y restamos el producto de D, llamando D′ al resto, y C′ al polinomio formado por los restantes términos del cociente, tendremos $D' = d \times C'$; y como ya sabemos que d y C′ están ordenados con relación á las potencias de la misma letra, el primer término de D′ procederá, sin reducción de multiplicar el primero de d por el primero de C′; luego para tener el primer término de C′, ó sea el segundo del cociente, basta dividir el primer término de D′ por el primero de d; y así continuaríamos hasta hallar el último término del cociente.

Luego *para dividir dos polinomios, se ordenan con relación á las potencias de una misma letra, y dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, se tendrá el primer término del cociente. Se multiplica este primer término por el divisor, el producto se resta del dividendo, y dividiendo el primer término del resto por el primero del divisor, se tendrá el segundo término del cociente. Así se continúa hasta que en el primer término del dividendo tenga la letra ordenatriz menor exponente que en el del divisor*

EJEMPLOS. 1.º Divividir

$$12\,a^7 - 29\,a^6\,b + 34\,a^5\,b^2\;49\,a^4\,b^3 + 46\,a^3\,b^4 - 44\,a^2\,b^5 + 47\,a\,b^6 - 9\,b^7 \text{ por } 3\,a^2 - 5\,a\,b + b^2$$

2.º Dividir

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
3a^3 & x^4-2a^4 & x^3-5a^4b^2 & x^2-12a^4b^2 & x-30a^4b^4 \\
-8a^2b & +4a^3b & +10a^3b^3 & +10a^3b^4 & +10a^3b^5 \\
+7ab^2 & -11a^2b^2 & +22a^3b^2 & +4a^3b^3 & \\
-2b^3 & +19ab^3 & -5a^2b^4 & -15a^2b^5 & \\
 & -9b^4 & -24a^2b^3 & -18a^2b^4 & \\
 & & +10ab^4 & +6ab^5 & \\
 & & -9b^5 & &
\end{array}$$

por

$$\begin{array}{r|r|l}
3\,a & x^2 - 2\,a^2 & x^2 - 5\,a^2\,b^2 \\
-3\,b & -3\,b^2 &
\end{array}$$

34. Si la división no es exacta, el cociente se completa lo mismo que en Aritmética, pues, refiriéndonos al ejemplo anterior, tenemos evidentemente,

$$D = d\,C + D - d\,C,$$

y dividiendo por d resulta,

$$\frac{D}{d} = C + \frac{D - d\,C}{d}$$

* 35. *Si un polinomio, ordenado con relación á las potencias de una letra* x, *se divide por la diferencia* x — a, *entre la letra ordenatriz y un valor cualquiera, el resíduo de esta división será el mismo polinomio, reemplazando la letra* x *ordenatriz por dicho valor* a.

Sea el polinomio

$$A\,x^m + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots\ldots + T\,x + U = 0,$$

Q el cociente, y R el resto, tendremos

$$A\,x^m + B\,x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots\ldots + T x + U = (x - a)Q + R;$$

y haciendo $x = a$, será

$$A\,a^m + B\,a^{m-1} + C a^{m-2} + \ldots\ldots + T\,a + U = R,$$

conforme al enunciado.

* 36. Si queremos determinar la ley de formación del cociente, efectuemos la división, como se vé á continuación:

$$\begin{array}{r|r|l}
A\,x^m + B & x^{m-1} + C & x^{m-2} + \ldots\ldots \\
+ A\,a & + B\,a & \\
 & + A\,a^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
+ T\,x + U & \quad x - a \\ \hline
 & \begin{array}{r|r|l}
A x^{m-1} + B & x^{m-2} + C & x^{m-3} + \ldots\ldots \\
+ Aa & + B\,a & \\
 & + Aa^2 &
\end{array}
\end{array}$$

y esta nos dice:

Que el exponente de la letra ordenatriz en el primer término del cociente es el del primer término del dividendo, disminuído en una unidad, y continúa disminuyendo otra unidad en cada término; y que los coeficientes se forman añadiendo al que ocupa el mismo lugar en *el dividendo, el producto del anterior del cociente por* a.

Escolio. Para aplicar esta ley en casos particulares, se agregan los términos qne falten para completar el polinomio, dándoles el coeficiente 0.

Ejemplos. 1.° Hallar el cociente entero y el resíduo de dividir el polinomio

$9x^7 - 11x^5 + 4x^2 - 7$ por el binomio $x - 5$.

2.° Hallar el cociente entero y el resíduo de dividir el polinomio

$3x^8 - 5x^6 - 7x^3 + 4x - 9$ por el binomio $x + 8$.

* 37. Corolarios. 1.° *Si un polinomio se reduce á cero, reemplazando una de sus letras* x *por su valor* a, *dicho polinomio es divisible por* x — a. Pues en este caso $R = 0$, nos indica qne la división es exacta.

2.° *Si un polinomio es divisible por la diferencia* x—a, *se reducirá á cero por la sustitución de* x *por* a.

Pues siendo exacta la división, resulta $R = 0$.

3.° *La diferencia de las potencias de igual grado de dos cantidades es divisible por la diferencia de dichas cantidades.*

Pues $x^m - a^m$ se reduce á cero cuando hacemos $x = a$.

Escolio. La ley del cociente aplicada á este caso, nos dice que *el primer término del cociente es el primero del dividendo, disminuyendo una unidad á su exponente, y continúa disminuyendo una unidad en los exponentes de los términos sucesivos. El coeficiente de cada término es* a, *con un exponente igual al número de los términos que le preceden.*

Ejemplo. Hallar el cociente de dividir el binomio $x^{11} - a^{11}$ por $x - a$. *

LXII.

Fracciones algebráicas.

38. *Fracción algebráica ó literal* es el cociente indi-

cado de dos expresiones literales. Sus términos se designan como en Aritmética.

39 Las propiedades generales de las fracciones literales se deducen fácilmente de su definición. Así, representando la fracción por $\frac{a}{b}$ y llamando q al cociente que representa, tendremos:

1.º $\frac{a}{b} = q$, de donde $a = b\,q$; y multiplicando los dos miembros por n, $a\,n = b\,q\,n$ ó bien dividiendo por b; ambos miembros, $\frac{a\,n}{b} = q\,n$ ó lo que es lo mismo,

$$\frac{a\,n}{b} = \frac{a}{b} \times n.$$

2.º $\frac{a}{b} = q$; $a = b\,q$, y dividiendo ambos miembros por n

$$a : n = b\,q : n = b\,(q : n);$$

de donde

$$\frac{a : n}{b} = q : n \quad \text{ó} \quad \frac{a : n}{b} = \frac{a}{b} : n.$$

3.º $\frac{a}{b} = q$; $a = b\,q$; multiplicando b por n, y dividiendo q por n, el producto no variará, luego

$$a = b\,n\,(q : n);$$

de donde $\frac{a}{b\,n} = q : n$ ó $\frac{a}{b\,n} = \frac{a}{b} : n$.

4.º $\frac{a}{b} = q$; $a = b\,q$; el segundo miembro no varía si dividido b por n, y multiplico q por n; luego

$$a = (b : n)\, q\, n;$$

de donde $\dfrac{a}{b : n} = q\, n$ ó $\dfrac{a}{b : n} = \dfrac{a}{b} \times n.$

5.° $\dfrac{a}{b} = q;\; a = b\, q;\; a\, n = b\, q\, n;\; \dfrac{a\, n}{b\, n} = q$

$$\text{ó}\quad \frac{a\, n}{b\, n} = \frac{a}{b}.$$

6.° $\dfrac{a}{b} = q;\; a = b\, q\;\; a : n = b\, q : n = (b : n)\, q;$

$$\frac{a:n}{b:n} = q \quad \text{ó} \quad \frac{a : n}{b : n} = \frac{a}{b}.$$

Lo que nos comprueba que los principios demostrados (122 y 123) en la Aritmética, son aplicables á las fracciones algebráicas.

40. Las propiedades 5.ª y 6.ª nos permiten reducir fracciones algebráicas á denominador común, y simplificar estas fracciones.

Se simplifican las fracciones literales, suprimiendo los factores comunes á sus dos términos.

Se reducen quebrados á común denominador, multiplicando los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los otros.

Ejemplos. 1.° Simplificar las fracciones

$$\frac{36\, a^3\, b^4\, c^5\, d^3}{180\, a^2\, b^5\, c^4\, d^3},\quad \frac{21\, x^2 - 7\, a\, x}{15\, b\, x - 5\, a\, b}$$

2.° Reducir á común denominador las fracciones

$$\frac{2\, a}{5\, b},\quad \frac{b}{3\, c},\quad \frac{5\, c}{2\, a}.$$

Escolio. Si los denominadores son monomios, el producto del m. c. m. de los coeficientes por las mayores potencias de las diversas letras de sus denominadores será el m. c. m. de éstos, y se podrán reducir las fracciones á su mínimo denominador común según las reglas dadas en la Aritmética.

Ejemplo. Reducir á su mínimo denominador común las fracciones

$$\frac{5\,a^2}{36\,b^3\,c^4\,d^2},\ \frac{3\,b^3}{20\,a^3\,b^2\,c^3},\ \frac{7\,c^4}{120\,a^4\,b\,d^3}.$$

LXIII.

Cálculo de fracciones literales.

41. *Adición* Sean las fracciones $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ y $\frac{c}{d}$, que tienen el mismo denominador, y m, n, p los cocientes que expresan, tendremos

$$\frac{a}{d} = m;\ \frac{b}{d} = n;\ \frac{c}{d} = p$$

de donde

$$a = d\,m;\quad b = d\,n;\quad c = d\,p;$$

sumando ordenadamente estas igualdades,

$$a + b + c = d\,(m + n + p);$$

y, por tanto,

$$\frac{a + b + c}{d} = m + n + p,$$

ó bien $$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

Luego *para sumar fracciones literales de igual denominador, se suman los numeradores, y á la suma se la pone el denominador común.*

Si tuvieren distinto denominador, reduciéndolas á común denominador, estaríamos en el caso anterior.

42. *Sustracción.* Del propio modo demostraríamos que *para restar fracciones de igual denominador, se restan los numeradores, y se parte la diferencia por el denominador común.*

Si tuvieran diferente denominador, las reduciríamos á común denominador, y estaríamos en el caso anterior.

43. *Multiplicación.* Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, y m, n los cocientes que representan. Tendremos,

$$\frac{a}{b} = m; \ \frac{c}{d} = n; \text{ ó bien } a = b\,m; \ c = d\,n.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades,

$$a\,c = b\,d\,m\,n;$$

de donde $\frac{a\,c}{b\,d} = m\,n$, ó $\frac{a\,c}{b\,d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

Se multiplican fracciones literales, partiendo el producto de los numeradores por el de los denominadores.

44. *División.* Empleando la misma notación,

$$\frac{a}{b} = m \text{ y } \frac{c}{d} = n; \text{ tendremos } a = b\,m; \ d\,n = c;$$

multiplicando estas dos igualdades

$$a\,d\,n = b\,c\,m;$$

y dividiendo ambos miembros por $b\,c\,n$,

$$\frac{a\,d\,n}{b\,c\,n} = \frac{b\,c\,m}{b\,c\,n} \text{ ó } \frac{a\,d}{b\,c} = \frac{m}{n};$$

es decir,

$$\frac{a\,d}{b\,c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

Luego *se dividen fracciones literales, multiplicando el dividendo por el divisor invertido.*

Calcular la expresión

$$\frac{\left(\dfrac{5a+2b}{2a-b}+\dfrac{3b}{4a}-2ab\right)\left(\dfrac{3a-5b}{2a+b}-\dfrac{5b}{3a}+ab\right)}{2a-5b+\dfrac{3ab}{4}}$$

LXIV.

Exponente cero y exponentes negativos.

* 45. En la división de monomios hemos demostrado que

$$\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}.$$

Esta demostración supone que $m > n$.

Vamos á examinar ahora las consecuencias que se deducirian de aplicar ese principio al caso en que

$$m = n \quad \text{y} \quad m < n.$$

1.º Si $m = n$; la igualdad $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$, se convierte en $\frac{a^{n}}{a^{n}} = a^{0}$.

El primer miembro es evidentemente igual á 1; pero el segundo no tiene significación alguna en el concepto de potencia; si *convenimos*, no obstante, en admitir esa igualdad, por los beneficios que reporta al cálculo, sentaremos para lo sucesivo *que toda cantidad con exponente cero es un símbolo de la unidad.*

2.° Si $m < n$, llamando d á su diferencia, será

$$n = m + d,$$

que sustituído en la igualdad primera, nos dá

$$\frac{a^m}{a^{m+d}} = a^{m-(m+d)} \quad ó \quad \frac{a^m}{a^m \times a^d} = a^{m-m-d};$$

y por último, $\frac{1}{a^d} = a^{-d}$ y podremos *convenir*, como anteriormente, *que toda cantidad con exponente negativo es un símbolo de la unidad partida por la misma cantidad con el exponente hecho positivo.*

46. *Escolios.* 1.° El exponente cero se emplea para conservar en el cálculo un factor literal que debiera desaparecer, por haberse reducido a la unidad; y los exponentes negativos para dar forma entera á las fracciones literales.

2.° La igualdad $\frac{1}{a^d} = a^{-d}$; nos dá, $1 = a^d \times a^{-d}$; de donde, $a^d = \frac{1}{a^{-d}}$, que nos dice que á su vez *toda cantidad con exponente positivo es un símbolo de la unidad partida por la misma cantidad con el exponente hecho negativo.*

Estas dos propiedades permiten pasar los factores del numerador al denominador, y viceversa, con solo cambiar el signo a sus exponentes.

Ejemplo. Representar en forma entera las fracciones

$$\frac{4\, a^3\, b^2\, c}{a^2\, b\, c^3\, d}, \quad \frac{6\, a^5\, b}{a^3\, b^2\, c^4\, d^2}.$$

47. Admitidas en el cálculo las cantidades con exponentes negativos, estamos en el caso de ver si las son aplicables las reglas dadas para las operaciones de cantidades con exponentes positivos.

Adición y substracción. Como las reglas dadas para estas dos operaciones se deducen de consideraciones que no afectan á la forma de los datos, es evidento su generalidad.

* 48. *Multiplicación.* Sean los factores a^{-m} y a^{-n}. Tenemos que

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$$

$$a^{-m} \times a^n = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times a^{-m} = a^n \times \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

luego también es general la regla dada para la multiplicación.

* 49. *División.*

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^{m+n}$$

luego también son aplicables á la división las reglas expuestas.

Escolio. 1.º El uso de los exponentes negativos permite ordenar los polinomios fraccionarios, con relación á uua letra que entre en los denominadores, y calcularlos como expresiones enteras.

Ejemplo. Efectuar la multiplicación de los polinomios:

$$\left(6\,a^4 b^3 + 5\,a^6 x^2 - 3\,a^5 b^4 x + \frac{4\,a^2 b}{x^2} - \frac{5\,a^3 b^2}{x}\right)$$

$$\left(\frac{3\,a}{x} - b\,a^2 x + 4\,a^3 b^2 x^2\right)$$

ordenándolos con relación á las potencias de x.

2.° También permite continuar las divisiones incompletas y aún llegar á veces á obtener un resíduo cero.

EJEMPLOS. 1.° $1 : a + x$.

2.° $x^7 + a^7 : x^2 + a\,x$.

3.° Si tenemos en cuenta que un número entero no es más que un polinomio ordenado con relación á las potencias de la base, y un número decimal, por consiguiente, cae dentro de lo indicado en el escolio 1.°, podremos considerar las operaciones con estos números como casos particulares de las algébricas ya explicadas; pues basta observar, por ejemplo, que

$$3578{,}2857 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 8 + {}^2$$

$$\frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} = 3 \times 10^3 + 5 \times 10$$

$$+ 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$

$$+ 5 \times 10^{-3} + 7 \times 10^{-4}.$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

LXV.

Principios generales de las ecuaciones.

50. Las igualdades reciben nombres distintos según las formas que afectan.

Se llama *igualdad*, si las cantidades que expresa, á más de conocidas, tienen forma distinta; como

$$7 \times 2 = 6 + 8;\ a + a = 2\,a.$$

Identidad, si tienen la misma forma; como,

$$7 = 7;\ a + x = a + x.$$

Ecuación, por fin, es la igualdad que contiene alguna incógnita; como

$$x^2 - 2\,a\,y = 3\,a^2\,b^2;\ 3\,x + 5 = 11.$$

Los caractéres, pues, que las distinguen, son; 1.º *que la igualdad ha menester de demostración, subsiste siempre sean los que quiera los valores que tengan las cantidades que la forman, y efectuadas las operaciones que indica se convierte en identidad:* 2.º *que la ecuación solo se verifica para determinados valores de las incógnitas, y efectuadas las operaciones indicadas con estos valores, se convierte en identidad; y* 3.º *que la identidad, evidente por sí misma, sirve de comprobación á la igualdad y á la ecuación.*

51. El álgebra resuelve los problemas, traduciendo el enunciado del lenguaje vulgar al algebráico, y deduciendo después, por medio de las transformaciones necesarias, los valores de las incógnitas. La primera parte, ó sea la

traducción algebráica del enunciado, conduce siempre á una ó varias ecuaciones. Este es, pues, el orígen general de las mismas, que pueden mirarse siempre como la traducción literal del enunciado de un problema.

52. La segunda parte, nos obliga á hallar los valores de las incógnitas, y se llama *resolver las ecuaciones*, esto es, hallar las cantidades conocidas que puestas en las ecuaciones en lugar de las incógnitas, las *satisfacen ó verifican*, es decir, las convierten en identidades.

Estas cantidades conocidas, ó *valores de las incógnitas*, constituyen las *soluciones* de dichas ecuaciones.

53. Se llaman *ecuaciones equivalentes las que tienen las mismas soluciones*, es decir, que quedan satisfechas por los mismos valores de las incógnitas, lo cual permitirá sustituir unas por otras.

54. Una ecuación se dice que es *absurda* ó *imposible*, cuando no hay valor alguno de las incógnitas que pueda transformarla en identidad.

Se dice que una ecuación es *indeterminada* cuando admite un sin fin de soluciones.

55. Todas las transformaciones que hacemos sufrir á las ecuaciones, tienden á separar las incógnitas de las cantidades conocidas, al objeto de determinar los valores de aquellas; y se efectúan, haciendo las mismas operaciones con los dos miembros de la ecuación; con lo que obtenemos otra, que precisa demostrar es equivalente á la primera.

56. *Si á los dos miembros de una ecuación se suman ó restan cantidades iguales cualesquiera, resulta otra ecuación equivalente.*

Sea la ecuación $A = B$, en que A y B pueden tener una ó varias incógnitas. Digo que también será

$$A \pm m = B \pm m.$$

En efecto, toda solución que haga idénticos á A y B, hace también idénticos $A \pm m$ y $B \pm m$; y viceversa, toda solución que haga idénticos á $A \pm m$ y $B \pm m$, tiene que hacer idénticos á A y B; luego las dos ecuaciones son equivalentes.

57. *Si se multiplican ó dividen los dos miembros de una ecuación por una cantidad conocida y diferente de cero, resulta una ecuación equivalente.*

Si $A = B$; también $A\,m = B\,m$.

Toda solución que haga idénticos A y B, hace idénticos evidentemente $A\,m$ y $B\,m$; recíprocamente, toda solución que haga idénticos $A\,m$ y $B\,m$, tiene que hacer idénticos A y B, luego ambas ecuaciones son equivalentes.

Escolio: El factor que multiplique á los dos miembros de la ecuación no puede ser 0, pues la segunda ecuación admitiría un sin fin de soluciones, es decir, sería indeterminada; y la primera no.

Así, $x + 12 = 3\,x + 2$, se satisface solamente para

$$x = 5; \quad \text{y} \quad (x + 12)\,0 = (3\,x + 2)\,0$$

se satisface para todo valor dado á x.

Tampoco este factor puede ser desconocido, pues la segunda ecuación tendría más soluciones que la primera.

Así, multiplicando los dos miembros de la primera ecuación por $x - 7$, tendriamos

$$(x + 12)\,(x - 7) = (3\,x + 2)\,(x - 7)$$

que queda satisfecha por el valor 5 de la primera ecuación; y además por el valor 7, que no satisface á la primera ecuación.

58. De los dos principios demostrados se deducen algunas consecuencias muy importantes:

1.ª *En una ecuación se puede pasar un término de un miembro á otro, con solo cambiarle el signo.*

Si en la ecuación

$$a\,x + b = c\,x - d;$$

restamos b de los dos miembros, resulta

$$a\,x = c\,x - d - b;$$

y si sumamos d, tendremos

$$a\,x + b + d = c\,x.$$

2.ª *Se puede cambiar el signo á todos los términos de una ecuación*, pues equivale á multiplicar los dos miembros por -1.

3.ª *Se puede hacer desaparecer los denominadores de una ecuación, multiplicando los dos miembros por el producto de los denominadores, ó por su mínimo común múltiplo, sino son primos.*

Ejemplos 1.º Quitar los denominadores en la ecuación

$$3\,x - \frac{5\,a}{4} + \frac{7\,x}{5} = 13 - \frac{a\,x}{3}$$

2.º En la ecuación

$$2\,x - \frac{3\,a\,x}{8\,b^2} + \frac{7\,x}{12\,a^2\,b^2} = 9 - \frac{5\,x}{24\,a^3\,b^4}.$$

4.ª *Se puede simplificar una ecuación, cuando los dos miembros tienen un factor común independiente de la incógnita, suprimiendo dicho factor.*

Ejemplo. Simplificar las ecuaciones

$$10\,a^3\,b^2\,c\,x - \frac{15\,a\,b^3\,c^2}{9\,c\,d} + \frac{25\,a^2\,b^3\,c}{5\,a\,b} = \frac{20\,a^3\,b^2\,x}{2\,a} - 5\,a\,b^2\,x$$

$$\frac{5\,(x+a)^2}{7\,b} + 7\,(x+a) = \frac{2\,(x^2 - a^2)}{5\,a\,b}.$$

59. En virtud de lo expuesto, en una ecuación podemos *quitar los denominadores; efectuar las operaciones indicadas*, para que resulten solo términos conocidos, ó términos con la incógnita por factor; pasar luego todos los términos conocidos á un miembro, y todos los que tienen incógnita á otro; lo que se llama también *hacer la transposición;* y, por último, hacer las *reducciones* y *simplificaciones* posibles. El conjunto de estas operaciones se llama *preparar la ecuación*. De donde se deduce que, *para preparar una ecuación, se quitan los denominadores, se efectúan las operaciones indicadas, se hace la transposición y, por último, la reducción y simplificacion.*

Ejemplo. Preparar la ecuación

$$\frac{2+x}{4}+3x-\frac{5b-4x}{9b}-\frac{3x}{4}=\frac{7x}{6b}+\frac{x}{ab}$$

60. *Grado de una ecuación es la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en cada término.*

Así $\quad 3ax^2-2axy+6x^2z=8$

es una ecuación de tercer grado.

Para señalar el grado de una ecuación es preciso que la incógnita no entre en ningún denominador, ni bajo ningun signo radical. Si así fuera, sería necesario hacer desaparecer radicales y denomiuadores, para determinar su grado.

Las ecuaciones se dividen en *numéricas* y *literales*, según que todas las cantidades conocidas son números particulares, ó están representadas, en todo ó parte, por letras.

Los valores de las incógnitas, en el primer caso, son números; en el segundo constituyen fórmulas.

LXVI.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

61, La ecuación de primer grado con una incógnita, después de preparada, solo puede tener dos términos; uno, en un miembro, que contenga la incógnita; y otro, en el otro miembro, conocido. De suerte que la forma general de esta ecuación; será

$$A\,x = B;\ \text{que nos dá inmediatamente } x = \frac{B}{A}.$$

Lo que nos dice que *para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, es preciso prepararla, y entonces la incógnita es igual al miembro conocido, partido por el coeficiente de la incógnita.*

Ejemplos. 1.º Resolver la ecuación

$$\frac{2\,x}{3} - 25 + \frac{3\,x}{15} = 8 - \frac{7\,x}{30}$$

quitando los denominadores, y observando que 30 es el m. c. m. tendremos

$$20\,x - 750 + 6\,x = 240 - 7\,x,$$

haciendo la transposición,

$$20\,x + 6\,x + 7\,x = 240 + 750,$$

reduciendo, $33\,x = 990$ de donde

$$x = \frac{990}{33} = 30.$$

Comprobación. Para comprobar este valor, se sustituye en lugar de x, en la ecuación propuesta, que deberá convertirse en una identidad. Poniendo en la propuesta en lugar de x su valor 30, resulta

$$\frac{2 \times 30}{3} - 25 + \frac{3 \times 30}{15} = 8 - \frac{7 \times 30}{30};$$

y simplificándo $20 - 25 + 6 = 8 - 7;$

efectuando las operaciones, resulta la identidad $1=1$.

2.° $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 124 = 5x + \frac{x}{5} - 7.$

3.° $4,75x - 13,029 - 1,5x = 4,171 - 2,45x.$

62. *Toda ecuación de primer grado con una incógnita, tiene una solución única* Pues en la ecuación $Ax = B$, el único valor que la satisface es $x = \frac{B}{A}$, que es la sola cantidad que multiplicada por A, reproduce B; siendo A y B cantidades finitas y diferentes de cero.

LXVII.

Problemas de primer grado con una incógnita.

63. Hemos dicho (51) que el Álgebra resuelve los problemas, traduciendo al lenguaje algebráico el enunciado de los mismos, lo cual origina las ecuaciones, y deduciendo después de éstas los va'ores de las incógnitas.

Vemos, pues, que la resolución de los problemas consta de dos dartes: 1.ª traducción del enunciado al lenguaje algebráico, que es lo que llamamos *plantear el* *problema ó poner el problema en ecuación;* 2.ª *resolver la ecuaciones*, es decir, deducir de ellas los valores de las incógnitas.

La primera parte no está sujeta á principios ni reglas fijas, únicamente puede servir de guia el siguiente precepto.

Para plantear un problema, analícese con todo detenimiento el enunciado á fin de poder conocer cuáles son las verdaderas incógnitas y datos de la cuestión propuesta; represéntese cada una de las primeras por una letra, y con éstas y los datos se indicarán todas las operaciones que efectuaríamos con las incógnitas, si fueran conocidas, para comprobar sus valores.

De esta suerte, obtendremos las ecuaciones que plantean el problema.

La segunda parte, ó sea la resolución de las ecuaciones, está sujeta á reglas fijas y generales que constituyen el principal objeto del Álgebra. Ya hemos tenido ocasión de observarlo en las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

64. Los problemas se denominan de *primero, segundo, tercer grado, etc.*, según que las ecuaciones que originan sean de primero, segundo, tercer grado, etc.

65. Se llaman *particulares* cuando los datos son números, y *generales* si vienen representados por letras.

66. Se dividen también en *determinados*, *indeterminados* é *imposibles*, según tengan un número limitado de soluciones, un número ilimitado ó no tengan solución alguna.

Problemas. 1.º *A una boda asisten* 51 *personas, el número de mujeres es* $\frac{2}{3}$ *del de hombres y los niños* *componen los* $\frac{7}{8}$ *del número de aquellas Se desea saber el número de hombres, mujeres y niños.*

Planteo. Aunque á primera vista parece que las incógnitas son tres, se observa enseguida que, si conociéramos el número de hombres, el de mujeres y niños, se deduciría inmediatamente de él. La verdadera incógnita es, pues, el número de hombres.

Llamémosle x. El de mujeres será $\frac{2x}{3}$; y el de niños $\frac{7}{8}$ de $\frac{2x}{3} = \frac{14x}{24}$, y como entre todos componen 54 personas, la ecuación será

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{14x}{24} = 54.$$

Resolución. $24x + 16x + 14x = 1296$

$$54x = 1296;\ x = \frac{1296}{54} = 24.$$

El número de hombres era 24. Las mujeres serían $\frac{2}{3}$ de $24 = 16$; y los niños $\frac{7}{8}$ de $16 = 14$.

Comprobación. $24 + 16 + 14 = 54$.

2.° *Hallar dos cantidades cuya suma sea* s *y la diferencia* d. Del propio modo que en el problema anterior, aunque las incognitas parecen ser dos, se observa que si conociéramos una de las cantidades, la otra estaría conocida enseguída

Planteo. Sea x la mayor, la menor será $s - x$, y con arreglo al enunciado, tendremos que la diferencia será

$$x - (s - x) = d,$$

Resolución. $x - s + x = d$

$$2x = s + d;\ x = \frac{s + d}{2}$$

la menor será

$$s - \frac{s + d}{2} = \frac{2s - s - d}{2} = \frac{s - d}{2}.$$

Comprobación. $\frac{s+d}{2} - s + \frac{s+d}{2} = d$

$$s + d - 2s + s + d = 2d \quad \text{ó} \quad 2d = 2d.$$

LXVIII.

Sistemas de ecuaciones de primer grado con tantas ecuaciones como incóngnitas.

67. El planteo de un problema puede originar varias ecuaciones, que han de quedar satisfechas para los mismos valores de las incógnitas.

En este caso, aquéllas constituyen lo que se llama un *sistema de ecuaciones*, así como los valores de sus incógnitas se llaman *sistema de valores.*

Vamos á ocuparnos de la resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado, con igual número de incógnitas.

El caso mas sencillo será el de dos ecuaciones con dos incógnitas, que es el que estudiaremos primero.

68. Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas, solo admite tres clases de términos: uno con cada incógnita y el término conocido; su forma general será, pues,

$$Ax + By = C,$$

en que A, B y C representan cantidades conocidas, siendo las incógnitas x é y.

La forma general del sistema de dos ecuaciones de 1.er grado con dos incógnitas, que nos proponemos resolver,

será $$\begin{aligned} a x + b y &= c \\ a' x + b' y &= c' \end{aligned}$$

Para conseguirlo, observaremos que, si una de estas ecuaciones solo tuviera una incógnita, reemplazando su valor en la otra, nos resultaría una ecuación con una incógnita, que ya sabemos resolver. El artificio, pues, que conviene emplear, está reducido en su esencia á deducir de estas dos ecuaciones otra equivalente, que solo contenga una incógnita, que es lo que llamamos eliminación.

Eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, es deducir de ellas otra equivalente que no contenga esa incógnita. Los métodos de eliminación son varios.

69. Método de sustitución. *Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, se despeja en una de estas ecuaciones y su valor se sustituye en la otra,*

Sean las ecuaciones

$$a x + b y = c \qquad (1)$$

$$a' x + b' y = c' \qquad (2)$$

despejando x en la primera, resulta

$$x = \frac{c - b y}{a} \qquad (3)$$

y sustituyendo su valor en la segunda,

$$a' \frac{c - b y}{a} + b' y = c' \qquad (4)$$

Ecuación con una sola incógnita, en que se ha eliminado la x, y que nos dá el valor de y, que sustituído en la (3), proporciona el de x que, con el anterior, formarán la solución del sistema.

Solo nos falta ahora demostrar la equivalencia de los sistemas (1) y (2) con el (3) y (4).

Sea m y n dos valores que satisfacen al primer sistema, digo que satisfarán al segundo, y viceversa.

En efecto, la ecuación (3) es la misma ecuación (1) en otra forma, luego estas ecuaciones evidentemente son equivalentes,

La ecuación (2) no se diferencia de la (4) más que en haber reemplazado x por $\frac{c - by}{a}$; pero todos los valores que satisfagan á la (3) hacen idénticos sus dos miembros, de forma que puede reemplazarse el 1.º por el 2.º ó el 2.º por el 1.º; luego el sistema (3) (4) es equivalente al (1) (2).

LIX.

Métodos de eliminación.

70. Método de igualación. *Se despeja una misma incógnita en las dos ecuaciones, y se igualan sus valores.*

De las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} a x + b y = c & (1) \\ a' x + b' y = c' & (2) \end{array}\right\}$$

resulta

$$\left.\begin{array}{ll} x = \dfrac{c - b y}{a} & (3) \\ x = \dfrac{c' - b' y}{a'} & (4) \end{array}\right\}$$

que nos dán $\dfrac{c - b\,y}{a} = \dfrac{c' - b'\,y}{a'}$

en que ha quedado eliminada la x.

Como las ecuaciones (3) y (4) son las mismas (1) y (2) en otra forma, la igualación de los valores de x, equivale á sustituir el valor de x (3) en la (4).

71. Método de reducción. *Consiste este método en hacer que la incógnita que se quiere eliminar tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, con lo que bastará sumarlas ó restarlas, según tenga esa incógnita diferente o igual signo en las dos ecuaciones, para conseguir que desaparezca.* Por esta razón, se llama también á este método de *sumas y restas.*

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c \\ a'\,x + b'\,y &= c' \end{aligned}$$

multiplicando la primera por a', y la segunda por a, tendremos

$$\left.\begin{aligned} a\,a'\,x + b\,a'\,y &= c\,a' \\ a\,a'\,x + a\,b'\,y &= a\,c' \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$b\,a'\,y - a\,b'\,y = c\,a' - a\,c'$$

y queda eliminada la x.

Para demostrar la equivalencia de estos sistemas, representaremos el primero por $\left.\begin{aligned}(1)\ \mathrm{A} &= 0\\ (2)\ \mathrm{B} &= 0\end{aligned}\right\}$ el segundo será

$$\left.\begin{aligned}(3)\ \mathrm{A}\,a' &= 0\\ (4)\ \mathrm{B}\,a &= 0\end{aligned}\right\} \text{ de donde } \mathrm{A}\,a' - \mathrm{B}\,a = 0. \quad (5)$$

y la cuestion está reducida á demostrar que el sistema (1) (2) es equivalente al (1) (5). En efecto, todo sistema de valores que anula A y B anula también la ecuación (5).

Recíprocamente, todo sistema de valores que anula las ecuaciones (1) y (5), por anular A, reduce $B\,a = 0$, y como a no es cero, tendremos $B = 0$; luego satisface á las (1) (2).

Escolios. 1.° Hemos visto que para hacer que la incógnita que se quiere eliminar tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, basta multiplicar cada una por el coeficiente de la incógnita en la otra.

Sin embargo, cuando los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar tengan factores comunes, será más sencillo formar el m. c. m. de los dos, y multiplicar cada ecuación por los factores que falten al coeficiente de su incógnita para completar dicho m. c. m.

2.° El metodo de eliminación por reducción es el más conveniente en la mayoría de los casos, porque las ecuaciones á que dá lugar siempre tienen forma entera.

El método de sustitución es conveniente cuando una de las incógnitas tiene por coeficiente la unidad; y el de igualación solo puede emplearse con ventaja, cuando una de las incógnitas tenga por coeficiente la unidad en ambas ecuaciones.

LXX.

Resolución de sistemas de ecuaciones con igual número de incógnitas.

72. Comencemos por el caso más sencillo.

Sean las dos ecuaciones $\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$ eliminando x por el método de reducción, resulta

$$\left.\begin{array}{l} a a' x + b a' y = c a' \\ a' a x + a b' y = a c' \end{array}\right\} b a' y - a b' y = c a' - a c';$$

$$y = \frac{c a' - a c'}{b a' - a b'}$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones propuestas, podríamos deducir el de x de la ecuación resultante.

También podríamos, y sería lo más conveniente, eliminar ahora y por reducción; pero, con objeto de dar idea de todos los métodos, vamos á emplear el de igualación. Despejando y en las dos ecuaciones, nos dan

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{c - a x}{b} \\ y = \dfrac{c' - a' x}{b'} \end{array}\right\} \frac{c - a x}{b} = \frac{c' - a' x}{b'};$$

$$c b' - b' a x = b c' - b a' x;$$

$$a' b x - b' a x = b c' - c b'; \quad (b a' - a b') x = b c' - c b';$$

$$x = \frac{b c' - c b'}{b a' - a b'}.$$

Ejemplo. Resolver el sistema de dos ecuaciones

$$2 y - \frac{5 x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3 y}{4} + 5 x = 3 \frac{1}{16}$$

73. La forma general de toda ecuación de primer grado, después de preparada, es

$$a x + b y + c b + \ldots\ldots = k.$$

Para resolver un sistema de m *ecuaciones de primer* *grado con* m *incógnitas, se elimina una misma incógnita sucesivamente entre la primera ecuación y cada una de las demás; lo que nos dará* m—1 *ecuaciones con* m—1 *incógnitas. Se vuelve á eliminar una misma incógnita entre estas ecuaciones, y resultarán* m—2 *ecuaciones con* m—2 *incógnitas; y se continúa así hasta obtener una ecuación con una incógnita. Se resuelve esta ecuación, y nos dará el valor de una incógnita; se sustituye este valor en una de las dos ecuaciones con dos incógnitas, y tendremos el de otra incógnita. Estos dos valores se sustituyen en una de las tres ecuaciones con tres incógnitas y resultará el valor de otra incógnita; y así sucesivamente hasta obtener el valor de todas ellas.*

Este procedimiento está justificado por lo expuesto en la eliminación; puesto que el sistema dado es equivalente al formado por una de las ecuaciones propuestas, una de las $m-1$ con $m-1$ incógnitas, una del grupo de $m-2$ incógnitas y así hasta una del grupo de 2 incógnitas, y la ecuación final con una incógnita,

Ejemplo. Sea el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} a x + b y + c z = k \\ a' x + b' y + c' z = k' \\ a'' x + b'' y + c'' z = k'' \end{array}\right\} \quad (1)$$

eliminando x entre la primera y la segunda, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} a a' x + b a' y + c a' z = k a' \\ a a' x + a b' y + a c' z = a k' \end{array}\right\} b a' y + c a' z - a b' y -$$

$$a c' z = k a' - a k'; \quad \text{ó sea}$$

$$(b a' - a b') y + (c a' - a c') z = k a' - a k';$$

y ahora entre primera y tercera

$$\left.\begin{array}{l} a a'' x + b a'' y + c a'' z = k a'' \\ a a'' x + a b'' y + a c'' z = a k'' \end{array}\right\} b a'' y + c a'' z - a b'' y -$$

$$a\,c''\,z = k\,a'' - ak; \quad \text{ó bien}$$

$$(b\,a'' - a\,b'')\,y + (c\,a'' - a\,c'')\,z = k\,a'' - a\,k''$$

y el sistema propuesto ha quedado reducido á las dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left.\begin{aligned}(b\,a' - a\,b')\,y + (c\,a' - a\,c')\,z = k\,a' - a\,k' \\ (b\,a'' - a\,b'')\,y + (c\,a'' - a\,c'')\,z = k\,a'' - a\,k''\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Elimino y entre estas dos ecuaciones, y resultará

$$(a\,c'\,b'' - a\,b'\,c'' + b\,a'\,c'' - c\,a'\,b'' - b\,c'\,a'' + c\,b'\,a'')\,z =$$
$$a\,k'\,b'' - a\,b'\,k'' + b\,a'\,k'' - k\,a'\,b'' + k\,b'\,a'' - b\,k'\,a''$$

de donde

$$z = \frac{a\,k'\,b'' - a\,b'\,k'' + b\,a'\,k'' - k\,a'\,b'' + k\,b'\,a'' - b\,k'\,a''}{a\,c'\,b'' - a\,b'\,c'' + b\,a'\,c'' - c\,a'\,b'' + c\,b'\,a'' - b\,c'\,a''}$$

Sustituyendo este valor de z en la primera de las ecuaciones (2) resulta

$$y = \frac{a\,c'\,k'' - a\,k'\,c'' + k\,a'\,c'' - c\,a'\,k'' + c\,k'\,a'' - k\,c'\,a''}{a\,c'\,b'' - a\,b'\,c'' + b\,a'\,c'' - c\,a'\,b'' + c\,b'\,a'' - b\,c'\,a''}$$

y reemplazando z é y por sus valores en la primera de las ecuaciones (1) tenemos, por fin,

$$x = \frac{k\,c'\,b'' - k\,b'\,c'' + b\,k'\,c'' - c\,k'\,b'' + c\,b'\,k'' - b\,c'\,k''}{a\,c'\,b'' - a\,b'\,c'' + b\,a'\,c'' - c\,a'\,b'' + c\,b'\,a'' - b\,c'\,a''}$$

Ejemplos. 1.º Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned}9\,x - 3\tfrac{1}{2}\,y - 2\tfrac{1}{2}\,z = 5\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{3}\,x + 2\tfrac{1}{5}\,y + \tfrac{1}{2}\,z = 54 \\ \tfrac{3}{8}\,x + y + 1\tfrac{3}{4}\,z = 40\end{aligned}\right\}$$

2.°

$$3x + 2y + 5z - 8u = 24$$
$$2x - 8y + 3z - 6u = 6$$
$$5x + 4y - 2z + 2u = 1$$
$$7x + 2y + 4z - u = 19$$

LXXI.

Fórmula general para la resolución de las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

* 74. El método de adición y sustracción nos ha hecho ver la importancia de los coeficicntes y el papel principal que pueden representar en la eliminación de las incógnitas.

El empleo de los factores indeterminados, debido á Bezout, permite hacer desaparecer á la vez todas las incógnitas menos una, simplificando notablemente el cálculo.

* 75. Consideremos, en primer lugar, el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$ax + by = K \quad (1)$$
$$a'x + b'y = K' \quad (2)$$

Multipliquemos los dos miembros de la primera ecua ción por un factor indeterminado m, y al producto agreguemos la segunda; tendremos

$$(am + a')x + (bm + b')y = Km + K' \quad (3)$$

Y como m no tiene valor determinado, podremos suponerle tal que anule el coeficiente de una de las incógnites, y, por ejemplo, es decir, que hacemos

$$bm + b' = 0$$

para lo que bastará que $m = -\frac{b'}{b}$ y la ecuación (3) se reducirá á

$$(a\,m + a')\,x = \mathrm{K}\,m + \mathrm{K}';$$

ó reemplazando m por su valor

$$x = \frac{\mathrm{K}\,b' - b\,\mathrm{K}'}{a\,b' - b\,a'} \qquad (4)$$

Si suponemos de modo análogo en la ecuación (3)

$$a\,m + a' = 0, \quad \text{de donde} \quad m = -\frac{a'}{a}$$

se reducirá á

$$(b\,m + b')\,y = \mathrm{K}\,m + \mathrm{K}'$$

y reemplazando m por su valor, resultará

$$y = \frac{a\,\mathrm{K}' - \mathrm{K}\,a'}{a\,b' - b\,a'} \qquad (5)$$

Un razonamiento análogo al empleado en el método de sumas y restas, demostraría que el sistema de las ecuaciones propuestas es equivalente al que origina los valores de x é y que acabamos de obtener.

* 76. Observando los valores de las incógnitas, y teniendo en cuenta las ecuaciones propuestas, deduciremos la siguiente regla:

Para determinar los valores de las incógnitas en un sistema de dos ecuaciones, escríbase á la derecha del coeficiente a *de la primero incógnita el coeficiente* b *de la segunda; inviértase el orden de las letras, interpóngase el signo menos y se formará el binomio* a b — b a, *acentúense las segundas letras de cada término y resultará el denominador común á las dos incógnitas* a b' — b a'. *Reemplazando enseguida el coeficiente de la incógnita que se busca por el término conocido, conservando los acentos, tendremos el numerador.*

* 77. Pasemos ahora al caso de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= K \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= K' \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z &= K'' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

sean m y n dos cantidades indeterminadas, multipliquemos la primera ecuación por m, la segunda por n, y sumemos las dos ecuaciones resultantes con la tercera, tendremos:

$$(7) \quad (a\,m + a'\,n + a'')\,x + (b\,m + b'\,n + b'')\,y + (c\,m + c'\,n + c'')\,z = K\,m + K'\,n + K''$$

y como m y n son indeterminadas, podemos suponer que sus valores anulan los coeficientes de y y z, de suerte que

$$\left.\begin{aligned} b\,m + b'\,n + b'' &= 0 \\ c\,m + c'\,n + c'' &= 0 \end{aligned}\right. \quad (8)$$

ecuaciones que nos determinan los valores de m y n con arreglo á la regla anterior, que nos dá

$$m = \frac{b'\,c'' - c'\,b''}{b\,c' - c\,b'}; \quad n = \frac{c\,b'' - b\,c''}{b\,c' - c\,b'}$$

valores que sustituídos en el valor de x, deducido de la ecuación (7), que ha quedado reducida en virtud de la hipótesis (8) á

$$(9) \quad (a\,m + a'\,n + a'')\,x = K\,m + K'\,n + K''$$

nos dán por fin

$$x = \frac{K\,(b'\,c'' - c'\,b'') + K'\,(c\,b'' - b\,c'') + K''\,(b\,c' - c\,b')}{a\,(b'\,c'' - c'\,b'') + a'\,(c\,b'' - b\,c'') + a''\,(b\,c' - c\,b')},$$

los valores de y y de z, podrían obtenerse empleando análogo procedimiento; pero pueden deducirse directamente observando que en la ecuación (7) el coeficiente de x no se diferencia del de y ó z, más que en que su coeficiente a está reemplazado respectivamente por b y c; y, si tratáramos de buscar el valor de y, las ecuaciones (8) serían las mismas con la sola sustitución en la primera de b por a; y la ecuación (9) sería también la misma reemplazando solamente x por y, y a por b.

De suerte que el valor de y será el mismo de x reemplazando a por b y b por a. Análogamente el valor de z se deducirá también del de x, reemplazando a por c y c por a; así se obtiene

$$y = \frac{K(a'c'' - c'a'') + K'(ca'' - ac'') + K''(ac' - ca')}{b(a'c'' - c'a'') + b'(ca'' - ac'') + b''(ac' - ca')}$$

$$z = \frac{K(b'a'' - a'b'') + K'(ab'' - ba'') + K''(ba' - ab')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') + c''(ba' - ab')}$$

* 78. La composición de estas fórmulas nos permite ampliar la regla dada en el número (76) para el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Formado, con arreglo á ella *el binomio* a b — b a, *agréguese el coeficiente* c *de la tercera incógnita á los dos términos y hágase correr la* c *de derecha á izquierda, cambiando el signo á cada cambio de lugar; y resultará el polinomio*

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba$$

acentuando con una comilla la segunda letra y con dos la tercera de cada término resultará el denominador común de los valores de todas las incógnitas. Para tener el numerador de cada uno, basta reemplazar en el denominador común, el coeficiente de la incógnita que se busca por el término conocido, conservando las comillas.

* 79. De modo análogo podría hacerse extensiva la regla anterior al caso de mayor número de ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

LXXII.

Problemas de primer grado con varias incógnitas.

80. 1.º Un tren sale á las diez de la mañana de Medina, que dista 93 km. de Segovia, con una velocidad de

0,65 kilómetros por minuto; y de Segovia sale otro para Medina, 15 minutos después, con una velocidad de 0,80 kilómetros por minuto. Se desea saber cuánto tiempo tardarán en encontrarse los trenes, desde que salió el de Segovia, y cuántos kilómetros ha recorrido cada uno.

Planteo. Sean x los kilómetros que recorre el primero: y los que recorre el segundo. Entre los dos recorren los 93 km.; luego $x+y=93$. Si el primero en andar 0,65 km. tarda 1 minuto, en andar x km. tardará $\frac{x}{0.65}$; y el segundo en andar y km., tardará $\frac{y}{0,80}$, y como llegan al mismo tiempo al punto de encuentro, se diferenciarán en los 15 minutos que salió después el segundo tren.

Luego las ecuaciones son:

$$x+y=93.$$

$$\frac{x}{0,65}-\frac{y}{0,80}=15$$

Resolución. Las ecuaciones preparadas se convierten en

$$\left.\begin{array}{r} x+y=93 \\ 16\,x-13\,y=156 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=93-x \\ 16\,x-1209+13\,x=156 \end{array}$$

$$29\,x=1365; \qquad x=47,034 \text{ km.}$$

De donde $\qquad y=45,966$ km.

Puesto que el segundo tren recorrió 45,966 km. con una velocidad de 0,80 km. por minuto, tardaría en encontrar al primero $\frac{45,966}{0,80}=27'21''$

luego $\qquad t=57'21''$.

Comprobación. La distancia recorrida por el primer tren fué 47,034 km., su velocidad 0,65 km., luego tardaría en encontrar al segundo $\frac{47,034}{0,65} = 72'21''$. Diferencia del tiempo empleado por los dos en recorrer el trayecto $72'21'' - 57'21'' = 15'$ con arreglo al enunciado.

2.º Dos trenes salen con una diferencia de t minutos, de dos estaciones que distan n kilómetros, y con velocidades representadas por v y v' km. por minuto. Se desea saber cuánto tiempo tardarán en encontrarse desde que salió el último, y cuántos kilómetros recorre cada uno.

Planteo. Sean x é y los kilómetros que recorre cada uno. Entre los dos han recorrido los n kilómetros, luego la primera ecuación será $x + y = n$.

Ahora el primer tren en andar v km. tarda 1'; luego en andar x km. tardará $\frac{x}{v}$ minutos; del propio modo el segundo tardará $\frac{y}{v'}$ y como la diferencia del tiempo empleado por los dos es t minutos, la segunda ecuación será

$$\frac{x}{v} - \frac{y}{v'} = t.$$

Resolución Las dos ecuaciones preparadas nos dan:

$$x + y = n$$

$$v'x - vy = vv't$$

$$x = n - y$$

$$v'(n - y) - vy = vv't; \quad v'n - v'y - vy = vv't;$$

$$(v' + v)y = v'n - vv't;$$

$$y = \frac{v'n - vv't}{v' + v};$$

$$x = n - \frac{v'n - vv't}{v' + v} = \frac{v'n + vn - v'n + vv't}{v' + v}$$

$$x = \frac{\nu n + \nu \nu' t}{\nu' + \nu}.$$

Comprobación.

$$\frac{\nu' n - \nu \nu' t}{\nu' + \nu} + \frac{\nu n + \nu \nu' t}{\nu' + \nu} = n,$$

$$\nu' n - \nu \nu' t + \nu n + \nu \nu' t = \nu' n + \nu n$$

$$\nu' n + \nu n = \nu' n + \nu n$$

y también

$$\frac{\nu' (\nu n + \nu \nu' t)}{\nu' + \nu} - \frac{\nu (\nu' n - \nu \nu' t)}{\nu' + \nu} = \nu \nu' t;$$

$$\nu' \nu n + \nu \nu'^2 t - \nu \nu' n + \nu^2 \nu' t = \nu \nu'^2 t + \nu^2 \nu' t;$$

ó sea $$\nu \nu'^2 t + \nu^2 \nu' t = \nu \nu'^2 t + \nu^2 \nu' t.$$

LXXIII.

Discusión de la ecuación de primer grado con una incógnita.

* 81. La discusión de las ecuaciones de primer grado no es otra cosa que el exámen de todas las formas que pueden presentar los valores de las incógnitas, según los que tengan los datos, y la interpretación legítima de estas formas, con arreglo á las condiciones que pudiéramos llamar físicas del problema; pues hay que tener en cuenta que los valores de las incógnitas constituyen siempre una solución legítima de las ecuaciones dadas, mas no siempre lo son del problema que las origina, y de ahí la necesidad de buscar la interpretación adecuada al caso que se considera.

* 82. En la ecuación general A x = B; la incógnita $x = \frac{A}{B}$, puede presentar cinco formas distintas según

que A y B tengan el mismo signo ó signo contrario; y sea una de ellas nula ó lo sean ambas.

1.er caso. Si A y B son del mismo signo, x será positiva y en general será una solucion del problema. No obstante, puede suceder que las condiciones físicas del problema lleven envueltas ciertas restricciones, que hagan que dicho valor no constituya una solución del problema propuesto. En este caso, la solución hallada, que pone de manifiesto la incompatibilidad de los datos, acusa la imposibilidad del problema propuesto.

Ejemplo. *Se trata de repartir una limosna entre varios pobres, á partes iguales, y se vé que faltan 4 céntimos para dar á cada pobre 5; y que sobran 7, para dar á cada pobre 3. Se pregunta ¿cuántos son los pobres?*

Sean x los pobres; si damos á cada pobre 5 céntimos, repartiremos $5x$; pero como faltan 4, en este caso, la cantidad disponible será $5x - 4$. Si damos á 3 cénts., empleamos $3x$; pero como sobran 7, resulta, que la cantidad que hemos de repartir es $3x + 7$.
luego

$$5x - 4 = 3x + 7; \quad \text{de donde} \quad x = \frac{11}{2} = 5^1/_2$$

El valor fraccionario de la incógnita satisface á la ecuación; mas no al problema, que exige una solución entera. Este problema es, pues, imposible.

2.º Si A y B tienen signo contrario, x será negativo y en esta forma no puede satisfacer al problema. Recordando, sin embargo, la interpretación que hemos dado á las cantidades negativas, deduciremos que hemos atribuído á la incógnita, en el enunciado del problema, un modo de ser contrario al que debe tener, para que sea compatible con los datos. Así pues, rectificaremos el enunciado, atribuyendo á la incógnita el modo de ser contrario, con lo que la solución se convertirá en positiva.

Si esta rectificación no puede hacerse, el problema es imposible.

Ejemplos. 1.º *Una fuente tiene dos caños, el uno la llena en 6 horas y el otro la vacía en 5 horas: ¿Cuánto* *tiempo tardaría en llenarse abriendo los dos al mismo tiempo?*

Sea x el número de horas que tardaría en llenarse la fuente con los dos caños simultáneamente abiertos. Expresando por 1 la capacidad de la fuente; si el primero la llena en 6 horas, en 1 hora llenará $\frac{1}{6}$ de su capacidad, y en x horas $\frac{x}{6}$.

Del mismo modo veríamos que el otro caño vacía en las 5 horas una capacidad determinada por $\frac{x}{5}$, la diferencia de ambos debe ser la capacidad de la fuente. La ecuación será, pues

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{5} = 1; \quad 5x - 6x = 30; \quad x = -30.$$

Solución negativa que indica la necesidad de rectificar el enunciado, que en vez de llenarse en las x horas, se vacía en ese tiempo. El enunciado debe ser, pues, el siguiente:

Una fuente tiene dos caños, el uno la llena en 6 horas, el otro la vacía en 5. ¿Cuántas horas tardará en vaciarse con los dos abiertos á la vez?

2.º *Preguntando á un pastor cuantos corderos lleva en su rebaño, responde: si al tercio de su número se añade el quinto, y se restan siete de la suma, resultará el doble de los que llevo.*

Sea x el número de corderos. La ecuación será

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} - 7 = 2x \quad \text{que nos dá} \quad x = -\frac{105}{22}.$$

Solución negativa que pone de manifiesto la incompatibilidad de los datos, acusando la imposibilidad del problema.

Esta imposibilidad la manifiesta también la ecuación propuesta que preparada dá $22x + 105 = 0$, imposible de satisfacer por ningún valor absoluto de x.

3.º Si B es cero, sin serlo A, $x = \frac{0}{A} = 0$, nos dará una solución legítima del problema.

Ejemplo. *Preguntado un pastor cuantos corderos lleva en su rebaño, responde: si al tercio de su número se añade el quinto, y se agrega 7, resultarán 7.*

La ecuación será ahora

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 7 = 7; \qquad 5\,x + 3\,x + 105 = 105;$$

$$8\,x = 0, \qquad x = \frac{0}{8} = 0.$$

Es decir, que no lleva ninguno.

4.º Si A es cero, sin serlo B, tendremos $x = \frac{B}{0}$ símbolo que por primera vez se nos presenta en el cálculo, y que es preciso interpretar

Observemos para ello que si en el quebrado $\frac{B}{A}$ suponemos el valor de B constante, y el de A variable, y disminuyendo sin cesar, el valor del quebrado irá aumentando sucesivamente; y cuando el valor de A sea extremadamente pequeño, el del quebrado será excesivamente grande. Es decir, que cuando A sea más pequeño que cualquier cantidad dada, $\frac{B}{A}$ será mayor que cualquier cantidad por grande que ésta sea.

Lo que se expresa abreviadamente diciendo que *toda cantidad partida por cero es infinita* y se expresa con el signo ∞.

Si B fuera negativo, el valor del quebrado crecería negativamente; y se tendrá del mismo modo $\frac{-B}{0} = -\infty$

Por consiguiente, los límites de toda cantidad finita son el infinitivo positivo y el infinitivo negativo.

Se deduce de lo expuesto, que si el denominador de un quebrado crece sin cesar, sin variar el numerador, el quebrado disminuye incesantemente. Es decir, que $\frac{A}{\infty} = 0$.

Si tratamos ahora de interpretar la solución infinita de la ecuación propuesta, observaremos que $x = \frac{B}{0}$, procede de la ecuación $0 \times x = B$, imposible de satisfacer por ningun valor finito de x. Luego el problema que origine esta ecuación es imposible.

Ejemplo. *Preguntando á un pastor cuantos corderos lleva en su rebaño, contestó: si á la mitad de su número se le añaden 5 y se le resta la cuarta parte, resultará la cuarta parte de los que llevo más 7* La ecuación será:

$$\frac{x}{2} + 5 - \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + 7;$$

que nos dá

$$0 \times x = 8; \quad x = \frac{8}{0} = \infty,$$

que demuestra la imposibilidad del problema, como se reconoce en la ecuación propuesta, pues quitando denominadores y reduciendo en el primer miembro, resulta

$$x + 5 = x + 7;$$

expresión absurda, pues cualquiera que sea el valor de x, siempre el 2.º miembro tendrá 2 unidades más que el 1.º

5.º Por último, si A y B son ceros, $x = \frac{0}{0}$, expresión que queda satisfecha por cualquier cantidad finita, puesto que todas ellas multiplicadas por 0, dan cero. Por eso la expresión $\frac{0}{0}$ se llama *símbolo de indeterminación.* El problema, cuya solución represente, será por tanto indeterminado.

Sucede, sin embargo, que algunas veces una fracción se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$, por anularse un factor común á los dos términos, sin ser tal símbolo de indeterminación.

Así, $\frac{3c(a^2 - b^2)}{4d(a - b)}$ se reduce á $\frac{0}{0}$, si hacemos $a = b$; pero si suprimimos el factor común á sus dos términos $(a - b)$, resulta $\frac{3c(a + b)}{4d}$, que en la hipótesis $a = b$, se convierte en $\frac{3b^2c}{4d}$.

Por consiguiente, para asegurarse de que una fracción que se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ es símbolo de indeterminación, es necesario antes ver si hay algún factor común á sus dos términos. Solo en caso negativo, deberemos darla esa interpretación, ó cuando, aún después de suprimidos los factores comunes, persistieran en anularse sus dos términos.

Ejemplo. *Cual es la edad de una persona que restando* 5 *de la mitad de su edad más* 4, *resultan tres años menos de la mitad de su edad.* La ecuación será

$$\frac{x + 4}{2} - 5 = \frac{x}{2} - 3;$$

$$\text{que nos dá} \quad 0 \times x = 0; \quad x = \frac{0}{0}.$$

Luego á todas las edades se verifican las condiciones del enunciado.

La indeterminación del problema la acusa también la ecuación, pues quitando denominadores se convierte en

$$x - 6 = x - 6,$$

identidad que siempre se verifica, cualquiera que sea el valor que demos á x.

83. Las cinco formas expuestas en los varios proble-

mas anteriores, pueden resumirse en un solo enunciado general.

Problema. *Dos móviles recorren con movimiento uniforme la línea* XY, *en el mismo sentido, pasando en el mismo instante por los puntos* A *y* B, *que distan entre sí* d *metros, con velocidades* v *y* v' *por minuto ¿En qué punto de la línea se encontrarán?*

X———N———A———d^m———B———M———Y

Supongamos que caminan hácia la derecha y representemos por M el punto de encuentro. Sea x la distancia A M; la distancia B M será $x-d$ Los dos móviles tardarán el mismo tiempo en recorrer las distancias A M y B M; pero el primero tarda $\frac{x}{v}$ minutos, y el otro $\frac{x-d}{v'}$

Luego la ecuación es $\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'}$; de donde $x = \frac{dv}{v-v'}$

Examinemos los diversos casos que pueden ocurrir.

1.° Si $v > v'$, el valor de x es positivo y satisface al problema. Además es mayor que d, como exigen las condiciones físicas del enunciado.

2.° Si $v < v'$, el valor de x es negativo; no satisface al problema pero, según lo expuesto, nos indica que el punto de encuentro en lugar de estar á la derecha, se encuentra en N, es decir, á la izquierda. El enunciado debe modificarse diciendo: *¿en qué punto de la línea se han encontrado?*

3.° Si d es cero, $x = \frac{0}{v-v'} = 0$. Conforme con las condiciones del enunciado del problema, que indica se encuentran en el punto de partida.

4.° Si $v = v'$; $x = \frac{dv}{0} = \infty$. El problema es imposible; y en efecto, siendo iguales las velocidades, los móviles estarán siempre á la distancia d, puesto que van en el mismo sentido.

5.° Si $d = 0$ y $v = v'$; $x = \frac{0}{0}$. Como en el valor de x no hay factor común alguno, el problema es indeterminado. Y efectivamente, así debe ser, puesto que partiendo del mismo punto, con velocidades iguales, se encuentran constantemente.

LXXIV.

Discusión de las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

* 84 Nos hemos ocupado anteriormente de la discusion de la ecuación de primer grado con una incógnita; vamos ahora á examinar las diferentes formas que pueden presentar los valores de las incógnitas en un sistema de varias ecuaciones con el mismo número de incógnitas. comenzando por el caso más sencillo

* 85. Consideremos, pues, el sistema general de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a\,x + b\,y = \mathrm{K} \\ a'\,x + b'\,y = \mathrm{K}' \end{array}\right\} \quad (1)$$

que sabemos nos dán

$$x = \frac{\mathrm{K}\,b' - b\,\mathrm{K}'}{a\,b' - b\,a'}; \quad y = \frac{a\,\mathrm{K}' - \mathrm{K}\,a'}{a\,b' - b\,a'} \quad (2)$$

y supongamos que se dán á a, b, a', b', valores tales que resulte $a\,b' - b\,a' = 0$; lo que nos dá $x = \infty$; $y = \infty$. Si las fórmulas (2) son aplicables al caso actual, las ecuaciones (1) resultan *incompatibles*. Para convencernos de ello, introduzcamos en las ecuaciones la condición

$$a\,b' - b\,a' = 0; \text{ que nos dá } b' = \frac{b\,a'}{a};$$

que sustituído en la segunda ecuación (1) la convierte en

$$a'x + \frac{b\,a'}{a}\,y = K';\ \text{ó sea } a\,x + b\,y = \frac{a\,K'}{a'}$$

ecuación incompatible con la primera de las propuestas, puesto que no puede ser $K = \frac{a\,K'}{a'}$, toda vez que entonces resultaría $K\,a' - a\,K' = 0$, lo cual no es cierto.

Las fórmulas (2) son, pues, aplicables al caso actual y comprueban que las *ecuaciones dadas son incompatibles.*

* 86. Supongamos ahora que se tuviera á la vez $a\,b' - b\,a' = 0$; y $K\,b' - b\,K' = 0$; de donde $x = \frac{0}{0}$ y al parecer $y = \infty$; aunque en realidad es también igual á $\frac{0}{0}$.

Basta, en efecto, observar que de $a\,b' - b\,a' = 0$; y $K\,b' - b\,K' = 0$; se deduce $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{K}{K'}$; de donde $a\,K' - K\,a' = 0$; los dos valores de las incógnitas afectan, pues, la forma indeterminada.

Para asegurarnos de que son aún en este caso, la fiel expresión de las ecuaciones propuestas, introduzcamos en las ecuaciones dadas la hipótesis

$$a\,b' - b\,a' = 0;\ K\,b' - bK' = 0;\ \text{ó sea } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{K}{K'}.$$

que nos dá, llamando m, á la razón de esta serie

$$a = m\,a';\ b = m\,b';\ K = m\,K'.$$

que sustituídos en la primera de las ecuaciones dadas la reducen á

$$m\,a'\,x + m\,b'\,y = m\,K';\ \text{es decir, } a'\,x + b'\,y = K'$$

luego el sistema dado queda reducido á una ecuación con dos incógnitas, que nos indica: 1.º *que siempre que el* *valor de una incógnita se presente bajo la forma* $\frac{0}{0}$, *la otra afectará la misma forma;* y 2.° *que el sistema propuesto, es indeterminado.*

* 87. *Escolios.* 1.° Si desaparece una de las incógnitas, entónces la conclusión anterior no es aplicable á este caso.

Así de $a = 0$; $a' = 0$; resulta

$$x = \infty;\ y = \frac{0}{0}$$

y las ecuaciones (1) se convierten en

$$b\,y = \mathrm{K};\quad b'\,y = \mathrm{K}';$$

que resultan incompatibles toda vez que $\mathrm{K}\,b' - b\,\mathrm{K}'$ no es cero, puesto que $x = \infty$.

2.° Si $a = 0$; $a' = 0$; y $\mathrm{K}\,b' - b\,\mathrm{K}' = 0$; los dos valores de las incógnitas se reducen á $\frac{0}{0}$; y sin embargo, el valor de y no es indeterminado; porque de $\mathrm{K}b' - b\mathrm{K}' = 0$; resulta $\mathrm{K}' = \frac{\mathrm{K}\,b'}{b}$; que sustituído en el valor de y nos dá

$$y = \frac{\mathrm{K}\,(a\,b' - b\,a')}{b\,(a\,b' - b\,a')} = \frac{\mathrm{K}}{b}$$

* 88. Las mismas consideraciones, aplicadas á un sistema de m ecuaciones con m incógnitas, nos llevarían á distinguir los dos casos que pueden ocurrir: Que anulándose el denominador común de los valores de las m incógnitas; los numeradores no se reduzcan á cero; ó que los numeradores se reduzcan también á cero.

En el primer caso, las ecuaciones propuestas son *incompatibles;* en el segundo, sería preciso introducir en las ecuaciones propuestas la hipótesis que haya reducido los valores de las incógnitas á la forma $\frac{0}{0}$ y resolverlas por los métodos de eliminación conocidos. *Si llegamos á obtener una ecuacion idéntica, deduciremos que el sistema* *propuesto es indeterminado; y si llegamos á una ecuación absurda, las ecuaciones dadas serán incompatibles.*

LXXV.

Sistemas de ecuaciones de primer grado con más ecuaciones que incógnitas.

89. Los problemas que originan un sistema de más ecuaciones que incógnitas se llaman *más que determinados*, pues contienen más condiciones de las precisas para determinar las incógnitas. Son en general imposibles.

Para resolver un sistema de m + n *ecuaciones con* m *incógnitas, se hallan los valores de las* m *incógnitas entre* m *cualesquiera de las ecuaciones propuestas, y estos valores sustituídos en las* n *ecuaciones restantes, satisfarán ó no satisfarán á dichas ecuaciones. En el primer caso, el sistema es posible; en el segundo es imposible, es decir, que las ecuaciones dadas son incompatibles.*

Si las $m+n$ ecuciones propuestas, tuvieran n coeficientes indeterminados, la sustitución anterior nos determinaría un sistema de n ecuaciones con estas n incógnitas; que resuelto, nos indicaría las condiciones que habían de cumplir sus coeficientes, para que el sistema sea posible. Por esta razón, esasecuaciones se llaman *ecuaciones de condición.*

EJEMPLO. Sea el sistema,

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= 20 \\ x - by &= 6 \\ xy &= 4 \end{aligned}\right\} \text{de tres ecuaciones con dos incógnitas.}$$

Tomo las dos primeras ecuaciones con dos incógnitas, y me dán;

$$x = 6 + b\,y; \qquad 6\,a + a\,b\,y + b\,y = 20;$$

$$y = \frac{20 - 6\,a}{a\,b + b};$$

$$x = 6 + \frac{20\,b - 6\,a\,b}{a\,b + b} \quad ó \quad x = \frac{26\,b}{a\,b + b} = \frac{26}{a + 1}.$$

Estos valores de x é y sustituídos en la tercera ecuación, nos conducen á la *ecuación de condición*

$$a^2\,b + 2\,a\,b + 39\,a + b = 130,$$

que expresa las relaciones que deben ligar á los coeficientes a y b, para que el sistema dado sea posible.

Se pueden dar en esta ecuación valores arbitrarios á a ó b, y determinar así el valor de la otra. Si hacemos $a = 1$, resulta $b = 22,75$ y estos valores sustituídos en las ecuaciones propuestas, nos darán un sistema compatible, en el que sacando los valores de x é y y sustituidos en la tercera ecuación la convertirán en una identidad.

LXXVI.

Sistemas de ecuaciones de primer grado con menos ecuaciones que incógnitas,

90. Los sistemas de menos ecuaciones que incógnitas son *indeterminados*. Si suponemos un sistema de m ecuaciones con $m + n$ incógnitas, podremos deducir de ellos los valores de m incógnitas, que reemplazados en las ecuaciones propuestas las convierten en identidades, independientemente del valor de las otras n incógnitas.

Así, pues, dando á éstas valores arbitrarios, resultaran para las otras m incógnitas valores que satisfarán al sistema dado. El sistema tiene, pues, un sin fin de soluciones.

Ejemplo. Sea, por ejemplo, el caso más sencillo una ecuación con dos incógnitas.

$$2x + 5y = 15; \quad \text{de donde} \quad x = \frac{15-5y}{2}$$

Dando á y los valores 0, 1, 2, 3. 4.......
resultarán para x los valores 7, 5; 5; 2, 5; 0;—2,5....

91. Siempre que un sistema contenga menos ecuaciones que incógnitas, la eliminación sucesiva de estas nos conducirá, por fin, á una ecuación con dos ó más incógnitas que admite una infinidad de soluciones, y á cada una de estas soluciones corresponde otra solución del sistema propuesto.

Sin embargo, estas soluciones pueden limitarse, llegando á hacer imposible el sistema en algunos casos, si se impone la condición de que los valores de las incógnitas sean *enteros*, y todavía más si se exige también que sean *positivos*.

En la ecuación anterior, solo existen dos soluciones enteras y positivas,

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} y = 3 \\ x = 0 \end{array}$$

La determinación de las soluciones enteras y positivas de un sistema indeterminado forma el objeto del *análisis indeterminado*.

LXXVII.

Análisis indeterminado de primer grado.

* 92. Hemos indicado que la determinación de las

soluciones enteras y positivas de un sistema de más incógnitas que ecuaciones constituye el objeto del análisis indeterminado. Nosotros vamos á considerar tan solo el caso más sencillo, ó sea *la resolución en números enteros de una ecuación de primer grado*, con dos incógnitas.

* 93. La forma general de la ecuación de primer grado con dos incógnitas es

$$Ax + By = K$$

en que A, B y K representan números enteros.

Desde luego podemos suponer que A, B y K son primos entre sí; pues, si tuvieran algún factor común, comenzaríamos por simplificar la ecuación, dividiendo sus dos miembros por dicho factor.

Ahora bien, puede suceder que dos de estas tres cantidades tengan un factor común. Llamemos d al maximo común divisor, por ejemplo de A y B. Dividiendo por d los dos miembros de esta ecuación, resultará

$$A'x + B'y = \frac{K}{d};$$

ecuación que no puede ser satisfecha por ningún sistema de valores enteros de x é y, puesto que A' y B' son enteros, y $\frac{K}{d}$ no lo es.

Lo que nos dice que *para que una ecuación con dos incógnitas admita soluciones enteras, es preciso que el máximo común divisor de sus coeficientes divida al término conocido.*

* 94. Supongamos ahora que uno de los coeficientes A, por efemplo, tenga un factor d común con K; dividiendo por d los dos miembros de la ecuación dada, resultaría

$$A'x + \frac{By}{d} = K';$$

en que $\frac{By}{d}$ tiene que ser entero; y, como B y d son primos entre sí, y tendrá que ser múltiplo de d; luego tendrá la forma $d\,y'$, y la ecuación será

$$A'x + B\,y' = K';$$

ecuación que aún podrá simplificarse si B y K' no son primos entre sí.

Lo que nos dice que, en todos los casos, toda ecuación indeterminada puede reducirse á la forma

$$a\,x + b\,y = K \quad (1)$$

en que a, b y K *sean primos entre sí dos á dos.*

* 95. Si en esta ecuación uno de los coeficientes a, por ejemplo, fuese igual á la unidad, deduciríamos

$$x = K - b\,y;$$

ecuación que, para cada valor entero de y, nos daría un valor entero para x.

Veamos, pues, como reducimos la resolución de la ecuación (1) á este caso.

Para esto supongamos que $a < b$; despejando la x tendremos

$$x = \frac{K - b\,y}{a}$$

y dividiendo b por a, llamando q al cociente y r al resto, resultará

$$b = a\,q + r;$$

que, sustituído en el valor de x, nos dará

$$x = \frac{K - a\,q\,y - r\,y}{a} = -q\,y + \frac{K - r\,y}{a}$$

y para que x sea entero, bastará que lo sea

$$\frac{K - r\,y}{a}$$

Supongamos, pues, $\dfrac{K - r\,y}{a} = t$, siendo t un entero cualquiera, lo que nos dá

$$x = -qy + t.$$

La resolución de la ecuación (1) queda reducida á la de la ecuación

$$\frac{K - ry}{a} = t \quad \text{ó sea} \quad ry + at = K$$

de menores coeficientes que la (1) y en la que podremos efectuar las simplificaciones posibles, según hemos hecho anteriormente.

Esta ecuación nos dá $y = \frac{K - at}{r}$; que efectuando la división de a por r; nos dará $a = q' r + r'$, de donde

$$y = \frac{K - q' r t - r' t}{r} = -q' t + \frac{K - r' t}{r}$$

que exige que $\frac{K - r' t}{r} = t'$, siendo t' entero, para que y lo sea.

Tendremos, pues, $y = -q' t + t'$.

Y queda la cuestión reducida á resolver la ecuación

$$\frac{K - r' t}{r} = t'; \quad \text{ó sea} \quad r' t + r t' = K$$

de donde

$$t = \frac{K - r t'}{r'}; \quad \text{y haciendo} \quad r = r' q'' + r''$$

tendremos

$$t = \frac{K - r' q'' t' - r'' t'}{r'} = -q'' t' + \frac{K - r'' t'}{r'}$$

y para que t sea entero, precisará que $\frac{K - r'' t'}{r'} = t''$; lo que nos dá $t = -q'' t' + t''$. Y queda por resolver la ecuación

$$\frac{K - r'' t'}{r'} = t''; \quad \text{ó sea} \quad r'' t' + r' t'' = K$$

de coeficientes más sencillos que las anteriores.

Basta observar lo que llevamos dicho para conocer que los coeficientes de las diferentes incógnitas, en las ecuacio, nes sucesivas, son los restos que hubiéramos obtenido al hallar el m. c. d. de a y b; y puesto que son primos entre sí, habremos de llegar al resto 1. Si, pues, suponemos que r'' sea este resto, la última ecuación hallada nos dará;

$$t' = \mathrm{K} - r' t''$$

que sustituído en el valor de t; y estos en los de y y x nos darán para estas incógnitas valores que serán *funciones enteras* de la indeterminada t'', con lo que quedará resuelto el problema.

Ejemplo. Resolver en números enteros la ecuación

$$145\, x + 121\, y = 49$$

* 96. Si representamos por $x = v$ é $y = s$, una solución entera de la ecuación $a\, x + b\, y = \mathrm{K}$; tendremos $a\, v + b\, s = \mathrm{K}$ y restando ordenadamente estas dos ecua, ciones

$$a\,(x - v) + b\,(y - s) = 0;$$

de donde

$$x - v = - \frac{b\,(y - s)}{a};$$

y siendo $x - v$ un número entero $\frac{b\,(y - s)}{a}$ también lo será; y como b es primo con a, a será divisor de $y - s$; luego $y - s = a\, c$, siendo c un entero cualquiera; y, por tanto,

$$(2) \quad y = s + a\, c; \qquad x = v - b\, c;$$

y, como á c podemos darle cualquier valor entero positivo ó negativo, las fórmulas anteriores se convertirán en

$$y = s \pm a\, c; \qquad x = v \mp b\, c$$

Si ahora hacemos

$$c = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

los valores de x é y, formarán las dos progresiones

$$\div \ldots, s-3a, s-2a, s-a, s, s+a, s+2a, s+3a, \ldots$$

$$\div \ldots, v+3b, v+2b, v+b, v, v-b, v-2b, v-3b, \ldots$$

que nos dicen, *que las soluciones enteras de la ecuación* a x + b y = K *son los términos correspondientes de dos progresiones por diferencia, tales que la razón es el coeficiente de* y *para los valores de* x, *con su signo ó con signo contrario; y el coeficiente de* x *para los valores de* y *con signo cambiado.*

* 97. Las fórmulas $\begin{cases} x = v + b\,c \\ y = s - a\,c \end{cases}$ nos determinan todas las soluciones enteras de la ecuación (1); pero, si queremos hallar las soluciones enteras y positivas, forzoso será prescindir de los valores de c que nos den para x é y valores negativos.

Para esto basta observar que siempre podemos suponer que a es positivo porque sino lo fuera cambiaríamos los signos á la ecuación.

Puede, pues, ocurrir que b sea positivo ó negativo.

Si $b > 0$, para que x é y lo sean, bastará que

$$v + b\,c > 0; \quad \text{y} \quad s - a\,c > 0;$$

de donde $$c > -\frac{v}{b} \quad \text{y} \quad c < \frac{s}{a};$$

así pues, dando á c todos los valores enteros comprendidos entre estos límites, resultarán para x é y todos los valores enteros y positivos que satisfacen á la ecuación propuesta. Esta série de valores es limitada y hasta la ecuación puede no tener. en algún caso, ninguna solución positiva

Si $b < 0$, poniendo de manifiesto el signo de b, resultará

$$v - b\,c > 0; \quad s - a\,c > 0;$$

lo que nos dá

$$c < \frac{v}{b} \quad \text{y} \quad c < \frac{s}{a}$$

y, por tanto, todos los valores de c menores que el menor de estos dos límites, nos darán para x é y valores enteros y positivos; y, en este caso, es evidente que el número de soluciones es ilimitado.

Problemas. 1.º Hallar un número que dividido por 8 dé de resto 5; y dividido por 11 dé 4 de resto.

2.º Un aldeano lleva al mercado un número de huevos mayor que 100 y menor que 200; si los vende por docenas le sobran 10; y si los vende por quincenas le sobran 4; ¿cuántos huevos lleva?

3.º Un niño tiene más de 100 soldados de plomo y menos de 400; si los forma en filas de 13, le sobran 9; y si en filas de 17, le quedan 14; ¿cuántos soldados tiene? *

PROBLEMAS DE 1.^{er} GRADO.

I. Un hombre deja dispuesto en su testamento que se repartan 1260 pesetas entre su mujer y su hijo, dando á la primera tantas monedas de 25 pesetas como al segundo de 5; ¿cuánto corresponde á cada uno?

II. Entre dos amigos reunen 56 pesetas; el dinero del uno es los $\frac{3}{5}$ del otro ¿cuánto tiene cada uno?

III. Dos amigos desean comprar una bicicleta; el uno solo tiene los $\frac{2}{5}$ de su importe; el otro los $\frac{2}{3}$; y reuniendo el dinero de ambos, les sobran 100 pesetas ¿cuánto cuesta?

IV. Cuál es el número que dividido por 15 y multiplicado el cociente por 4 produce 84?

V. Un padre deja 2240 pesetas, á repartir entre sus tres hijos, de modo que al segundo le correspondan 120 más que al primero; y al tercero 250 menos que al segundo ¿cuánto corresponde a cada uno?

VI. Para pasar unos dias fuera de su casa lleva un viajero 378 pesetas y regresa con la quinta parte de lo que ha gastado ¿cuánto importa el gasto?

VII. Un agente de policía persigue á un ladrón escapado hace 7 dias y que anda 35 Km. por día, mientras el agente recorre 84 ¿cuántos dias tardará en alcanzarle?

VIII. Un galgo persigue á una liebre que le lleva 50 saltos de ventaja; el galgo da 5 saltos mientras la liebre da 6, pero 7 saltos del galgo equivalen á 9 de la liebre.

¿cuántos saltos dará la liebre hasta que la alcance el galgo?

IX. Un tonel de vino tiene tres llaves; la 1.ª le vacía en 2 horas; la 2.ª en 3, y la 3.ª en 6 ¿cuánto tardarán en vaciarle las tres á la vez?

X. Un empleado gasta 2000 pesetas al año. Si tuviera doble sueldo ahorraría el doble de lo que ahora le falta para cubrir todas sus atenciones. ¿Qué sueldo tiene?

XI Tres amigos se reparten un premio de lotería; al 1.º le tocan 500 pesetas, más la mitad del resto; al 2.º 1000 más la tercera parte del resto y al 3.º le corresponden 1500 pesetas ¿cuánto importa el premio?

XII. Un padre dispone en su testamento que su fortuna se reparta entre sus hijos del siguiente modo: al mayor 1000 pesetas, más la décima parte del resto; al 2.º 2000 pesetas, más la décima parte del resto; al 3.º 3000 pesetas, más la décima parte del resto, y así sucesivamente. Hechas las partes resulta la misma cantidad para todos los hijos. ¿Cuánto importa la herencia y cuántos son los hijos?

XIII. Un niño quiere formar en cuadro sus soldados y le resultan 13 sobrantes; añade uno en cada lado y le faltan 12 ¿cuántos soldados tiene?

XIV. Un comerciante aumenta cada año su capital en un tercio; al fin del año separa mil pesetas para sus gastos, y al terminar el tercer año, después de separar las mil pesetas de costumbre, ha duplicado el capital ¿cuál era éste?

XV. Un padre reparte unos caramelos entre sus hijos de la siguiente manera: al mayor la mitad de los caramelos menos 4; al 2.º la mitad del resto menos 4; al 3.º la mitad del resto menos 4, y al último los 12 restantes ¿cuántos caramelos había?

XVI. Una aldeana lleva una cesta de huevos, que se propone vender á 6 céntimos cada uno; pero se la rompen 5 en el camino y, echando la cuenta, resulta que tiene que venderlos á 7 céntimos para sacar el dinero que se propuso ¿cuántos huevos llevaba?

XVII. Hallar un número cuyo producto por 5 se diferencie de 75, en tanto cuanto falta á dicho número para igualar á 75.

XVIII. Un relojero quiere rifar un reloj; si vende los billetes á 2 pesetas, pierde 25 pesetas del precio del reloj; y si los vende á 3 gana 35; ¿cuántos eran los billetes y cuál el precio del reloj?

XIX. Un comerciante compra una pieza de paño á 23 pesetas los 2 metros y lo vende á 40 pesetas los 3 metros, ganando de esa suerte 44 pesetas; ¿cuántos metros tenía la pieza?

XX. Un comerciante compra 31 metros de paño por 520 pesetas; 5^m eran de paño negro; 11^m de paño encarnado, y 15^m de paño verde. El metro de paño verde cuesta cinco pesetas más que el encarnado y éste cuatro más que el negro. ¿Cuál es el precio de cada uno?

XXI. Se ha comprado paño á 12 pesetas metro y tela á 5, y se han pagado 257 pesetas; si el paño hubiera costado al precio de la tela, y la tela al precio del paño, hubiera costado 355 pesetas ¿Cuántos metros hay de paño y cuántos de tela?

XXII: Un amigo dice á otro: dame 4 pesetas y tendremos el mismo dinero; y replica el 2.°, dámelas tú, y tendré el doble de lo que llevas. ¿Cuánto tiene cada uno?

XXIII. Hallar dos números tales que el duplo del primero, más el triple del segundo sea 51; y que el triplo del primero más el doble del segundo, sea 59.

XXIV. Un fabricante de harinas tiene dos montones tales que los $\frac{3}{4}$ del primero pesan 15 Kg. menos que los $\frac{2}{3}$ del segundo; y los $\frac{2}{3}$ del primero equivalen á los $\frac{5}{9}$ del segundo ¿cuánto pesa cada uno?

XXV. Hallar dos números cuya suma es 14 y la diferencia de sus cuadrados 56.

XXVI. Para pagar 123 pesetas se han entregado 39 monedas de cinco y de dos pesetas ¿cuántas se han dado de cada una?

XXVII. Encontrar dos números tales que su suma, su diferencia y su producto sean entre sí como los números 3, 2 y 5.

XXVIII. Un empleado gasta la mitad del sueldo en comer, la cuarta parte en casa y vestir, la duodécima parte en gastos extraordinarios, ahorra al año mil pesetas ¿qué sueldo tiene?

XXIX. Una viuda con cuatro hijos tiene que repartir 20000 pesetas que hereda de su marido; según el testamento cada hija debe percibir el doble que cada hijo, y la viuda una suma igual á la de las dos hijas ¿cuánto corresponde á cada uno?

XXX. Cinco jugadores han perdido 177 pesetas 50 céntimos. La pérdida del 2.º excede en 5 pesetas al triplo de la pérdida del 1.º; la del 3.º es igual al doble de la del 2.º menos $2\frac{1}{2}$ pesetas; el 4.º ha perdido $2\frac{1}{4}$ pesetas menos que el 1.º y el 2.º juntos; y el 5.º el duplo del 4.º menos $3\frac{1}{2}$ pesetas. ¿Cuánto ha perdido cada uno?

XXXI. Dos personas juegan al villar á peseta la partida; antes de empezar, la 1.ª tenía 42 pesetas y la 2.ª 24;

al cabo de un cierto número de partidas, el 1.° tiene cinco veces lo que resta al 2.° ¿Cuántas partidas ha ganado más que éste?

XXXII. Decid á cualquiera que piense un número, después que le multiplique por 7, que añada 3 al producto, que tome la mitad del resultado y que reste 4 del cociente. Suponed que os dice que el resto es 15 ¿Cuál es el número?

XXXIII. Un maestro propone á sus discípulos que adivinen el número que ha pensado, y les dice: multiplicad este número por 5 y restando del producto 24, después dividiendo el resto por 6 y añadiendo 13 al cociente, encontrareis el número que he pensado. ¿Cuál es ese número?

XXXIV. Dos móviles salen en la misma dirección; el 2.° ocho horas después que el 1.° y su velocidad es á la del 1.° como 4 á 5; ¿Cuántas horas tardará el 2.° en alcanzar al 1.°?

XXXV. Un móvil anda 70 Km. en 5h; ocho horas después se hace salir, para alcanzarle, otro que anda 50 Km. en 3h. ¿En cuánto tiempo le alcanzará?

XXXVI. Una persona coloca dos capitales, uno de 5500 pesetas al 4 por $^0/_0$; y $5^1/_2$ años después otro de 7500 pesetas al 5 por $^0/_0$. ¿En cuánto tiempo producirán el mismo interés los dos capitales?

XXXVII. Teniendo 45 Kg. de plata cuya ley es 0,900; ¿Cuánto cobre habrá que añadir para que la ley sea de 0,750?

XXXVIII. Una persona quiere comprar una casa y decide reclamar á cada uno de sus deudores una suma igual para reunir su importe. Pidiendo á cada uno 1590 pesetas le faltan aún 4000; y si pidiera 1800 á cada uno le sobrarían 5000; ¿Cuántos son los deudores, el precio de la casa y la suma que debe pedir á cada uno?

XXXIX. Una persona tiene dinero en los dos bolsillos del chaleco; si pone 3 pesetas en el de la izquierda, tendrá lo mismo que en el de la derecha; mientras que si las pone en el de la derecha, tendrá doble que en el de la izquierda ¿cuánto tiene en cada uno?

XL. Un prestamista pide 5000 pesetas á cierto tanto por ciento para prestar 12000 á un tanto más elevado, y gana en esta operación 710 pesetas. Otra vez, en idénticas condiciones toma 7000 para prestar 18000 y gana 1090. ¿A qué tanto toma y á qué tanto presta?

XLI. La corona de Hieron, rey de Siracusa, pesaba 20 libras. Arquímedes halló que perdía $1\,^1/_4$ libras sumergida en el agua, suponiendo que no tenía más que oro y plata, cuyos pesos específicos son 19,64 y 10,5 ¿cuánto oro y cuánta plata entraba en la corona?

XLII. Preguntado uno qué edad tenía, respondió: mi edad y la de mi abuelo suman 84 años; la de mi padre y la de mi abuelo 115, y la mía y la de mi padre 59. ¿Cuál es la edad de cada uno?

XLIII. Hallar tres números tales que si se restan 5 unidades del 2.º y se añaden al 1.º, la razón de la suma á la diferencia, sea $\frac{4}{5}$; que si restamos los 5 al 3.º para añadirlos al 2.º, la razón de éste á aquél, sea $\frac{7}{8}$; y que si los 5 que se restan al 3.º se añaden al 1.º, su razón á aquél, sea $\frac{1}{2}$.

XLIV. Tres amigos almuerzan juntos y al pedir la cuenta ninguno tiene bastante para pagar por sí solo. Al 1.º le falta la mitad de lo que tiene el 3.º; al 2.º la octava parte de lo que lleva el 1.º, y al 3.º, que tiene 9 pesetas, la mitad de lo que tiene el 2.º ¿Cuánto importa el almuerzo y cuánto dinero tiene cada uno?

XLV. Un platero tiene tres lingotes de plata de diferente ley, de 0,900; de 0,800, y de 0,720. Haciendo una aleación de los dos primeros lingotes la ley es de 0,840; si se hace del 1.º y 3.º es de 0,780; los tres lingotes pesan 45 Kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

XLVI. Se buscan tres albañiles para hacer una obra: los dos primeros podrían hacerla en 10 días; el 1.º y 3.º en 12; y el 2.º y el 3.º en 20. ¿Cuánto tardarían en hacerla cada uno y cuánto los tres juntos?

XLVII. A un platero le entregan tres lingotes de oro, plata y cobre; el 1.º contiene 5 onzas de oro, 15 de plata y 30 de cobre; el 2.º 20 onzas de oro, 28 de plata y 48 de cobre, y el 3.º 12 onzas de oro, 39 de plata y 24 de cobre, para que obtenga un lingote que contenga 10 onzas de oro, 23 de plata y 26 de cobre, ¿cuánto tendrá que tomar de cada lingote?

XLIII. Hallar un número de cuatro cifras tal: 1.º Que la suma de sus cifras sea 17; 2.º que la cifra de los millares exceda en 1 á la suma de las otras tres cifras; 3.º que la suma de las cifras de las decenas y centenas sea triple de la de las unidades; y 4.º que restando de este número 6633 resulte el mismo número invertido.

XLIX. Tres trabajadores se encuentran en un derribo 96 duros, y para repartirlos á partes iguales el 1.º dá á cada uno de los otros dos tanto como cada uno de ellos se ha encontrado; el 2.º dá al 1.º y al 3.º tanto como tienen después de esa distribución; y el 3.º, por fin, dá á cada uno de los otros dos tanto como tienen ¿cuánto se encontró cada uno?

L. Tres amigos se ponen á jugar conviniendo en que el que pierda pague á los otros dos tanto como tenga cada uno; juegan tres partidas y pierde cada uno una, y al final resulta que todos tienen la misma cantidad, 8 pesetas ¿Con cuánto se puso á jugar cada uno?

POTENCIAS Y RAÍCES.

LXXVIII.

Potencias y raíces de los monomios.

98. Teniendo en cuenta la significación de potencia, y las reglas de multiplicación de monomios, se infiere que

Para elevar un monomio á una potencia, se eleva el coeficiente á dicha potencia, y se multiplican los exponentes de las letras por el de la potencia. La potencia será positiva si es de grado par, y tendrá el mismo signo del monomio, si es de grado impar.

$$(\pm a^3 b^5 c)^2 = 4 a^6 b^{10} c^2;$$

$$(\pm 2 a^3 b^5 c)^3 = \pm 8 a^9 b^{15} c^3.$$

99. *Para elevar una fracción á una potencia, se elevan sus dos términos á dicha potencia.*

$$\left(\pm \frac{3 a^2 b}{4 d}\right)^2 = \frac{9 a^4 b^2}{16 d^2}; \quad \left(\pm \frac{3 a^2 b}{4 d}\right)^3 = \pm \frac{27 a^6 b^3}{64 d^3}.$$

100. Del mismo modo, del concepto de raíz de una cantidad y de los dos principios anteriores, se deduce que

Para extraer la raíz de un monomio entero, se extrae la raíz del coeficiente y se dividen los exponentes de las letras por el índice del radical. La raíz llevará el doble signo $\pm$ si el índice del radical es par, y el mismo signo del monomio si el índice es impar,

$$\sqrt{4a^2b^4}=\pm 2ab^2;\ \sqrt[3]{27a^3b^6}=3ab^2;\ \sqrt[3]{-27a^3b^6}=-3ab^2.$$

101. *La raíz de una fracción es igual á la raíz de su numerador partida por la raíz de su denominador,*

$$\sqrt{\frac{4a^2}{9b^6}}=\pm\frac{2a}{3b^2};\ \sqrt[3]{\frac{27a^3}{64b^6c^3}}=\frac{3a}{4b^2c};\ \sqrt[3]{-\frac{27a^3}{64b^6c^3}}=-\frac{3a}{4b^2c}$$

102. De lo expuesto se infiere que las condiciones necesarias y suficientes para que un monomio entero sea potencia perfecta de un grado dado son 1.ª que su coeficiente sea potencia perfecta de dicho grado; 2.ª que los exponentes de todas sus letras sean múltiplos del índice de la raíz, y 3.ª que el monomio sea positivo, si la raíz es de grado par.

Para que una fracción sea potencia perfecta de un grado dado, bastará que lo sean sus dos términos.

103. Las raíces de grado impar de cantidades positivas ó negativas tienen el signo de esas cantidades. Las raíces de grado par de cantidades positivas, tienen el doble signo $\pm$, por la incertidumbre de la cantidad que las origina, puesto que las potencias de grado par de cantidades positivas ó negativas, son siempre positivas. Por último, las raíces de grado par de cantidades negativas, no pueden ser positivas ni negativas, pues toda potencia de grado par es esencialmente positiva.

Por esta razón, estas raíces se llaman *imaginarias*, para distinguirlas de las demás que se denominan *reales*.

LXXIX.

Combinaciones.

* 104. La formación de las potencias de los polinomios se funda en la teoría de las combinaciones.

Si varios objetos se agrupan dos á dos, tres á tres, etc. resulta un número determinado de agrupaciones. En esta teoría se trata tan solo de hallar el número de grupos, prescindiendo del valor de los objetos

* 105. Coordinaciones. *Se llaman coordinaciones, los diversos grupos que pueden formarse con varios objetos, del mismo número de estos; y que se diferencian bien en algún objeto, bien en el orden de su colocación.*

Las coordinaciones se llaman *binarias*, *ternarias*, *cuaternarias*, etc , según que los grupos son de dos, tres, cuatro, etc., objetos cada uno.

Sean los objetos $a, b\ c, d, e......$

Para formar las coordinaciones binarias, bastará colocar al lado de cada objeto, todos los demás uno á uno.

Luego las coordinaciones binarias son:

$$\begin{array}{l} ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ldots.. \\ ba,\ bc,\ bd,\ be,\ldots.. \\ ca,\ cb,\ cd,\ ce,\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si los objetos son m, cada uno producirá $m—1$ coordinaciones, y los m objetos producirán $m\ (m—1)$ coordinaciones binarias.

Las coordinaciones ternarias se formarán colocando al lado de cada coordinación binaria, todas las letras que no entran en ella. Es decir, que serán

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ abe,\ldots.. \\ acb,\ acd,\ ace,\ldots.. \\ adb,\ adc,\ ade,\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Luego cada cooordinación binaria producirá $(m-2)$ coordinaciones ternarias, y las $m(m-1)$ coordinaciones binarias producirán $m(m-1)(m-2)$ coordinaciones ternarias.

Por consiguiente, el número de coordinaciones de m letras tomadas n á n será el producto de los factores consecutivos.

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots \text{ hasta } m-(n-1)=m-n+1.$$

Es decir, que son

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1.)$$

* 106. Permutaciones. *Se llaman permutaciones, las coordinaciones en que entran todos los objetos, y, por consiguiente, no se diferencian más que en el orden de colocación*

Un solo objeto dará 1 permutación.

Dos objetos a y b, darán las dos permutaciones $a\,b$ y $b\,a$, es decir, 1×2.

Tres objetos se permutarán colocando al lado de cada uno las permutaciones de los otros dos. Serán, pues,

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Como los objetos son 3, y al lado de cada uno se colocan las permutaciones de los otros dos, que son 1×2; resultarán $1 \times 2 \times 3$ permutaciones ternarias.

Y, en general, las permutaciones de n objetos, serán

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n.$$

Esta fórmula puede deducirse de la de las permutaciones con solo hacer $m=n$ en aquella, puesto que entran todos los objetos.

* 107. Combinaciones. *Se llaman combinaciones ó productos diferentes las coordinaciones que se diferencian en algún objeto.*

De esta definición se deduce que las coordinaciones de m objetos, tomados n á n, contendrán á cada combinación de n objetos, tantas veces como permutaciones se pueden formar con los n objetos de la misma combinación.

Luego, para tener las combinaciones de m objetos, tomados n á n bastará dividir el número de coordinaciones de m objetos, tomados n á n, por el número de permutaciones de n objetos.

Así la fórmula de las combinaciones es

$$\frac{m(m-1)(m-2).....(m-n+1}{1, 2, 3,.....n}.$$

Haciendo en esta fórmula $n = 1, 2, 3.....$ tendremos el número de combinaciones binarias, ternarias, etc., de lol m objetos.

* 108. Para formar las combinaciones binarias, se coloca al lado de cada objeto cada uno de los siguientes. De suerte, que serán,

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae,\ldots\ldots \\ & bc, & bd, & be,\ldots\ldots \\ & & cd, & ce,\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & & \end{array} \quad \text{Su número es } \frac{m(m-1)}{1\times2}$$

Las combinaciones ternarias se forman colocando al lado de cada objeto, cada una de las combinaciones binarias de los objetos siguientes:

$$\begin{array}{lll} abc, & abd, & abe,\ldots\ldots \\ & acd, & ace,\ldots\ldots \\ & & ade,\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} bcd, & bce,\ldots\ldots \\ & bde,\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Su número es $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}$

Del mismo modo formaríamos todas las demás.

* 109. *Las combinaciones de* m *objetos tomados* n *á* n, *son iguales en número á las de* m *objetos tomados* m—n *á* m—n.

En efecto, si de m letras se toman n para formar una combinación, quedarán $m-n$, que forman otra combinación. Luego habrá tantas de las primeras como de las segundas.

LXXX.

Binomio de Newtón.

* 110. La formación de las potencias de un binomio está reducida á una série de multiplicaciones sucesivas, pero se abrevia y facilita de modo extraordinario con la fórmula de Newtón, una de las más importantes del análisis.

* 111. Si se multiplican varios binomios

$$(x+a),\ (x+b),\ (x+c),$$

cuyos primeros términos son iguales, y los segundos distintos, obtendremos los siguientes productos:

$$(x+a)(x+b) = \begin{array}{r|l} x^2 + a & x + ab \\ + b & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = \begin{array}{r|r|l} x^3 + a & x^2 + ab & x + abc \\ + b & + ac & \\ + c & + bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = \begin{array}{r|r|r|l} x^4 + a & x^3 + ab & x^2 + abc & x + abcd \\ + b & + ac & + abd & \\ + c & + ad & + acd & \\ + d & + bc & + bcd & \\ & + bd & & \\ & + cd & & \end{array}$$

que nos acusan á su simple inspección esta ley.

Si se multiplican varios binomios, cuyo primer término es el mismo y los segundos diferentes, el primer término del producto es el primer término de los binomios, con un exponente igual al número de factores binomios, y este exponente va disminuyendo en 1 *unidad en cada término,* *hasta llegar al último en que es cero. El coeficiente del primer término es la unidad; el del 2.º la suma de los segundos términos de los factores binomios; el del 3.º la suma de los productos binarios de estos segundos términos; el del 4.º la suma de los productos ternarios, y así sucesivamente hasta el último, que es el producto de los segundos términos de los factores.*

* 112. Falta ahora demostrar que esta ley es general. Si suponiendo que es cierta para un producto de m factores, demostramos que también lo es para $m+1$, la generalidad de la ley quedará demostrada.

Supongamos, pues, qne tenemos

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+u) = x^m + A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} + \ldots\ldots + U,$$

en que se supone que

$$A = a + b + c + \ldots\ldots + u;$$

$$B = a\,b + a\,c + b\,c + \ldots\ldots;\quad U = a\,b\,c\,\ldots\ldots\,u.$$

Multiplicando por otro factor binomio $x+k$ el producto obtenido, resultará:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+u)(x+k) =$$

$$x^{m+1} + \left.\begin{matrix}A\\+k\end{matrix}\right|\, x^m + \left.\begin{matrix}B\\+Ak\end{matrix}\right|\, x^{m-1} + \ldots\ldots + k\,U.$$

En que el exponente de x en el primer término es $m+1$, igual al número de factores binomios, y disminuye en cada término una unidad hasta el último en que es cero, El coeficiente del primer término es la unidad, el del 2.º $A+k$, esto es, la suma de los segundos términos de los $m+1$ binomios; el del 3.º $B+A\,k$ y como B es la suma de los productos binarios de los m segundos términos de los factores y

$$A\,k = (a + b + c + \ldots\ldots u)\,k,$$

$B + A\,k$ será la suma de los productos binarios de los

$m+1$ segundos términos. Del mismo modo continuariamos, observando la conformidad de la ley, hasta llegar al último término k U, que evidentemente es el producto de todos los segundos términos de los factores.

Ahora bien, hemos visto que la ley es cierta para el caso de 4 factores; luego lo es para 5; siéndolo para 5, lo será para 6, etc. es decir, que la ley es general.

* 113. Demostrada esta ley, con independencia de los valores que puedan tener los segundos términos de los factores, es muy fácil deducir la fórmula del binomio.

Si suponemos $a = b = c = d = \ldots\ldots = u$, resultará

$$(x+a)^{m} = x^{m} \begin{array}{l|l|l} +a & x^{m-1}+a^{2} & x^{m-2}+\ldots\ldots+1\,a\,a\ldots\ldots \\ +a & \quad\quad +a^{2} & \\ +a & \quad\quad +a^{2} & \\ + & \quad\quad + & \\ \vdots & \quad\quad \vdots & \end{array}$$

ó sea

$$(x+a^{m} = x^{m} + max^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,a^{2}\,x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m}\,.$$

que es la fórmula del binomio de Newtón

* 114 Sus principales propiedades son las siguientes:

1.ª La potencia m de un binomio tiene $m+1$ términos, pues en el primero a tiene el exponente cero, y en el último m.

2.ª La suma de los exponentes de x y a en cada término es m.

3.ª El exponente de a en cada término es igual al número de términos que le anteceden; y el de x al de términos que le siguen.

4.ª Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales, pues el uno será el número de combinaciones de m objetos, tomados n á n; y el otro expresará el de m objetos, tomados $m-n$ á $m-n$ (109)

5.ª El coeficiente de cada término es el de su inmediato anterior multiplicado por el exponente de x, y dividido por el de a más la unidad.

6.ª Estas propiedades nos permiten formar desde luego un término cualquiera del binomio, sabiendo el lugar que ocupa; pues el $n+1$, por ejemplo, tiene n términos delante, luego su coeficiente será el número de combinaciones de m objetos tomados n á n, el exponente de a será n, y el de x, $m-n$. Este término es, por tanto,

$$\frac{m(m-1)(m-2).....(m-n+1)}{1\times2\times3\times.....\times n}\,a^n\,x^{m-n}$$

Esta expresión, llamada *término general*, permite formar todos los términos del binomio, haciendo en ella sucesivamente $n=1, 2, 3, \dots m$.

* 115. La propiedad 5.ª proporciona el siguiente medio de obtener inmediatamente la potencia de un binomio.

Para elevar un binomio á una potencia, se eleva su primer término á dicha potencia, y se tiene el primer término del desarrollo. En los sucesivos, se aumenta 1 *al exponente de* a *y se disminuye* 1 *al de* x. *Los coeficientes se forman multiplicando el del término inmediato anterior por el exponente de* x *en el mismo, y dividiendo por el de* a *aumentado en una unidad.*

Así se obtiene inmediatamente;

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$$

* 116. *Escolios.* 1.º Como los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales, basta calcular la mitad más uno de los términos.

2.º Cuando los dos términos del binomio son positivos, también lo son todos los del desarrollo.

Si uno es negativo y otro positivo, serán negativos solamente los términos del desarrollo que tengan potencias impares del término negativo.

Si los dos son negativos, todos los términos del desarrollo serán positivos si la potencia es par, y todos negativos si la potencia es impar.

3.º Haciendo en $(x+a)^m$, $x=a=1$, se obtiene el desarrollo de 2^m, que es precisamente la suma de los coeficientes de $(x + a)^m$.

4.° Haciendo $x = a = 1$ en la expresión $(x - a)^m$ se patentiza que la suma de los coeficientes de lugar par, es igual á la suma de los coeficientes de lugar impar en el desarrollo del binomio.

LXXXI.

Potencias de los polinomios.

* 117. La fórmula del binomio de Newtón no solo nos facilita el desarrollo de las potencias de un binomio, según hemos visto, sino que nos dá el medio de hallar el de las potencias de los polinomios,

Para esto basta considerar el polinomio como un binomio, cuya primera parte sea su primer término, y la segunda el conjunto de los demás. Se eleva este binomio á esa potencia, lo que nos conducirá á hallar las potencias de un polinomio que tiene un término menos que el propuesto. Se vuelve á considerar este como un binomio, y se obtiene otro polinomio con otro término menos, y así sucesivamente, hasta que solo tengamos que desarrollar potencias de binomios.

* 118. Aplicando esta regla al cuadrado de un polinomio

$$(a + b + c), \quad \text{se tiene}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 =$$
$$a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 +$$
$$2ab + 2ac + 2bc.$$

Que nos manifiesta que *el cuadrado de un polinomio es igual á la suma de los cuadrados de sus términos, más el duplo de la suma de sus productos binarios.*

* 119. Siendo la potencia de un polinomio un producto de factores iguales á dicho polinomio, resultará (26, 4.ª) *que el término de mayor exponente de la letra ordenatriz en el desarrollo de la potencia* m *de un polinomio, es sin reducción la potencia* m *del primer término del polinomio.*

LXXXII.

Raices de los polinomios.

* 120. Representemos el polinomio, cuya raíz queremos extraer por $A + B + C + \ldots\ldots$; y su raíz del grado m por $a + b + c + \ldots\ldots$ ordenados ambos con relación á las potencias de una misma letra. Tendremos,

$$A + B + C + \ldots\ldots = (a + b + c + \ldots\ldots)^m =$$
$$a^m + m\,a^{m-1}(b + c + \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$

y por consiguiente (119),

$$A = a^m\,;\ \text{de donde}\ a = \sqrt[m]{A}$$

Luego tendremos el primer término de la raiz, extrayendo la raíz del grado m del primer término del polinomio propuesto. Si restamos ahora a^m de los dos miembros de la igualdad primera, resulta

$$B + C + \ldots\ldots = m\,a^{m-1}(b + c + \ldots\ldots) + \ldots\ldots;$$

y como el primer término del segundo miembro es

$$m\,a^{m-1}\,b;\ B = m\,a^{m-1}\,b;\ \text{de donde}\ b = \frac{B}{m\,a^{m-1}}.$$

Luego el segundo término de la raiz es el cociente de dividir el segundo término del polinomio por m veces la potencia $m - 1$ del primer término de la raiz.

Considerando $(a + b + c.....)^m$ como un binomio cuyo primer término es $a + b$, la igualdad primitiva será,

$$A+B+C+.....=(a+b)^m + m(a+b)^{m-1}(c+d.....)+.....$$

y restando de ambos miembros $(a+b)^m$, llamando á la diferencia del primer miembro, ya ordenado también,

$$A' + B' + C' + ...$$

$$A' + B' + C' + ...= m(a+b)^{m-1}(c+d+.....)+.....$$

y, por tanto,

$$A' = m\,a^{m-1}c; \quad ó \quad c = \frac{A'}{m\,a^{m-1}}$$

que nos dice que el tercer término de la raiz es el cociente de dividir el primer término del resto por m veces la potencia $m - 1$ del primer término de la raiz.

Así continuaremos, empleando el mismo razonamiento, hasta determinar el último término de la raiz.

Luego para extraer la raiz del grado m de un polinomio, *se ordena, y se extrae la raiz del grado* m *de su primer término, con lo que se tendrá el primer término de la raiz; se divide el segundo término por* m *veces la potencia* m—1 *del primer término de la raiz, y tendremos el segundo término de la raiz. Y se continúa restando del polinomio la potencia* m *de la raiz hallada, y dividiendo el primer término del resto por* m *veces la potencia* m — 1 *del primer término de la raiz.*

* 121. De aquí se deduce que para que un polinomio sea potencia perfecta del grado m, es preciso: 1.° que su primero y último términos sean potencias perfectas de dicho grado; 2.° que el segundo término sea divisible por m veces la potencia $m - 1$ del primer término de la raíz; y 3.° que el primer término de cada resto sea divisible por dicho divisor.

* 122. Aplicando la regla anterior al caso particular de ser $m = 2$, nos dice que *para hallar la raíz cuadrada de un polinomio se ordena primeramente, y se extrae la raíz cuadrada de su primer término, lo que nos dará el primer término de la raíz. Los términos siguientes se*

hallan restando del polinomio dado el cuadrado de la raíz hallada, y dividiendo el primer término del resto por el duplo del primer término de la raíz.

* 123. De lo expuesto se deducen fácilmente las condiciones necesarias para que un polinomio sea cuadrado perfecto.

Conviene observar además: 1.º *que ningún binomio puede ser cuadrado perfecto*, pues el cuadrado de un monomio es otro monomio, y el cuadrado de un binomio es un trinomio irreducible.

2.º *Para que un trinomio sea cuadrado perfecto, es preciso que dos de sus términos lo sean, y el otro sea el duplo del producto de las raices cuadradas de aquellos,*

LXXXIII.

* 124. Se llama *cantidad radical, ó simplemente radical* la raíz indicada de cualquier cantidad.

Como las cantidades radicales pueden ser reales ó imaginarias, nos ocuparemos ahora tan solo de las primeras, y más tarde lo haremos de las segundas.

* 125. *La raíz de un producto es igual al producto de las raices del mismo grado de todos los factores.*

Digo que $\sqrt[m]{a\,b\,c} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$

En efecto,

$$\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}\right)^m =$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \left(\sqrt[m]{c}\right)^m = a\,b\,c$$

luego

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$$

es la raíz m del producto $a\,b\,c$.

* 126. *La raíz de un cociente es el cociente de las raices del mismo grado del dividendo y divisor.*

Digo que, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

En efecto, $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}$

luego $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ es la raíz del grado m de $\frac{a}{b}$

* 127. *La raíz de una potencia de una cantidad es igual á la misma potencia de la raíz de igual índice de esa cantidad.*

Digo que $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

En efecto,

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \ldots = \sqrt[m]{a\,a\,a \ldots} = \sqrt[m]{a^n}$$

* 128. *La raíz de una raíz de una cantidad es otra raíz de la misma cantidad, que tiene por índice el producto de los dos índices.*

Digo que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

En efecto, llamando α á $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, será

$$\alpha = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}; \quad \alpha^m = \sqrt[n]{a}; \quad \alpha^{mn} = a; \quad \text{y} \quad \alpha = \sqrt[mn]{a}$$

ó sea $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

que es lo que queriamos demostrar.

* 129. *El valor de una cantidad radical no varía, si se multiplican ó dividen por la misma cantidad el índice del radical y el exponente de la cantidad sub-radical.*

En efecto, evidentemente $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$,

luego $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n$;

y extrayendo la raíz del grado $m\,n$,

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$$

Este teorema permite *simplificar radicales, y reducir radicales á un índice cómun.*

* 130. *Para simplificar una cantidad radical, se dividen el índice y el exponente de la cantidad sub-radical por su máximo común divisor.*

Así, $\sqrt[6]{a^3\,b^6\,c^9} = \sqrt{a\,b^2\,c^3}$

* 131. *Para reducir radicales á un índice común, se simplifican, se halla el m. c. m. de los índices, y se multiplican el índice y el exponente de la cantidad sub-radical por los factores que faltan á su índice respectivo para componer dicho m. c. m.*

Si los radicales son

$$\sqrt[4]{a^2\,b^6}, \quad \sqrt[9]{a^6\,b^3} \quad \text{y} \quad \sqrt[12]{a^{10}\,b^4}$$

simplificados se reducen á

$$\sqrt{a\,b^3}, \quad \sqrt[3]{a^2\,b} \quad \text{y} \quad \sqrt[6]{a^5\,b^2}$$

el m. c. m. de los índices es 6; luego resultará

$$\sqrt[6]{a^3\,b^9}, \quad \sqrt[6]{a^4\,b^2} \quad \text{y} \quad \sqrt[6]{a^5\,b^2}$$

LXXXIV.

Cálculo de radicales reales.

* 132. *Se llaman radicales semejantes, los que tienen el mismo índice y la misma cantidad sub-radical, como*

$$7\sqrt[3]{a} \text{ y } 9\sqrt[3]{a}\,.$$

133. *Adición y sustracción.* Se efectúan por las mismas reglas dadas para las expresiones enteras; si resultan radicales semejantes se reducen.

134. *Multiplicación* Si los radicales tienen el mismo índice, se escribirá debajo del índice común (125) el producto de las cantidades sub radicales.

$$3\sqrt[3]{5ab} \times 2\sqrt[3]{6a^2b} \times \sqrt[3]{4ac} = 6\sqrt[3]{120a^4b^2c}$$

Si los radicales tienen diferente índice, se reducen á un índice común, y queda el caso reducido al anterior.

135. *División.* Si los radicales tienen el mismo índice, se escribe debajo del índice común (126) el cociente de las cantidades sub radicales.

$$\text{Pues } \frac{\sqrt[5]{3a^2b}}{\sqrt[5]{9a^2b^2}} = \sqrt[5]{\frac{3a^2b}{9a^2b^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3b}}.$$

Si tienen diferente índice, reducidos á un índice común, estaremos en el caso anterior.

136. *Elevación á potencias.* Para elevar una cantidad radical á una potencia. se eleva á dicha potencia la cantidad sub-radical.

Pues

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \ldots = \sqrt[m]{aaa\ldots} = \sqrt[m]{a^n}$$

Cuando el índice del radical es divisible por el exponente de la potencia, es preferible efectuar esa división

Así $\left(\sqrt[9]{a}\right)^3 = \sqrt[9]{a^3} = \sqrt[3]{a}$, conforme el enunciado.

137. Extracción de raices. *Para extraer una raíz de un radical, se multiplican los dos índices, y se deja la misma cantidad sub-radical.*

Así $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, según hemos demostrado (128).

Cuando el exponente de la cantidad sub-radical sea múltiplo del índice de la raíz, es preferible efectuar esta división.

Así $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3} = \sqrt[5]{a^2}$, conforme al enunciado.

Escolio. La igualdad $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, indica que se puede extraer la raíz de una cantidad, cuyo grado sea un número compuesto, extrayendo sucesivamente las raices del grado indicado por los factores de dicho índice.

Así $\sqrt[8]{a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$.

LXXXV.

Exponentes fraccionarios.

138. Hemos indicado que para extraer la raíz de un radical, cuando el exponente de la cantidad sub-radical

sea múltiplo del índice de la raíz, basta dividir el exponente por el índice.

Ahora bien, si el exponente no es divisible por el índice, la aplicación de esta regla nos conduce á la igualdad $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, que introduce en el cálculo las cantidades con exponentes fraccionarios, así como la división nos hizo considerar los exponentes negativos.

Dicho se está que, conforme indicamos entonces, en el concepto de potencia no cabe admitir los exponentes fraccionarios, como no tenían significación los exponentes negativos. Admitiremos, pues, aquellos, lo mismo que admitimos estos, como *símbolos* de las expresiones que representan, por lo mucho que facilitan y simplifican el cálculo.

Admitidas en el cálculo, en virtud de lo expuesto, las cantidades con exponentes fraccionarios, precisa ver á que reglas deben someterse.

Desde luego estableceremos que *estas cantidades se calculan por las mismas reglas que las que tienen exponentes enteros.*

* 139. *Adición y sustracción.* Como las reglas dadas para estas operaciones no afectan á los exponentes, dicho se está que les son aplicables.

* 140. *Multiplicación.* Digo que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

En efecto,

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} =$$

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

* 141. *División.* Digo que

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{p}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

En efecto,

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} =$$

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

* 142. *Elevación á potencias.* Voy á demostrar que

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}}$$

En efecto,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} =$$

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{qn}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}}$$

* 143. *Extracción de raices.* Digo que

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n} : p}$$

En efecto,

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[pn]{a^m} = a^{\frac{m}{pn}} = a^{\frac{m}{n} : p}$$

LXXXVI.

Cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado.

* 144. Hemos dicho que (102) se llaman *cantidades* imaginarias las raices de grado par de cantidades negativas.

Entre las cantidades imaginarias las más importantes son las de segundo grado, es decir, las raices cuadradas de cantidades negativas, y, por tanto, de las reglas para calcular estas es de lo que nos vamos á ocupar.

* 145. *Toda cantidad imaginaria de segundo grado, es igual á la raiz cuadrada del valor absoluto de la cantidad sub-radical, multiplicada por la raiz cuadrada de* -1.

En efecto, toda imaginaria de segundo grado puede expresarse por

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A \times -1} = \sqrt{A} \times \sqrt{-1},$$

conforme al enunciado.

* 146. Se llama *monomio imaginario* el producto de cualquier cantidad real por $\sqrt{-1}$. Su forma será, por consiguiente, $a\sqrt{-1}$.

Adición y sustracción. *Las sumas y diferencias de monomios imaginarios son también monomios imaginarios.*

$$\text{En efecto } a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} = (a+b)\sqrt{-1};$$

$$\text{y} \quad a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = (a-b)\sqrt{-1}.$$

Multiplicación y división. *Los productos y cocientes de monomios imaginarios son cantidades reales.*

Pues,

$$a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = ab(\sqrt{-1})^2 = ab \times -1 = -ab;$$

$$\text{y} \quad a\sqrt{-1} : b\sqrt{-1} = a : b.$$

Elevación á potencias. Como las potencias de los monomios imaginarios son el producto de las potencias de una cantidad real por las potencias de $\sqrt{-1}$, la naturaleza de estas determinará la de aquellas.

Examinemos, pues, las potencias de $\sqrt{-1}$.

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}; \quad (\sqrt{-1})^2 = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^3 = -1\sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = -1 \times -1 = +1.$$

Como para formar las potencias 5.ª, 6.ª, etc., hay necesidad de multiplicar la potencia cuarta por cada una de las anteriores, es claro, que se reproducen estos cuatro valores indefinidamente.

Lo que se expresa del siguiente modo:

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1; \quad (\sqrt{-1})^{4n+1} = \sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1; \quad (\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$$

lo que nos dice que *las potencias de grado par de los monomios imaginarios son cantidades reales; y las de grado impar, imaginarias.*

Extracción de raíces. *Las raíces de los monomios imaginarios son siempre imaginarias*, pues

$$\sqrt[n]{a\sqrt{-1}} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[2n]{-1};$$

y como $\sqrt[2n]{-1}$ es siempre una cantidad imaginaria, queda demostrado el principio.

* 147. Toda expresión de la forma $a + b\sqrt{-1}$, recibe el nombre de binomio imaginario. La suma de una cantidad real con una imaginaria es una cantidad imaginaria, pues si fuera una cantidad real, tal como c, de

$$a + b\sqrt{-1} = c, \quad \text{se deduciría} \quad b\sqrt{-1} = c - a,$$

lo que es absurdo.

La expresión $\sqrt{a^2 + b^2}$ se llama *módulo* de la imaginaria $a + b\sqrt{-1}$. Se llaman *imaginarias conjugadas*, las que solo difieren en el signo de $\sqrt{-1}$. Así la conjugada de

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{es} \quad a - b\sqrt{-1}.$$

Dos imaginarias conjugadas tienen el mismo módulo.

* 148. *La adición, sustracción, multiplicación y división de binomios imaginarios es, en general, otro binomio imaginario, pero también puede ser un monomio imaginario ó una cantidad real.*

En efecto,

1.º $(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$

Si $a+c=0$, la suma se convierte en monomio imaginario; y si $b+d=0$, resulta una cantidad real.

2.º $(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}$

Si $a-c=0$, resulta un monomio imaginario; si $b-d=0$, una cantidad real.

3.º $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=ac+bc\sqrt{-1}+$

$ad\sqrt{-1}-bd=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}$

que puede convertirse del mismo modo en monomio imaginario ó en una cantidad real.

4.º $$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}$$

en que sucede lo propio que en las expresiones anteriores.

* 149. *Para que un binomio imaginario sea cero, es necesario y suficiente que lo sea su módulo.*

Pues de

$a+b\sqrt{-1}=0$, resulta $a^2=-b^2$ ó $a^2+b^2=0$,

de donde $\sqrt{a^2+b^2}=0$; la recíproca es cierta.

* 150. *El módulo del producto de dos imaginarias es el producto de sus módulos.*

Pues el módulo del producto de las imaginarias (148, 3.º) antes citadas es

$$\sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} =$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}$$

conforme al enunciado.

* 151. *El módulo del cociente de dos imaginarias es el cociente de dividir los módulos del dividendo y divisor.*

Se deduce inmediatamente de la definición del cociente y del principio anterior.

* 152. *La condición necesaria y suficiente para que un producto de binomios imaginarios sea cero, es que lo sea uno de los factores.*

En efecto, si un factor imaginario es cero, su módulo lo será (149); y siendo cero este módulo, será cero el producto de los módulos de los factores dados. Y como este es el módulo del producto, resulta que el producto propuesto es cero; y no lo será en caso contrario.

LXXXVII.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

* 153. La ecuación de segundo grado, después de preparada, solo puede tener tres términos: uno con la segunda potencia de la incógnita, otro con la primera y un término conocido.

Su forma general será

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sin embargo, puede faltar el segundo ó el tercer término, y en este caso su forma es

$$ax^2 + c = 0; \quad ax^2 + bx = 0$$

La primera se llama ecuación *completa*; las últimas se denominan *incompletas*.

* 154. La resolución de las ecuaciones incompletas de segundo grado no puede ser más sencilla.

1.º Sea la ecuación

$$a\,x^2 + c = 0; \quad \text{que dá } a\,x^2 = -c;$$

de donde

$$x^2 = -\frac{c}{a} \text{ y, por último, } x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

2.º Sea ahora la ecuación

$$a\,x^2 + b\,x = 0; \quad \text{que se puede escribir } x\,(a\,x + b) = 0$$

y para que este producto sea cero, es preciso que

$$x = 0, \text{ ó } a\,x + b = 0, \text{ de donde } x = -\frac{b}{a}.$$

Escolio. Se omite el doble signo $\pm$ delante de x, pues los cuatro valores, á que dá lugar en ese caso el valor de la incógnita, son iguales dos á dos; de suerte que esta no tiene más que dos valores distintos.

* 155. Pasemos á resolver la ecuación completa

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0;$$

dividiendo por a los dos miembros, resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

y haciendo

$$\frac{b}{m} = m, \quad \frac{c}{a} = n;$$

tendremos

$$x^2 + m\,x + n = 0$$

ó bien,

$$x^2 + m\,x = -n.$$

Observemos ahora que el primer miembro contiene los dos primeros términos del trinomio

$$x^2+mx+\frac{m^2}{4}=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2;$$

de forma que añadiendo á los dos miembros de la ecuación $\frac{m^2}{4}$, el primero se convierte en $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2$, que nos permitirá, extrayendo la raíz cuadrada, convertir la ecuación propuesta en otra de primer grado

Tenemos, pues,

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}-n;$$

de donde

$$x+\frac{m}{2}=\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$$

y, por fin,

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$$

Luego *la incógnita, en toda ecuación de segundo grado, de la forma* $x^2+mx+n=0$; *es igual á la mitad del coeficiente del segundo término con el signo cambiado, más ó menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, menos el tercer término.*

* 156. Si en la fórmula obtenida como valor de la incognita hacemos $m=\frac{b}{a}$ y $n=\frac{c}{a}$ resultará

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

que nos dice que *la incógnita en toda ecuación de la forma*

$$ax^2+bx+c=0,$$

es igual al coeficiente del segundo término mudado el *signo, más ó menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, menos el cuádruplo producto de los coeficientes extremos, partido todo por el duplo del primer coeficiente.*

LXXXVIII.

Problemas de segundo grado con una incógnita.

* 157. Todo cuanto dijimos (63) al ocuparnos de los problemas de primer grado es aplicable al caso actual, por lo que trataremos ahora únicamente de su resolución inmediata.

Problema. 1.° *Hallar un número tal, que el producto de los que resulten agregándole respectivamente* 3 *y* 4 *sea igual á la diferencia entre* 32 *y dicho número.*

Planteo. La ecuación será

$$(x+3)(x+4)=32-x.$$

Resolución.

$$x^2+3x+4x+12=32-x;\quad x^2+8x-20=0;$$

$$x=-4\pm\sqrt{36}$$

$$x=-4+6=2;\quad x=-4-6=-10.$$

2.° *Hallar dos números cuya suma sea* s, *y su producto* p.

Sean s la suma, y p el producto dados.

Planteo. Si uno de los números le representamos por x, el otro será $s-x$; luego la ecuación será $x(s-x)=p$.

Resolución. $sx-x^2=p$; ó bien, $x^2-sx+p=0$, de donde

$$x=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}.$$

LXXXIX.

Propiedades de las raíces de la ecuación general de segundo grado con una incógnita.

* 158. Ya hemos visto que el valor de la incógnita en la ecuación general de segundo grado viene expresado por una raíz cuadrada, lo cual origina para aquella dos valores iguales y de signo contrario. Estos dos valores de la incógnita se llaman *raices de la ecuación. Luego toda ecuación de segundo grado con una incógnita tiene dos raíces.*

También demuestra esta misma propiedad el siguiente principio.

* 159. *Si la ecuación general*

$$x^2 + m x + n = 0$$

tiene una raíz a, *tendrá también otra raíz* — a — m.

En efecto, siendo a raíz de esta ecuación, tendremos

$$a^2 + m a + n = 0; \quad \text{de donde,} \quad n = -a^2 - m a;$$

y, sustituyendo este valor de n en la ecuación propuesta, resultará

$$x^2 + m x - a^2 - m a = 0,$$

ó sea

$$(x^2 - a^2) + m (x - a) = 0;$$

y sacando $(x - a)$ factor común,

$$(x - a)(x + a + m) = 0$$

ecuación que solo puede ser satisfecha por $x = a$, ó por

$$x = -a - m.$$

Es decir, que si a es raiz de la ecuación, también lo es $-a - m$.

* 160. *En toda ecuación de la forma*

$$x^2 + mx + n = 0,$$

la suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término, cambiado de signo, y su producto es igual al tercer término.

Hemos demostrado que las raíces de esta ecuación son a, y $-a-m$; estas dos raíces sumadas nos dán

$$a - a - m = -m;$$

y multiplicándolas $-a^2 - ma$ que es el valor de n.

También podrá demostrarse este principio sumando y multiplicando los dos valores de x sacados de la ecuación propuesta.

* 161. *Toda ecuación de la forma*

$$x^2 + mx + n,$$

es el producto de dos binomios, cuyo primer término es x *y el segundo cada una de las raíces de la ecuación con signo contrario.*

Pues hemos visto que

$$x^2 + mx + n = (x - a)(x + a + m)$$

y como las raíces son a y $-a-m$, queda demostrado el teorema.

También se confirma esto mismo haciendo el producto de los dos binomios que resultan de restar de x sus valores deducidos de la ecuación.

Escolio. En virtud de estos principios, la ecuación cuyas raíces son dos cantidades dadas x' y x'', es

$$(x - x')(x - x'') = 0.$$

Todo trinomio de segundo grado puede considerarse como el producto de dos binomios de primero, para lo cual basta igualar el trinomio á cero, deducir las raíces de la ecuación que resulte, y estas raíces serán los valores de x' y x'', en los binomios $(x - x')(x - x'')$.

XC.

Discusión de la ecuación general de segundo grado con una incógnita.

* 162. Las raíces de una ecuación de segundo grado hemos visto vienen expresadas siempre por medio de un signo radical, de forma que podrán ser positivas ó negativas, enteras ó fraccionarias, reales ó imaginarias. El estudio de estas diversas formas será, pues, el objeto de la discusión de que nos vamos á ocupar.

Sea primeramente la ecuación

$$x^2 + mx + n = 0$$

cuyas raices son

$$x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Distinguiremos tres casos: $n < 0$, $n = 0$, $n > 0$.

1.er caso. Si $n < 0$; $\sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$ será positiva y mayor que $\frac{m}{2}$, luego las dos raices son reales y de signo contrario.

2.º caso. Si $n = 0$; las raices son 0 y $-m$.

En efecto, la ecuación $x^2 + mx = 0$, tiene por raices $x = 0$; $x = -m$.

3.er caso. Si $n > 0$ conviene distinguir tres casos:

$$n < \frac{m^2}{4};\ n = \frac{m^2}{4};\ n > \frac{m^2}{4}.$$

1.º Si $n < \frac{m^2}{4}$, $\sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$ será una cantidad real y menor que $\frac{m}{2}$, luego las dos raices son reales, desiguales y de igual signo.

2.º $n = \frac{m^2}{4}$; resulta $x = -\frac{m}{2}$, es decir, que las raices son reales é iguales.

3.º Si $n > \frac{m^2}{4}$, $\sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$ es imaginario, luego las ldos raices son imaginarias conjugadas.

Si queremos buscar la interpretación de estas raices en a ecuación dada, hagamos

$$\frac{m^4}{4} - n = -q^2; \text{ de donde } n = \frac{m^2}{4} + q^2;$$

cuyo valor, sustituido en la ecuación propuesta, la convierte en

$$x^2 + m\,x + \frac{m^2}{4} + q^2 = 0; \text{ ó sea } \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + q^2 = 0.$$

El primer miembro es la suma de dos cuadrados, y evidentemente no hay valor alguno real, positivo ni negativo, que sea capaz de reducir á cero esa suma; luego la ecuación no puede tener raices reales y ambas deben ser imaginarias.

* 163. Discutamos ahora la ecuación

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

cuyas raices son

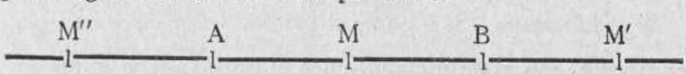
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

Distinguiremos tres casos: que $b^2 - 4\,a\,c$ sea mayor, igual ó menor que cero.

Si $b^2 - 4ac > 0$, las dos raices son reales y desiguales.
Si $b^2 - 4ac = 0$. son reales é iguales.
Si $b^2 - 4ac < 0$, las dos raices son imaginarias.

* 164. Como ejemplo de discusióu de un problema de 2.º grado, el siguiente es el más usual.

Hallar en la línea recta que une dos luces A *y* B, *un punto igualmente iluminado por ellas.*



Representemos por d la distancia A B; por x la distancia de A al punto buscado M; y, por tanto, la distancia B M vendrá representada por $d - x$.

Llamando a y b á las cantidades de luz que arrojan A y B á la unidad de distancia, y teniendo en cuenta que se demuestra en física que *la intensidad de la luz es inversamente proporcional á los cuadrados de las distancias;* hallaremos la cantidad de luz que M recibe de A por la proporción

$$a : y :: x^2 : 1; \quad \text{de donde} \quad y = \frac{a}{x^2};$$

y la que recibe de B, por la proporción

$$b : y :: (d - x)^2 : 1; \quad \text{de donde} \quad y = \frac{b}{(d - x)^2}$$

y, con arreglo al enunciado del problema,

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d - x)^2}$$

ecuación que podría resolverse por el método ordinario; pero que se reduce á una de primer grado por la extracción de la raíz cuadrada de los dos miembros: y nos dá

$$\frac{\sqrt{a}}{x} = \pm \frac{\sqrt{b}}{d - x} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

En la discusión de esta fórmula, distinguiremos tres casos:

$$a > b; \quad a = b \quad \text{y} \quad a < b.$$

Primer caso. Si $a > b$; el primer valor de x será menor que d y mayor que $\frac{d}{2}$, conforme con las condiciones físicas del problema que exigen que el punto está más cerca de B que es la más débil.

La segunda raíz es mayor que d y nos dá otro punto M' á la derecha de B; luego el problema tíene dos soluciones

Segundo caso. Si $a = b$; el primer valor de $x = \frac{d}{2}$; conforme con el enunciado, pues el punto debe estar en este caso á igual distancia de las dos luces.

El segundo valor de x se presenta bajo la forma ∞; luego el problema solo tiene una solución.

Si al mismo tiempo que $a = b$; fuera $d = 0$ el primer valor de x se reduciría á cero; y el segundo á $\frac{0}{0}$; y, como no hay factor común alguno á los dos términos del quebrado, esta indeterminación de la incógnita. debe acusarla la ecuación; y en efecto, en este caso, la ecuación se reduce á $\frac{a}{x^2} = \frac{a}{x^2}$; luego el problema tiene un sin fin de soluciones; conforme con las condiciciones físicas del enunciado; pues en cualquier posición que ocupe el punto estará igualmente iluminado por las dos luces.

Tercer caso. Si $a < b$; el primer valor de x es menor que d, y menor que $\frac{d}{2}$; conforme debe suceder, pues evidentemente debe estar más cerca de A que es la luz más débil. El segundo valor de x es negativo é indica que el punto estará en M'', á la izquierda de A.

Y, en efecto, llamando x á la distancia A M''; la distancia B M'' será $x + d$; y la ecuación se convierte en

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x + d)^2}$$

resultado á que se llega igualmente cambiando en la primera ecuación x por $- x$.

XCI.

Resolución de dos ecuaciones de segundo grado con varias incógnitas.

* 165. Toda ecuación completa de 2.º grado con dos incógnitas, debe contener los términos de segundo grado de ambas incógnitas, los de primer grado y un término conocido. Su forma general será, por tanto,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

* 166. Si nosotros tratáramos de resolver un sistema de dos ecuaciones completas de segundo grado con dos incógnitas, tendríamos, de modo análogo á lo dicho para las ecuaciones de primer grado, que eliminar una de las dos incógnitas, para venir á parar á una ecuación con una sola incógnita. Esto nos conduciría, en general, á una ecuación de cuarto grado; que no podemos resolver con los conocimientos adquiridos; de ahí que tratemos tan solo de resolver el problema en algunos casos particulares en que la cuestión queda reducida, en último término, á hallar las raices de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

1.º Supongamos que las ecuaciones dadas tienen la forma

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = m \\ x^2 - y^2 = n \end{array}\right\} \quad (1)$$

sumando y restando estas dos ecuaciones, hallaremos:

$$x = \pm\sqrt{\frac{m+n}{2}}; \qquad y = \pm\sqrt{\frac{m-n}{2}}$$

2.º Sean la ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + y = m \\ xy = n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Despejando x en la primera, tendremos; $x = m - y$; y sustituyendo su valor en la segunda, resulta

$$y^2 - my + n = 0;$$

de donde

$$y = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

y, por tanto,

$$x = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

3.º Sea el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = m \\ xy = n \end{array}\right\} \quad (3)$$

sumando y restando la primera ecuación con el duplo de la segunda, tendremos:

$$(x + y)^2 = m + 2n; \qquad (x - y)^2 = m - 2n;$$

ó sea

$$x + y = \pm\sqrt{m + 2n}; \quad \text{y} \quad x - y = \pm\sqrt{m - 2n}$$

de donde

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{m + 2n} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m - 2n}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{m + 2n} \mp \frac{1}{2}\sqrt{m - 2n}$$

4.º Sea un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = m \\ x^2 + y^2 = n \end{array}\right\} \quad (4)$$

elevando la primera al cuadrado, y teniendo en cuenta la segunda, resulta

$$xy = \frac{1}{2}(m - n$$

que con la segunda ecuación dada, forma el sistema (3) ya resuelto.

5.º Sean las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} a\,x + b\,y = m \\ c\,x^2 + d\,y^2 = n \end{array}\right\} \quad (5)$$

Eliminando y, resulta

$$(b^2 c + d\,a^2)\,x^2 - 2\,d\,a\,m\,x + b^2 n - d\,m^2 = 0$$

ecuación completa de segundo grado que nos dará las raices de x, que sustituídas en la primera de las ecuaciones dadas, (5) nos darán los correspondientes de y.

Ejemplos.

1.º $x^2 + y^2 = 73$; $x^2 - y^2 = 55$.

2.º $x + y = 10$; $x\,y = 9$.

3.º $x^2 + y^2 + x\,y = 48$; $x^2 - y^2 + x - y = 36$.

4.º $x = 2\,y$; $x^2 - y^2 = 48$.

5.º $\dfrac{18\,x}{y} = \dfrac{8\,y}{x}$; $3\,x\,y + 2\,x + y = 485$.

XCII.

De los máximos y mínimos de funciones de segundo grado.

* 167. Se llamá máximo de una función de una variable x, para un valor a de ésta, *todo valor mayor que el que toma la misma función para todos los valores de* x *comprendidos entre* a + h y a — h, *siendo* h *tan pequeña como se quiera.*

Del propio modo, se llama mínimo de esa función, para el valor a de x, *todo valor menor que el que toma la misma función, para todos los valores de* x *comprendidos entre* a+h *y* a—h, *siendo* h *tan pequeña como se quiera.*

La teoría general de los máximos y mínimos es del dominio del cálculo infinitesimal, aquí, pues, solo nos ocuparemos de los relativos á funciones de segundo grado.

* 168. Sea la función

$$y = a\,x^2 + b \quad (1);$$

en que a y b son cantidades constantes y x variable.

Resolviendo esta ecuación con relación á x, tendremos

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}\,(y - b)} \quad (2)$$

Si suponemos 1.º a y b positivos, el valor mínimo que puede tomar y para que x sea una cantidad real es $y = b$; al que corresponde $x = 0$; y efectivamente, en la ecuación (1), el valor mínimo de y es b; pues para cualquier valor de x, positivo ó negativo, diferente de cero, resulta $y > b$.

2.º Supongamos ahora $b > 0$ y $a < 0$ La fórmula (2) nos indica que, para que x sea real, es preciso que y no sea mayor que b. Así, pues, b es el valor máximo de y, al que corresponde $x = 0$. Y en efecto, la ecuación (1), que en este caso se convierte en

$$y = -a\,x^2 + b,$$

nos indica que para todo valor de x, mayor ó menor que cero, resulta siempre $y < b$.

3.º Suponiendo ahora $b < 0$, y $a > 0$ la fórmula (2) que se convierte en

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}\,(y + b)}$$

nos indica que el valor mínimo de y es $-b$; conforme con lo expresado por la ecuación (1) que, en este caso, afecta la forma $y = a\,x^2\ 1 - b$, en que, para cualquier valor de x, diferente de cero, resulta $y > -b$,

4.º Por último, si $a < 0$ y $b < 0$; la fórmula (2) qne será ahora

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{-a}(y+b)};$$

nos dice que $y = -b$ será el valor máximo, correspondiente á $x = 0$; de acuerdo también con la ecuación (1) que se convierte en $y = -a\,x^2 - b$; que para todo valor de x, diferente de cero, nos dá $y < -b$

Luego, en general, la función $y = ax^2 + b$, en que a y b pueden tener signos cualesquiera, adquiere, para $x = 0$, un valor máximo ó mínimo b, según que sea $a < 0$ ó $a > 0$.

* 169 Sea ahora la función $y = ax^2 + b\,x + c$; que resuelta con respecto á x, nos dá

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{a\left(y - \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}\right)}$$

Si suponemos 1.° que $a > 0$; puede suceder que $4\,a\,c - b^2$ sea $>$ ó $<$ que cero.

Si $4\,a\,c - b^2 > 0$; el valor mínimo de y, para que x sea una cantidad real, es $y = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$.

Si $4\,a\,c - b^2 < 0$; la expresión subradical afecta la forma

$$y + \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a},$$

en que todo valor positivo de y nos dá un valor real para x. Pero para los valores de y negativos, el mínimo será

$$y = -\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a} = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$$

Por consiguiente, cuando $a > 0$, siempre la función dada admitirá el valor mínimo $\frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$, que corresponde al de la variable $x = -\frac{b}{2a}$.

2.º Si $a < 0$ y $4\,a\,c - b^2 > 0$; resultará que el segundo término de la cantidad subradical será esencialmente positivo, y como precisa ser, en este caso, negativo, para que multiplicado por $a < 0$, nos dé un valor real para x; resulta que no se pueden dar á y más que valores negativos que sean mayores en valor absoluto que el segundo término y, por tanto, el valor máximo que y puede recibir es

$$\frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}, \text{ al que corresponde } \quad x = -\frac{b}{2a}$$

Si $4\,a\,c - b^2 < 0$, como a también lo es, el segundo término del binomio es esencialmente negativo y, por tanto, el menor valor positivo que se puede señalar á y, para que x sea una cantidad real, es $\dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$; ó sea el máximo en valor relativo $-\dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$, al que corresponde $x = -\dfrac{b}{2a}$.

De donde se deduce que cuando $a < 0$, siempre la función dada tiene, para $x = -\dfrac{b}{2\,a}$, un valor máximo $\dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$.

Luego para hallar el valor máximo ó mínimo de una función de segundo grado, se *despeja en la ecuación la variable, y se hallan los valores de* y *que determinan el paso de los valores reales de* x *á los imaginarios, ó viceversa.*

Ejemplos 1.º Dividir un número dado en dos partes, cuyo producto sea máximo.

Sea n el número y x una de sus partes, la otra será $n - x$; y la ecuación será

$$y = x\,(n - x); \qquad \text{ó sea } x^2 - n\,x + y = 0$$

de donde

$$x = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - y}$$

El valor máximo de y es $\frac{n^2}{4}$; de donde $x = \frac{n}{2}$ y

$n - x = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

Luego, *para dividir un número en dos partes cuyo producto sea máximo, es preciso que ambas partes sean iguales á su mitad.*

2.º Descomponer un número en dos factores, cuya suma sea la mínima.

Si n es el número y x uno de sus factores, el otro será $\frac{n}{x}$; y la ecuación será

$$y = x + \frac{n}{x}; \quad \text{ó sea } x^2 - yx + n = 0$$

de donde

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - n};$$

el menor valor que puede tener y, para que x sea real, se deduce de la condición $\frac{y^2}{4} = n$; que nos dá

$$y = \pm 2\sqrt{n}\,; \quad y \quad x = \pm\sqrt{n}\,; \quad \frac{n}{x} = \pm\sqrt{n}$$

Luego, *para descomponer un número en dos factores, cuya suma sea mínima, es preciso que estos factores sean iguales á su raíz cuadrada.*

XCIII.

Ecuaciones trinomias y binomias.

* 170. Toda ecuación de tres términos es una ecuación trinomia; pero se llaman especialmente *ecuaciones trinomias* las ecuaciones que afectan la forma

$$x^{2n} + b\,x^n + c = 0.$$

Entre éstas se designan con el nombre de *ecuaciones bicuadradas*, las comprendidas en la expresión general

$$x^4 + b\,x^2 + c = 0.$$

Para resolverla, haremos $x^2 = y$, con lo que se convertirá en $y^2 + b\,y + c = 0$; que nos dá

$$y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c};$$

y por consiguiente.

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}}$$

nos proporciona las cuatro raices de la ecuación propuesta. Ahora bien, las raices de y pueden ser: 1.º, reales y positivas; 2.º, reales, una positiva y otra negativa, y 3.º, reales y negativas ó imaginarias. En el primer caso, las cuatro raices de la ecuación dada son reales; en el 2.º, dos serán reales y dos imaginarias, y en el 3.º las cuatro serán imaginarias.

De donde se deduce que en todos los casos, la ecuación bicuadrada tiene cuatro raices; dos á dos iguales y de signo contrario.

* 172. La resolución de las ecuaciones bicuadradas

nos lleva á calcular radicales dobles de la forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}};$$

y vamos á demostrar que, en general, *la fórmula*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

en que a *y* b *representan cantidades racionales, puede reducirse á la forma* $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$.

En efecto, suponiendo

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}; \quad (1)$$

podremos elevar al cuadrado los dos miembros de esta ecuación y resultará,

$$a \pm \sqrt{b} = m + n \pm 2\sqrt{m\,n};$$

ó sea

$$a - (m + n) \pm \sqrt{b} = \pm 2\sqrt{m\,n};$$

y haciendo á

$$a - (m + n) = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{K} \pm \sqrt{b} = \pm 2\sqrt{m\,n};$$

y elevando al cuadrado los dos miembros

$$\mathrm{K}^2 + b \pm 2\,\mathrm{K}\sqrt{b} = 4\,m\,n;$$

ó bien

$$\mathrm{K}^2 + b - 4\,m\,n = \pm 2\,\mathrm{K}\sqrt{b}$$

igualdad imposible toda vez que el primer miembro es racional y el segundo no lo es, á menos que este último desaparezca y como b no es cero, precisa ser $\mathrm{K} = 0$, ó sea

$$a - (m + n) = 0 \quad \text{de donde} \quad m + n = a; \quad \text{y}$$

$$b - 4\,m\,n = 0; \quad \text{de donde} \quad m\,n = \frac{1}{4}\,b;$$

lo que nos dice que para que se verifique la ecuación (1) es preciso que m y n sean las raices de la ecuación

$$z^2 - a\,z + \frac{1}{4}\,b = 0,$$

que son

$$m = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}; \quad n = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$$

Así pues, si estas raices son reales y racionales, la expresión

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

podrá ponerse bajo la forma $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, conforme al enunciado. En este caso, suponiendo

$$a^2 - b = c^2, \quad m = \frac{1}{2}(a + c); \quad n = \frac{1}{2}(a - c)$$

y, por último,

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + c)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a - c)}$$

Ejemplos. 1.° $\sqrt{18 + \sqrt{308}}$; 2.° $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$

3.° $\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$

* 172. Se llama *ecuación binomia*, toda ecuación que solo consta de dos términos; uno con cualquier potencia de la incógnita y otro conocido.

La forma general es

$$a\,x^m \pm b = 0; \quad \text{de donde} \quad x^m \pm \frac{b}{a} = 0;$$

y haciendo $\frac{b}{a}=p$; $x^m \pm p=0$; llamando r á la raíz aritmética del grado m de p, será $\sqrt[m]{p}=r$; ó bien $p=r^m$; por consiguiente, $x^m \pm r^m=0$; y haciendo $x=ry$; tendremos $y^m \pm 1=0$, luego la resolucion de toda ecuación binomia se puede reducir siempre á la determinación de las diversas raices de 1.

La resolucion general de la ecuación $y^m \pm 1=0$, corresponde al álgebra superior; nosotros, pues, solo trataremos de resolverla en algunos casos particulares.

1.º Si $m=2$, la ecuación será $y^2 \pm 1=0$; que se descompone en $y^2+1=0$; $y^2-1=0$.
La primera nos dá $y'=\sqrt{-1}$; $y''=-\sqrt{-1}$.
La segunda $y'=\sqrt{1}=1$; $y''=-\sqrt{1}=-1$.

2.º Si $m=3$; la ecuación es $y^3 \pm 1=0$. Consideremos primero la ecuación $y^3-1=0$; cuyo primer miembro es divisible por $y-1$ (37—3.º), y se descompone en

$$(y-1)(y^2+y+1)=0;$$

de donde $y-1=0$; ó sea $y=1$; $y^2+y+1=0$ que nos dá

$$y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

Luego las tres raices cúbicas de 1 son.

$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Cuanto á la otra ecuación $y^3+1=0$, basta cambiarle de signo, para observar que sus raices serán las anteriores cambiadas de signo, ó sea

$$-1,\quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\quad \text{y} \quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

3.º Si $m=4$; la ecuación será $y^4 \pm 1=0$. La ecuación $y^4-1=0$; puede ponerse bajo la forma (26,5.º)

$$(y^2+1)(y^2-1)=0;$$

que nos dá

$$y^2+1=0; \quad \text{ó sea} \quad y=\pm\sqrt{-1};$$

$$y^2-1=0; \quad \text{de donde} \quad y=\pm 1$$

luego las cuatro raices cuartas de la unidad son

$$+1, \quad -1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}.$$

La ecuación $y^4+1=0$; puede resolverse agregando á los dos miembros $2y^2$; y resultará,

$$y^4+2y^2+1=2y^2; \quad \text{ó sea} \quad (y^2+1)^2=2y^2;$$

y extrayendo la raíz cuadrada de sus dos miembros

$$y^2+1=\pm\sqrt{2}\times y; \quad \text{ó bien} \quad y^2\pm\sqrt{2}\times y+1=0$$

que nos dá

$$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{2}{4}-1}=\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$$

luego las cuatro raices cuartas imaginarias de -1, son

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}; \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2};$$

$$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}; \quad \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2}$$

ó sean

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

De lo expuesto se deduce finalmente que se resuelve la ecuación binomia, ó lo que es lo mismo, se hallan las diversas raices del mismo grado de una cantidad, multiplicando su raiz aritmética por las raices del mismo grado de la unidad positiva ó negativa

EJEMPLOS. 1.° $x^3 - 27 = 0$.
2.° $x^4 - 256 = 0$.

* 173. La ecuación trinomia

$$x^{2n} + b\,x^n + c = 0,$$

puede resolverse mediante una ecuación de 2.° grado y dos binomias. Hagamos, en efecto, $x^n = y$; la propuesta queda reducida á $y^2 + b\,y + c = 0$; que nos dará las dos raices y', y'' que sustituidas en vez de y, nos conducen á resolver las ecuaciones binomias

$$x^n = y'; \quad x^n = y''.$$

EJEMPLO. $x^6 - 4\,x^3 - 32 = 0$. *

PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO.

I. Hallar un número tal que la diferencia entre el cuadrado y el quíntuplo del mismo número sea 36.

II. Hallar un número tal que añadiendo á su mitad el producto de su tercio por su quinto, nos dé 75.

III. Dispone un padre que su caudal consistente en 120000 pesetas, se reparta entre sus hijos á partes iguales; pero al terminar la testamentaría han fallecido dos hijos, lo que hace aumentar la herencia de cada uno de los restantes en 5000 pesetas. ¿Cuántos eran los hijos?

IV. Encontrar dos números cuyo producto sea 360 y su cociente $1\frac{3}{5}$.

V. Encontrar dos números tales que la suma de sus cuadrados sea 306 y la diferencia de los mismos 144.

VI. Un comerciante compra mercancías por las que paga cierta cantidad y además el 5 % de gastos de transporte; las vende en 1500 pesetas y gana un tanto por ciento igual á la quinceava parte del coste ¿cuánto le costaron las mercancías?

VII. Entre 25 personas, hombres y mujeres, gastan en una comida 120 pesetas; 60 los hombres y 60 las mujeres; cada hombre ha pagado dos pesetas más que cada mujer ¿cuántos hombres había?

VIII. Una modista gasta 1594 pesetas en telas de tres clases, que la han costado tantas pesetas el metro como metros ha comprado; de la segunda ha comprado $\frac{1}{4}$ más que de la primera; y de la tercera $2\,^1/_2$ veces lo que de la 2.ª ¿cuántos metros ha comprado de cada clase?

IX. Encontrar tres números tales que el producto del primero por el segundo sea 56; el del segundo por el tercero 96; y el del primero por el tercero 84.

X. Hallar dos números cuya diferencia sea 87 y su producto 2800.

XI. Hallar un número tal que la diferencia de los cocientes que resulten de dividir 450 por ese número y por ese número más 6, sea 20.

XII. Un prendero compra un mueble y lo vende algún tiempo después por 96 pesetas, ganando un tanto por ciento igual al precio de compra ¿cuánto le costó?

XIII. ¿Cuál es el número que añadido á su raíz cuadrada dá 12210?

XIV. Hallar dos números tales que añadiendo á su suma la suma de sus cuadrados, resulte 492; y añadiendo á su diferencia la diferencia de los cuadrados resulte 348

XV. Una señora gasta 30 pesetas en comprar pañuelos; si la hubieran dado tres más por el mismo dinero, la hubieran salido á 0,25 menos cada uno ¿cuántos pañuelos ha comprado?

XVI. Hallar un número de tres cifras tal que la suma de los cuadrados de sus cifras sea 70, que el duplo del producto de las cifras extremas sea menor en 6 unidades que el cuadrado de la cifra de las decenas; y que añadiendo á ese número 198 resulte el mismo número invertido.

XVII. Un comerciante tiene terciopelos de tres clases, de los que la 2.ª y la 3.ª tienen respectivamente 3 m. y 5 m. más que la 1.ª. El metro de terciopelo de la 1.ª clase cuesta tantas pesetas como metros tiene la pieza; el metro de la 2.ª cuesta 10 pesetas más, y el de la 3.ª 20 pesetas más que el de la 1.ª. Las tres piezas cuestan 9530 pesetas ¿cuántos metros tiene la primera pieza?

XVIII. Hallar dos números cuya suma, cuya diferencia y cuyo producto sean proporcionales á 3, 2 y 5.

XIX. Un viajero sale de A para ir á B, á la vez que otro sale de B para ir á A, por el mismo camino y con movimiento uniforme; al encontrarse, el 1.º ha caminado 30 km. más que el 2.º; y á este le faltan 9 horas para llegar á A; mientras que al otro le faltan solo 4 para llegar á B ¿qué distancia hay entre A y B?

XX. Averiguar en qué sistema de numeración el número 1376 vendrá representado por 968.

XCIV.

Progresiones por diferencia.

174. *Se llama progresión por diferencia ó aritmética una série de términos tales, que cada uno se diferencia del que le precede en una misma cantidad.*

Esta diferencia constante entre cada dos términos consecutivos, se llama *razón* de la progresión.

La progresión puede ser *creciente* ó *decreciente*. según que la razón sea positiva ó negativa.

Así, $\div 1 . 3 . 5 . 7 \ldots\ldots$ es una progresión aritmética creciente, cuya razón es 2; y

$\div 1 . -1 . -3 . -5 \ldots\ldots$ es una progresión decreciente, cuya razón es -2.

175. Si representamos la progresión por diferencia, en general, por $\div a . b . c . d \ldots\ldots u$ y llamamos δ á la diferencia positiva ó negativa, tendremos que, con arreglo á la definición, será

$b = a + \delta$; $\quad c = b + \delta = a + 2\delta$; $\quad d = c + \delta = a + 3\delta$;.....

y, en general, llamando n al número de términos de la progresión $\qquad u = a + (n - 1)\,\delta \ (1)$

Esta expresión, que se llama *término general*, nos dice que *un término cualquiera de una progresión es igual al primero, más tantas veces la razón como términos le anteceden*.

La ecuación (1) permite hallar una de las cuatro cantidades, a, u, n y δ, cuando se conocen las otras tres.

176. *Interpolar medios diferenciales entre dos tér-*

minos dados, es hallar otros que formen una progresión por diferencia, cuyos extremos sean los dos términos dados.

Si conociéramos la razón de la progresión, el problema estaria resuelto. Supongamos, pues, qne queremos interpolar n medios diferenciales entre a y n. Con arreglo á lo expuesto, y puesto que el número de términos de la progresión ha de ser $n+2$, tendremos

$$u = a + (n+1)\delta; \quad \text{de donde} \quad \delta = \frac{u-a}{n+1}.$$

Luego para interpolar n *medios diferenciales entre dos términos dados, se divide la diferencia entre estos términos por el número de medios que se quieren interpolar más uno, y se tendrá la razón de la progresión.*

Conocida la razón, está conocida la progresión.

177. *La suma de los términos equidistantes de los extremos es igual á la suma de los extremos.*

En efecto, sea h el término que tiene detrás n términos, en la progresión propuesta, y k el que tiene n delante según la ecuación (1)

$$k = a + (n-1)\delta \quad \text{y} \quad h = u - (n-1)\delta$$

Sumando estas dos ecuaciones, resulta,

$$h + k = a + u.$$

178. *La suma de los términos de una progresión por diferencia es igual á la mitad del producto que resulta de multiplicar la suma de los extremos por el número de términos.*

En efecto, llamando s á la suma, tendremos

$$s = a + b + c + \dots\dots + t + u$$

y también

$$s = u + t + \dots\dots\dots + b + a$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y teniendo en cuenta el principio anterior, resulta

$$2\,s = (a+u) + (a+u) + \ldots\ldots + (a+u) + (a+u)$$

ó bien $2\,s = (a+u)\,n$,

de donde $s = \dfrac{(a+u)\,n}{2}$

XCV.

Progresiones por cociente.

179. *Se llama progresión por cociente ó geométrica una série de términos tales, que cada uno es igual al que le precede multiplicado por una misma cantidad, que se llama razón de la progresión.*

La progresión será *creciente* ó *decreciente*, según que la razón sea mayor ó menor que 1.

Así, $\because 1 : 2 : 4 : 8 : \ldots\ldots$ es una progresión geométrica creciente cuya razón es 2.

$\because 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots\ldots$ es una progresión geométrica decreciente, cuya razón es $\frac{1}{2}$.

180. Si representamos la progresión geométrica por

$$\because a : b : c : d : \ldots\ldots : u,$$

y su razón por q, sea mayor ó menor que 1, tendremos, con arreglo á la definición,

$b = a\,q;\ c = b\,q = a\,q^2;\ d = c\,q = a\,q^3;\ \ldots\ldots$ (1) $u = a\,q^{n-1};$

llamando n al número de términos.

Esta última expresión, llamada también *término general*, indica *que un término de una progresión por cociente es igual al primero multiplicado por la razón elevada á una potencia, indicada por el número de términos que le anteceden.*

La ecuación (1) permite hallar una de las cuatro cantidades u, a, q y n, cuando se conocen las otras tres.

181. *Interpolar medios proporcionales entre dos términos dados es hallar una progresión por cociente, cuyos extremos sean los dos términos dados.*

Evidentemente, el problema estaría resuelto si conociéramos la razón. Si, pues, llamamos a y u á los términos dados, y n al número de medios que queremos interpolar, tendremos con arreglo á lo expuesto, $a = a\,q^{n+1}$, puesto que los términos de la progresión han de ser $n+2$, de donde

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{u}{a}}.$$

Por consiguiente, *para interpolar* n *medios proporcionales entre dos términos dados, se dividen los dos términos dados, se halla la raíz del grado* n+1 *del cociente, y se tendrá la razón de la progresión.*

182. *La suma de los términos de una progresión por cociente es igual al último término multiplicado por la razón menos el primero, partido por la razón menos* 1.

Llamando s á la suma de los términos de la progresión, tendremos

$$s = a + b + c + \ldots\ldots + t + u$$

y multiplicando por q,

$$s\,q = a\,q + b\,q + c\,q + \ldots\ldots + t\,q + u\,q$$

ó bien

$$s = b + c + \ldots\ldots + t + u + u\,q,$$

y restando de esta igualdad la primera,

$$sq - s = uq - a \quad ó \quad s(q-1) = uq - a$$

de donde

$$s = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

XCVI.

Logaritmos.

183. Si comparamos dos progresiones, una por cociente que empiece por la unidad, y otra por diferencia que empiece por cero, como

$$\begin{array}{l} \because 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots \\ \div 0 . r . 2r . 3r . \ \ldots\ldots \end{array} \quad (1)$$

se observa desde luego que la razón, en cada término de la progresión por cociente, entra por factor el mismo número de veces, que entra por sumando la razón de la progresión por diferencia, en el término que ocupa el mismo lugar.

De aquí dedujo el eminente Neper, inventor de los logaritmos, esta importante teoría, cuyas aplicaciones al cálculo son tan numerosas.

Los términos de la progresión por diferencia se llaman *logaritmos* de sus correspondientes de la progresión geométrica.

Logaritmos, pues, son los términos de una progresión por diferencia, que comienza por cero, correspondientes á los de otra progresión por cociente, que comienza por la unidad.

Cada sistema de valores de q y r determinará, por tanto, un *sistema de logaritmos;* por consiguiente, los sistemas de logaritmos son ilimitados.

La condición común á todos ellos es que el logaritmo de 1 es cero: y varían en el número cuyo logaritmo es 1, que se llama *base* del sistema.

Los únicos sistemas empleados hasta ahora son dos: el neperiano, del nombre de su inventor; y el sistema de logaritmos *vulgares*, ó de Briggs, que, por ser el empleado generalmente en los cálculos numéricos, es el de que vamos á ocuparnos.

184. El sistema de *logaritmos vulgares*, ó de Briggs, tiene por base la de nuestro sistema de numeración, de que nacen sus principales ventajas. Está, pues, determinado por las progresiones:

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots\ldots$$

$$\div 0 .\ 1 .\ 2 .\ 3 .\ 4 \ldots\ldots$$

cuyas razones son respectivamente 10 y 1; exigiendo numerosas interpolaciones para que la primera contenga todos los números enteros hasta el límite que se desee.

185. Como quiera que este sistema, así como cuantos puedan considerarse, está comprendido en el general expresado por las progresiones (1), las propiedades que para éste demostremos, para todos quedarán demostradas.

Hagamos en ellas $q = a^r$, lo que equivale á llamar a á la $\sqrt[r]{q}$, y resultará:

$$\because 1 : a^r : a^{2r} : a^{3r} : \ldots\ldots$$

$$\div 0 .\ r .\ 2r .\ 3r \ldots\ldots$$

Que nos indican que *el logaritmo de un número, en general, es el exponente de la potencia á que debe elevarse* *una cantidad constante y diferente de* 1, *para que reproduzca el número propuesto.*

Esta cantidad constaute es la base del sistema, puesto que $a^1 = a$; y esta definición permite expresar la generación de los logaritmos por la ecuación $a^x = y$, en que cada valor de x será el logaritmo del correspondiente de y.

Demostrado que de la primera definición se deduce la segunda, si demostramos la recíproca, quedará manifiesta la *identidad* entre ambas definiciones.

En efecto, si en la ecuación $a^x = y$, damos á x valores sucesivos en progresión por diferencia, cuya razón sea r.

$$x = \quad 0, \quad r, \quad 2r, \quad 3r, \ldots\ldots$$

resulta $$y = \quad 1, \quad a^r, \quad a^{2r}, \quad a^{3r}, \ldots\ldots$$

progresiones que originaron la ecuación $a^x = y$.

XCVII.

Propiedades generales de los logaritmos.

* 186. Para ver ahora si todos los números tienen logaritmo, es preciso demostrar que *en la ecuación* $a^x = y$, *en que* a *tiene un valor constante para cada sistema, real, positivo y mayor ó menor que* 1; *dando á* x *todos los valores reales comprendidos entre* $+\infty$ *y* $-\infty$, *resultan para* y *todos los valores positivos desde cero hasta* ∞.

En efecto, suponiendo primero $a > 1$, si hacemos que x varíe de un modo contínuo desde 0 hasta ∞, a^x ó lo que es igual y, variará también de una manera contínua desde $a^0 = 1$, hasta $a^\infty = \infty$.

Si x varía, del mismo modo, desde 0 hasta $-\infty$, y variará también de una manera contínua desde 1 hasta

$$a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0$$

Del mismo modo, vemos que si suponemos $a < 1$, es decir $a = \frac{1}{\alpha}$, en la ecuación $\frac{1}{\alpha^x} = y$, como $\alpha > 1$, cuando x varía desde cero hasta ∞, y varía desde 1 hasta cero; y si x pasa por todos los valores desde 0 á $-\infty$, y pasará por todos los comprendidos desde 1 hasta ∞.

* 187. Queda, pues, demostrado:

1.° *Que todos los números positivos tienen logaritmo; y en todos los sistemas, cada número tiene un logaritmo, y recíprocamente.*

2.° *Que los números negativos no tienen logaritmo.*

3.° *Que en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es* 1, *y el logaritmo de* 1 *es cero.*

4.° *Que en los sistemas cuya base es mayor que* 1, *el logaritmo de* ∞ *es* ∞, *y el de cero es* $-\infty$; *los números mayores que* 1 *tienen logaritmos positivos, y los menores que* 1 *los tienen negativos.*

5.° *En los sistemas cuya base es menor que* 1, *el logaritmo de* ∞ *es* $-\infty$, *y el de cero es* ∞; *los números mayores que* 1 *tienen logaritmos negativos, y los menores que* 1 *los tienen positivos.* *

188. Demostremos ahora: 1.° *Que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de sus factores.*

Sean los números $y, y', y'', \ldots\ldots$ y sus logaritmos respectivos $x, x', x'', \ldots\ldots$; tendremos.

$$a^x = y,\ a^{x'} = y',\ a^{x''} = y'' \ldots\ldots,$$

y multiplicando ordenadamente,

$$a^{x + x' + x'' + \ldots\ldots} = y\,y'\,y'' \ldots\ldots$$

que nos dice que el

$$\log.\ y\,y'\,y'' \ldots\ldots = x + x' + x'' + \ldots\ldots$$

2.° *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Pues de $a^x = y$, $a^{x'} = y'$; resulta $a^{x-x'} = \frac{y}{y'}$;

que nos dice que el log. $\frac{y}{y'} = x - x'$

3.° *El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Pues de $a^x = y$, resulta $a^{mx} = y^m$, es decir,

$$\log. y^m = m\,x = m \times \log. y.$$

4.° *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raiz.*

Pues de $a^x = y$, resulta $a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y}$, ó sea

$$\log. \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{\log. y}{m}.$$

XCVIII.

Propiedades particulares de los logaritmos ordinarios.

189. A más de las propiedades generales, comunes á todos los sistemas de logaritmos, los logaritmos vulgares ó de Briggs tienen algunas particulares que vamos á dar á conocer.

190. En el sistema expresado, *los únicos números que tienen logaritmos comensurables son las potencias enteras de* 10.

En efecto, si hacemos

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots$$

resultan para y los valores respectivos

$$y = 1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4, \ldots\ldots$$

lo cual demuestra que las potencias enteras de 10, tienen por logaritmos sus exponentes respectivos, que forman la série de los números enteros.

Falta ahora demostrar que un número cualquiera que no sea potencia entera de 10, no tiene logaritmo comensurable.

Sea n un número cualquiera, y $\frac{p}{q}$ su logaritmo.

Tendremos, $10^{\frac{p}{q}} = n$, de donde

$$10^p = n^q \quad \text{ó} \quad 2^p \times 5^p = n^q,$$

lo que exige que n solo tenga por factores primos 2 y 5; supongamos $n = 2^r \times 5^s$, será $2^p \times 5^p = 2^{rq} \times 5^{sq}$; igualdad que solo puede verificarse para

$$p = rq \quad \text{y} \quad p = sq, \quad \text{de donde} \quad rq = sq \quad \text{ó} \quad r = s;$$

que nos dice que para que n tenga logaritmo comensurable, es preciso que sea potencia entera de 10.

191. Demostrado que todos los números, á excepción de las potencias enteras de 10, tienen sus logaritmos incomensurables, los expresaremos aproximadamente por decimales inexactas.

La parte entera de un logaritmo se llama característica; se llama mantisa, su parte decimal.

De aqui se infiere, que los logaritmos de las potencias enteras de 10 tienen 0 por mantisa.

192. *La característica del logaritmo de un entero tiene tantas unidades menos* 1 *como cifras tiene el entero.*

En efecto, si el entero es 10^n, tendrá $n+1$ cifras; y su logaritmo es n.

Si no es potencia entera de 10, y tiene, por ejemplo, n cifras, estará comprendido entre 10^{n-1} y 10^n; su logaritmo estará comprendido entre $n - 1$ y n; y será, por tanto, $n - 1$ su característica. Queda, pues, demostrado el teorema.

193. *Si multiplicamos ó dividimos un número por una potencia entera de* 10, *su característica aumentará ó disminuirá en tantas unidades como tenga el exponente de* 10, *y su mantisa no variará.*

En efecto, expresando por log. el logaritmo vulgar, y por a un número cualquiera, sabemos (188, 1.º) que

$$\log.(a \times 10^n) = \log. a + n$$

$$\text{y} \quad \log.(a : 10^n) = \log. a - n.$$

Corolario. *La mantisa del logaritmo de un número decimal no varía, cuando se corre la coma á derecha ó izquierda; pero la característica aumenta ó disminuye respectivamente tantas unidades, como lugares se haya corrido la coma.*

194. Los logaritmos de los números menores que 1 son negativos (187, 4.º), y, para evitar las molestias que en el cálculo originan, se les transforma fácilmente, por medio de los complementos, en otros de característica negativa y mantisa positiva.

Sea, por ejemplo, $-3{,}456417$. Diremos

$$-3{,}456417 = 10 - 3{,}456417 - 10 = \text{C.}^{\text{to}}\, 3{,}456417 - 10 =$$

$$6{,}543583 - 10 = 6 + 0{,}543583 - 10 = -4 + 0{,}543583:$$

La reunión de este entero negativo con el decimal positivo, se expresa así, $\bar{4}{,}543583$

Es decir que $3{,}456417 = \bar{4}{,}543583$

Por consiguiente, para transformar un logaritmo negativo en otro de característica negativa y mantisa positiva, se aumenta 1 á la característica, se pone encima el signo —, y á continuación se escribe el complemento de la mantisa.

195. *La característica negativa del logaritmo de una fracción propia decimal, tiene tantas unidades más una, como ceros tenga la fracción entre la coma y la primera cifra significativa.*

En efecto, sea la fracción 0,00037.

Tendremos que $0,00037 \times 10^4 = 3,7$; cuya característica es 0 (192); luego la de 0,00037 será $0-4=-4$, conforme al enunciado.

XCIX.

Tablas de logaritmos.

196. Se llaman *tablas de logaritmos* unos estados ó cuadros donde se encuentran ordenados por columnas los números enteros desde 0 hasta cierto límite, y enfrente sus logaritmos respectivos.

Desde luego se comprende la imposibilidad de que las tablas contengan los logaritmos de todos los números; mas teniendo los de los números enteros, podremos hallar los de los fraccionarios.

Los de los números incomensurables se determinarán por los de sus límites respectivos. Tampoco es preciso hallar los logaritmos de todos los números enteros, pues ya indicaremos el medio de hallar los logaritmos de números mayores que los contenidos en las tablas.

Y aún dentro de los límites de éstas, pueden hallarse los logaritmos de los números compuestos, con solo sumar los de sus factores primos; bastará por tanto determinar los logaritmos de los números primos hasta el límite que las tablas hayan de alcanzar.

197. Los medios de construir las tablas de logaritmos no son del dominio de las matemáticas elementales; pero la posibilidad de su construcción, con los conocimientos adquiridos, es fácil de comprender.

Si entre los dos primeros términos 1 y 10 de la progresión geométrica, orígen del sistema vulgar, interpolamos dos medios proporcionales, y otros dos medios diferenciales entre sus correspondientes 0 y 1, de la progresión aritmética; y repetimos la misma operación entre 1 y el medio determinado, y entre 0 y el medio correspondiente, es claro que, al cabo de cierto número de interpolaciones, llegaremos á obtener dos términos en la progresión geométrica que se diferenciarán de 2 en menos de una unidad decimal del último órden de aproximación con que se deseen construir las tablas; y la interpolación correspondiente en la progresión por diferencia, nos dará finalmente el logaritmo de 2.

Del propio modo podriamos hallar los logaritmos de los demás enteros hasta el límite que se desee.

198. Determinados los logaritmos de todos los números primos, menores que el límite señalado para las tablas, determinaremos por su adición los de todos los compuestos, y ordenados convenientemente tendremos construidas las tablas.

Además de las dos columnas correspondientes á números y logaritmos, llevan las tablas otra tercera con las diferencias entre cada dos logaritmos consecutivos.

A esto están reducidas, en su esencia, las tablas de logaritmos. La disposición especial que distingue unas de otras, se encuentra detalladamente reseñada al principio de las mismas.

199. El uso de las tablas se reduce á la resolución de los dos problemas siguientes:

Dado un número, hallar su logaritmo.

Desde luego supondremos que el número sea entero, pues si fuera fraccionario ya hemos visto (188, 2.º) el modo de determinar su logaritmo.

Esto sentado, si el número dado está en las tablas, á su lado estará el logaritmo correspondiente.

Supongamos, pues, que el número dado no está en las tablas, único caso que en realidad debemos examinar.

Para fijar las ideas, supongamos que queremos hallar el logaritmo del número 315417.

Su característica (192) sabemos que es 5, falta solo determinar la mantisa, pero, según hemos visto (193), esta mantisa es la misma que la del número 3154,17.

Este número no está en las tablas, pero está comprendido entre 3154 y 3155; luego su logaritmo estará también comprendido entre los de estos dos números.

Hallando, pues, el logaritmo de 3145 y determinando la diferencia entre este logaritmo y el de 3154,17 añadida al logaritmo hallado, nos dará la mantisa buscada.

Pero se admite que *las diferencias de los números son proporcionales á las de sus logaritmos*, luego tendremos

$$\frac{3155-3154}{3154{,}17-3154} =$$

$$\frac{\text{log. } 3155 - \text{log. } 3154}{\text{log. } 3154{,}17 - \text{log. } 3154}$$

(que la hallaremos en las tablas)

que es la incógnita del problema

ó sea

$$\frac{1}{0{,}17} = \frac{137}{x}\text{; de donde } x = 137 \times 0{,}17 = 23 \text{ millonésimas.}$$

Luego para determinar la diferencia buscada, *se mul-*

tiplica la diferencia tabular por la fracción decimal formada por las cifras separadas en el número propuesto.

Ahora bien, log. 3154=3,498862, luego

log. 3154,17=3,498885

y, por fin, log. 315417=5,498885.

200. *Dado un logaritmo, hallar el número correspondiente.*

Supongamos se nos dá el logaritmo 5,498885 y queremos hallar á qué número corresponde.

Prescindiendo de la característica, buscaremos la mantisa en las tablas, y vemos que está comprendida entre 498862 y 498999 que corresponden respectivamente á los números 3154 y 3155; luego el número pedidó será mayor que 3154 y menor que 3155.

Sea x la diferencia entre el número buscado y 3154, la proporción ya dicha, será en este caso,

$$\frac{1}{x} = \frac{137}{23}, \text{ de donde } x = \frac{23}{137} = 0{,}17.$$

Luego se determina la diferencia buscada, *dividiendo la diferencia entre el logaritmo dado y el inmediato menor de las tablas por la diferencia tabular.*

La mantisa propuesta corresponde al número

$$3154 + 0{,}17 = 3154{,}17$$

y como la característica es 5, el número tiene que constar de 6 cifras enteras, luego el número pedido es 315417.

201. Solamente nos hemos ocupado de los logaritmos vulgares, que son los usuales. Veamos ahora como se puede hallar el logaritmo de un número en un sistema cualquiera, cuando se conoce su logaritmo en otro distinto.

Llamemos n al número, b á la base del sistema nuevo,

x al logaritmo buscado de n en esta base, tendremos $b^x = n$, y si tomamos los logaritmos de los dos miembros en el sistema conocido, resultará

$$x \log. b = \log. n;\ \text{de donde}\ x = \frac{\log. n}{\log. b} = \log. n \times \frac{1}{\log. b}.$$

Luego *para hallar el logaritmo de un número en otro sistema, basta multiplicar el logaritmo del número en el sistema conocido, por un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador el logaritmo de la base nueva en el antiguo sistema.*

Este quebrado, cantidad constante, por la que se multiplican los logaritmos de un sistema para pasar á otro distinto, se llama *módulo* del nuevo sistema con relación al antiguo.

C.

Aplicaciones de los logaritmos.

202. Hemos visto que los logaritmos simplifican y abrevian todas las operaciones, excepto l a adición y la sustracción, sustituyendo respectivamente la multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raices por la adición, sustracción, multiplicación y división.

En el cálculo algebráico, podremos determinar los valores numéricos de sus fórmulas por medio de los logaritmos, siempre que vengan expresadas por productos, cocientes, potencias ó raices.

Además de estas ya importantes aplicaciones al cálculo aritmético y algebráico, vamos á citar algunas otras que resuelven importantes cuestiones.

203. Ecuaciones exponenciales. ***Cantidad exponencial** es toda cantidad conocida, cuyo exponente contiene alguna incógnita.*

Ecuación exponencial es toda ecuación en que entra la incógnita como exponente.

La forma mas sencilla de la ecuación exponencial es $a^x = b$, en la que, tomando logaritmos, resulta

$$x \log. a = \log. b; \text{ de donde } x = \frac{\log. b}{\log. a}.$$

Si la ecuación fuera $a^{b^x} = c$, tomando logaritmos, tendríamos $b^x \log. a = \log. c$; de donde $b^x = \dfrac{\log. c}{\log. a}$.

Tomando de nuevo logaritmos, resulta

$$x \log. b = \log. \log. c - \log. \log. a;$$

de donde $$x = \frac{\log. \log. c - \log. \log. a}{\log. b}.$$

204. *Interés compuesto.* Hemos dicho que si los intereses se acumulan al capital, el interés se llama compuesto; y en este caso necesitamos calcular la fórmula que liga al capital, al tanto por 1 anual, al tiempo y á la suma de capital é intereses acumulados en ese tiempo.

Llamemos c al primero, r al segundo y t y C á los otros dos.

Si en un año, 1 produce r, c producirá $c\,r$; luego, al fin del primer año, el capital será $c + c\,r = c\,(1 + r)$.

De donde se deduce que para hallar la expresión de un capital al fin de un año, basta multiplicarle por $(1 + r)$.

Según esto, al fin del segundo año, el capital se habrá convertido en $c\,(1 + r)^2$, y al cabo de t años en

$$C = c\,(1 + r)^t\ ,$$

que es la fórmula del interés compuesto.

205. *Anualidades.* Se llama *anualidad* la cantidad constante que debe pagarse anualmente, con objeto de extinguir un capital prestado y sus intereses compuestos.

También se llama *anualidad* la imposición que se hace todos los años, para capitalizarla con sus intereses, recuperando la totalidad al fin de cierto tiempo.

De aquí se deduce que bajo el epígrafe de anualidades se comprenden dos problemas distintos, que algunos distinguen llamando al segundo *acumulación de capitales.*

206. Para resolver el primero, llamemos a á la anualidad, r al tanto por 1 de interés anual, t al tiempo y C á la deuda que ha de extinguirse.

Puesto que la primera anualidad se entrega al fin del primer año, producirá intereses durante los $t - 1$ años restantes, y al cabo de este plazo se habrá convertido en

$$a\,(1 + r)^{t-1}$$

La segunda anualidad se convertirá entonces en

$$a\,(1 + r)^{t-2}$$

Y así las demás, hasta llegar á la última que, como se satisface el día del vencimiento, vale a.

Luego el valor total de las anualidades, al cabo de los t años, será

$$a\,(1 + r)^{t-1} + (1 + r)^{t-2} + \ldots\ldots + a =$$

$$a\,[(1 + r)^{t-1} + (1 + r)^{t-2} + \ldots + 1] = \frac{a[(1 + r)^t - 1]}{r}$$

Pero como la cantidad C recibida en préstamo, se convierte al cabo de esos t años en $C\,(1 + r)^t$, deberemos tener la ecuación

$$C(1+r)^t = \frac{a[(1+r)^t - 1]}{r}$$

que nos dá cualquiera de las cuatro cantidades C, a, r y t, cuando se conocen las otras tres.

207. Para resolver el segundo, ó sea la acumulación de capitales, llamemos a á la anualidad, r al tanto por 1, y t al tiempo.

Por las mismas razones que hemos expuesto en el caso anterior, la primera anualidad se convierte á los t años en $a(1+r)^t$, la segunda en $a(1+r)^{t-1}$, y así sucesivamente hasta la última que se convierte en $a(1+r)$.

La suma de estos valores es indudablemente la cantidad reintegrable que, llamándola S, será

$$S = a(1+r)[1+(1+r)+(1+r)^2+\dots+(1+r)^{t-1}]$$

$$\text{ó} \quad S = \frac{a(1+r)[(1+r)^t - 1]}{r}$$

Fórmula que determina cualquiera de las cuatro cantidades S, a, r y t, cuando se conocen las otras tres.

208. *Rentas vitalicias*. Se llaman así las cantidades que recibe una persona durante su vida, por el capital, impuesto con esa condición, y á los intereses de este capital.

Es, pues, el mismo primer problema de las anualidades y basta reemplazar, en la fórmula allí obtenida, el capital prestado por la imposición, r por el tanto por uno establecido por la compañía ó sociedad, y el tiempo por la *vida probable* del imponente, que determinan las tablas de mortalidad formadas con los datos que la estadística suministra.

PROBLEMAS

RELATIVOS Á LAS PROGRESIONES Y LOGARITMOS Y SUS APLICACIONES.

I. Hallar la suma de los 30 primeros números impares.

II. Un obrero por cavar un hoyo de 9 metros, recibe 2,50 pesetas por el primer metro y 0,25 más por cada uno de los metros siguientes. ¿Cuánto recibe por la obra?

III. Un criado entra en una casa con la condición de ganar 120 pesetas el primer año, y 25 de aumento en cada uno de los sucesivos. ¿Cuánto habrá ganado á los 20 años?

IV. Hallar el número de términos de una progresión por diferencia, cuyo primer término es 2, la razón 3 y el último término 44.

V. Hallar la razón de una progresión por diferencia que tiene 12 términos, siendo el primero 22 y el último — 5.

VI. Un deudor se compromete á pagar en varios meses una suma de 750 pesetas, abonando al acreedor 15 pesetas el primer mes, y aumentando cada mes una suma igual, hasta el último mes que abonará 60 pesetas. ¿En cuántos meses extinguirá la deuda y qué suma aumenta cada mes?

VII. Hallar el 15º término de una progresión por cociente cuyo primero es 3 y la razón $\frac{2}{3}$, y la suma de los diez términos.

VIII. Hallar la razón de una progresión por cociente de diez términos, cuyo primer término es 2 y el último 39366.

IX. Un chalán pide un céntimo por el primer clavo de la herradura del caballo, 2 por el 2.°, 4 por el 3.° y asi sucesivamente hasta el 32. ¿Cuál es el precio del caballo?

X. Preguntado el inventor del ajedréz por el premio que deseaba, pidió un grano de trigo por la primera casilla, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así hasta las 64. ¿Cuántos granos de trigo pidió?

XI. Hallar el número de términos de una progresión por cociente, cuyo primer término es 3, el último 1048575 y la razón es 3.

Calcular por logaritmos las expresiones:

XII. $\sqrt[9]{0{,}00135143789}$; $\sqrt[5]{(9{,}875643)^4}$;

XIII. $\sqrt[4]{\frac{7}{45}}$; $\sqrt[11]{8957\frac{3}{4}}$.

XIV. $\left(1817\frac{5}{7}\right)^{2,3}$; $19\sqrt[8]{\frac{45{,}751}{\sqrt{34}}}$.

XV. $\sqrt[7]{578943\frac{1}{5}}$; $\sqrt[6]{9578^2-8575^2}$.

XVI. $\sqrt[13]{\frac{85-17\sqrt[5]{413}}{\sqrt[9]{34^3}}}$.

Resolver las ecuaciones:

XVII. $5^x = 875479214$.

XVIII. $\left(\frac{4}{7}\right)^x = 93\frac{3}{4}$.

XIX. $\left(\frac{21}{20}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{7x}{2}} = \frac{7}{12}.$

Hallar el valor de x en las expresiones:

XX. $\log. x = \frac{1}{2} \log, 16 - \frac{1}{4} \log. 9.$

XXI. $\log. (a+x) = b \log. c + d \log. c - m.$

XXII. Cuánto tiempo se necesita para duplicar un capital colocado al 5 p°/₀.

XXIII. Una persona tiene que satisfacer anualmente 5000 pesetas, por espacio de 6 años; pero no habiéndolo hecho; se desea saber cuánto tiene que abonar al cabo de ese tiempo, siendo 5 el tanto por ciento.

XXIV. Una persona que, según las tablas de mortalidad, tiene 15 años de vida probable, coloca 25000 pesetas para constituir una renta vitalicia. en una sociedad de seguros que abona el 4 p°/₀ ¿qué renta percibirá?

XXV. Qué capital representa una renta anual de 3000 pesetas, durante 10 años, al 5 por ciento.

XXVI. ¿Qué capital se habrá constituido con una suma de 15000 pesetas y sus intereses, al 5 por 100, en 25 años?

XXVII. La población de una capital es de 50000 almas, el aumento anual es de $\frac{1}{25}$; ¿qué población tendrá dentro de 60 años

XXVIII. Una persona deja al morir un capital de 30000 pesetas con la condición de que se reparta entre sus herederos dentro de 15 años, en los que producen un 4 por ciento; pero éstos toman prestadas, al fallecimiento del primero, 12000 pesetas al 5 por ciento. ¿Cuánto recibirán los testamentarios al cabo de ese tiempo?

XXIX. A qué tanto por ciento se habrán impuesto 3200 pesetas para que, en 80 años se hayan convertido en 34050,70.

XXX. Qué anualidad habrá q ıe satisfacer para extinguir en 12 años un préstamo de 35000 pesetas, al 5,25 por ciento.

ERRATAS MÁS NOTABLES.

Página.	Línea.	DICE.	DEBE DECIR.
56	12	(62)	(63)
57	16	B	R
60	8	factor q	factor de q
65	8	este el	este es el
85	3	39	40
89	—8	que	nombre que
99	5	medida	media
99	—1	medida	media
112	3	engendrado por	engendrado por $\frac{1}{n}$
112	—11	(183)	(182)
124	—13	$513{,}075432191 \times 321$	$513{,}075432191321$
134	—14	$2\,d \times 10 + u$	$2\,d \times 10 \times u$
142	—2	$3\,a\,b^2 \times b^3$	$3\,a\,b^2 + b^3$
143	7	$N = d \times 10 \times u$	$N = d \times 10 + u$
144	—15	50,616	506,16
160	—6	del	el
163	—6	35^{cl},06	35^{l},06
164	1	complejo	incomplejo
171	—13	$\frac{1}{2}$ de día	$\frac{1}{2}$ de día, 4^h; 20^m, 5^m y 4^m
176	—1	0,75	2;75
215	8	$(a + b - c)\,n$	$(a + b - c) \times -n$
220	15	$49\,a^4\,b^3$	$-49\,a^4\,b^3$
220	26	$-2\,a^2 \mid x^2$	$-2\,a^2 \mid x$
220	27	$-3\,b$	$2\,b$
230	—3	5×10	5×10^2
252	—4	27′ 21″	57′ 21″
256	9	5 horas	x horas
256	—1	absoluto	positivo
259	7	$\frac{3\,b^2 c}{4\,d}$	$\frac{6\,b\,c}{4\,d}$
281	11	$(\pm\,a^3\,b^5\,c)^2$	$(\pm\,2\,a^3\,b^5\,c)^2$

Página.	Línea.	DICE.	DEBE DECIR.
298	—2	$: a^{\frac{p}{p}}$	$: a^{\frac{p}{q}}$
299	—3	(102)	(103)
314	—1	$\frac{1}{2}(m—n)$	$\frac{1}{2}(m^2— n)$
315	7	$b^2 n - d m^2$	$d m^2 - b^2 n$
318	—5	dara x	para x
346	—5	$(1 + r)^{t-2}$	$a (1 + r)^{t-2}$
347	—9	á los	los
348	—2	diez	quince

Fin

Vittorio S

5

8

3

5

16

$12 \lfloor 6$
$00 \quad 2$

$12 \lfloor 6$
$00 \quad 2$

50.00

Segovia 11 de Julio de

1 9 3 9

MARTES

LO DE LUCIO FUE EL DIA ANTERIOR

Victoria Sierra

$$900 \div 50 = 18$$

$$900 \div 50 = 18$$

$$900 \div 50 = 16$$

102

9

10

Iraola

ARITMETICA
Y ALGEBRA

V. S.