

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS



ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS

---

CONGRESO DE VALLADOLID

---



TOMO X

Sección 8.<sup>a</sup>—Ciencias de Aplicación

MADRID

IMPRENTA DE EDUARDO ARIAS

San Lorenzo, 5, bajo.

—  
1916



INTERVENCIÓN DEL ESTADO  
EN LA  
EXPLOTACIÓN ECONÓMICA DE LOS FERROCARRILES

POR  
D. VICENTE BURGALETA

INGENIERO INDUSTRIAL

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

---

I.

CONSIDERACIONES SOBRE LA PRODUCCIÓN POR EL ESTADO.

Dejando a un lado las numerosas definiciones más o menos acertadas con que los tratadistas han querido determinar el concepto de Estado, aceptaremos nosotros en lo que sigue la definición de Colson, que nos permitirá deducir de ella misma todo el estudio económico de la producción por el Estado.

El Estado, según Colson, es toda asociación formada por los habitantes de un territorio determinado para la satisfacción de las necesidades, que exigen para lograrla un acción colectiva.

En dos casos es necesaria esta acción colectiva: para sancionar los compromisos y deberes incumplidos, al par que para asegurar el orden y la defensa públicos, y para la realización de aquellas obras o servicios en los que intervienen intereses contrarios al interés colectivo. Del primero deriva la soberanía del Estado, del segundo el concepto del Estado empresario, y de ambos, por la necesidad de proveer a los gastos que ocasionan, la facultad de imponer tributos a los individuos que integran el territorio sometido a su autoridad.

Pero lo que caracteriza al Estado y le diferencia de todas las demás personas jurídicas, lo que económicamente le presenta en oposición con las demás empresas o asociaciones constituídas para la produc-

ción, es el carácter obligatorio de sus decisiones, que son en caso necesario impuestas con coacción y contra las que no cabe recurrir, salvo los casos de insurrección, más que por los medios que el mismo Estado fija.

No hemos de tratar aquí de la mayor o menor extensión que debe darse a las atribuciones del Estado; su discusión es la eterna lucha entre las diversas escuelas económicas y entre el anarquista, que le niega la facultad de definir y juzgar el crimen, y el socialista, que parodiando al pueblo romano, quiere encargarle de proveer a sus necesidades y hasta a sus diversiones, hay toda una escala en la que apenas se encontrarían dos opiniones coincidentes. En la realidad, todos desearíamos la intervención del Estado para restablecer el Derecho, alterado en perjuicio nuestro por la mala voluntad de los demás; y hasta los más furibundos partidarios del socialismo de Estado se declaran individualistas cuando el Poder público se extralimita en sus facultades hasta intervenir en la vida privada, lo que no dejaría de ser necesario para el acertado reparto que los modos socialistas exigen. En Economía Política, como en todas las ciencias, no existen las panaceas de la antigua Medicina, y las doctrinas individualistas, socialistas y hasta anarquistas, que han dado acertadas soluciones a determinados problemas, fracasan cuando se quiere aplicar a todos un criterio cerrado, perdiendo de vista que cuestiones distintas no pueden ser resueltas por métodos idénticos. En el problema económico de los ferrocarriles encontraremos un ejemplo.

En principio, no puede negarse al Estado la facultad de actuar como empresario en toda clase de industrias. El Estado, en efecto, tiene entre sus fines un fin fiscal, y todos los beneficios que como empresario pueden corresponderle han de venir en deducción de los tributos, cada día mayores, que se exigen al contribuyente. Pero con independencia del fin fiscal, que justifica la concurrencia voluntaria del Estado a las industrias que se desarrollan en un régimen de libertad, siempre que para ello esté convenientemente organizado, el Estado tiene la misión de concurrir a aquéllas que por el interés colectivo que presentan reciben el nombre de obras y servicios públicos.

Entre éstos y aquéllas los hay de tal naturaleza que no puede determinarse el valor comercial de la utilidad que reportan; otros, por el contrario, aun necesitando del Estado para vencer los intereses privados opuestos al interés público, reportan utilidades cuyo valor comercial es determinable y podrán ser explotados por empresas mercantiles, ya libremente, ya por delegación del Estado. En este último

grupo se encuentran los transportes públicos y, por tanto, los ferrocarriles.

El Estado, aun no explotando directamente estas empresas, tiene sobre ellas la intervención que dimana de la facultad de reglamentación, facultad que tiene un interés económico grandísimo, ya que por ella puede cambiarse totalmente la distribución de los beneficios. Todas las modernas leyes sociales no son en definitiva más que un aumento del beneficio asignado al trabajo, que viene en deducción del que correspondería al capital sin el establecimiento de dichas leyes. No nos ocuparemos, sin embargo, de esta intervención, que por ser de carácter general no presenta diferencias esenciales en el caso particular de la industria ferroviaria.

La producción por el Estado reconoce por causa, no sólo el interés fiscal de que antes se hablaba, sino el interés político de los gobernantes, que les incita a extender su autoridad, sobre todo en los países donde por el predominio del sufragio universal puede esperarse mucho del voto de los subordinados, y el interés social, que queda mejor satisfecho haciendo volver al público los beneficios obtenidos a su costa que apropiándose de ellos la empresa explotadora.

En las empresas en libre concurrencia y con mercados casi perfectos sabemos que los beneficios no pueden ser mayores de lo que a la acertada dirección y riesgos corridos corresponde; de aquí la escasa importancia de la concurrencia del Estado en estos casos, concurrencia que no podría originar una disminución en los precios más que produciendo con pérdidas compensadas a expensas del presupuesto general, es decir, devolviendo al público por una parte lo que por la otra se le quitaba en impuestos y produciendo, en cambio, una crisis en la industria de que se trate, para terminar en un casi monopolio por parte del Estado.

Hay otras empresas, por el contrario, que por el capital exigido, las expropiaciones necesarias, los terrenos ocupados y la limitación natural de los ingresos brutos, constituyen un monopolio natural para cuya apropiación se necesita casi siempre el apoyo del Estado; entre estas empresas se cuentan los ferrocarriles, y sería empeño vano aplicar los principios de la libre concurrencia a empresas monopolizadas de hecho, en las que la intervención del Estado está naturalmente indicada. Bueno será advertir, sin embargo, que la tal intervención económica derivada del papel que el Estado representa en la constitución de la empresa, no justifica en modo alguno las ridículas exageraciones a que se ha llegado en nombre de una pretendida seguridad pública,

que ha llevado el intervencionismo a un ridículo figoneo, dejando abandonados muchas veces los verdaderos intereses comerciales del público. Conste, sin embargo, para satisfacción de los interesados, que de la tal exageración no son ellos los culpables, sino el Poder central, siempre propicio a extender la esfera de su autoridad.

De la definición adoptada para el Estado se deduce fácilmente que consideraremos como tal, no sólo el Gobierno central, sino las Diputaciones, Municipios y Asociaciones delegadas de ellos, que, como sucedía con la *Société nationale* de la antigua Bélgica, asumen todas las atribuciones de aquéllos con relación a un fin determinado: la construcción y explotación comercial de los ferrocarriles en este caso.

La socialización y municipalización de servicios se ha extendido a los de caracteres más variados. Sin hablar de los de Beneficencia e Instrucción y de los relacionados con la salud pública, pueden citarse los transportes de mercancías y viajeros, las distribuciones de gas, agua y electricidad, producción de fuerza y alumbrado, el suministro de materias de primera necesidad y los correos, teléfonos y telégrafos.

De todos ellos pueden citarse ejemplos, favorables los unos y contrarios los otros a la explotación por el Estado; pero lo que sí puede afirmarse es que siempre ha sido una causa de perturbación para el buen servicio el interés político de los gobernantes, lo que obliga a separar la administración de la empresa de la administración pública, dotando a las empresas públicas de una autonomía eficaz y de un consejo de administración elegido fuera de las organizaciones políticas, con responsabilidad propia y obligado a llevar una contabilidad y presupuesto independientes. En caso contrario sólo se podrá hacer intervenir al Estado en empresas poco lucrativas y de contabilidad relativamente sencilla, como el servicio de Correos, en que hasta el transporte es confiado a las empresas ferroviarias bajo la inspección del Estado; pero en los demás casos la gestión será defectuosa, los consejos de administración serán meros delegados de las Cortes, los empleos puestos a disposición de las personas influyentes, y no habrá fuerza humana capaz de resistir los reiterados empujes de las fuerzas políticas, que en el caso particular de los ferrocarriles traerían como consecuencia la construcción de ramales inútiles, como hoy sucede con las carreteras, creación de trenes que circularían vacíos, paradas en estaciones sin importancia, edificaciones lujosas donde nada las justificase, indisciplinas del personal, cuyos castigos levantaría la influencia política, y tantas otras de que ni aun hoy mismo se ven libres las empresas particulares.

Es de notar que estos males resultan agravados cuando el régimen de gobierno es un régimen democrático basado en el sufragio universal, y cuando la inestabilidad de los ministerios haría cambiar continuamente las orientaciones de la dirección, en el caso de no dotar a ésta de la independencia y estabilidad que acaban de señalarse.

## II.

### SISTEMAS DE EXPLOTACIÓN DE LOS FERROCARRILES.

A cuatro grupos pueden reducirse los sistemas de explotación de los servicios públicos: la explotación libre, la explotación por el Estado, la concesión y el arriendo. Los tres últimos están caracterizados por una intervención directa del Estado en el régimen financiero y en la implantación de tarifas, y aunque pueden atribuirse a cada uno caracteres especiales, se pasa de uno a otro por una gradación continua, que dificulta con frecuencia la determinación del grupo a que un régimen determinado puede corresponder.

Para poder comparar acertadamente estos sistemas, debe tenerse en cuenta el carácter especial de la industria ferroviaria, resultante de que en ella no puede existir la concurrencia libre.

Para establecerse una vía de comunicación entre dos puntos, no puede acudirse a un número indefinido de soluciones, sino que éstas vienen determinadas por la Geografía del país, que obliga a adoptar ciertos trazados, que rara vez son realizables si el Estado no impone su autoridad, valiéndose para la adquisición de los terrenos de su expropiación forzosa.

Sobre una vía ya establecida pueden concurrir libremente diferentes empresas de transportes, concurrencia que actualmente se establece en los transportes marítimos y por carreteras o canales; pero las condiciones técnicas de la explotación de los ferrocarriles y las exigencias de un transporte rápido por una vía determinada, obligan a no admitir la libre concurrencia en este caso; sólo algunos transportes especiales, vagones-cisternas y frigoríficos y transportes de muebles, son efectuados por empresas libres que están obligadas a entenderse con la propietaria de la línea o concesionaria de su explotación.

Queda, pues, limitada la concurrencia verdadera al caso de líneas distintas que sirven una misma región, y aun en este caso veremos que la concurrencia no puede ser duradera.

En primer lugar, el número de líneas ha de ser escaso, en virtud de las condiciones geográficas antes citadas, y en segundo lugar son tan grandes los gastos de construcción en los ferrocarriles y su influencia en el precio de los transportes, que es muy difícil encontrar empresas que se arriesguen a tan grandes desembolsos con éxito inseguro, lo que unido a la intervención del Estado para la expropiación forzosa, hace de una vía ferroviaria un monopolio de hecho, aunque de derecho no esté establecido.

Suponiendo que lleguen a establecerse varias líneas en concurrencia, sea en todo o en parte de su tráfico, no debe perderse de vista que el capital inmovilizado es una fracción muy grande del capital total, y que, por tanto, continuará la explotación siempre que los ingresos superen en algo a los gastos parciales de cada transporte, ya que por pequeño que sea el interés que para dicho capital inmovilizado se obtenga, siempre sería más ventajoso que el abandono total de la línea.

Las empresas se harán, pues, una concurrencia llevada hasta la exageración, lo mismo si son propietarias que concesionarias de la línea; concurrencia que persistirá indefinidamente, a no ser que los gastos de transporte fueran mucho menores para una de las empresas, y aun en este caso sucede con frecuencia que el tráfico no común a ambas líneas ayuda a sostener la concurrencia del tráfico común.

Esta concurrencia ruinoso, puesto que no remunera el capital invertido, se prolonga aun después de la quiebra de una o ambas empresas, y dado el reducido número de empresas concurrentes, trae como consecuencia la coalición entre ellas, con la consiguiente elevación de precios, que en este caso deben remunerar capitales mucho mayores que los que se hubieran invertido en perfeccionar la línea primitiva para hacerla capaz de un mayor tráfico.

En el caso de que la nueva línea reúna condiciones más favorables para la explotación del tráfico común, la primera tendrá que abandonar este tráfico y, aun en el caso de que pueda subsistir con el no común, la coalición se impondrá para obtener entre ambas el mayor rendimiento.

En resumen, la concurrencia que en las industrias fabriles y manufactureras conduce a una disminución de los precios de venta, en el caso actual termina siempre por un monopolio que originará un aumento de precios debido al mayor capital inmovilizado.

La explotación libre de una industria que naturalmente constituye un monopolio, no puede reportar ninguna ventaja a los consumidores sometidos a las exigencias de las empresas, y si bien es cierto que

nadie puede negar a éstas el derecho de establecer a sus expensas las líneas de comunicación que juzguen convenientes, también lo es que en la casi totalidad de los casos necesitan el apoyo del Estado para la expropiación de los terrenos particulares y ocupación de los públicos, en cuyo caso la empresa constituye ya una concesión de los Poderes públicos por mucha que sea la libertad que las compañías concesionarias se reserven.

La explotación libre de los ferrocarriles y las concesiones con entera libertad para el concesionario, apenas se han manifestado en otros países que Inglaterra y los Estados Unidos, en los que la experiencia ha venido a confirmar los anteriores razonamientos.

En Inglaterra el rápido desarrollo de las vías férreas y la gran libertad de que gozan las empresas produjo una crisis que fué solucionada por la coalición de las empresas que aseguraban el tráfico entre los mismos puntos, estableciéndose entre éstos precios firmes que las compañías interesadas hacen descender a veces, pero sin que exista guerra de tarifas ni competencia ruinosa; a pesar de esta semi-coalición los intereses repartidos rara vez superan el 4 por 100 del capital invertido, y es con frecuencia menor.

En los Estados Unidos la guerra de tarifas ha sido más duradera, pues la Administración de Justicia considera ilegal todo acuerdo que tienda a impedir la baja de los precios y no imponía pena ninguna a las compañías que faltaban a los contratos de coalición que la Jurisprudencia considera como contrarios al Derecho común.

Tal sistema no ha bastado para impedir las coaliciones, pero la falta de sanción penal hacía frecuentes las deserciones, las guerras de tarifas se renovaban y repetían continuamente, haciendo imposible la estabilidad de los precios; el comercio se ha resentido de tal sistema de explotación y exige hoy una mayor intervención del Estado en la reglamentación de las tarifas.

En esto ha venido a demostrarse una vez más que los obstáculos opuestos por la legislación al efecto natural de las leyes económicas sólo consiguen retardar la aparición de los resultados, pero nunca establecer un estado de equilibrio contrario a dichas leyes; son como resistencias pasivas que se oponen al libre juego de las fuerzas, sin ser capaces por sí mismas de determinar un movimiento.

En los Estados Unidos la competencia ruinosa, que no pudo contrarrestarse por la coalición de las empresas que las leyes condenaban, dió por resultado una depreciación de los valores ferroviarios, que facilitó su adquisición por las empresas más poderosas o por nuevos

grupos financieros, que una vez dueños de aquellos valores imponían por sus decisiones la tarificación más conveniente, que no pudo lograrse por coaliciones de empresas distintas. Así se han constituido los grandes sistemas de Vanderbilt, del New York central, etc., formados por la agrupación de distintas concesiones de una misma región, a veces muy extensa, y desde cuya aparición los precios han subido ligeramente, pero ha desaparecido aquella inestabilidad que provenía de la competencia exagerada, no contrarrestada por coaliciones duraderas.

El sistema de la libre concurrencia aplicado a lo que por su propia naturaleza constituye un monopolio, ha producido en los países de su aplicación una reacción del público y del comercio, favorable a la intervención del Estado en la explotación económica de los ferrocarriles, viniéndose a parar al sistema francés, del que el nuestro no es más que una copia. El Estado concede a las empresas el monopolio de las líneas o se reserva la facultad de explotarlas por sí mismo, gozando en ambos casos de una intervención sobre la aplicación de las tarifas; la libertad existe para la creación de nuevas líneas, pero ya vimos las dificultades que presentan tales construcciones cuando no cuentan las empresas con el apoyo del Estado, que no debe cederlo más que por razón de utilidad pública. Este régimen no es más que la sanción oficial del monopolio que naturalmente constituyen las líneas ferroviarias; el apoyo del Estado y la expropiación forzosa no son más que los medios más adecuados para conseguir la mejor satisfacción de interés público, y a cambio de este apoyo el Estado puede y debe reservarse la intervención necesaria para evitar que este monopolio, por él establecido, resulte una explotación abusiva del público.

Resultan de aquí las tres soluciones que antes se apuntaron: explotación directa por la administración, concesión de la línea a una empresa particular que debe explotarla en condiciones determinadas, y arriendo de las líneas a una empresa particular. La concesión y el arriendo no se diferencian más que en el régimen financiero, pero como sistema de explotación ambos representan una delegación del poder del Estado a favor de una empresa particular, que deberá, en cambio, sujetarse a las condiciones impuestas por aquél.

Técnicamente considerados no puede darse la preferencia a uno ni a otro de estos dos sistemas, y en cuanto al interés público, si el régimen de las concesiones es por su naturaleza predispuesto a obtener el mayor rendimiento económico, el de la explotación directa lo es a buscar el máximo interés político, y nadie podrá dudar que sean los ingresos y no la política la mejor medida de los servicios prestados.

Sólo en el caso de entregar la administración a un consejo independiente hasta de las influencias del Parlamento, podría preferirse la explotación directa al régimen de concesiones; pero en los demás casos resultarán favorecidos los pueblos o regiones y hasta los empleados y obreros favorables al partido que gobierna a expensas del presupuesto general, de la disciplina y del buen régimen de la industria.

Bueno será hacer notar a los defensores de la explotación directa, por su mayor accesibilidad para la rebaja de tarifas, que podrá discutirse la repartición de los beneficios entre el Estado que concede el monopolio, los capitales que se arriesgan o los empleados y obreros que proporcionan su trabajo; pero que nadie podrá defender la justicia de beneficiar con una venta inesperada a industriales, propietarios y regiones que nada arriesgaron, por la sola razón de su influencia política.

### III.

#### ESTUDIO ECONÓMICO DE LOS FERROCARRILES.

Dejando a un lado la intervención que el Estado se reserve sobre la explotación técnica, y entrando de lleno en las cuestiones económicas, vamos ahora a considerar los distintos factores que intervienen en el precio de coste del transporte, las tarifas a que dan lugar y la intervención que corresponde al Estado sobre dichas tarifas; en una palabra, todo lo que constituye el fundamento de las relaciones comerciales entre las empresas y el público, dejando para más adelante el estudio de las relaciones financieras entre aquéllas y el Estado, con el consiguiente reparto de los beneficios obtenidos o de las pérdidas sufridas.

Las industrias de transportes, como las demás industrias, ni están en absoluto exentas de la concurrencia ni totalmente alejadas del monopolio; entre estos dos tipos extremos oscilan, acercándose ya a uno, ya a otro, según la mayor o menor facilidad para la implantación de industrias rivales. En los ferrocarriles, la cuantía de los capitales inmovilizados en forma tal, que una vez abandonada la empresa no tendrían aplicación, las condiciones geográficas de los trazados y la protección del Estado son otras tantas causas que aproximan esta industria hacia el monopolio.

Los dos tipos límites, el de la libre concurrencia y el del monopo-

lio, se caracterizan económicamente porque en el primero el valor comercial o precio de venta de los productos o servicios tiende hacia un límite inferior, que es su coste de producción, del que nunca se separa mucho en condiciones normales, y en el monopolio, por el contrario, se aproxima a un límite superior, que es el valor de uso que para el consumidor tiene el producto o servicio. Para que un transporte sea explotable en ambos casos, es necesario que la totalidad de los ingresos sea, por lo menos, igual a la totalidad de los gastos, incluyendo el interés y amortización de los capitales inmovilizados; cuando el interés que a éstos corresponda resulte inferior al tipo corriente de interés, los capitales no se arriesgan a la empresa y el ferrocarril no será construido sin apoyo especial del Estado; mas si por equivocación en las previsiones se hubiera terminado la construcción, la explotación continuará, por pequeño que sea el interés obtenido, ya que siempre será este preferido al abandono total de los capitales; cuando los ingresos sean inferiores a los gastos la empresa no puede llevarse a cabo sin subvenciones del Estado o de las corporaciones locales.

Vista la importancia del valor de los capitales inmovilizados, estudiemos su influencia en el coste de producción de los transportes. Pertenece la industria de los transportes ferroviarios a aquel tipo de industrias en las que, una vez establecidas y dentro de ciertos límites, el precio de coste de los servicios efectuados disminuye con la cantidad de ellos. Una empresa de tal naturaleza cuenta, en efecto, entre sus gastos una porción de ellos que no varía sino muy lentamente con el aumento de tráfico; tales son los gastos de entretenimiento, de la infra-estructura, gastos de dirección y administración, interés de los capitales empleados, etc.; en tanto que otra serie de gastos aumentan casi proporcionalmente a las toneladas kilométricas remolcadas, especialmente si en la evaluación de longitudes se atiende a la longitud virtual de los trayectos; tal es el caso de los gastos de tracción, conservación de los carriles y reparaciones del material móvil, si bien en estas últimas la falta de empleo de los coches y vagones no excluye cierta clase de entretenimiento.

Representando por  $A$  la suma de los gastos permanentes generales y por  $B$  el coeficiente correspondiente a la tonelada kilométrica remolcada, el gasto total será para un tráfico de  $T$  toneladas kilométricas

$$G = A + B \cdot T$$

y el coste medio del transporte para la empresa es por unidad

$$P = \frac{A}{T} + B,$$

que será también el precio mínimo que ha de exigirse al público para que la industria resulte remuneradora, pero debe notarse que una vez establecida la empresa ésta tiene interés en transportar aun a precios inferiores a  $P$  siempre que sean superiores a  $B$ , ya que en estas condiciones el aumento de ingresos es superior al de gastos. Como los capitales que representan el gasto general  $A$  son en su mayoría inutilizables en caso de abandono de la empresa, las compañías continuarán los transportes aun con ingresos inferiores a  $G$ , siempre que basten a cubrir los gastos variables realizados. Es más, todas las empresas recurren a precios inferiores a  $P$  para aumentar su tráfico con mercancías que no podrán soportar tales tarifas y aun es fácil ver que sólo por tal procedimiento resultan remuneradoras ciertas empresas.

La ecuación

$$p = \frac{A}{T} + B \quad \text{ó} \quad (p - B) \cdot T = A$$

representa en coordenadas cartesianas rectangulares una hipérbola equilátera con una asíntota para  $p = B$ , curva representada en la figura 1.<sup>a</sup>

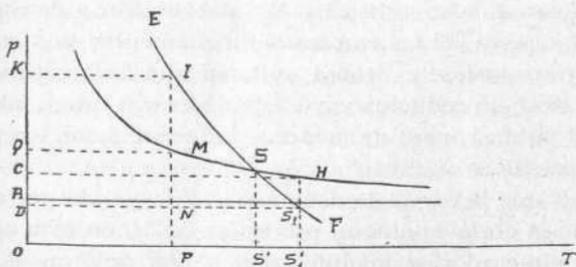


Fig. 1.<sup>a</sup>

Para un tráfico de  $T$  toneladas kilométricas el coste del transporte para la empresa, se compone de una constante  $B = \overline{NP}$  y de una variable  $\overline{MN}$  que disminuye al aumentar el tráfico; los gastos totales  $G$  están representados por el área del rectángulo  $\overline{MQOP}$  y los

gastos permanentes generales por la del rectángulo  $MNRQ$ , cuya área es constante para todos los tráficos, por tratarse de una hipérbola equilátera.

La curva de demanda de transportes será una curva  $EF$ , que da tráficos cada vez menores a medida que aumenta el precio del servicio; si dicha curva corta en un punto  $S$  a la hipérbola, la aplicación de un precio  $SS'$  hace igualar los ingresos y los gastos, y para todo precio superior a él son aquéllos mayores que éstos; la empresa podrá obtener grandes beneficios, pero la utilidad pública del ferrocarril disminuirá, y tratándose de concesiones públicas en que no cabe la regulación de la concurrencia, estará justificada la intervención gubernativa.

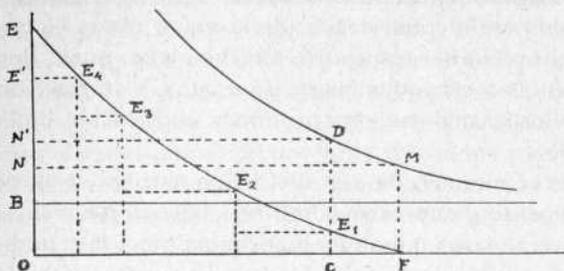
Pero la curva  $EF$  no será la misma para toda clase de mercancías, puesto que no es para todas el mismo el aumento de su valor por el transporte; habrá, pues, una serie de precios correspondientes a cada grupo de mercancías. Ahora bien, si  $EF$  representa la curva media de la demanda, puede suceder que la porción  $SF$  que necesita tarifas reducidas inferiores a veces al mismo coste del transporte  $OR$ , sea de aquellas mercancías que mayor utilidad pública ofrecen, como son los artículos de primera necesidad, hullas, ganados, etc. El Estado reclamará en tales casos la implantación de precios  $S_1S_1'$  en que el transporte se efectúa con una pérdida representada por el rectángulo  $S_1DCH$ , pero será a costa de permitir para otras mercancías la implantación de tarifas elevadas, tales que los beneficios representados por el rectángulo  $KIMQ$ , o la suma de ellos si son varios, compensen la anterior pérdida.

Es de notar que en este caso la intervención gubernativa no va contra los intereses de las empresas directamente, sino contra los de los demás transportes, y deberá evitarse que la bonificación conseguida para ciertos productos vaya a perjudicar a otros, tal vez de mayor utilidad pública, pero de menores influencias con los gobiernos o con las empresas.

Puede ser que la curva de demanda  $EF$ , cayendo por debajo de la hipérbola no la corte en ningún punto (*fig. 2.<sup>a</sup>*); en este caso, ningún precio es remunerador, y los inferiores a  $OB = B$  ni siquiera compensan el gasto de su transporte; pero haciendo pagar a cada mercancía lo que por la curva de demanda le corresponde, los ingresos estarán representados por la superficie  $OEF$ , los gastos por la del rectángulo  $FMNO$  y la empresa será remuneradora si la primera excede a la segunda, aun cuando cada precio aisladamente no lo sería.

En realidad no puede cobrarse a cada mercancía todo lo que estric-

tamente puede pagar, pero clasificándolas en grupos y aplicando una misma tarifa a las de cada grupo, vendrán los ingresos representados por el área escalonada  $OCE_1E_2E_3E_4E'$ , que deberá ser superior a la  $CDN'O$ , para que la empresa se realice sin pérdidas.

Fig. 2.<sup>a</sup>

Estas consideraciones, elementales sin duda alguna, son a veces olvidadas por quienes reclaman o defienden la intervención del Estado para la reducción de las tarifas de transporte.

Las mismas conclusiones son aplicables en aquellos casos en que el Estado impone determinadas tarifas o la libre circulación a favor de algunos de sus funcionarios; para conservar el mismo ingreso no queda otro recurso que el aumento de las tarifas restantes, y salvo el caso de imponerse dicha reducción sobre los beneficios netos, lo que nunca se realiza si éstos no pasan del interés de los capitales, la reducción será, en definitiva, pagada por los demás utilizadores del ferrocarril, sin que pueda nunca asegurarse que tal forma de pago para servicios públicos que interesan a toda la nación, sea más equitativa que el pago por todos los nacionales por medio del Tesoro público. El sistema corriente goza de mayor favor por parte de los funcionarios beneficiados, que en caso contrario se verían obligados a justificar la necesidad de sus recorridos; pero tal sistema, en vez de satisfacer los gastos con arreglo a las leyes generales del impuesto, los hace caer sobre los transportes, en mayor proporción sobre quienes más tráfico proporcionen a las líneas más frecuentadas por los funcionarios, y exceptuando los funcionarios encargados de inspeccionar dichas líneas, cuyos servicios son en realidad utilizados por quienes las emplean, nadie defenderá en los demás casos tal sistema de contribución a los gastos públicos.

Las consideraciones que anteceden son generales y aplicables a toda industria en que el coste de producción varía en razón inversa

de la cantidad de productos fabricados; pero en el caso de los ferrocarriles conviene profundizar más en el análisis económico, considerando separadamente los gastos de peaje y los gastos de transporte.

En las industrias de transporte es preciso remunerar, no sólo los gastos del desplazamiento de los viajeros o mercancías, sino los capitales invertidos en la construcción de la vía y obras de cargue y descargue; en el precio del transporte intervendrán, pues, dos fracciones correspondientes a estas dos clases de gastos, y la fracción destinada a remunerar los gastos de construcción y explotación de la vía se denomina peaje.

El interés económico de esta distinción estriba en que en el transporte propiamente dicho cabe admitir la libre concurrencia, en tanto que el peaje remunera un monopolio originado por las condiciones geográficas del terreno, por la necesidad de la expropiación forzosa para la construcción, y porque aun en el caso de que llegara a establecerse concurrencia, la experiencia ha demostrado que no tarda en llegarse a la coalición entre empresas cuyas líneas sirven los mismos intereses en un trayecto algo importante.

Otro carácter distintivo de los gastos que remunera el peaje es la inmovilización de la mayor parte de los mismos, ya que en caso de abandono de la empresa se pierden sin compensación las construcciones, desmontes, túneles, puentes, etc. En el peaje hay también una fracción de gastos que dependen del tráfico y que, por tanto, forman parte del precio parcial de cada transporte; suelen evaluarse estos gastos de entretenimiento de la vía en 0,003 a 0,004 pesetas por tonelada o viajero transportado a 1 km., lo que aun suponiendo un tráfico de 500.000 toneladas y 400.000 viajeros, representa de 2.700 a 3.600 pesetas anuales; para tal línea pueden fijarse en 300.000 a 500.000 pesetas por kilómetro los gastos de establecimiento, cuyo interés y amortización en noventa y nueve años al 4 por 100, representan de 12.240 a 20.400 pesetas anuales, quedando así demostrado el carácter de gastos generales que predomina en el peaje.

Por el contrario, en los gastos de transporte existe también una fracción correspondiente a la explotación y conservación del material móvil y tractor, que es independiente del tráfico, y como esta fracción viene a compensar la proporción variable del peaje, de aquí que sea frecuente considerar éste como la fracción del precio total que corresponde a los gastos generales.

Antes de pasar adelante conviene hacer notar, por lo que a la intervención del Estado se refiere, que los gastos independientes del trá-

fico para una empresa dada dependen, en cambio, de la capacidad máxima de la línea; los gastos de construcción, las necesidades de la explotación y el capital invertido en la adquisición del material aumentan cuando el desarrollo del tráfico exige la instalación de la doble vía, ampliación de las estaciones y sus dependencias, aumentos de personal, etc., circunstancias todas que no deben olvidar los Gobiernos cuando tratan de imponer la obligación de servir con prontitud el tráfico excesivo que se presenta en ciertas épocas, olvidando que todo aumento en la capacidad de las líneas dificulta la rebaja de tarifas, sin más beneficios a veces que el de procurar mercados más lucrativos a determinada clase de productos. Sólo en el caso de que el interés público reclamara la rápida ejecución de tales servicios, estaría justificada la intervención del Estado para imponer el aumento de material y ampliación de las construcciones.

Una vez construido el ferrocarril, el interés de la empresa estriba en realizar todo transporte, aun cuando no llegue a satisfacer el peaje, siempre que remunere su correspondiente gasto parcial. Cuando a la construcción de la línea concurre el Estado con subvenciones, garantías de interés, cesión de terrenos, etc., su concurso se traduce por una reducción de los gastos de peaje, que pasan a cargo del Tesoro público y, por tanto, de los contribuyentes. Pasemos ahora a estudiar las consecuencias de este concurso.

Siendo el monopolio el sistema corriente de explotación de los ferrocarriles, el interés de las compañías trata de hacer pagar a cada mercancía todo lo que por su transporte puede dar con arreglo a la curva de la demanda; si el total de los ingresos no cubre los gastos, la empresa no se constituirá, salvo error en las previsiones, sino contando con el apoyo del Estado; por el contrario, si aquéllos los superan, el Estado puede intervenir de dos modos: imponiendo a las compañías la reducción de tarifas o aumentando los impuestos sobre transportes.

En estricta justicia, el peaje debe remunerar los gastos de establecimiento efectuados por las compañías o por el Estado. ¿En qué condiciones deben substituirse los impuestos o reemplazar a éstos?

En primer lugar, pueda prescindirse del peaje que correspondería a los terrenos cedidos por el Estado, Corporaciones o Municipios, ya que aprovechando más directamente estos terrenos a los más próximos vecinos, que son los que primeramente resultan beneficiados por el ferrocarril, se establece una cierta compensación entre el valor de los terrenos cedidos y los beneficios que a las respectivas localidades reporta la línea.

También resulta, hasta cierto punto, justificado que el Estado tome a su cargo la cesión de los terrenos para todas las líneas de interés general, o el Municipio para una red de tranvías suficientemente extensa. La pérdida, como contribuyentes en este caso, está compensada por los beneficios originados por la disminución del peaje, y no resultan desigualdades de importancia más que en el caso de que las líneas dejen sin servir una región o barrio de importancia que habiendo tenido que soportar la pérdida correspondiente a una disminución de los bienes comunes, no goza, en cambio, de las ventajas debidas al ferrocarril. En tal caso resulta más equitativo que el Estado cobre como impuesto de transporte lo que por sus cesiones le corresponde, cuidando solamente de no recargar las mercancías, cuyo valor gana poco con el transporte, o cuyo desplazamiento tiene un gran interés general.

Fuera de estos casos el interés público aconseja hacer pagar a las mercancías todo lo que por su transporte pueden dar, elevando el Estado sus impuestos a medida que aumenta el ingreso neto, no el ingreso bruto de las empresas. Desde el momento que un productor o comerciante está dispuesto a efectuar el transporte al precio que la curva de la demanda indica, toda reducción representa para él una renta, y mientras esta renta exista no será equitativa la substitución del peaje por el impuesto.

Cuando la empresa asume todo los riesgos y aporta todos los capitales, justo es que se beneficie antes que quien nada arriesgó en la construcción del ferrocarril, y cuando con arreglo a las tendencias actuales, el Estado interviene garantizando ciertas ventajas y aportando terrenos, la percepción de los peajes es un medio de allegar recursos para el Tesoro mucho más equitativo que las contribuciones, puesto que recargan precisamente aquellas mercancías que más beneficiadas salen por su transporte.

En definitiva debe procurarse adoptar un sistema de tarificación que se adapte lo más exactamente posible a las necesidades del tráfico, admitiendo todas las bonificaciones necesarias para las mercancías que no pueden pagar precios elevados por su transporte, pero sin reducir inútilmente las tasas de las que pueden pagarlos, y si por tal sistema, a falta de acuerdos financieros entre las compañías y el Estado, resultaran aquéllas excesivamente beneficiadas, vale más que el Estado busque sus recursos por un aumento del impuesto sobre transportes que no por cualquier otro sistema de contribuciones.

Sucede con frecuencia, por el contrario, que el transporte no puede

pagar los gastos que origina, en cuyo caso el Estado recurre a subvenciones, garantías, reducción de impuestos que a la larga recaen sobre el contribuyente y que son medios que no deben prodigarse sino cuando sean absolutamente necesarios para asegurar un transporte de materias de primera necesidad o cuando lo exige la defensa nacional.

Como reglas generales que pueden servir de base a la intervención de los gobiernos puede asegurarse que cuando el mercado de destino de una determinada mercancía está servido por varias localidades sin predominio absoluto de ninguna, la rebaja en una línea determinada beneficia solamente a los productores o comerciantes de dicha mercancía; cuando la rebaja es general, los consumidores se benefician de ella casi totalmente; cuando una localidad monopoliza el mercado de una mercancía en otra, la rebaja beneficia a los productores si éstos están coaligados y a los consumidores si entre ellos hay concurrencia.

#### IV.

##### PARTICIPACIÓN DEL ESTADO EN LOS BENEFICIOS Y PÉRDIDAS.

El régimen de la concurrencia libre con absoluta libertad para las empresas apenas es aplicable más que a las líneas construídas en condiciones sumamente favorables y que proporcionan una gran suma de ingresos. En tal caso el aumento de beneficios de las empresas sólo queda limitado por la concurrencia que pueden hacer nuevas líneas a las ya establecidas; las condiciones necesarias para el establecimiento de un ferrocarril hacen de esta industria un monopolio natural que limita la posibilidad de la concurrencia, y siendo poco numerosos los concurrentes, la coalición no se hace esperar sin otro resultado que haber aumentado los gastos generales y capitales inmovilizados que el público debe remunerar.

Cabe conceder a las empresas el monopolio del transporte, impidiéndose por el Estado la implantación de líneas concurrentes e imponiendo, en cambio, cuando los beneficios aumentan, la rebaja de tarifas, mejora de servicios o aumentos de los emolumentos del personal; pero tal sistema conduce con frecuencia a disminuir tarifas en regiones colocadas favorablemente y que podrían pagar más por el transporte, en tanto que en otras peor situadas las tarifas serán aún prohibitivas; a aumentar servicios en aquéllas mientras éstas carecen de los

más necesarios, o a asignar a los empleados y obreros de las primeras salarios elevados mientras los de las segundas los reciben escasos. ¿No es más equitativo en estos casos que el Estado tome parte en los beneficios excesivos de unas empresas a la vez que contribuye a las cargas de las otras? Conviene advertir que por tal participación no debe entenderse el apoderamiento por parte del Estado del exceso de ingresos de las empresas en los años buenos, sino una acertada asociación financiera que en el caso de compañías libres sujetas a todos los riesgos podrá reducirse a un bien estudiado sistema de tributación que sustituya al irracional del impuesto sobre los ingresos brutos hoy empleado.

La asociación financiera, beneficiosa en el caso citado, es de absoluta necesidad cuando las líneas han de ser poco remuneradoras; las compañías en este caso no se arriesgan sin ciertas garantías y la participación del Estado en los beneficios puede ser tanto mayor cuanto mayor es el riesgo corrido.

Cualquiera que sea el sistema de participación convenido es de absoluta necesidad que la empresa concesionaria no llegue a perder el interés de explotar la línea en buenas condiciones, como sucederá en el caso de asegurar a las compañías un interés determinado, cargando el Estado con los beneficios y pérdidas que resulten; la acertada o desacertada dirección de la empresa influirá solamente sobre el Tesoro público y se necesitará mucha virtud en los consejos de administración para conseguir una buena administración sin más estímulo que el patriotismo.

Sea  $C$  el capital de establecimiento de una línea,  $i$  el tanto por uno de interés,  $I$  los ingresos totales y  $G$  los gastos; los beneficios obtenidos, son:

$$I - iC - G = I - (iC + G)$$

y el déficit cuando

$$I < iC + G$$

es

$$iC + G - I = iC - (I - G).$$

En las concesiones con garantía de interés, el Estado se compromete a pagar este déficit, y tal sistema, cuando la línea no puede dar más interés que el garantizado por el Estado, trae como consecuencia

la desaparición de todo estímulo para la acertada dirección. Este es, sin embargo, el tipo adoptado para nuestros ferrocarriles secundarios, en los que el Estado abona la diferencia hasta garantizar un 5 por 100 del capital invertido en la construcción y en el material móvil; cierto que la dirección de la empresa corresponderá en este caso a un delegado del Estado, hasta que se obtenga un 5 por 100 de beneficio líquido, pero no podrá exigirse a un solo delegado toda la labor del Consejo de Administración.

El sistema racional de aplicar la garantía de interés, sería dejar a disposición de las empresas una pequeña fracción  $m \times (I - G)$  de los ingresos y dedicar el resto  $(1 - m)(I - G)$  a satisfacer la garantía de interés, que en este caso puede ser más reducida, junto con lo aportado por el Estado, que será en este caso

$$i \cdot C - (1 - m)(I - G).$$

Los ingresos netos de la compañía son, por tanto:

$$i \cdot C + m \cdot (I - G),$$

y reduciendo  $i$  convenientemente, se tendrá un sistema que, sin ser más oneroso para el Estado, si las previsiones resultan acertadas, no desinteresará a las compañías si el tráfico fuera insuficiente para proporcionar el interés garantizado.

El Estado puede contribuir con una parte  $C_1$  del capital, bien en metálico, bien encargándose de la construcción de ciertas obras; en tal caso, la garantía de interés será

$$i \times (C - C_1)$$

los beneficios netos de la empresa

$$i \times (C - C_1) + m \times (I - G)$$

y las cargas anuales del Tesoro,

$$i(C - C_1) - (1 - m)(I - G) + i_1 C_1,$$

siendo  $i_1$  el tipo de interés para los empréstitos públicos, que será,

por lo general, inferior al  $i$ , por gozar de mejor crédito para la colocación de capitales el Estado que las empresas particulares.

Los compromisos del Estado se extienden, pues, a la cantidad

$$i(C - C_1) + i_1 C_1 = i \cdot C + (i_1 - i) \cdot C_1,$$

y fácil es ver que desde el momento que los empréstitos oficiales se cubren a menor tipo de interés, resulta más ventajoso para el Estado hacer  $C_1 = C$ , llegándose así al sistema de arriendo con reparto de beneficios, en que el Estado aporta la totalidad del capital y la compañía arrendataria le abona anualmente la cantidad  $(1 - m)(I - G)$ , reservándose, como ganancias, una fracción  $m \times (I - G)$  de los ingresos netos.

En todas estas combinaciones debe cuidarse de que la participación de las empresas en las pérdidas y beneficios sea la misma en ambos casos, pues en caso contrario, las compañías procurarán efectuar ciertos gastos, no en los años más favorables para el servicio, sino en aquéllos en que la mayor proporción corra a cargo del Estado, lo que será fuente de discusiones continuas con el delegado del Gobierno, que no podrá siempre decidir, en justicia, a qué ejercicio debe cargarse cada gasto.

En nuestra ley de ferrocarriles secundarios, el Estado garantiza el 5 por 100, los beneficios quedan para la compañía hasta alcanzar un interés del 6 por 100, y si pasan del 6 por 100 recibe el Estado un tercio del exceso hasta compensación de sus desembolsos. Siendo  $A$  y  $B$  lo que perciben, respectivamente, la compañía y el Estado, se tiene en los distintos casos:

$$\begin{array}{lll} 1.^\circ & I < G & A = 0,05 C - (G - I) & B = - 0,05 C \\ 2.^\circ & I - G < 0,05 C & A = 0,05 C & B = - [0,05 C - (I - G)] \\ 3.^\circ & I - G < 0,06 C & A = I - G & B = 0 \\ 4.^\circ & I - G > 0,06 C & A = \frac{2}{3} (I - G) + 0,02 \cdot C & B = \frac{1}{3} [I - G - 0,96 \cdot C] \end{array}$$

Si en una serie de años los ingresos oscilan alrededor de los gastos, la compañía tendrá interés en trasladar a los años buenos la mayor suma de gastos hasta igualar los ingresos, puesto que en ellos el gasto será soportado por el Estado, en tanto que en los años de déficit serían soportados por ella. Por el contrario, si los beneficios líquidos oscilan alrededor del 5 por 100, le convendrá cargar los gastos sobre los años en que sea inferior para que los soporte totalmente el Estado.

Finalmente, si los beneficios líquidos vienen a representar el 6 por 100 del capital, le será preferido cargar la mayor suma posible de gastos a los años buenos, en que sólo tendrá que soportar los dos tercios, contribuyendo con otra tercera parte el Estado.

Cualquiera que sea el sistema del reparto acordado, debe recaer sobre los beneficios netos  $I - G$  y no sobre el ingreso total  $I$ ; en los sistemas con garantía de interés es frecuente hacerlo así; pero en la imposición de tributos sobre los transportes, que en realidad es un procedimiento de participación del Estado en los beneficios, lo corriente es gravar el ingreso total, no sin perjuicio para el servicio público.

Si una compañía tributa una fracción  $mI$  del ingreso total  $I$ , el beneficio correspondiente será  $(1 - m) \times I - G$ , y no habrá ningún interés en implantar ninguna reforma en que  $(1 - m)I < G$ . Por el contrario, tributando por el ingreso neto, se acometerán todas las que den lugar a esperar un ingreso  $I < G$ , con lo que resultará beneficiado el público, percibirá el Estado una fracción  $n(I - G)$  y quedará para la compañía el resto  $(1 - n)(I - G)$ .

En nuestro país, el transporte de viajeros está gravado con un 25 por 100 de la percepción de la compañía, o sea un 20 por 100 del ingreso total; toda reforma en el servicio que produzca un gasto  $G$  no será acometida mientras no proporcione una suma de ingreso

$$I = \frac{G}{0,80} = 1,25,$$

$G$  que representa un beneficio  $I - G = 0,25 \cdot G$ ; el sistema de tributación actual impide, por tanto, la adopción de toda reforma que no proporcione un beneficio de un 25 por 100.

Debe notarse que al mismo resultado se llega cuando los gastos de explotación de la línea se evalúan por medio de una fórmula lineal de la forma:

$$G = a + bI,$$

puesto que el ingreso de las compañías será:

$$(1 - m)(I - G) = (1 - m)(1 - b)I - (1 - m)a$$

y el del Estado,

$$m(I - G) = m(1 - b)I - ma.$$

La empresa no decidirá ninguna reforma cuyo coste real sea  $G$  mientras no espere obtener un ingreso

$$I > \frac{G}{(1-m)(1-b)},$$

en tanto que evaluando los gastos exactamente hubiera bastado que fuera

$$I < G.$$

No puede, en la práctica, llegarse a la exacta evaluación de los gastos precisos, pues no fijando éstos de antemano se corre el riesgo de que la empresa tienda a aumentarlos más de lo necesario, siempre que el tráfico no llegue a dar un beneficio del 5 por 100 con tal que llegue a cubrir los gastos, pues en estas condiciones irán a cargo del Estado.

Una fórmula de explotación debe contener, además de los dos términos anteriores, un término proporcional al recorrido kilométrico de los trenes, y si se desea aún mayor exactitud, una serie de términos proporcionales al número de viajeros, de toneladas, de kilómetros recorridos por éstos y aquéllos, al recorrido de los trenes que, respectivamente, circulan con cuatro, cinco o más agentes, etc. En este concepto y en términos generales pueden considerarse como buenas las fórmulas de las leyes españolas.

## V.

### INTERVENCIÓN DEL ESTADO EN LA TARIFICACIÓN.

Todo sistema de tarificación debe procurar hacer pagar al objeto transportado todo lo que por su transporte pueda dar; toda reducción innecesaria trae, por consecuencia, una renta injustificada para el dueño de la mercancía que podría pagar más por su transporte, dificultando, en cambio, la reducción de tarifas prohibitivas para otras mercancías.

Por otra parte, es de absoluta necesidad que las tarifas no sean prohibitivas para ninguna mercancía que pueda pagar el coste parcial

del transporte, con exclusión del peaje, y aun el interés público exige a veces que se transporten mercancías que no llegan a remunerar dicho coste, y cuyo transporte se hace posible gracias a la elevación de las tarifas de las otras.

La determinación de la tarifa equitativa no puede hacerse con sencillez más que cuando se trata de un transporte entre dos mercados regulares, en cuyo abastecimiento no tengan predominio las mercancías transportadas; el precio máximo del transporte es entonces la diferencia entre los precios de los dos mercados; pero en la mayoría de los casos, el precio en aquéllos está influido por la tarifa de transporte, y la empresa determinará entonces sus tarifas, tratando de obtener por tanteos el ingreso máximo.

La intervención gubernamental en estos casos ha de depender de las condiciones de los mercados, pues sucede con frecuencia que una vez impuesta una reducción de tarifas los precios apenas varían, quedando casi toda la reducción a beneficio del productor.

Tal cosa puede suceder en los transportes de carnes frescas, legumbres, frutas y demás productos de escasa duración desde numerosos centros de producción a una población numerosa que se abastece de ellos; el consumo que se hace en las aldeas productoras es muy escaso con relación al de la población abastecida, así que en ésta la cantidad ofrecida es casi independiente del precio de venta, que se regulará de modo que la demanda absorba la totalidad.

La tarificación ha de tener en cuenta la naturaleza de las mercancías, los gastos que ocasiona su transporte y la distancia recorrida; pero la influencia de estos elementos no puede ser la misma para todas ellas. En las mercancías que no pueden sostener precios elevados, como sucede por lo general en las primeras materias, el principal elemento que hay que tener en cuenta para su tarificación es el coste del transporte; de aquí que en ellas tengan gran influencia la velocidad, condiciones de carga y descarga y cuidados que requiera su transporte. Por el contrario, en aquéllas que pueden sostener precios elevados, estos elementos carecen de importancia, y la adquiere predominante el valor de uso del transporte, lo que el dueño de la mercancía puede dar por el servicio que se le presta.

Depende este valor, en primer lugar, del valor propio de la mercancía, ya que una tarifa determinada tiene menos influencia cuanto mayor es aquel valor.

La influencia de la distancia recorrida es esencial, porque aun cuando el coste del transporte sea mayor la percepción de un mismo

tanto kilométrico traería por consecuencia un precio prohibitivo que impediría el transporte, con perjuicio para los interesados en él y para la empresa. Es racional, por lo tanto, la adopción de tarifas decrecientes con la distancia recorrida, único medio de que las mercancías puedan recorrer grandes distancias sin elevación desmesurada de sus precios.

Pero debe notarse que la adopción de bases kilométricas decrecientes no se hace teniendo en cuenta los gastos del transporte, sino las facultades de la cosa transportada, y que, por tanto, siempre que las especiales condiciones de una localidad hagan variar aquéllas para todas las mercancías, se adoptará una «distancia de aplicación» distinta de la longitud real del trayecto y aun de la longitud virtual a que los gastos ocasionados sean proporcionales.

Cuando las dificultades excepcionales de un trayecto hagan que la tasa kilométrica adoptada no remunere los gastos, se empleará una distancia de aplicación mayor que la real; por el contrario, si cierto número de localidades no pueden pagar tarifas elevadas, el tráfico de ellas queda impedido sin beneficio para nadie, y la adopción de una distancia de aplicación reducida permite desarrollar aquél sin que pueda sostenerse que hay perjuicio para otras localidades mientras no estén en las mismas condiciones que aquéllas.

La adopción de una misma distancia de aplicación para todos los puertos capaces de abastecer una región o capital central, favorece el desarrollo equilibrado de dichos puertos, a la vez que asegura un suministro más perfecto de pescado; tal medida resulta, sin embargo, impracticable, si para localidades intermedias no pueden aplicarse tarifas superiores a la de las extremas.

Para una nación en que la producción interior no sea suficiente, será siempre beneficiosa la aplicación de tarifas reducidas para las mercancías importadas, sin que pueda sostenerse que la justicia exige aplicar la misma tarificación a las que no hayan tenido que soportar un viaje marítimo o terrestre más o menos largo.

Entre dos localidades que posean otro medio de comunicación, canal, tranvía, automóvil, cabotaje, etc., el tráfico se desarrollará casi totalmente por el más económico; la reducción de tarifas trae como consecuencia un mejor servicio sin perjuicio para nadie, y esta mejora resultará inaplicable si el Gobierno impone la reducción para todos los puntos intermedios.

La oposición sistemática al establecimiento de precios firmes, si no benefician a las estaciones intermedias, sólo consigue impedir la adop-

ción de reformas beneficiosas, pretendiendo en nombre de una justicia mal entendida que se aplique idéntico criterio a localidades de muy distintas condiciones.

## VI.

### CONCLUSIONES.

Resumiendo todo lo anteriormente expuesto, se ve confirmado que en esta materia, como en tantas otras de aplicación de la Economía política, no cabe sostener un criterio cerrado de intervencionismo o de abstención, de explotación por el Estado o de explotación libre; pueden citarse ejemplos favorables a unas y a otras Escuelas, y es inútil generalizar las conclusiones cuando las condiciones no son las mismas.

Como principios generales a que debe ajustarse el intervencionismo en los transportes ferroviarios, creemos haber demostrado en las líneas precedentes la necesidad de no apartarse de los que siguen:

1.º Para la explotación de los ferrocarriles por el Estado es indispensable dotar a los Consejos de administración de las líneas de una autonomía y responsabilidad eficaces, estabilidad asegurada contra los cambios políticos y contabilidad y presupuesto independientes.

2.º La industria ferroviaria es opuesta por naturaleza a la concurrencia libre, que trae por resultado la coalición de empresas con tarifas convenidas que deben remunerar mayores capitales inmovilizados que si desde el primer momento se hubiera impedido la concurrencia.

3.º Toda reducción innecesaria en la tarifa de un transporte determinado representa una renta para el dueño de la mercancía transportada; las tarifas deben tender a hacer pagar por el transporte todo lo que por él puede darse.

4.º Por el contrario, en ningún caso debe mantenerse una tarifa que por su elevación impida ciertos transportes, mientras éstos remuneren los gastos parciales, con exclusión de los de peaje.

5.º Aun en el caso de que la empresa obtuviera beneficios excesivos, vale más aumentar la participación del Estado, por impuestos en caso necesario, que reducir innecesariamente las tarifas.

6.º Como medio de contribuir a proporcionar recursos al Estado,

el pago de peajes es mucho más equitativo que la imposición de contribuciones.

7.º No debe aplicarse ningún sistema de participación del Estado, ni de impuestos, basado en el ingreso total, sino en el beneficio neto de las empresas.

8.º En todo sistema de subvenciones o garantías debe procurarse que nunca pueda quedar la empresa desinteresada de la acertada o desacertada administración, como sucede cuando garantizándola un interés fijo los productos del tráfico no bastan para satisfacerlo.

9.º Cuando los empréstitos por el Estado pueden realizarse a menor tipo de interés que los particulares, es más ventajoso el arriendo de la línea construyéndola el Estado, que la construcción con garantía de interés.

10. La proporción de reparto entre el Estado y la empresa debe ser la misma para los beneficios que para las pérdidas en todas las circunstancias que puedan presentarse.

11. Deben rechazarse las fórmulas de explotación que sólo contengan un término constante y otro proporcional al ingreso bruto.

12. La adopción de precios firmes y distancias de aplicación debidamente justificados es beneficiosa y no hay razón para extenderla a las estaciones intermedias.



# ARCADA MÚLTIPLE

POR

D. JUAN MANUEL DE ZAFRA

PROFESOR DE LA ESCUELA DE INGENIEROS DE CAMINOS

(Sesión del 17 de Octubre de 1915.)

---

Designamos así la estructura constituida por una serie de pilares verticales enlazados por arcos. Las formas de las fibras medias y las leyes de variación de momentos de inercia de los arcos, las longitudes y secciones variables de los pilares, así como los niveles de sus coronaciones, son cualesquiera.

El enlace de un pilar con los dos arcos que de él arrancan es, en general, un mutuo empotramiento elástico debido a la continuidad del material o al roblonado. Por degeneración puede el enlace entre dos de los tres, o entre todos los elementos, convertirse en articulación. Los pilares, empotrados en sus cimientos, pueden también degenerar en articulados. Por último, el terreno en que esos cimientos se asientan puede tener una compresibilidad apreciable y ceder en sentidos vertical y giratorio.

Una arcada de  $n$  vanos ofrece una indeterminación hiperestática del orden  $3n$ , que las degeneraciones pueden reducir incluso hasta el cero, haciéndola entonces isostática. En la forma general son menester  $3n$  ecuaciones de Mecánica elástica, que con las 3 generales de la geometría determinen las reacciones de la Tierra sobre la estructura, tres por cada uno de los  $n + 1$  cimientos.

La aplicación directa del fecundísimo teorema del mínimo trabajo elástico resuelve directamente el problema. La derivada parcial de la función expresiva de dicho trabajo, respecto a una cualquiera de las reacciones, valora en magnitud y signo el recorrido correspondiente. La nulidad de éste, si el terreno es prácticamente incompresible o su

proporcionalidad a aquella misma reacción, permite establecer tantas ecuaciones como incógnitas. Mas, por desgracia, salvo contadísimos casos, resolver un sistema de  $3n$  ecuaciones, cada una de las cuales contiene todas las incógnitas, es irrealizable.

Fraccionemos esa estructura, que por continuidad del material constituye una sola pieza de complicadísima forma, en una serie de estructuras elementales y establezcamos las condiciones de equilibrio estático y elástico de cada una por separado y de correlación entre las contiguas. Aunque así hemos de considerar por fuerza un número de incógnitas superior al  $3n$ , dichas condiciones han de formar, desde luego se ve, grupos escalonados de un modo sucesivo y de manejo relativamente fácil.

Aislemos un pilar del resto de la estructura, substituyendo la acción total que ésta ejerce por tres componentes, dos fuerzas y un par, en los sentidos vertical, horizontal y giratorio. Esté empotrado o articulado en su base el pilar, sea o no compresible el terreno, fácil es calcular los recorridos de esas componentes: son las proyecciones vertical y horizontal de los movimientos elásticos y el ángulo girado por la coronación del pilar al deformarse la estructura. Esas proyecciones y ángulo han de ser idénticos en magnitudes y sentidos a los correlativos de los extremos izquierdo y derecho de los arcos que el pilar sustenta.

Substituyamos ahora los dos empotramientos elásticos de un arco por una articulación y una deslizadera en las que actúen como causas exteriores las reacciones complementarias, fuerzas y pares que, juntamente con los recorridos verticales y horizontales de esas sustentaciones ficticias, hagan idénticas las deformaciones del arco real y verdadero y del virtual, así convertido en isostático. Resulta igualmente sencillo expresar en éste los recorridos angulares absolutos en ambos extremos y el lineal relativo de uno respecto del otro.

Tenemos, así, por cada pilar tres expresiones que valoran los recorridos  $v$ ,  $h$ ,  $\alpha$ , en función de las reacciones, y por cada arco otros tres valores: los giros  $\iota$  izquierdo y  $\delta$  derecho y la variación  $\Delta l$ , de luz, según la cuerda, funciones de los recorridos  $v$ ,  $h$ , de los pilares que sustentan el arco y de las reacciones complementarias de éste, que son los dos pares extremos y la fuerza o empuje dirigida según la cuerda. Esos seis valores  $v$ ,  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\iota$ ,  $\delta$  y  $\Delta l$ , dependen además de las causas exteriores de todo género que pilares y arcos sufren.

En cualquier nudo intermedio la forzosa igualdad de los giros del arco a la derecha  $\iota$  y del a la izquierda  $\delta$ , proporciona una primera

ecuación fundamental. Si los recorridos verticales  $v$  figuran como datos, por ser nulos o corresponder a asientos accidentalmente producidos, intervienen en esa ecuación los cuatro momentos extremos y los dos empujes de los arcos que se consideran. Pero si, en general, son dichos recorridos  $v$  desconocidos, asientos proporcionales a las acciones desarrolladas sobre el terreno, entran entonces, al eliminar los valores de éstas, no ya cuatro, sino ocho momentos y no dos, sino cuatro empujes, correspondientes unos y otros a los dos arcos que anteceden y a los dos que siguen al nudo en estudio.

En esta ecuación para nada intervienen las dimensiones de los tres pilares a que afectan esos cuatro arcos, pero sí las de sus cimientos. Influye poderosamente la manera de enlazarse esos pilares con los arcos; si en todos degenera en rótula el empotramiento de la coronación se igualan los momentos extremos derecho de un arco e izquierdo del siguiente, y los ocho de la ecuación se reducen a cinco. El vulgar teorema de los tres momentos no es sino la última de todas las sucesivas degeneraciones del de los ocho, al reducirse los arcos a una pieza recta, los momentos de inercia variables a uno solo y los empotramientos elásticos a simples apoyos.

En el caso verdaderamente típico en que pilares y arcos se empotran mutuamente, no es esa ecuación  $\iota = \delta$  la que interesa, sino otras dos, de las que es consecuencia: las que por expresar la igualdad de giros de la coronación del pilar y de los extremos de los arcos designamos por ecuaciones izquierda y derecha  $\alpha = \delta$  y  $\alpha = \iota$ . En cada una entran, en general, los cuatro momentos de los arcos sustentados por el pilar, más los dos que corresponden al adyacente, pero del lado opuesto al nombre de la ecuación. Si los recorridos  $v$  son datos, intervienen solamente los dos momentos del arco a cuyo extremo se refiere, más el de la coronación del pilar. Y claro es que acompañan a los momentos los empujes de los arcos que entran en juego.

En estas ecuaciones aparecen, por la forma que les damos, coeficientes numéricos de transcendental importancia: son las flexibilidades relativas. Valoran, en efecto, la relación entre las caracterizadas por el coeficiente de elasticidad, el momento típico de inercia (el tomado como unidad para medir los variables) y la longitud del pilar por una parte y de cada uno de los arcos por otra. Decir que la flexibilidad izquierda de un pilar es nula equivale a sentar que el arco de esa situación está perfectamente empotrado en él; hacerla infinita significa, por lo contrario, que entre los dos elementos existe una rótula perfecta sin rozamiento.

Esa perfección del enlace se refiere únicamente a la capacidad de éste para sufrir deformaciones giratorias, nula o indefinida en esos casos extremos; nada prefija respecto a la deformabilidad en sentidos vertical ni horizontal.

Al igualar de una parte las variaciones de longitud de la cuerda de cada arco y de otra las de distancia entre las coronaciones de los pilares que lo sustentan, obtenemos para cada uno la ecuación de la cuerda. Comprende en su forma general los momentos y empujes del mismo arco y de los inmediatos a izquierda y derecha; si los recorridos  $v$  son datos sólo entran en juego los de aquél.

La variabilidad de momentos de inercia de pilares y arcos se traduce por ciertos coeficientes numéricos. Unos son independientes de la forma del arco y no difieren mucho de los valores 1 y 2, por exceso o por defecto, degenerando en ellos cuando el momento de inercia se hace constante. Otros involucran a un tiempo la forma de la fibra media y la de variación de ese elemento. Igual carácter presentan tres parámetros de la dimensión línea, que son los multiplicadores de los empujes y que se anulan al degenerar el arco en viga recta.

La influencia de las causas exteriores se valora en nuestras ecuaciones por una serie de magnitudes, todas de las dimensiones fuerza  $\times$  línea, que llamamos momentos de causas. Tenemos en cuenta fuerzas o momentos, actuantes en arcos y pilares, aislados o distribuidos según leyes cualesquiera; asientos o alteraciones de distancia accidentalmente producidos; variaciones térmicas en unos y otros elementos, ya uniformes dentro de cada sección, ya variables de un modo lineal desde una fibra extrema hasta la otra. Todos esos momentos de causas son funciones bastante sencillas. Los relativos a las acciones exteriores resultan, cualquiera que sea la distribución de los valores típicos correspondientes a una fuerza de valor unidad, en sentido normal o paralelo a la cuerda del arco o al eje del pilar y actuante en un punto cualquiera. Establecidas esas expresiones, que no son sino las de las líneas de influencia del momento de que se trate, resultan fácilmente por suma o por integración los valores correspondientes a acciones finitas aisladas o a las distribuidas dentro de una zona con arreglo a cualquier ley analítica o gráfica.

Efecto de la subdivisión de la estructura hemos introducido incógnitas auxiliares que harían insuficientes las  $3n$  ecuaciones elásticas si no aparecieran por aquella misma causa las condiciones de equilibrio estático de las secciones imaginadas. Así, cada nudo proporciona 3 ecuaciones y disponemos finalmente de  $6n + 3$ . Las incógnitas elegi-

das como independientes son los dos momentos extremos y el empuje de cada arco, en junto  $3n$ , más los recorridos vertical y horizontal y el momento flector en la coronación de cada pilar, o sean  $3n + 3$ .

El problema, que parece haberse complicado al doblar y algo más el número de condiciones resolutivas, ofrece, sin embargo, relativa sencillez, dentro siempre de la dificultad inherente a su absoluta generalidad. Logramos eliminar, gracias a cierto artificio, un gran número de incógnitas, y en lugar de un sistema de  $3n$  ecuaciones, sólo tenemos que resolver dos escalonados, uno con  $n + 1$  y otro con  $n$ .

Aun así, justo es decirlo, la solución no pasa de ser teórica en el caso de absoluta generalidad. En la práctica, sin embargo, las estructuras son casi siempre simétricas, y entonces fácilmente se reduce cada uno de esos sistemas a dos independientes de grado alrededor de la mitad. Una arcada de cinco vanos exige, en suma, resolver por una parte dos sistemas triples y por otra una triple y uno doble, cosa pesada pero perfectamente hacedera. La simetría que procura tal simplificación se refiere únicamente a las dimensiones geométricas y elásticas; nada implica respecto a las causas, que pueden ser cualesquiera. Si también hay en éstas simetría, como sucede con los pesos muertos y variaciones de temperatura, la solución se facilita muchísimo más todavía.

Prácticamente también, las proporciones de los diversos elementos de la estructura son tales que con aproximación satisfactoria se pueden suponer nulos ciertos recorridos, a reserva de estudiar, como lo hacemos, los límites de los errores que eso implica. La solución del problema es entonces verdaderamente ingenieril, de fácil e inmediata aplicabilidad.

Sobre tal base aproximada y ya sin necesidad de que exista simetría, estudiamos la propagación por toda la estructura del trabajo elástico debido a una sola causa actuante en un punto cualquiera. Aparecen así, en forma amplísima, las curiosas propiedades de esa transmisión sucesiva o irradiación de flexiones, esfuerzos normales y tangenciales. Degeneración de último orden de esas propiedades, reflejadas por una serie de rectas focales, son las tan conocidas en las vigas rectas de muchos claros.

Mediante esas leyes de propagación obtenemos para cualquier arco un sistema de tres ecuaciones que con grandísima facilidad proporcionan los valores de los momentos extremos y del empuje. De esas expresiones primordiales deducimos también con gran sencillez las ecuaciones de las líneas de influencia relativas a cualquier sección de la

estructura y a cualquiera de las magnitudes de cálculo, momento flector y esfuerzos normal y tangencial.

Hecha así factible la investigación de los efectos de las más desfavorables combinaciones de sobrecargas móviles, logramos también con el mismo grado de aproximación satisfactoria, evaluar los producidos por las causas permanentes, pesos muertos, variaciones térmicas, que a un tiempo afectan a toda la estructura. Establecemos primero con todo rigor una ecuación eliminante típica, que relaciona tres empujes consecutivos y los dos momentos de coronación de los pilares intermedios; cuando estos últimos son, como prácticamente sucede, insignificantes, resultan directamente determinados los empujes. Y conocidos éstos se derivan todos los demás elementos de cálculo.

Además de esa forma típica de estructura estudiamos todas las degeneradas que corresponden a la introducción de rótulas entre pilares y arcos, o dentro de éstos, sola o combinada con la adición de tirantes. La mayor parte de esas formas tienen interesantes aplicaciones prácticas, y la indeterminación primordial del orden  $3n$  se reduce progresivamente hasta el cero en la cadena isostática de arcos articulados en sus zonas centrales.

Para que nuestro estudio sea completo, no sólo en el orden especulativo sino en el práctico, lo desarrollamos prolijamente para la forma muy usual de arcos parabólicos, de luces y flechas cualesquiera, sobre pilares también desiguales. Y para la más usual todavía, en la que se igualan las dimensiones de todos los elementos homólogos, reducimos el cálculo de las líneas de influencia al uso de unas tablas que hemos formado, con las que el trabajo se limita a pocas y sencillísimas operaciones aritméticas.

Además de esta aplicación facilitamos la de otras formas, medio punto, arco quebrado en cubierta a dos aguas o abuhardillada, que bien solas, bien combinadas con la degeneración viga recta, dan todos los tipos usuales de cubiertas metálicas o de hormigón armado.

Permítasenos reivindicar la originalidad de nuestro trabajo. Los similares que conocemos, muy escasos en número y planteados, claro es, arrancando de igual base, el estudio de las deformaciones elásticas, pero desarrollados en formas muy distintas, son: métodos gráficos unos, sólo útiles en casos particulares y aun así de formidable complicación; analíticos otros, pero que no salen del terreno puramente especulativo, sin más solución que la de  $3n$  ecuaciones. Ninguno alcanza ni la amplitud ni la factibilidad del nuestro, que sobre ofrecer la solución exacta, penosa aunque hacedera, proporciona la

satisfactoriamente aproximada, de facilísima aplicación práctica. Si logramos esto, es gracias a la elección especial de incógnitas y de parámetros y a la orientación del cálculo en forma análoga a la que tras varios años de tenaz estudio nos permitió realizar el del pórtico múltiple, degeneración inmediata de la arcada y el de las estructuras trapeziales, que presentamos en el Congreso de Madrid de 1913.

---



# LA TRACCIÓN

POR

## VAPOR EN LOS FERROCARRILES

POR

D. VICENTE BURGALETA

INGENIERO INDUSTRIAL

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

La presente Memoria no es más que una reproducción ligeramente modificada de otra presentada en unión del Ingeniero Sr. Costilla a la Junta de Ampliación de Estudios para el concurso de pensiones al extranjero, sin obtener el resultado por nosotros apetecido.

Prescindiendo de las razones que dicha Junta debe tener para alejarse de las cuestiones industriales, tal vez por encontrar en ellas un utilitarismo que no quiere ver en el estudio de ciertas cuestiones médicas a las que no niega su apoyo, y no entrando a discutir si la Instrucción pública de nuestra patria ha de limitarse a procurar la adquisición de conocimientos que se transmitan de profesores a discípulos para que de éstos pasen con el tiempo a nuevos alumnos, o si, por el contrario, con un criterio más amplio, debe favorecer todos los estudios, sean o no de aplicación directa en el Ministerio que tal nombre lleva, lo cierto es que de la Memoria por nosotros presentada no debió formar un elevado juicio la citada Junta, y si a pesar de ello nos hemos decidido a transcribir aquí parte de su texto, ha sido porque creemos que en ella se contiene la primera aplicación de modernas fórmulas teóricas al cálculo de los generadores de vapor, que estudiados por los antiguos métodos conducen a resultados no comprobados en las calderas existentes.

Por otra parte, el creciente desarrollo de las locomotoras «compound» nos ha inducido a presentar concretamente las leyes de su

funcionamiento, mostrando una vez más a los que tantas contradicciones quieren ver entre la práctica y la teoría, que cuando ésta se conduce rectamente es siempre confirmada por aquélla.

A estos dos casos concretos, generadores de las locomotoras y mecanismo de las máquinas «compound», ha de limitarse el estudio actual, suprimiendo en él otras consideraciones sobre los materiales empleados y los movimientos perturbadores, que en la Memoria que presentábamos a la Junta de Ampliación de Estudios tuvieron adecuado lugar para servir de fundamento a las observaciones que en los ferrocarriles extranjeros se proyectaban.

Hoy día, en que tanto se discute la organización del personal de la tracción y de los talleres en los ferrocarriles, las previsiones para asegurar el servicio en los casos de huelga y las ventajas e inconvenientes de los sistemas de tracción eléctrica, podrá parecer tal vez que apenas presentan interés las cuestiones puramente técnicas relativas a la tracción por vapor y, sin embargo, ellas son las únicas que debidamente estudiadas pueden permitir la reducción de los gastos de tracción y, por tanto, de explotación de una línea.

Indudable es el interés que presentan los nuevos trabajos sobre tracción eléctrica; pero, en cambio, los relativos a la tracción por vapor son a veces considerados como cosa antigua y de poca importancia por quienes no conocen a fondo el problema de la tracción en los ferrocarriles. En primer lugar, es tan grande el capital invertido por las empresas en los ferrocarriles de vapor, y en particular en el material de tracción, que la substitución por material de tracción eléctrica no reportaría ventajas económicas a pesar del mayor rendimiento de dicho sistema de tracción. Por otra parte, los recientes conflictos ferroviarios en Inglaterra, Francia, España y Portugal hacen a los Gobiernos y grandes empresas poco propicios a adoptar un sistema de tracción que en casos de sedición es facilísimo de interrumpir en toda la red por sencillos cortes en la línea de conducción de la electricidad.

Este temor ha de obligar en todo caso a disponer de un cierto número de locomotoras de vapor que pueda garantizar el servicio de los trenes correos y militares; conocido es, además, el mal resultado que para los primeros accionistas tuvo en nuestro país el establecimiento de las grandes líneas ferroviarias, y esto justifica la resistencia de las empresas a efectuar el desembolso que representa la electrificación de las redes, en las que, como queda dicho, se han invertido grandes capitales en el material de vapor y sus talleres de construcción.

Estas razones permiten asegurar que durante mucho tiempo ha de

emplearse todavía la tracción por vapor, y de aquí la conveniencia de estudiar todas las cuestiones que permitan disminuir los gastos de un sistema de tracción que tiene por base un motor de escaso rendimiento.

En general, puede asegurarse que la potencia máxima de una locomotora depende exclusivamente de la vaporación de su caldera, razón por la que se ha hecho esta parte de la locomotora objeto de un estudio más detenido. En el establecimiento teórico de las fórmulas se ha buscado, en primer lugar, hacer depender la potencia de vaporización de las temperaturas de los gases calientes con independencia de toda hipótesis acerca de la radiación; de este modo, la determinación experimental de las temperaturas permite deducir la potencia de vaporización. Para la determinación teórica de estas temperaturas se propone en esta Memoria la substitución de la fórmula de Dulong empleada por Ser en su *Physique Industrielle* y por Boulvin en su *Cours de Mécanique appliquée aux Machines* por la moderna fórmula de Stefan, que además de ser más exacta permite suprimir en los cálculos las ecuaciones transcendentales substituyéndolas por ecuaciones algébricas de más fácil empleo, sobre todo si se substituyen las temperaturas ordinarias por temperaturas absolutas, lo cual no presenta ningún inconveniente, ya que es de éstas y no de aquéllas de las que depende el rendimiento térmico del motor y que, por otra parte, es sencillísimo el paso de unas a otras.

## I.

### GENERADOR DE VAPOR.

1. *Estudio de la vaporización.*—En la caldera de una locomotora, como en todo generador de vapor, hay que considerar separadamente la superficie de calefacción directa, que en este caso constituye la caja de fuego, y la indirecta, que forma el haz tubular.

Los gases desprendidos del carbón en combustión a una temperatura  $T_0$  se enfrían en la caja de fuego, en la que por su situación, forma y modo de circulación de los gases puede admitirse una temperatura media  $T_1$ , a la que entran los gases en el haz tubular para dar en la caja de humos una temperatura  $T_2$ . Todas estas temperaturas las consideraremos en lo que sigue como temperaturas absolutas.

Sean:

$A$  = Peso del aire necesario por kilogramo de combustible.

$s$  = Superficie de la parrilla en m.<sup>2</sup>

$S_1$  = Idem de calefacción directa.

$S_2$  = Idem total de los tubos hervidores.

$S_3$  = Idem id. de los id. recalentadores.

$S_4$  = Idem de recalentamiento del vapor.

$p$  = Peso del combustible quemado por hora y m.<sup>3</sup>

$N$  = Potencia calorífica del mismo.

$R$  = Calor radiado por la parrilla en una hora.

$Q_1$  = Idem transmitido por la superficie  $S_1$  en una hora.

$Q_2$  = Idem por  $S_2$ .

$Q_3$  = Idem por  $S_3$ .

$Q_4$  = Idem por  $S_4$ .

$q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$ .

$T_0$  = Temperatura de los gases sobre el combustible.

$T_1$  = Idem a la entrada del haz tubular.

$T_2$  = Idem a la salida de  $S_2$ .

$T_3$  = Idem a la id. de  $S_3$ .

$T$  = Idem del agua de la caldera.

$T''$  = Idem del ambiente.

$E$  = Espesor de la plancha de la caldera en cm.

Las temperaturas citadas están expresadas en grados absolutos.

Las relaciones fundamentales entre estas cantidades se establecen igualando en cada caso las cantidades de calor producido o aportado por los gases a las de calor transmitido a la caldera o arrastrado por aquéllos; de este modo se obtiene:

$$psN = 0,25 \cdot ps(A + 1)(T_0 - T'') + R,$$

en que 0,25 es el calor específico a presión constante; haciendo

$$q = N + 0,25(A + 1)T'',$$

que son las calorías introducidas por kilogramo de combustible resulta:

$$psq = R + 0,25 \cdot ps(A + 1)T_0 \quad [1]$$

$$Q_1 = ps[q - 0,25 \cdot (A + 1)T_1] \quad [2]$$

$$Q_2 = 0,25 \cdot ps(A + 1)(T_1 - T_2) \quad [3]$$

$$Q_1 + Q_2 = ps[q - 0,25 \cdot (A + 1)T_2] \quad [4]$$

En la superficie de calefacción directa pueden establecerse, además, las siguientes ecuaciones, que corresponden a una conductividad de 5.500 calorías por hora, metro cuadrado y centímetro de espesor en la plancha y a coeficientes de convección de 5.000 calorías entre el agua en ebullición y la plancha y de 51 calorías entre ésta y los gases calientes:

$$Q_1 = R + 50 \cdot S_1 (T_1 - T); \quad [2']$$

estas ecuaciones [1], [2] y [2'] determinan la transmisión de calor en la superficie  $S_1$ , bastando eliminar entre ellas  $Q_1$  y  $R$  o  $R$  y  $T_1$  para obtener respectivamente  $T_1$  y  $Q_1$  en función de  $p$  y  $T_0$  con independencia de toda hipótesis sobre la radiación; midiendo  $T_0$  a distintas marchas podrá deducirse todo el estudio de la transmisión del calor.

Por el contrario, para determinar teóricamente  $T_0$  hay que acudir a una de dichas hipótesis y proponemos dar la preferencia a la fórmula de Stefan, ya que la Dulong, generalmente empleada, es inaceptable a las elevadas temperaturas de los hogares.

Según Stefan, el calor radiado por la superficie  $S$  tiene por expresión (Chwolson: *Traité de Physique*).

$$R = 4,35 \cdot 10^{-8} (T_0^4 - T^4) S$$

y la fórmula [1] tomará la forma

$$pq = 4,35 \cdot 10^{-8} (T_0^4 - T^4) + 0,25 \cdot p (A + 1) T_0, \quad [1']$$

que con las [5] permite determinar todas las temperaturas; pero teniendo en cuenta que en las locomotoras se tiene

$$T_0 > 1400^\circ \quad T < 500^\circ,$$

puede suprimirse en la fórmula anterior el valor  $T^4$  sin que el error llegue a 1,5 por 100, y podrá determinarse  $T_0$  por la ecuación

$$pq = 4,35 \cdot 10^{-8} T_0^4 + 0,25 \cdot p (A + 1) T_0, \quad [1'']$$

que expresa que la temperatura de combustión sólo depende del combustible quemado por hora y metro cuadrado.

La eliminación  $R$  y  $Q_1$  entre las [1], [2] y [2'] da:

$$T_1 - T = \frac{0,25 \cdot (A + 1)}{0,25(A + 1) + K \frac{S_1}{p s}} (T_0 - T),$$

y haciendo

$$K = 50 \quad A = 21; \quad \frac{S_1}{s} = x; \quad 0,25 \cdot (A + 1) = a = 5,5,$$

$$T_1 - T = \frac{a}{a + K \frac{x}{p}} (T_0 - T). \quad [5]$$

La *figura 1.<sup>a</sup>* es la representación gráfica de los valores de  $T_0$  para distinta actividad de la combustión, la *figura 2.<sup>a</sup>* es la de los valores

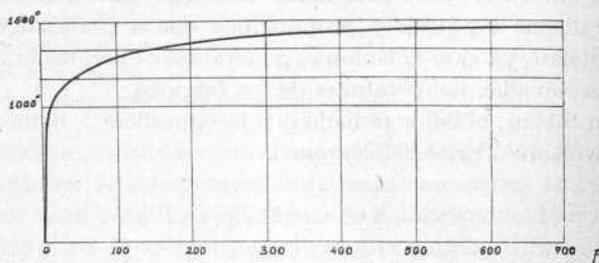


Fig. 1.<sup>a</sup>

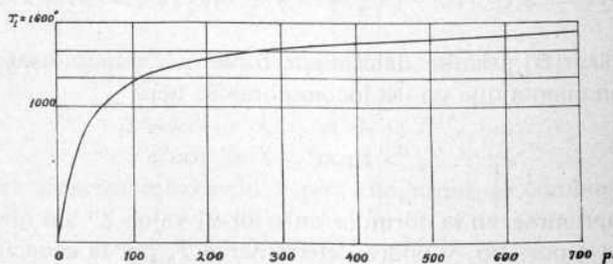
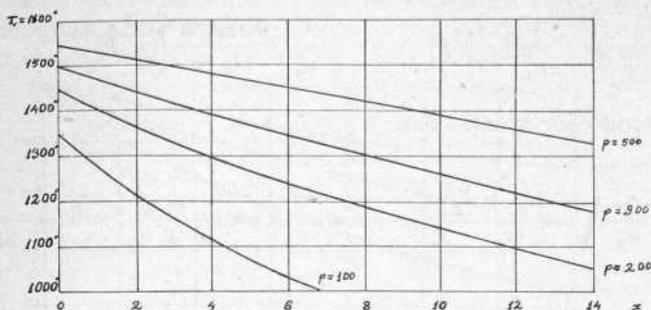


Fig. 2.<sup>a</sup>

de  $T_1$  para diversos valores de  $p$ , siendo  $x = 4,53$  y  $T = 4,75^\circ$ , y la *figura 3.<sup>a</sup>* la de  $T_1$  para distintos valores de  $x$ .

Al proyectar una locomotora se atiende a su potencia máxima, que corresponde a valores de  $p = 500$  a  $p = 600$  kg. por hora y m.<sup>2</sup>, entre los cuales la temperatura  $T_0$  varía poco, pudiendo adoptarse el valor medio  $T_0 = 1550^{\circ}$  ( $1277^{\circ}$  C.) y  $R = 248000$  s calorías.

Fig. 3.<sup>a</sup>

2. *Funcionamiento del haz tubular.*—Dos clases de tubos componen el haz tubular de las locomotoras: unos son los tubos hervidores, por los que circulan los productos de la combustión; los otros son los tubos recalentadores, que contienen en su interior otros por los que circula el vapor que se recalienta.

Los productos de la combustión  $p_s(A+1)$  se reparten entre los tubos hervidores y recalentadores en las proporciones

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \alpha p_s (A+1) \\ p_2 &= \beta p_s (A+1) \end{aligned} \right\} \alpha + \beta = 1,$$

regulándose este reparto por medio de un volante que mueve la trampa que cierra o abre los tubos recalentadores.

La temperatura de recalentamiento varía algo con la actividad de la combustión, pero teniendo en cuenta que al aumentar  $p$  también aumenta la vaporización  $W$ , admitiremos que dicha temperatura  $T'$  es constante y la temperatura media del vapor en el recalentador será

$$T_m = \frac{1}{2} (T + T'),$$

también constante.

Siendo  $n_1 l_1 s_1$  el número, perímetro y sección de los tubos hervidores,  $n_2 l_2 s_2$  los de los recalentadores y  $l'_2 s'_2$  el perímetro y sección de todos los tubos de vapor contenidos en cada tubo recalentador, las pérdidas de carga en unos y otros tubos son de la forma

$$\frac{1}{n_1^2} f \frac{l_1}{s_1^3} p_1^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{n_2^2} f \frac{l_2 + l'_2}{(s_2 - s'_2)^3} p_2^2$$

que debiendo ser iguales dan

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{(l_2 + l'_2) s_1^3}{l_1 (s_2 - s'_2)^3}} = m; \quad \alpha = \frac{m}{m + 1}; \quad \beta = \frac{1}{m + 1}.$$

El enfriamiento de los tubos hervidores es para  $\frac{S_2}{s} = y$  (Ser: *Physique Industrielle*):

$$\frac{T_2 - T}{T_1 - T} = e^{-\frac{Ky}{a\alpha\beta}} = e^{-\frac{by}{\alpha\beta}},$$

en la que para

$$K = 50; \quad a = 5,5;$$

se tiene

$$b = 9,1.$$

Si se suponen los datos siguientes, tomados de las locomotoras 4.201 a 4.206 del ferrocarril del Norte, que llevan recalentador Smith:

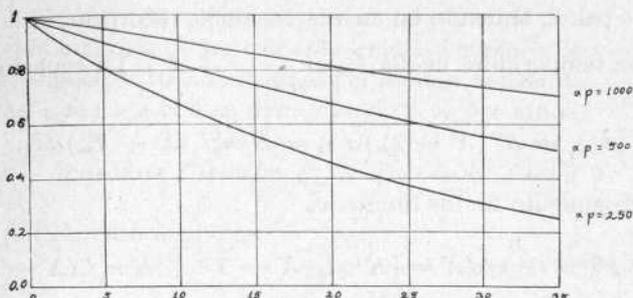
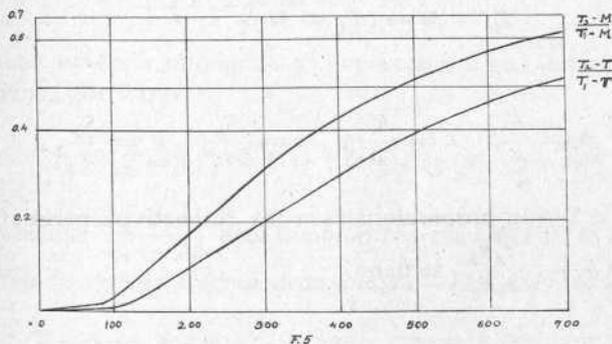
Número de tubos hervidores.....	141
Diámetro de los mismos.....	0,050 m.
Número de tubos recalentadores.....	24
Diámetro de los mismos.....	0,125 m.
Idem de los tubos de recalentamiento de vapor.....	0,035 m.

se tiene

$$\begin{array}{lll} l_1 = 0,157 & s_1 = 0,00197 & m = 1,41 \\ l_2 = 0,394 & s_2 = 0,01230 & \alpha = 0,58 \\ l'_2 = 4 \times 0,110 & s'_2 = 4 \times 0,00097 & \beta = 0,42 \end{array}$$

siendo cuatro el número de tubos de vapor contenidos en un tubo recalentador.

La *figura 4.<sup>a</sup>* representa la ecuación [6] para distintos valores de  $\alpha p$  y de  $y$ . La *figura 5.<sup>a</sup>* corresponde a  $y = 30,2$ , que es la relación  $\frac{S_2}{S}$  de las locomotoras 4.201 a 4.206.

Fig. 4.<sup>a</sup>Fig. 5.<sup>a</sup>

La cantidad de calor transmitida por la superficie  $S_2$  es

$$Q_2 = 0,25 \cdot p s (A + 1) (T_1 - T_2) = \alpha p s (T_1 - T) \left(1 - e^{-\frac{b y}{\alpha p}}\right).$$

Consideremos ahora los tubos recalentadores; la transmisión de calor entre los humos y el vapor recalentado se verifica con un coeficiente  $K'$  distinto del  $K$ , y cuyo valor medio es  $K' = 20$ .

La ecuación de la transmisión a través del tubo recalentador es para una temperatura  $X$  en los gases en una longitud  $dL$ :

$$dQ_3 = K(X - T)dS_3 = Kn_2l_2(X - T)dL.$$

En los tubos de vapor éste hace un recorrido de ida y vuelta, recalentándose desde la temperatura  $T$  a la  $T'$ , y para el cálculo de la transmisión de calor, teniendo en cuenta ese doble recorrido, se le considerará a una temperatura media  $T_m = \frac{1}{2}(T + T')$ . La ecuación es

$$dQ_4 = K'(X - T_m)dS_4 = K'n'_2l'_2(X - T_m)dL.$$

El enfriamiento de los humos es

$$-0,25 \cdot p^6(A + 1)dX = [Kn_2l_2(X - T) + K'n'_2l'_2(X - T_m)]dL,$$

cuya integral, suponiendo  $T_m$  constante, da

$$T_3 - M = (T_1 - M)e^{-\frac{bz + cv}{p}},$$

siendo

$$b = \frac{K}{a}, \quad c = \frac{K'}{a}, \quad z = \frac{S_3}{s}, \quad v = \frac{S_4}{s},$$

y como  $S_3$  y  $S_4$  son proporcionales a los respectivos perímetros, haciendo  $h = b + c \frac{e'_2 n'_2}{e_2 n_2}$ , se tiene

$$T_3 - M = (T_1 - M)e^{-h \frac{z}{p}}, \quad [7]$$

siendo el valor de la constante

$$M = \frac{Kl_2}{Kl_2 + K'l'_2} T + \frac{K'l'_2}{Kl_2 + K'l'_2} T_m \quad [8]$$

Teniendo en cuenta que  $T_m = \frac{1}{2}(T + T')$ , la ecuación [8], que

es de la forma

$$M = fT + (1 - f)T_m$$

se convierte en

$$M = \frac{1+f}{2} T + \frac{1-f}{2} T' = \gamma T + (1 - \gamma) T',$$

siendo en la mayoría de las calderas  $\gamma$  mucho mayor que  $1 - \gamma$ , el valor de  $M$  es poco variable mientras permanece constante  $T$ ; en las locomotoras 4.201 a 4.206 se tiene  $f = 0,82$  y, por tanto,

$$M = 0,91 T + 0,09 T' = T + 0,09(T - T')$$

y como por término medio es

$$T' - T = 180^\circ,$$

puede hacerse

$$M = T + 15^\circ$$

sin cometer un error mayor de  $5^\circ$  por exceso o por defecto.

Se tiene, por tanto,

$$T_3 - T = (T_1 - T) e^{-\frac{hx}{\theta \rho}} + 15 \left(1 - e^{-\frac{hx}{\theta \rho}}\right).$$

La relación  $\frac{T_3 - M}{T_1 - M}$  está también representada en la figura 5.<sup>a</sup>

3. *Estudio de una caldera determinada.*—El calor suministrado es

$$Q = 0,25 \cdot ps(A + 1)[\alpha(T_0 - T_2) + \theta(T_0 - T_3)],$$

y como según las fórmulas anteriores se tiene

$$T_1 - T = l(T_0 - T)$$

$$l = \frac{a}{a + K \frac{x}{\rho}},$$

$$T_2 - T = m(T_1 - T)$$

$$m = e^{-\frac{b \cdot y}{\alpha \rho}},$$

$$T_3 - T = n(T_1 - T) + 15(1 - n)$$

$$n = e^{-\frac{hx}{\beta \rho}},$$

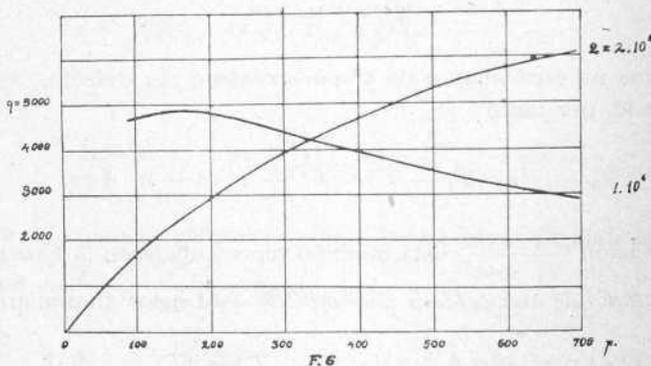
basta substituir estos valores y representar por  $q = \frac{Q}{p \cdot s}$  el calor utilizado por kilogramo de combustible, para obtener

$$q = a[(T_0 - T)(1 - l(\alpha m + \beta n)) - 15 \cdot \beta(1 - n)].$$

En las citadas locomotoras 4.201 a 4.206, las características obtenidas sobre los planos de las mismas por los ingenieros industriales de la Compañía del Norte, Sres. Veyrunes y Echagüe, son:

$S_0 = 3,17 \text{ m.}^2$	$S_2 + S_3 = 136,5 \text{ m.}^2$
$S_1 = 14,38$	$x = 4,53$
$S_2 = 95,6$	$y = 30,2$
$S_3 = 40,9$	$z = 12,9$
$S_4 = 48,25$	$v = 15,2$
Tubos de 125/133...	$n_1 = 24$
Tubos de 50/55....	$n_2 = 141$

habiéndose obtenido anteriormente  $\alpha = 0,58$ ,  $\beta = 0,42$ .



Basta efectuar las operaciones indicadas por las fórmulas anteriores para obtener el calor utilizado  $q$  para distintos valores de  $p$ , siendo la *figura 6.<sup>a</sup>* la representación gráfica de esta utilización:

El calor transmitido por la superficie  $S_3$  es

$$Q_3 = Ks \int_0^{z_3} (T_3 - T) dz = Ks \left[ \frac{\beta p}{h} (T_1 - T_3) + (M - T)z \right]$$

y por kilogramo de combustible

$$q_3 = \frac{Q_3}{p_s} = K \frac{\ell}{h} (T_1 - T_0) + K(M - T) \frac{z}{p}.$$

El calor transmitido por los tubos recalentadores es

$$Q_3 + Q_4 = a\ell(T_1 - T_3)p_s,$$

y por kilogramo de combustible

$$q_3 + q_4 = a\ell(T_1 - T_3),$$

y el calor empleado en el recalentamiento del vapor

$$q_4 = \ell(T_1 - T_3) \left( a - \frac{K}{h} \right) - K(M - T) \frac{z}{p}.$$

Siendo la temperatura ambiente de 15°, el calor de vaporización es

$$\lambda = 606,5 + 0,305 (T - 273^\circ) - 15^\circ,$$

que para

$$T = 475^\circ [202^\circ \text{C.}] \quad \text{da} \quad \lambda = 653.$$

La vaporización por kilogramo de combustible es

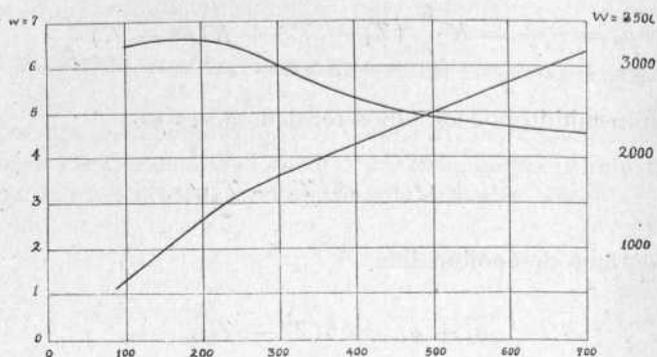
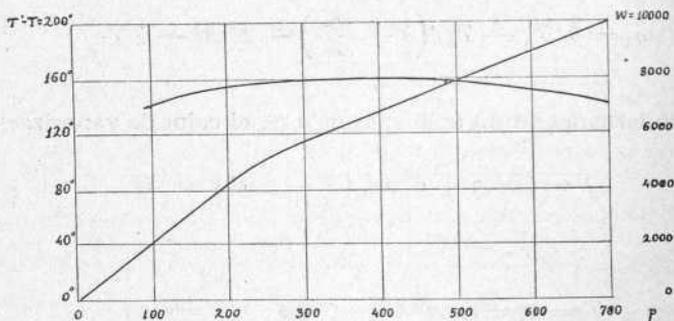
$$W = \frac{q - q_4}{\lambda},$$

y la temperatura de recalentamiento para un calor específico de 0,50

$$T' - T = \frac{q_4}{0,50 \cdot \lambda}.$$

La figura 7.<sup>a</sup> contiene las vaporizaciones por kilogramo de combustible y por metro cuadrado de superficie de la parrilla, y la *figu-*

ra  $\delta$ .<sup>a</sup> el recalentamiento  $T' - T$  y la vaporización total para  $s = 3,17$

Fig. 7.<sup>a</sup>Fig. 8.<sup>a</sup>

metros cuadrados, siendo los resultados obtenidos los contenidos en la siguiente tabla:

$p =$	100	200	300	500	600	700 kg. hora m. <sup>2</sup>
$T_0 =$	1350	1450	1500	1550	1575	1600 grados absolutos
$T_1 - T =$	625	805	910	995	1010	1025 grados
$T_2 - T =$	20	76	180	385	450	515 idem
$T_3 - T =$	35	145	295	505	565	620 idem
$W =$	2050	4190	5730	7700	8950	10050 kg. hora
$w =$	6,45	6,60	6,02	4,05	4,71	4,53 kg.
$T' - T =$	140	155	157	157	148	140 grados

## II.

## MECANISMO MOTOR.

1. *Funcionamiento de una locomotora «compound»*.—Consideremos en el caso más general una locomotora con cuatro cilindros, dos de alta presión y dos de baja, consumiendo en total  $W$  kg. de vapor por hora.

Sean en estos cilindros:

- $P_1$  = Presión de admisión en el cilindro A. P.  
 $P_2$  = » » » B. P.  
 $\alpha_1$  = Grado de admisión en el cilindro A. P.  
 $\alpha_2$  = » » » B. P.  
 $V_1$  = Volumen desplazado por el émbolo de A. P.  
 $V_2$  = » » » B. P.  
 $P'_1$  = Presión de escape del cilindro A. P.  
 $P'_2$  = » » » B. P.

En las distribuciones por corredera se originan, en general, compresiones elevadas, por lo que puede admitirse para mayor sencillez en los cálculos que la compresión se efectúa hasta una presión igual a la de admisión; se disminuye así el valor del trabajo producido, y se disminuye también el consumo real de vapor, por lo que los errores quedan en parte compensados.

Las resistencias pasivas del movimiento de los émbolos de  $AP$  y  $BP$ , pueden representarse por los valores  $f_1, f_2$ , referidos a la unidad de superficie de dichos émbolos, viniendo así a ser homogéneos con las presiones; los trabajos desarrollados por cada embolada, siendo  $\epsilon_1, \epsilon_2$  los espacios perjudiciales expresados en fracciones de los volúmenes  $V_1, V_2$ , son:

$$L_1 = V_1 \left[ P_1 (\alpha_1 + \epsilon_1) \left[ 1 + l \frac{1 + \epsilon_1}{\alpha_1 + \epsilon_1} \right] - (P'_1 + f_1) \right]$$

$$L_2 = V_2 \left[ P_2 (\alpha_2 + \epsilon_2) \left[ 1 + l \frac{1 + \epsilon_2}{\alpha_2 + \epsilon_2} \right] - (P'_2 + f_2) \right]$$

debiendo ser

$$\alpha_1 P_1 V_1 = \alpha_2 P_2 V_2 \quad P'_1 - P'_2 = H \text{ (constante).}$$

Para un valor dado de  $P_1 \cdot \alpha_1$ , se obtendrá el valor máximo de  $L = L_1 + L_2$  cuando se tenga

$$\frac{\partial L_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial L_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial L_2}{\partial P_2} \frac{dP_2}{d\alpha_2} = 0,$$

que conduce a la condición

$$\alpha_2 + \varepsilon_2 \left( 1 + l \frac{1 + \varepsilon_2}{\alpha_2 + \varepsilon_2} \right) = \frac{V_1}{V_2}.$$

Si, como sucede en las locomotoras tomadas como ejemplo, la corredera  $BP$  es plana, la resistencia  $f_2$  tiene un término proporcional en la presión  $P_2$ ,

$$f_2 = a + b \cdot P_2,$$

y se tiene la condición

$$\alpha_2 + \varepsilon_2 \left( 1 + l \frac{1 + \varepsilon_2}{\alpha_2 + \varepsilon_2} \right) = \frac{V_1}{V_2} + b.$$

Dadas las dimensiones del cilindro y corredera  $BP$  de dichas locomotoras, puede hacerse

$$f_1 = 0,3 \text{ kg./cm.}^2, \quad f_2 = 0,3 + 0,05 \cdot P_2 \text{ kg./cm.}^2, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,10,$$

y, por tanto,

$$\alpha_2 + \varepsilon_2 \left( 1 + l \frac{1 + \varepsilon_2}{\alpha_2 + \varepsilon_2} \right) = \frac{V_1}{V_2} + 0,05,$$

y siendo la carrera de los émbolos 0,64 m. y los diámetros de  $AP$  y  $BP$  0,40 y 0,62 m., respectivamente, deberá ser  $\alpha_2 = 0,30$ , ya que  $\frac{V_1}{V_2} = 0,416$ .

Prescindiendo de las resistencias  $f_1 f_2$ , el trabajo indicado será, por

embolada,

$$L_1 = V_1 \left[ P_1 (\alpha_1 + \epsilon_1) \left( 1 + l \frac{1 + \epsilon_1}{\alpha_1 + \epsilon_1} \right) - P'_1 \right]$$

$$L_2 = V_2 \left[ P_2 (\alpha_2 + \epsilon_2) \left( 1 + l \frac{1 + \epsilon_2}{\alpha_2 + \epsilon_2} \right) - P'_2 \right]$$

en la que se hará  $\alpha_2 = 0,30$ , y cuando  $\alpha_1 > 0,30$ , se hará  $\alpha_2 = \alpha_1$  para no obtener en el depósito intermedio presiones elevadas que fatigarían excesivamente el mecanismo de baja calculado en las locomotoras 4.201 a 4.206 para una presión en el depósito intermedio de 6 kg./cm.<sup>2</sup>

Haciendo  $L = L_1 + L_2$ , y siendo  $D$  el diámetro de las ruedas motrices, el valor del esfuerzo de tracción es

$$F = \frac{4L}{\pi D},$$

como es fácil deducir igualando el trabajo producido en los cilindros y en el movimiento del tren y su máquina.

El consumo de vapor por embolada es

$$G = 4\alpha_1 V_1 \text{ m.}^3,$$

y si  $\Pi$  es el peso del metro cúbico de vapor a la presión  $P_1$  y temperatura  $T_1$  y  $V$  la velocidad en kilómetro por hora, se tendrá

$$W = 4\alpha_1 V_1 \Pi \frac{1000 \cdot V}{\pi D} \text{ kg. hora.}$$

Las presiones y consumo de vapor que dan las fórmulas teóricas son algo distintos de los efectivos, debido al enfriamiento y condensaciones en los cilindros, laminados de vapor, compresiones incompletas, etc., que obligan a emplear un coeficiente de reducción del diagrama cuyo valor medio es  $K = 0,75$ ; las fórmulas del esfuerzo tractor y de la velocidad, son

$$F = \frac{4KL}{\pi D} = 0,951 \frac{L}{D} \text{ kg.} \quad [2]$$

$$V = 0,000776 \frac{W \cdot D}{\Pi \alpha_1 V_1} \text{ km. por hora.} \quad [3]$$

2. *Estudio de una locomotora determinada.*—Para distintas actividades de la combustión se han deducido en el estudio de la caldera los valores correspondientes de  $W$  y  $T'$ .

Como la temperatura  $T'$  es poco variable, las pérdidas de carga entre la caldera y el cilindro y entre el escape de alta y el depósito intermedio pueden ponerse bajo la forma

$$P - P_1 = K_1 W^2, \quad P'_1 - P_2 = K'_1 W^2, \quad P'_2 - 1 = K_2 W^2,$$

en las que los coeficientes  $K$  varían con las secciones de paso de vapor, longitud de los tubos recalentadores, densidad del vapor, etc.

En las locomotoras 4.201 a 4.206 del ferrocarril del Norte puede hacerse

$$P - P_1 = P'_1 - P_2 = 0,02 \left( \frac{W}{1000} \right)^2 \text{ kg. por cm.}^2$$

$$P'_2 - 1 = 0,004 \left( \frac{W}{1000} \right)^2 \text{ » » »}$$

Para cada valor de  $W$  y, por tanto, de  $p$ , se obtendrán los valores correspondientes de estas pérdidas de presión y, por tanto, de  $P_1$ ; conocida ésta se calcula  $\pi$  valiéndose de una tabla de densidades del vapor y de las fórmulas de Mariotte y Gay-Lussac.

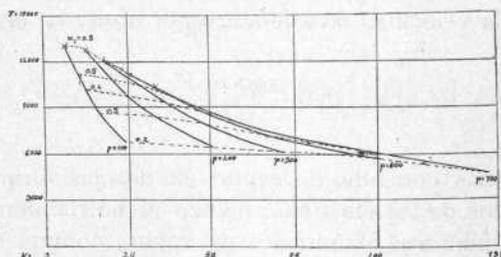


Fig. 9.ª

Para cada valor de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , la ecuación [2] da el esfuerzo tractor, la [3] la velocidad, y la potencia desarrollada será

$$E = \frac{1}{27} F \cdot V \text{ HP.}$$

Repitiendo los cálculos para otros valores de  $W$ , se obtiene una serie de curvas (*fig. 9.<sup>a</sup>*) que relacionan el esfuerzo de tracción y la velocidad en una máquina 4.200 cuyos volúmenes de los cilindros de alta y baja son  $V_1 = 0,0804 \text{ m.}^3$  y  $V_2 = 0,1930 \text{ m.}^3$ . Estas curvas se han obtenido haciendo, sucesivamente,  $\alpha_1 = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$  y  $0,8$ , y  $\alpha_2 = 0,3, 0,3, 0,4, 0,5$  y  $0,8$ , y quedan limitadas superiormente por la horizontal que corresponde a la adherencia; las correspondientes a  $F = 9000 \text{ kg.}$  y  $F = 12000 \text{ kg.}$  en una máquina de 63 toneladas de peso adherente, corresponden a los coeficientes de adherencia  $\frac{1}{7}$  y  $\frac{1}{5}$ , respectivamente.

La *figura 10* representa los gráficos de la potencia desarrollada, li-

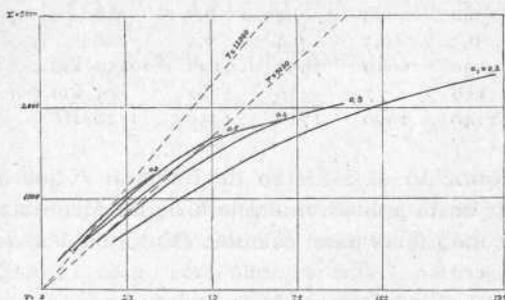


Fig. 10.

mitada también por las rectas de adherencia; finalmente, la *figura 11* contiene los gráficos de la potencia desarrollada a distintas admisiones

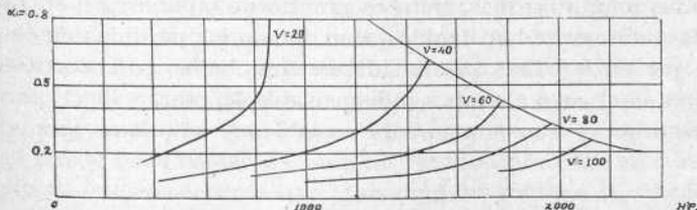


Fig. 11.

para las velocidades  $V = 20, 40, 60, 80$  y  $100 \text{ km. por hora}$  limitadas por la producción máxima de la caldera supuesta para  $p = 700 \text{ ki}$

logramos por hora y metro cuadrado de rejilla; la forma de todos estos gráficos concuerda con los obtenidos en recientes experiencias americanas, y especialmente con los efectuados en los ferrocarriles de Pensilvania.

Como ejemplo del cálculo se exponen los valores correspondientes a  $p = 600$ , valor que puede tomarse para el cálculo de la potencia máxima:

$$P = 600, \quad W = 8950 \text{ kg.}, \quad T' - T = 148^\circ, \quad \Pi N = 5,874$$

$$P - P'_1 = P'_1 - P_2 = 1,6, \quad P'_2 - 1 = 0,32, \quad P = 17 \text{ kg./cm.}^2$$

(Presión absoluta).

$\alpha_1 =$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,8
$\alpha_2 =$	0,3	0,3	0,4	0,5	0,8
$F =$	4950	6650	7950	9100	10450 kg.
$V =$	116	77	58	40	29 km. por hora.
$E =$	2140	1900	1710	1550	1120 HP.

Una vez conocido el esfuerzo de tracción  $F$  que corresponde a cada velocidad, basta aplicar cualquiera de las fórmulas de resistencia de los trenes y máquinas para calcular las toneladas que pueden remolcarse.

El sistema de cálculo adoptado se reduce, como se ha visto, a admitir para el vapor un ciclo limitado por hipérbolas y aplicar un coeficiente de reducción  $K = 0,75$  para tener en cuenta las compresiones incompletas, pérdidas de calor, condensaciones y defectos en la distribución; este coeficiente tal vez pueda parecer algo elevado para admisiones mayores de un 30 por 100, si se compara con los empleados en las máquinas fijas; pero es preciso no olvidar que en nuestras fórmulas teóricas se han tenido ya en cuenta las pérdidas de carga del vapor que en aquéllas se consideran englobadas en el coeficiente  $K$ , pero que en el caso actual es indispensable separarlas de él, porque en las locomotoras son sumamente variables y adquieren gran importancia.

APLICACIÓN  
DE LAS  
CONSTRUCCIONES DE LA ESTÁTICA GRÁFICA  
al cálculo de líneas eléctricas de tracción

POR  
D. LUIS SÁNCHEZ CUERVO

INGENIERO DE CAMINOS

(Sesión del 17 de Octubre de 1915.)

Creo innecesario insistir sobre las ventajas por todos reconocidas que ofrecen los métodos gráficos en la resolución de los problemas de la ingeniería. Siendo, como son, siempre útiles, permitidme a título de comprobación que haga notar posibles equivocaciones en cálculos numéricos; hay muchos casos—y uno de ellos lo ofrece el tema que me propongo tratar—en los que el estudio gráfico es, sin más, completamente satisfactorio, porque los errores de aproximación que de él provienen son del mismo o de inferior orden que los que introducen otros factores del problema y aun las hipótesis que forzosamente hay que hacer y que no corresponden a la realidad sino aproximadamente.

No obstante presentarse tan naturalmente al espíritu esta aplicación de las construcciones de la estática gráfica, sólo en algunas obras muy modernas he visto esbozada apenas la idea, y aun así con aplicación al cálculo de redes de alumbrado, para las cuales la juzgo poco práctica. Desde hace bastantes años he venido aplicando este método al cálculo de líneas eléctricas que alimentan un servicio de tracción, y la experiencia que he sacado de la comodidad y ventajas de su uso, me animan a exponerlo de un modo sumario. Es evidente que puede aplicarse también a líneas que alimenten servicios fijos con respecto a ellas, con la ventaja de suprimir la complicación que ofrece, en la tracción, la movilidad de las cargas y su constante variación de valor;

pero si se mira a la escala en que hay que dibujar los diagramas, se ve que prácticamente no es útil el método gráfico sino en los casos en los que las cargas a considerar son en número relativamente pequeño y de valores relativamente grandes, y para las que al propio tiempo son admisibles caídas de tensión proporcionalmente elevadas, caso típico de la tracción eléctrica.

Al tratar de caídas de tensión, viene en seguida al pensamiento la idea de aplicar a su cálculo la construcción de los funiculares, puesto que una pérdida de tensión es siempre el producto de una resistencia o impedancia (proporcional a la *longitud* de un conductor de sección constante) por una intensidad de corriente (asimilable a un peso o fuerza). Su expresión algébrica es, pues, enteramente similar a la del momento de una fuerza.

Empezaremos, pues, por recordar la propiedad fundamental de los funiculares, en la cual nos vamos a apoyar. Otras propiedades que habremos de invocar bastará para ser recordadas su simple enunciación.

Si tenemos varias fuerzas paralelas, conocidas por sus líneas de acción y sus intensidades, y dibujamos el polígono de las fuerzas y el funicular correspondiente a una distancia polar cualquiera (*fig. 1.ª*), la suma de los momentos de estas fuerzas con relación a un punto *M* es igual al producto de la distancia polar *D* por el segmento *ad* que los lados extremos del funicular interceptan en la paralela trazada por *M* a la dirección común de las fuerzas, midiéndose *D* en la escala de longitudes y *ad* en la de fuerzas.

El valor de este momento, puede descomponerse gráficamente en los sumandos correspondientes a cada una de las fuerzas, y estos sumandos son en este ejemplo, respectivamente:

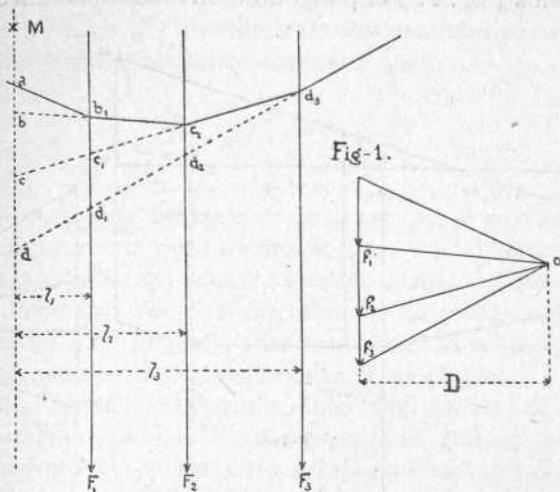
$$f_1 \times l_1 = ab \times D, \quad f_2 \times l_2 = bc \times D, \quad f_3 \times l_3 = cd \times D.$$

En particular,

$$f_2(l_2 - l_1) = b_1 c_1 \times D, \quad f_3(l_3 - l_1) = c_1 d_1 \times D, \\ f_3(l_3 - l_2) = c_2 d_2 \times D, \text{ etc., etc.}$$

Apliquemos estas construcciones al caso de varios coches o trenes en una línea, reemplazando las fuerzas por cantidades proporcionales a las intensidades de corriente que éstos absorben, y siendo las líneas de acción de aquéllas las verticales de los puntos en que los trenes

se hallan en un instante determinado. Debe advertirse, previamente, que al aplicar estos principios y construcciones a la determinación de las pérdidas o caídas de tensión en el caso de trenes y tranvías eléctricos, no es posible llegar a resultados de una generalidad semejante a aquélla a que se llega en el cálculo de vigas sometidas a cargas móviles: por ejemplo, al caso práctico del tren tipo. Debe, en efecto, recordarse que en la aplicación que vamos a hacer, la distancia mutua entre las diferentes fuerzas (intensidades) es constantemente variable,

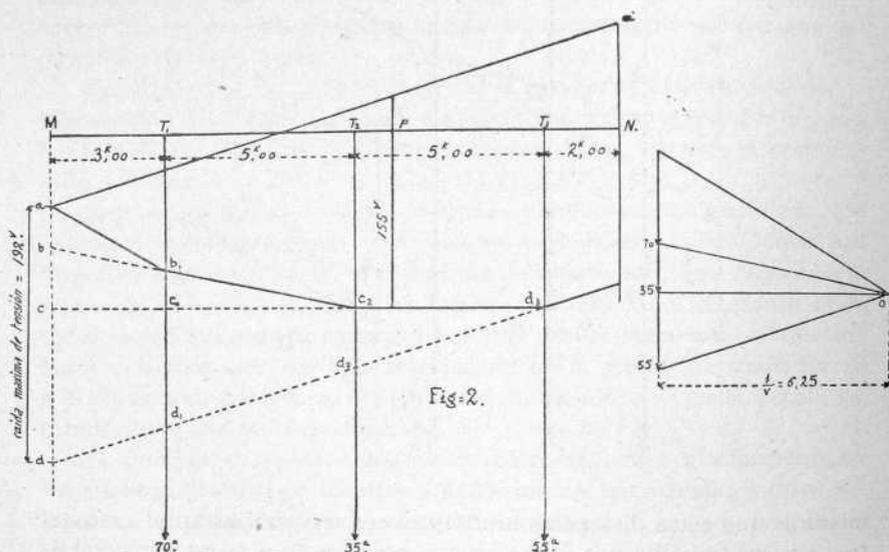


mientras que estas distancias mutuas se conservan fijas en el caso del tren tipo que circula por un puente. Y no pára aquí la mayor complicación, sino que además, el valor de estas fuerzas (intensidades) es eminentemente variable con la posición que el vehículo o tren tiene en la línea y aun para cada punto de ella, según sea el *sentido* en que marcha, pues, por ejemplo, en un mismo punto de una rampa puede esa intensidad ser muy elevada para un tren ascendente y nula o hasta negativa (recuperación) para el mismo tren marchando en sentido descendente. Veremos más tarde en la aplicación a un caso práctico, cómo debe procederse.

Supongamos por ahora que en una sección  $MN$ , de una línea alimentada en el punto  $M$ , se hallan en un *instante determinado*, tres trenes situados, respectivamente, a distancias  $l_1, l_2$  y  $l_3$  del punto de

alimentación  $M$ , y supongamos también que sus respectivos consumos son  $I_1$ ,  $I_2$  y  $I_3$  amperios; claro es que estos valores son conocidos y dependen de la posición de los trenes en el perfil longitudinal y planta, así como del sentido en que marchan en el instante considerado.

Llamemos  $r$  a la resistencia óhmica (o a la impedancia en el caso de corriente alterna) *por kilómetro*, del circuito de alimentación, circuito constituido por el conductor de trabajo y el de retorno, que casi siempre es la vía más o menos reforzada en su conductividad eléctrica. Dibujemos (*fig. 2.<sup>a</sup>*) el polígono de fuerzas tomando como valor



de éstas los productos  $rI_1$ ,  $rI_2$  y  $rI_3$ , y con una distancia polar  $D$  cualquiera, tracemos un funicular. Según lo dicho más arriba,

$$ad \times D = rI_1 \times l_1 + rI_2 \times l_2 + rI_3 \times l_3. \quad [1]$$

Pero si nos fijamos en que, dada la significación de  $r$ , los productos de este factor por  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  son las resistencias (o impedancias) del circuito alimentador entre el punto  $M$  por el que llega la corriente y las respectivas posiciones de los trenes, deduciremos que el segundo miembro de [1] es, precisamente, la caída de tensión desde  $M$  hasta

el tren que más alejado está de dicho punto de alimentación. Salvo el factor  $D$ , la caída de tensión máxima en la sección de línea considerada, y en el instante elegido, está representada por el segmento  $ad$ . Las caídas de tensión desde  $M$  hasta los trenes intermedios estarán representadas, salvo el mismo factor, por

$$\begin{aligned} ad &= c_2 d_2 \text{ desde } M \text{ a } T_1, \\ ad &= b_1 d_1 \quad \gg \quad M \text{ a } T_2. \end{aligned}$$

Cabe introducir en la representación anterior una simplificación práctica importante. Si en [1] dividimos las dos miembros por  $r$  y escogemos  $D = 1$ , aquella igualdad se convierte en

$$\frac{1}{r} \times ad = \Sigma I_n \times l_n,$$

resultado que se puede interpretar diciendo que si en vez de escoger una distancia polar arbitraria tomamos ésta, en la escala de longitudes, igual a la inversa del número que representa en ohmios la impedancia por kilómetro del circuito alimentador, podremos, tomando como fuerzas las intensidades  $I$ , leer en voltios el segmento  $ad$  en la misma escala que hemos adoptado para los amperios  $I$ .

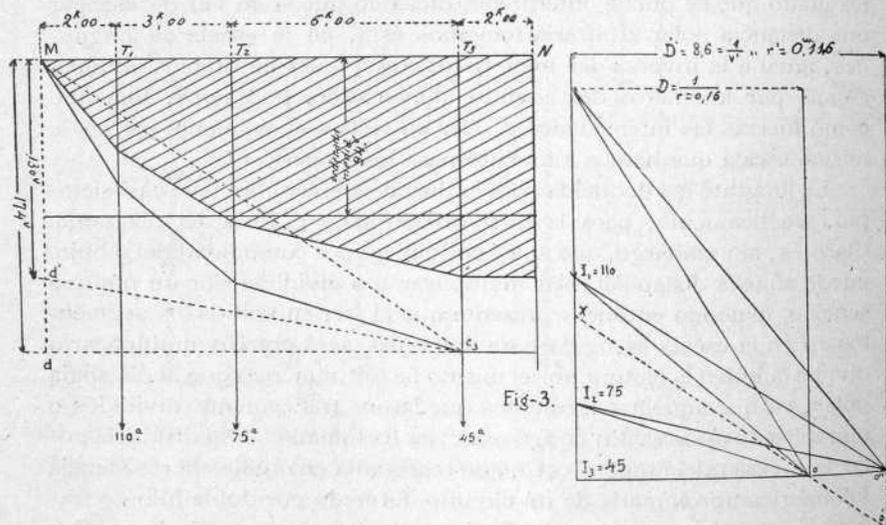
La longitud así deducida para la distancia polar conviene casi siempre, prácticamente, para la buena disposición gráfica del diagrama. Claro es, sin embargo, que si así conviniera por comodidad del dibujo, puede aquella distancia polar multiplicarse o dividirse por un número sencillo, teniendo entonces presente que al leer en voltios los segmentos  $ad$  en la escala escogida para amperios, será preciso multiplicar o dividir también la lectura por el mismo factor numérico que la distancia polar, ya que aquellos segmentos quedaron gráficamente divididos o multiplicados por él. En la figura 2.<sup>a</sup> se ha tomado como distancia polar la inversa del número 0,16, que representa en ohmios la resistencia kilométrica aproximada de un circuito formado por doble hilo de trabajo 00 (calibre americano B. & S.) y vía única con carril de 40 kilogramos por metro lineal, provista de juntas eléctricas.

Otra observación que presta gran comodidad al diagrama es la siguiente: Si por  $a$  trazamos  $ad'$ , paralela al último lado del funicular, la caída de tensión desde  $M$  hasta cualquier punto, tal como  $p$ , de la línea, está, precisamente, medida por el segmento de vertical interceptado entre  $aa'$  y el funicular. No creemos necesario insistir en demos-

trarlo, ya que claramente se desprende de la figura y de las consideraciones antes hechas, teniendo, además, presente que entre dos trenes contiguos la tensión de la línea sigue, naturalmente, una ley de variación lineal.

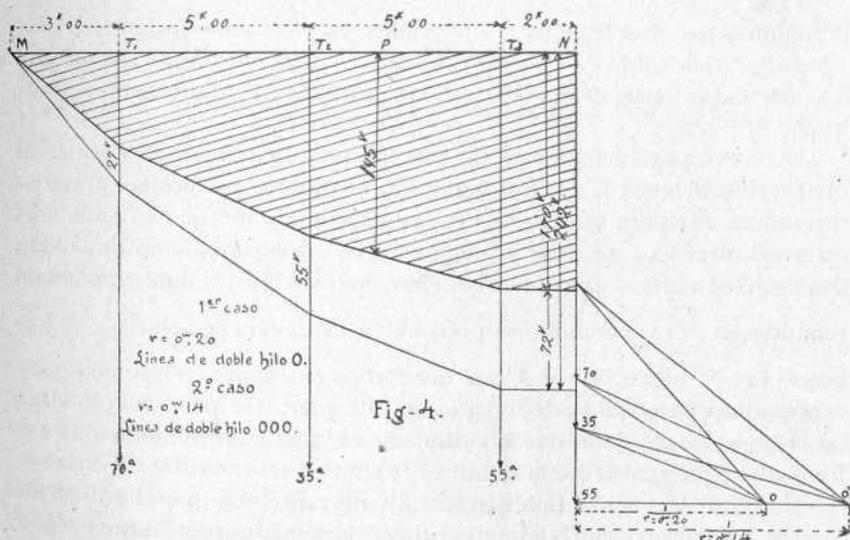
De este modo se tiene en el diagrama, no sólo la máxima caída de tensión, sino el valor de esta pérdida correspondiente a cualquier punto de la línea, siempre *para el instante supuesto*, así como la ley gráfica de variación de esta pérdida a lo largo de aquélla. Para mayor comodidad en el uso del dibujo, podremos todavía escoger horizontal el último radio polar, a fin de que también lo sean el último lado del funicular y su paralela  $aa'$ .

De cuanto va expuesto se desprende que cualquier problema relacionado con este tema podrá resolverse gráficamente acudiendo a las propiedades de los polígonos funiculares. Supongamos, por ejemplo (fig. 3.<sup>a</sup>), que la pérdida máxima  $Md$ , desde  $M$  hasta  $T_3$  (tren más le-



jano), nos resultará excesiva para la tolerancia admitida y quisiéramos reducirla a un valor  $Md'$ . La solución se obtendrá trazando un funicular cuyo primer lado pase por  $M$  y cuyo último lado sea  $M'c_3$ . Bastará, según se recuerda, trazar la línea de cierre diagonal  $Mc_3$  del funicular y por  $O$  la paralela  $Ox$ ; el punto de encuentro  $O'$  de esta últi-

ma con la paralela tirada desde  $I_3$  a la recta  $d'c_3$  será el nuevo polo que corresponde al funicular buscado, el cual polo puede reemplazarse por otro  $O''$  que diste igualmente del polígono de fuerzas. Para la finalidad perseguida es innecesario dibujar el nuevo funicular, pues bastaría tomar nota del aumento que ha sufrido la distancia polar. Como debe esperarse, este aumento, que es consecuencia de la reducción impuesta a la caída máxima de tensión, se traduce en una disminución de la inversa de aquella distancia polar, es decir, de la resistencia kilométrica  $r$ . Para calcular el nuevo valor  $r'$  bastará medir  $D'$  en la escala de distancias; tomar la inversa del número que mide en kilómetros su longitud y esta inversa expresará en ohmios el valor de  $r'$ , del cual se deducirá en seguida el aumento de sección que ha de darse al hilo de trabajo y, eventualmente, examinar si conviene mejorar el conductor de retorno (vía) mediante la adición de un feeder. De un modo análogo se procedería si en vez de fijarnos el valor de la caída máxima de tensión nos propusiéramos limitar a un determinado valor la pérdida desde  $M$  a  $T_2$ , por ejemplo.



Inversamente, podemos (fig. 4.<sup>a</sup>) escoger dos o tres valores de la sección dentro de los tipos normales que para esta aplicación se trefilan y dibujar para ellos los respectivos funiculares, cuya comparación

de ordenadas nos mostrará inmediatamente lo que se gana o se pierde de una sección a otra en orden a la buena o aceptable distribución y pérdida de potencial a lo largo de la línea.

Otro problema, cuya resolución pudiéramos proponernos, sería formar la línea de trabajo, por ejemplo, con dos o más secciones distintas para los conductores, secciones decrecientes a medida que nos alejamos del punto  $M$ , por el cual es alimentada aquella línea. Así se hace a veces y la adopción de este principio responde, lógicamente, al hecho de que a medida que nos alejamos de  $M$  la suma de las intensidades que por la línea circulan va siendo menor, y con ella la pérdida de tensión por unidad de longitud, como claramente lo muestra la decreciente inclinación de los lados del funicular, lados cuya pendiente o coeficiente angular mide esta pérdida unitaria.

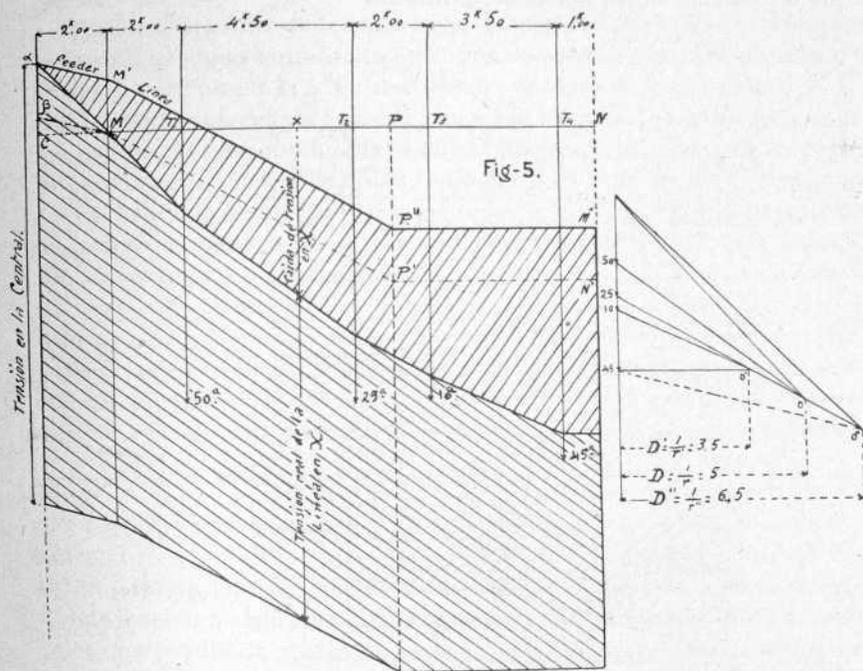
Supongamos que desde  $M$  hasta  $P$  prevemos una sección de línea que corresponda a un determinado valor de  $r$ , y desde  $P$  hasta  $N$  otra sección correspondiente a un valor mayor  $r'$ . Si tomamos  $O$  y  $O'$  distantes, respectivamente, del polígono de fuerzas los valores  $\frac{I}{r}$  y  $\frac{I}{r'}$ , y dibujamos los dos funiculares parciales en la forma que muestra la *figura 5.<sup>a</sup>*, las caídas de tensión desde  $M$  hasta  $N$  estarán dadas por las ordenadas verticales comprendidas entre el funicular y la línea quebrada  $MP'N'$ .

Un caso particular dentro de esta hipótesis corresponde a aquél en que desde  $M$  hasta la central generadora o hasta la subestación transformadora existiera un feeder de resistencia kilométrica  $r''$  (ida más retorno), debido a no estar aquella central o subestación en inmediata proximidad a  $M$ , sino a una distancia de este punto que suponemos rebatida en  $MC$ . Tomando el polo  $O''$  a la distancia polar  $\frac{I}{r''}$  y trazando las paralelas  $M\alpha$  y  $M\beta$  a los radios extremos, el segmento  $\alpha\beta$  representará la pérdida de tensión en el feeder. La pérdida a lo largo de la línea estará dada por la ordenada vertical comprendida entre el funicular (completado con el lado  $M\alpha$ ) y la quebrada  $M'P''N''$ .

Como observación también de interés, diremos que si en vez de querer leer la variación de las pérdidas de tensión quisiéramos seguir la variación de la tensión misma a lo largo de la línea, nos bastaría trazar una línea quebrada paralela a la anterior y situada por bajo de ella a la distancia  $V$ , siendo esta distancia la que representa la tensión de la central generadora o de la subestación alimentadora. Aquella

tensión estará dada, en cualquier punto, por la ordenada comprendida entre la nueva quebrada y el funicular.

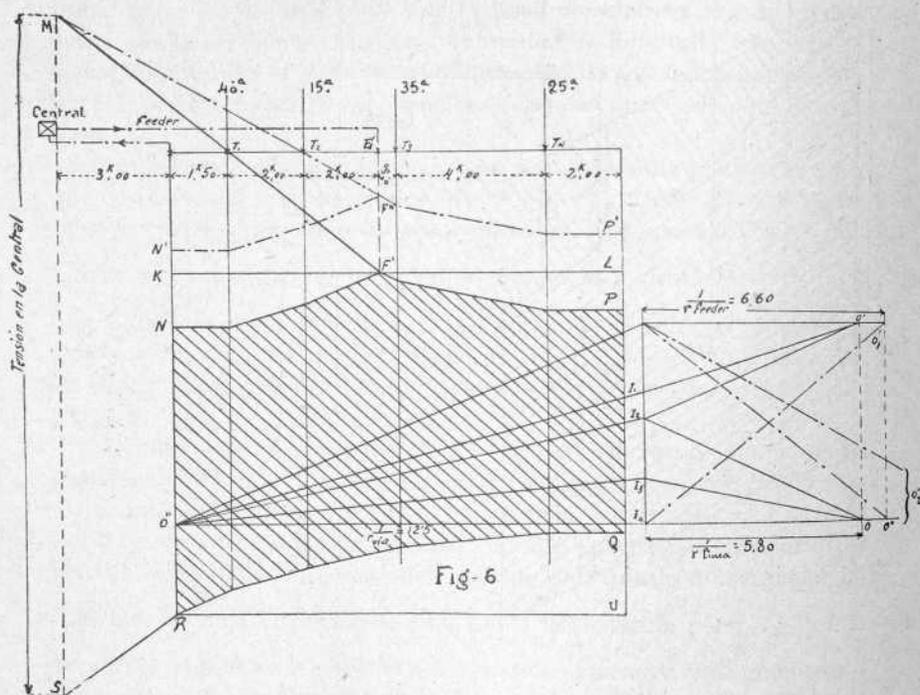
Todos los problemas de índole análoga se resolverían en parecida forma. Pudiera, con el mismo polígono de fuerzas, calcularse la pérdida de potencia (vatios) correspondiente al instante considerado. Bastaría para ello tomar como líneas de acción verticales, distantes entre



sí, los segmentos  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ , etc. (fig. 2.<sup>a</sup>). Los nuevos segmentos obtenidos por el trazado de un nuevo funicular, en vez de ser como en los primeros las pérdidas de tensión (productos de resistencias por intensidades), serían el producto de estas últimas por las intensidades (productos de resistencias por cuadrados de intensidades), que dan las pérdidas en vatios. Estas pérdidas de potencia, para un determinado instante, no ofrecen interés en su evaluación para un proyecto o estudio del género que nos ocupa, mientras que sí ofrece mucho interés las pérdidas de energía (vatios-hora), que corresponden a una jornada o

a un ciclo determinado de tiempo, unidas a la máxima caída de potencial.

En los diferentes casos que hemos venido estudiando se ha supuesto que todos los trenes estuvieran de un mismo lado con respecto al punto  $M$ , por el que es alimentada la línea. Claro es que esto no afecta a la generalidad de los razonamientos ni de las construcciones gráficas. Bastará con hacer las mismas construcciones para los trenes que se hallen a la izquierda del punto  $M$ .



Así, por ejemplo, en la figura 6.<sup>a</sup> hemos hecho aplicación al caso de una línea de 12 km. de longitud sobre la que se encuentran simultáneamente cuatro trenes. Dicha línea es alimentada por una central que dista 3 km. de su origen. Un feeder positivo parte de la central para unirse a la línea en el punto  $F$ . En el retorno se utiliza la vía, cuyo origen se conecta con la central con un feeder negativo de igual sección que el anterior. Las líneas  $MF'$  y  $SR$  trazadas tomando como

distancia polar la inversa de la impedancia kilométrica del feeder, dan las caídas de tensión desde su valor en la central y a lo largo de dichos alimentadores. A partir del punto  $F$ , los funiculares trazados a un lado y otro, con distancia polar correspondiente a la impedancia de la línea, proporcionan las pérdidas de tensión en ésta, pérdidas que se cuentan desde  $KL$  hacia abajo. El funicular  $RQ$  da estas pérdidas a lo largo de la vía, y para su dibujo se ha tomado una distancia polar correspondiente.

En las ordenadas de la zona rayada puede seguirse la variación de la tensión a todo lo largo de la línea considerada. Si se deseara uniformizar la pérdida en la vía, pudiéramos escoger el feeder negativo de modo que se conectara con ella, no en el extremo, sino en un punto intermedio, lo que conduciría a que el diagrama ofreciera en su parte inferior la misma forma de doble funicular que presenta en la superior.

El diagrama aconsejará, por ejemplo, la conveniencia o necesidad de colocar en paralelo con la vía un feeder que reduzca en ésta las caídas de tensión, al menos en la zona o zonas en que fueran de temer los riesgos de electrolisis, si se trata de corriente continua, y sobre el diagrama se resolverán fácilmente todos los problemas análogos. En la figura se ha mostrado cómo se calcularía un elevador automático de tensión de feeder (1), de manera que dentro de los datos supuestos el valor mínimo de la tensión en línea fuera  $P'Q$ . La característica de dicho elevador automático (survolteur), resulta ser  $e = \frac{44}{115} i$ , es decir, 0,37 v. por cada amperio. De igual modo se calcularía un reductor automático de tensión (sousvolteur) para el conductor de retorno. La figura muestra también que el efecto obtenido con el elevador automático de tensión podría conseguirse aumentando la sección del feeder al valor que resulte de medir la distancia polar correspondiente a  $O_2$ ; así podrían compararse económicamente ambas soluciones.

Todas las consideraciones hechas se refieren, como queda dicho, al estudio de la tensiones en línea *para un instante determinado*. En la práctica, al redactar el estudio habrá que representar el diagrama de variación de consumo de corriente en función del tiempo, sea en toda la línea, sea en cada una de las secciones en que ésta se divida. La inspección simultánea de aquel diagrama, la del horario gráfico y la del

(1) Dinamo serie cuyo circuito magnético trabaja a inducciones inferiores al codo de la curva de magnetismo. Su característica  $e = f(i)$ , es, pues, una línea recta, definida por su coeficiente angular.

perfil longitudinal, muestran inmediatamente que hay dos o tres instantes en el ciclo de la explotación, para los cuales las condiciones de trabajo son las más duras y las pérdidas de tensión, consiguientemente, las más elevadas. Bastará que para dichos instantes se dibujen los gráficos de que nos hemos venido ocupando, y el estudio de los resultados que arrojen aconsejará la conveniencia de reforzar secciones de conductores, de prever feeders de retorno, de cambiar o multiplicar los puntos de conexión de los alimentadores con la línea, de adoptar elevadores de tensión, etc., etc., hasta quedar dentro de las tolerancias admitidas, tolerancias en cuya amplitud influye mucho la duración o persistencia en el tiempo de las mismas, ya que dentro de valores medios aceptables, poco inconveniente resulta de que durante breves instantes las condiciones sean desfavorables, y hay que huir de la inmovilización antieconómica de sumas considerables en el circuito de alimentación, si su trabajo o intervención útil sólo tiene lugar en una pequeña fracción del tiempo o del ciclo de explotación.

---

LA ADHERENCIA  
EN  
EL HORMIGÓN ARMADO  
y las variaciones de volumen en el fraguado

POR  
D. FERMIN CASARES BESCANSÁ

INGENIERO DE CAMINOS

(Sesión del 18 de Octubre de 1915.)

Agrupamos con este título un estudio de la distribución de esfuerzos que se desarrollan entre el hormigón y sus armaduras en varios casos de la práctica. Como el esfuerzo de adherencia es el que nos sirve de punto de partida para desentrañar estas acciones mutuas, lo ponemos en primer lugar. Los tratados de hormigón armado que hemos manejado no se distraen en el detalle de su cálculo, si bien sus autores hacen notar de un modo general el sentido de los esfuerzos que se producen.

El origen de las acciones aludidas reside en la conocida propiedad de los hormigones de variar de volumen una vez que el fraguado ha terminado. Estas variaciones son de dos clases: contracciones o dilataciones, y su magnitud en uno y otro caso depende de las proporciones iniciales de las mezclas que constituyen la masa del hormigón, de la naturaleza de los cementos y de la cantidad de agua con que se ha formado la masa. A nuestro entender, no se han catalogado hasta el día estos efectos, relacionándolos con las cantidades de que dependen, aunque sería de utilidad, para que en la práctica puedan tener aplicación las fórmulas que a continuación deducimos.

La importancia de estas variaciones de volumen puede llegar, en algunos casos, a ser considerable; así, por ejemplo, un hormigón con 800 kg. de cemento por metro cúbico, que se ha desecado una vez

fraguado, sufre una contracción longitudinal equivalente a la que tendría una varilla de acero sometida a una compresión de 10 kg. por metro cuadrado. Esta contracción crece con la cantidad de cemento que hayamos incorporado. Se comprende que las varillas incluidas en la masa pueden tener tensiones considerables de fabricación de la pieza, aun antes de haberla sometido a los esfuerzos que deba resistir.

Las dilataciones se producen en los hormigones que se conservan húmedos después del fraguado, y su valor es inferior al de las contracciones; pudiendo evaluarse en un tercio próximamente, dados los resultados aislados que tenemos a la vista.

Se atribuyen estos efectos a que al fraguar un cemento forman sus elementos, con parte del agua, nuevos cuerpos de composición definida; dando lugar a una agrupación de cristales entrecruzados, especie de fieltro, que se produce con aumento de volumen. Este aumento es el que se observa cuando el fraguado ocurre dentro del agua.

La evaporación exterior del exceso de agua que ha servido para la formación de la pasta, pero que no ha tomado parte en la cristalización, es la que produce la contracción que supera al primer efecto.

Estudiamos primero los esfuerzos aludidos en el caso de una pieza prismática con armaduras simétricamente repartidas en la sección transversal, como sucede en las columnas, pilastras y pilotes, tanto teniendo en cuenta la contracción como la dilatación. Hemos deducido las fórmulas que dan la distribución de las tensiones, compresiones y adherencia, y agregamos algunas consideraciones que tienden a especificar como más convenientes en cada circunstancia los dos tipos de apoyos conocidos: la sección con varillas de diámetro notable y enlaces transversales escasos, y la sección de varillas verticales delgadas con importancia mayor en los zunchos.

Deducimos después fórmulas análogas para las piezas prismáticas con armadura dirimétrica, o sea las viguetas, también en los dos casos de contracción y dilatación. Damos así la distribución de las tensiones, compresiones y adherencia, y determinamos las flechas de flexión. Estas consideraciones resultan curiosas, porque se pueden relacionar con un procedimiento propuesto por Koenen para mejorar las condiciones de resistencia de una pieza, en cuya sección esté desproporcionada la parte de hormigón apta para la compresión con la sección del tensor, por falta o por exceso de cualquiera de las dos. El procedimiento no sabemos que haya sido llevado a la práctica, pero sería útil, si el ingeniero pudiera disponer de un cuadro de experien-

cias y de calidades de cemento que le permitiesen elegir a su deseo la contracción o dilatación más conveniente.

Finalmente, y como cuestión análoga en su desarrollo a las anteriores, hemos estudiado las experiencias usuales para determinar el esfuerzo de adherencia límite, arrancando una varilla englobada en el hormigón valiéndose de la tracción o de la compresión.

Indicamos también en cada uno de los casos tratados las experiencias que podrían servir de base para determinar, en la práctica, los coeficientes que entran en las fórmulas.

El procedimiento de que nos hemos valido para desarrollar el cálculo consiste en considerar que toda varilla sometida a esfuerzos de adherencia produce en el hormigón deformaciones transversales causadas por los esfuerzos cortantes, que equivalen a una especie de deslizamiento longitudinal proporcional al esfuerzo, cuya deformación se circunscribe en su casi totalidad en la zona de hormigón que rodea a la varilla. Asociando a este deslizamiento las deformaciones por compresión o tracción del hormigón y armaduras, tenemos medios suficientes para determinar una ecuación diferencial, que nos permite buscar los esfuerzos.

La importancia práctica que puedan tener estas consideraciones no es grande desde el punto de vista de las construcciones ordinarias, en que se parte de coeficientes que la experiencia ha fijado como suficientes para englobar los esfuerzos desconocidos desarrollados por causas variadas. Sin embargo, y aparte del procedimiento de Koenen citado para mejorar las condiciones de una viga, hay siempre interés en conocer con detalle las acciones interiores, para formarse mejor idea del trabajo de piezas, como sucede en los puentes metálicos cuando se hace el estudio de los esfuerzos secundarios.

#### NOTACIONES.

- $S$  = Sección total del hormigón.  
 $s$  = Idem id. de la armadura.  
 $t$  = Tracción o compresión de la armadura en kilogramos por unidad de sección.  
 $T$  = Idem id. id. del hormigón id. id. id.  
 $c$  = Contracción por unidad de longitud debida al fraguado.  
 $d$  = Dilatación idem id. id. id.  
 $l$  = Longitud total de la pieza.  
 $E_a$  = Coeficiente de elasticidad de la armadura.  
 $E_h$  = Coeficiente de elasticidad del hormigón.

$m$  = Relación entre los anteriores  $mE_h = E_a$ .

$A$  = Adherencia de la armadura en kilogramos por unidad de longitud.

$e$  = Base de los logaritmos neperianos.

$KNM$  = Coeficientes cuyo valor especificaremos.

$P$  = Esfuerzo de arranque al ensayar la adherencia por tracción.

$Q$  = Idem id. id. id. por compresión.

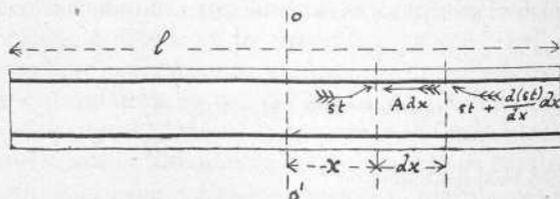
## I.

## APOYOS.

## PIEZA PRISMÁTICA DE SECCIÓN CONSTANTE CON ARMADURA SIMÉTRICA.

Suponemos que los esfuerzos se transmiten uniformemente, por compresión o tracción, en la sección transversal del hormigón. Esta hipótesis se aparta poco de la realidad en el caso ordinario, en que la pieza tiene longitud considerable con relación a la sección, como sucede en las pilastras y columnas.

Basta para convencerse de ello el notar que, si bien los esfuerzos de que tratamos se transmiten al hormigón por la pequeña zona que rodea a las varillas, la compresión o tracción total que observamos en cada sección procede de los esfuerzos parciales que se han ido agregando en todas las secciones anteriores, y que vienen repartiéndose uniformemente por la masa, sin que tenga importancia la desigual repartición de los esfuerzos locales que producen las secciones inmediatas.

Fig. 1.<sup>a</sup>

En la *figura 1.<sup>a</sup>* se representa una sección longitudinal de la pieza. Tomemos como origen el plano medio  $oo'$ ; una sección transversal cualquiera se determinará por la distancia o abscisa  $x$ .

El equilibrio del trozo separado por una sección exige que los es-

fuerzos proyectados sobre el eje de la pieza tengan una resultante nula. Como estamos estudiando sólo los esfuerzos interiores debidos a la variación de volumen, no hay fuerzas exteriores y la compresión total, por ejemplo, que sufren las armaduras, será igual a la tensión en toda la sección del hormigón,

$$st = ST. \quad [1]$$

1. *El hormigón sufre contracción al fraguar.*—Razonemos ahora en el caso de que el hormigón se contrae al fraguar, dejando para más adelante lo relativo a la dilatación.

La sección del hormigón de abscisa  $x$  se aproximaría a la de origen, si la armadura no se lo impidiese en parte, en una cantidad  $cx$ , en que  $c$  es la contracción unitaria del hormigón sin armadura.

La presencia de ésta impide que se contraiga libremente, y produce en cada sección del hormigón una tensión  $T$  por unidad de superficie, que es función de  $x$ .

El desplazamiento de la sección de hormigón que consideramos será, por tanto, la diferencia

$$\Delta_1 x = cx - \int_0^x \frac{T}{E_h} dx,$$

siendo  $E_h$  el coeficiente de elasticidad del hormigón.

Por otro lado, las varillas de la armadura, obligadas en virtud de la adherencia a seguir al hormigón en su contracción, se habrán contraído también; la sección que se encontraba a la distancia  $x$  del origen se habrá aproximado a él la cantidad

$$\Delta_2 x = \int_0^x \frac{t}{E_a} dx,$$

donde  $t$  es la compresión por unidad de superficie en la armadura, y  $E_a$  el coeficiente de elasticidad del metal, relacionado con el anterior por

$$E_a = m E_h. \quad [2]$$

Las dos cantidades  $\Delta_1 x$  y  $\Delta_2 x$  no son iguales, predominando la

primera, porque como la contracción se produce en el hormigón, arrastra a las varillas.

Se produce una deformación transversal en el hormigón, que equivale a un deslizamiento entre las varillas y la masa, como decíamos antes.

Este deslizamiento aparece al mismo tiempo que nace la adherencia; se le puede considerar proporcional, como es usual en los esfuerzos elásticos relacionados con las deformaciones que producen. Llamando  $A$  la adherencia por unidad de longitud desarrollada en cada punto

$$A = K(\Delta_1 x - \Delta_2 x) = K\left(cx - \int_0^x \frac{T}{E_h} dx - \int_0^x \frac{t}{E_a} dx\right). \quad [3]$$

El coeficiente  $K$  es diferente para cada forma de sección, sobre todo en el caso en que las varillas se encuentran próximas al contorno. Cuando la masa de hormigón que las rodea es considerable,  $K$  es casi independiente de la disposición de la sección, a causa de que las deformaciones transversales debidas al esfuerzo cortante se acumulan casi totalmente en las proximidades de la varilla. Podría ser causa de confusión el término *deslizamiento*, en el sentido de suponer que los elementos de hormigón en contacto con la varilla al empezar el fraguado, habían dejado de ocupar el mismo lugar después de la deformación; pero queda aclarado que nos referimos a la deformación transversal, que produce un efecto total análogo.

Por medio de las ecuaciones [1] y [2], convertiremos la [3] en

$$A = K\left(cx - \frac{ms + S}{SE_a} \int_0^x t dx\right), \quad [4]$$

que nos da la adherencia por unidad de longitud en un punto cualquiera, en función de  $x$  y  $t$ .

Busquemos otra relación entre estas mismas cantidades, para determinar  $A$  y  $t$  en función de  $x$  solamente.

Consideremos (*fig. 1.<sup>a</sup>*) el trozo de armadura comprendido entre dos secciones distantes  $dx$ . La suma de los esfuerzos que obran según el eje de la pieza, será nula:

$$st - A dx - \left(st + \frac{d(st)}{dx} dx\right) = 0,$$

o sea

$$A + s \frac{dt}{dx} = 0, \quad [5]$$

que es la segunda relación buscada.

Eliminando  $A$  entre [4] y [5],

$$s \frac{dt}{dx} + K \left( cx - \frac{ms + S}{SE_a} \int_0^{2x} t dx \right), \quad [6]$$

y derivando con relación a  $x$ , para hacer desaparecer el signo de integración

$$s \frac{d^2t}{dx^2} + K \left( c - \frac{ms + S}{SE_a} t \right) = 0.$$

La integral general resulta ser, como es fácil comprobar,

$$st = ST = \frac{SscE_a}{S + ms} + Be^{Mx} + Ce^{-Mx}.$$

$B$  y  $C$  son dos constantes arbitrarias,  $e$  la base de logaritmos neperianos y

$$M = \sqrt{K \frac{ms + S}{SE_a}}. \quad [7]$$

Las constantes se determinan por las condiciones

$$st = 0 \quad \text{para} \quad x = \frac{l}{2},$$

compresión nula en el extremo

$$A = \frac{d(st)}{dx} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0,$$

adherencia nula en el centro, fórmula [4].

Resulta, finalmente,

$$st = ST = \frac{SscE_a}{S + ms} \left( 1 - \frac{e^{Mx} + e^{-Mx}}{e^{\frac{Ml}{2}} + e^{-\frac{Ml}{2}}} \right). \quad [8]$$

Si la longitud de la pieza aumenta indefinidamente, el esfuerzo de compresión en el centro para  $x = 0$ , tiende a un límite máximo que es el valor del coeficiente que multiplica al paréntesis del segundo miembro.

La curva que representa la ecuación [8], midiendo los esfuerzos como ordenadas, tiene estas proporcionales a las ordenadas de un arco de catenaria, cuya cuerda es el eje de la pieza mantenido horizontal. Basta para comprobarlo el fijarse en que el término dentro del paréntesis, se puede reducir a una diferencia de dos fracciones con el mismo denominador; la primera tiene su numerador proporcional a las ordenadas de la cuerda extrema del arco de catenaria, y la segunda a las ordenadas de los puntos intermedios de la catenaria.

Si en alguna sección la tensión llegase a producir la rotura del hormigón, los esfuerzos se propagarían a uno y otro lado, como si la grieta separase dos piezas independientes. En las columnas no se presenta esta circunstancia, porque a los esfuerzos estudiados se superponen las cargas de mayor importancia y que actúan en gran parte antes del fraguado.

De todos modos, la contracción ocasiona, al superponer los esfuerzos de carga de la columna, una mejora en la distribución de esfuerzos. La carga unitaria del hormigón se alivia, porque se superpone una tensión a la compresión. A las varillas se refiere una parte mayor del esfuerzo al superponerse las compresiones de la carga y la que ocasiona la contracción. Nos podemos aproximar así, en mayor escala, a los límites admitidos de trabajo en ambos elementos. Se podría objetar que esta mejora ocurre sólo en las secciones medias; pero se debe contar con que, en las construcciones, una parte del apoyo se engloba, por un extremo, dentro de las viguetas que sostiene, y por el otro en la cimentación. En una y otra porción, la sección del hormigón resulta recrecida.

Se deduce, pues, como consecuencia, que es conveniente favorecer la contracción en las pilastras cuyo fraguado es seguido de la desecación; de aquí la regla práctica de emplear mezclas ricas en cemento y amasadas con bastante agua. Con esto una parte notable de la compresión será soportada por las armaduras verticales.

De la relación [5] podemos deducir el esfuerzo de adherencia por unidad de longitud en cada punto, en función de  $x$

$$A = - \frac{d(st)}{dx} = \frac{SscE_aM}{S + ms} \left( \frac{e^{Mx} - e^{-Mx}}{e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}} \right) \quad [9]$$

El coeficiente del paréntesis del segundo miembro es también un límite superior de la adherencia en los extremos de la pieza,  $x = \frac{l}{2}$ , cuando su longitud es indefinida.

El esfuerzo tiende a comprimir las varillas hacia la sección media de la pieza. En columnas cargadas, se superpone en el mismo sentido otro esfuerzo de adherencia análogo, que procede de la disposición corriente. Las varillas verticales de la columna se prolongan libremente, sin enlace alguno hasta el extremo de la pieza, en el interior de las viguetas del piso. Resulta que las cargas verticales proceden del hormigón, y se van transmitiendo a las varillas por adherencia. Las condiciones de esta transmisión de esfuerzos entre el extremo y la sección media son análogas a las que trataremos en el último caso de este apartado.

Las fórmulas anteriores presentan un coeficiente  $M$  que sería preciso determinar previamente por experiencias en secciones análogas. Se podría medir el acortamiento total que sufre la armadura después del fraguado, y compararlo con el que da la fórmula siguiente:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{t}{E_a} dx = \frac{Sc}{S + ms} \left( l - \frac{2}{M} \cdot \frac{e^{Ml} - 1}{e^{Ml} + 1} \right). \quad [10]$$

2. *El hormigón se dilata al fraguar.*—Si en vez de una contracción del hormigón se presentase una dilatación, como sucede en los pilotes y piezas sumergidas, el cálculo sería idéntico y los resultados también, con sólo cambiar en las fórmulas la letra  $c$ , indicadora de una contracción por unidad de longitud, por la  $d$ , que se refiere a una dilatación. Se invierte también el significado de  $t$  y  $T$ , pues donde antes significaban tensiones, ahora se producen compresiones e inversamente.

No hay más que fijarse en que la figura será la misma (*fig. 1.<sup>a</sup>*), invirtiendo el sentido de todas las flechas que señalan la dirección de los esfuerzos.

Las armaduras longitudinales sufren tensión, de modo que al superponerse las cargas que ocasionan compresión quedan casi inactivas. Es decir, que en los pilotes y piezas de dilatación apreciable, las armaduras verticales juegan papel de menos importancia que en los apoyos, cuyo fraguado se hace al aire libre. Está más indicada otra constitución, que es el hormigón zunchado. Las armaduras transversales se necesitan también en el tipo corriente de apoyos, pero princi-

palmente para oponerse al hendimiento longitudinal, y resistir los esfuerzos cortantes en secciones oblicuas.

En las piezas que sufren dilatación, el zuncho se opone eficazmente a la dilatación transversal del hormigón; aumenta la resistencia a la compresión, como sucede en la arena de una caja de descimbramiento de un puente. Dilatándose la pieza, ya el zuncho está en tensión antes de la aplicación de las cargas, se sobreexcita su acción y resulta más eficaz.

La adherencia resulta de contrario sentido que la producida por las cargas; por todos conceptos resulta la menor importancia de las armaduras longitudinales: sirve para determinar su sección la consideración del momento de inercia suficiente en la sección transversal para evitar la flexión lateral por equilibrio elástico inestable.

3. *Apoyo ordinario.* El esfuerzo cortante o carga se transmite al apoyo en su extremo solamente por intermedio del hormigón.—Este caso es complementario de los anteriores para darse cuenta completa de la transmisión de todos los esfuerzos en el apoyo y su repartición entre el hormigón y las varillas. A los casos anteriores hay que superponer los esfuerzos procedentes de las cargas.

Las varillas se prolongan rectas hasta el fin de la pieza; los esfuerzos de compresión o carga producida por las vigas del piso, o sea el esfuerzo cortante de éstas, se transmite sólo al hormigón del apoyo; vamos a estudiar ahora cómo se verifica la transmisión a las varillas.

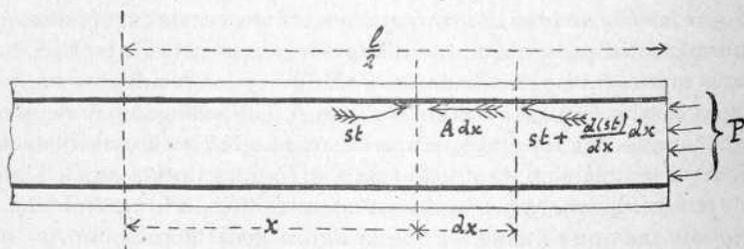


Fig. 2.<sup>a</sup>

Sea (fig. 2.<sup>a</sup>) la pieza que consideramos. Su sección media nos servirá como origen para medir la abscisa  $x$ , o distancia a otra sección transversal cualquiera.

Relacionemos como antes la adherencia con las deformaciones.

Tanto el hormigón como las varillas sufren compresión en todas las secciones. Sean  $T$  y  $t$  la medida de estos esfuerzos por unidad de superficie en el hormigón y en el metal.

Una primera ecuación que da la Estática es que la carga total será igual a la suma de las compresiones en cualquiera de las secciones.

$$P = ST + st. \quad [1'']$$

Al comprimirse el hormigón, la sección que se encontraba a la distancia  $x$  se habrá aproximado al origen en

$$\Delta_1 x = \int_0^x \frac{T}{E_h} dx.$$

Análogamente, la sección correspondiente de la varilla se habrá aproximado al origen en

$$\Delta_2 x = \int_0^x \frac{t}{E_a} dx.$$

La diferencia entre estas cantidades será la deformación transversal o deslizamiento que produce un esfuerzo de adherencia  $A$  por unidad de superficie proporcional.

$$A = K(\Delta_1 x - \Delta_2 x) = K \left( \int_0^x \frac{T}{E_h} dx - \int_0^x \frac{t}{E_a} dx \right). \quad [4'']$$

El equilibrio de un trozo de armadura separado por dos secciones distantes  $dx$ , da, véase la *figura 2.<sup>a</sup>*

$$A + \frac{d(st)}{dx} = 0. \quad [5'']$$

Eliminando  $T$ ,  $E_h$  y  $A$  entre [1''], [2], [4''] y [5''] tendremos:

$$\frac{d(st)}{dx} + \frac{K}{SE_a} \int_0^x [mP - (S + ms)t] dx = 0, \quad [6'']$$

diferenciando para suprimir la integral.

$$s \frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{K}{SE_a} [mP - (S + ms)t] = 0.$$

La integral general es

$$st - \frac{Pms}{S + ms} = Be^{Mx} + Ce^{-Mx}.$$

Las constantes se determinan por las condiciones

$$\frac{d(st)}{dx} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0,$$

según la ecuación [4'];

$$st = 0 \quad \text{para} \quad x = \frac{l}{2};$$

la varilla no sufre presión en su extremo, con lo que resulta,

$$st = P \frac{ms}{S + ms} \left( 1 - \frac{e^{Mx} + e^{-Mx}}{e^{\frac{Ml}{2}} + e^{-\frac{Ml}{2}}} \right) \quad [8']$$

$M$  tiene el valor ya conocido que da la ecuación [7].

De esta fórmula [8'] se deduce, agregada a los resultados de los [8] y [8'], que en los apoyos no hay que contar en sus partes extremas con la sección de las varillas verticales, pues todos los esfuerzos se transmiten íntegros al hormigón, sólo en la parte central es donde pueden las armaduras soportar una parte notable de la carga.

Se podrían idear disposiciones más o menos prácticas para hacer que desde el mismo extremo la carga llegase a las varillas, transmitiéndose por unidad de sección con el aumento correspondiente al coeficiente  $m$ , sobre la que corresponde al hormigón. De todos modos, en la disposición prácticamente usada se comprueba así la conveniencia de hacer que los extremos de la pieza, por un lado en el extremo de las vigas, y por otro en el macizo de cimentación, se encuentre englobado en una mayor sección de hormigón, con las varillas prolongadas a su través hasta el fin, en porción considerable. Así, al entrar en el fuste aparente, ya tenemos una porción notable del esfuerzo transmitido a las varillas.

Derivando la fórmula [8'] tendríamos el esfuerzo de adherencia, que tiende a comprimir la armadura en dirección del centro de la pieza.

$$A = - \frac{d(st)}{dx} = MP \frac{ms}{S + ms} \cdot \frac{e^{Mx} - e^{-Mx}}{e^{\frac{Ml}{2}} + e^{-\frac{Ml}{2}}} \quad [9']$$

## II.

## VIGUETAS.

PIEZA PRISMÁTICA DE SECCIÓN CONSTANTE CON ARMADURA DIRIMÉTRICA.

4. La armadura es una sola fila de varillas situadas a la distancia  $a$  de la fibra neutra. El hormigón se contrae al fraguar (fig. 3.<sup>a</sup>).—Ejes coordenados en la sección longitudinal de la pieza que representa la figura 3.<sup>a</sup>: Eje de las  $x$ , la fibra neutra que tendría la pieza si estuviese formada por el hormigón solo. Eje de las  $y$ , la perpendicular en el punto medio de la longitud de la pieza.

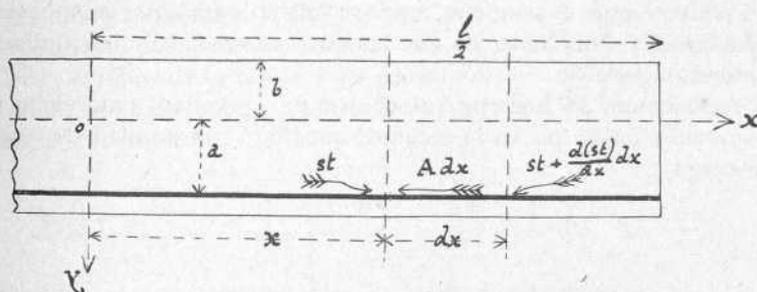


Fig. 3.<sup>a</sup>

Por efecto de la contracción del hormigón, la armadura estará sometida a una compresión  $st$ , función de  $x$ . El hormigón estará en tensión en las inmediaciones de la armadura con una fuerza  $T$  por unidad de superficie, también variable con  $x$ .

Podremos, desde luego, establecer la relación

$$s \frac{dt}{dx} + K \left( cx - \int_0^x \frac{T}{E_h} dx - \int_0^x \frac{t}{E_a} dx \right) = 0 \quad [11]$$

equivalente al resultado de eliminar  $A$  entre las [3] y [5] del caso primeramente tratado; pues los razonamientos y la disposición de las piezas son idénticos, advirtiendo solamente que  $T$  no es constante en

toda la altura de la sección, sino que es función de  $x$  y de  $y$ . El valor que entra en la fórmula [11] se refiere al que resulta para  $y = a$ , o sea la tracción del hormigón en las inmediaciones de la armadura.

Necesitamos, por tanto, determinar previamente cuál es la variación de  $T$  en los distintos puntos de una sección.

Cortemos la pieza por una sección transversal de abscisa  $x$ , y consideremos el equilibrio de una de las porciones separadas. No hay esfuerzos exteriores, queda solamente la compresión  $st$  de la varilla que debe ser equilibrada por los esfuerzos que se producen en la sección del hormigón.

Esta compresión  $st$  es un esfuerzo excéntrico a la distancia  $a$  del centro de gravedad de la sección del hormigón. Tenemos que admitir una hipótesis, corriente en el estudio de la flexión de las vigas, y que la experiencia comprueba con la exactitud necesaria para el caso. Suponemos que la repartición de los esfuerzos en la sección transversal es lineal con relación a  $y$ , ley que se suele llamar de la deformación plana y que desempeña aquí el mismo papel que la suposición hecha en el primer caso de que las fuerzas se distribuían uniformemente en la sección.

Trasladando la fuerza  $st$  al centro de gravedad, tendremos una compresión uniforme en la sección, que dará por unidad de sección una carga

$$\frac{st}{S},$$

y un momento flector  $sta$ , que producirá en cada punto y también por unidad de sección, una carga

$$\frac{sta \cdot y}{I}$$

siendo  $y$  la ordenada del punto, e  $I$  el momento de inercia de la sección transversal del *hormigón*, con relación a su fibra neutra.

Por tanto, la tensión del hormigón, que será igual y contraria a estas compresiones, será en cada punto la suma algébrica de las anteriores

$$T = \frac{st}{S} + \frac{stay}{I} = st \left( \frac{1}{S} + \frac{ay}{I} \right). \quad [12]$$

En la parte inferior de la pieza en que  $y$  es positiva, según la dirección de ejes de la *figura 2.<sup>a</sup>*, los dos términos son positivos y producen tensión. En la parte superior de la sección el segundo término cambia de signo, por ser  $y$  negativo. Se puede, además, comprobar que este segundo término debe ser, en las condiciones ordinarias de las viguetas, en que la armadura única se encuentra hacia un borde de la sección, mayor que el primero.

En efecto, la fórmula [12] representa los valores de  $T$ , como las ordenadas de un trapecio, uno de cuyos lados es la altura de la sección. Para que estas fuerzas equilibren a la compresión  $st$ , la varilla debe pasar por el centro de gravedad del trapecio. Como se encuentra hacia un borde, esto no es posible sin que el trapecio se transforme en dos triángulos, uno con ordenadas positivas (el inferior), que representan tensiones, y otro con ordenadas negativas (el superior), que representan compresiones. Resulta, pues, que la parte alta de la sección está comprimida, lo mismo que le sucede a la varilla.

Haciendo en la fórmula [12]  $y = a$ , tendremos el valor de  $T$  que necesitábamos para continuar los cálculos a partir de la fórmula [11]; es decir, el valor de la tensión del hormigón en las inmediaciones de la varilla. Substituyendo, y teniendo en cuenta [2], para hacer desaparecer  $E_h$ , resulta:

$$s \frac{dt}{dx} + K \left( cx - \left[ \frac{S + ms}{SE_a} + \frac{msa^2}{I} \right] \int_0^x t dx \right) = 0,$$

derivando con relación a  $x$ , para hacer desaparecer la integral,

$$s \frac{d^2t}{dx^2} + K \left( c - \left[ \frac{S + ms}{SE_a} + \frac{msa^2}{I} \right] t \right) = 0. \quad [13]$$

La integral general es

$$st = \frac{scE_a}{\frac{S + ms}{S} + \frac{msa^2}{I}} + Be^{Nx} + Ce^{-Nx}$$

$N$  representa el valor

$$N = \sqrt{\frac{K}{sE_a} \left( \frac{S + ms}{S} + \frac{msa^2}{I} \right)}. \quad [14]$$

Las constantes arbitrarias  $B$  y  $C$  se determinan por las mismas condiciones que en el primer caso, y resulta, finalmente, que la compresión de la varilla en cada punto es

$$st = \frac{scE_a}{\frac{S+ms}{S} + \frac{msa^2}{I}} \left( 1 - \frac{e^{Nx} + e^{-Nx}}{e^{\frac{Nl}{2}} + e^{-\frac{Nl}{2}}} \right). \quad [15]$$

Esta fórmula y la [12] resuelven el problema de darnos los valores de las compresiones y tensiones de la varilla y del hormigón en cada punto de la pieza.

Para obtener la adherencia recurriremos a la fórmula [5]

$$A = -\frac{d(st)}{dx} = \frac{scE_a N}{\frac{S+ms}{S} + \frac{msa^2}{I}} \left( \frac{e^{Nx} - e^{-Nx}}{e^{\frac{Nl}{2}} + e^{-\frac{Nl}{2}}} \right). \quad [16]$$

sin que el cálculo tenga dificultad alguna.

La fórmula [15], y lo mismo resultaría para la adherencia, da un límite máximo para los esfuerzos en la varilla, que sería en la primera y para una pieza de longitud indefinida el valor del coeficiente del paréntesis.

Obtenidas las expresiones de los esfuerzos, fijémonos en el efecto que se produce en una vigueta cuando el hormigón se *contrae*. La varilla queda sometida a una *compresión*, que crece desde los extremos hasta el centro. El hormigón de la tabla superior queda también sometido a una *compresión*, que varía lo mismo que el anterior esfuerzo. Finalmente, aparece un esfuerzo de adherencia que decrece desde los extremos hacia el centro, pero cuyo signo es contrario al que se presenta en la flexión de la viga, puesto que aquí tiende a comprimir la armadura.

Resulta, pues, que cuando la armadura es débil de sección y perímetro y nos sobra resistencia a la compresión en la tabla, puede ser ventajosa la aparición de una contracción. Las fórmulas [12], [15] y [16] resolverían el problema, siendo las variables de que podemos disponer  $t - A -$  el valor de  $T$  para  $y = -b$ , y  $c$ , eligiendo este último a nuestro arbitrio; haciendo crecer su valor con la riqueza en cemento de la mezcla y la naturaleza de ésta. Esta clase de vigas, sin embargo, presentan en el alma una tendencia excesiva a fisurarse; porque

a la tensión que producen las cargas se agrega la que resulta de la fórmula [12]; puede corregirse con armaduras apropiadas.

Pongamos un ejemplo. Supongamos una viga en la cual hayamos calculado los coeficientes de trabajo en la sección central para una carga dada, y nos resulte una resistencia sobrada del hormigón a la compresión en la tabla y, en cambio, la armadura trabaje a 12 kilogramos por mm.<sup>2</sup>, siendo así que no queremos que exceda del límite de 10 kg. Tendremos que dar a la armadura, por medio de una contracción del hormigón, una compresión inicial de 2 kg. por mm.<sup>2</sup>; la fórmula [15], haciendo en ella  $x = 0$  y substituyendo, en vez de  $t$ , el valor de 2.000.000 (si elegimos por unidad el metro cuadrado) nos determinará el valor de  $c$ , contracción por metro lineal que le es proporcional y entra sólo en el coeficiente del paréntesis. La fórmula [16] nos determina la adherencia que hay que restar a la que procede de la flexión, haciendo en ella  $x = \frac{l}{2}$ .

Finalmente, habrá que comprobar por medio de la fórmula [12], haciendo  $t = 2.000.000$ ,  $y = -b$ , si no resultará una compresión que, agregada a la de la flexión, exceda al límite admitido para el hormigón en la tabla.

5. *Determinación de la flecha.*—Es interesante este dato, porque su valor nos permite, mediante experiencias, determinar  $N$ , que necesitamos conocer para poder aplicar las fórmulas anteriores.

Suponiendo que las armaduras no tienen rigidez apreciable para doblarse, el momento flector vendrá resistido por el hormigón solo, siendo la armadura una fuerza exterior a él y causa de la flexión. La fórmula bien conocida que da la ecuación aproximada de la elástica sería

$$E_h I \frac{d^2 y}{dx^2} = sta = Da \left( 1 - \frac{e^{Nx} + e^{-Nx}}{\frac{Nl}{e^{\frac{Nl}{2}}} + e^{-\frac{Nl}{2}}} \right),$$

llamando  $D$  al coeficiente de la fórmula [15].

Integrando una vez,

$$E_h I \frac{dy}{dx} = Da \left( x - \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{Nx} - e^{-Nx}}{\frac{Nl}{e^{\frac{Nl}{2}}} + e^{-\frac{Nl}{2}}} \right),$$

sin constante, porque el primer miembro debe anularse para  $x = 0$ .

Integrando otra vez, tendremos la elástica

$$E_a I y = m E_a I y = Da \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{N^2} \cdot \frac{e^{Nx} + e^{-Nx}}{e^{\frac{Nl}{2}} + e^{-\frac{Nl}{2}}} \right) + H$$

para  $x = 0, y = 0$ , lo que permite determinar la constante  $H$

$$m E_a I y = Da \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2 - e^{Nx} - e^{-Nx}}{N^2 \left( e^{\frac{Nl}{2}} + e^{-\frac{Nl}{2}} \right)} \right),$$

poniendo  $x = \frac{l}{2}$  tendremos la flecha  $f$ , que nos permitiría hallar  $N$ , conociendo  $f$  y  $c$ :

$$m E_a I f = \frac{sca E_a}{\frac{S + ms}{S} + \frac{msa^2}{I}} \left( \frac{l^2}{8} - \frac{1}{N^2} + \frac{2}{N^2 \left( e^{\frac{Nl}{2}} + e^{-\frac{Nl}{2}} \right)} \right). \quad [17]$$

6. *La armadura es una sola fila de varillas situada a la distancia  $a$  de la fibra neutra. El hormigón se dilata al fraguar.*—Sirve la misma figura 3.<sup>a</sup> con solo cambiar el sentido del esfuerzo  $A dx$  y de los demás, es decir, que las ecuaciones resultan idénticas a las del caso anterior, y lo mismo ocurre con los resultados. Se cambiará únicamente la letra  $c$ ; indicadora de una contracción por la  $d$ , dilatación; donde antes resultaba una compresión en el hormigón o en las varillas ahora se tendrá en cuenta una tensión y a la inversa.

Las fórmulas [12], [15] y [16] resuelven, como en el otro caso, el problema de buscar los esfuerzos cuando hay dilatación.

Pongamos un ejemplo práctico. Supongamos que al calcular una vigueta para un momento flector dado de antemano, nos hayamos encontrado con que en la sección más cargada la tabla trabajaría a 50 kilogramos por  $\text{cm}^2$  y, en cambio, la armadura esté lejos por defecto del límite admitido para su resistencia.

Nos conviene, desde luego, suscitar una dilatación del hormigón, con lo que se producirá una tensión inicial en la varilla y otra tensión en la cara superior de la tabla. Para no pasar en este caso concreto de un límite, por ejemplo, de 40 kg. por  $\text{cm}^2$  en la tabla, necesitamos que antes de aplicar las cargas se haya desarrollado una tensión de 10 kilogramos por  $\text{cm}^2$ , o sea de 100.000 kg. por  $\text{m}^2$ ; substituyendo este

valor en la [12] en vez de  $T$ , tendremos otro valor de  $st$ , que debe ser tal que no exceda al límite admitido.

Finalmente, la fórmula [15] nos daría a conocer  $d$ , dilatación por metro que necesitaríamos dar al hormigón para mejorar la viga y [16] la adherencia que en este caso es del mismo sentido y tendría que agregarse a la que produce la flexión.

7. *Procedimiento de M. Koenen para provocar artificialmente una dilatación.*—Este autor parte en su estudio del caso de un piso ordinario, que en muchas ocasiones no resulta con dimensiones suficientes para resistir las cargas, y no se puede aumentar la altura de vigas por condiciones arquitectónicas. Se necesita, sin embargo, hacer mayor el momento de inercia resistente. Considera que el poner una poderosa armadura en la tabla es poco económico, por su pequeña distancia a la fibra neutra, y encuentra más apropiado aumentar el momento de inercia, dando mayor sección al tensor.

La viga resulta así, en general, con una tabla insuficiente para resistir el momento flector sin pasar de los límites de resistencia del hormigón, y propone provocar una dilatación artificial de este elemento.

Coloca los tensores en el molde sometidos a una tensión previamente calculada, mediante prensas hidráulicas que los estiran y mantienen en esta disposición, hasta que el fraguado ha terminado por completo; luego separa las prensas, dejando que las varillas se contraigan lo que les permita el hormigón.

Siendo  $F$  el esfuerzo por unidad de superficie a que se ha sometido la varilla, su longitud se habrá incrementado por metro lineal en la cantidad

$$\frac{F}{E_a},$$

es decir, que la varilla que hemos englobado en el hormigón es más corta, por metro lineal, de lo que le correspondería si la hubiésemos dejado sin tensión en la misma cantidad. De otro modo, es como si el hormigón se hubiese dilatado otro tanto después de fraguado.

En la práctica, sin embargo, como el hormigón tiene de ordinario una contracción unitaria  $c$ , tendríamos que restársela a la cantidad anterior y, en definitiva, la dilatación que habríamos obtenido artificialmente sería

$$d = \frac{F}{E_a} - c. \quad [18]$$

El ejemplo que acabamos de exponer nos permitiría hallar  $d$  según hemos visto; esta fórmula [18] nos daría medio de encontrar la tensión inicial  $F$ , que habríamos de dar a la varilla al introducirla en los moldes.

Koenen determina este valor por un razonamiento no admisible. Admite, como nosotros, la fórmula [12] para la distribución de esfuerzos, y dice que  $F$  debe ser tal que dé una deformación en la varilla (además de la que tiene en virtud de la tensión residual  $t$ ), que anule la deformación del hormigón.

La compresión del hormigón en la proximidad de la varilla es, según la [12]:

$$T = st \left( \frac{1}{S} + \frac{a^2}{I} \right).$$

La deformación del hormigón en el mismo punto, será:

$$\frac{T}{E_h} = \frac{st}{E_h} \left( \frac{1}{S} + \frac{a^2}{I} \right),$$

y para que la varilla tenga una deformación igual, se necesitaría una tensión,  $F - t$ , adicional a la que conserva, tal que

$$\frac{F - t}{E_a} = \frac{T}{E_h} = \frac{st}{E_h} \left( \frac{1}{S} + \frac{a^2}{I} \right),$$

de donde obtenemos

$$F = \left[ ms \left( \frac{1}{S} + \frac{a^2}{I} \right) + 1 \right] t;$$

es decir, que  $F$  es proporcional a  $t$ ; como la tensión inicial  $F$  que damos a la varilla es constante en toda su longitud,  $t$  tendría también que serlo en todas las secciones para anular en todas ellas la deformación del hormigón; esta constancia de  $t$  no es admisible.

Nuestra fórmula [15], substituyendo por  $c$  el valor de  $d$  que da la [18], daría

$$F = cE_a = t_0 \left[ ms \left( \frac{1}{S} + \frac{a^2}{I} \right) + 1 \right] \frac{e^{Nl} + 1}{e^{Nl} - 2e^{\frac{NI}{2}} + 1};$$

$t_0$  representa la tensión de la varilla en el centro de la pieza. El valor de la fracción tendría que ser determinado previamente por el estudio de la flecha.

En la práctica ocurrirá muchas veces que el valor hallado para  $F$  excederá al límite de elasticidad; por eso sería un *desideratum* para poder emplear el medio de Koenen, el poder disponer de cementos que sufriesen una dilatación al fraguar al aire libre.

El procedimiento de Koenen proporciona un medio cómodo para determinar  $N$  sin necesidad de hacer mediciones de flechas a intervalos de tiempo distantes, en espera de que el fraguado y la consiguiente contracción se produzcan. Se puede hacer la medición de la flecha antes y después de soltar la tensión en la varilla. La fórmula [17] nos daría el valor en función de  $N$ , poniendo en vez de  $c$  el valor de  $\frac{F}{E_a}$ .

8. *La armadura, aunque disimétrica, está formada por varias varillas situadas a diferentes distancias de la fibra neutra.*—El estudio de este caso, por el mismo procedimiento que hemos seguido, nos conduciría a un sistema de varias ecuaciones simultáneas de segundo orden, difícil de integrar. El caso más corriente de las viguetas puede referirse, sin embargo, a los anteriormente tratados, mediante un artificio que permite seguir la distribución de los esfuerzos, tanto si hay dilatación como contracción.

Las viguetas con armadura simétrica tienen de ordinario constituida su sección, disponiendo en la tabla una sección de varillas de inferior importancia que la del tensor. El procedimiento que se podría seguir en este caso es considerar la armadura total compuesta de dos partes: una formada por la armadura superior y una porción de la sección del tensor tal, que el centro de gravedad del conjunto coincida con el centro de gravedad de la sección de hormigón. El resto de la sección del tensor formará una armadura única, como en los casos anteriores.

Para la primera armadura compleja que consideramos, se pueden aplicar las fórmulas que hemos deducido en el caso de dilatación o contracción en las piezas de sección simétrica.

Para la armadura única, formada por el resto de la sección del tensor, aplicaremos las fórmulas de uno de los dos casos que acabamos de examinar, cuidando de considerar, no el momento de inercia del hormigón sólo, sino el que forman el hormigón y la armadura simétrica antes separada.

Se suman después los resultados obtenidos.

## III.

LAS EXPERIENCIAS SOBRE EL LÍMITE  
DE ADHERENCIA.

La cuestión que trataremos en este apartado no tiene relación con los esfuerzos desarrollados por las contracciones o dilataciones del hormigón. Haremos, sin embargo, su estudio, porque el desarrollo del cálculo es idéntico al que acabamos de presentar, y por referirse a una cuestión de interés en la determinación del coeficiente práctico correspondiente.

Los ensayos se suelen hacer ensayando el arranque de una varilla englobada en una masa de hormigón, ya tratando de arrancarla, ya de empujarla. La experiencia da en este segundo caso, para el esfuerzo que produce el arranque, valores mayores que empleando el primer procedimiento.

Se ha tratado de buscar el verdadero coeficiente, ya haciendo el empotramiento de la varilla en placas de poco espesor, ya produciendo los esfuerzos de un modo rápido alternativo y creciente hasta el arranque. Ambos procedimientos nos parecen poco exactos; el primero porque puede ser afectado en gran escala por una pequeña irregularidad en la masa, y sabido es que en el hormigón no se puede considerar una homogeneidad perfecta; el segundo, porque en el resultado influyen esfuerzos dinámicos que lo alteran, y no tiene tiempo suficiente el conjunto para producir los esfuerzos transversales propagados a toda la masa.

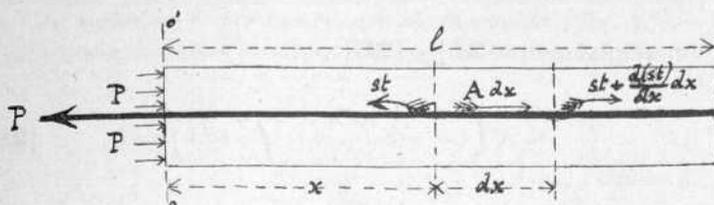
El cálculo que desarrollamos a continuación demuestra que es posible determinar el esfuerzo de adherencia límite mediante dos ensayos en piezas idénticas, uno por tracción y otro por compresión, sin que haya que recurrir a ningún coeficiente experimental auxiliar.

9. *El arranque es por tracción de la varilla (fig. 4.<sup>a</sup>).*—Suponiendo, como en el primer caso tratado, que la compresión se reparte uniformemente en la sección del hormigón, y considerando el equilibrio de la parte segregada hacia la derecha por una sección cualesquiera, se tendrá:

$$ST = st.$$

Elegimos como plano fijo para contar la distancia  $x$ , que determina a otro secante cualquiera, el  $oo'$  del hormigón.

Si el metal y el hormigón fuesen indeformables por compresión y tensión, al tirar de la varilla se produciría la adherencia uniformemente

Fig. 4.<sup>a</sup>

repartida en toda su longitud, y simultánea con una deformación constante  $\varepsilon$  por deslizamiento producida por los esfuerzos cortantes. La distancia  $x$  de un plano cualquiera que seccionase a la varilla, se aproximaría al origen  $oo'$  en esta cantidad  $\varepsilon$ .

Como el metal se ha estirado, el desplazamiento, en vez de ser  $\varepsilon$ , se habrá disminuido y será, en definitiva

$$\Delta_1 x = \varepsilon - \int_0^x \frac{t}{E_a} dx.$$

El hormigón está sometido a compresión, así que el plano que primitivamente se hallaba a la distancia  $x$ , se aproximará a  $oo'$  la cantidad

$$\Delta_2 x = \int_0^x \frac{T}{E_h} dx.$$

La diferencia entre estas cantidades da el deslizamiento entre las secciones del hormigón y del metal, produciéndose un esfuerzo de adherencia por metro lineal proporcional:

$$A = K(\Delta_1 x - \Delta_2 x) = K\left(\varepsilon - \frac{S + ms}{SE_a} \int_0^x t dx\right), \quad [27]$$

o sea la relación entre el esfuerzo de adherencia y la deformación.

El equilibrio de un elemento de varilla separado por dos secciones a la distancia  $dx$ , exige:

$$s \frac{dt}{dx} + A = 0. \quad [28]$$

Eliminando  $A$  entre [27] y [28]:

$$s \frac{dt}{dx} + K \left( \varepsilon - \frac{S + ms}{SE_a} \int_0^x t dx \right) = 0, \quad [29]$$

diferenciando, para hacer desaparecer el signo de integración:

$$s \frac{d^2t}{dx^2} = K \frac{S + ms}{SE_a} t,$$

cuya integral general es

$$st = B e^{Mx} + C e^{-Mx}, \quad [30]$$

llamando  $M$  a la misma expresión que hemos obtenido atrás [7].

Para determinar las constantes tenemos las condiciones

$$\left. \begin{aligned} st &= P & \text{para } x &= 0 \\ st &= 0 & \text{para } x &= l \end{aligned} \right\};$$

$P$  es el esfuerzo de tracción que aplicamos en el extremo libre de la varilla. De aquí

$$st = P \frac{e^{M(l-x)} - e^{-M(l-x)}}{e^{Ml} - e^{-Ml}}. \quad [31]$$

La adherencia en un punto cualquiera es [28]

$$A = - \frac{d(st)}{dx} = PM \frac{e^{M(l-x)} + e^{-M(l-x)}}{e^{Ml} - e^{-Ml}};$$

es máxima para  $x = 0$ , y su valor, que es el que se trata de medir en un esfuerzo de rotura, y que una vez alcanzado se efectúa el desprendi-

miento de la varilla en ese punto, y sucesivamente en los que le siguen.

$$-\left[\frac{d(st)}{dx}\right]_0 = PM \frac{e^{Ml} + e^{-Ml}}{e^{Ml} - e^{-Ml}}. \quad [32]$$

10. *El arranque es por compresión de la varilla (fig. 5.<sup>a</sup>).*—Tomemos como origen de las abscisas el plano  $oo'$  del hormigón.

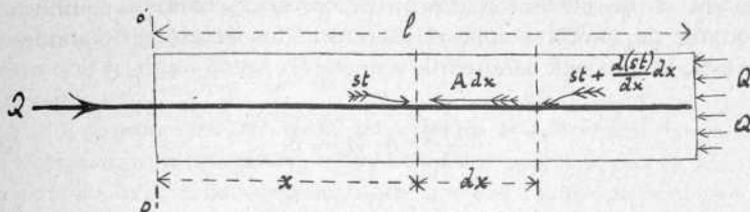


Fig. 5.<sup>a</sup>

Tanto la varilla como el hormigón resultan comprimidos en todas sus secciones; considerando el equilibrio del trozo segregado por una cualquiera, tendremos:

$$Q = ST + st. \quad [33]$$

Si no hubiese deformación por compresión, la adherencia sería consecuencia de un desplazamiento  $\varepsilon$  de toda la varilla hacia la derecha.

Como la varilla se comprime, una sección de la misma se alejará del origen la cantidad

$$\Delta_1 x = \varepsilon - \int_0^x \frac{t}{E_a} dx.$$

La sección del hormigón, que antes de la aplicación de los esfuerzos se confundía con la de la varilla, se aproximará al plano  $oo'$  en virtud de la compresión la cantidad

$$\Delta_2 x = \int_0^x \frac{T}{E_h} dx.$$

El deslizamiento entre las dos secciones, proporcional a la adhe-

rencia que se desarrolla en cada punto por unidad de longitud, será la suma de las cantidades anteriores:

$$A = K(\Delta_1 x + \Delta_2 x) = K \left[ \varepsilon + \frac{1}{E_a} \int_0^x \left( \frac{mQ}{S} - \frac{S+ms}{S} t \right) dx \right]; \quad [34]$$

teniendo en cuenta para obtener el último miembro las [2] y [33], es decir, eliminando  $E$  y  $T$ .

Como en los casos tratados antes, consideraríamos el equilibrio de la porción de varilla comprendida entre dos secciones distantes  $dx$  (fig. 4.<sup>a</sup>), lo que nos conduciría a

$$\frac{d(st)}{dx} + A = 0. \quad [35]$$

Substituyendo el valor de  $A$  y diferenciando para hacer desaparecer el signo de integración, se llega a

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{K}{sE_a} \left( \frac{S+ms}{S} t - \frac{mQ}{S} \right),$$

cuya integral general es

$$st - \frac{smQ}{S+ms} = Be^{Mx} + Ce^{-Mx}; \quad [36]$$

$M$  tiene la significación que ya conocemos [7].

Las constantes arbitrarias  $B$  y  $C$  se determinan por las condiciones

$$\left. \begin{aligned} x = 0 & \quad st = Q \\ x = 1 & \quad st = 0 \end{aligned} \right\}$$

y resulta

$$st = \frac{Q}{S+ms} \cdot \frac{(ms + Se^{Ml})e^{-Mx} - (ms + Se^{-Ml})e^{Mx}}{e^{Ml} - e^{-Ml}} + \frac{smQ}{S+ms}. \quad [37]$$

La adherencia por metro lineal será:

$$\dot{A} = -\frac{d(st)}{dx} = \frac{MQ}{S+ms} \cdot \frac{(ms + Se^{Ml})e^{-Mx} + (ms + Se^{-Ml})e^{Mx}}{e^{Ml} - e^{-Ml}}. \quad [38]$$

Esta cantidad crece en valor absoluto con  $x$ , sin cambiar de signo; por tanto, su mayor valor será el que corresponde a  $x = 1$ , y entonces el valor de la adherencia será

$$-\left[\frac{d(st)}{dx}\right]_1 = \frac{QM[m_s(e^{Ml} + e^{-Ml}) + 2S]}{(S + m_s)(e^{Ml} - e^{-Ml})} \quad [39]$$

Cuando este valor alcanza el límite de la resistencia y se sigue aplicando el esfuerzo  $Q$ , se produce el desprendimiento de la varilla en el extremo, y sucesivamente en todos los puntos que le siguen; puesto que resultan como resistentes superficies de contacto cada vez menores.

11. *Determinación del límite del esfuerzo de adherencia por medio de dos experiencias conjugadas.*—Supongamos que en piezas idénticas hacemos las experiencias de arranque por los dos procedimientos que acabamos de estudiar en los párrafos 9 y 10, y obtenemos los valores de los esfuerzos necesarios  $P$  y  $Q$ .

Las fórmulas anteriores dan medio de encontrar el valor de  $M$ , y determinar, por tanto, el verdadero valor de la adherencia límite, el cual no sólo es variable, como es natural, con la clase de mezclas y forma de la varilla, sino que los autores no están completamente de acuerdo acerca de cómo debe hallarse, a causa de los resultados discordantes de las dos clases de experiencias.

La rotura debe verificarse cuando en una y otra pieza se haya alcanzado igual valor para la adherencia que determinan las fórmulas [32] y [39]; salvo las diferencias que presenten las piezas, lo que puede eliminarse haciendo varias experiencias.

Igualando las fórmulas [32] y [39] y después de pequeñas transformaciones se llega a la ecuación de 2.<sup>o</sup> grado

$$e^{2Ml} - \frac{2SQ}{P(S + m_s) - m_s Q} e^{Ml} + 1 = 0, \quad [40]$$

cuyas raíces son los valores de  $e^{Ml}$  y  $e^{-Ml}$  puesto que su producto es la unidad.

Para que las raíces no sean imaginarias, se necesita que el valor del coeficiente del 2.<sup>o</sup> término sea mayor que 2; lo que equivale a  $Q > P$ , como es fácil comprobar. La experiencia está también de acuerdo en que el esfuerzo de arranque por compresión resulta siempre mayor que en el ensayo por tracción. El valor de  $e^{Ml}$  obtenido

daría también el de  $M$ ; substituyéndolos en la fórmula [32] como más sencilla, tendríamos el verdadero valor del coeficiente de rotura por adherencia:

$$A = \frac{S \cdot P \cdot Q}{\sqrt{(Q - P)(S + ms)[P(S + ms) + Q(S - ms)]}} \cdot M; \quad [41]$$

siendo lo más cómodo determinar  $M$  numéricamente de acuerdo con el valor de  $e^{Ml}$ , que da la ecuación [40] y la fórmula siguiente:

$$M = \frac{\log(e^{Ml})}{l \log e}.$$

Vemos, por tanto, que haciendo las dos experiencias conjugadas, una por compresión y otra por tracción, en piezas idénticas, en número suficiente para tener un término medio de valores de  $P$  y  $Q$  que eliminen la desigualdad por defectos de homogeneidad de la masa, tenemos medios bastantes para determinar el verdadero coeficiente de adherencia límite, sin recurrir a experiencias extrañas.

Esto es el objeto que nos proponíamos resolver en este apartado.

INFLUENCIA  
DEL  
RUMBO Y DE LA VELOCIDAD  
EN EL  
DESPLAZAMIENTO DEL BUQUE

POR  
D. RAMÓN FONTENLA  
TENIENTE DE NAVÍO

(Sesión del 17 Octubre de 1915.)

---

Voy a tratar un caso teórico. La influencia que en el desplazamiento del buque tienen el rumbo y la velocidad. La pequeñez de esta influencia hace que este caso carezca de importancia práctica que, de tenerla, hay que suponer que con anterioridad hubiera sido sugerido y tratado. Pero el hecho existe, y dentro de la concepción teórica no se puede admitir como constante el desplazamiento de un buque para las distintas velocidades y los distintos rumbos. Sólo cuando navega según un meridiano, el paso al rumbo diametralmente opuesto y los diversos cambios de velocidad para ambos rumbos, quedan sin afectar al desplazamiento. Fuera de este caso especialísimo, toda variación en la velocidad o en el rumbo, o en ambos simultáneamente, ha de traer forzosamente como consecuencia una modificación teórica del desplazamiento del buque, cuya importancia, es decir, su magnitud y sentido, voy a estudiar en estas líneas.

§ 1. Por el principio de Arquímedes se sabe que todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un líquido recibe de éste un empuje vertical de abajo a arriba, igual al peso del volumen líquido desalojado o desplazado. Si el cuerpo flota, es decir, si su volumen es mayor que el volumen del líquido que pesara lo que el cuerpo, la flotación de equilibrio se establece para un volumen líquido desplazado cuyo peso sea el peso del cuerpo.

Esto es rigurosamente exacto, suponiendo líquido y cuerpo en reposo absoluto.

Pero si en virtud de movimientos relativos se desarrolla alguna fuerza que tenga componente en el sentido de la gravedad o en el opuesto, al peso del cuerpo flotante, que continuará invariable para un mismo lugar, habrá que aplicarle esta fuerza, en uno o en otro sentido, para llegar a la condición de equilibrio.

Todo cuerpo, en la superficie del planeta, está afectado inevitablemente de las fuerzas creadas por los movimientos del globo, y de las que nacen de estos movimientos y de los propios del cuerpo; y si se trata de un cuerpo flotante, en el establecimiento de la flotación de equilibrio influirán estas fuerzas.

De los dos principales movimientos de la tierra, rotación y traslación, sólo se considerará el primero. Se supondrá animado el globo terrestre únicamente de un movimiento de rotación uniforme alrededor de la línea de los polos. El hacer abstracción del movimiento de traslación equivale, desde el punto de vista que se considera, a suponerlo rectilíneo y uniforme, lo que se puede admitir con insignificante error, dada la pequeñez de la velocidad angular y, por lo tanto, la influencia de la fuerza centrífuga que de él resultaría (1). Por otra parte, si se tuvieran en cuenta las fuerzas aparentes que corresponden a este movimiento de traslación, habría también que tener en cuenta las fuerzas reales que lo producen, que harían sensiblemente equilibrio a aquéllas.

Refiriéndose al caso de un buque navegando por la superficie de las aguas, los diversos puntos de él estarán sujetos a su movimiento propio y, además, al movimiento de rotación de la tierra, único de arrastre que se considera. La velocidad absoluta del buque será la re-

(1) El número de segundos de un año es, aproximadamente,

$$365 \times 86.164 = 3,145 \times 10^7,$$

lo que da una velocidad angular de

$$\omega = \frac{2\pi}{3,145 \times 10^7},$$

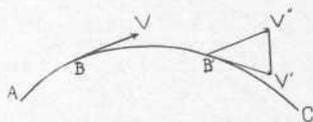
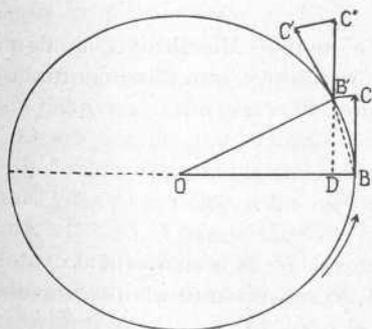
o sea también, aproximadamente,

$$2 \times 10^{-7},$$

que entrará en el valor de la fuerza centrífuga con su cuadrado  $4 \times 10^{-14}$ .

sultante de su velocidad propia y de la velocidad tangencial de la tierra, variable con el lugar, y cuya variación la da el coseno de la latitud. No se puede decir lo mismo tratándose de las aceleraciones, y son éstas precisamente las que hay que considerar en este estudio, porque de ellas se deducen las fuerzas mediante el factor masa. La aceleración absoluta del buque no será la resultante de la aceleración de su movimiento propio y de la del de rotación de la tierra. Para obtener la aceleración absoluta hay que considerar, además de estas dos aceleraciones, otra que de ellas nace y que aquí se determinará.

§ 2. Se empezará por recordar que en todo movimiento rectilíneo, si la velocidad es constante, la aceleración es nula; pero que no sucede lo mismo cuando la trayectoria es curvilínea, aun siendo recorrida con velocidad uniforme. Un móvil que recorre con velocidad constante la trayectoria curvilínea  $AC$  (fig. 1.<sup>a</sup>), tiene en un momento dado, cuando ocupa el punto  $B$ , una velocidad  $V$ , cuya dirección es la de la tangente; y al cabo del tiempo  $dt$ , cuando ocupa la posición  $B'$  una velocidad  $V'$  igual en valor absoluto a la anterior, pero de dirección distinta.  $V''$   $V'$ , representará en magnitud, dirección y sentido, la variación de la velocidad en el tiempo  $dt$ . Se observará que está dirigida hacia el interior de la trayectoria.

Fig. 1.<sup>a</sup>Fig. 2.<sup>a</sup>

Si un móvil recorre con velocidad uniforme  $V$  la circunferencia de radio  $OB$  (fig. 2.<sup>a</sup>) y parte de la posición  $B$ , al cabo de un tiempo  $t$  ocupará la  $B'$ , tal que el arco  $BB'$  sea igual a  $Vt$ . Llévese esta cantidad sobre la tangente  $BC$ , y por el punto  $B'$  trácese otra tangente  $B'C'$ , sobre la que se tomará la misma cantidad, y trácese también de la misma longitud la paralela  $B'C''$

a  $BC$ . El lado  $C''C'$  representará en magnitud y dirección la variación de la velocidad durante el tiempo  $t$ . Únanse  $C$  y  $B'$ . A medida que el intervalo  $t$  se hace más pequeño, la recta  $C''C'$  se irá igualando

a la  $CB'$ , porque la tangente  $B'C'$  se irá haciendo igual y paralela a la secante  $BB'$ , siendo en el límite cuando el tiempo es  $dt$  rigurosamente igual a ella.

Se puede descomponer el movimiento real del móvil durante el tiempo  $dt$  en dos movimientos rectilíneos simultáneos. Uno,  $BC$ , de velocidad constante y, por consiguiente, aceleración nula, y el otro,  $CB'$ , uniformemente variado con aceleración constante  $\varphi$ , cuyo valor está dado por

$$CB' = \frac{1}{2} \varphi dt^2,$$

que es en lo que se convierte la ecuación de la parábola de la ley del movimiento

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2$$

para un tiempo diferencial, cuando el movimiento, como en este caso, parte del reposo.

Por consiguiente,

$$\varphi = \frac{2CB'}{dt^2}.$$

Se observará que, a medida que el tiempo disminuye, la figura  $BCB'D$  se va aproximando a un rectángulo, y con él se confundirá para el tiempo  $dt$ . Se podrá, pues, poner

$$\varphi = \frac{2BD}{dt^2}.$$

Su dirección será la del radio y su sentido de la periferia al centro. La aceleración será centrípeta, y esto, lo mismo que el movimiento, sea en el sentido considerado que en el opuesto.

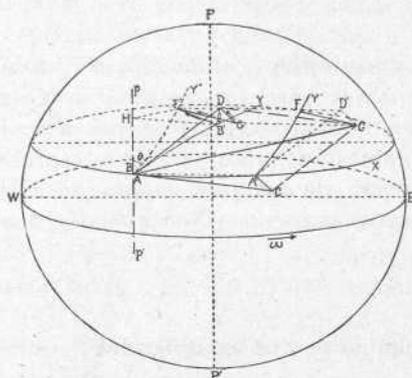
La misma descomposición se puede hacer para un movimiento curvilíneo cualquiera. Si un móvil se desplaza de un punto  $A$  a otro infinitamente próximo  $B$ , con una velocidad constante  $V$ , tardando un tiempo  $dt$ , y a partir de  $A$  se lleva, según la tangente, en magnitud y dirección  $Vdt$ , el extremo de este vector, unido al punto  $B$ , dará otro

vector, cuya dirección será la de la aceleración, y el duplo de su magnitud dividido por el cuadrado del tiempo, el valor de aquélla. La única diferencia con el caso anterior es que, en aquél, la dirección la daba el radio del círculo, mientras que ahora está determinada por el radio de curvatura.

§ 3. Por ser la velocidad absoluta la resultante de la relativa y la de arrastre, la relativa será la resultante de la absoluta y de una igual y contraria a la de arrastre; pero una composición análoga entre las aceleraciones no conduciría a la aceleración relativa, sino que para determinar ésta es necesario hacer intervenir, como se dijo, una cuarta aceleración que se llama compuesta.

Supóngase que, en un momento, el buque ocupa la posición  $B$  (fig. 3.<sup>a</sup>) que coincide con el punto  $A$  de la tierra, que está animado, como todos los de ésta, únicamente de un movimiento de rotación alrededor de la línea de los polos  $PP'$  de velocidad angular constante  $\omega$ . El punto  $B$  tiene un movimiento con relación a ejes fijos de la tierra, mientras estos ejes giran alrededor de  $PP'$  con relación a ejes fijos en el espacio absoluto. Partiendo de la posición  $B$ , al cabo de un tiempo  $dt$  el buque ocupará sobre su trayectoria relativa  $AY$  un punto  $B'$  al mismo tiempo que el punto  $A$ , debido al movimiento de rotación del globo, habrá venido a un punto  $A'$  con relación a los ejes fijos en el espacio. Sobre la esfera el punto  $A'$  será el mismo que el  $A$ . La trayectoria relativa, transportada al punto  $A'$ , será  $A'Y'$ , y tomando sobre ella una cantidad  $A'F$ , igual a  $AB'$ , el punto  $F$  será la situación absoluta del buque al cabo del tiempo  $dt$ .

El barco, por el hecho de moverse sobre una superficie esférica, habrá seguido una trayectoria absoluta, cuyas características no interesan con tal de saber que es curvilínea. En este caso se obtendrá, como se dijo, la aceleración del movimiento absoluto, o sea la aceleración absoluta, uniendo con el punto  $F$ , posición absoluta del buque

Fig. 3.<sup>a</sup>

al cabo del tiempo  $dt$ , la extremidad del vector que represente  $v dt$ , siendo  $v$  la velocidad absoluta. Hace falta determinar este vector.

Sean  $v_r$  y  $\varphi_r$  la velocidad y aceleración relativas del barco cuando éste recorre en el tiempo  $dt$  el elemento curvilíneo  $BB'$ . Estas cantidades son, con relación a los puntos de la tierra, las que resultan de su movimiento propio y del que le producen las fuerzas aparentes que obran sobre él. Si por el punto  $B$  se traza una tangente a la trayectoria relativa y se toma sobre ella una cantidad

$$BD = v_r dt,$$

uniendo el punto  $D$  con el  $B'$  se hallará

$$DB' = \frac{1}{2} \varphi_r dt^2,$$

cuyo sentido es el de  $D$  a  $B'$ , hacia el interior de la curva.

De la misma manera, como el punto  $A$  describe con relación a los ejes fijos en el espacio el paralelo  $AX$ , recorriendo, por consiguiente, un arco de círculo, si  $v_a$  y  $\varphi_a$  representan la velocidad y aceleración de arrastre de cualquier punto de este paralelo, y si por el punto  $A$  se traza la tangente y sobre ella se lleva una cantidad

$$AC = v_a dt,$$

uniendo  $C$  y  $A'$  se obtendrá

$$CA' = \frac{1}{2} \varphi_a dt^2,$$

de sentido centrípeto, es decir, según el radio y hacia el centro del paralelo.

Puesto que

$$AD = v_r dt$$

y

$$AC = v_a dt,$$

su resultante será:

$$AG = v dt,$$

porque en todo caso la velocidad absoluta es la resultante de la relativa y de la de arrastre. Por consiguiente,

$$GF = \frac{1}{2} \varphi dt^2,$$

siendo  $\varphi$  la aceleración absoluta. El sentido será el de  $G$  a  $F$ , y como  $F$  está en la superficie esférica y  $G$  en un plano tangente, será del exterior al interior de la esfera. Esta aceleración, que es la producida por todas las fuerzas reales que obran sobre el buque, se da por conocida, y para determinar la relativa  $DB'$ , es decir, la aceleración del movimiento de  $B$  con relación a la esfera, bastará determinar el movimiento absoluto que tomaría este punto, si además de su movimiento propio se le comunicase un movimiento igual y contrario al de la tierra. Ahora bien; este movimiento de rotación se puede descomponer en dos. La trayectoria  $A'Y'$ , no sólo está desplazada con relación a la  $AY$ , sino que además está girada con relación a ella un cierto ángulo, porque evidentemente no son paralelas. Se puede, por consiguiente, suponer el punto  $A$  animado primero de un movimiento igual y contrario al que tienen los distintos puntos del paralelo  $AX$ . Por este movimiento, el punto  $A$  permanecerá fijo con relación a los ejes del espacio y la trayectoria  $A'Y'$  caerá sobre la  $AY''$ . Una rotación de esta última alrededor del eje  $pp'$ , paralelo al  $PP'$  de velocidad angular igual y contraria a la de la tierra, la traería sobre  $AY$ . Este es el segundo movimiento a considerar.

Para realizar el primer movimiento, bastará aplicar al punto  $B$  una velocidad  $-v_a$  y una aceleración  $-\varphi_a$ .

La velocidad relativa será

$$\bar{v}_r = \bar{v} - \bar{v}_a \quad (1).$$

El punto  $G$  habrá venido a una posición  $G'$  tal que

$$G'F' = GF = \frac{1}{2} \varphi dt^2$$

(1) Los trazos horizontales colocados sobre las letras, en esta ecuación y siguientes, indican que los valores de las magnitudes que aquéllas representan, no se han de sumar o restar aritméticamente, sino que deberán componerse geoméricamente sus vectores.

represente la aceleración absoluta. Si se unen  $D$  y  $G'$ , es fácil ver que este vector  $G'D$  es igual a  $CA'$  (1). El vector  $DF'$  que cierra el triángulo, representará una aceleración

$$\overline{\varphi'} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi}_a$$

que no será, evidentemente, la aceleración relativa, porque ésta está representada por  $DB'$ .

Únanse  $B'$  y  $F'$ . Esta recta se confunde con el arco de círculo de centro  $H$  que describe el punto  $F'$  de  $AY''$ , cuando ésta gira, en virtud del segundo movimiento que se ha considerado, alrededor de  $p\rho'$ , con velocidad angular  $-\omega$ . Se tendrá, por lo tanto,

$$B'F' = HF' \omega dt;$$

y si  $\theta$  es el ángulo que forma la velocidad relativa con el eje del globo o con su paralela  $p\rho'$ ,

$$HF' = BF' \operatorname{sen} \theta = v_r dt \operatorname{sen} \theta.$$

Por consiguiente,

$$B'F' = v_r \omega \operatorname{sen} \theta dt^2.$$

Este vector, que cierra el cuadrilátero  $DB'F'G'$ , representa una nueva aceleración que, compuesta con la absoluta y la de arrastre, da la relativa que se busca

$$\overline{DB'} = \overline{G'F'} - \overline{G'D} - \overline{B'F'}.$$

Los signos se deducen de los sentidos de las flechas colocadas al lado de cada uno de estos vectores.

---

(1) Para verlo, trácese por  $A'$  una paralela  $A'D'$  a  $AD$  y tómesese sobre la primera una cantidad igual al valor de la segunda, y únense  $G$  y  $D'$ . La figura  $GD'A'C$  será un paralelogramo, porque  $A'D'$  y  $CG$  son iguales y paralelas a  $AD$ ; luego  $GD'$  será igual y paralela a  $CA'$ . Cuando el punto  $A'$  haya venido sobre el  $A$ , los  $D'$  y  $G$  vendrán sobre los  $D$  y  $G'$ , de manera que las rectas  $AA'$ ,  $DD'$  y  $G'G$  serán iguales y paralelas. La figura  $DD'GG'$  será un paralelogramo y, por consiguiente,  $G'D$  igual y paralela a  $CA'$ , por ser ésta igual y paralela a  $GD'$ .

Si los valores

$$DB' = \frac{1}{2} \varphi_r dt^2$$

$$G'F' = \frac{1}{2} \varphi dt^2$$

$$G'D = \frac{1}{2} \varphi_a dt^2$$

y

$$B'F' = v_r \omega \operatorname{sen} \theta dt^2$$

se dividen por  $\frac{1}{2} dt^2$  se encontrará

$$\bar{\varphi}_r = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a - 2 v_r \omega \operatorname{sen} \theta.$$

El último término es la aceleración que se llama compuesta y se la representará por  $\varphi_c$ . Luego

$$\bar{\varphi}_r = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_a - \bar{\varphi}_c \quad (1) \quad [1]$$

§ 4. Tal es la ecuación geométrica que liga las cuatro aceleraciones. Como el valor de la aceleración es el mismo que el de la fuerza por unidad de masa, la ecuación precedente será también la relación entre las fuerzas reales y aparentes, por unidad de masa del buque, que producen aquellas aceleraciones. Indistintamente se podrá hablar de unas u otras.

La aceleración  $\varphi_r$ , o lo que es lo mismo, la resultante de todas las fuerzas reales y aparentes que obran sobre el buque por unidad de masa, tendrá una magnitud y dirección que dependerá de la magnitud y dirección de las aceleraciones o fuerzas del segundo miembro. Se adelantará que en el caso que se considera el valor de  $\varphi$  es notablemente superior a los de  $\varphi_a$  y  $\varphi_c$  y, por consiguiente,  $\varphi_r$  nunca será muy diferente en magnitud y dirección de la aceleración absoluta  $\varphi$ .

(1) Lo que en resumen se hizo en todo este párrafo, fué demostrar el teorema de Coriolis para este caso particular. Su demostración en toda su generalidad se encuentra en las cinemáticas extensas: *Traité de mécanique générale*, par H. Resal, tomo I, pág. 100. *Traité de mécanique*, par Edouard Collignon, tomo I, pág. 273, etc.

Esta aceleración  $\varphi$  es la producida por todas las fuerzas reales que obran sobre el buque. Suponiendo la tierra esférica y su masa uniformemente repartida, es la acción de una esfera homogénea sobre un punto de la superficie, igual, como se sabe, a la que ejercería la masa total concentrada en el centro. Dentro de la hipótesis de la esfericidad y homogeneidad, la aceleración  $\varphi$ , que correspondería a esta única fuerza real, sería la misma para todos los puntos de la superficie del globo, y cuyo valor, que es conocido e igual a 9,82265 m., se representará por  $f_a$ . Es la fuerza de atracción, por unidad de masa, que tiene que estar forzosamente dirigida, por razón de simetría, según el radio del lugar, y su sentido es evidentemente de fuera a dentro de la tierra.

Ya se dijo que la aceleración de arrastre  $\varphi_a$  era centrípeta con relación al paralelo del lugar del buque. La aceleración  $-\varphi_a$ , que hay que componer con la  $\varphi$ , será, por consiguiente, centrífuga; pero, además, su valor será exactamente el de la aceleración centrífuga que produce el movimiento de rotación de la tierra, ya que éste es el único con que se la supuso animada. Por lo tanto,

$$\varphi_a = r \omega^2 \quad (1)$$

siendo  $r$  el radio del paralelo. Su dirección será la de este radio y su sentido de dentro a fuera de la tierra. Esta aceleración, esencialmente

(1) Se vió que, cuando un móvil recorría con velocidad constante la circunferencia de un círculo de radio  $OB$  (fig. 2.<sup>a</sup>), la aceleración siempre centrípeta, estaba dada por

$$\varphi = \frac{2 BD}{dt^2},$$

pero la cuerda  $BB' = v dt$ , es media proporcional entre el diámetro y su proyección sobre él. Así

$$v^2 dt^2 = 2 r BD$$

o

$$BD = \frac{v^2 dt^2}{2 r},$$

de donde

$$\varphi = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 \omega^2}{r} = r \omega^2.$$

variable, es máxima en el ecuador y nula en los polos. Su variación la da el radio del paralelo o el coseno de la latitud.

La aceleración  $\varphi_c = B'F'$  está en el plano del paralelo de  $B'$ , o lo que es lo mismo en el plano del paralelo del punto  $A$ , ya que  $BB'$  es un elemento infinitamente pequeño. Será, por consiguiente, normal a  $PP'$ . Además, será normal al elemento  $BB'$  o al  $BF'$ , es decir, normal a la velocidad relativa (1). Esto en cuanto a la dirección.

Puesto que  $\omega$  es siempre una velocidad angular de Occidente a Oriente, en el valor de

$$\varphi_c = 2v_r \omega \sin \theta,$$

no entra otra cantidad susceptible de signo que  $v_r \sin \theta$ , proyección de  $v_r$  sobre el plano del paralelo, y si como en el caso considerado esta proyección es hacia el Este, estará dirigida de  $B'$  a  $F'$ , es decir, del exterior al interior de la esfera, porque el punto  $B'$  está sobre la superficie esférica y en su interior el  $F'$ , e inversamente, si la proyección fuese hacia el Oeste, estaría dirigida del interior al exterior.

Se puede, pues, decir que para rumbos del primero y segundo cuadrantes el movimiento relativo produce una aceleración —  $\varphi_c$  dirigida hacia el exterior de la tierra y hacia el interior para rumbos del tercero y cuarto cuadrantes. Esto no es rigurosamente exacto, porque  $BB'$  no representa el rumbo del buque, sino su trayectoria resultante de este rumbo y del movimiento que producen las fuerzas aparentes. Sin embargo, la diferencia carece de importancia. Sólo para los rumbos próximos al Norte o Sur es donde pudiera existir la duda, y para éstos la influencia de esta aceleración, estimada en el sentido de la gravedad, es sensiblemente nula, y rigurosamente nula si el rumbo es según un meridiano, como después se verá.

§ 5. Estas tres últimas aceleraciones tienen direcciones distintas. Su resultante  $\varphi_r$  tomará una dirección que, en general, no coincidirá con la de la gravedad. Como lo que aquí se va buscando es la variación que en el peso del buque produce el movimiento relativo, será la componente de  $\varphi_r$  en la dirección en que este peso se ejerce, lo único que interese hallar.

(1) Los elementos diferenciales  $BB'$  y  $BF'$ , se pueden considerar como generatrices de un cono recto infinitamente pequeño. Serán, pues, normales a las tangentes a la circunferencia de la base en los puntos  $B'$  y  $F'$ , y como ambas generatrices están infinitamente próximas, se podrán considerar como normales ambas al arco diferencial  $B'F'$ .

Supóngase que el buque ocupa un punto  $A$  (fig. 4.<sup>a</sup>) sobre el paralelo de latitud Norte  $l$ . Sobre este punto obra la atracción terrestre, dirigida según el radio  $AO$  y cuyo valor por unidad de masa  $f_a$ , igual para todos los puntos de la superficie de la tierra, se la representa por  $AB$ . Sobre el mismo punto  $A$  obra la fuerza centrífuga  $AC$ , dirigida según la prolongación del radio  $r$  del paralelo y de valor

$$r\omega^2 = R \cos l \omega^2,$$

siendo  $R$  el radio de la tierra. Por consiguiente, si se supone el buque parado en este punto, la resultante  $AD$  será la única fuerza que por

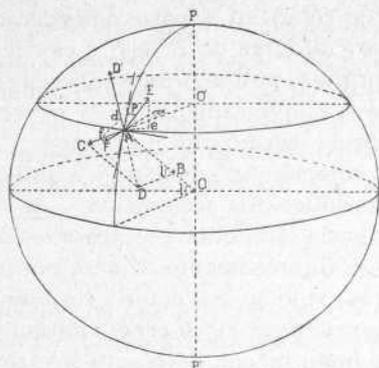


Fig. 4.<sup>a</sup>

unidad de masa lo solicite, puesto que el último término de la ecuación [1] es nulo por ser  $v_r = 0$ . Como el buque se encuentra en equilibrio, a esta resultante responderá el agua que lo sustenta con una reacción  $AD'$  igual a ella y de dirección contraria. La primera es el peso del barco. La segunda la reacción del agua, o sea el empuje vertical (1) de abajo arriba igual al peso del volumen líquido desalojado o desplazado, que experimenta todo cuerpo total o parcialmente sumergido. Ambas fuerzas son iguales, y el principio de Arquímedes subsiste en toda su precisión en este caso del buque parado.

Se observará que el peso del barco  $AD$  es esencialmente variable con la latitud, por variar con ella, una de sus componentes, la  $AC$ , y ser constante la otra. Esto no quiere decir que la flotación del barco en reposo sea diferente en una latitud que en otra. La flotación de equilibrio será la misma en el ecuador que en los polos. Al variar con la latitud el peso del buque, varía también el peso del agua que lo sustenta, y varía en la misma cantidad. Pesa, por ejemplo, más el bu-

(1) Al decir vertical, no puede entenderse más que la dirección en que la gravedad se ejerce, ya que de aquella no hay otro concepto que el dado por la dirección del hilo de la plomada; dirección distinta de la del radio esférico y que sólo coincide con él para un punto del ecuador o para los polos.

que, pero pesa también más el volumen de agua que desalojaba antes y que continúa desalojando ahora.

Esta resultante que, en este caso del buque parado, da el valor de  $\varphi_r$ , igual a la aceleración del lugar, no sólo varía de magnitud con la latitud, sino también de dirección, aunque conservándose siempre en el plano meridiano que la contiene, ya que este plano queda determinado por las direcciones de los radios  $OA$  y  $O'A$ , que son también las direcciones de las componentes. Se puede, pues, poner

$$\overline{\varphi_r} = \overline{f_a} - \overline{R \cos l \omega^2},$$

estando estas tres fuerzas o aceleraciones en un mismo plano (1).

Si continuando el buque en  $A$  se le supone animado de una velocidad relativa  $v_r$ , representada por  $AE$ , según un rumbo  $\rho$  del primer cuadrante, de manera que su proyección sobre el paralelo sea hacia el  $E$ , el último término de la expresión [1] no será nulo, sino que ten-

(1) Para el ecuador

$$\varphi_r = f_a - R \omega^2.$$

La fuerza centrífuga es directamente opuesta a la atracción terrestre. Se resta de ella aritmética e íntegramente para dar el peso.

Es claro que si la velocidad de rotación de la tierra fuera susceptible de aumento, habría una dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{f_a}{R}} = \sqrt{\frac{9,82265}{6.366.698}}$$

próximamente  $1,243 \times 10^{-3}$  para la que los cuerpos en el ecuador terrestre carecerían de peso. Como la velocidad de la tierra es

$$\omega = \frac{2\pi}{86.164}$$

próximamente,  $7,3 \times 10^{-5}$ , se necesitaría que ésta tuviera una velocidad  $7,3 \times 10^{-5}$

$$\frac{1,243}{7,3 \times 10^{-2}} \omega$$

o sea, también aproximadamente, diecisiete veces mayor.

Se ha tomado como radio ecuatorial, no el que efectivamente tiene el ecuador, sino el que tendría si la tierra fuera esférica y produjera sobre cualquier punto, tanto

drá un valor

$$\varphi_c = 2v_r \omega \operatorname{sen} \theta,$$

de dirección  $AF$  normal a  $v_r$  y en el plano del paralelo.

El ángulo  $\theta$  que forma la velocidad relativa con el eje del mundo, dependerá del ángulo de rumbo  $\rho$  y de la latitud  $l$  del lugar.

Puesto que los términos  $\varphi$  y  $-\varphi_a$  de la ecuación citada, tiene por resultante  $AD$ , que es la aceleración del lugar, se podrá poner

$$\bar{\varphi}_r = \bar{g} - \bar{\varphi}_c;$$

pero de  $\varphi_r$  sólo interesa su componente, según la dirección  $AD$  del peso, y si se la representa por  $\varphi'_r$ , se encontrará por la diferencia aritmética

$$\varphi'_r = g - \varphi'_c,$$

de aquél como del resto del globo, una atracción igual a  $f_a$ . Pero ni la tierra es esférica, ni la atracción es elemento que se halle experimentalmente. Los elementos que se pueden medir son la aceleración de la gravedad y el radio del paralelo del lugar. Para el ecuador

$$g_0 = \varphi_r = 9,781031$$

y

$$R = 6,377.398$$

de donde se puede deducir el valor de la atracción  $f'_a$  porque

$$9,781031 = f'_a - 6,377.398 \times 53,29 \times 10^{-10};$$

de manera que

$$f'_a = 9,815031,$$

y la velocidad angular que debiera tener el planeta para que, dada su forma elipsoidal, perdieran los cuerpos en el ecuador terrestre la totalidad de su peso, sería

$$\omega'' = \sqrt{\frac{9,815031}{6,377.398}}$$

que da próximamente el mismo valor que el de  $\omega'$ .

Todas las operaciones aritméticas de este trabajo están efectuadas con la regla de cálculo, y no se debe buscar, por consiguiente, una exactitud rigurosa en los resultados.

siendo  $\varphi'_c$  la componente de  $\varphi_c$ , también según  $AD$ . Todo se reduce a hallar esta componente  $\varphi'_c$ . Se buscará primero la dirección de  $\varphi_c$ . Esta debe ser perpendicular a  $AE$ , y como está en el plano del paralelo, lo será también a la proyección  $Ae$  de  $AE$  sobre este plano.  $Ae$  forma con la tangente al paralelo en un punto  $A$ , un ángulo  $\alpha$  dado por

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{tang} \rho} \quad (1).$$

Este ángulo  $\alpha$  es el mismo que forma  $\varphi_c$  con el radio  $O'A$ .

Hay que proyectar  $\varphi_c = AF$  sobre  $AD$ . Proyéctese primero sobre el plano  $DAC$ . La proyección  $Af$  caerá sobre  $AC$ , y el punto  $f$  será tal que

$$Af = AF \cos \alpha.$$

(1) Supónganse (*fig. 5.<sup>a</sup>*) tres ejes coordenados  $AX$ ,  $AY$  y  $AZ$ , teniendo su origen en el punto  $A$  y dirigidos el  $AX$ , según la tangente al paralelo; el  $AY$ , según el radio de este círculo menor, y el  $AZ$  tangente a la esfera y situado en el plano del meridiano. Los ejes  $AX$  y  $AY$  formarán un ángulo recto, mientras el  $AZ$  forma con el plano  $XAY$  un ángulo igual a  $90^\circ - l$ . La velocidad relativa  $v_r$  representada por  $AE$ , es tangente a la esfera en el punto  $A$ , y determina con la tangente situada en el plano del meridiano, un plano también tangente a la tierra en el punto  $A$ . El plano  $ZAE$  formará con el  $XAY$  el ángulo  $90^\circ - l$ . La recta  $AE$  forma con el eje de las  $Z$  el ángulo de rumbo  $\rho$ .

Proyéctese la recta  $AE$  de valor  $v_r$  sobre el plano  $XAY$ , y sea  $Ae$  esta proyección. Los ángulos  $ETA$  y  $eTA$  serán rectos y el  $ETe$  igual a  $90^\circ - l$ ; y se tendrá

$$AT = v_r \operatorname{sen} \rho$$

y

$$Te = TE \cos (90^\circ - l) = v_r \cos \rho \operatorname{sen} l.$$

Por consiguiente:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Te}{AT} = \frac{\operatorname{sen} l}{\operatorname{tang} \rho}.$$

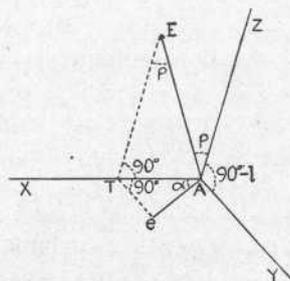


Fig. 5.<sup>a</sup>

La proyección de  $Af$  sobre la dirección de la gravedad da

$$\varphi'_c = Ad = Af \cos CAD' = AF \cos \alpha \cos (l + \beta),$$

siendo  $\beta$  el ángulo que forma la dirección de la atracción con la del peso. Pero

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{tang} \rho}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho + \operatorname{sen}^2 l}},$$

y

$$\cos (l + \beta) = \cos l \cos \beta - \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \beta.$$

Hace falta determinar  $\cos \beta$  y  $\operatorname{sen} \beta$ .

En el triángulo  $ABD$ , en el que se conocen los lados  $AB = f_a$  y  $BD = \varphi_a$  y el ángulo comprendido  $ABD = l$ , se deducirá el ángulo  $\beta$  por

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{BD \operatorname{sen} l}{AB - BD \cos l} = \frac{\varphi_a \operatorname{sen} l}{f_a - \varphi_a \cos l}.$$

Por consiguiente:

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}} = \frac{f_a - \varphi_a \cos l}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2f_a \varphi_a \cos l}},$$

y

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}} = \frac{\varphi_a \operatorname{sen} l}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2f_a \varphi_a \cos l}},$$

valores que, substituídos, dan:

$$\cos (l + \beta) = \frac{f_a \cos l - \varphi_a}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2f_a \varphi_a \cos l}}.$$

Además,  $v_r \operatorname{sen} \theta$  es la proyección de la velocidad relativa sobre el paralelo, es decir, el vector  $Ae$ , pero éste es (figura de la nota anterior) la hipotenusa de un triángulo rectángulo en  $T$ , cuyos catetos son

$$AT = v_r \operatorname{sen} \rho,$$

y

$$Te = v_r \cos \rho \sin l,$$

de manera que

$$v_r \sin \theta = \sqrt{v_r^2 \sin^2 \rho + v_r^2 \cos^2 \rho \sin^2 l} = v_r \sqrt{1 - \cos^2 \rho \cos^2 l}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \varphi'_c &= \varphi_c \cos \alpha \cos(l + \beta) = 2v_r \omega \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \rho \cos^2 l} \frac{\operatorname{tang} \rho}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho + \sin^2 l}} \times \\ &\times \frac{f_a \cos l - \varphi_a}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2f_a \varphi_a \cos l}}. \end{aligned} \quad [2]$$

En la que

$$\varphi_a = R \cos l \omega^2.$$

Esta será la fuerza, por unidad de masa, que habrá que sumar o restar aritméticamente—restar en este caso—al peso del buque para que dé el del volumen líquido desplazado y que el principio de Arquímedes subsista. El equilibrio no se establece ahora entre el peso del buque y el del volumen líquido. El de éste será menor que el de aquél, porque el movimiento relativo crea una fuerza, cuya componente, según la gravedad  $\varphi'_c$ , se resta del peso. La flotación del buque parado no será la misma que en marcha. En marcha descenderá en forma que el volumen sumergido sea menor y su peso haga equilibrio, no ya al peso del barco, sino a este peso disminuído en  $\varphi'_c$ .

Si el rumbo, en vez de ser de uno de los cuadrantes primero o segundo fuese del tercero o cuarto, de manera que la velocidad relativa diera una proyección sobre el plano del paralelo dirigida hacia el W., en vez de disminución del peso habría aumento. El peso del volumen líquido desalojado haría equilibrio, no sólo al peso del barco, sino al de éste aumentado en  $\varphi'_c$ .

§ 6. De la expresión [2] se deduce que si  $\rho = 0$ ,  $\varphi'_c = 0$ , porque también lo es  $\operatorname{tang} \rho$ . Navegando un buque, según un meridiano, en nada se aumenta ni disminuye el peso, y esto cualquiera que sea su latitud y la velocidad con que navegue.

Si  $\rho = 90^\circ$ , o lo que es lo mismo, si el rumbo es hacia el Este u Oeste,

$$\varphi'_c = 2 \nu_r \omega \cdot \frac{f_a \cos l - \varphi_a}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2 f_a \varphi_a \cos l}} \quad (1)$$

alcanza el máximo valor para una misma latitud  $l$ .

Para  $l = 0$

$$\varphi'_c = 2 \nu_r \omega \operatorname{sen} \rho \cdot \frac{f_a - \varphi_a}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2 f_a \varphi_a}} = 2 \nu_r \omega \operatorname{sen} \rho,$$

es decir, que para el ecuador  $\varphi'_c$ , que tiene la dirección de la atracción y del radio, es igual a  $\varphi_c$ , y alcanza, por lo tanto, su valor máximo para un mismo rumbo. El ángulo de rumbo  $\rho$  es igual al ángulo  $\theta$  que forma la velocidad relativa con el eje del mundo.

Por último, si  $l = 90^\circ$

$$\varphi'_c = 2 \nu_r \omega \cdot \frac{-\varphi_a}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2}} = 0$$

porque en el polo  $\varphi_a = 0$  por ser cero el radio del paralelo.

Evidentemente el máximo de la expresión [2] corresponderá a  $l = 0$  y  $\rho = 90^\circ$ , porque sus tres últimos factores son esencialmente menores que la unidad, y el máximo lo alcanzan cuando, como en este caso, valen uno. Entonces

$$\varphi'_c = 2 \nu_r \omega.$$

(1) El factor

$$\frac{\operatorname{tang} \rho}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho + \operatorname{sen}^2 l}}$$

que para  $\rho = 90^\circ$  toma la forma  $\frac{\infty}{\infty}$  se transforma en

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 l}{\operatorname{tang}^2 \rho}}} = 1$$

para este valor de  $\rho$ .

§ 7. Supóngase que en latitud de  $40^\circ$  (es indiferente que sea Norte o Sur) un buque navega al rumbo N.  $45^\circ$  E., y búsquese la cantidad que, por unidad de masa y unidad de velocidad, disminuye el peso del barco. Se tendrán los datos siguientes:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} l = 0,64279 & \operatorname{sen}^2 l = 0,413 \\ \operatorname{cos} l = 0,76604 & \operatorname{cos}^2 l = 0,587 \\ \operatorname{cos} \rho = 0,70711 & \operatorname{cos}^2 \rho = 0,500 \\ \operatorname{tang} \rho = 1,00000 & \operatorname{tang}^2 \rho = 1,000 \\ \omega = 7,3 \times 10^{-5} & \omega^2 = 53,29 \times 10^{-10} \\ f_a = 9,82265 & f_a^2 = 96,48 \\ R = 6.366.698 \end{array}$$

de los que se deducen

$$\begin{aligned} \varphi_a &= R \operatorname{cos} l \omega^2 = 6,367 \times 10^6 \times 0,766 \times 5,329 \times 10^{-9} = \\ &= 2,6 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \rho \operatorname{cos}^2 l} = \sqrt{1 - 0,5 \times 0,587} = 0,8405,$$

$$\frac{\operatorname{tang} \rho}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 \rho + \operatorname{sen}^2 l}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,413}} = 0,841$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{f_a \operatorname{cos} l - \varphi_a}{\sqrt{f_a^2 + \varphi_a^2 - 2f_a \varphi_a \operatorname{cos} l}} = \\ &= \frac{9,823 \times 0,766 - 2,6 \times 10^{-2}}{\sqrt{96,48 + 6,76 \times 10^{-4} - 2 \times 9,823 \times 2,6 \times 10^{-2} \times 0,766}} = 0,764. \end{aligned}$$

Por consiguiente, por cada unidad de masa y unidad de velocidad se disminuirá el peso del buque en la cantidad

$$2 \times 7,3 \times 10^{-5} \times 0,8405 \times 0,841 \times 0,764 = 7,89 \times 10^{-5}.$$

La velocidad debe estar expresada en metros por segundo, de manera que para traerla a millas por hora, habrá que multiplicar por el factor

$$\frac{1.851,7}{3.600}$$

y, por lo tanto,

$$7,89 \times 10^{-5} \times \frac{1.851,7}{3.600} \times 10^3 = 4,06 \times 10^{-2}$$

será la cantidad en kilogramos que por tonelada y por milla pierde el peso del barco. Se necesita una velocidad de 25 millas para que la pérdida de peso por tonelada valga un kilogramo.

En el ecuador y para el rumbo Este

$$2 \times 7,3 \times 10^{-5} \times 10^3 = 1,46 \times 10^{-1}$$

es la pérdida en kilogramos por tonelada y milla, y con un andar de 27,4 millas, 4 kg. es lo que pierde por tonelada. Es decir, que para esta velocidad cada tonelada de su desplazamiento se convierte en 996 kilogramos si navega al Este y en 1.004 si el rumbo es al Oeste.

§ 8. El valor de  $\varphi'_c$  se dedujo partiendo de la hipótesis de la esfericidad y homogeneidad de la tierra. Al tener en cuenta su forma elipsoidal, aun continuando suponiéndola homogénea, cambia el valor de la atracción  $f_a$ , que deja de ser constante, y cambian también los resultados obtenidos, porque las funciones trigonométricas en que entra la latitud ya no son aplicables en la forma empleada.

La variación de la atracción no representaría una dificultad de cálculo, porque conocida la aceleración de la gravedad  $g$  para cada latitud, se deduciría el valor de  $f_a$  de

$$\bar{g} = \bar{f}_a - \overline{r'\omega^2},$$

en donde  $r'$  representa el radio del paralelo del elipsoide correspondiente a la latitud  $l$  y dado por la fórmula

$$r' = a(1 - \epsilon \sin^2 l),$$

en la que  $a$  es el semieje mayor, o sea el radio ecuatorial, y  $\epsilon$  el aplamamiento o relación entre la diferencia de los semiejes y el radio del ecuador.

Es en la aplicación de las funciones trigonométricas donde el cálculo se complicaría en extremo al pasar de la forma esférica a la elipsoidal.

La diferencia que se encontrara entre los resultados, partiendo de una y otra hipótesis, sería muy pequeña. Ya se tomó para valor de  $f_a$

la atracción que, por unidad de masa, ejercería la tierra esférica y homogénea sobre un punto cualquiera de su superficie, que viene a ser un valor medio de los que puede tener, variables entre límites bien estrechos, y, por otra parte, como el aplanamiento es pequeño, próximamente,

$$\varepsilon = \frac{1}{300},$$

las proyecciones casi se confundirían con las consideradas.

De otros errores vendrá, además, afectado el valor de  $\varphi'_c$ . Se supuso a la tierra animada únicamente de un movimiento de rotación uniforme. El movimiento de traslación se consideró como rectilíneo y también uniforme y se despreciaron los movimientos de precesión de equinoccios y de nutación. Respecto al primero ya se dieron las razones de por qué la substitución de la trayectoria curvilínea por la rectilínea se podía hacer sin error sensible. El de precesión, que es un movimiento cónico de la posición media de la línea de los polos alrededor del eje de la eclíptica, tiene por período cerca de veintiseis mil años, y el de nutación, movimiento también cónico de la línea de los polos alrededor de su posición media y de amplitud mucho más pequeña que el anterior, tiene un período de casi diecinueve años. Muy diferentes uno de otro, es el menor de estos períodos lo suficientemente grande para que el efecto del movimiento se pueda considerar como nulo.

Los conceptos de peso y desplazamiento son, pues, distintos, aunque ambas voces se suelen emplear en Marina indistintamente. El primero es la resultante de la atracción terrestre y de la fuerza centrífuga y, por consiguiente, es único e invariable para una misma latitud. El desplazamiento, por el contrario, aun para el mismo lugar, varía si alguna fuerza viene a sumarse o restarse al peso. Esta fuerza es, en el caso que se ha estudiado, la que resulta del movimiento propio del buque sobre la superficie de las aguas, animadas éstas a su vez de un movimiento en el espacio. El desplazamiento ha de hacer equilibrio al peso modificado en el valor de esta fuerza, variable con la velocidad y el rumbo, dentro de una misma latitud.

Como se ha visto, aun para el máximo de la expresión [2] ( $l = 0$ ,  $\rho = 90^\circ$ ), el valor de la componente que, por unidad de masa y unidad

de velocidad, está dado por la expresión sencilla  $2\omega$  del doble de la velocidad angular de la tierra, es pequeño y alcanza sólo hasta un 5 por 1.000 del peso del barco para las más grandes velocidades.

La influencia del rumbo y de la velocidad en el desplazamiento del buque, es, por lo tanto, pequeña, conforme se dijo al principio; pero sensible en los casos extremos, es siempre un efecto que existe, del que no se puede prescindir dentro de la exactitud teórica.

---

FOTOTAQUÍMETRO MÁS Y ZALDÚA Md. 1914

---

INSTRUMENTO EMPLEADO

EN LOS

TRABAJOS DE CAMPO DEL MODERNO PROCEDIMIENTO

ESTEREOFOTOGRAMÉTRICO

POR

D. ALEJANDRO MÁS GAMINDE

TENIENTE DE INGENIEROS

(Sesión del 16 de Octubre de 1915.)

---

Podría emplearse en la aplicación del método *estereofotogramétrico* cualquiera de los modelos de fototaquímetro o fototeodolito que se utilizan en el método corriente de Fotogrametría, puesto que con ellos se establecería la placa en posición exactamente vertical y paralela a la *base*, valiéndose del limbo azimutal que llevan; pero como en estos instrumentos el anteojo va unido a la cámara, moviéndose azimutalmente con ella de forma que el plano de colimación que engendra en sus movimientos verticales es normal a la placa, habría que disponer el plano vertical de ésta paralelo a la *base* por un giro de un cuadrante, partiendo de la enfilación del anteojo al otro extremo de aquélla; por otra parte, es absolutamente necesario vigilar la permanencia de la placa en dicha posición cuando se saca la fotografía, y esto, aunque se pudiera conseguir observando con el anteojo que no sufre movimiento, no se realizaría cómodamente.

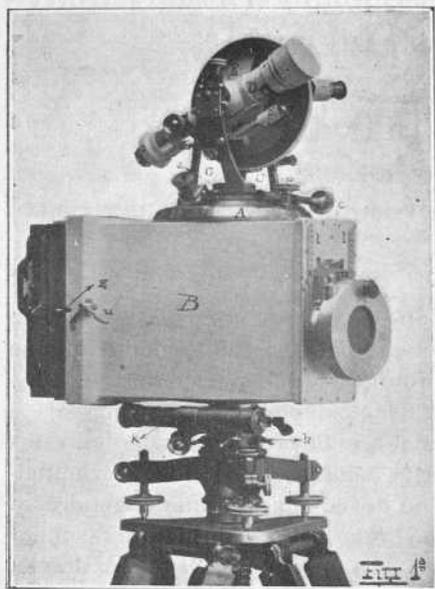
Por estas causas, al aparecer este novísimo método hubo la necesidad de proyectar modelos especiales de fototeodolitos dotados de todos aquellos elementos nuevos que el método *estereoscópico* exigía. El Teniente Coronel de Estado Mayor, Sr. Más y Zaldúa, en los veranos de 1911 y 1912 asistió a trabajos de campo que el Instituto Geográfico Militar austriaco y la Sociedad particular Stereographik, de Viena,

realizaban en las regiones montañosas del Tirol y la Stiria, donde empleaban los últimos modelos construidos por la casa Carl Zeiss (Jena), pudiendo patentizar que adolecían de inconvenientes que hacían su empleo incómodo, restándole ventajas al método.

Estos defectos, que suelen encontrarse en todos los instrumentos destinados a la Fotogrametría, bien porque los constructores desconocen las verdaderas condiciones que desde el punto de vista topográfico deben reunir, porque también ignoran las circunstancias que deben tener para que al emplearlos en el campo sean cómodos y prácti-

cos, o bien por atender sólo a los organismos fotográficos, resultan molestos y deficientes por no reunir las condiciones necesarias para utilizarlos con seguridad en las operaciones topográficas que siempre han de efectuarse en las estaciones fotográficas.

Los modelos que se usan actualmente tienen elementos innecesarios que complican su construcción y manejo sin ventaja real alguna. Parece que se ha tenido verdadero empeño en complicar los instrumentos con el único objeto de introducir en ellos elementos inútiles, por la sola razón, sin duda, de que son productos de la fábrica en que se construyen. En cambio, están



a falta de otros órganos que se hacen imprescindibles en el campo, y que su falta da lugar a que se tenga que transportar aparatos complementarios, como ocurría en el Tirol y la Stiria, donde se llevaba un taquímetro ordinario para medir los ángulos azimutales y verticales indispensables para la determinación numérica y gráfica de las estaciones, que se efectuaban con el fototeodolito. Todas estas razones hacen de ellos unos aparatos incómodos y poco prácticos para un procedimiento como éste, cuya verdadera aplicación está en las regiones montañosas, donde es conveniente transportar el menor material po-

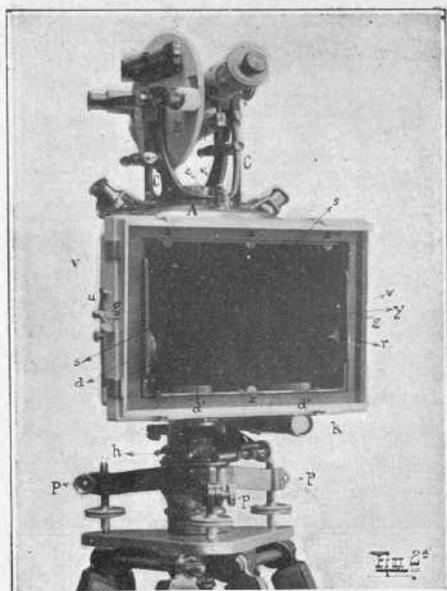
sible, y le resta las principales ventajas, que son la economía de tiempo, personal y trabajo.

Como resultado de su práctica y estudios, el Teniente Coronel Sr. Más proyectó el fototaquímetro que se describe a continuación, procurando salvar todos los defectos reconocidos en los modelos por él estudiados y tomando como primordial fin la reducción de material a transportar, para lo cual reúne en un solo instrumento, no muy pesado, un buen fotogrametro y un perfecto teodolito de anteojo estadiométrico para poder con él solo efectuar todos los trabajos de campo que este novísimo procedimiento requiere.

Siendo un aparato que se tiene que transportar a la espalda a grandes alturas, por terrenos difíciles la mayoría de las veces, y sufriendo continuos movimientos violentos, requiere ser de fuerte constitución y al mismo tiempo ligero; para armonizar estas dos condiciones, en cierto modo contradictorias, se han empleado en sus diferentes piezas metales convenientes, según el esfuerzo que han de sufrir, utilizándose el bronce en los ejes, limbos y soportes; el aluminio en la cámara, que por su forma especial permite emplear metales blandos sin perder fácilmente su rigidez, y en todo el tornillaje el metal blanco inoxidable.

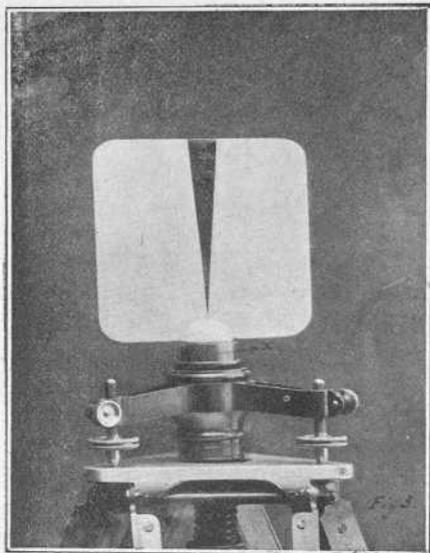
Se compone de dos partes (*figuras 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>*): la plataforma, de tornillos nivelantes (cada equipo de trabajo lleva dos), y el fototaquímetro, que se pueden separar para colocar en aquéllas indistintamente el aparato, propiamente dicho, o la señal de que luego hablaremos (*fig. 3.<sup>a</sup>*).

La cámara fotográfica *B* está colocada entre el limbo azimutal y la plataforma de tornillos nivelantes, por ser así la disposición más conveniente. Si el limbo se hallara debajo, resultando el anteojo en posi-



ción fija respecto a la cámara, no se podrían orientar fácilmente las placas cuando hay que tomar algunas vistas en posiciones diferentes a las paralelas a la *base*, como ocurre frecuentemente. El limbo azimutal *A* está fijo sobre la cara superior de la cámara *B*; la placa de los nonios, que soporta por intermedio de dos montantes *CC* el antejo *D* y el limbo vertical *E*, lleva dos nonios *n* en un diámetro normal al plano descrito por aquél para mayor comodidad en las lecturas. Ambos limbos están cubiertos para resguardar su graduación, que es de medios

grados centesimales, y como los nonios tienen 50 divisiones que corresponden a 49 de los limbos, su *apreciación elemental* es de  $0,01^\circ$  con un error menor de 0,0033, y la *real* en las lecturas de 0,005, con lo que se consigue que el error de orientación de las vistas no exceda de esta apreciación o del doble, un minuto, en ciertos casos. La lectura se hace con microscopios de cuatro aumentos, y el sentido de la graduación es de izquierda a derecha, que es el más empleado en los goniómetros, estando dispuesta de manera que el nonio de la derecha (marcado con la letra *A* en el instrumento) coin-



cida con el cero de ella, cuando el plano de colimación es perpendicular a la placa, hallándose el antejo en su posición normal con el objetivo sobre el de la cámara.

Ahora bien, sabemos que en cada *base* elegida hay que tomar seis fotografías, tres en cada extremo, que serán paralelas dos a dos, un par contenidas en un plano vertical paralelo a la base, otro formando a la izquierda de ella un ángulo de  $30^\circ$ , y el tercero formando el mismo ángulo hacia la derecha. Estas orientaciones se consiguen poniendo el cero del nonio *A* (derecha) en coincidencia de la división 100 ó  $300^\circ$ ; el plano de colimación será paralelo a la placa, con el objetivo a la derecha o a la izquierda, que son las posiciones para orientar la cá-

mara en los extremos  $I$  (izquierdo) y  $D$  (derecho) de las bases, si hay que impresionar placas paralelas a éstas. Para orientar las oblicuas  $30^\circ$  a las anteriores a derecha o izquierda, el cero del expresado nonio deberá coincidir con las divisiones  $130$  y  $70^\circ$ , para placas inclinadas a la izquierda y a la derecha, tomadas en el extremo  $I$  (izquierdo) de la base, y con las graduaciones  $330$  y  $270^\circ$ , para placas inclinadas a la izquierda y a la derecha, sacadas en el extremo  $D$  (derecho). Después de que el nonio marque cada una de estas lecturas, se aprieta fuertemente el tornillo de presión del limbo azimutal y se enfilea con el antejo la señal que hay en el tripode del otro extremo de la base; la cámara habrá seguido este movimiento y es entonces cuando la placa toma la orientación correspondiente a la lectura efectuada.

Como estas seis posiciones del antejo se repiten constantemente, con el objeto de que el operador no tenga que estar atento al momento en que el cero del nonio se aproxima a ellas, para apretar el tornillo de presión  $p$ , se ha dotado al aparato de una sencilla disposición que permite por sí sola conseguir esta primera aproximación en la lectura, sin tener para nada que mirar por el microscopio del nonio. Consiste en un tope  $t$ , que solicitado por un resorte encaja en unos orificios dispuestos convenientemente en el limbo azimutal, para que cuando aquél se ajuste en cada uno de ellos, se verifique la expresada aproximación de la lectura correspondiente. Al entrar el tope en uno de los taladros (que se nota por una pequeña resistencia en el movimiento), se aprieta el tornillo de presión  $p$ , y el de coincidencia  $c$  conseguirá la exactitud, sin que el resorte del tope impida este pequeño movimiento originado por la acción de este tornillo. Son siete los orificios del limbo azimutal; seis para las seis posiciones del antejo ya enumeradas ( $70$ ,  $100$ ,  $130$ ,  $270$ ,  $300$ ,  $330^\circ$ ) y el séptimo corresponde a la posición del antejo normal a la placa.

Para el caso en que se quiera prescindir de la acción del tope  $t$ , está dotado éste de un pequeño vástago  $v$ , que resbala en una superficie elicoidal trazada en su guarnición metálica; bastará dar un pequeño giro al tope para que el vástago, resbalando por dicha superficie, lo suspenda, no llegando al plano de los orificios; quedando de este modo la placa azimutal desligada por completo de él y, por lo tanto, de la de los nonios.

El limbo azimutal está montado de manera que pueda corregirse fácilmente su posición sobre la cámara, hasta conseguir que el plano de colimación resulte normal a la placa, cuando los ceros de los nonios coincidan con las divisiones  $100$  y  $300^\circ$ , condición principalísima para

la exactitud en la aplicación del método. Se consigue esta corrección aflojando cuatro tornillos, cuyas cabezas se encuentran en el interior de la cámara, que sujetan el limbo a la cara superior de ella; los agujeros de estos tornillos, tanto en la cámara como en la placa azimutal, dejan un pequeño juego, pudiéndose girar ésta lo necesario, cuando están flojos, hasta conseguir se cumpla aquella condición; después se aprietan fuertemente.

El anteojo *D*, es estadimétrico de Reichenbach, compuesto de lente objetivo y ocular ortoscópico; la óptica es de la casa Steinheil (Munich). Puede dar la vuelta de campana, y esto, unido a que el limbo zenital es completo, hace posible la aplicación de la regla de Bessel para la compensación de errores de colimación, cuando sea necesario.

La cámara es de forma prismática para placa de 0,113 por 0,18, apaisada, disposición más conveniente para aumentar el campo horizontal de las fotografías. Es de una sola pieza de aluminio, con las bases superior e inferior paralelas; en la inferior está fijo perpendicularmente el eje que se aloja en el hueco tronco-cónico de la plataforma de tornillos nivelantes, cuando se pone el instrumento en estación, y alrededor del cual se verifican todos los movimientos generales del aparato, y en la superior, perpendicular también a ella y en prolongación del anterior, se encuentra en el centro de la placa azimutal, el eje hueco que recibe la de los nonios con los montantes que soportan el anteojo.

El objetivo de la cámara, que tiene que estar perfectamente corregido para poder considerar sus rayos refractados como prolongación de los incidentes, es de una serie especial que fabrica la casa Carl Zeiss (Jena), denominada Ortoprotar, que satisface esta condición; sus características son: 1 : 8 de luminosidad y 19,5 cm. de distancia focal, que da para los 18 cm. de la placa un campo de algo más de 60°. Se utiliza un obturador metálico central. Está montado de manera que puede desplazarse en el sentido vertical 4 cm., fijándose en varias posiciones intermedias, espaciadas de 5 en 5 mm., por medio de dos topes de que va provista la pieza-muelle *m*, que encajan en taladros practicados en los listones metálicos *ll*, pues usándose las placas en sentido apaisado podía ocurrir en muchos casos de altas montañas y valles profundos, que si el objetivo no tuviese ese descentramiento vertical, las zonas más altas o las más bajas, cuando se estaciona el aparato en puntos bajos o altos, no saldrían impresionadas. Para evitar que por olvido no se anote la posición del objetivo y, por lo tanto, nos quedara indeterminada la *línea de horizonte*, empleada en cada

caso, lleva unida a la tablilla del objetivo una varilla  $Y$ , que llega hasta el borde exterior del cuadro posterior donde se apoya la placa, en cuya extremidad, una referencia  $r$  sigue los movimientos de aquél y que al proyectarse sobre la superficie sensible de la placa señala la verdadera posición de la expresada línea.

Para conseguir la exacta verticalidad de todas las placas que se impresionan, se ha dispuesto en la cámara un marco metálico  $s$ , cuyo borde exterior, perfectamente plano, resulta vertical al nivelar el instrumento; en este marco se ajusta de un modo perfecto la superficie sensible de la placa, cuando una vez colocado el chasis en la cámara y abierta la tapa correspondiente, se empuja contra él, gracias a un fuelle de que va provisto el cuadro movable  $v$ , en que se introduce el chasis; en esta posición se fija éste, abierta su tapa, por medio de dos aldabillas  $u$  que cogen los topes  $q$ . De este modo se tiene la seguridad de que la vista impresionada será una proyección vertical perfecta del terreno, siempre que el fototaquímetro esté nivelado y corregido.

Este cuadro  $s$ , que es un verdadero *marco-apoyo* de la placa, lleva unos taladros pequeñísimos en unas chapitas que tiene su borde exterior, por las que pasando la luz al efectuar la fotografía, marcan en ella unos puntos que sirven para determinar la *línea principal*. El lado inferior que corresponde al cielo de la vista impresionada, lleva un solo taladro  $z$  en su punto medio, que marcará siempre un punto negro en la placa; pero el lado superior que corresponde al terreno, si sólo llevase un taladro central  $z'$ , podía no resultar visible, por lo que, con objeto de que siempre pueda conocerse su verdadera situación, se ha dotado a este lado de otros dos taladros  $z''$  y  $z'''$ , equidistantes del central  $z'$  7 cm. Así, aunque sólo resulte uno de ellos visible sobre la fotografía tomada, nos será fácil determinar la *línea principal*.

Además de estas referencias, el *marco-apoyo* lleva tres discos metálicos  $d$ ,  $d'$  y  $d''$ , el primero en su borde izquierdo y los otros dos en el inferior. Tienen letras y números vaciados en su superficie; que lo mismo que los taladros que determinan la *línea principal*, al recibir la luz, proyectan en la placa impresionada las indicaciones del número de orden de la fotografía, el extremo de la *base* en que se sacan, convergencia o paralelismo de ejes y graduación marcada por el nonio  $A$  (derecha), en el momento de la impresión. El disco de la izquierda  $d$  lleva los doce primeros números, y los del borde inferior, el  $d'$ , las cantidades 70, 100, 130, 270, 300, 330, y el  $d''$  las letras  $ID$ ,  $DI$ ,  $IC$ ,  $DC$ ; las letras  $IC$ ,  $DC$  son para el caso en que se empleen los ejes convergentes, según se esté en el extremo izquierdo ( $IC$ ) o derecho ( $DC$ ) de

la base, y las  $DI$ ,  $ID$  para el de ejes paralelos y extremos derecho e izquierdo, respectivamente. Así, por ejemplo, si la décima placa se impresiona en el extremo derecho de una base con la inclinación a la derecha de ésta de  $30^\circ$ , empleándose placas de ejes paralelos, llevaría las siguientes indicaciones: 10, 270,  $DI$ .

Para nivelar la cámara y disponer la placa vertical, el limbo azimutal va provisto de un nivel esférico  $e$ , y con el objeto de facilitar el calado exacto de su burbuja, se hallan grabadas varias circunferencias concéntricas en su cristal. El anteojo está dotado de un nivel caballero  $f$  de doble curvatura especial, para que sea cómoda su inspección, y también el eclímetro tiene su nivel cilíndrico correspondiente  $g$ .

Por medio de la arandela roscada  $h$  se efectúa la unión del fototacómetro, propiamente dicho, a la plataforma de tornillos nivelantes. Esta arandela, que va en el eje tronco-cónico del instrumento que se ajusta al eje hueco de la plataforma, se rosca en la cabeza de este último, estableciendo su unión perfecta. A todo su alrededor lleva unos topes terminados en cabezas esféricas para facilitar su giro. Para cambiar el aparato de trípode, se desenrosca completamente esta arandela, pudiéndose sacar inmediatamente aquél de la plataforma, llevándose al otro, situado en el extremo opuesto de la base, donde se ajustarán los ejes apretando la arandela. Se tendrá cuidado, antes de meter el aparato en su caja, cómo se guarda en unión de una de las plataformas, de que esté la arandela roscada, pues si no se corre el riesgo de que pueda desprenderse aquélla.

Se ha dotado al aparato de una declinatoria de anteojo  $k$ , que va unida al eje tronco-cónico de la cámara, que permite orientar el limbo azimutal.

Las plataformas de tornillos nivelantes son dos iguales; tienen un eje hueco tronco-cónico, en donde se aloja indistintamente el aparato o la *mira*. Los tornillos nivelantes se inmovilizan cuando se ha conseguido la perfecta nivelación del instrumento, por medio de otros pequeños  $p$ , que los aprisionan en unas mordazas en que terminan los brazos.

Estas plataformas se fijan a las mesetas de aluminio de dos trípodes, que se establecen en los extremos de la base. Son también iguales y muy fuertes, de patas extensibles, compuestas de dos partes, la superior de madera de haya, constituida por dos listones, reforzados por travesaños de metal agujereados, que sirven de guía a la inferior, de tubo metálico, que termina en fuerte regatón puntiagudo para afianzar el trípode al terreno. Se saca esta parte metálica, asegurándola

después para que no resbale por medio de unas muletillas de metal blanco. La unión de la meseta a las patas, que constituyen los ejes de giro de éstas, son de metal duro muy reforzadas. La longitud del trípode recogido es de 0,77 m. y dispuesto para ser colocado de 1,225 metros.

La *mira* (*fig. 3.<sup>a</sup>*) que ha de servir para hacer en buenas condiciones la puntería del anteojo del fototaquímetro, se coloca en la plataforma del extremo de la base que deja libre éste; es una tablilla de chapa de hierro de 0,16 por 0,05 m., pintada de blanco, con una referencia consistente en un trazo vertical rojo terminado en punta por su parte inferior. Tiene un eje  $x$  tronco-cónico que ajusta en el hueco de las plataformas de tornillos nivelantes.

Todo este material va distribuido en dos cajas; el fototaquímetro ajustado a una de las plataformas, en una, y en otra más pequeña, donde se acondicionan perfectamente seis chasis dobles, van la otra plataforma y la mira. Por tanto, son cuatro los bultos a transportar, dos cajas y dos trípodes.



PROCEDIMIENTO GRÁFICO  
PARA  
LA DISTRIBUCIÓN DE LAS VARILLAS DE RESISTENCIA  
en muros de hormigón armado, con contrafuertes,  
sometidos al empuje del agua, de las tierras, o al de una  
y otras simultáneamente

POR  
D. VIRGILIO GARCÍA ANTÓN  
INGENIERO DE CAMINOS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

Recientemente hemos tenido ocasión de proyectar un muro de más de 400 m. de longitud, compuesto de diez tramos, de altura variable entre 1,45 m. y 3,25, que en circunstancias normales tiene que sufrir el empuje de las tierras, y en época de avenidas del río, a lo largo de una de cuyas márgenes se proyecta su construcción, estará sometido al que ocasione el agua.

El muro se proyectó de hormigón armado y está constituido de la manera siguiente (*figuras 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup>*):

*Alzado de parte del tramo de 5<sup>os</sup> de altura*

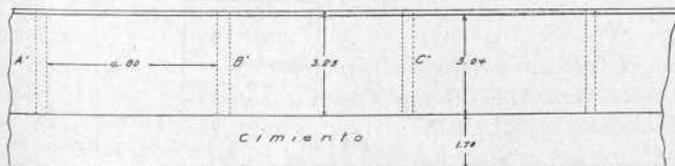


Fig. 1.<sup>a</sup>

1.<sup>o</sup> De una serie de contrafuertes  $A - A'$ ,  $B - B'$ ,  $C - C'$  ..... equidistantes de eje a eje 5 m. en todos los tramos; y

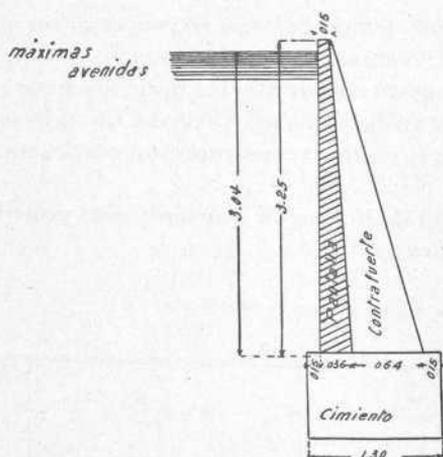
2.º De una pantalla cerrando el espacio que queda entre dichos contrafuertes.

Teniendo en cuenta que el muro se halla sometido a los esfuerzos indicados anteriormente por el empuje del agua y el de las tierras,

Fig. 2.<sup>a</sup>

hubo que calcularle para resistir a ellos, armando la pantalla en sus dos paramentos mediante barras horizontales de *resistencia* y verticales o de *repartición*.

*Corte proyección entre dos contrafuertes*

Fig. 3.<sup>a</sup>

La distribución de las primeras, si se adopta sección uniforme para ellas, debe ser tal que su separación sea variable desde la base a la coronación de la pantalla, toda vez que lo es la presión o empuje.

En su virtud, consultamos varios autores para ver si se encontraba

en alguno de ellos un procedimiento analítico o gráfico que fijase esa ley de distribución de las barras, o lo que es lo mismo, la separación entre ellas.

Al no encontrarla, resolvimos el problema por el procedimiento que se ocurre inmediatamente a cualquiera, el cual indicamos a continuación por ser necesario para justificar el procedimiento gráfico que hemos ideado después de redactar el proyecto, procedimiento que exponemos más adelante.

Muy lejos de nuestro ánimo pretender enseñar nada ni a nadie. Únicamente exponemos este modesto fruto de nuestro trabajo para que

si a alguien pudiera servirle en caso análogo, lo aplique mejorándolo, y muy principalmente para que las personas competentes en la materia piensen sobre ello y discurren otro procedimiento mejor.

Sección de la pantalla

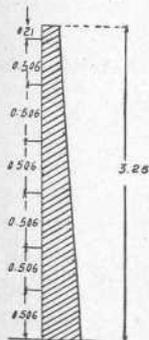


Fig. 5.<sup>a</sup>

Alzado entre dos contrafuertes

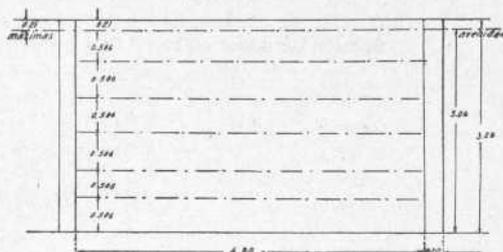


Fig. 4.<sup>a</sup>

*Procedimiento empleado para resolver el problema.*—Consideremos (fig. 4.<sup>a</sup>) un tramo de pantalla comprendido entre dos contrafuertes. Hemos dividido la altura de 3,04 m. comprendida entre la base de ella y las máximas avenidas, en seis fajas iguales, tanto mayor número, cuanto mayor aproximación desee obtenerse.

La altura de cada una es  $\frac{3,04 \text{ m.}}{6} = 0,506$  metros.

Cada faja la hemos considerado como una losa *semiempotrada* en los contrafuertes que la sirven de apoyo, losa que se encuentra sometida a la presión del agua y que puede considerarse como una carga uniformemente repartida por metro lineal de aquélla.

Aplicando cualquiera de los procedimientos conocidos se determina la *sección* de metal que se precisa para cada faja en las barras de resistencia, que en este caso son horizontales, y que teniendo que re-

sistir al empuje del agua se colocarán en el lado opuesto a ella, o sea del de las tierras.

Hemos aplicado para determinar la sección de metal el método indicado en el *Manuel théorique et pratique du constructeur en ciment armé*, de N. Tedesco y V. Forestier, números 49 y 51, y tablas que da para este caso.

Así hemos obtenido los siguientes resultados:

Sección de metal en la 1. <sup>a</sup> faja o inferior				$S_1 = 1,031 \text{ mm.}^2$
—	—	2. <sup>a</sup>	—	$S_2 = 925$ —
—	—	3. <sup>a</sup>	—	$S_3 = 820$ —
—	—	4. <sup>a</sup>	—	$S_4 = 762$ —
—	—	5. <sup>a</sup>	—	$S_5 = 604$ —
—	—	6. <sup>a</sup>	—	$S_6 = 352$ —
—	—	7. <sup>a</sup>	o superior	$S_7 = 206$ —

La faja séptima se ha considerado, dada su pequeña altura, como si soportase la presión del agua. Esto no es cierto, pero como es necesario colocar en ella armadura para su unión con la de los contrafuertes, puede admitirse la solución adoptada.

Deducidas del modo indicado, las diferentes secciones de metal se han distribuido en varillas, dentro de cada faja, eligiendo el número de ellas y su sección de modo que la suma de las que hay en cada una den  $S_1, S_2, \dots, S_7$ , respectivamente.

Así se ha obtenido para

la faja 1.<sup>a</sup> inferior 6 varilla de 15 mm. de diámetro y 177,00 mm.<sup>2</sup> sección cada una

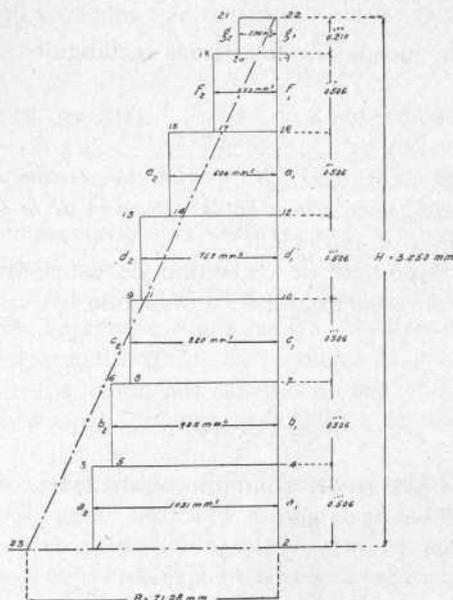
—	2. <sup>a</sup>	—	5	—	15	—	—	177,00	—	—
—	3. <sup>a</sup>	—	7	—	12	—	—	113,09	—	—
—	4. <sup>a</sup>	—	7	—	12	—	—	113,09	—	—
—	5. <sup>a</sup>	—	8	—	10	—	—	78,54	—	—
—	6. <sup>a</sup>	—	5	—	10	—	—	78,54	—	—
—	7. <sup>a</sup>	—	2	—	10	—	—	78,54	—	—

Dentro de cada faja se han espaciado *igualmente* entre ellas, obteniendo una separación entre ejes de

84 mm. en la faja 1. <sup>a</sup>	
101	— 2. <sup>a</sup>
72	— 3. <sup>a</sup>
72	— 4. <sup>a</sup>
63	— 5. <sup>a</sup>
101	— 6. <sup>a</sup>
101	— 7. <sup>a</sup>

Cierto que desde el punto de vista práctico basta con la solución adoptada, pero puede obtenerse una separación que responda a la variabilidad de la presión que sufre la pantalla aun dentro de una misma faja, aplicando el procedimiento gráfico que hemos ideado y que consiste en lo siguiente:

Tomemos en una escala determinada (*fig. 6.<sup>a</sup>*) los 3.250 mm. que tiene de altura la pantalla y dividámosla en las siete fajas antes indicadas, de 506 mm. cada una, excepto la superior, de 210 mm.

Fig. 6.<sup>a</sup>

Tomemos igualmente una escala para la sección del metal.

Levantemos perpendiculares en los puntos medios  $a_1 b_1 c_1 \dots g_1$  de esas fajas y tomemos sobre cada una de ellas la sección de metal antes deducida.

Así tendremos

$$a_1 a_2 = 1.031 \text{ mm.}^2$$

$$b_1 b_2 = 925 \text{ »}$$

$$g_1 g_2 = 206 \text{ »}$$

Si consideramos uno de los rectángulos, el 1, 2, 3, 4, observaremos que la superficie de él

$$(a_1 a_2 \times 2-4) = 506 \text{ mm.} \times 1.031 \text{ mm.}^2$$

representa el *volumen de metal que corresponde a la faja inferior para una longitud de esta igual a la altura 506 mm.* y si esta altura se hubiese tomado como unidad, la expresada superficie representaría el volumen de metal correspondiente a la unidad de longitud en la altura citada.

Análogamente sucede con los demás rectángulos

$$(4, 5, 6, 7); (7, 8, 9, 10); \dots (19, 20, 21, 22).$$

*Luego la suma de la superficie de todos estos rectángulos representará el volumen de metal necesario para la altura H de la pantalla y en una longitud de ella igual a 506 mm.*

Hallemos la superficie de cada uno de estos rectángulos suponiendo el dibujo en escala natural, y sumando los valores que se obtengan.

Tendremos:

$$S = 115.836 \text{ mm.}^2$$

Hallemos la base  $B$  del triángulo equivalente, o de área  $S$  que tenga la altura  $H = 3.250 \text{ mm.}$

Así tendremos:

$$B = 71,28 \text{ mm.}$$

Luego el área del triángulo (23, 2, 22) es equivalente a la suma de la de los siete rectángulos anteriores.

*Consecuencia: Dicha área representará lo que la suma de los siete rectángulos; es decir, el volumen de metal necesario para la altura H de la pantalla y en una longitud de ella igual a 506 mm.*

Deducido esto, podemos hallar ya el número de varillas que se precisarán en toda la altura  $H$  de la pantalla y en una longitud de ella igual a 506 mm., fijando previamente la sección de ellas.

Si tomamos las de 12 mm. de diámetro, que dan una sección de  $113,10 \text{ mm.}^2$ , se tendrá: que el número de varillas, multiplicado por

la sección y la longitud de una de ellas, que es 506 mm., debe dar un volumen de metal igual al representado por la superficie del triángulo 2, 22, 23, que es lo mismo que la suma.

$$(S_1 + S_2 + \dots + S_6) \times 506 \text{ mm.} + S_7 \times 210 \text{ mm.},$$

o sean, en definitiva, 231722 mm.<sup>3</sup>  
luego

$$x \times 113,10 \text{ mm.}^2 \times 506 \text{ mm.} = 2317224 \text{ mm.}^3,$$

de donde

$$x = \frac{2317224}{113,10 \times 506} = 41,42$$

y redondeando obtendremos 42 varillas.

*El problema queda, pues, reducido a dividir el triángulo (2, 22, 23) en 42 partes equivalentes por paralelas a la base y estas paralelas indicarán por su posición los puntos donde han de colocarse las varillas.*

Puede suceder que al llegar a cierta altura se encuentren muy separadas las varillas, y como por razones de construcción pudiera ser necesario disponerlas con menor separación, se puede proceder del siguiente modo:

Se toman los cuatro rectángulos inferiores, por ejemplo, y a ellos se aplica el procedimiento indicado, es decir, se substituye la suma de sus áreas por un triángulo equivalente, al que se descompone en un número de partes por paralelas a su base, número que será el que se deduzca para el de varillas.

Se hace lo mismo con los rectángulos superiores restantes empleando varillas de menor sección que en los inferiores, y así se encontrarán éstas menos separadas entre sí en la altura que corresponde a estos rectángulos.

Si aun así no bastara, todo se reduce a considerar, no dos grupos de rectángulos, sino tres o más, y substituir cada grupo por el triángulo equivalente respecto al cual se aplica el procedimiento indicado. Así tendremos tres o más grupos de varillas, de distinta sección las de un grupo a otro e iguales entre sí las de cada uno de ellos.

## CASO EN QUE EL MURO SUFRA EL EMPUJE DE TIERRAS.

Este procedimiento puede aplicarse igualmente, y sin variar en nada, cuando se trate de muros que sufran el empuje de las tierras. Así como cuando se trata del agua se hallaba la presión que ésta ejercía sobre cada una de las fajas en que se dividía la pantalla, puede obtenerse la presión análoga en el caso de tierras aplicando la fórmula

$$E_n = (2n - 1) E_1,$$

que da el valor del empuje  $E_n$  por una zona o faja de la pantalla de una longitud de 1 m. y otro de altura, estando esta zona a la profundidad de  $n$  metros por bajo de la rasante de las tierras, siendo  $E_1$  el empuje que corresponde a la faja superior de 1 m. de altura; y ya estamos en el caso de calcular *la sección de metal* que corresponde a cada faja, siguiendo después exactamente el procedimiento explicado anteriormente.

La fórmula anterior está tomada de la excelente obra *Mecánica aplicada a las construcciones*, por Marvá, 3.<sup>a</sup> edición, tomo II, número 117 del apéndice.

---

# EL ESTEREÓGRAFO

POR

D. ANTONIO TORROJA MIRET

INGENIERO DE MINAS Y GEÓGRAFO

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

La Estereofotogrametría, nacida no hace aún diez años de la aplicación de la Fotografía y la Estereoscopia combinadas al levantamiento de planos, constituye ya hoy, a pesar de lo reciente de su origen, una de las ramas más fecundas de la Topografía y de las que más amplio desarrollo han de alcanzar en el porvenir (1). La rapidez y comodidad con que se ejecutan sus trabajos de campo, que permiten obtener los datos de todos los puntos del terreno sin necesidad de tenerlos que determinar uno por uno, y la facilidad y precisión grandísimas de sus operaciones de gabinete, hacen de ella un método topográfico insustituible en multitud de casos, grandemente ventajoso en los más, y que en todos ellos presenta, cuando menos, la ventaja de una mayor rapidez y economía si la escala es pequeña, y de una extraordinaria exactitud para escalas mayores. A pesar de ello, es preciso reconocer que la difusión alcanzada por esta nueva rama de la técnica moderna no es todavía todo lo grande que por sus excelentes condiciones merece, debiéndose, sin duda alguna, este hecho a las dificultades que presenta la adquisición de los aparatos empleados hasta hoy para ejecutar con facilidad y rapidez los trabajos de gabinete que el método exige.

El objeto de la presente Nota no es otro que dar a conocer un

---

(1) Véase «La Estereofotogrametría en 1915». Conferencia dada en el Instituto de Ingenieros Civiles por el Doctor en Ciencias e Ingeniero de Caminos y geógrafo D. José María Torroja.— Madrid, 1916.

nuevo aparato de fácil construcción, designado con el nombre de Estereógrafo (patente núm. 60.619), que permite ejecutar esos trabajos en muy buenas condiciones, y que, por tanto, esperamos contribuya a que el nuevo método topográfico adquiera, al menos en nuestra patria, la importancia que exigen de consuno sus ventajosas condiciones y el desarrollo cada vez mayor de las obras de ingeniería de todas clases cuyo estudio tanto ha de facilitar.

## I.

### OBJETO DEL ESTEREOGRAFO.

El procedimiento más sencillo, más rápido y más exacto para ejecutar los trabajos de gabinete que exige el método estereofotográfico de levantamiento de planos, es indudablemente el que proporciona el maravilloso Estereoautógrafo del capitán Von Orel. Difícil, por no decir imposible, es imaginar para los diversos problemas que esos trabajos encierran, solución más natural y sencilla, desde el punto de vista teórico, que la que sirve de fundamento a este aparato. Y en cuanto a su realización práctica, basta con decir que está proyectado y construido por la casa Zeiss de Jena, para comprender la exactitud y perfección que se observan en los detalles todos de su construcción esmeradísima. Sin embargo, en medio de sus magníficas cualidades, que obligan a considerarle como el más notable y perfecto de los aparatos de la topografía moderna, tiene el Estereoautógrafo dos graves inconvenientes, que son causa de que su empleo no esté tan extendido como correspondería a las grandes ventajas del método topográfico en que se emplea. Por una parte, la Sociedad que explota su patente tiene el criterio de no venderle nunca a organismo ni oficina particular alguna; y por otra, su precio, que con los transportes, aduanas, montaje, etc., se aproxima a 45.000 pesetas, hace que aun entre las entidades oficiales, sólo para aquéllas que constantemente y en gran escala se ocupan en el levantamiento de planos, sea remuneradora su adquisición. Por estas razones es sumamente frecuente en la práctica de la topografía encontrarse con trabajos para cuya ejecución no es posible pensar siquiera en el empleo del Estereoautógrafo y que, sin embargo, por sus condiciones especiales presentan grandes ventajas para la aplicación del método estereofotográfico. Compréndese, pues, la importancia grandísima que tiene el poder ejecutar los trabajos de

gabinete de ese método sin el auxilio de dicho aparato, para evitar que las dificultades de adquisición de éste anulen en gran parte las ventajas de aquél.

Antes de entrar en el estudio de los diversos métodos que se han ideado para ejecutar estos trabajos y en particular del que proporciona el Estereógrafo, objeto de esta Nota, conviene que indiquemos en qué consisten esos trabajos, y para ello recordaremos brevemente que las operaciones de campo del método estereofotográfico de levantamiento de planos, tal como hoy día se practica, y prescindiendo de la determinación previa de los puntos de referencia necesarios, si de antemano no se conocen, se reducen a obtener desde dos puntos convenientemente situados y cuya recta de unión se llama base estereoscópica, tres pares de fotografías con placas verticales, de modo que en uno de los pares el eje óptico del objetivo sea perpendicular a la base estereoscópica, y en los otros dos este eje forme con esa primera posición un ángulo de  $30^\circ$  a uno y otro lado de ella. Los trabajos de gabinete, por consiguiente, han de consistir en las operaciones necesarias para deducir de magnitudes medidas en estas placas, las posiciones planimétricas y las altitudes de puntos del terreno en número suficiente para que el plano de éste quede determinado con la conveniente aproximación.

Pues bien, prescindiendo del método gráfico llamado de intersecciones, que se empleó en un principio, pero cuya inevitable y absoluta falta de exactitud impide totalmente su empleo en trabajos de alguna precisión, el único método empleado hasta hoy para ejecutar esos trabajos de gabinete, cuando no es posible disponer del Esteroautógrafo, consiste en medir con el estereocomparador, para cada punto que se elija del terreno, las magnitudes  $x$  (abscisa de la imagen del punto en la placa de la izquierda de uno de los pares),  $y$  (ordenada de la misma imagen) y  $\pi$  (diferencia algébrica entre las abscisas de las imágenes del punto en las dos placas del par), deduciéndose luego de estas magnitudes las coordenadas reales del punto en el terreno por medio de las conocidas fórmulas de la Fotogrametría

$$D = -b \operatorname{sen} \alpha + \frac{b}{\pi} (f \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha); \quad X = \frac{Dx}{f}; \quad Y = \frac{Dy}{f},$$

en las que el ángulo  $\alpha$  tiene los valores  $+30^\circ$ ,  $0^\circ$  y  $-30^\circ$ , según que las placas del par con que se trabaja sean desviadas a la izquierda, normales o desviadas a la derecha. Las constantes  $f$  y  $b$  designan, respec-

tivamente, la distancia focal de la cámara y la distancia horizontal entre los extremos de la base estereoscópica.

Por la simple lectura de esas fórmulas se comprende que así empleado este método, es decir, teniendo que calcular para cada punto esas tres fórmulas, resulta completamente impracticable, pues el mucho tiempo que inevitablemente exigen esos cálculos, aun ordenándolos y metodizándolos todo lo posible, hace que difícilmente puedan calcularse más de seis u ocho puntos por hora, siendo así que el número de ellos que exige cualquier trabajo, aun de los pequeños, suele ser de algunos millares. Un medio de simplificar esos cálculos sería, indudablemente, la construcción de tablas a propósito, pero como éstas habrían de ser distintas para cada distancia focal y, por consiguiente, para cada aparato o serie de aparatos que se construyera, no creemos que la simplificación que pudieran introducir en los cálculos llegara a compensar el trabajo de calcularlas, como lo prueba el hecho de que no haya habido hasta ahora nadie que se haya decidido a emprender semejante obra. Estas razones movieron al eminente Dr. Carlos Pulfrich, colaborador científico de la casa Zeiss de Jena, y uno de los hombres a quienes más progresos debe la Estereofotogrametría, a buscar algún aparato sencillo que simplificando esos cálculos abreviase los trabajos de gabinete del método; logrando, después de algunos tanteos, idear el tablero que lleva su nombre, y que construye y explota la mencionada casa. No es nuestro propósito entrar en la descripción de este aparato, con el que se obtiene un aumento no muy grande de velocidad en el trabajo, a cambio de una menor exactitud de éste; únicamente diremos que las dificultades e inconvenientes de su manejo fueron las que obligaron al ilustre Eduardo Von Orel a tratar de sustituirle con algo mejor, llegando por este camino a encontrar su incomparable Estereoautógrafo.

Lo que más sorprende y desagrada en el tablero Pulfrich a quien detenidamente estudia su funcionamiento, es lo complicado y artificioso de sus construcciones, que parece a primera vista pueden ser con facilidad grandemente simplificadas. Efecto de esta impresión que el tablero Pulfrich produce, fueron mis esfuerzos para encontrar un aparato de fácil construcción, en el que las operaciones fueran más sencillas, rápidas y exactas que en aquél, logrando al cabo de algún tiempo, como resultado de estos esfuerzos, idear el Estereógrafo, cuya descripción constituye el objeto de esta Nota. Expuesta la idea de este aparato al sabio Director del Laboratorio de Automática, Excelentísimo Sr. D. Leonardo Torres Quevedo, obtuvo la más favorable

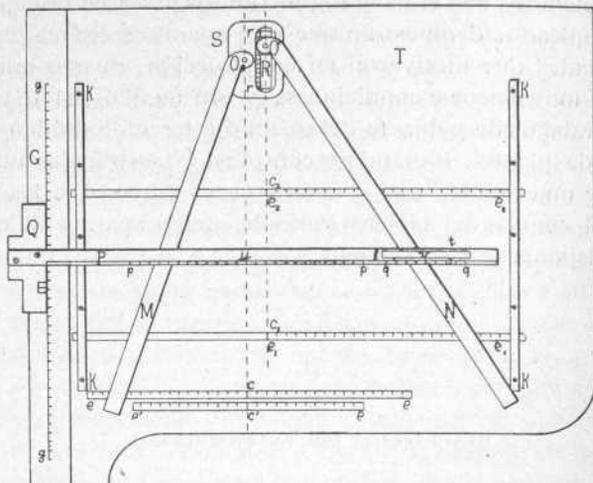
acogida por parte de este ilustre inventor, quien dispuso se construyera inmediatamente en su laboratorio el primer modelo del mismo. Este modelo, que es el presentado en la Exposición del Congreso, ha sufrido ligeras modificaciones, que sin alterar su funcionamiento teórico facilitan su manejo, constituyendo el modelo 1915 hoy en uso, construido también en el mismo laboratorio. Los excelentes resultados obtenidos con el Estereógrafo en los diversos trabajos en que ha sido empleado, demuestran que este aparato satisface plenamente las necesidades que motivaron su construcción, puesto que permite ejecutar en muy buenas condiciones, y sin auxilio del Estereoautógrafo, los trabajos de gabinete del método estereofotográfico de levantamientos de planos, lográndose con él en estos trabajos una exactitud doble y una rapidez tres o cuatro veces mayor que las que proporciona el empleo del tablero Pulfrich, único aparato de que hasta ahora se disponía con este objeto.

## II.

### DESCRIPCIÓN DEL ESTEREÓGRAFO.

Se compone este aparato de un tablero de madera  $T$  de forma apropiada, provisto en su borde izquierdo de una guía metálica  $G$ , por la cual desliza un gramil o regla en  $T$ , metálica también, designada por  $PQ$  en el dibujo y cuyo brazo transversal  $Q$  está mantenido, por medio de un fuerte resorte, constantemente adaptado a la guía  $G$ . Lleva, además, el aparato dos reglas metálicas giratorias  $M$  y  $N$ , cuyos ejes de giro respectivos son  $O$  y  $O'$ , fijo el primero y montado el segundo en una corredera que permite fijarle en cualquier posición a lo largo de la ranura  $R$ , paralela a la guía  $G$ . Tanto la posición de esta guía  $G$  como la de la pieza metálica  $S$  que lleva el eje  $O$  y la ranura  $R$ , pueden corregirse por medio de los pasadores que las sujetan al tablero  $T$ . La graduación  $gg$ , que lleva la guía  $G$ , sirve para conocer en cada instante la distancia del eje  $O$  al borde inferior del brazo  $P$  del gramil  $PQ$ , así como en la graduación  $rr$ , grabada al borde de la ranura  $R$ , se mide la separación de la corredera que lleva el eje  $O'$  respecto de su posición central, es decir, de aquella en la cual la recta que une los centros de los ejes  $O$  y  $O'$  es perpendicular a la guía  $G$ . En el borde inferior biselado de la regla  $P$  van grabadas dos gra-

duaciones  $pp$  y  $qq$ , cuyos puntos medios  $u$  y  $v$  están situados el primero en la paralela a la guía  $G$  trazada por el punto  $O$ , y el segundo a una distancia del primero igual a  $s + 2f \cos \alpha$ , siendo  $s$  la separación entre los puntos  $O$  y  $O'$  cuando la corredera que lleva este último está en su posición central.

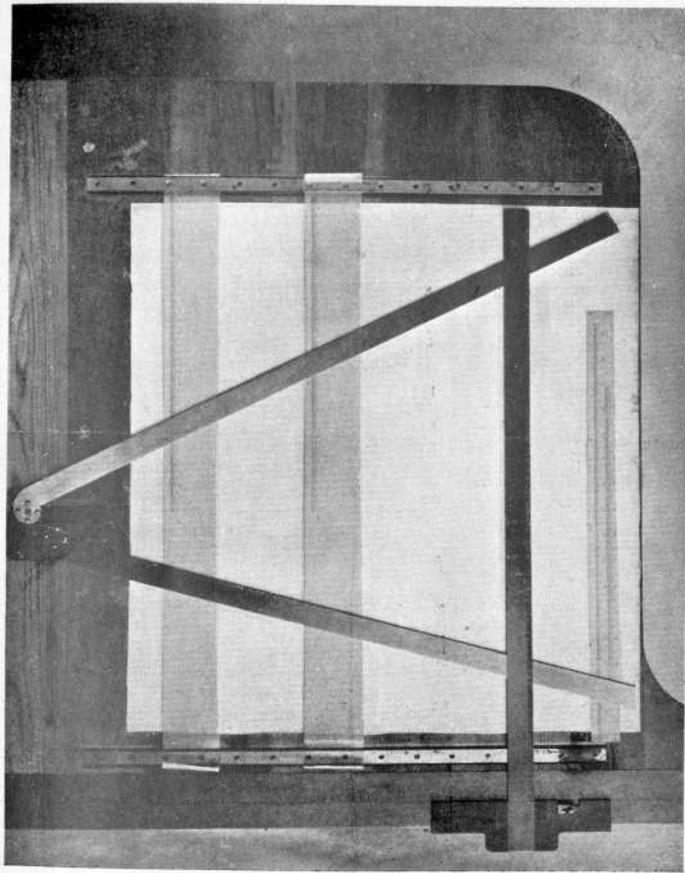


La graduación  $pp$ , que se extiende a ambos lados de su origen  $u$ , está dividida en milímetros y numerada con arreglo a la escala a que se quiera trabajar con este aparato, es decir, que si se quiere construir con él un plano a escala  $\frac{1}{E}$ , se numera la graduación  $pp$ , dando a cada milímetro el valor  $E \times 0,001$  m. La graduación  $qq$ , dividida también en milímetros, es igual, por su numeración y por el valor de sus divisiones, a la escala en que se miden las  $xx$  en el estereocomparador; pero su numeración, en lugar de estar grabada en la misma regla  $P$ , lo está en una reglilla auxiliar  $l$  superpuesta a ella, cuya posición puede invertirse, cambiándose así a voluntad el sentido de esa numeración.

Otras dos escalas  $ee$  y  $e'e'$ , dibujadas en papel tela y pegadas al tablero  $T$ , están colocadas paralelamente a la regla  $P$  y a distancias  $mf$  y  $nf$  del punto  $O$ , y llevan numeraciones iguales a las de las escalas del estereocomparador donde se miden las  $xx$  y las  $yy$ , pero siendo sus divisiones  $m$  y  $n$  veces mayores, respectivamente, que las

Asoc. Esp.<sup>a</sup> para el Prog.<sup>o</sup> de las Cienc.<sup>s</sup>

LÁMINA.



Estereógrafo Torroja (Pat. 60619).



de igual valor nominal de estas escalas. Tanto en las escalas  $ee$  y  $e'e'$  como en la  $qq$ , las lecturas correspondientes a sus puntos medios  $c$  y  $c'$  (situados en la recta  $Om$ ) y  $v$  son iguales a las que se hacen en las escalas de las  $xx$ , las  $yy$  y las  $xx$ , respectivamente, del estereocomparador cuando en él se observa el punto central de la placa de la izquierda.

Finalmente, una escala  $e_1e_1$ , paralela a las anteriores y dibujada también en papel tela, pero sujeta al tablero a presión por medio de las reglas metálicas  $KK$ , está situada a una distancia del eje  $O'$  igual a  $h$  veces el valor de la base  $b$  reducida a la escala a que se quiere trabajar, o sea,  $h \times \frac{b}{E}$ , extendiéndose a la derecha de su origen  $c_1$  situado en la paralela a la guía  $G$  trazada por el punto  $O'$ . La numeración de esta escala es igual a la de la escala del estereocomparador en que se miden las paralajes  $\pi\pi$ , pero sus divisiones son  $2h$  veces mayores que las de igual valor nominal de esta escala. Si se quiere trabajar con valores de  $\pi$  mayores que los que permite esta escala, cuya longitud está limitada por las dimensiones del tablero, se coloca otra escala  $e_2$ , semejante a ella, a mitad de distancia del eje  $O'$  y con divisiones mitad que las correspondientes de la escala  $e_1$ , y aún, si conviene, otra a cuarta parte de distancia y a octava, etc.

En los aparatos construidos hasta ahora se ha dado siempre al factor  $m$  el valor 4, con lo cual la distancia  $mf$  es de 76 cm. (estos aparatos se han construido para trabajar con fototaquímetros de 19 cm. de distancia focal), y al factor  $h$ , según los casos, uno de los valores 5, 10, 20 y 40, para lo cual acompañan a cada aparato otras tantas escalas en papel tela de 50 cm. de longitud, numeradas dando a cada una de sus divisiones un valor  $2 \times 5$ ,  $2 \times 10$ ,  $2 \times 20$  y  $2 \times 40$  veces menor, respectivamente, que su valor real correspondiente.

### III.

#### MANEJO DEL ESTEREOGRAFO.

Para mayor claridad de la exposición, vamos a empezar por fijar un caso práctico concreto, al cual referirnos al explicar el manejo de este aparato. Supongamos, por ejemplo, que se trata de construir a escala de  $\frac{1}{5000}$  el plano de un terreno, deduciéndolo de los tres pares de fotografías obtenidas desde los extremos de una base de 321 m. de

longitud, cuyo extremo izquierdo tiene una altitud de 1.150 m. Después de medidas en el estereocomparador las magnitudes  $x$ ,  $y$  y  $\pi$  para cada uno de los puntos del terreno que en él elijamos, hay que determinar con el Estereógrafo la posición planimétrica y la ordenada de cada uno de estos puntos, empezando, por ejemplo, por los que se obtienen con el par de placas normales. Para ello se fija la corredera que lleva el eje  $O'$  en su posición central y la escala  $e_1e_1$  a la distancia  $\frac{h \times 321}{5000}$  m. de este eje, donde  $h$  tiene el valor 10, que es el mayor de los valores 5, 10, 20 y 40 que habíamos fijado para este factor, que hace que la distancia  $\frac{h \times 321}{5000}$  m. sea menor que la longitud utilizable del tablero, que es de 0,76 m. Claro es que entonces habremos de tomar para escala  $e_1e_1$  la que tiene como factor de amplificación  $2 \times 10$ ; y como con ella sólo se llega a paralajes de 0,025 m., colocaremos a mitad de distancia del eje  $O'$  la escala cuyo factor de amplificación es  $2 \times 5$  para poder trabajar con paralajes hasta de 0,050 m., que es lo corriente tratándose de bases grandes. Hecho esto, facilísimo es ya determinar la posición planimétrica y la ordenada de cada uno de los puntos, para los cuales hemos medido las magnitudes  $x$ ,  $y$  y  $\pi$ . Basta para ello colocar la regla  $N(1)$  de modo que marque en la escala  $e_1e_1$  (o en la  $e_2e_2$  si el valor de la paralaje es mayor de 0,025 m.) el valor de la paralaje  $\pi$  correspondiente; después se mueve el gramil  $PQ$  hasta que el trazo  $t$ , que lleva grabado a la distancia  $2f + s$  del origen  $u$ , se coloque sobre la regla  $N$ , y se lleva la regla  $M$  hasta que señale el valor correspondiente de  $x$  en la escala  $ee$ . Entonces el punto de encuentro de los bordes inferior de  $P$  y derecho de  $M$  marca la posición planimétrica del punto considerado, y su ordenada  $\gamma$  correspondiente, es decir, la diferencia entre su altitud y la del extremo izquierdo de la base, se lee directamente en la graduación  $pp$  por su encuentro con la regla  $M$  cuando, sin tocar el gramil  $PQ$ , se lleva esta regla a que marque en la escala  $e'e'$  el valor de  $y$  relativo al punto considerado. Esa ordenada  $\gamma$  será positiva o negativa, según que el valor de  $y$ , que ha servido para deducirla, sea mayor o menor que el que corresponde al punto central de la placa de la izquierda. Repitiendo estas operaciones para los demás puntos y añadiendo a todas estas ordenadas la altitud

(1) Al hablar de las reglas  $M$  y  $N$  nos referimos siempre al borde derecho de la primera y al izquierdo de la segunda, que son los que pasan por los ejes  $O$  y  $O'$ , respectivamente.

1.150 m. de la estación de la izquierda, habremos obtenido por puntos el plano de la zona de terreno abarcada por el par de placas normales.

Para obtener el plano de la zona que se deduce del par de placas desviadas a la izquierda, se empieza por fijar la corredera que lleva el eje  $O'$  a una distancia de su posición central igual a  $\frac{1}{2} \times \frac{321}{5000}$  metros, contada esta distancia hacia el borde del tablero. Después se colocan las mismas escalas  $e_1e_1$  y  $e_2e_2$  del caso anterior a las distancias, ya calculadas para ese caso,  $\frac{10 \times 321}{5000}$  m. y  $\frac{1}{2} \times \frac{10 \times 321}{5000}$  m. del eje  $O'$  en su nueva posición, y la reglilla que lleva la numeración de la escala  $qq$  se sujeta a la regla  $P$  de modo que resulte esa numeración en sentido ascendente leyendo de izquierda a derecha. Las operaciones que entonces hay que ejecutar para situar cada punto son casi las mismas que en el caso de placas normales. Se coloca la regla  $N$  de modo que marque en la escala  $e_1e_1$  (o en la  $e_2e_2$  si en la  $e_1e_1$  no es posible) el valor de la paralaje  $\pi$  correspondiente al punto de que se trate, y se lleva el gramil  $PQ$  a la posición en que la regla  $N$  señale en la graduación  $qq$  el valor de  $x$  obtenido en el estereocomparador para dicho punto. Basta entonces colocar la regla  $M$  de modo que marque este mismo valor de  $x$  en la escala  $ee$ , para que su punto de encuentro con el borde inferior de la regla  $P$  nos dé la posición planimétrica del punto considerado, cuya ordenada correspondiente es la señalada por la regla  $M$  en la graduación  $pp$  cuando esa regla se coloca de modo que marque en la escala  $e'e'$  el valor correspondiente de  $y$ . El signo de esta ordenada, a la cual hay que añadir el valor de la altitud del extremo izquierdo de la base, se obtiene por la misma consideración que en el caso de placas normales.

La posición planimétrica y la ordenada de los puntos deducidos del par de placas desviadas a la derecha, se obtienen exactamente lo mismo que las de los puntos deducidos de las placas desviadas a la izquierda, con la única diferencia de que la corredera que lleva el eje  $O'$  hay que fijarla a la misma distancia  $\frac{1}{2} \times \frac{321}{5000}$  m. de su posición central que en el caso anterior, pero contada esta distancia hacia el centro del tablero, desplazándose, por consiguiente, las escalas  $e_1e_1$  y  $e_2e_2$  en el mismo sentido la misma magnitud, y que la reglilla que lleva la numeración de la escala  $qq$  se coloca de modo que esa numeración resulte en sentido descendente al leer de izquierda a derecha.

Una vez obtenidas del modo que acabamos de indicar las posiciones planimétricas y las altitudes de todos los puntos del terreno que se considere necesario, se dibujan los accidentes topográficos y las curvas de nivel del mismo de igual modo que se hace en los planos obtenidos taquimétricamente, con la enorme ventaja de substituirse los croquis más o menos detallados que hay que tomar en el campo cuando se trabaja con el taquímetro, por la visión estereoscópica del terreno que proporcionan en todo momento las fotografías obtenidas.

Creemos inútil detenernos a exponer detalladamente la justificación teórica del manejo de este aparato, dada la facilidad con que se deduce de la simple consideración de los triángulos semejantes que forman las reglas  $P$ ,  $M$  y  $N$ , las escalas  $ee$ ,  $e'e'$  y  $e_1e_1$ , y las paralelas a la guía  $G$  trazadas por los puntos  $O$  y  $O'$ .

#### IV.

##### RESULTADOS OBTENIDOS CON EL ESTEREOGRAFO.

A pesar del corto tiempo transcurrido desde que fué ideado y construido este aparato, ha sido ya empleado en diversos trabajos de levantamiento de planos por el método estereofotográfico, entre los cuales merecen especial mención, por su considerable importancia, los realizados por el Instituto Geográfico y Estadístico en el macizo más elevado de la Sierra de Guadarrama, obteniéndose en todos ellos excelentes resultados, tanto por la exactitud de las construcciones como por la facilidad y rapidez con que éstas se ejecutan. Para dar idea de esta última basta decir que el número de puntos construídos por hora, es decir, el número de puntos cuyas posiciones planimétricas y altitudes se determinan en una hora, es de unos 80 a 100, mientras que con el tablero Pulfrich difícilmente pueden construirse más de 15 o 20 en el mismo espacio de tiempo. Y por lo que se refiere a la exactitud, los numerosos ensayos realizados con el Estereógrafo, y cuyos resultados han sido cuidadosamente comprobados por el cálculo, demuestran que el error cometido al determinar con este aparato la posición planimétrica de un punto es inferior en las condiciones ordinarias a un cuarto de milímetro, siendo menor aún el error que se comete en la determinación de su altitud (1), al paso que los errores

(1) Estos errores hay que multiplicarlos por la escala a que se construye el plano para tener los errores que corresponden a éstos en el terreno.

cometidos con el tablero Pulfrich en las mismas condiciones suelen ser doble de los que acabamos de indicar.

Creemos, pues, que son considerables las ventajas que el nuevo aparato presenta sobre el mencionado tablero Pulfrich, único de que hasta ahora se disponía para substituir al Estereoautógrafo, y esperamos que su empleo habrá de contribuir eficazmente a extender cada vez más el uso del método estereofotográfico de levantamiento de planos, que tan grandes ventajas presenta, en las regiones montañosas sobre todo, tanto para los trabajos de carácter geográfico como para los que son preliminar indispensable de la mayor parte de las obras de Ingeniería (1).

---

(1) La patente del Estereógrafo ha sido adquirida con posterioridad a la presentación de esta Nota por la Sociedad Estereográfica Española (S. A.), constituida en Madrid hace algunos meses y cuyo objeto es el levantamiento de toda clase de planos topográficos empleando los modernos procedimientos de la Fotogrametría.



SOBRE LOS PROGRESOS  
DE LA  
FOTOGRAMETRÍA EN ESPAÑA

POR

D. JOSÉ MARÍA TORROJA

INGENIERO DE CAMINOS Y GEÓGRAFO

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

No es ésta la primera vez que me permito molestar la atención del sabio auditorio congregado en vuestras periódicas reuniones; hícelo ya en los Congresos de Zaragoza y Granada. Entonces hube de limitarme a exponer algunas disquisiciones teóricas sobre estos asuntos, y a clamar una vez más por que se les dedicara en nuestra Patria la atención que en países más adelantados no se les regatea. Hoy vengo a daros cuenta de cómo mis votos de entonces se van ya cumpliendo, pues los principales Centros del Estado que a trabajos topográficos se dedican han adoptado el método fotográfico estereoscópico de levantamiento de planos, con mayor o menor amplitud.

I.

ENSAYO REALIZADO POR EL INSTITUTO GEOGRÁFICO.

Acordada por la Dirección general del Instituto Geográfico y Estadístico, con fecha 20 de Noviembre de 1913, la procedencia de ensayar para sus servicios este método, de conformidad con la propuesta hecha en 1.º de Mayo de 1913 por el que suscribe, fuimos encargados de dirigir en el Laboratorio de Automática que rige nuestro

ilustre jefe, Excmo. Sr. D. Leonardo Torres y Quevedo, la construcción de un fototaquímetro con todos sus accesorios.

Posteriormente, en 5 de Abril de 1914, se constituyó en el Centro primeramente citado una brigada para realizar el ensayo en la vertiente SE. de la sierra de Guadarrama y se nos confió su dirección.

Del resultado obtenido en todos estos trabajos nos proponemos dar breve cuenta en esta ocasión, por creer pueden tener cierto interés, especialmente por la circunstancia de ser los primeros en su género que se han realizado en toda la Europa occidental.

Lo reciente de la fecha en que el ilustre capitán del ejército austriaco, Eduardo Von Orel, elevó el método fotoestereoscópico al puesto preeminente que hoy ocupa, gracias a la invención de su maravilloso Estereoautógrafo, y las condiciones especiales de exactitud que exigen los aparatos de campo de este método, han hecho que sólo la casa C. Zeiss, de Jena, los construya comercialmente hasta la fecha. Pero estos modelos alcanzan un precio que difícilmente hubiera podido el Instituto segregarse de su mezquino presupuesto ordinario de trabajos y material.

De no adquirirlos en la citada fábrica, sólo un Centro oficial hay en España que cuenta con medios adecuados para construir aparatos análogos a aquéllos: el Laboratorio de Automática. Por eso fué digno de alta estima por parte del Instituto el ofrecimiento del Sr. Torres Quevedo de poner el Centro que dirige a disposición de aquél, para la construcción de los que fueran menester.

Dificultad grande y responsabilidad no menor tenía la misión que en este caso se nos confiaba. Teníamos que proyectar detalladamente un aparato complicado sin experiencia alguna en este género de trabajos; y los errores que a nuestra previsión escaparan, por nosotros mismos habían de ser purgados al manejar aquél en el campo.

No hemos de describir aquí nuestro fototaquímetro, ya que figura en la exposición de material científico de este Congreso.

Pero sí creemos útil decir algo acerca del resultado que hemos obtenido con él en las dos campañas que llevamos realizadas.

Vana hubiera sido la pretensión de que este aparato, proyectado y construido por quienes por vez primera se ocupaban en semejante género de trabajos, pudiera competir con los que salen de fábricas aleccionadas por larga experiencia. Había de tener defectos, y no se libró de ellos. Pero estos defectos no fueron en ningún orden esenciales, ni le privaron de desempeñar satisfactoriamente su cometido en el campo.

## II.

## DESCRIPCIÓN DE LA ZONA DEL ENSAYO.

El resultado que se obtenga del ensayo de cualquier método de levantamiento de planos depende en gran parte, como puede fácilmente comprenderse, del terreno elegido para efectuarlo. Por eso la zona elegida para el ensayo que, por encargo del Instituto Geográfico realizamos, fué, como no podía por menos, terreno de sierra. La fotogrametría que podemos llamar terrestre, en contraposición con la aérea, no puede ni podrá nunca aplicarse ventajosamente a terrenos llanos, salvo casos muy especiales en que quede asegurada una buena visibilidad desde las estaciones.

Entre los terrenos quebrados hay notables diferencias de rendimiento, según su configuración especial. Para un trabajo de ensayo, como el nuestro, había que elegir una zona que comprendiera la mayor variedad posible de condiciones, y a este fin se eligieron los términos de San Lorenzo, Guadarrama, Los Molinos y Collado Mediano, en la provincia de Madrid.

Analicemos las características principales de cada una de sus partes, que pueden verse en el adjunto plano.

El término de San Lorenzo ofrece el caso ideal: el de una ladera muy inclinada, sin barrancos profundos y tortuosos, dispuesta en forma de anfiteatro y dominada por una elevación de altura conveniente. Es la zona obtenida desde la base núm. 1.

Ventajosa, igualmente, aunque no en tan alto grado, es la disposición del anfiteatro que se extiende entre Jarahonda por un lado y por otro la estribación de Cabeza Lijar, que muere junto a San Pantaleón; el radio excesivo de este anfiteatro hace que no se pueda dominar cada una de sus partes desde la opuesta, y su centro, única zona en que pueden situarse las bases fotográficas, está poco elevada para dominar la parte inferior de aquél; a las bases 13, 14, 15, 10 y parte de la 9, corresponde este trozo del plano, que abarca los términos de Los Molinos y Collado Mediano, y algo del de Guadarrama.

El resto del término últimamente citado completa el área del ensayo y forma su parte verdaderamente difícil. El dislocado conjunto de cerros caprichosos y profundos y tortuosos barrancos que del modo más irregular se mezclan, constituye un notable ejemplo de lo que pudiéran-

mos llamar terreno inverosímil. Las 3.000 hectáreas que aproximadamente comprende están, además, cubiertas de pinares bastante espesos, que constituyen una nueva dificultad.

Las laderas del Risco de Benito, por un lado, y las de Cabeza Lijar, por otro, limitan esta zona, enlazándose por su parte más elevada; pero otras lomas intermedias, de altura considerable, impiden que desde algún punto de una de aquéllas pueda dominarse la otra. La serie de barrancos que corren de Oeste a Este son profundos e irregulares, y los escasos puntos que pudieran, en parte, dominarlos desde su origen, no pueden utilizarse para la elección de bases por los espesos pinares que los cubren. Tampoco pueden verse desde aguas abajo por el descenso del terreno por esta parte. Toda solución general es imposible para esta zona, y ha sido preciso descomponerla, para su representación, en un mosaico tan complicado como el que en el plano puede verse. Las zonas elevadas se han fotografiado a gran distancia desde el llano, y las bajas, fragmentariamente, desde las escasas claras que el bosque presenta, y aun así han quedado invisibles los fondos de los dos barrancos más profundos.

Aún deben considerarse otros dos casos en el adjunto plano. La parte más elevada del Risco de Benito, gran extensión de poca pendiente que no ha podido ser representada por carecer en absoluto de punto de vista favorable, y la ladera Este del mismo macizo, a cuyo pie se extiende una llanura dilatada, por completo cubierta de espeso arbolado, entre el cual es sumamente difícil encontrar una clara suficientemente amplia para situar en ella una base, sin que los árboles que ocupan los primeros términos lleguen a ocultar la falda de aquél. Es éste último un caso que con frecuencia se presenta en los bordes de los terrenos quebrados de ambas Castillas.

### III.

#### PLAN GENERAL ADOPTADO PARA LOS TRABAJOS.

El objeto principal que en este ensayo nos propusimos fué el determinar el máximo rendimiento que en cada caso podía obtenerse del método y, por ende, nos esforzamos en reducir todo lo posible el número de vértices de la triangulación y el de bases fotográficas.

Limitamos aquélla, como en el adjunto plano puede verse, a siete

triángulos con ocho vértices, aprovechando los tres únicos geodésicos, Cabeza Lijar, San Pantaleón y Jarahonda, cuyas señales se conservan en la zona. Los lados de aquéllos oscilan entre 4 y 12 kilómetros, resultando así una triangulación análoga a la de tercer orden.

La distribución de las bases fotográficas hubo de desarrollarse con arreglo a dos planes distintos. Primeramente intentamos seguir al pie de la letra las enseñanzas adquiridas en los trabajos que con las brigadas del Instituto Geográfico Militar austriaco y de la sociedad «Stereographic», de Viena, habíamos realizado en los Alpes del Tirol y Estiria; elegíanse allí las bases contando con un alcance útil que podía llegar a 10 y hasta 15 km. Así pensamos repartir el área de nuestro trabajo, salvo las hondonadas de Guadarrama, en cinco fotografías. La núm. 1, que nos daría el anfiteatro de San Lorenzo; las 3 y 4 que, con orientaciones análogas y bases de muy diferente longitud, nos darían las zonas próximas y remotas, respectivamente, del cordón de montañas que ante ellas se elevan; la 8 que, situada en dirección normal a éstas, llenaría algunos claros que ellas dejaran, y otra que, desde San Pantaleón, dominaría Jarahonda y los valles que separan este macizo del de Peñota. Pero este plan hubo de ser pronto abandonado.

Del examen de las fotografías obtenidas dedujimos provechosas e impensadas enseñanzas. El paisaje de alta montaña (2 a 4000 m. de altitud) que en los macizos del Ortler y Dachstein se contemplan, están compuestos casi exclusivamente por fuertes contrastes entre el negro de las peñas salientes y el blanco de la nieve que entre ellas se acumula; los duros contornos que separan aquéllos de ésta se acusan perfectamente a las distancias arriba indicadas. Pero este caso es absolutamente distinto del de nuestro trabajo, en que los tonos oscuros del arbolado, de las peñas y de la tierra se funden en un solo color a distancias mucho más reducidas.

Todas estas circunstancias nos obligaron a prescindir de las bases 4 y 8, que resultaron poco menos que inútiles por falta de detalle en las fotografías, y adoptar un nuevo plan de trabajo, limitando el alcance útil de las vistas a la mitad, próximamente, del empleado por las austriacos. Mejor que con una detallada explicación puede verse en el plano la distribución de bases.

## IV.

## RESULTADOS OBTENIDOS EN LOS TRABAJOS Y ENSEÑANZAS QUE DE ELLOS SE DERIVAN.

Consignadas quedan en el párrafo anterior y dibujadas en el plano las áreas dominadas por cada una de las bases fotográficas; también pueden verse en éste las zonas intermedias que, por los motivos arriba expresados, han tenido que dejarse sin representación. La relación entre éstas y aquéllas es escasa; es decir, que el plano ha podido construirse en su casi totalidad sólo con las doce fotografías números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14 y 15.

El área dibujada comprende unas 8.000 hectáreas. Resulta, pues, un rendimiento medio de 666 hectáreas por base. El máximo corresponde a la base 9, que dió 1.313; a ésta siguen la 15 con 1.260, la 3 con 1.237 y la 4 con 927.

El alcance máximo utilizado fué de 9 km. en la base 9, siguen la 5 con 7,5 y la 1 con 6,5; el alcance medio fué de 5,5.

Hasta ahora nos hemos referido exclusivamente a los trabajos de campo; veamos lo que atañe a los de gabinete.

La observación de las placas en el Estereocomparador Pulfrich ha demostrado una vez más la perfección de los aparatos que salen de los talleres de Zeiss.

La construcción de puntos, después de algunas placas normales que fueron calculadas analíticamente con auxilio de una Brunsviga, se hizo gráficamente con el Tablero de Pulfrich, construido en el Laboratorio de Automática. Este tablero dió buen resultado, lo mismo en exactitud que en rapidez, para las placas normales. No fué así para las oblicuas, por lo complicado de las construcciones a que este caso da lugar; el trabajo resultaba muy lento y la exactitud disminuía.

Fué preciso acudir al *Estereógrafo*, aparato ideado por el Ingeniero de Minas D. Antonio Torroja, en cuya descripción no entramos por ser ésta objeto de una Nota presentada por el inventor a este Congreso.

El *Estereógrafo* dió excelente resultado; es tres veces más rápido que el Tablero de Pulfrich, y reduce los errores gráficos extraordinariamente; este aparato fué el que hizo posible la realización del trabajo de gabinete en condiciones aceptables.

Los trabajos de campo de este ensayo duraron setenta y cinco días,

que pueden suponerse repartidos por partes iguales entre la triangulación y la obtención de bases fotográficas. El rendimiento medio, contando todo el trabajo, fué de más de 3.000 hectáreas al mes para la brigada compuesta de un ingeniero y un topógrafo; este rendimiento puede aumentar, seguramente, en terrenos menos irregulares que el término de Guadarrama, ya que de las doce bases de que nuestro ensayo consta, seis (las 2, 5, 6, 7, 9 y 11) se dedicaron casi exclusivamente a las 3.000 hectáreas de aquella zona, dando un rendimiento medio de 500, mientras que las seis bases restantes (1, 3, 10, 13, 14 y 15) abarcaron 5.000 hectáreas, con promedio de 833.

El coste total del ensayo arrojó un precio por hectárea inferior en un 40 por 100 al de los métodos antiguos.

Y la simple inspección del plano demuestra que el detalle y fidelidad de representación del terreno que el método fotográfico estereoscópico permite alcanzar es muy superior a los obtenidos con éstos.

El ensayo de que acabamos de dar cuenta mereció la aprobación del Consejo del Servicio Geográfico y, en su consecuencia, propuso éste a la Dirección, y la Dirección ordenó, que el nuevo método se empleara, en lo sucesivo, normalmente en los casos que a ello se prestaran.

En la pasada campaña se ha aplicado en la misma Sierra a zonas cuya nivelación no había sido aún realizada por el Instituto. Y en lo sucesivo ha de seguir la Fotogrametría alternando con los métodos no fotográficos.

## V.

### TRABAJOS REALIZADOS Y PROYECTADOS EN OTROS CENTROS OFICIALES.

Siguiendo el orden cronológico que nos ha llevado a hablar en primer término de los trabajos del Instituto Geográfico, cúmplenos citar ahora los de la Brigada topográfica de Ingenieros militares.

Fueron iniciados los trabajos fotogramétricos en ésta, por el hoy General D. Rafael Peralta, en la época en que dirigía aquélla. Pero entonces la fotogrametría estereoscópica no existía. El verano último fué ésta ensayada en el Pirineo por iniciativa del actual jefe de la Brigada, el Teniente Coronel D. Arturo Vallhonrat. Posee ésta un fototaquímetro Salmoraghi, reformado en el Laboratorio del Sr. Torres Quevedo para adaptarlo a la estereoscopia. Ha encargado un estereocomparador Zeiss, que se halla detenido en su viaje con motivo de la guerra, y

proyecta adquirir un fototaquímetro de nuestro modelo y hacer también, en fecha próxima, algunos ensayos de fotogrametría aérea.

La Dirección General de Obras Públicas, por iniciativa del Exce-lentísimo Sr. D. Abilio Calderón, que hoy la desempeña, acordó la adopción del método estereofotográfico para sus trabajos y encargó dos fototaquímetros de nuestro modelo—que se están terminando en el Laboratorio de Automática—y a la casa Zeiss un estereoautógrafo Orel, modelo 1915, que será—cuando la guerra actual permita su tránsito—el primero de la Europa occidental.

Finalmente, en 15 de Mayo del corriente año, decidió el Ministerio correspondiente que el Depósito de la Guerra ensayara también el nuevo método y adquiriera un fototaquímetro que tenía en construcción, cuando le sorprendió la muerte, el Teniente Coronel de Estado Mayor y Profesor de Topografía en la Escuela del Cuerpo, D. Alejandro Mas y Zaldúa, campeón infatigable de los métodos fotográficos, que con nosotros había estudiado en Austria y sobre los que publicó excelentes obras.

He aquí lo que en el terreno que estudiamos han realizado hasta la fecha los diversos Centros del Estado que se dedican a trabajos topográficos.

Justo es consignar aquí, por la relación estrecha que con la fotogrametría propiamente dicha guarda, la idea del ilustrado *reporter* fotográfico D. Leopoldo Alonso, de hacer una colección de itinerarios fotográficos para aviadores. Serían éstos, constituidos por series de vistas obtenidas desde aeroplanos y completadas con algunos datos especiales, documentos de suma utilidad para los aviadores que hubieran de recorrer los trayectos más frecuentados, y el ensayo que de estos trabajos se han realizado hacen concebir halagüeñas esperanzas acerca de su porvenir.

He aquí el estado actual de la fotogrametría en España. Después de larga inercia, fué ésta vencida, y pueden hoy concebirse esperanzas fundadas de volver a tiempos como aquéllos en que el General Terrero y la Academia de Ciencias de Madrid eran en Europa los principales impulsores del método fotográfico, del cual puede asegurarse que los inestimables servicios que hasta la fecha ha prestado a las Ciencias y a las Artes son nada comparados con los que ha de dar en lo por venir.

NOTA. Al entrar en prensa este trabajo podemos dar cuenta de dos nuevos avances que la Fotogrametría ha hecho en España.

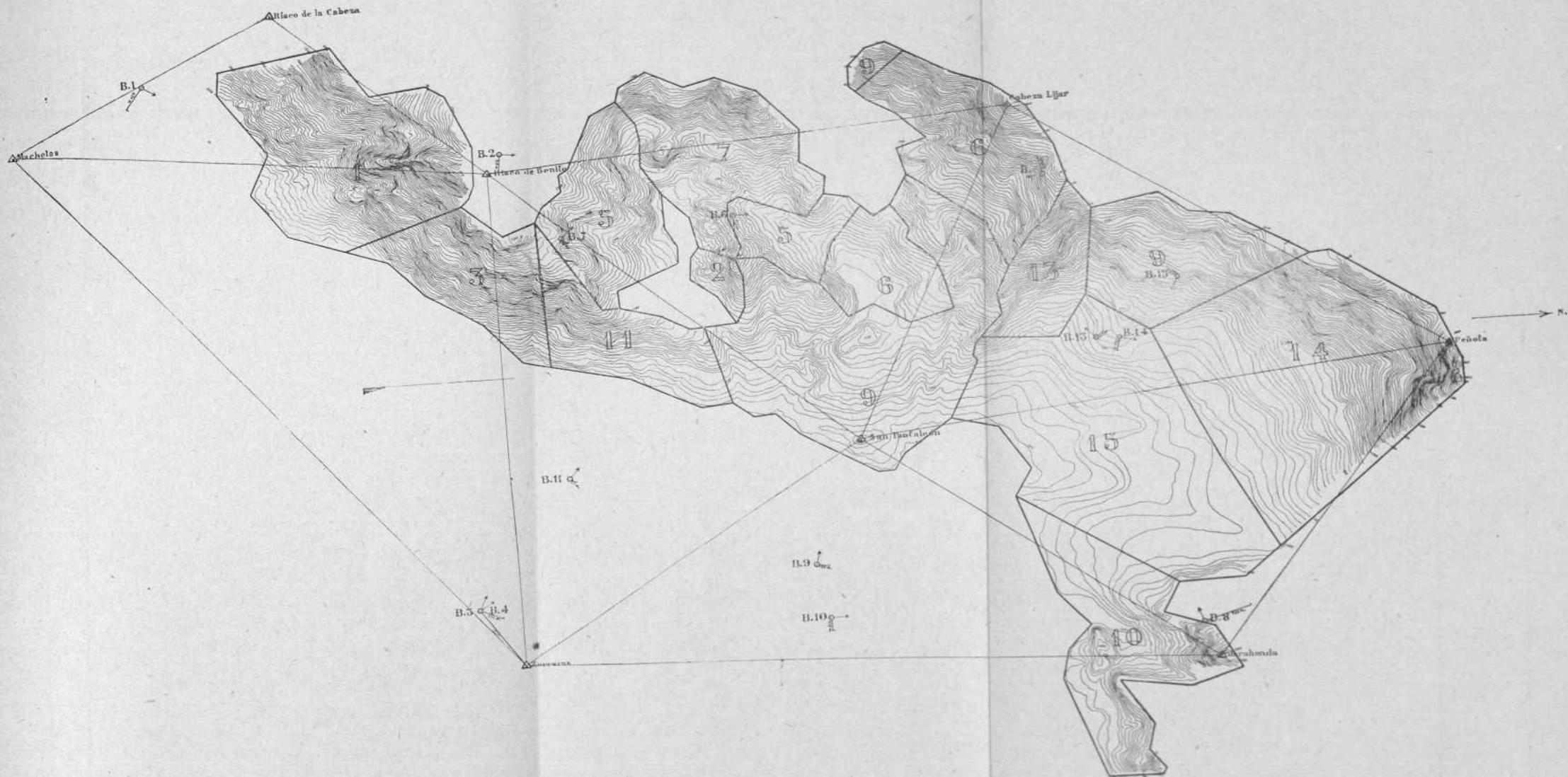
El inteligente Capitán de Estado Mayor, D. José María Aymat Mareca, está reali-

zando interesantes ensayos en el Aerodromo de Cuatro Vientos sobre fotogrametría desde aeroplanos.

Y en Madrid se ha constituido una Sociedad anónima titulada Estereográfica Española, que se dedica al levantamiento de planos para el Estado y particulares, empleando el método fotográfico estereoscópico, habiendo realizado hasta la fecha numerosos trabajos, entre los que citaremos el plano (escala  $\frac{1}{250}$ ) del emplazamiento de la presa del pantano del Príncipe Alfonso, que en Camporredondo (Palencia) construye la Jefatura del Canal de Castilla; el plano general (escala de  $\frac{1}{5000}$ ), y dos de detalle (escala de  $\frac{1}{250}$ ) del pantano del río Águeda, que para el riego de la vega de Ciudad Rodrigo está estudiando la División Hidráulica del Duero, y los planos de emplazamiento de presa y casa de máquinas (escala  $\frac{1}{500}$ ), y zona del canal de desagüe (escala de  $\frac{1}{1000}$ ) del salto de Dos Aguas, en la provincia de Valencia, cuya concesión posee la Sociedad Hidroeléctrica Española.

---





Plano del ensayo del método Fotográfico estereoscópico, efectuado por el autor en el Instituto Geográfico y Estadístico. Verano de 1914.

Ejemplo de trabajo geográfico en escala pequeña:  $1/25000$ .

(La reducción está aproximadamente a  $1/50000$ ).



SOCIEDAD HIDROELECTRICA ESPAÑOLA (S.A.)

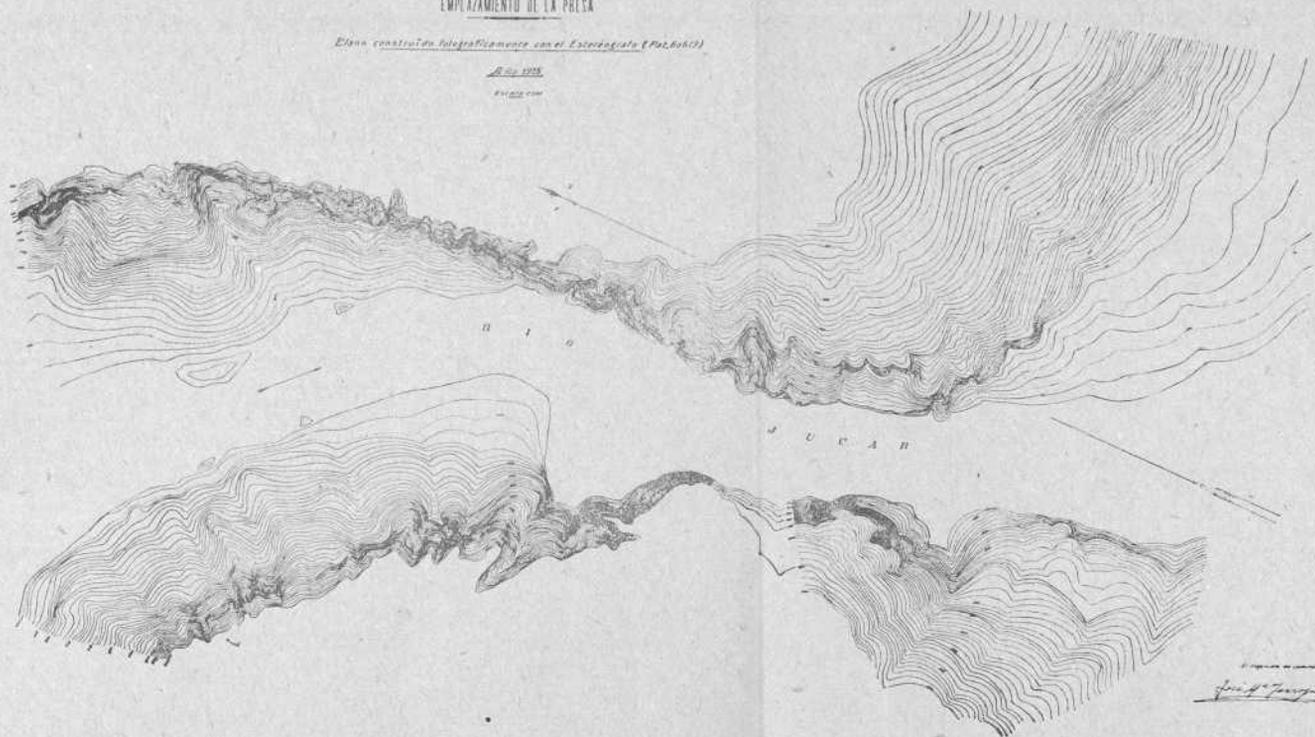
SALTO DE DOS AGUAS

EMPLAZAMIENTO DE LA PRESA

*El plano construido fotogramétricamente con el Estereogigrafo (Pat. 86410)*

10 de 1925

ESTEREOGRAMA



Ejemplo de trabajo de detalle en gran escala, obtenido de las fotografías adjuntas.

(La reducción está en escala de  $1/2500$ ).



Progresos de la Fotogrametría en España.



*Fotografía n.º 1.*—SALTO DE DOS AGUAS: Emplazamiento de la presa visto desde aguas arriba.



*Fotografía n.º 2.*—SALTO DE DOS AGUAS: Emplazamiento de la presa visto desde aguas abajo.



# CÍRCULOS CALCULADORES DEL OFICIAL DE INFANTERÍA

POR

D. SIXTO CAMARA TECEDOR

CAPITÁN DE INFANTERÍA

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

Uno de los problemas fundamentales de la enseñanza militar, es el relativo a la educación del golpe de vista en las situaciones imprevistas, con objeto de conseguir el máximo acierto en las resoluciones tomadas por los jefes de tropas. Concretándonos a un caso sencillo, de los múltiples que pueden embargar la atención del oficial de Infantería, quizá sea de primera importancia la educación relativa a la dirección de fuegos colectivos de fusil.

Es evidente, a no dudarlo, que la resolución exacta (con la exactitud relativa de estas cosas) de muchos y variados problemas concretos de fuegos colectivos, debe dar orientación y solución más acertada, en los casos imprevistos, que las simples reglas generales, excesivamente vagas e imprecisas casi siempre.

Por esto hemos perseguido la armonización de la teoría, tan reñida con la práctica en las cuestiones de que tratan las siguientes cuartillas, tendiendo a resolver rápida y sencillamente los problemas teóricos de fuegos de fusil.

No vaya a creerse que pretendemos llevar estos cálculos de tiro al campo de batalla. Este aparato que presentamos al juicio de los ilustres congresistas tiene un fin puramente educador, por lo que a la técnica del tiro y dirección de fuegos de fusil se refiere.

El caudal de conocimientos y la experiencia de los efectos teóricos

del fuego, efectos basados en el cálculo de probabilidades, adquiridos en el gabinete, en el polígono y en escuelas prácticas, quedarán en el potencial de las iniciativas del oficial para devolverlos posteriormente con resoluciones sensatas nacidas de la Ciencia.

Los círculos calculadores del oficial de Infantería tienen por objeto el cálculo de los elementos de la trayectoria descrita por la bala P, actualmente reglamentaria en nuestro Ejército.

La facilidad con que se resuelven muy varios problemas de la balística de fusil en tiro rasante, familiariza al oficial con los problemas de tiro colectivo que se presentan en la práctica, en el polígono y en los ejercicios de cuadros para oficiales.

Con él pueden estudiarse, muy sencilla y exactamente, la relación entre el terreno y el haz de trayectorias, determinándose los puntos desde los que puede rasarse una posición, así como la extensión de la parte rasada, y ésta cualquiera que sea el perfil del terreno que ha de recorrer el tirador o tiradores para situarse en el punto de rasancia; siendo la solución de este problema tan sencilla operando sobre un plano como haciéndolo en el campo; da rápida solución a los problemas de tiro indirecto, amplitud de agrupamientos, espacios peligrosos, etc.....; traduce fielmente los resultados experimentales obtenidos por la Comisión mixta de la Escuela Central de Tiro que hizo el estudio de la bala P, pues la graduación de sus escalas se ha hecho partiendo de las tablas de tiro publicadas por Real orden de 24 de Noviembre de 1913 (*C. L.* núm. 222). Aunque hubiéramos podido calcularlas tomando sólo los tres coeficientes balísticos utilizados, hemos preferido (lo que ha simplificado además nuestro trabajo) emplear los resultados de la tabla oficial para que los obtenidos con el aparato coincidan con los oficiales.

### Fundamentos teóricos.

Bien conocida es de los ilustres congresistas la propiedad de ser representables por ábacos de puntos alineados las ecuaciones del tipo

$$f_1(\gamma)\varphi(\alpha) + f_2(\gamma)\psi(\beta) + f_3(\gamma) = 0; \quad [1]$$

en la que  $f_1(\gamma)$ ,  $f_2(\gamma)$ ,  $f_3(\gamma)$ ,  $\varphi(\alpha)$  y  $\psi(\beta)$  son funciones de  $\gamma$  las tres primeras y de  $\alpha$  y  $\beta$  las dos últimas.

Recordaremos que si a  $\gamma$  se le da un valor particular  $\gamma_0$  y designamos  $\varphi(\alpha)$  por  $x$  y  $\psi(\beta)$  por  $y$  se tiene:

$$Ax + By + C = 0, \quad [2]$$

siendo

$$A = f_1(\gamma_0), \quad B = f_2(\gamma_0) \quad \text{y} \quad C = f_3(\gamma_0).$$

Si  $x$  e  $y$  son abscisas (distancias) de los puntos en dos rectas  $\alpha$  y  $\beta$ , la ecuación [2] nos dice que las dos series de puntos son semejantes, pues tienen homólogos sus puntos en el  $\infty$ , o, si se quiere, la razón de segmentos homólogos es

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{A}{B}.$$

En coordenadas plückerianas, las dos series tendrían común el punto límite, y si las abscisas son distancias y las rectas  $\alpha$  y  $\beta$  son paralelas, sería común y homólogo de sí mismo el punto en el  $\infty$  de la recta; luego en ambos casos las series son perspectivas. Es consecuencia también esto último del hecho de ser semejantes las series y paralelas las bases.

Prescindiendo de los casos generales y concretándonos a este último resulta que, dado  $\gamma_0$ , están dadas, sólo con este dato, dos series semejantes sobre las rectas  $\alpha$  y  $\beta$ ; y las rectas que unen las parejas de puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x'_0, y'_0)$ ,  $(x''_0, y''_0)$ ,  $(x'''_0, y'''_0)$  ..... concurren en uno que corresponde al valor  $\gamma_0$  de  $\gamma$ . Y resultará que la recta determinada por este punto,  $\gamma_0$  con el  $x_0$ , cortará a la recta  $\beta$  en el punto  $y_0$ , y si

$$x_0 = \varphi(\alpha_0) \quad \text{e} \quad y_0 = \psi(\beta_0),$$

se tendrá:

$$f_1(\gamma_0)\varphi(\alpha_0) + f_2(\gamma_0)\psi(\beta_0) + f_3(\gamma_0) = 0.$$

Inscribiendo en las rectas  $\alpha$  y  $\beta$ , en lugar de

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \dots, y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$$

los valores

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$$

que hacen

$$x_0 = \varphi(\alpha_0), x_1 = \varphi(\alpha_1), x_2 = \varphi(\alpha_2) \dots, y_0 = \psi(\beta_0), y_1 = \psi(\beta_1), y_2 = \psi(\beta_2) \dots$$

podremos decir que la recta que pasa por el punto  $\gamma_0$  y el  $\beta_0$ , pasa también por el  $\alpha_0$ , de tal modo, que la terna de números  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ , satisface a la ecuación [1].

Cada valor de  $\gamma$  tiene un punto representativo acotado con el número correspondiente, y si hacemos variar a  $\gamma$  en progresión aritmética, por ejemplo, se obtendría una sucesión de puntos que constituirán las divisiones de una escala ( $\gamma$ ). *Base* o *soporte* de esta escala es la curva descrita por el punto  $\gamma$  variable. Análogamente, las rectas  $\alpha$  y  $\beta$  reciben el nombre de *bases* o *soportes* de las escalas ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ).

Elegido un punto de origen sobre  $\alpha$  y otro sobre  $\beta$ , así como los sentidos positivos y los segmentos  $l$  y  $h$  (de módulo 1) en cada uno de ellos, se construye la escala ( $\alpha$ ) con las abscisas  $x_i = l\varphi(\alpha_i)$  y la ( $\beta$ ) con las  $y_j = h\psi(\beta_j)$ , inscribiéndose en estos puntos  $\alpha_i$  en lugar de  $x_i$  y  $\beta_j$  en lugar de  $y_j$ .

Los valores  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  se toman en progresión aritmética.

La construcción de la escala  $\gamma$  se hace, ordinariamente, hallando las ecuaciones paramétricas de la *base* de ( $\gamma$ ) respecto de dos ejes cartesianos, uno la recta  $\alpha$  o la  $\beta$ , y otra la recta determinada por los orígenes de estas dos escalas.

La condición de semejanza de las series y la ecuación [1] proporcionan, después de elementales cálculos fundados en la comparación de triángulos semejantes, las siguientes ecuaciones paramétricas para  $\gamma$ :

$$x = -\frac{lh f_3(\gamma_0)}{h f_1(\gamma_0) + l f_2(\gamma_0)}, \quad y = \frac{lk f_2(\gamma_0)}{h f_1(\gamma_0) + l f_2(\gamma_0)}. \quad [3]$$

El parámetro  $k$  se refiere a la separación entre las rectas  $\alpha$  y  $\beta$  tomada en la dirección de la recta que une los orígenes de ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ).

La eliminación de  $\gamma$  en [3] nos conduciría a la ecuación de la curva descrita por  $\gamma$ .

Los parámetros  $l$ ,  $h$  y  $k$  se utilizan para dar al ábaco las dimensiones convenientes.

#### Casos particulares de [1].

1.º Si  $f_3(\gamma) = 0$ , la [1] es  $f_1(\gamma)\varphi(\alpha) + f_2(\gamma)\psi(\beta) = 0$ , y siendo  $x = 0$  en [3] la línea  $\gamma$  se reduce a la recta que une los orígenes, obteniéndose los ábacos en  $Z$ .

2.º Si  $f_1(\gamma) = 1$  y  $f_2(\gamma) = 1$ , la ecuación [1] es

$$\varphi(x) + \psi(\beta) + f_3(\gamma) = 0,$$

y siendo constante la ordenada  $y$ , la línea  $\gamma$  es paralela a las  $x$  y  $\beta$ .

#### Aplicación a la curva balística.

La ecuación de la trayectoria en el método de Siacci, es:

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{C}{\beta} \frac{x}{2 \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{Au - Av}{Du - Dv} - \mathcal{F}v \right\} \quad [4]$$

siendo  $C$  el coeficiente balístico,  $v$  la velocidad inicial,  $\beta$  el parámetro de curvatura,  $\varphi$  el ángulo de proyección,  $u$  la pseudo-velocidad de Siacci, o sea la velocidad que debiera llevar el proyectil en cada instante para que su proyección sobre la horizontal fuese constantemente igual a la proyección de la velocidad inicial y  $(x, y)$  las coordenadas cartesianas de un punto de la curva referida a dos ejes horizontal y vertical que pasan por el origen en la boca del arma. Las funciones  $A(u)$ ,  $D(u)$  y  $\mathcal{F}(u)$  son

$$D(u) = - \int \frac{u du}{f(u)}, \quad \mathcal{F}(u) = - 2g \int \frac{du}{uf(u)}$$

$$A(u) = - \int \frac{\mathcal{F}(u) u du}{f(u)},$$

en las que  $f(u)$  es la función de la resistencia del aire.

Si en la fórmula [4] tomamos  $x$  como variable independiente y observamos que  $u$  es, al fin, una función de  $x$ , así como  $C$ , y que es  $\beta = 1$ , en el tiro de fusil, por ser  $\varphi < 12^\circ$ , se tendrá:

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x F(x, V)}{2 \cos^2 \varphi}$$

o

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \varphi - \frac{F(x, V)}{2} (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi),$$

y para un valor particular de  $V$ , designando al mismo tiempo por  $\varepsilon$  el ángulo de situación

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \operatorname{tang} \varphi - \frac{F(x)}{2} (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi), \quad [5]$$

que es una ecuación del tipo [1].

Para construir un nomograma de esta fórmula escribiríamos

$$\xi = \frac{hl\lambda}{h + l(1 + \lambda^2)} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{kl(1 + \lambda^2)}{h + l(1 + \lambda^2)},$$

siendo  $\lambda = \operatorname{tang} \varphi$ ,

Siendo la velocidad inicial de la bala P con el cartucho reglamentario de 861 m., y variando el coeficiente balístico, aproximadamente, entre 0,4028 y 0,3247, los valores de  $\frac{F(x)}{2}$  quedan comprendidos entre 0 y 0,1, poco más ó menos, para abscisas comprendidas entre 0 y 2.500 m.; así que el intervalo de variación de la escala  $\frac{F(x)}{2}$  será (0 — 0,1).

La escala  $y = \psi(\beta)$  es ahora la  $y = \operatorname{tang} \varepsilon$ , y como los ángulos de situación  $\varepsilon$  son menores que  $6^\circ$ ,  $\operatorname{tang} \varepsilon$  variará en un intervalo (0 — 0,1) aproximadamente.

Puede tomarse, según esto,  $h = l$  en la construcción del nomograma, y las ecuaciones paramétricas se simplifican en

$$\xi = \frac{h\lambda}{2 + \lambda^2} \quad \eta = \frac{k(1 + \lambda^2)}{2 + \lambda^2}. \quad [6]$$

Eliminando  $\lambda$  resulta para la ecuación del soporte de ( $\varphi$ )

$$\frac{k^2}{h^2} \xi^2 + 2\eta^2 - 3k\eta + k^2 = 0, \quad [7]$$

que representa una elipse por ser el invariante  $-\frac{2k^2}{h^2} < 0$ .

El eje de las  $\eta$  es un diámetro, y su conjugado

$$4\eta - 3k = 0,$$

es paralelo al eje de las  $\xi$  y determina el centro de la curva con el eje  $\eta$ . Las coordenadas de este centro son:

$$\xi = 0 \quad \eta = \frac{3}{4}k.$$

Si los ejes son ortogonales el semieje mayor de la elipse será  $\frac{h}{2\sqrt{2}}$  y el menor  $\frac{k}{4}$ . Para que el rectángulo que contenga el ábaco sea de  $30 \times 10$  cm. es necesario que  $h = 3$  m. y  $k = 0,10$  m., así es que se trata de una elipse muy excéntrica cuyos semiejes son  $\frac{3}{2\sqrt{2}}$  y  $\frac{1}{40}$ . Podrá substituirse sin error apreciable para las aplicaciones la parte útil de esta elipse por una línea recta equidistante de las ( $x$ ) y ( $\varepsilon$ ).

El substituir este arco de elipse por la citada paralela media no equivale a otra cosa que a prescindir en [5] de  $\text{tang}^2 \varphi$  (lo que puede hacerse sin error sensible dada la pequeñez del ángulo  $\varphi$ ) quedando reducida a

$$\text{tang } \varepsilon = \text{tang } \varphi - \frac{Fx}{2},$$

y haciendo

$$\frac{F(x)}{2} = \text{tang } \varphi_x$$

es

$$\text{tang } \varepsilon = \text{tang } \varphi - \text{tang } \varphi_x, \quad [8]$$

fórmula práctica para el cálculo de ordenadas.

La base de  $\varphi$  será, en este caso, la paralela media comprendida entre las bases de  $\varepsilon$  y de  $x$ , resultando que todo punto de esta paralela media es centro de simetría de las bases de  $x$  y  $\varepsilon$ ; de donde se deduce que haciendo girar  $180^\circ$  alrededor de este centro a la escala ( $x$ ), vendrá a superponerse, invertida, sobre la ( $\varepsilon$ ). De aquí que, para un valor de  $\varphi$ , tendremos los valores de  $x$  en coincidencia con los correspondientes de  $\varepsilon$ . Por otra parte, tomando el origen en la escala  $x$ , la línea recta determinada por el punto  $x = 0$  con el  $\varphi$  de la ( $\varphi$ ) debe cortar a  $\varepsilon$  en un punto acotado con el valor de  $\varphi$ . Síguese de esto que si po-

nemos en coincidencia con el  $o$  de  $\varepsilon$  el alcance  $x$  de la trayectoria objeto de nuestra investigación, la división de  $(\varepsilon)$  en coincidencia con el  $o$  de  $(x)$  nos indicará el valor del ángulo de proyección  $\varphi$ , y la división en coincidencia con otra  $x_1$  nos dirá el valor del ángulo de situación en la trayectoria considerada, estando enfrente de cada división de  $(x)$  el valor del ángulo de situación correspondiente a esta abscisa en la trayectoria de alcance  $x$ . De este modo la escala  $(\varepsilon)$  sirve simultáneamente para los ángulos  $\varepsilon$  y los  $\varphi$ . Las abscisas mayores que  $x$  tienen el ángulo de situación negativo.

Moviendo estas dos escalas, como en las reglas de cálculo, obtendremos un nomograma de escalas móviles por el estilo de esta regla. Y si en lugar de conservar recta la regla la transformamos en circular habremos conseguido disminuir el volumen, aprovechar una misma escala para calcular elementos negativos, tan útiles a veces como los positivos, y hasta facilitar el manejo. Esto es lo realizado en nuestro aparato.

La fórmula que da la inclinación en el método de Siacci es

$$\operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{C}{2 \cos^2 \varphi} (\mathcal{F}u - \mathcal{F}v), \quad [9]$$

en la que, haciendo

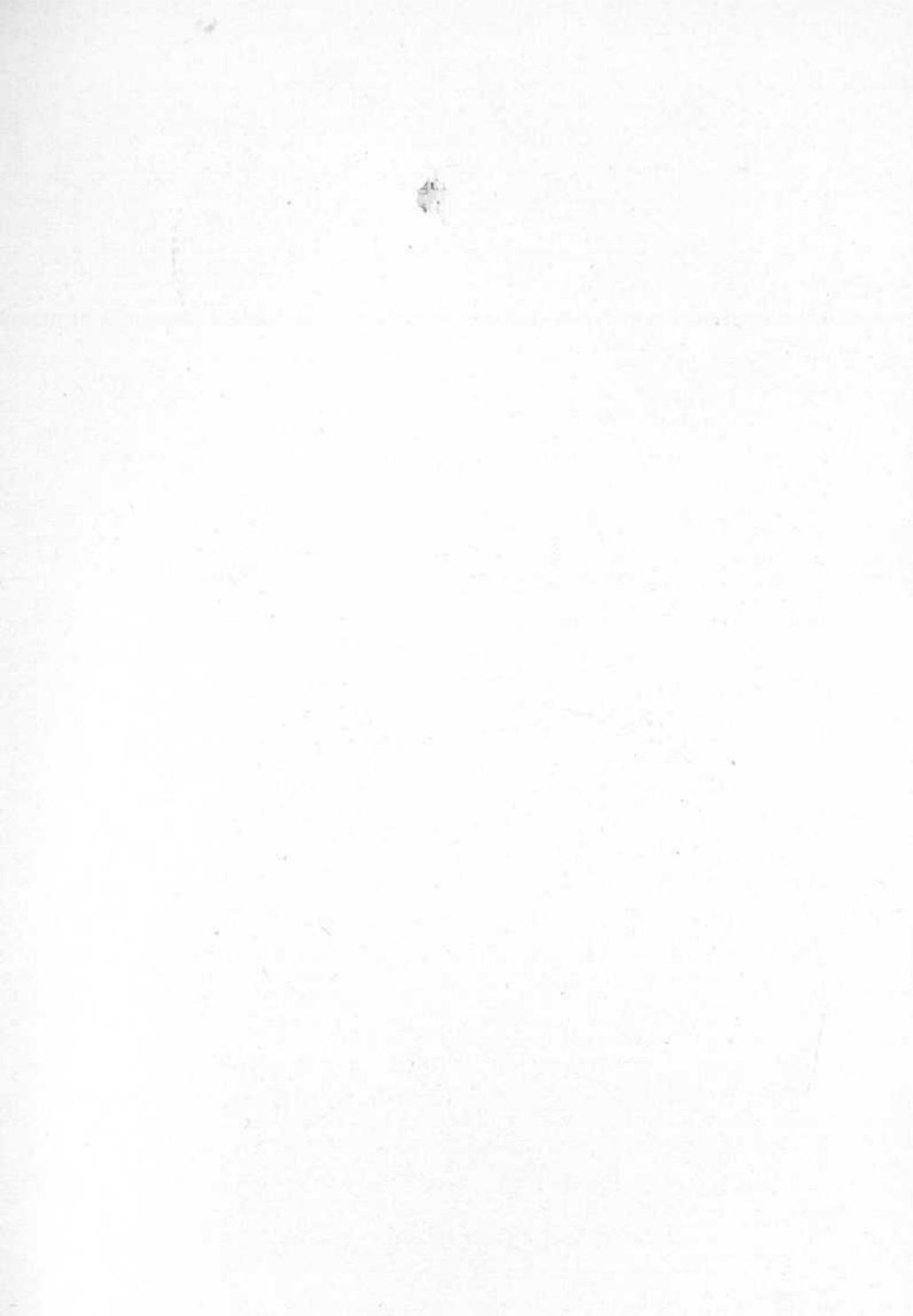
$$\frac{C}{2} (\mathcal{F}u - \mathcal{F}v) = F_1(x)$$

estamos en el mismo caso ya explicado, con la única diferencia de la substitución de  $\varepsilon$  por  $\theta$  y de ser distinta la escala  $(x)$ .

No es necesario, por otra parte, que las escalas  $(x)$  y  $(\theta)$  estén en contacto; pueden estar separadas, conservándose paralelas y móviles si una línea recta perpendicular a ellas nos indica la coincidencia de las divisiones, como se hace en las reglas de cálculo con el cursor.

#### Descripción del aparato (figuras 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup>).

Consta nuestro aparato de dos limbos graduados, contruídos recortando circularmente dos positivas hechas en placas de cristal de  $9 \times 12$ , obtenidas por medio de dos negativas sacadas de otros tantos dibujos nuestros sobre círculos concéntricos de radios comprendidos entre 0,077 y 0,163 m.



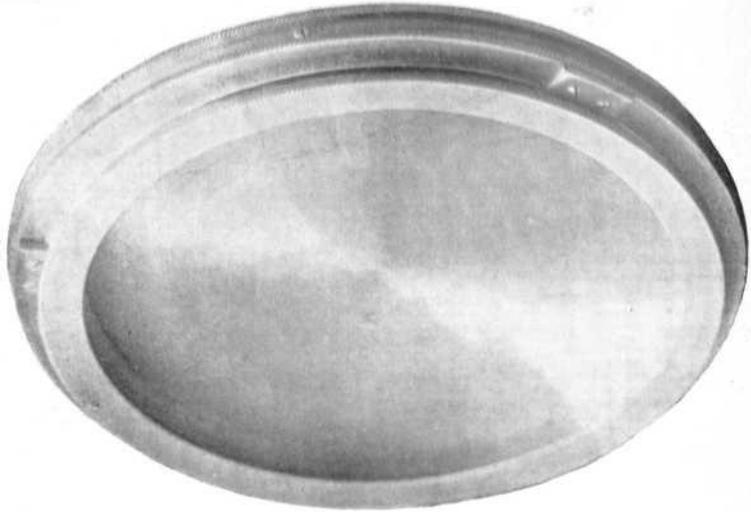


Fig. 3.<sup>a</sup>



Fig. 2.<sup>a</sup>

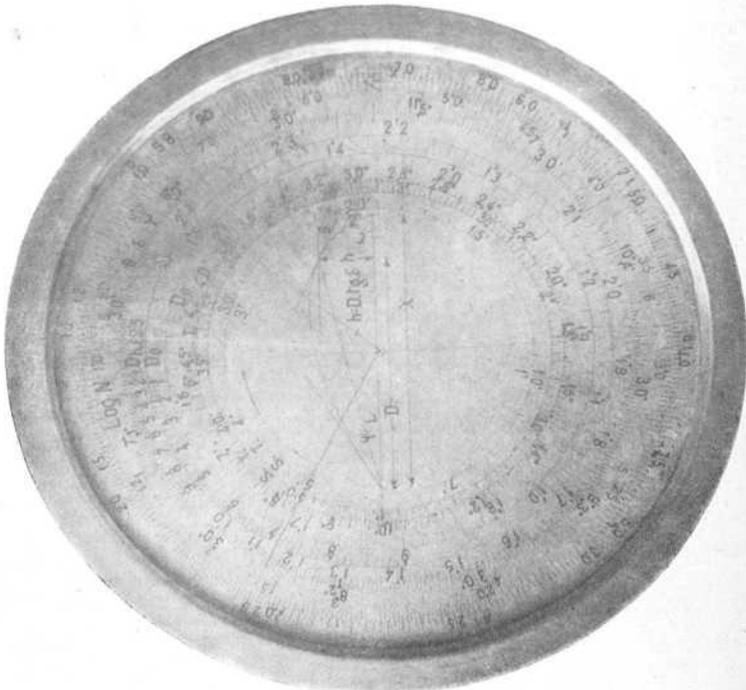


Fig. 1.<sup>a</sup>

Van montados estos limbos exactamente centrados en dos anillos de bronce que giran con rozamiento suave uno sobre otro, y este segundo sobre el borde de un platillo, también de bronce, en el que hay señalado un radio índice (cursor) para facilitar ciertas operaciones.

El limbo superior lleva tres escalas, que designaremos empezando desde el exterior hacia el centro, con los números (1), (2) y (5).

El inferior lleva cinco escalas distribuidas en nueve circunferencias.

*Limbo superior.*—Escala núm. (1). Es de números naturales de 1 a 500, y apreciando a simple vista media división pueden determinarse los números del 0 al 1.000 a partir del 0, extremo del radio rojo.

Escala núm. (2). Es logarítmica como las de las reglas de cálculo, y comprende los números del 10 al 100; dividiendo la numeración por 10 empieza en el 1 y termina en el 10, y multiplicando por 100 empieza en el 100 y termina en el 1.000. Así que, a partir del 1, dando tres vueltas en el sentido de la flecha, está en las mismas condiciones de una regla logarítmica de longitud triple que la de la circunferencia base de la escala y cuya numeración empezase en el 1 y terminase en el 1.000.

En la 1. <sup>a</sup> vuelta del 1 al 2 van las divisiones de 0,01 en 0,01					
—	2	3	—	0,02	0,02
—	3	5	—	0,025	0,025
—	5	10	—	0,05	0,05

En la 2. <sup>a</sup> vuelta del 10 al 20 van las divisiones de 0,1 en 0,1					
—	20	30	—	0,2	0,2
—	30	50	—	0,25	0,25
—	50	100	—	0,50	0,50

En la 3. <sup>a</sup> vuelta del 100 al 200 van las divisiones de 1 en 1					
—	200	300	—	2	2
—	300	500	—	2,5	2,5
—	500	1.000	—	5	5

Escala núm. (5). La circunferencia está dividida en 360 partes iguales que, en lugar de representar grados, expresan minutos (lo mismo que en otras escalas las divisiones representan metros, por ejemplo). Los 360 minutos dan un conjunto de 6° en la primera vuelta, 12° en la segunda, etc. Unida esta escala a la (4), para constituir con ella nomograma, dejan de expresar minutos las divisiones, para representar cada intervalo 6". En virtud de este convenio, cuando hayamos de emplear así la escala (5), unida a la (4), tendremos presente que,

donde dice

$$\begin{array}{rcl}
 10' \text{ leeremos} & 10 \cdot 6'' = 60'' = 1' & \\
 30' & - & 3 \cdot 10 \cdot 6 = & = 3' \\
 1^\circ & - & 1 \cdot 6' = & = 6' \\
 2^\circ & - & 2 \cdot 6' = & = 12'
 \end{array}$$

Así,

$$\begin{array}{rcl}
 4^\circ 10' \text{ serán} & (4 \cdot 6)' + 1' = & = 25' \\
 5^\circ 31' & - & 5^\circ 30' + 1' = (5 \cdot 6)' + 3' + 6'' = 33' 6'' \\
 2^\circ 14' & - & 2^\circ 10' + 4' = (2 \cdot 6)' + 1 + (4 \cdot 6)'' = 13' 24''
 \end{array}$$

*Limbo inferior.*—Escala núm. (3). Es idéntica a la núm. (2); poniendo los ceros en coincidencia coinciden las dos escalas.

Escala núm. (4). A continuación de la (3), y con trazos muy pequeños y bastante espaciados, aparece la (4), que se construye tomando la circunferencia que le sirve de base a partir del radio de origen (véase la flecha del centro) arcos de longitud proporcional a los valores de la función de Siacci:

$$C \left[ \frac{A(u) - A(v)}{D(u) - D(v)} - \mathcal{F}(v) \right],$$

calculados con el primer coeficiente balístico (de 0 a 900 metros),  $C = 0,4028$ , empleado por la Escuela Central de Tiro en la tabla oficial. Llegan las divisiones hasta la núm. 9, abreviatura de 900 metros. Unida esta escala a la (5) del limbo superior con la división de 6 en  $6''$ , como ya se ha indicado, constituyen un nomograma que aprecia  $3''$  en los ángulos unidos a las nueve primeras trayectorias (de 0 a 900 m.).

Escala núm. (6). A partir del rayo origen, las longitudes de los arcos de la circunferencia nos indican los valores de la fórmula anterior de Siacci con otra unidad más pequeña y calculadas estas longitudes con los tres coeficientes balísticos calculados y utilizados por la Escuela de Tiro. Igual que en la regla de cálculo se lee en el extremo de cada arco, no la longitud del arco mismo, sino el valor del argumento  $x$  que ha dado origen a esta longitud. Los números 1, 2, 3, ..., etc., representan en esta escala abscisas y alcances en centenas de metros. No es, pues, otra cosa que un ábaco ó nomograma circular de la repetida fórmula de Siacci.

Escalas (7) y (8). Constituyen una sola, que empieza en el rayo origen y circunferencia 7; da una vuelta y sigue con una segunda

vuelta en la (8), y aún debiera continuar con una tercera vuelta si la claridad nos lo permitiera.

Ambas escalas formadas con igual procedimiento que las anteriores representan la función de Siacci

$$\frac{C}{2} [\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)].$$

Los números 1, 2, 3,....., indican abscisas y alcances en centenas de metros.

Escalas (9), (10), (11) y (12). También constituyen una sola escala de cuatro vueltas, que empieza en la circunferencia 12 y termina en la 9. No es otra cosa que la representación gráfica de los logaritmos de las tangentes de los ángulos comprendidos entre 1' y 45°. Y teniendo en cuenta que en ángulos pequeños los senos y tangentes se confunden prácticamente, podremos considerar también la parte de escala comprendida entre 1' y 5° como representativa de los logaritmos de los senos de estos ángulos. No es otro el motivo de poner las iniciales S y T (de senos y tangentes). Téngase en cuenta que los logaritmos de estos ángulos tienen las siguientes características:

Los acotados en la circunferencia	9	— 1
—	10	— 2
—	11	— 3
—	12	— 4

#### **Clasificación de los problemas que pueden resolverse.**

*Grupo 1.º*—Escalas (1) y (2).

1. Dado un número determinar su logaritmo.
2. Recíproco del anterior.

*Grupo 2.º*—Escalas (2) y (3).

3. Dados dos números hallar su producto.
4. Cociente de dos números.
5. Producto de varios factores.
6. Determinación de terceras y cuartas proporcionales; repartimientos proporcionales; cambios; equivalencias; regla de tres, etc.; medida de distancias por la milésima; velocidades de fuegos; eficacia del tiro; escalas topográficas.

7. Características de agrupamientos.

8. Raíces de ecuaciones exponenciales; cálculo de pérdidas efectivas producidas en una tropa sometida al fuego; cálculo de bajas probables conocido el número de impactos; efecto útil ó número de bajas producidas en la unidad de tiempo; número de cartuchos necesarios para producir a un enemigo un cierto número de bajas; tiempo preciso para producir un cierto número de bajas; velocidad de fuego necesaria para producir un determinado efecto, etc.

*Grupo 3.º*—Escalas (3), (1), (9, 10, 11 y 12).

9. Dada la tangente trigonométrica calcular el ángulo correspondiente.

10. Dado el seno de un ángulo calcular el ángulo correspondiente.

*Recíprocos de los anteriores.*

11. Dado el ángulo determinar el seno.

12. Dado el ángulo determinar la tangente.

*Resolución de triángulos rectángulos.*

13. Dado el ángulo de situación  $B$  y el cateto  $c$  determinar  $a$  y  $b$ , etcétera; aplicaciones a la topografía ligera y a los cálculos de tiro.

14. Dados  $B$  y  $a$  resolver el triángulo.

15. Dados  $b$  y  $c$  calcular  $B$  y  $a$ .

16. Dados  $B$  y  $b$  calcular  $a$  y  $c$ .

*Grupo 4.º*—Escalas [(6)  $\equiv D_{h, \epsilon}$ , (5)  $\equiv \varphi, \epsilon, \theta$ ].

17. Determinación de ángulos de proyección correspondientes a un alcance cualquiera.

18. *Recíproco*.—Dado un ángulo de proyección determinar el alcance correspondiente.

19. Determinar los ángulos de situación  $\epsilon$  correspondientes a los distintos puntos de una trayectoria de alcance dado.

20. Abscisas correspondientes a un ángulo de situación en una trayectoria de alcance dado.

21. Alcance de la trayectoria o trayectorias que pasan por un punto de abscisa, dada con un cierto ángulo de situación también dado.

*Grupo 5.º*—Escalas (6) y (7, 8).

22. Determinar la abscisa del vértice de una trayectoria dada.

23. Determinar el alcance de una trayectoria cuya abscisa del vértice está dada.

*Grupo 6.º*—Escalas (5) y (7, 8).

24. Determinar la inclinación en los distintos puntos de una trayectoria de alcance dado.

25. Dada la inclinación en un punto y el alcance, determinar la abscisa correspondiente.

26. Dada la abscisa y la inclinación en un punto, hallar el alcance de la trayectoria que pasa por este punto. Aplicación al estudio de los fuegos sobre una posición.

27. Dado el alcance, determinar el ángulo de caída.

28. *Recíproco*.—Dado el ángulo de caída, hallar el alcance.

*Grupo 7.º*—*Combinación de los anteriores*.

29. Cálculo de la ordenada correspondiente a una abscisa dada. Aplicaciones. Profundidad sobre el plano de situación del trapecio, equivalente a una formación y altura sobre el plano de frente del rectángulo que la representa para determinar vulnerabilidades.

30. *Recíproco del anterior*.—Determinación de las abscisas correspondientes a una ordenada  $h$  en una trayectoria de alcance  $x$ .

31. Ángulo que forma la línea de situación de un punto de la trayectoria con la tangente a la misma en dicho punto.

32. Estudio de los fuegos rasantes.

33. Estudio del tiro indirecto.

### Manejo del aparato.

**Grupo 1.º**—Escalas (1) y (2).

1. Dado un número determinar su logaritmo.

*Ejemplo 1.º*

$$N = 0,374.$$

Enumerado el número por parejas de dos cifras, leeremos en este caso el número propuesto 37,40. Puesto en coincidencia este número de la escala (2) con el rayo origen negro que pasa por el 10 de la (3), veremos en la (1) el número o división coincidente con dicho rayo origen negro; puesto que el arco de la (1) comprendido entre el rayo rojo (origen del limbo superior) y el negro (origen del limbo inferior) es proporcional a la mantisa del logaritmo pedido. Aquí  $\log. N = \overline{1},573$ .

2.º  $N = 1225$ ; se obtiene:  $\log N = 3,088$ .

2. *Recíproco*.—Dado un logaritmo determinar el número correspondiente.

*Ejemplo:*  $\log N = 2,471$ .

Establecida la coincidencia de la división que en la (1) corresponde al 471 con el rayo origen negro, se leerá a continuación sobre (2) la división coincidente con el mismo rayo negro. Se obtiene  $N = 295$ .

**Grupo 2.º**—Escalas (2) y (3).

3. Dados dos números hallar su producto.

*Ejemplo:*  $N = 25,30, \quad N' = 7,45$ .

Llevando el rayo rojo a coincidir con la división 25,30 de la (3), se lee a continuación, sobre la misma escala (3), la división coincidente con la 74,50 de la (2). Se ve que esta división, de la (3), es la 18,84. El número de cifras enteras del producto se determina sumando las características; y si los dos arcos, representativos de los logaritmos sumados, componen más de una circunferencia, se añade una unidad. Como en el ejemplo anterior, en que las características son 1 y 0, el arco (comprendido entre las divisiones 1 y 7,45) de (2), sumado al (1; 25,30) de (3), da más de una circunferencia, hemos de aumentar 1 a la suma de características. Se obtiene  $25,30 \times 7,45 = 188,4$ .

4. Cociente de dos números.

*Ejemplo 1.º:*  $N = 178,5, \quad N' = 35,20$ .

Puestas en coincidencia la raya negra del platillo con la división 17,85 de (3), y haciendo coincidir con esta división la 35,20 de (2), observaremos que así se resta del arco (10, 17,85) de (3) el arco (10, 35,20) de (2). El arco diferencia es el que tiene por origen el rayo negro (origen del limbo inferior) y por extremo el rayo rojo (origen del superior). En este caso el arco diferencia es negativo, es decir, de sentido contrario a la flecha, por lo que hay que cambiarle en otro de característica positiva, añadiendo y restando al logaritmo que representa dicho arco una unidad positiva (una circunferencia completa); lo cual equivale a tomar el complemento logarítmico, que no es otro que el arco positivo (sentido de la flecha), comprendido entre el mis-

mo rayo negro como origen y el rojo como extremo. La división de la escala (3) en coincidencia con dicho rayo extremo es la 50,75; pero siendo la diferencia de características igual a  $+1$ , y debiendo añadir  $-1$  por resultar negativo el arco diferencia, resultará  $+1 - 1 = 0$ . Siendo 0 la característica del cociente, tendremos:

$$178,50 : 35,20 = 5,075.$$

*Ejemplo 2.º*—Sea

$$70,50 : 12,40 = 5,68.$$

En este caso el arco diferencia es positivo, por lo cual la característica de la diferencia es la diferencia de las características de los dos números dados.

La solución es 5,68.

5 y 6. Entre las varias aplicaciones a que se presta el aparato, fundadas en los problemas de este segundo grupo, citaremos: La determinación del frente de una sección; distancias en metros, equivalentes a tantos pasos; distancias recorridas a gran velocidad en función del tiempo; esponjamientos de tierras; longitudes, en metros, medidas con el fusil como unidad; precio de la unidad de una mercancía, conocido el de una cantidad de la misma; longitud del paso de una sección que recorre  $n$  metros en  $p$  pasos; distribución de una cantidad entre varios tiradores; densidad de una guerrilla de  $h$  hombres que ocupan un frente de  $n$  metros; determinación de velocidades y regulación de las marchas por los ayudantes de batallón; longitud de una circunferencia; área de un círculo, de una esfera, de un paralelepípedo y volúmenes. Problemas de terceras y cuartas proporcionales a números dados; repartimientos proporcionales, como, por ejemplo, distribución de un cierto número de hombres en servicios proporcionales a números dados ( $h, k, l, m, n$ ); equivalencias de monedas conocido el cambio; cantidades totales de las diversas especies que entran en una comida de tropa para  $h$  hombres, con arreglo a una papeléta de rancho; problemas de descuentos por deterioro de prendas; alturas aparentes, apreciadas a una distancia  $d$ , de una silueta colocada a  $x$  metros de distancia. Número de impactos correspondientes a una zona del  $h$  por 100; número de disparos sobre un blanco de probabilidad  $h$  por 100 para obtener  $x$  impactos; frente ocupado por una sección en guerrilla de  $n$  hombres por la amplitud de los intervalos; tanto por ciento correspon-

diente a un individuo en una ráfaga de  $n$  cartuchos, habiéndose obtenido  $x$  impactos y tanto por 100 total. Midense distancias y frentes por el método de la milésima, conocidas la referencia y las milésimas y la distancia y las milésimas; velocidades de fuego si en  $t$  tiempo se han disparado  $n$  cartuchos; cálculo del tiempo en que han de dispararse  $n$  cartuchos para obtener una cierta velocidad; número de impactos producidos en la unidad de tiempo; determinación de la escala de un plano y cálculo de distancias sobre una fotografía de un plano topográfico.

Resolvemos a continuación algunos otros que estimamos de especial interés.

#### 7. Características de agrupamientos.

Las fórmulas que relacionan los distintos errores, medio, cuadrático y probable entre sí y con el módulo de precisión son

$$h = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} = \frac{1}{q\sqrt{2}} = \frac{0,4769}{r} \begin{cases} h \equiv \text{módulo de precisión} \\ r \equiv \text{error probable} \\ g \equiv \text{idem medio aritmético} \\ q \equiv \text{idem id. cuadrático.} \end{cases}$$

Poniéndolas en la forma

$$\frac{1}{h} = \frac{r}{0,4769} = \frac{g}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{q}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

dada una cualquiera de las 4, se obtienen simultáneamente las otras 3.

*Ejemplo 1.º*—Dado el error medio cuadrático  $q = 1,57$  y haciendo coincidir la división 1,57 de la (3) con la  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de la (2), señalada con un trazo rojo, se tiene en la (3) coincidiendo con los otros trazos rojos los números  $g = 1,25$  y  $r = 1,06$  y coincidiendo con el 10 de la (3), en la (2) el número  $0,451 = h$ .

*Ejemplo 2.º*—Dado el módulo de precisión  $h = 0,62$ , poniendo este número de la (2) en coincidencia con el (10) de la (3), se leerán inmediatamente los números correspondientes  $q = 1,14$ ,  $g = 0,907$ ,  $r = 0,77$ .

*Combinación de los anteriores.*

#### 8. Raíces de ecuaciones exponenciales.

*Ejemplo 1.<sup>o</sup>*—Determinar la raíz 7.<sup>a</sup> de 275. Lo que ha de calcularse es  $x = 275^{\frac{1}{7}}$ . Tomando logaritmos tendremos

$$\frac{1}{7} \log 275 = \log x.$$

Empezaremos, pues, por hallar el logaritmo de 275 que es 2,4395 ó 2,44 en la (1) coincidiendo con el 275 de la (2). Obtenido el número 2,44, tendremos:  $\frac{2,44}{7} = 0,3487$ , haciendo coincidir el índice con el 24,40 de (3) y llevando después a coincidir con este número y el índice, que había permanecido fijo, el número 70 de la (2). La tercera operación consiste en tomar en (1) el número 34,87 y ver después la división de (2) que le corresponde, realizando la coincidencia con el índice o con el rayo origen de (3). Se obtiene 2,230 para el valor de  $x$ .

Lo mismo se obtendría una potencia de exponente inconmensurable cualquiera; siempre dentro de los límites de aproximación del aparato.

*Ejemplo 2.<sup>o</sup>*—Resolver la siguiente ecuación exponencial  $3^x = 275$ . Aquí, tomando también logaritmos, tendremos

$$x \log 3 = \log 275 \quad \text{ó} \quad x = \frac{\log 275}{\log 3}.$$

El log 275 es: 2,4395 y el de 3 es: 0,4775 y su cociente  $\frac{2,4395}{0,4775} = 5,110$ .

### Aplicaciones.

*Cálculo de las pérdidas efectivas que se producen en una tropa sometida al fuego.*

Según el General Rhone, la fórmula empleada para determinar el efecto destructor del fuego o eficacia absoluta del mismo medida no por el tanto por ciento de impactos sino por el número de hombres tocados es

$$F = 100 (1 - 0,99^n), \quad [5]$$

en la que  $F$  expresa el número de hombres tocados por cada  $n$  impactos, suponiendo dirigido el fuego a 100 hombres.

Escrita la fórmula anterior del modo siguiente:

$$F = 100 - 100 \cdot 0,99^n = 100 - 100 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n$$

se puede transformar en

$$F = 100 - 100 \left[ \left(1 + \frac{1}{-100}\right)^{-100} \right]^{-\frac{n}{100}}$$

y muy aproximadamente

$$F = 100 - 100 e^{-\frac{n}{100}} = 100 - 100 e^{-n'} \quad \text{ó} \quad 100(1 - e^{-n'}),$$

en la que  $n'$  es el cociente entre el número total de impactos y el número total de hombres a quien se ha dirigido el fuego.

El cálculo de  $e^{-n'}$  es sencillo, pues se tiene:

$$\log(e^{-n'}) = -n' \log e;$$

y como

$$\log e = 0,4342; \quad \log(e^{-n'}) = -n' \cdot 0,4342.$$

Ahora bien; si  $n$  es el número total de impactos hechos y  $p$  es el efectivo de la fuerza que los recibe, tendremos:

$$F = p(1 - e^{-n'});$$

$$n' = \frac{n}{p}; \quad \text{de donde} \quad \log(e^{-n'}) = -\frac{n}{p} 0,4342 = -x$$

o

$$-\frac{n}{p} = \frac{-x}{0,4342}.$$

El número negativo  $x$  es el logaritmo buscado, el que debemos transformar en otro logaritmo de característica positiva y mantisa negativa. Pero si en lugar de leer sobre la escala (3) el número  $x$  leemos en la misma escala, en lugar de las divisiones 90, 80, 70, 60, 50 ..... 20, 10, los números 10, 20, 30, 40, 50 ..... 80, 90 ..... tendremos en coincidencia con el número 0,4342 de (2), sobre la (3) en el sentido inverso,

la mantisa positiva del logaritmo  $x$ , y cuya característica obtendremos por el método corriente. Conocido  $x$  con característica negativa o nula y mantisa positiva y tomado sobre la (1), hallaremos sobre la (2) el número correspondiente, que es el valor de  $e^{-x}$ . No terminaremos aún con esto, pues ha de restarse el número obtenido de la unidad o sea, hemos de tomar su complemento a 1 y esto debe hacerse como antes, con la característica positiva. Aclaremos con un ejemplo.

*Ejemplos:*

1.º ¿Cuántas bajas probables corresponden a una guerrilla enemiga de 60 hombres a los que se han hecho 24 impactos?

$$F = 60(1 - e^{-x})$$

$$\frac{24}{60} = \frac{-x}{0,4342}$$

Puesto en coincidencia el 24 de (3) con el 60 de (2), llevaremos el índice a coincidir con el 43,42 de (2) y leeremos sobre (3), en sentido contrario de la flecha. Sustituyendo el 20 por 80, el número 8263 al que corresponde una característica  $\bar{1}$ ; pues la razón  $\frac{24}{60}$  es menor que la unidad y el complemento del número que resulte para  $x$  será de característica  $\bar{1}$ . Así se obtiene  $\log(e^{-x}) = \bar{1},8263$ . Buscado éste en (1) y poniéndolo en coincidencia con el rayo negro o el índice y leyendo el complemento en lugar del número como en el caso anterior, tendremos

$$F = 60 \times (0,3280) = 19,60.$$

El número de bajas probables es 19,60.

Obsérvese que el número exacto obtenido con tablas de logaritmos ordinarias es 19,68.

Como se ve, la diferencia no influye en nuestro resultado, ya que lo que se toma sólo es la parte entera.

2.º ¿Qué tanto por ciento de bajas se ha producido en un adversario compuesto de 150 hombres, al que se han hecho 75 impactos?

$$\frac{75}{150} = \frac{-x}{0,4342}, \quad \bar{1},7835, \quad 0,391, \quad 58,75 \text{ bajas probables.}$$

En realidad no hay que escribir ningún número, pues los números sucesivos que se van obteniendo se buscan en otra escala a medida que se obtienen.

3.º Haciendo fuego sobre una fuerza enemiga de 170 hombres cuya vulnerabilidad supondremos es de 12 por 100, se desea calcular el efecto útil que deberán producir 150 hombres disparando con una velocidad de 5 cartuchos por minuto.

$$-n' = -\frac{150 \cdot 5 \cdot 12}{100 \cdot 170} = -\frac{1,50 \cdot 6}{17} = -0,68,$$

$$-\frac{68}{100} = \frac{-x}{0,4342}, \quad 49,20 \text{ por } 100 \text{ ó } 0,4920 \text{ por } 1.$$

83,50 bajas probables en un minuto.

4.º ¿Cuál es el número de cartuchos necesarios para producir a un enemigo 100 bajas probables suponiendo que la vulnerabilidad de su formación es de un 8 por 100 y que consta de 240 hombres, disponiendo nosotros de 150 tiradores?

La razón entre las bajas y la fuerza enemiga que las experimenta es  $\frac{100}{240} = \frac{x}{100}$ ,  $x = 41,65$  por 100. Con este tanto por ciento de bajas, que no necesitábamos determinar, podremos escribir la ecuación

$$x = 100(1 - e^{-n'}), \quad \frac{x}{100} = 1 - e^{-n'}, \quad e^{-n'} = \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

o también

$$e^{-n'} = \left(1 - \frac{100}{240}\right).$$

Si en lugar de leer el valor de  $x = 41,65$  leemos el complemento de 0,4165 como ya se ha indicado en los problemas anteriores, tendremos de una vez el número  $\left(1 - \frac{100}{240}\right)$ . Esto es, 0,5835. Substituyéndole en la ecuación anterior tendremos  $e^{-n'} = 0,5835$ . Y tomando los logaritmos:  $-n' \log e = \log 0,5835$ , de donde

$$-n' = \frac{\log 0,5835}{0,4342} = \frac{1,7650}{0,4342},$$

y tomando el complemento del numerador para hacer la mantisa negativa será:

$$-n' = \frac{-0,2350}{0,4342} = -0,5425.$$

Finalmente, con este valor de  $n'$  llegaremos a la proporción

$$\frac{(n' \cdot 240) \text{ impactos}}{\text{vulnerabilidad}} = \frac{\text{número de cartuchos}}{100}$$

o

$$\frac{240}{8} = \frac{x}{n' \cdot 100} = \frac{x}{54,25}, \quad x = 16250$$

es el número de cartuchos que han de dispararse y entre 150 hombres tocan a 10,85 por individuo y en números redondos a 11.

5.º Una guerrilla de 65 tiradores hace fuego durante cuatro minutos con una velocidad de cinco cartuchos por ráfaga de un minuto sobre un enemigo que se presenta en una formación de 135 hombres cuya vulnerabilidad es de un 11 por 100. ¿Cuál es el número de bajas probables?

El número de cartuchos disparados será:

$$5 \cdot 4 \cdot 65 = 20 \cdot 65 = 1300;$$

los que producirán

$$\frac{1300}{100} = \frac{x}{11}; \quad x = 143 \text{ impactos}$$

$$-n' = -\frac{143}{135} = \frac{-x}{0,4243} \text{ (ver el 2.º); } \bar{1},5755; \quad 62,35 \text{ por } 100;$$

84 bajas.

6.º ¿Cuánto tiempo se necesitará para producir 97 bajas a un enemigo de 275 hombres con una vulnerabilidad de un 13 por 100, realizando nosotros un fuego de cinco cartuchos por minuto con una fuerza de 200 hombres?

Calcularemos aquí, como en el problema 4.º, los cartuchos necesarios para producir las 97 bajas probables, y después, conocido el número de cartuchos, se determina el tiempo necesario con la velocidad del fuego dada.

Así, tendremos

$$e^{-n'} = \left(1 - \frac{97}{275}\right) = 0,6475,$$

$$-n' = \frac{\log 0,6475}{0,4342} = \frac{-0,1895}{0,4342}, \quad n' = 0,4375.$$

Con este número calcularemos el número de cartuchos por la proporción

$$\frac{275}{13} = \frac{x}{43,75}, \quad x = 9250,$$

y, finalmente,

$$\frac{1^m}{1000 \text{ cartuchos}} = \frac{x^m}{9250}, \quad x = 9^m, 15^s.$$

7.º ¿Qué velocidad de fuego debe tener una sección de 60 hombres para que en 4 minutos produzca 80 bajas a un enemigo de 250 hombres, que presenta una formación de una vulnerabilidad de 12 por 100?

Como en el ejemplo anterior, se calculará primero el número de cartuchos a disparar para producir las 80 bajas:

$$e^{-n'} = \left(1 - \frac{80}{250}\right) = 0,6810,$$

$$-n' = \frac{\log 0,6810}{0,4342} = \frac{-0,1679}{0,4342} = 0,3860,$$

$$\frac{250}{12} = \frac{x}{38,60}, \quad x = 800,7 \text{ cartuchos necesarios.}$$

Finalmente,  $\frac{800,7}{4^m} = \frac{x}{1^m}$ ,  $x = 200,2$  por minuto, o sea  $\frac{200,2}{60} = 3,35$  cartuchos por individuo, y en números redondos, 4.

**Grupo 3.<sup>o</sup>**—Escalas ( $N$ ), ( $\log N$ ), ( $T$  y  $S$ ), o sea las (3), (1), (9, 10, 11, 12).

9. Dada la tangente trigonométrica de un ángulo calcular este ángulo.

*Ejemplo.*—Sea

$$\text{tang } \alpha = 0,487, \quad \log 0,487 = \log \text{ tang } 26^\circ.$$

Después de poner en coincidencia con el rayo rojo la división 48,70 de la (3), observaremos que el logaritmo del número dado 0,487, con la característica ( $-1$ ), viene determinado por el arco comprendido entre el radio negro, origen del limbo inferior, y el radio rojo del limbo superior. Como, por otra parte, los logaritmos de las tangentes de los ángulos comienzan en dicho rayo negro, resultarán en coincidencia con el radio rojo los distintos ángulos cuyas tangentes tienen valores expresados por las mismas cifras, diferenciándose unos de otros por la posición de la coma o por la característica del logaritmo.

$$\text{Así, el ángulo cuya tangente es.} \left\{ \begin{array}{ll} 0,487 & \text{es de } 26^\circ \\ 0,0487 & \text{— } 2^\circ 46' 50'' \\ 0,00488 & \text{— } 16 \text{ } 45 \\ 0,000487 & \text{— } 1 \text{ } 45 \end{array} \right.$$

10. Dado el seno de un ángulo determinar este ángulo. (El número dado no debe exceder de 0,1.)

*Ejemplo.*—Sea este ángulo definido por  $\text{sen } \alpha = 0,0845$ .

Empleando la misma escala de tangentes, que sirve también para los senos cuyos valores no excedan de 0,1, se encuentra con el mismo procedimiento anterior  $\alpha = 4^\circ 50'$ .

11. *Recíprocos.*—Dado el ángulo determinar el seno. (El ángulo ha de ser en este caso menor de  $5^\circ$ .)

*Ejemplo.*—Determinar el valor de  $\text{sen } 3^\circ 25'$ .

*Solución:*  $\text{sen } 3^\circ 25' = 0,0598.$

Puesto en coincidencia el rayo rojo con el ángulo citado en la escala ( $S$ ), se lee en la (3) la división coincidente con dicho rayo, poniendo la coma en el lugar indicado por la característica correspondiente al ángulo dado.

Estas características son, como dijimos:

En la circunferencia 12.....	(- 4)
— — 11.....	(- 3)
— — 10.....	(- 2)
— — 9.....	(- 1)

En el ejemplo propuesto el número es 59,80; pero como la característica es (- 2) por estar en la segunda circunferencia de la escala, el seno buscado es 0,0598.

12. Dado el ángulo determinar la tangente. Aquí puede ser el ángulo mayor o menor que  $45^\circ$ . Si es mayor que  $45^\circ$  se determina la cotangente, y después se toma la inversa para hallar la tangente.

*Ejemplo 1.º*

$$\text{tang } 79^\circ 12' = \text{cotang } 10^\circ 48' = \frac{1}{\text{tang } 10^\circ 48'} = \frac{1}{0,191} = 5,235.$$

Si ponemos en coincidencia el rayo rojo con la división  $10^\circ 48'$  de la escala (9), tendremos en el ángulo o arco comprendido entre el rayo negro, origen, y el rayo rojo (sentido de la flecha), la mantisa del logaritmo de tangente de  $10^\circ 48'$ , y las cifras del número correspondiente de esta mantisa las leeremos sobre la escala (2). Ahora bien, la mantisa del logaritmo de  $\frac{1}{\text{tang } 10^\circ 48'}$  será el arco negativo (sentido contrario a la flecha) comprendido entre ambos rayos, y como, por otra parte, el logaritmo de  $\text{tang } 10^\circ 48'$  tiene su característica igual a (- 1), al cambiar el signo a este logaritmo su característica se hace (+ 1) y su mantisa negativa. Teniendo esto presente, para hacer positiva la mantisa tendremos que restar de (+ 1) la mantisa - (0, .....), con lo que obtendremos un logaritmo de característica 0 y mantisa positiva. Si el logaritmo del ángulo complementario tuviese una característica = - 2, en el recíproco se transformaría en (+ 1); si (- 4) en (+ 3), etc.....

*Ejemplo 2.º*—Determinar la tangente de  $89^\circ 25'$ ,

$$\text{tang } 89^\circ 25' = \frac{1}{\text{tang } 35'} = 98,25.$$

Siendo en este ejemplo (- 2) la característica, la del recíproco será (+ 1).

Ejemplo 3.<sup>o</sup>

$$\text{tang } 6^{\circ} 35' = 0,1155.$$

La lectura del número equivalente a la tangente dada se hace sobre la (3) en el número que coincide con el rayo rojo, pues la mantisa obtenida es positiva. El orden de la primera cifra decimal lo da la característica.

*Combinación de los anteriores.*—Resolución de triángulos rectángulos.

13. Dado el ángulo de situación  $B$  y el cateto  $c$  determinar  $a$  y  $b$ .

*Ejemplo.*—Resolver el triángulo  $ABC$  conocido,

$$B = 2^{\circ} 15' 30'' \quad \text{y} \quad c = 478 \text{ m.}$$

Por la definición de tangente tenemos

$$\frac{b}{c} = \text{tang } B, \quad b = c \text{ tang } B \quad \text{y} \quad \log b = \log c + \log \text{tang } B.$$

Colocado el rayo rojo sobre la división correspondiente de la escala  $T$ , buscando a continuación sobre la escala (2) el número que mide el cateto  $c$ , tendremos sobre (3), en la división coincidente con la anterior, el número que representa el valor de  $b$  una vez que se haya colocado la coma en el lugar que indique la característica. Así, en el ejemplo anterior las características son (+2)

y (-2), y como la suma de arcos o ángulos proporcionales a las mantisas es mayor que una circunferencia, la característica final será (+1) y el número correspondiente 18,85,

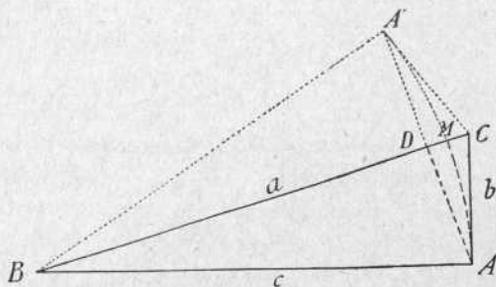


Fig. 4.<sup>a</sup>

y (-2), y como la suma de arcos o ángulos proporcionales a las mantisas es mayor que una circunferencia, la característica final será (+1) y el número correspondiente 18,85,

$$b = 18,75.$$

Para calcular el valor de  $a$  determinaremos la diferencia entre  $a$  y  $c$ , observando que esta diferencia es muy aproximadamente igual a  $\left(\frac{1}{2} CD\right)$  (fig. 4.<sup>a</sup>), pues en el triángulo  $ACD$ ,  $AM$  es bisectriz del

ángulo  $A$  y, por tanto,  $\frac{MD}{MC} = \frac{DA}{AC}$ , y siendo  $DA$  aproximadamente igual a  $AC$ ,  $MD$  será muy aproximadamente igual a  $MC$ .

Calculando  $DC$  podremos tomar para  $a$  el valor  $a = c + \frac{DC}{2}$ .

El cálculo de  $DC$  se hace observando que en el triángulo  $DAC$ ,  $DC = b \operatorname{sen} B$ , y siendo los ángulos pequeños podremos emplear la escala  $S$ .

Se obtiene

$$DC = 0,745;$$

luego

$$a = 478 + \frac{0,745}{2} = 478 + 0,372 = 478,372.$$

14. Dados  $B$  y  $a$  determinar los demás elementos. Considerando

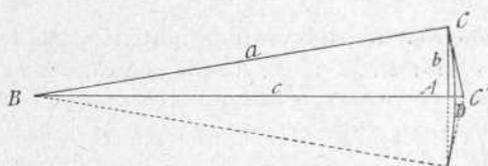


Fig. 5.<sup>a</sup>

el triángulo  $BCC'$  se calcula previamente el cateto  $CC'$ . Hecho esto en el triángulo  $CC'A$ , se determina el cateto  $AC'$ , el cual nos da después el  $c = a - \frac{AC'}{2}$ .

Conocido el  $c$  puede hallarse el  $b$  o repetir el mismo procedimiento en el triángulo  $CAC'$ .

Sea

$$B = 1^{\circ} 10', \quad a = 1675 \text{ m.}; \quad CC' = a \operatorname{tang} B = 34,10;$$

$$C'A = 0,6940; \quad \frac{C'A}{2} = 0,347;$$

$$c = a - \frac{AC'}{2} = 1675 - 0,347 = 1674,653.$$

#### Aplicaciones.

1.º Medida en un plano la distancia horizontal al pie de un blanco se obtiene 2500 m. siendo el ángulo de situación,  $\varepsilon = 5^{\circ} 30'$ . Se desea conocer la longitud de la línea de situación o sea la distancia al blanco.

Se obtiene  $h = 241$  m. En el triangulito

$$BDC'; \quad BC' = 23,25 \quad \text{y} \quad \frac{BC'}{2} = 11,62.$$

La línea de situación será de  $2.511,62$ . El valor exacto de esta línea es  $2.511,56$ , hemos cometido un error de 6 centímetros, que muy bien puede despreciarse.

2.º Medida la distancia a un objetivo, en el terreno se ha obtenido 987 m. y el ángulo de pendiente  $8^\circ 15'$ .

¿Cuál es la distancia horizontal y la diferencia de nivel?

Siguiendo el mismo procedimiento del problema 14 se encuentra

$$CC' = a \operatorname{tang} B = 987 \operatorname{tang} 8^\circ 15' = 143,20;$$

$$C'A = 143,20 \operatorname{tang} 8^\circ 15' = 20,75;$$

$$\frac{C'A}{2} = 10,37; \quad c = 987 - 10,37 = 976,63.$$

El valor exacto de  $c$  es  $976,78$ .

El error cometido con el aparato es de 15 cm.

15. Dados  $b$  y  $c$  calcular  $B$  y  $a$ .

*Ejemplo.*—Supongamos

$$b = 4,75; \quad c = 795 \text{ m.}; \quad \frac{4,75}{795} = \operatorname{tang} B.$$

Preparado el aparato como se indica al tratar de dividir los números 4,75 por 795 el logaritmo del cociente tiene su mantisa proporcional al ángulo o arco cuyo origen es el rayo negro y su extremo el rayo rojo. En la escala  $T$  leeremos en coincidencia con dicho rayo rojo el valor del ángulo buscado, debiendo tenerse en cuenta la característica correspondiente para tomar el resultado en una de las cuatro escalas parciales que compone la  $T$ .

El cálculo de  $a$ , partiendo del valor obtenido para el ángulo y del valor conocido de  $b$ , se obtendrá como en el 13 en el triangulito  $ACD$ .

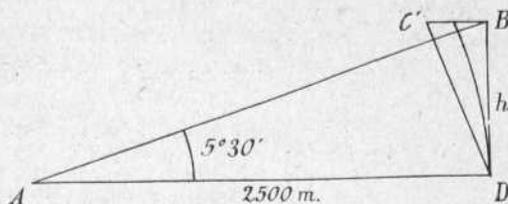


Fig. 6.<sup>a</sup>

16. Dados  $B$  y  $b$  calcular  $a$  y  $c$ .

Las fórmulas serán en este caso

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tang} B, \quad c = \frac{b}{\operatorname{tang} B}, \quad a = c + \frac{DC}{2} \text{ (fig. 4.ª).}$$

*Ejemplo.*—Sea

$$B = 15^{\circ} 25'; \quad b = 175 \text{ m.};$$

$$c = \frac{175}{\operatorname{tang} 15^{\circ} 25'} = 634,8; \quad DC = 48,30; \quad \frac{DC}{2} = 24,15;$$

$$a = 634,8 + 24,15 = 658,95.$$

Los valores exactos son:

$$c = 634,60, \text{ error cometido con el aparato de } 20 \text{ cm.}$$

$$a = 658,30, \quad \gg \quad \gg \quad \text{de } 65 \quad \gg$$

Lo mismo que los casos expuestos se resolverían los otros dos en que los datos son  $(a, b)$  y  $(a, c)$  los cuales dejamos para ejercicio del lector.

**Grupo 4.º**—Escalas [(6)  $\equiv D_{4, \varepsilon}$ , (5)  $\equiv \varphi, \varepsilon, \theta$ ].

17. Determinación de los ángulos de proyección  $\varphi$  correspondientes a un alcance cualquiera.

Basta al efecto poner en coincidencia los ceros de (5) y (6) o sea superponer los dos rayos origen negro y rojo, para tener en coincidencia con cada alcance leído en (6) el ángulo de proyección respectivo leído en (5).

*Ejemplo 1.º*—Así los ángulos de proyección de los alcances siguientes son los escritos debajo

$$\begin{array}{ccccccc} 800, & 1100, & 1175, & 1590, & 1650, & 1900, & 2310, \\ 29' 10'', & 56', & 1^{\circ} 3' 30'', & 1^{\circ} 58', & 2^{\circ} 8', & 2^{\circ} 53', & 4^{\circ} 81' 30'', \end{array}$$

y expresados por la tangente trigonométrica

$$0,00848, \quad 0,01630, \quad 0,01850, \quad 0,03437, \quad 0,03730, \quad 0,05045, \quad 0,085,$$

Las tangentes se han obtenido como en el ejemplo 3.<sup>o</sup> del problema 12.

Para precisar más los ángulos de proyección correspondientes a los alcances menores de 900 m. se puede emplear la escala (4) y la (5), teniendo presente que cada división de la (5) en este caso corresponde a 6'' y que 1° debe leerse ..... 6' ..... etc., como se explicó al dar noticia de esta escala.

*Ejemplo 2.<sup>o</sup>*—Así los ángulos de proyección correspondientes a los alcances escritos a continuación son respectivamente los números escritos debajo

150, 175, 235, 400, 460, 585, 600, 777, 892 1/2,  
3' 54'', 4' 27'', 6' 1'', 11' 18'', 13' 30'', 18' 23'', 19', 27' 42'', 34' 39''.

18. Problema recíproco del anterior. Dado un ángulo de proyección  $\varphi$  determinar el alcance.

*Ejemplo 1.<sup>o</sup>*—A los ángulos de proyección

7' 53'', 10' 15'', 14' 58'', 29' 1''

tomados en la escala (5) corresponden los alcances

300, 370, 500, 800

sobre la escala (4).

*Ejemplo 2.<sup>o</sup>*—A los ángulos

1° 10', 1° 15', 1° 47' 30'', 2° 45', 3° 25', 4° 10'

de la (5) corresponden los alcances

1233, 1276, 1520, 1860, 2060, 2165

sobre la (6).

19. Determinar los ángulos de situación  $\varepsilon$  correspondientes a los distintos puntos de una trayectoria de alcance dado.

De dos modos distintos se resuelve este problema: 1.<sup>o</sup> Cuando de una vez se necesiten todos los ángulos de situación correspondientes a los distintos puntos de la trayectoria de alcance  $X$  se pone esta división  $X$  de (6) en coincidencia con el 0 de (5) y a continuación se

leen los ángulos de situación correspondientes en las distintas abscisas  $D$  expresadas por los demás números de la (6) ó (4). Sólo ha de tenerse en cuenta que las lecturas correspondientes a abscisas mayores que el alcance dan ángulos de situación negativos, aunque en el aparato son positivos, los cuales se leen directamente en la (5) mientras que los ángulos que corresponden a abscisas menores que  $X$  son positivos, aunque en el aparato sean negativos. Como para estos ángulos negativos la numeración de la (5) es decreciente, debemos leer  $1.^\circ$ ,  $2.^\circ$ ,  $3.^\circ$ , ..... en lugar de  $5.^\circ$ ,  $4.^\circ$ ,  $3.^\circ$ , .....

*Ejemplo 1.º*—Los ángulos de situación correspondientes a las siguientes abscisas, son respectivamente, en la trayectoria de alcance 1785,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2100, & 2000, & 1800, & 1785, & 1700, & 1000, & 250, & 100, & 0 \\ -1^\circ 3', & -42', & -3', & 0', & +15', & +31' 30'', & +2^\circ 25', & 2^\circ 28' 30'', & 2^\circ 31' = \epsilon \end{array}$$

En este ejemplo las divisiones de (5) que coinciden con los números 17, 16, ..... 10, ..... de la escala (6), corresponden a la parte de escala ( $\epsilon$ ) cuya numeración es  $5.^\circ$ ,  $4.^\circ$ ,  $3.^\circ$ , ..... debiendo leer en lugar de  $5.^\circ$ ,  $1.^\circ$ ; en lugar de  $4.^\circ$ ,  $2.^\circ$ ; en lugar de  $3.^\circ$ ,  $3.^\circ$  etc.

*Ejemplo 2.º*—Cuando lo que se desea es sólo un ángulo de situación y no una serie, se puede evitar la substitución de los números  $5.^\circ$ ,  $4.^\circ$ ,  $3.^\circ$  ..... por los  $1.^\circ$ ,  $2.^\circ$ ,  $3.^\circ$  ..... procediendo del modo siguiente: Se pone el rayo rojo en coincidencia con la abscisa correspondiente sobre la escala (6) y se hace la lectura en la (5) en la división coincidente con el alcance. De este modo los ángulos de situación positivos se leen directamente sobre la (5) con su mismo signo. Respecto a los negativos es preferible seguir con el primer método.

*Ejemplo 3.º*—Ángulo de situación correspondiente a la abscisa 1.345 en la trayectoria 1.790.

*Solución:*

$$\epsilon = 1^\circ 8' 40'',$$

cuyo número está en la (5) en frente de la división 1.790 de la (6), después de haber hecho coincidir previamente la división 1.345 de (6) con el (0) de (5).

20. *Recíproco.*—Determinar las abscisas correspondientes a un ángulo de situación en una trayectoria de alcance  $X$ .

Establecida la coincidencia de la división de (5) correspondiente

al ángulo dado con la división de (6), que indica el alcance, obtendremos enfrente del 0 de (5) la abscisa buscada.

*Ejemplo.*—Qué abscisa corresponde a un ángulo  $\varepsilon = 1^\circ 13' 30''$  en la trayectoria de 1.600 m.

*Solución:*  $D = 1000$  m.

21. Determinar el alcance de una trayectoria que pasa por un punto de abscisa dada en un cierto ángulo de situación también dado.

*Ejemplo.*—Qué trayectoria pasa por un punto de abscisa 900 con un ángulo  $\varepsilon = 1^\circ 30'$ .

Después de obtenida la coincidencia del 0 de (5) con el 9 de (6), leeremos, enfrente de la división  $1^\circ 30'$  de (5), la división de (6) que da el alcance. En este caso

$$X = 1632 \text{ m.}$$

Substituyendo la escala (6) por la (4) y modificando las lecturas de la (5), como ya hemos dicho, se resolverán con muchísima aproximación (la misma de la tabla oficial) los problemas anteriores en las trayectorias de alcances menores de 900 m.

Más adelante haremos una aplicación de este problema para obtener la profundidad, sobre el plano de situación, del trapecio equivalente a una formación para el estudio de la vulnerabilidad.

### Grupo 5.<sup>o</sup>—Escala (6) y (7, 8).

22. Determinar la abscisa del vértice de una trayectoria dada.

*Ejemplo.*—Sea el alcance  $X = 1.400$  m. Esta abscisa está expresada por la división de la escala (7, 8), que coincide con la 1.400 de (6), es decir, la 890.

Análogamente, se ve que las abscisas, en los vértices de las siguientes trayectorias, están escritas debajo de los alcances respectivos

300,	500,	900,	1000,	1200,	1375,	1800,	1970	
.	140,	260,	505,	610,	750,	870,	1070,	1148.

En la tabla oficial hay error en las abscisas de los vértices de las trayectorias cuyos alcances caen dentro del 2.<sup>o</sup> coeficiente balístico, por haber tomado, la Comisión mixta que la calculó, el 2.<sup>o</sup> coeficiente

balístico en todos los casos, debiendo tomarse el 1.º para las abscisas menores de 900 m. La discrepancia es evidente comparando las ordenadas de la tabla de tiro II con las máximas calculadas en la I.

23. *Recíproco*.—Dada la abscisa del vértice determinar la trayectoria a que corresponde.

Se procede buscando primero en la (7, 8) la abscisa y leyendo la división correspondiente en (6).

*Ejemplo*.—A las abscisas en el vértice de

302, 400, 560, 725, 1240, 1575 m.,

corresponden los alcances

555, 730, 950, 1165, 2097, 2530 m.

### Grupo 6.º—Escalas (5) y (7, 8).

24. Determinar la inclinación en los distintos puntos de una trayectoria de alcance dado.

Se resuelve este problema de dos modos distintos, como el 20.

1.º Haciendo coincidir con el rayo rojo la división de la escala (6) que expresa el alcance dado, tendremos enfrente de cada división de la (7, 8) la división de la (5), que expresa la inclinación. Aquí también se leen directamente en la escala (5) las inclinaciones negativas de la rama descendente, a partir del 0 y en sentido positivo, mientras que los ángulos  $\theta$  de inclinación de la rama ascendente se leen en sentido inverso, debiendo substituirse los números 5.º, 4.º, 3.º....., por 1.º, 2.º, 3.º....., es decir, tomar el complemento a 6, como hicimos en el problema citado.

*Ejemplo*.—Determinar en la trayectoria de alcance, 1.500 m., las inclinaciones en los puntos de abscisa

100, 230, 300, 575, 970, 1200, 1450, 1600, 1900,

*Solución*:

1º 39' 20'', 1º 32', 1º 27' 40', 1º 2', —15' 30'', —1º 33' 30'', —3º 16', —4º 28', —7º 18'.

En este ejemplo las abscisas 1.600 y 1.900 son mayores que el alcance. A esta última distancia la división de (5) correspondiente al número 19 de (8) es 1º 18'; pero observando que ha debido añadirse

una circunferencia completa para llegar al 19 a partir del rayo rojo, la inclinación será  $1^{\circ} 18' + 6^{\circ} = 7^{\circ} 18'$ .

2.º Si lo que se desea es sólo la inclinación a una cierta distancia  $D$  en una trayectoria de alcance  $x$ , se coloca el rayo rojo sobre la abscisa correspondiente en la (7 y 8), y se hace la lectura de la división de (5), que coincide con el alcance tomado en (6). Esto si el ángulo es positivo, es decir, si se trata de la rama ascendente de la trayectoria, porque si el punto pertenece a la rama descendente se procederá como en el primer caso.

25. Dada la inclinación en un punto y el alcance determinar la abscisa.

*Ejemplo.*—¿Cuál es la abscisa del punto de la trayectoria de 1.300 metros, en que la inclinación en la rama descendente es de  $1^{\circ} 18'$ ?

Puesto el 0 de (5) (rayo rojo) coincidiendo con el 13 de la (6), leeremos después la división (7 y 8), que coincide con el ángulo dado. La solución, en este caso, es 1.077 m.

26. Dada la abscisa y la inclinación en un punto hallar el alcance de la trayectoria que pasa por este punto.

*Ejemplo 1.º*—¿En qué trayectoria a los 870 m. la inclinación en la rama ascendente es de  $1^{\circ}$ ?

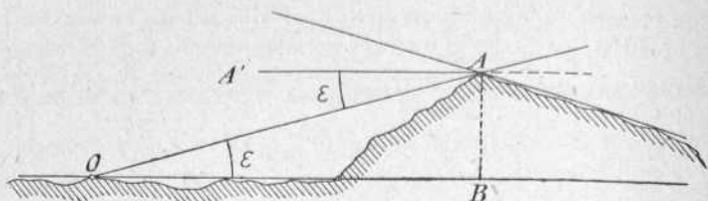
*Solución:* 1.760 m.

Este problema resuelve directamente la rasancia de una posición en el caso en que la elevación o relieve de la posición coincida con la ordenada de la trayectoria correspondiente a los citados elementos. Pero lo que ocurre, en realidad, es que la parte de trayectoria de igual abscisa o abscisas que la posición es paralela al perfil del terreno en la parte que habría de rasarse. El aparato puede decirnos la separación entre las partes paralelas del perfil y la trayectoria tirando con el alcance obtenido a un punto de referencia tomado sobre la horizontal de la boca del arma (no se olvide que lo que aquí tratamos son problemas de la balística del fusil). Para resolver los problemas de rasancia hay que tener en cuenta el perfil del terreno.

*Ejemplo 2.º*—Supongamos que se tira sobre una posición situada a 1.150 m., con un relieve de 50, sabiendo que la contrapendiente es de  $1^{\circ} 45'$ . El ángulo de situación vendrá dado por

$$\operatorname{tang} \epsilon = \frac{50}{1150} = \operatorname{tang} 2^{\circ} 30'.$$

La trayectoria que a los 1.150 m. tiene un ángulo de inclinación de  $1^{\circ} 45'$  es la de 1.416 m. de alcance. Pero en esta trayectoria el ángulo de situación, a los 1.150 es de  $31' 30''$ ; luego dichas trayectorias se entierran por delante de la posición. Por otra parte, el ángulo de

Fig. 7.<sup>a</sup>

caída en la de 1.150 m. de alcance es de  $1^{\circ} 27'$ . Tirando, pues, directamente sobre el punto  $A$ , tomado como referencia, con la trayectoria 1.150, la contrapendiente estará desenfilada de los fuegos, puesto que el ángulo  $\epsilon$  en  $A$  es mayor que el de caída, lo que nos dice que la tangente en  $A$ , a las curvas está contenida en el ángulo  $A'AO$ .

27. Dado el alcance determinar el ángulo de caída. (Es caso particular del anterior.)

*Ejemplo.*—En los alcances de

370, 400, 555, 875, 1140, 1200, 1505, 1700 m.

los ángulos de caída son, respectivamente,

$12' 40''$ ,  $14'$ ,  $24'$ ,  $54' 40''$ ,  $1^{\circ} 57' 20''$ ,  $2^{\circ} 12'$ ,  $3^{\circ} 39'$ ,  $4^{\circ} 48'$ .

Para obtenerlos se coloca el rayo rojo sobre la división de (6), que indique el alcance, y después se hace la lectura sobre la (5) en coincidencia con la división de (7 y 8), que también expresa el alcance.

28. *Recíproco del anterior.*—Dado un ángulo de caída hallar el alcance de la trayectoria.

*Ejemplo.*—A los siguientes ángulos de caída,

$23'$ ,  $40'$ ,  $1^{\circ} 30'$ ,  $3^{\circ}$ ,  $5^{\circ}$ ,

corresponden los alcances

550, 750, 1020, 1375, 1731 m.

La solución de este problema no es tan sencilla como las anteriores, debido a que hay que ver simultáneamente la coincidencia de la división del ángulo  $\omega$  de la (5) con la del alcance en la (6), al mismo tiempo que el rayo rojo coincide con la división del alcance en la (7 y 8). Probando en dos alcances se hace la lectura de ángulos del modo siguiente. Supongamos que se desea el alcance correspondiente a un ángulo de caída de  $2^\circ$ . Empezaremos probando con un alcance cualquiera, 1.000 m., por ejemplo, y observamos que le corresponde un ángulo de caída de

A un alcance de 1.000 m.....	1° 26'
— 1.100 .....	1° 56'
— 1.200 .....	2° 12'
— 1.150 .....	1° 59' 50''
— 1.160 .....	2° 2'

Puede tomarse como bueno el alcance de 1.152 m.

### Grupo 7.<sup>o</sup>—Combinación de los anteriores.

29. Cálculo de la ordenada  $h$  correspondiente a una abscisa dada. Estos problemas se resuelven con auxilio de los 19 y 13.

*Ejemplo 1.<sup>o</sup>*—En la trayectoria de 1.500 m. calcular la ordenada a 500 m.

El ángulo de situación a los 500 m., en la trayectoria de 1.500 es  $1^\circ 30'$ .

Con este ángulo de situación

$$h = 500 \cdot \text{tang } 1^\circ 30' = 13,10.$$

*Ejemplo 2.<sup>o</sup>*—En la trayectoria de 2.400 y abscisas

100, 300, 500, 600, 800, 1000,

los ángulos de situación, son

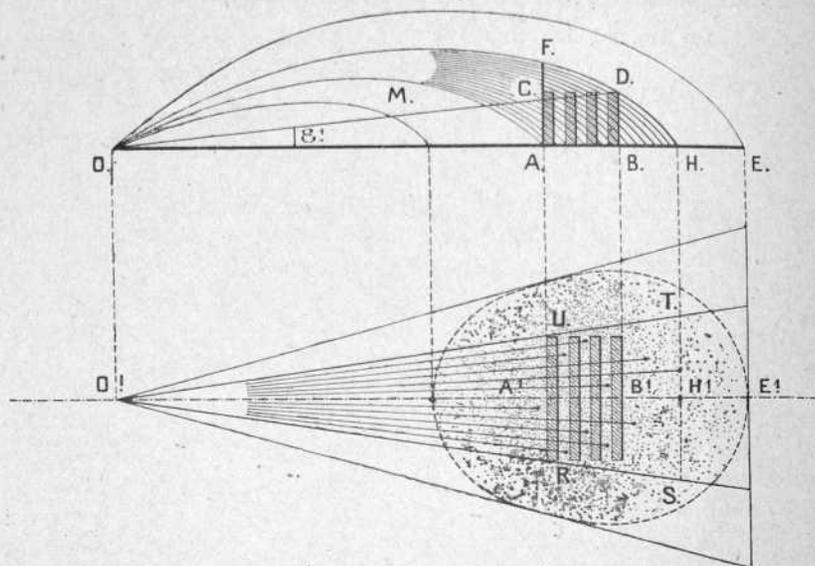
$5^\circ 16' 30''$ ,  $5^\circ 12' 30''$ ,  $5^\circ 4' 20''$ ,  $5^\circ 20'$ ,  $4^\circ 50' 20''$ ,  $4^\circ 32' 40''$ ,

y las ordenadas correspondientes

9,20, 27,30, 44,40, 52,50, 67,60, 79,25.

## Aplicaciones.

Profundidad sobre el plano de situación del trapezio equivalente a una formación y altura sobre el plano de frente del rectángulo que la represente para determinación de vulnerabilidades.

Fig. 8.<sup>a</sup>

Si designamos por  $OACD - O_1A_1B_1$  el plano de tiro de la trayectoria media del haz, es evidente que toda la parte útil de éste es la comprendida entre la trayectoria  $OMA$  y la  $OFDH$ , siendo  $A_1H_1 = AH$  la profundidad del trapezio  $RSTU$ .

Ahora bien,  $AH = OH - OA$ ; en donde  $OH$  es el alcance de la trayectoria que pasa por  $D$ , cuyo ángulo de situación  $\epsilon$  viene determinado por la fórmula

$$\text{tang } \epsilon = \frac{DB}{OA + AB},$$

y  $OA$  es la distancia a la primera fila de la formación  $ABCD$ .

*Ejemplo.*—Supongamos una formación de caballería de 30 m. de fondo por 2,70 de altura a 1.400 m.

Tendremos:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2,70}{1400 + 30} = \frac{2,70}{1430} = \operatorname{tang} 6' 30''.$$

La trayectoria en que, a 1.430 m., el ángulo de situación es de 6' 30'', tiene un alcance de 1.477 m. De aquí que la profundidad del trapecio que recibe todos los proyectiles que producirían impactos sobre la formación es de 77 m.

Por otra parte, sobre el plano vertical de frente ( $UR - AF$ ) tocarán también todos los proyectiles capaces de producir impactos en la formación. La altura de este rectángulo vertical es, precisamente, la altura  $AF$  de la ordenada, a 1.400 m. de la trayectoria anterior. Esta ordenada es 4,225 m.

30. *Recíproco.*—Determinar las abscisas correspondientes a una ordenada  $h$  en una trayectoria de alcance  $X$ .

*Ejemplo 1.º*—Sea  $h = 12$  m. en la trayectoria de 1.400 m. de alcance.

*1.º método.* Determinemos previamente los ángulos de situación en los primeros 500 m.

100,	200,	300,	400,	500,	600,
1º 28',	1º 26',	1º 23',	1º 19' 40'',	1º 16',	1º 11' 30''.

Por otra parte

$$\frac{12}{500} = \operatorname{tang} 1^\circ 22' 30'',$$

y como a los 500 m. el ángulo de situación es de 1º 16', quiere decir esto que la ordenada a 500 es menor de 12 m.

A los 600 m. tenemos

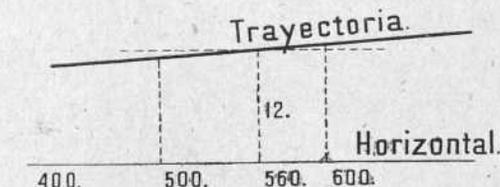


Fig. 9.<sup>a</sup>

$$\frac{12}{600} = \operatorname{tang} 1^\circ 9',$$

luego la ordenada a 600 es mayor de 12 m., pues el ángulo de situación a los 600 es  $1^{\circ} 11' 30''$ .

A los 550 m.:

$$\frac{12}{500} = \text{tang } 1^{\circ} 15',$$

y el ángulo de situación  $1^{\circ} 14'$ , siendo, por tanto, la ordenada menor de 12 m.

A los 560 m.:

$$\frac{12}{560} = \text{tang } 1^{\circ} 13' 40'',$$

y el ángulo

$$\varepsilon = 1^{\circ} 13' 30'';$$

puede tomarse como buena la abscisa 560 m.

*2.º método.* Consiste este 2.º método en hallar las ordenadas de unos cuantos puntos, intercalando después otros hasta conseguir la aproximación deseada.

Empezando en el 300:

300,	500,	550,	545,
$1^{\circ} 23'$ ,	$1^{\circ} 16'$ ,	$1^{\circ} 14'$ ,	$1^{\circ} 14'$ ,
7,25,	11,05,	12,05,	11,85.

Aquí tomamos como buena la abscisa de 550 m.

En la rama descendente tendremos:

1200,	1100,	1060,	1055,	1050,
$24' 30''$ ,	$35'$ ,	$38' 40''$ ,	$39'$ ,	$39' 40''$ ,
8,50,	11,18,	11,90,	11,95,	12,10.

Puede tomarse como buena la de 1.055 m.

Cuando se trata de una pequeña ordenada y lo interesante es de terminar el espacio peligroso para un blanco de esta altura, debe procederse todavía de otro modo.

*Ejemplo 2.º*—Supongamos que se desea calcular el espacio peligroso para un blanco de 3 m. en la trayectoria de 1.200 m.

En la figura adjunta tenemos:

$$\frac{H'H}{X} = \text{tang } \epsilon_1 = \frac{3}{1200} = \text{tang } 7' 35'',$$

$$D_1 = 1125, \quad \frac{3}{1125} = \text{tang } 9' 15'', \quad D = 1110,$$

$$\frac{3}{1110} = \text{tang } 9' 25'', \quad D = 1110.$$

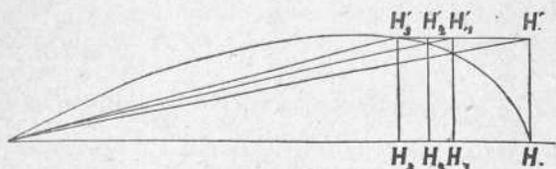


Fig. 10.

El espacio peligroso es de  $1200 - 1110 = 90$  m.

31. Ángulo que forma la línea de situación de un punto de la trayectoria con la tangente a la misma en dicho punto.

*Ejemplo 1.<sup>o</sup>*—Se desea conocer el ángulo que forma la tangente con la línea de situación a los 900 m. de abscisa en una trayectoria dada.

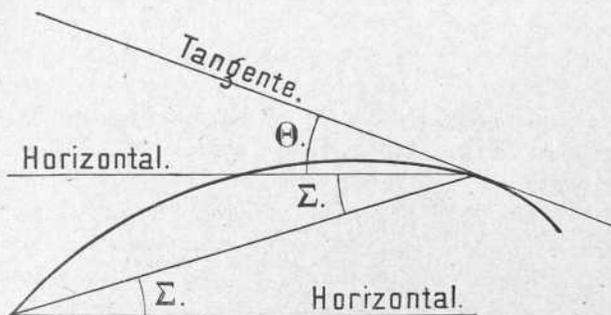


Fig. 11.

Este ángulo es constante cualquiera que sea la trayectoria considerada. En efecto; su valor es  $\theta + \epsilon$ , y se obtiene haciendo coincidir el rayo rojo con la división 9 de la escala (7, 8) y haciendo a continuación la lectura de  $\theta + \epsilon$  sobre la escala (5), en la coincidencia con

la división 9 de la (6). Teóricamente se comete un error al admitir la constancia del ángulo  $\theta + \varepsilon$ ; pero admitida la pequeñez de ángulos el error cometido es despreciable. Por otra parte, este resultado no es más que una consecuencia del principio de la rigidez de la trayectoria en virtud del cual el ángulo  $\theta + \varepsilon$  sería el de caída de la trayectoria de 900 m. de alcance.

En la resolución del problema se pueden presentar tres casos:

- 1.º Que el alcance sea menor que 900 m.
- 2.º Que esté comprendido entre 900 y 1.420 (1.420 es la trayectoria en que el vértice tiene de abscisa 900 m.).
- 3.º Que el alcance sea mayor de 1.420 m.

*Ejemplo 2.º—1.º caso.*  $X = 600$  m.

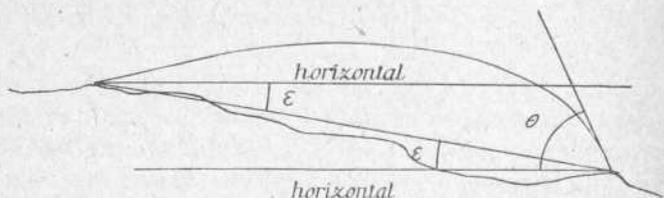


Fig. 12.

El punto de la trayectoria de abscisa 900 m. está por debajo de la horizontal y  $\varepsilon$  es negativo.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -16', & \theta &= 1^\circ 14', \\ \theta + \varepsilon &= 1^\circ 14' - 16' = 58'.\end{aligned}$$

*2.º caso.*

$$\begin{aligned}X &= 1350 \text{ m.}, \\ \varepsilon &= 49' 10'', \\ \theta &= 8' 50''.\end{aligned}$$

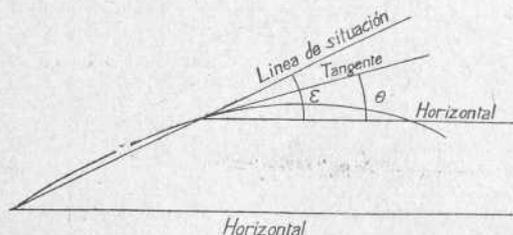


Fig. 13.

El punto es de la rama descendente

$$\varepsilon + \theta = 57' + 60'' = 58'.$$

*3.º caso.*  $X = 1700$  m.;  $\varepsilon = 1^\circ 41' 30''$ ,  $\theta = -43' 30''$ ,  
 $\theta + \varepsilon = 1^\circ 41' 30'' - 43' 30'' = 58'$ .

## Fuegos rasantes.

32. El estudio de la rasancia de una posición se reduce a la determinación del punto o puntos del terreno, para los que se verifica la fórmula

$$\omega = p + \varepsilon,$$

en la que  $\omega$  es el ángulo de caída,  $p$  el de pendiente del terreno y  $\varepsilon$  el de situación.

Si el perfil objeto de estudio está desenfilado,

$$\omega < p + \varepsilon,$$

y si está batido,

$$\omega > p + \varepsilon.$$

Consideremos una elevación con una contrapendiente de  $1^{\circ} 15'$  a una distancia de 1.400 m., suponiendo el ángulo de situación

$$\varepsilon = 1^{\circ} 10'.$$

El ángulo de caída a 1.400 m. es  $3^{\circ} 7' > 1^{\circ} 15' + 1^{\circ} 10'$ ; el terreno está batido. En lugar de buscar el ángulo de caída,  $3^{\circ} 7'$ , podríamos haber llevado el índice del platillo a la división  $1^{\circ} 15'$  de  $5'$ , y dejando el índice fijo en esta posición, llevar después el rayo rojo sobre el índice. Conseguida esta superposición, si la división  $1^{\circ} 10'$  queda a la izquierda del 14 de (7), el terreno está desenfilado; si lo está a la derecha, como ahora ocurre, estará batido, y si la división  $1^{\circ} 10'$  hubiese coincidido con 14, estaría rasado.

En otro lugar (1) establecimos que cuando un tirador avanza sobre una pendiente descendente, horizontal o ascendente menor que el ángulo  $\varepsilon$ , este ángulo va aumentando, y si la pendiente es ascendente, nula u horizontal, o descendente mayor que  $\varepsilon$ , este ángulo va disminuyendo.

(1) «Algunas aplicaciones de la nomografía elemental al tiro de la infantería», *Memorial de Infantería*, núm. 18.

Resultado de esta proposición fundamental es la que, en general, deba realizarse para aumentar o disminuir el ángulo de situación; es decir, avanzar o retroceder. En general, el avance aumenta el ángulo  $\epsilon$  y el retroceso lo disminuye.

En el presente caso deberá aumentarse el ángulo  $\epsilon$  para conseguir el punto de rasancia, por lo cual avanzaremos, observando en el aparato que el ángulo de caída de  $2^{\circ} 25'$  corresponde a un alcance de 1.250 m.

Para buscar el punto de rasancia deberemos avanzar hasta los 1.300 m. Supongamos que a esta distancia el ángulo de situación es de  $1^{\circ} 20'$ .

Operando con el aparato como ya se ha dicho, se observa que el perfil está batido, incidiendo las trayectorias con un ángulo de  $3' 30''$ . Es decir, que prácticamente está rasada la posición. Es preferible en la práctica que las trayectorias incidan con un pequeño ángulo que no la rasancia teórica, pues un error en el ángulo en sentido contrario nos dejaría desenfilada la posición.

Medida la distancia y ángulo de situación de una meseta horizontal, se desea averiguar si nuestros fuegos serán o no eficaces.

Sea

$$x = 950 \text{ m.}, \quad p = 0, \quad \epsilon = 1^{\circ} 10'.$$

Colocado el rayo rojo sobre el 9,5 en (6), se ve que la división  $1^{\circ} 10'$  queda a la derecha de la 9,5 de la (7), lo que nos indica que la meseta está batida; por otra parte, entre esta última división de (7) y la  $1^{\circ} 10'$  de (5) quedan tres divisiones de (5), lo cual nos indica que las trayectorias inciden con un ángulo de  $3'$ . La meseta está prácticamente rasada.

Una posición tiene una contrapendiente de  $2^{\circ} 15'$ . Medida la distancia con el telémetro y la pendiente con el eclímetro, se ha obtenido 1.150 m. y  $1^{\circ} 25'$ . Con estos datos encontramos que el terreno está completamente desenfilado de nuestros fuegos, y seguirá tanto más desenfilado cuanto más nos aproximemos. Retrocedemos o se da orden a otra fuerza de que a nuestra retaguardia, a 1.450 m., haga fuego. El ángulo de situación es  $1^{\circ}$ . El aparato nos dice que con estos fuegos se bate la posición con un ángulo incidente de  $8'$ .

**Tiro indirecto** (fig. 14).

33. Medidos desde  $B$  los ángulos  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  o el ángulo  $HBA$  suplementario del  $CBA$  con un sextante, se tiene en el triángulo  $ABC$

$$\operatorname{tang} \frac{C-A}{2} = \frac{AB-BC}{AB+BC} \operatorname{tang} \frac{C+A}{2}$$

o bien

$$\operatorname{tang} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\varepsilon}{2} = \frac{AB-BC}{AB+BC} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},$$

$$\operatorname{tang} \left[ \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = \frac{AB-BC}{AB+BC} \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}.$$

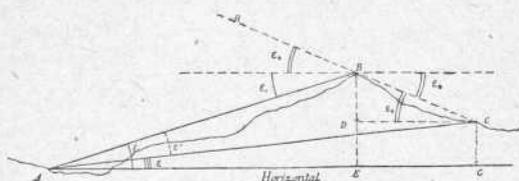


Fig. 14.

El ángulo  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  lo da el aparato (sextante, nivel, eclímetro, etcétera); las distancias de  $AB$  y  $BC$  se miden con el telémetro. Supongamos son

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 2^\circ 10' \\ \varepsilon_2 = 3^\circ 9' \end{array} \right\} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 5^\circ 19' \quad \left. \begin{array}{l} AB = 1345 \\ BC = 760 \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB - BC = 585 \\ AB + BC = 2105. \end{array}$$

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = 2^\circ 39' 30'',$$

$$\operatorname{tang} (2^\circ 38' 30'' - \varepsilon') = \frac{5,85}{21,05} \operatorname{tang} (2^\circ 29' 30'') = \operatorname{tang} (44' 30'')$$

$$\begin{array}{r} 2^\circ 29' 30'' \\ 44' 30'' \\ \hline \varepsilon' = 1^\circ 45' 0''. \end{array}$$

El ángulo de situación de  $\epsilon'$  para batir el punto  $C$  es, pues, de  $1^\circ 45'$ .

1.º En la trayectoria de alcance 2.105 m. al ángulo de situación  $1^\circ 45'$  corresponde una abscisa de 1.555 m.; luego es posible el tiro indirecto por ser  $1.555 > AB = 1.345$ , y se realizará apuntando a  $B$  con alza  $15 \frac{1}{2}$ .

2.º Apuntando con alza  $13 \frac{1}{2}$  (que es la correspondiente a la distancia  $AB$ ) las trayectorias que pasan por  $B$  tendrán un alcance, sobre la línea recta  $AC$ , de 1.950 m.; luego estas trayectorias cortan al perfil  $BC$  a 155 m., aproximadamente, antes de llegar a  $C$ . Sin embargo, la situación de las reservas en  $C$  es peligrosa, pues si el tiro está centrado sobre  $B$ , la mitad superior del haz alcanzará precisamente en toda su intensidad a  $C$ .

3.º Veamos si puede existir espacio desenfilado para las reservas por detrás de  $B$ . Observemos, al efecto, que  $\epsilon_2 + \epsilon_1 = 5^\circ 19' > 2^\circ 52'$  (ángulo de caída a los 1.345 m.); luego las trayectorias inciden en  $B$ ,



Fig. 15.

quedando por debajo de  $HB$  ser tangentes a esta recta, cortando en  $B$  y  $BC$  y pasando a continuación a la parte superior de  $BC$ . Nos indica esto que la contrapendiente está desenfilada de los fuegos.

4.º De la diferencia  $5^\circ 19' - 2^\circ 52' = 2^\circ 27'$  deducimos que el trozo de trayectoria  $BB'$  forma con la contrapendiente un ángulo de  $2^\circ 27'$ . Suponiéndola rectilínea en el triángulo  $BB_1C_1$  en que  $C_1B_1$  supondremos la altura de un blanco de 1,60, se tiene

$$\frac{B_1C_1}{BC_1} = \text{tang } 2^\circ 27' \quad \text{y} \quad BC_1 = \frac{B_1C_1}{\text{tang } 2^\circ 27'};$$

$$BC_1 = \frac{1,60}{\text{tang } 2^\circ 27'} = 37 \text{ m.}$$

Viéndose, pues, desde el punto  $B$  o  $C$ . El  $C$  o el  $B$ , podremos situar los sostenes a 40 m. de la cresta sin peligro alguno, teniendo en cuenta que éste disminuye cuando el enemigo se acerca, y aumenta al alejarse.

5.º La inclinación con que inciden las trayectorias que pasan por  $B$  con el terreno, supuesto horizontal en las proximidades de  $C$ , es  $(6^\circ 34' - 3^\circ 24') = 3^\circ 10'$ .

Hemos abusado, intencionadamente, de los ejemplos, por tratarse de un aparato cuyo objeto es, como se ha visto, la resolución práctica de algunos problemas militares presentados especialmente a los oficiales, y por demostrarse así más palpablemente la sencillez de su manejo, el exceso de su aproximación, cometiendo errores insignificantes en teoría y de valor nulo en la práctica, y el alcance y naturaleza de los problemas resueltos.

El estudio de una posición se hace con todo el rigor teórico apetecible, determinándose los espacios desfilados, batidos y rasados, no como el clipsógrafo, que exige un plano topográfico, sino directamente, en el campo, con un simple telémetro-eclímetro manejado al frente de los soldados. En ejercicios de cuadros se hace indispensable para llegar al dominio del haz de trayectorias probables lanzado sobre una posición y para el cálculo de los efectos producidos en ciertas condiciones.

---



# NOMOGRAMA

PARA EL

# CÁLCULO DE CANALES

POR

D. PABLO FERNÁNDEZ QUINTANA

INGENIERO DE CAMINOS, PROFESOR DE LA ESCUELA DEL CUERPO

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

Una de las fórmulas más usadas para calcular la cantidad de agua que podrá circular por un canal, es la llamada *fórmula nueva de Bazin*, dada por este ilustre ingeniero francés.

Esta fórmula es la siguiente:

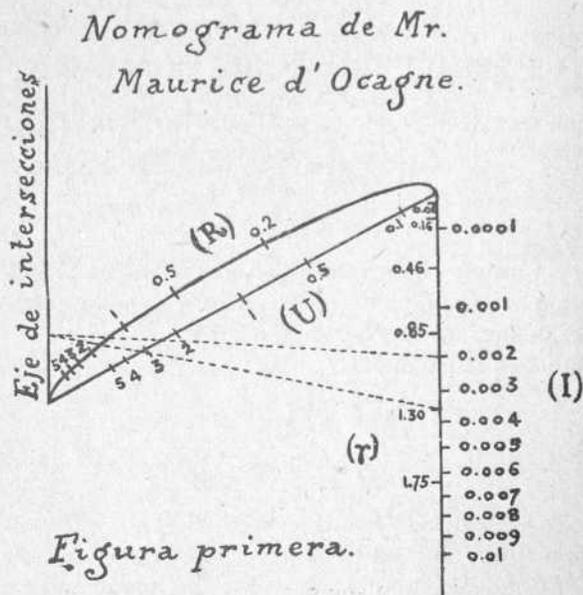
$$U = \frac{87 \sqrt{RI}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

en la cual  $U$  es la velocidad del agua en metros por segundo,  $R$  el radio medio en metros, o sea el cociente del área de la sección del canal por el perímetro mojado de dicha sección,  $I$  la pendiente y  $\gamma$  un coeficiente que depende de la naturaleza de las paredes o cajeros del canal, y cuyos valores son los siguientes:

Paredes muy lisas, cemento, madera acepillada.....	$\gamma =$	0,06
Idem lisas, tablas, ladrillo, sillería.....		0,16
Idem de mampostería.....		0,46
Idem de tierra muy regulares, encachados, empedrados....		0,85
Idem de id. de condiciones ordinarias.....		1,30
Idem de id. muy ásperas, con hierbas ó guijarros.....		1,75

Varios autores han ideado diversas clases de nomogramas para facilitar la aplicación de dicha fórmula. Entre ellos pueden citarse dos,

propuestos por el ingeniero francés Mr. D'Ocagne en su excelente *Tra-  
tado de Nomografía* y en su obra *Cálculo gráfico y Nomografía*. El pri-  
mero de ellos se indica en croquis en la *figura 1.<sup>a</sup>*, y tanto en él como  
en el otro, que no dibujamos por no distraer y alargar demasiado esta  
Nota, para resolver el problema hay que hacer una doble alineación  
de puntos. En el de la *figura 1.<sup>b</sup>* hay que unir los puntos correspon-  
dientes de las escalas  $\gamma$  y  $R$ , y la intersección de su recta con el *eje de*  
*intersecciones*, unida a su vez con el valor de  $I$ , nos dará en la escala  
de las  $U$  el valor de esta variable.



En la figura se indica el caso en que los datos sean  $\gamma = 1,30$ ;  
 $R = 1,6$ ;  $I = 0,002$ , y el gráfico da por solución  $U = 2,4$  metros  
por segundo.

En otro de los nomogramas, las dos rectas concurrentes que re-  
suelven el problema se reemplazan por dos rectas paralelas; pero siem-  
pre es preciso realizar una doble alineación.

Esto proviene de ser la ecuación que ha de representar gráfica-  
mente el nomograma una fórmula entre *cuatro* variables, siendo así  
que una alineación sólo puede ligar generalmente a *tres*.

Pero conviene tener en cuenta que, aunque el *coeficiente de rugo-*

Nomograma que se propone  
para el cálculo de canales.

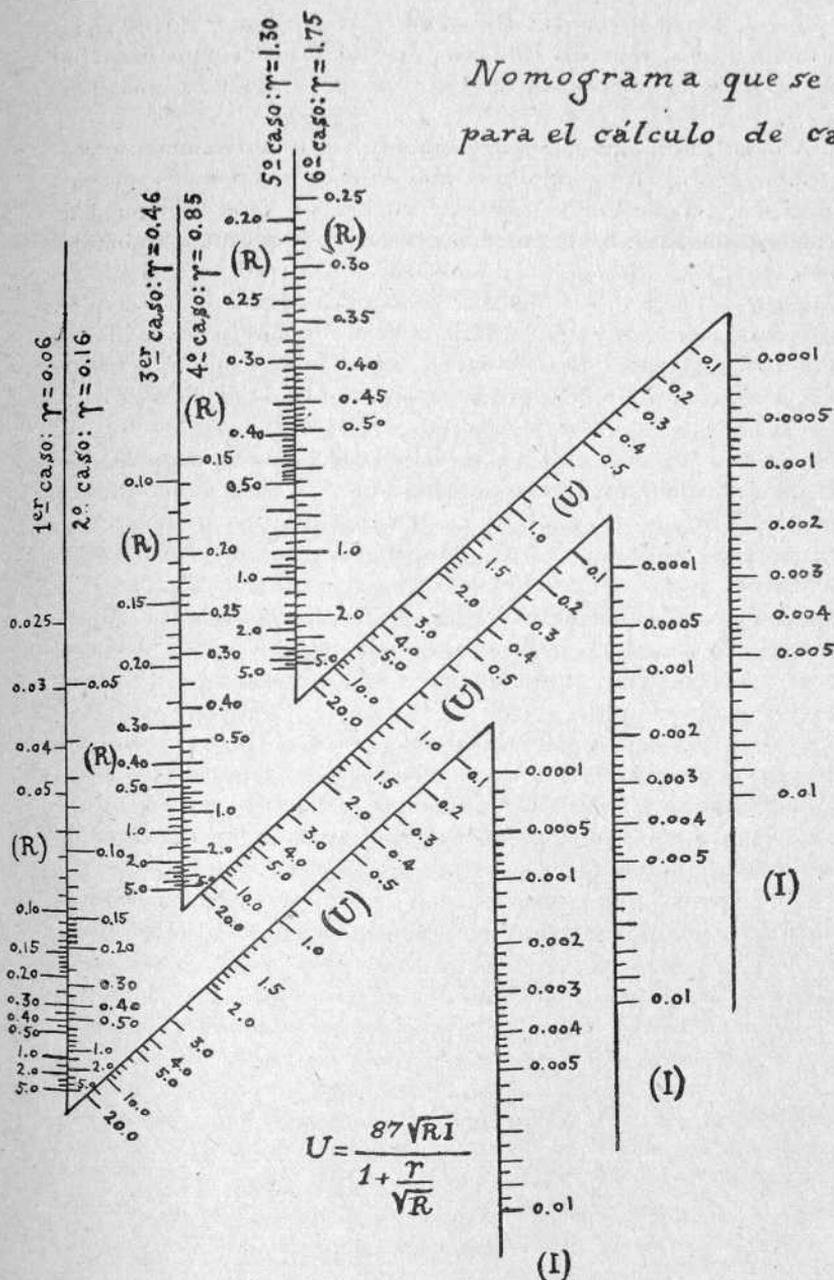


Figura segunda

alidad  $\gamma$  puede tomar diversos valores, en cada cuestión  $\gamma$  no es realmente una *variable*, sino una *constante*, pues al proyectar un canal se sabe de antemano en qué clase de terreno va a construirse; es conocido por eso  $\gamma$ .

En realidad, esto equivale a descomponer el nomograma en otros seis diversos, correspondiendo cada uno de ellos a uno de los seis valores que puede tomar el coeficiente de rugosidad. Esos seis pueden construirse fácilmente: basta proyectar la escala  $R$  del nomograma de Mr. D'Ocagne desde uno de los puntos de la escala  $\gamma$  sobre el eje de intersecciones, y tendremos sobre éste una nueva escala de las  $R$  que, en unión de las de las  $U$  y de las  $I$ , nos deja el nomograma reducido a uno de tres variables sobre tres rectas. Basta unir el punto de la escala nueva de las  $R$  al punto que corresponda en la escala de las  $I$  para tener en la de las  $U$  el valor de esta última variable.

Como sobre la recta, escala nueva de la  $R$ , pueden trazarse dos escalas, una a cada lado, correspondiendo una de ellas a uno de los valores de  $\gamma$  y otra a otro distinto, resulta que los seis nomogramas pueden reducirse solamente a tres, y también se pueden agrupar éstos, como indica la figura 2.<sup>a</sup>, con lo cual ocupan poco espacio.

Con lo dicho es suficiente para que el que desee construir el nomograma pueda hacerlo, trazando previamente el de Mr. D'Ocagne, con arreglo a las instrucciones contenidas en el *Tratado de Nomografía* de dicho autor.

La figura 2.<sup>a</sup> indica la disposición del gráfico, y no se cree necesario añadir que para utilizarlo basta tener en cuenta que los valores correspondientes de  $U$ ,  $R$  e  $I$  están en línea recta en el gráfico en las tres escalas correspondientes al valor de  $\gamma$  que nos indique la clase de terreno o materiales que formen los cajeros del canal.

Si estas ligeras indicaciones pueden ser útiles a alguno de sus compañeros, se habrán cumplido sobradamente los deseos del autor.

---

# PROYECTO DE UN ELIPSÓGRAFO

POR

D. VICENTE VENTOSA

PRIMER ASTRÓNOMO JUBILADO DEL OBSERVATORIO DE MADRID;  
DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

---

Laudable en extremo fué la idea de realizar una Exposición de material científico en los Congresos organizados por la ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA EL PROGRESO DE LAS CIENCIAS, como complemento a los trabajos de la misma y para estímulo de las personas, escasas por desgracia en nuestro país, que se dedican a las aplicaciones fecundas de la teoría, sin las cuales, ésta en muchos casos resulta estéril. En el Congreso de Granada fué, por vía de ensayo, organizada por primera vez una Exposición de aparatos proyectados y construídos en España, que obtuvo éxito lisonjero, el cual se acrecentó al repetirla dos años ha en el de Madrid. Para el que ha de celebrarse en Valladolid durante los días 17 al 22 de Octubre próximo, es de esperar que el concurso sea todavía más lucido y numeroso, en vista de los satisfactorios resultados anteriormente obtenidos.

Deseando contribuir, dentro de mis limitadas fuerzas, a la Exposición que se prepara, me he decidido, no sin vacilar antes mucho, a presentar el proyecto de un modestísimo aparato, cuyo objeto es el trazado de la *elipse*, no más que por haber merecido la aprobación unánime de varias personas competentes a quienes primero sometí la idea.

No ha habido tiempo para construir esmeradamente el aparato, ni aun para acompañar a esta Memoria, como me proponía, aunque en vías de ejecución se halla, un tosco modelo del mismo, construído con los únicos materiales ahora disponibles (metal y madera), pero a mi parecer suficiente para dar una noción clara de su modo de funcionar.

En circunstancias tan desfavorables, únicamente a la deferencia que benévolamente me ha otorgado la Comisión organizadora de la Exposición, deberé el honor de que mi humilde trabajo figure entre los demás, sin duda ninguna más importantes, presentados.

## I.

## DESCRIPCIÓN SUCINTA DEL ELIPSÓGRAFO.

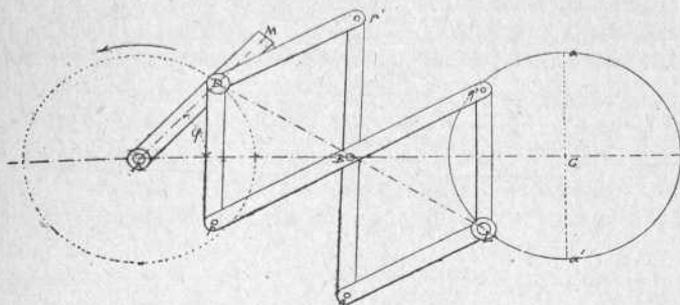
Existen numerosos instrumentos ideados con el fin de trazar curva tan usual como es la elipse, valiéndose de las diferentes propiedades de la misma; he tenido ocasión de ver funcionar algunos, y en láminas la descripción de otros, de manera que no aseguro que el mío sea nuevo o se considerará como superfluo; pero sí puedo afirmar que no lo he visto en ninguna parte. Además, mi aparato, si no me equivoco, es fácil de construir y, *teóricamente* al menos, permitirá trazar, con arreglo a sus dimensiones, toda clase de elipses, hasta la magnitud límite que se desee, y con toda clase de excentricidades, desde la *circunferencia* a la *línea recta*, haciéndose el trazado completo con rapidez suma y de una sola vez, mediante el movimiento giratorio de un manubrio.

El instrumento que propongo ha de constar de dos mecanismos relacionados entre sí, y que funcionarán simultáneamente por medio de dos manivelas o brazos de manubrio montados en un mismo eje vertical. Uno de estos mecanismos pudiéramos llamarlo *trazador de la curva*, porque es el que lleva el lápiz o cosa equivalente, y el otro *excentrico* o regulador de la excentricidad.

Del *trazador* se puede formar idea aproximada mediante la *figura 1.<sup>a</sup>*, hecha sin fijar bien las dimensiones relativas de sus órganos constituyentes.

Una manivela  $AM$ , colocada en el plano superior del aparato, puede girar alrededor de un eje vertical, representado en proyección horizontal por el circulito  $A$ . La longitud del brazo utilizable de la manivela o, lo que es igual, la distancia del punto  $D$  al centro  $A$ , ha de ser variable a voluntad, según las dimensiones que haya de tener la elipse. En  $D$  se apoya uno de los vértices extremos del doble paralelogramo articulado (rombo en nuestro caso)  $Dpp' Bqq' I$ , análogo a los que llevan los pantógrafos. Si *suponemos fijo* el centro  $B$  del doble paralelogramo, que permite deformar éste conforme se desee, toda

figura descrita por el extremo  $D$  será reproducida exactamente en forma y dimensiones por el extremo opuesto  $L$ . Ahora bien, al girar  $D$  alrededor de  $A$ , un lápiz o punta colocado en  $L$ , describirá una *circunferencia* del mismo diámetro que la descrita por  $D$ .

Fig. 1.<sup>a</sup>

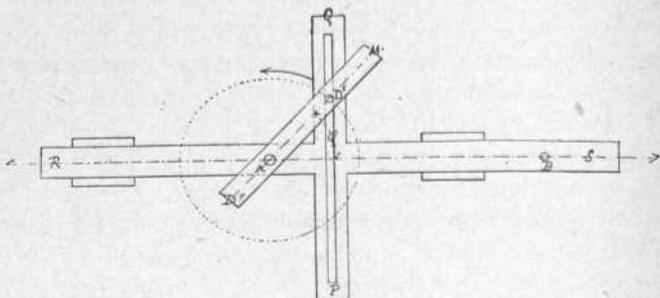
Queda por resolver la segunda parte del problema: transformar esta circunferencia en elipse con la excentricidad que deba tener, según las respectivas dimensiones de sus ejes. Esto se consigue haciendo que el centro  $B$  del doble paralelogramo articulado *no sea fijo*, sino que, a cada revolución de la manivela experimente una *doble oscilación en línea recta*, y en determinadas condiciones, transformando para ello el movimiento circular continuo en otro movimiento rectilíneo alternativo.

Como la teoría del aparato demuestra, la solución del problema se obtiene con el auxilio de un excéntrico de los llamados *de cuadro*, conforme se ha representado toscamente en la *figura 2.<sup>a</sup>*

El extremo *inferior* del eje  $A$  (*figuras 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>*) lleva otra manivela o brazo  $AM'$ , que gira simultáneamente con el brazo superior  $AM$ , siendo *condición esencial* que ambos brazos estén situados en el *mismo plano vertical*, y de manera que al describir uno de ellos un ángulo  $\varphi$ , señale entonces el otro el mismo ángulo ó  $180^\circ + \varphi$ ; en este último caso el punto  $D'$  ocuparía un lugar tal como  $D''$ , en la prolongación del brazo.

En  $D'$  hay un botón o clavija que puede correr a lo largo del brazo mencionado y fijarse en él a una distancia  $AD'$  del centro de rotación, tal, que convenga al valor de la excentricidad de la curva. Dicho botón, situado en la cara inferior de  $AM'$ , encaja en una ra-

nura  $PQ$  del excéntrico  $PQRS$ , que tiene la figura de cruz, de suerte que, al girar  $D'$  alrededor de  $A$ , obligará al excéntrico a efectuar un movimiento de vaivén a lo largo de la recta  $RS$ , arrastrando al punto  $B$ , donde ha de estar situado un pequeño eje vertical, que sirva

Fig. 2.<sup>a</sup>

de apoyo al centro del paralelogramo articulado, quedando así enlazados los dos mecanismos, el *excéntrico* y el *trazador*, cuyo movimiento combinado ha de producir, *en teoría* por lo menos, el trazado *continuo* de la elipse por el lápiz  $L$ .

El *excéntrico*, en la forma empleada en el caso actual, además de ser un mecanismo muy conocido, fué 24 veces utilizado con éxito completo en la construcción de una complicada máquina, cuya idea se debió al célebre Lord Kelvin, para el cálculo gráfico de las mareas en la India. Por otra parte, el *trazador* no es, en suma, más que un pequeño pantógrafo: se ve, pues, que en el aparato que propongo no hay, en rigor, nada nuevo, excepto la combinación de sus elementos.

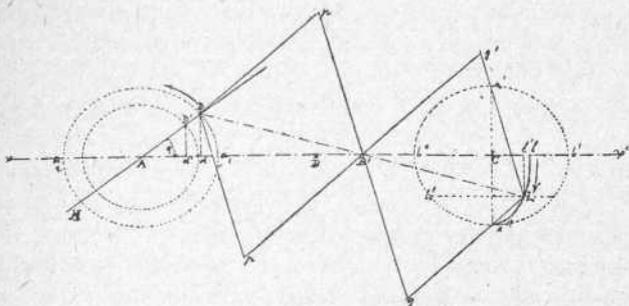
De la sucinta descripción que precede fácilmente se colige que para funcionar este instrumento es preciso que el pequeño eje  $A$  esté sujeto por su parte media a un soporte que deje libres sus extremos superior e inferior, donde han de ir fijados los dos brazos motores. En las *láminas 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>*, dibujadas aparte, están representados con más portomenores ambos mecanismos y en las verdaderas proporciones que, a mi juicio, deben tener, aunque el espesor de las piezas varíe según sea la materia empleada en la construcción de los mismos; requisito que habrá que dejar a la experiencia y habilidad de los artífices que hayan de llevarla a cabo.

## II.

## TEORÍA DEL ELIPSÓGRAFO.

Para establecer dicha teoría nos valdremos de la *figura 3.<sup>a</sup>*, donde, para mayor claridad, solamente han sido trazadas las líneas generales.

Las dos circunferencias, concéntricas en  $A$ , representan los trayectos recorridos por los puntos  $D$  y  $D'$  al girar las manivelas  $AD$  y  $AD'$ , respectivamente, las cuales, debiendo estar situadas, según dijimos, en el mismo plano vertical, sus trazas horizontales deben coincidir. La distancia  $AD$  bastará, en general, que crezca *positivamente* a

Fig. 3.<sup>a</sup>

partir de *cero* (cuando el punto  $D$  coincidiera con el centro  $A$ ), pero la distancia  $AD'$  conviene que pueda contarse *positivamente* en el sentido de  $A$  a  $D$ , y *negativamente* en la prolongación  $AH$ .

El doble paralelogramo articulado, que en la figura indican las rectas  $Dp$ ,  $Dp'$ ,  $p'q'$ ,  $qp'$ ,  $qL$  y  $q'L$ , se apoya en  $D$  por uno de sus vértices. Si el punto  $D'$  coincidiera con  $A$ , el centro  $B'$  del paralelogramo ocuparía *invariablemente* la posición  $B$ ; el movimiento de oscilación del excéntrico sería nulo, y el extremo  $L$  de aquél describiría la circunferencia  $a'b'a''b''$ , exactamente igual a la  $a_1Da_2H$ . Pero en el caso supuesto en el croquis, el punto  $B$  puede recorrer en la recta  $xx'$  una distancia igual al diámetro de la circunferencia  $D'$ , a ambos lados de su posición media. Examinando la *figura 3.<sup>a</sup>* se tendrá que  $BB' = Ad'$  por la propiedad que posee el excéntrico empleado de ser el camino que recorre en línea recta *proporcional al coseno* del án-

gulo descrito por el brazo  $AD'$ . El extremo  $L$  trazará entonces el arco de elipse  $lLa''$ , pues debiendo ser siempre iguales las diagonales de los paralelogramos y prolongación una de otra,  $DB'$  y  $B'L$ , el punto  $L'$  de la circunferencia se habrá trasladado a  $L$  paralelamente a la recta  $xx'$  y de modo que sea  $LL' = 2BB'$ . Circunstancia notable es que el centro de todas las curvas que pueden trazarse ocupa en  $C$  una posición fija y tal que  $BC = AB$ .

Sentados estos precedentes, llamemos

$$AD = r, \quad AD' = r', \quad AB = k, \quad Cl = b, \\ Ca' = a, \quad Cl' = x, \quad Ll' = y;$$

y por comparación de los triángulos  $D'Ad'$ ,  $DAd$ ,  $DB'd$  y  $LB'l'$  tendremos

$$\begin{cases} y = -Dd = -r \operatorname{sen} \varphi \\ x = AB' + B'l' - AC \\ \quad = (k + r' \cos \varphi) + (k + r' \cos \varphi - r \cos \varphi) - 2k = (2r' - r) \cos \varphi \\ a = r \\ b = 2r' - r. \end{cases}$$

Estos valores satisfacen a la ecuación de la elipse referida a sus ejes, porque conducen a la evidente relación  $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ .

La discusión de los valores relativos de los dos radios  $r$  y  $r'$  en las ecuaciones de los semiejes  $a = r$ ,  $b = 2r' - r$  da origen a las siguientes interesantes consecuencias:

Si  $r' > r$  la curva resultante es una *elipse exterior* al círculo  $a'b'a''b''$ :  $a'a''$  es el eje *menor*.

Si  $r' = r$  la curva resultante es un *círculo* de radio igual al de  $AD$ .

Si  $r' < \frac{r}{2}$  la curva resultante será una *elipse interior* a dicho círculo:  $a'a''$  es el eje *mayor*.

En estos tres casos el *sentido* de la rotación es *contrario* al de la manivela  $AD$ .

Si  $r' = \frac{1}{2}r$  resulta una *recta* igual al eje  $a'a''$  o al diámetro del círculo.

Si  $r' < \frac{1}{2}r$  resulta una *elipse interior* al círculo:  $a'a''$  es el eje *mayor*.

Si  $r' = 0$  resulta un *círculo* igual al  $a'b'a''b''$ .

Si  $r' < 0$  resulta una *elipse exterior* al círculo:  $a'a''$  es el eje *menor*.

En estos tres últimos casos el *sentido* de la rotación es el *mismo* que el de la manivela  $AD$ .

Finalmente; si  $r' \geq 0$ ,  $r = 0$ , resulta una *recta* que es el eje  $b'b'$ .

Pongamos ahora algunos ejemplos particulares. Sean

$r = 4$ cm.,	$r' = 3$ ,	$a = 4$ ,	$b = 2$ ;	resultará una elipse de $8 \times 4$ cm.
$r = 4$ »	$r' = 1$ ,	$a = 4$ ,	$b = -2$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{idem la misma elipse, pero trazada en} \\ \text{sentido inverso.} \end{array} \right.$
$r = 4$ »	$r' = +6$ ,	$a = 4$ ,	$b = +8$ ;	
$r = 4$ »	$r' = -2$ ,	$a = 4$ ,	$b = -8$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{idem la misma elipse, trazada en sen-} \\ \text{tido inverso (1).} \end{array} \right.$

Por estos ejemplos se ve que hay dos maneras de trazar una misma elipse; en la práctica tal vez sea más conveniente elegir el menor valor de  $r'$ , porque da el mismo resultado, aunque en sentido inverso, con un brazo de manivela menor, sin necesidad de exagerar sus dimensiones.

Otros ejemplos. Sean

$r = 3$ ,	$r' = 4$ ,	$a = 3$ ,	$b = 5$ ;	darán una elipse de $10 \times 6$ cm.
$r = 2$ ,	$r' = 4$ ,	$a = 2$ ,	$b = 6$ ;	idem otra elipse de $12 \times 4$ cm.
$r = 1$ ,	$r' = 4$ ,	$a = 1$ ,	$b = 7$ ;	idem otra elipse de $14 \times 2$ cm.
$r = 0$ ,	$r' = 4$ ,	$a = 0$ ,	$b = 8$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{idem una recta; la línea de los cen-} \\ \text{tros de 16 cm. de longitud.} \end{array} \right.$
$r = -1$ ,	$r' = 4$ ,	$a = -1$ ,	$b = 9$ ;	
$r = -2$ ,	$r' = 4$ ,	$a = -2$ ,	$b = 10$ ;	idem otra elipse de $20 \times 4$ cm., etc.

Cuando se quiera trazar una elipse cuyos ejes sean conocidos, habrá que hallar primeramente el valor del radio  $r'$  del excéntrico. De las

ecuaciones  $a = r$ ,  $b = 2r' - r$ , se deduce  $r' = \frac{a+b}{2}$ .

Sea una elipse de  $16 \times 8$  cm., tendremos  $a = 8$ ,  $b = 4$  y  $r' = 6$ . Como los valores de  $a$  y  $r$  sean acaso demasiado grandes, porque se necesitaría un instrumento excesivamente voluminoso, puede suponerse  $a = 4$ ,  $b = -8$  y entonces  $r' = \frac{4-8}{2} = -2$ ,  $r = 4$ , que resuelven el mismo problema con valores más pequeños y aceptables. Como se advierte, el nuevo elipsógrafo es susceptible de muchas aplicaciones.

(1) Véase la *Idmína* 3.<sup>a</sup>

## III.

## AMPLIACIÓN DE LAS ELIPSES.

Todavía en este elipsógrafo es posible agrandar su campo de acción, bastando para ello *intercalar*, mediante dos tornillos, una *aspa* o X articulada entre los lados del segundo paralelogramo (algo semejante al *larguero* que se agrega a algunos compases para poder trazar círculos de mayor radio), quedando así el instrumento compuesto de *tres* paralelogramos, en lugar de dos solamente en su estructura más sencilla. De qué modo llega esto a realizarse fácilmente, he tratado de hacerlo palpable en la *lámina 4.<sup>a</sup>*

El examen de la figura esquemática delineada en la parte superior de la misma lámina, demuestra que en el tercer paralelogramo las relaciones que ligan los dos radios  $r$  y  $r'$  a los semiejes de la elipse, son

$$a' = 2r, \quad b' = 3r' - 2r,$$

de manera que el eje  $a'$ , perpendicular a la línea de los centros, duplica de valor, pero no así el otro eje; resultando que la nueva elipse no es doble de la primitiva, ni semejante a ella, aunque sea facilísimo conseguirlo, como se verá a continuación:

Así, si

$$r = 4 \text{ cm.}, \quad r' = 3,$$

se tendrá

$$a' = 8 \text{ cm.}, \quad b' = 1,$$

o una elipse de  $16 \times 2$  cm., en vez de  $16 \times 8$ ; si

$$r = 4 \text{ cm.}, \quad r' = -2,$$

se tendrá

$$a' = 8 \text{ cm.}, \quad b' = -14,$$

o una elipse de  $28 \times 16$  cm., en vez de  $32 \times 16$ , conforme se halló antes. Pero esta diferencia desaparece del modo sencillo siguiente:

Sean  $a$  y  $b$  los semiejes de la elipse trazada con el doble paralelogramo y  $a'$  y  $b'$  los semiejes de la trazada con el triple paralelogramo. Necesitamos saber qué valor  $r''$  ha de darse en este caso a  $r'$  para que los dos ejes de la elipse queden duplicados. Tendremos, pues,

$$\begin{aligned} a' &= 2a, & 2a &= 2r, & 2b &= 4r' - 2r, \\ b' &= 2b, & a' &= 2r, & b' &= 3r'' - 2r. \end{aligned}$$

De aquí se deduce

$$r'' = \frac{4}{3} r'.$$

Apliquemos esta relación a los dos ejemplos precedentes y será:

$$r'' = \frac{4}{3} \times 3 = 4, \quad a' = 8, \quad b' = 4 \times 3 - 2 \times 4 = 4,$$

o una elipse de  $16 \times 8$  cm.;

$$r'' = \frac{4}{3} \times -2 = -\frac{8}{3}, \quad a' = 8, \quad b' = -\frac{8}{3} \times 3 - 2 \times 4 = -16,$$

o una elipse de  $32 \times 16$  cm., que es lo que se deseaba.

También aquí puede determinarse con igual facilidad el valor de  $r'$  correspondiente a los de los semiejes  $a'$  y  $b'$ , que se suponen conocidos, por la fórmula

$$r' = \frac{a' + b'}{3},$$

que da lugar a una discusión análoga a la que se hizo para el doble paralelogramo.

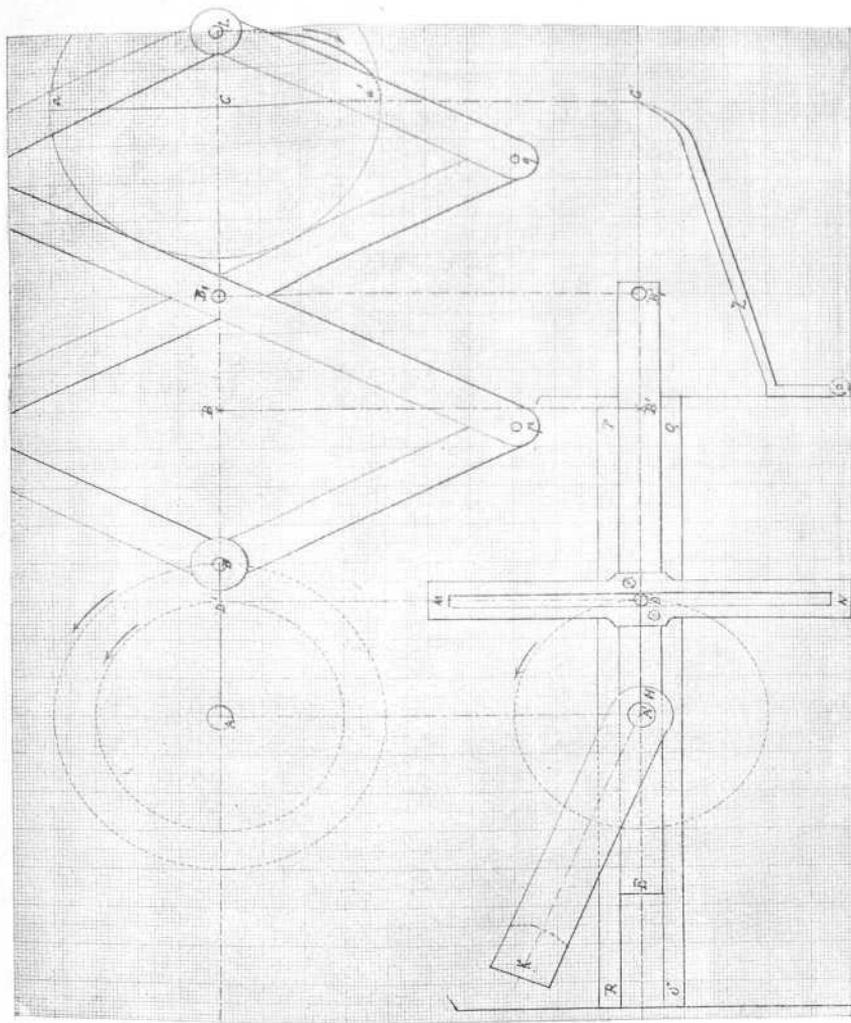
Esta posibilidad de *duplicar* las dimensiones de los ejes de las elipses, paréceme que no la tiene ninguno de los elipsógrafos conocidos. Claro está que la perfección del trazado de las curvas dependerá en gran parte del esmerado y completo ajuste de las diversas piezas del instrumento, pues los defectos de construcción es de suponer racionalmente que se manifiesten con más evidencia en las curvas de mayor tamaño. Por el mismo motivo, y aparte de la complicación que reo-

sultaría, no parece prudente agregar más paralelogramos, como por el mismo procedimiento y con la misma facilidad podría realizarse, *triplicando*, *cuadruplicando*, etc., las elipses, cuyos ejes crecerían con arreglo a las siguientes fórmulas generales:

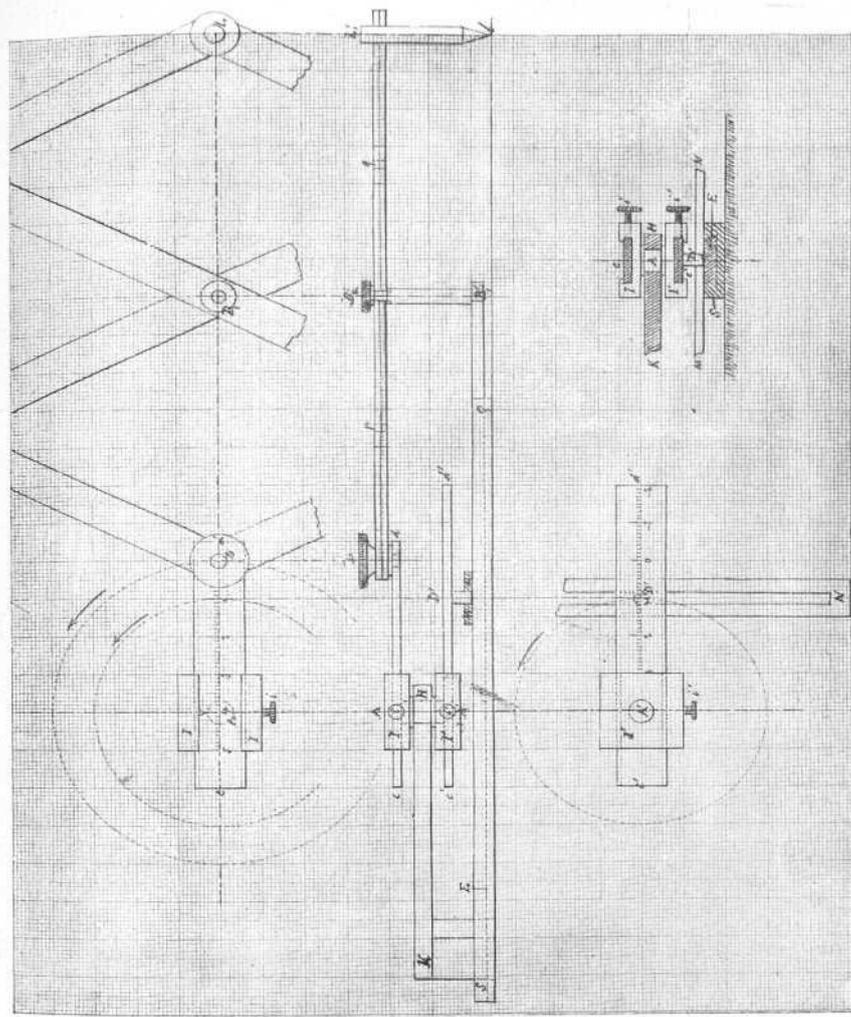
$$a_n = (n - 1) r, \quad b_n = nr' - (n - 1) r,$$

en las que  $n$  representa el número de paralelogramos articulados.

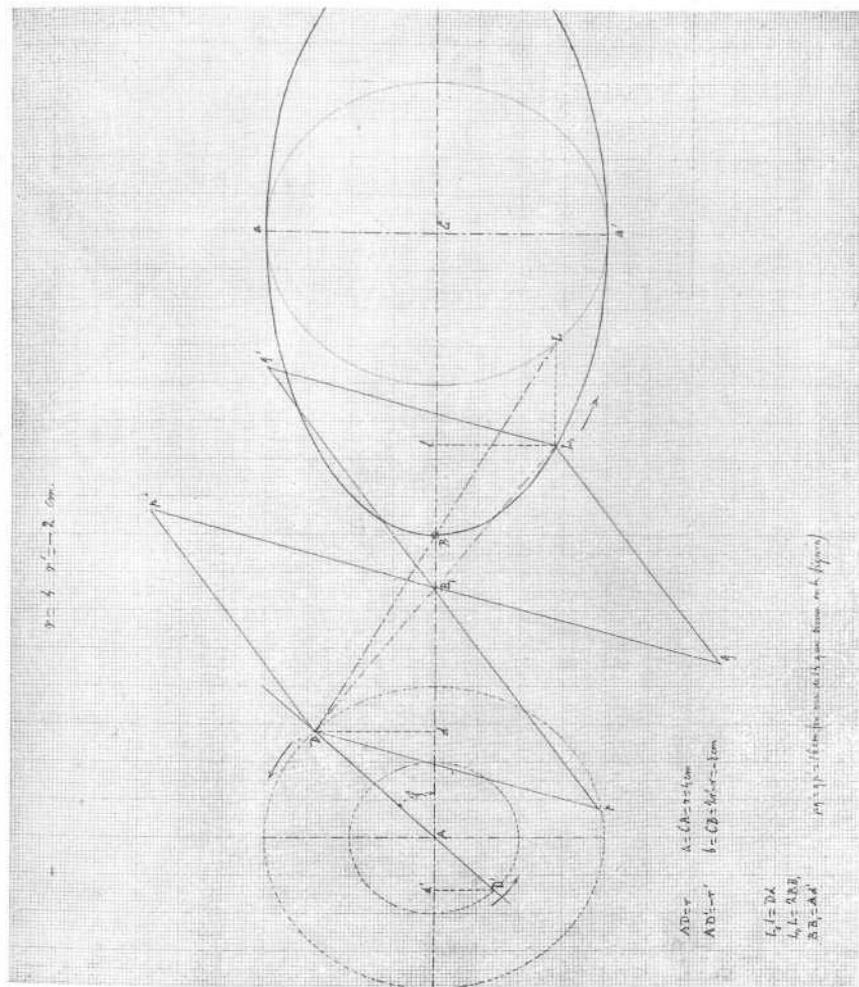
---



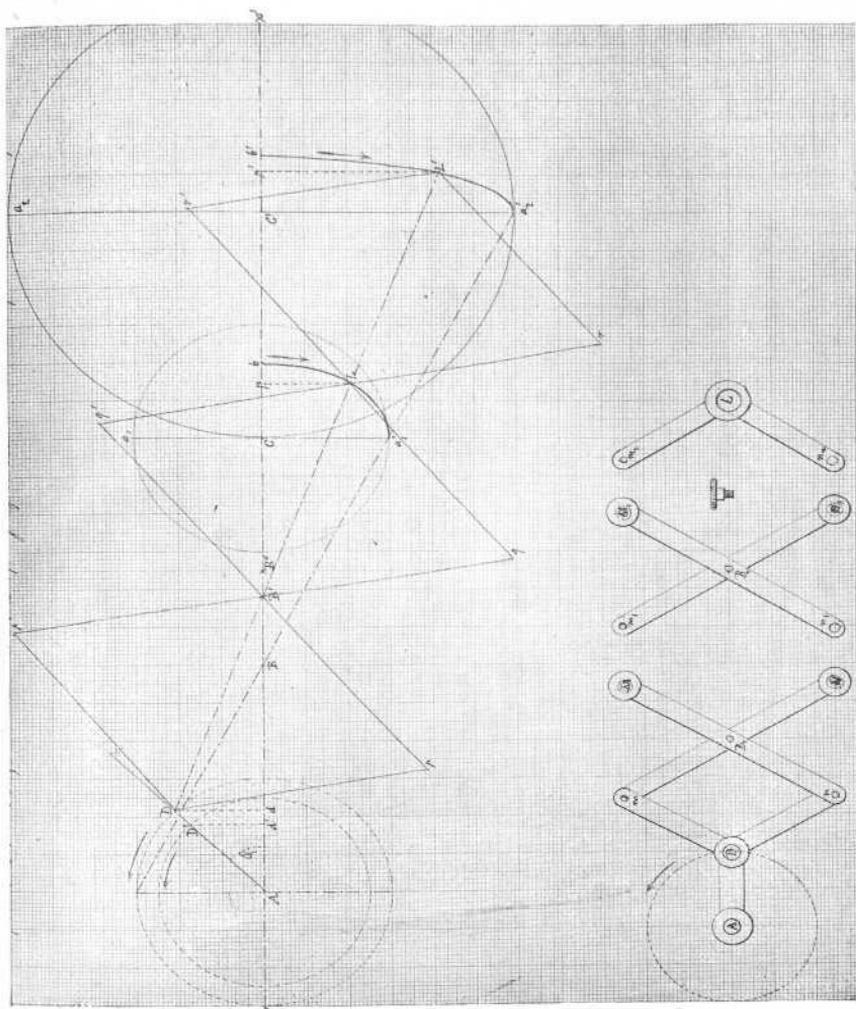














# PARABOLÓGRAFO E HIPERBOLÓGRAFO

POR EL

PADRE GASTÓN FERRER, S. J.

PROFESOR DEL COLEGIO MÁXIMO DE SAN IGNACIO

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

## PARABOLÓGRAFO.

FUNCIONES ENTERAS.

### Principio en que se funda el aparato.

Sea una curva,  $y = f(x)$ , representando por  $f$  una función cualquiera, y  $M$  un punto de esta curva correspondiente al valor  $x_1$  de  $x$ , de modo que  $y_1 = f(x_1)$  (fig. 1.<sup>a</sup>). Si por el origen  $O$  y el punto  $P(1, y_1)$  se traza una recta  $OP$ , ésta encontrará a la recta  $x = x_1$  en un punto  $N$ , que pertenecerá a una segunda curva definida por la ecuación

$$y = f(x) x.$$

En efecto, llamando  $y_2$  la ordenada del punto  $N$ , se tendrá

$$y_2 = x_1 \text{ tang } M'ON;$$

pero

$$\text{tang } M'ON = \frac{NM'}{OM'} = \frac{PP'}{OP'} = \frac{PP'}{1} = PP',$$

luego

$$y_2 = x_1 PP' = x_1 y_1 = x_1 f(x_1),$$

y la ecuación del lugar geométrico será

$$y = f(x) x.$$

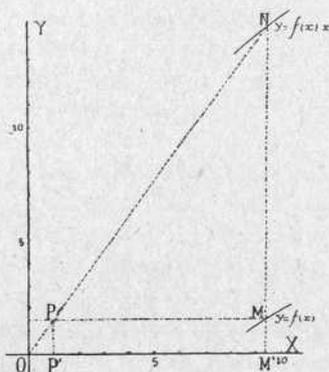


Fig. 1.<sup>a</sup>

Establecido este teorema, viene inmediatamente la idea de construir un instrumento que repita de una manera continuada la construcción geométrica precedente. He aquí un modelo sencillo de dicho aparato.

### Descripción del instrumento (1).

Supongamos un bastidor rectangular  $SS'$  (*fig. 2.<sup>a</sup>*) colocado sobre un plano vertical. La regla  $RR'$  resbala sobre los lados verticales del

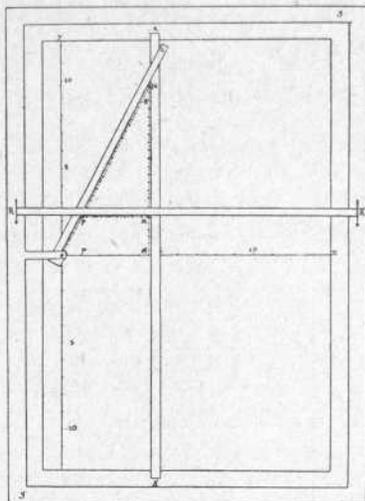


Fig. 2.<sup>a</sup>

marco anterior, de modo que el movimiento sea suave y la regla se mantenga siempre paralela a sí misma, es decir, conserve al moverse la dirección horizontal. Igualmente,  $AA'$  es una regla que se desliza paralelamente a su posición vertical sobre los lados horizontales del cuadro  $SS'$ . Por fin, una tercera regla  $OQ$ , sujeta al bastidor por medio del sostén  $Ox'$ , gira alrededor del origen  $O$  de las coordenadas en el sentido indicado por la flecha  $F$ . El dibujo adjunto muestra que estas tres reglas se hallan en tres planos diferentes, quedando la giratoria  $OQ$  en medio de las reglas horizontal y vertical.

En la figura aparecen tres pequeños círculos, cuyos centros son los puntos  $N$ ,  $M$  y  $P$ , respectivamente, y que representan las proyecciones de otros tantos cilindros; el primero  $N$  es un lapicero o grafío que

(1) Téngase presente que la siguiente descripción da la disposición teórica del aparato, pues en la práctica, para mayor comodidad, hay que modificar esa disposición y aun añadir piezas accesorias que no mencionaremos.

La *figura 2.<sup>a</sup>* muestra la sección transversal del instrumento, reducido, para más claridad, al primero y cuarto cuadrantes. Una sencilla modificación lo hace extensible a todo el plano. Las líneas puntuadas son imaginarias e indican con toda precisión la aplicación del teorema demostrado. Las curvas de las demás figuras están trazadas obteniéndose por medio del principio demostrado algunos puntos, los más principales, que se unieron después con un curvígrafo o plantillas de curvas.

hace del aparato un instrumento automáticamente inscriptor, y que fijo a un sistema móvil puede recorrer la regla  $AA'$  en toda su longitud en la dirección marcada por la flecha  $G$ , mientras una fuerza superior no le obligue a seguir la dirección contraria. El círculo  $P$  representa un sostén cilíndrico colocado de un modo invariable en la regla  $RR'$  a la unidad distancia, es decir, que la abscisa del punto  $P$  sea siempre igual a la unidad. Finalmente,  $M$  es un lápiz o puntero independiente de todo el sistema, pero que tiene que ser, cualquiera que sea la posición que ocupe, tangente a las dos reglas horizontal y vertical.

Esto supuesto, fácil es ver el uso del aparato. Imaginemos una curva cualquiera, trazada en un papel y referida a dos ejes rectangulares de coordenadas. Coloquemos nuestro aparato sobre el papel, haciendo coincidir los ejes de la curva con los ejes imaginarios que se pueden suponer en el aparato, tomando como origen el punto  $O$ . Si tenemos que la punta del lápiz  $M$  va recorriendo de izquierda a derecha la curva trazada, la regla  $AA'$  se irá también moviendo de idéntica manera, mientras que la regla horizontal sube impelida por el puntero o baja en virtud de su propio peso, según sea la ley que rige en su movimiento al punto generador de la curva trazada.

Entre tanto, el sostén  $P$ , al bajar o subir, ha dejado libre a la regla  $OQ$  de moverse naturalmente en dirección de  $F$ , o la ha forzado a girar en sentido contrario; pero en todo caso,  $OQ$ , deteniendo constantemente al grafio  $N$ , le ha hecho ocupar sin cesar la posición demostrada en el teorema; es decir, le ha hecho describir la nueva curva, cuya ecuación es  $y = f(x)x$ , siendo  $y = f(x)$  la ecuación de la curva dada.

Es de notar que la demostración dada en el teorema es general e independiente de la posición que ocupe en el plano el punto  $M$ ; por consiguiente, aunque demostrado explícitamente para el primero, queda también demostrado el mismo principio para los otros tres cuadrantes.

#### Aplicaciones.

Prescindiendo de la aplicación más obvia, que consiste en la construcción de la curva  $f(x)x$ , conociendo  $f(x)$ , pasaremos a otras de uso más frecuente.

Sea una curva algebraica entera y racional de cualquier grado la que se quiere construir; su ecuación será de la forma

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m. \quad [1]$$

Llamando  $y_1 = f_1(x)$  la suma de los  $m$  primeros términos, se tendrá  $y = f_1(x) + A_m$ ; si suponemos construida la curva  $y_1$  para construir  $y$  no tenemos más que subir o bajar el eje de las abscisas, según que  $A_m$  sea negativa o positiva, una magnitud igual a  $A_m$ ; ahora bien,

$$y_1 = x(A_0 x^{m-1} + \dots + A_{m-1}) = x \cdot y_2, \quad [2]$$

luego construida la curva  $y_2$  fácilmente se construirá la curva  $y_1$  valiéndose del aparato antes descrito;

$$y_2 = x(A_0 x^{m-2} + \dots + A_{m-2}) + A_{m-1} = x \cdot y_3 + A_{m-1}, \quad [3]$$

luego bastará que construyamos por el mismo método la curva  $x \cdot y_3$  conociendo  $y_3$ , cuya expresión es

$$y_3 = x(A_0 x^{m-3} + \dots + A_{m-3}) + A_{m-2} = x \cdot y_4 + A_{m-2}. \quad [4]$$

.....  
.....

Siguiendo el mismo procedimiento de descomposición llegaremos en último análisis por el rebajamiento continuo del grado de la ecuación a las dos últimas fórmulas

$$y_{m-1} = x(A_0 x + A_1) + A_2 = x y_m + A_2 \quad [m]$$

$$y_m = A_0 x + A_1 \quad [m+1]$$

La expresión  $(m+1)$  no ofrece ninguna dificultad, pues es la ecuación de una recta; así que se construye ésta e inmediatamente se procede a la construcción de la ecuación  $(m)$ , según se ha explicado anteriormente; en seguida la curva  $(m)$  nos conduce a la curva  $(m-1)$ ; ésta a la que la precede, y así sucesivamente hasta obtener la curva  $(1)$  propuesta. Para más claridad pongamos algunos ejemplos:

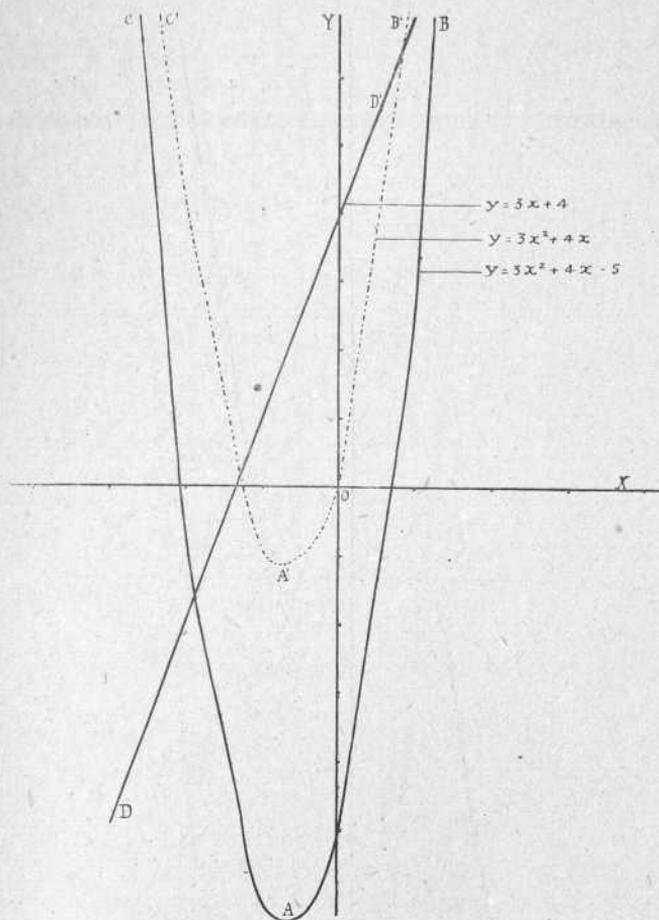
1.º Sea construir la ecuación

$$y = 3x^2 + 4x - 5,$$

descomponiéndola como queda dicho, se tendrá las expresiones

$$y = 3x^2 + 4x = x(3x + 4); \quad y = 3x + 4.$$

En la figura 3.<sup>a</sup> la recta  $DD'$  representa esta última ecuación, la curva  $C'A'B'$  la penúltima y, por fin, la parábola  $CAB$  nos da construída la ecuación propuesta.

Fig. 3.<sup>a</sup>

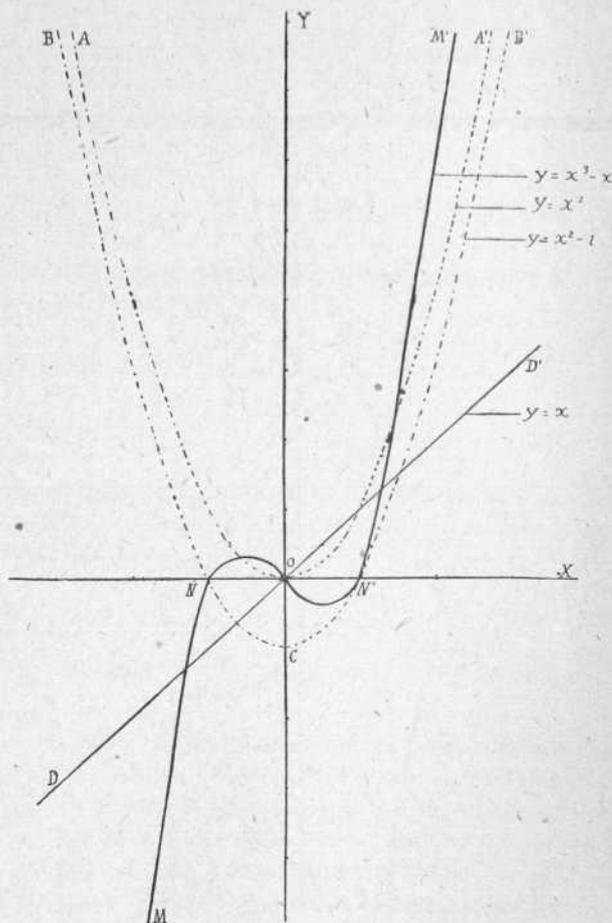
2.<sup>o</sup> Construir la cúbica

$$y = x^3 - x;$$

se tiene

$$y = x(x^2 - 1), \quad y = x^2 - 1, \quad y = x^2 = x \cdot x, \quad y = x;$$

la cuarta expresión está dada por  $DD'$  (fig. 4.<sup>a</sup>); la tercera por la parábola  $AOA'$ ; la segunda por la parábola  $BCB'$ ; finalmente, la cúbica  $MNON'M'$  representa la ecuación de 3.<sup>er</sup> grado propuesta.

Fig. 4.<sup>a</sup>

3.<sup>o</sup> Construcción de

$$y = x^4 - 2x^2 - 8.$$

En la figura 5.<sup>a</sup> tenemos que la recta  $DD'$  representa  $y = x$ ; dos

parábolas marcadas con sus ecuaciones respectivas tienen por expresión analítica correspondiente  $y = x^2$  o  $y = x^2 - 2$ ; la cúbica trazada

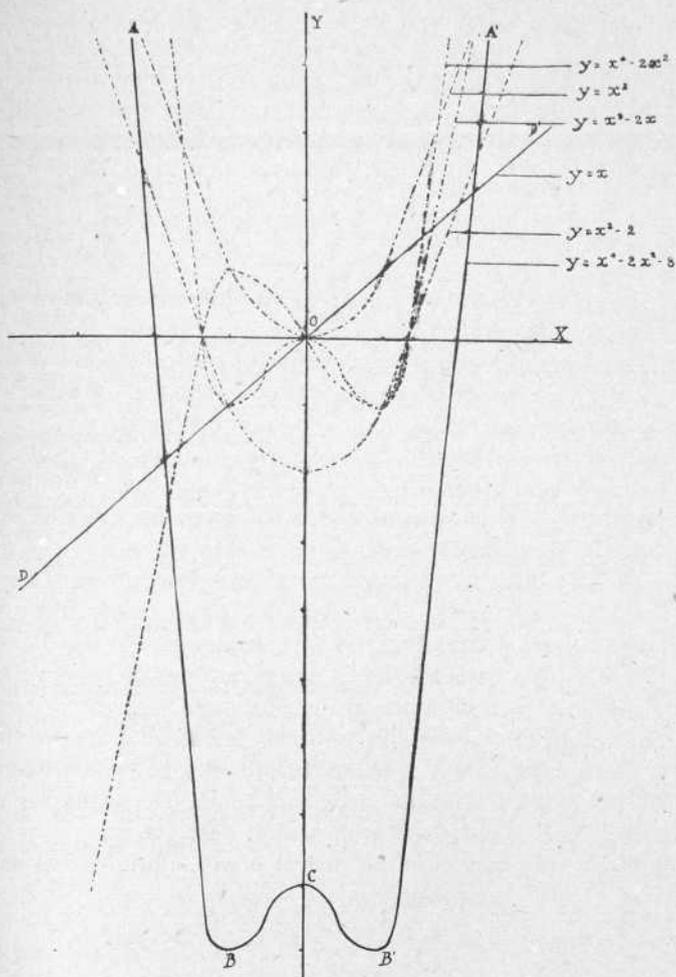


Fig. 5.<sup>a</sup>

en la figura representa la ecuación  $y = x^3 - 2x$ ; la cuártica punteada corresponde a  $y = x^4 - 2x^3$ ; por último, la curva de cuarto orden  $ABCB'A'$  representa el trinomio bicuadrado propuesto.

Los ejemplos dados patentizan el método que debe seguirse para una curva algebraica entera y racional de cualquier grado. Como se ve, es un procedimiento mucho más expedito que el de calcular las ordenadas para cada uno de los valores de la variable independiente  $x$ .

Como segunda aplicación, se puede aprovechar nuestro aparato para resolver una ecuación de cualquier grado con una incógnita siempre que sea entera y racional en dicha incógnita. En efecto, sea la ecuación

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Hx + K = 0;$$

haciendo su primer miembro igual a la variable  $y$ , se tendrá la ecuación  $y = f(x)$ ; construyendo la curva correspondiente, se verá qué valores de la abscisa nulifican a  $y$ , es decir, cuáles son las abscisas de los puntos de intersección de dicha curva con el eje  $XX'$ , y estas abscisas serán precisamente las raíces de la ecuación propuesta.

Puede objetarse en contra de este procedimiento el conducir a resultados cuya exactitud es muy dudosa; pero aunque es verdad que el método explicado adolece, como todos los métodos gráficos, del defecto de ser poco preciso, muchas veces, sin embargo, nos prestará muy buenos servicios, sobre todo cuando nos encontremos con ecuaciones numéricas de grado muy elevado, cuya resolución presenta, por lo general, graves dificultades y que no se obtiene sino a costa de grandes y laboriosos cálculos; nuestro aparato nos da, al contrario, de un modo rápido y fácil la solución del problema, separando inmediatamente las raíces de la ecuación y dando éstas con una aproximación suficiente en muchos casos; quedando, por otra parte, en disposición de verificar nuestros resultados por procedimientos analíticos conocidos y obtenerlos con toda la aproximación deseada.

Otras veces será más cómodo operar como sigue. Sea la ecuación

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Lx + K = 0.$$

Trasladando al segundo miembro los términos convenientemente escogidos, se podrá poner la ecuación dada en la forma  $F(x) = \Phi(x)$ . Si se construyen las curvas  $y = F(x)$ ,  $y = \Phi(x)$ , referidas al mismo sistema de ejes, las abscisas de los puntos de intersección serán evidentemente las raíces de la ecuación propuesta.

Este procedimiento resulta muy práctico para las ecuaciones de 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>er</sup> grados.

1.<sup>o</sup> Sea

$$Ax^2 + Bx + C = 0;$$

de donde

$$x^2 = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A};$$

o bien

$$x^2 = mx + n.$$

Si se construye por medio del parabológrafo la curva  $y = x^2$ , una vez para siempre, se habrá obtenido un magnífico *ábaco* o *nomograma* de las ecuaciones de 2.<sup>o</sup> grado; bastará fijar los puntos de intersección de dicha parábola con una regla o hilo tirante que ocupe la posición de la recta  $y = mx + n$  (fig. 6.<sup>a</sup>).

2.<sup>o</sup> Sea

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0;$$

haciendo desaparecer el término de 2.<sup>o</sup> grado por medio de la transformación lineal  $x = x' - \frac{1}{3}\frac{B}{A}$  (véase la teoría de las ecuaciones), se tendrá una ecuación de la forma

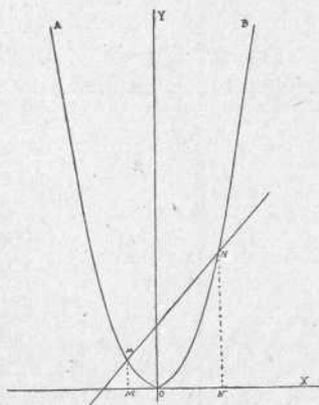


Fig. 6.<sup>a</sup>

$$A'x'^3 + C'x' + D' = 0,$$

de donde

$$x'^3 = -\frac{C'}{A'}x' - \frac{D'}{A'} = px' + q.$$

El ábaco para las ecuaciones de 3.<sup>er</sup> grado se obtendrá, pues, trazando en una red de coordenadas la parábola cúbica correspondiente (figura 7.<sup>a</sup>).

Para obtener los valores de los coeficientes  $p$  y  $q$ , se desarrolla el primer miembro de la transformada en  $x'$ :

$$A \left| \begin{array}{l} x'^3 + 3Ah \\ + B \end{array} \right| x'^2 + 3Ah^2 \left| \begin{array}{l} x' + Ah^3 \\ + Bh^2 \\ + Ch \\ + D \end{array} \right| x'^0$$

Se tendrá, por consiguiente,

$$A' = A, \quad C' = 3Ah^2 + 2Bh + C, \quad D' = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D,$$

de donde

$$p = -\frac{\frac{B^2}{3A} - \frac{2B^2}{3A} + C}{A}, \quad q = -\frac{-\frac{B^3}{3^3A^2} + \frac{B^3}{3^2A^2} - \frac{CB}{3A} + D}{A}$$

La ecuación de 4.<sup>o</sup> grado puede resolverse también con un ábaco semejante, valiéndose, para despojarla de los términos en  $x^3$  y  $x^2$ , de la transformación lineal  $x = \alpha x' + \beta$ . En algunos casos particulares esta transformación no conducirá a cálculos muy laboriosos, y será práctico recurrir al ábaco; otras veces será preferible encontrar directamente la parábola representativa de la función.

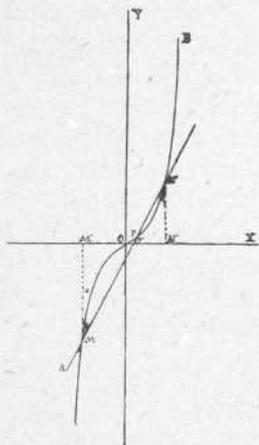


Fig. 7.ª

Tercera aplicación: En tercer lugar, podemos servimos del instrumento descrito como de un precioso intérgrafo que nos ponga ante los ojos la integral indefinida de una función (curva integral), y nos dé los diferentes valores que toma ésta cuando queda definida entre dos límites determinados cualesquiera. Teniendo presente que la función debe ser algebraica, paso a indicar el modo de obtener la integral cuando la expresión es monomía y cuando es polinomia.

1.<sup>o</sup> Sea encontrar la integral indefinida de  $y = ax^m$ , que será

$$I = \frac{a}{m+1} x^{m+1};$$

la curva  $y = ax^{m+1}$  ya la sabemos hallar; para que tenga el coeficiente  $\frac{a}{m+1}$  nos bastará tomar como unidad para medir las ordenadas  $\frac{1}{m+1}$ . En efecto, pongamos que la sucesiva descomposición antes explicada nos haya conducido a la ecuación de primer grado  $y = ax = f(x)$ , que es bien sencilla de construir cuando se toma una fracción de unidad para graduar el eje de las ordenadas; poniendo letras mayúsculas cuando  $YY'$  queda dividido de esta manera, se tendrá para un valor cualquiera  $b$  de  $x$ :

$$y = f(x); \quad Y = F(b) = \frac{f(b)}{m+1};$$

de donde  $y_1 = f(x) x; \quad Y_1 = F(b)b = \frac{f(b)}{m+1} b;$

$$y_2 = f(x) x^2; \quad Y_2 = F(b)b^2 = \frac{f(b)}{m+1} b^2;$$

.....  
 .....

$$y_m = f(x) x^m; \quad Y_m = F(b)b^m = \frac{f(b)}{m+1} b^m,$$

por ser  $b$  una abscisa cualquiera, se tendrá

$$Y_m = \frac{f(x)}{m+1} x^m = \frac{ax}{m+1} x^m = \frac{ax^{m+1}}{m+1},$$

que es la expresión buscada.

Adviértase que la fracción  $\frac{1}{m+1}$  es sólo una unidad provisional que se emplea únicamente para construir la primera ecuación  $y = ax$ ; y que en la lectura final del valor de  $Y_m$  es necesario referirse a la unidad propiamente tal.

Como se ve, el método anterior se reduce a construir por medio del aparato la curva

$$Y = \frac{a}{m+1} x^m;$$

el intégrafo dará entonces la curva integral

$$Y = \frac{a}{m+1} x^{m+1}.$$

Para calcular la integral definida se tomará la diferencia entre las dos coordenadas que corresponden a las abscisas iguales a los límites de la integral.

*Ejemplo:*

$$\int_0^3 6x^2 dx = ?$$

constrúyase la curva  $y = 2x^3$ ; tendremos (fig. 8.<sup>a</sup>):  $y_3 - y_0 = 54$ , valor idéntico al que produce el cálculo

$$\int_0^3 6x^2 dx = \left| \frac{6}{3} x^3 \right|_0^3 = 54.$$

2.<sup>o</sup> Si la integral fuese polinomia, se deducirán las integrales de los diferentes términos que forman la expresión dada y se sumarán estas integrales parciales, resultado que representa, como es sabido, la integral total.

Pero el procedimiento más sencillo es el siguiente: Sea integrar

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + K;$$

se construye la curva

$$y = \frac{A}{m+1} x^{m+1} + \frac{B}{m} x^m + \dots + Kx;$$

por medio del intégrafo se construirá la curva

$$y = \frac{A}{m+1} x^{m+1} + \frac{B}{m} x^m + \dots + Kx,$$

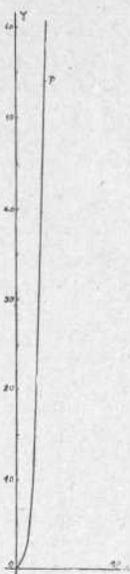


Fig. 8.<sup>a</sup>

que es la curva integral pedida.

La curva obtenida representa una de las integrales indefinidas, la que corresponde al valor 0 de la constante; para tener las demás curvas integrales no se hará sino mover el eje  $XX'$  paralelamente a sí mismo; cada ecuación dará una curva de la familia representada por la ecuación general

$$I = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Si se trata de la integral de orden  $n$  de la función  $Ax^n$ , se tendrá presente que sus integrales están representadas respectivamente por las expresiones:

$$\frac{A}{m+1} X^{m+1} + C, \quad \frac{A}{m+1(m+2)} X^{m+2} + C, \dots$$

$$\frac{A}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} X^{m+n} + C;$$

se construye, pues, la última función, que será la integral enésima.

Cuarta aplicación: Podemos también utilizar el aparato para construir por puntos curvas cuya ecuación sea de la forma  $f(y) = F(x)$ .

En efecto: Pongamos  $z = f(y)$ ;  $z = F(x)$

y construyamos por separado cada una

de estas curvas (*fig. 9.<sup>a</sup>*); para cada valor de  $z$ , verbigracia:  $AA' = BB'$ , común a las dos curvas, se obtienen un

valor de  $x$ ,  $OA'$ , y un valor de  $y$ ,  $OB'$ ,

que satisfacen a la ecuación propuesta,

es decir, se obtiene un punto de la curva

pedida tomando  $OA'$  como abscisa y  $OB'$

como ordenada. Es de notar que puede

suceder, como en el ejemplo que ponemos

a continuación, que a una misma

ordenada correspondan varios valores de la abscisa o a una misma

abscisa varios de la ordenada: hay, pues, que tener en consideración

todos estos valores.

Es de notar que puede suceder, como en el ejemplo que ponemos a continuación, que a una misma ordenada correspondan varios valores de la abscisa o a una misma abscisa varios de la ordenada: hay, pues, que tener en consideración todos estos valores.

*Ejemplo:* Sea construir la curva del diablo:

$$y^4 - 24y^2 - x^4 + 25x^2 = 0,$$

o sea,

$$y^4 - 24y^2 = x^4 - 25x^2;$$

se tiene

$$z = y^4 - 24y^2, \quad z = x^4 - 25x^2;$$

construyendo ambas ecuaciones se obtienen las dos curvas  $OABCDE$ , y  $OA'B'C'D'E'$  de las *figuras 10 y 11*; la primera podemos llamarla curva de las ordenadas y la segunda curva de las abscisas, por las razones dadas antes.

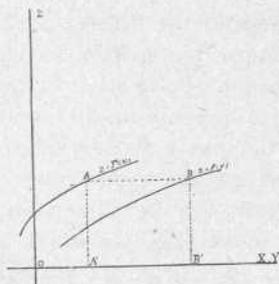


Fig. 9.<sup>a</sup>

Suponiendo efectuada por medio del aparato la construcción de las cuárticas precedentes, la curva propuesta se encuentra así: tómese un valor cualquiera, — 24, de  $z$ , común a las dos cuárticas: se obtienen dos valores para  $x$  y dos valores para  $y$ ; es decir, que a cada uno de los valores de  $x$  corresponden dos ordenadas iguales: así a la abscisa 1 le corresponde una ordenada un poco mayor que 1 y otra algo inferior a 5, ordenadas que también pertenecen a una segunda abscisa inferior a 5 y muy próxima a este número. Se habrán construido, en consecutencia, cuatro puntos de la curva pedida:  $M, M', N, N'$ . Tomando para  $z$  los valores 0, y — 84 se obtendrán otros grupos de puntos:  $O, O', E, F$ ; y  $P, P', R, R'$ ; operación que,

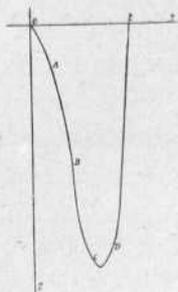


Fig. 10.

repetida un número suficiente de veces, dará varios puntos que se unirán por medio de una línea continua para obtener la curva que se busca. Es de advertir que hay una zona de las abscisas, comprendida entre un número un poco mayor que 2 y otro algo menor que 5, para la cual no existen ordenadas correspondientes reales; es decir, que en dicha zona la curva del diablo no tiene puntos reales. Nótese también que, siendo dicha curva simétrica con respecto a los dos ejes, bastará construirla en el primer cuadrante, reproduciendo en los tres restantes la construcción simétrica correspondiente (fig. 12).

En la figura adjunta, por razones de mayor comodidad, hemos tomado como unidad de las  $z$ , una cantidad diez veces menor que la unidad de las  $x$  y de las  $y$ , lo cual en nada altera los resultados que buscamos. En efecto, con este cambio de escala no hemos hecho más que dividir por cierto número  $n$  el valor de  $z$ , es decir, que en vez de tomar la ecuación primitiva

$$y^4 - 24y^2 = x^4 - 25x^2$$

hemos considerado la ecuación

$$\frac{y^4 - 24y^2}{n} = \frac{x^4 - 25x^2}{n},$$

ecuación equivalente a la propuesta.

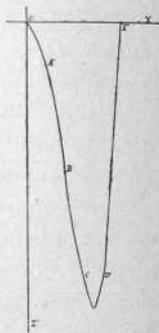


Fig. 11.

Quinta aplicación: De un modo análogo al que se ha seguido para integrar una función algebraica, se puede derivar una función de esta clase. Sea

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Lx + K$$

la función; bastará construir la curva

$$mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \dots + L,$$

según el procedimiento expuesto.

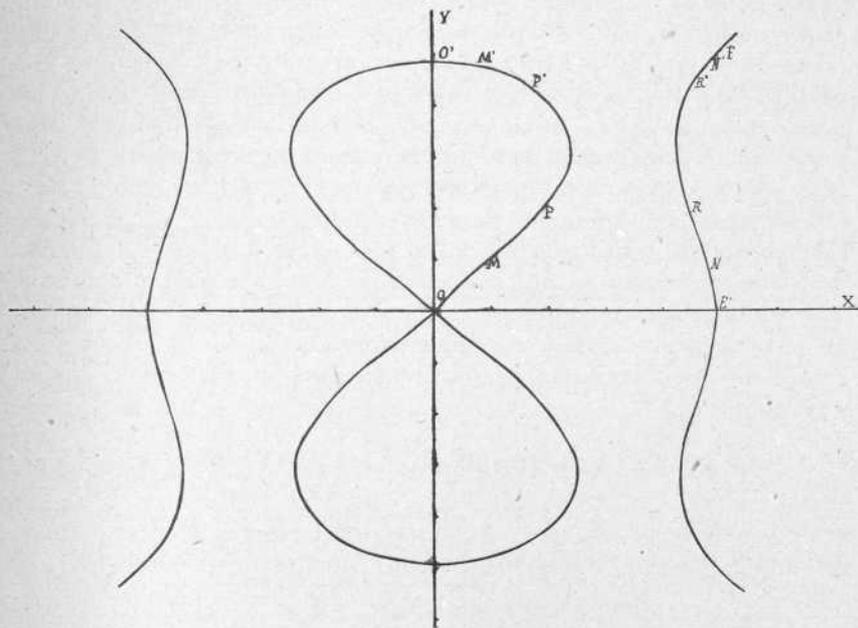


Fig. 12.

Sexta aplicación: Por fin, como última aplicación, se pueden poner la potenciación y radicación gráficas de los números. Supongamos trazada la curva  $y = x^n$ , siendo  $n$  entero y positivo; y sea por elevar a la  $n$ ésima potencia el número 13: bastará tomar una abscisa igual a 13, y la ordenada correspondiente será el número pedido. Sea ahora extraer la raíz  $n$ ésima del mismo número. Se tomará una ordenada

igual a 13 y la abscisa que le corresponda resolverá el problema. Esta aplicación puede prestar bastante utilidad práctica cuando ocurran con frecuencia extracciones del mismo orden de números no muy altos; pues en este caso la parábola mencionada, trazada una sola vez para siempre, nos evitará los cálculos numéricos de las radicaciones que son, en general, tan laboriosos.

NOTA. Se ha visto que por medio del aparato se puede tanto integrar como derivar una función entera; sin embargo, es conveniente observar que esto se ha conseguido por procedimientos verdaderamente artificiosos, y que dicho aparato por su naturaleza *tiende a integrar* la función de la variable  $x$ , toda vez que la multiplica por  $x$ , es decir, aumenta una unidad el grado de la función. Esta operación algunas veces efectuará completamente la integración; por ejemplo, la expresión  $y = C$  (constante) tiene por integral  $I = Cx$ , que se encuentra inmediatamente con el aparato, teniendo tan sólo cuidado de poner el eje de las  $xx$  en la posición que le corresponda por razón del valor arbitrariamente dado a la constante de integración. Pero la mayor parte de las veces el aparato no efectuará directamente la integración completa, aunque sí hará *algo* relativo a ella, es decir, *tenderá* a integrar la función; por ejemplo, si a la expresión  $5x^2$  le aplicamos directamente el instrumento, encontramos la función  $5x^3$ , que no será su integral; para encontrar ésta ( $5/3 x^3 + C$ ), será necesario aplicar los procedimientos indirectos, antes explicados.

Como el aparato sirve, de una manera general, para trazar curvas de la forma

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Lx + K$$

es decir, curvas parabólicas, le cuadra perfectamente bien el nombre de «Parabológrafo», o sea, instrumento constructor de parábolas.

### **Funciones irracionales y trascendentes.**

Las funciones algebraicas irracionales y las funciones trascendentes pueden también entrar en el dominio del «Parabológrafo», reduciéndolas previamente a la forma algébrica de polinomios enteros en  $x$  por medio de las fórmulas de Taylor o de Mac Laurin, tomando en su desarrollo infinito, entre los límites que sea dable, un número de términos suficientes para obtener la aproximación que se busca.

Ejemplo: Construir la curva  $y = \text{sen } x$ ; se tiene

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$$

tomando sólo cuatro términos se construirán sucesivamente las curvas siguientes:

$$\begin{array}{ll} Y = -\frac{x}{7!} & Y = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} \\ Y = -\frac{x^2}{7!} & Y = -\frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \frac{x^5}{7!} \\ Y = \frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} & Y = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \\ Y = \frac{x}{5!} - \frac{x^3}{7!} & Y = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \\ Y = \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} & Y = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \end{array}$$

La última curva será sensiblemente la senoide que se pide.

Hay que tener presente que a veces por un oportuno cálculo pueden reducirse a forma racional funciones que aparentemente no la tienen. Sea, por ejemplo, construir la parábola

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}. \quad [1]$$

Si hacemos girar el sistema de coordenadas ortogonales el ángulo  $\frac{\pi}{4}$ , las fórmulas de transformación serán

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}};$$

sustituyendo en [1], se tendrá

$$\sqrt{\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}} = \sqrt{a},$$

o sea

$$\sqrt{2} x' + \sqrt{2(x'^2 - y'^2)} = a,$$

de donde

$$2(x'^2 - y'^2) = a^2 + 2x'^2 - 2a\sqrt{2}x',$$

simplificando

$$-2y'^2 = a^2 - 2a\sqrt{2}x' \quad \text{o} \quad y'^2 = \sqrt{2}ax' - \frac{a^2}{2}.$$

Por una nueva transformación de coordenadas, pongamos

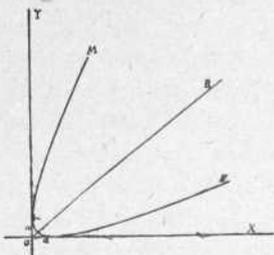


Fig. 13.

$$x' = x'' + \frac{\sqrt{2}}{4}a,$$

de donde, sustituyendo

$$y'^2 = \sqrt{2}a \left( x'' + \frac{\sqrt{2}}{4}a \right) - \frac{a^2}{2};$$

es decir,

$$y'^2 = \sqrt{2}ax'',$$

ecuación entera y racional, cuya representación se obtiene con el parabológrafo, considerando a  $x$  como ordenada y a  $y$  como abscisa. Fácil es entonces pasar, por la doble transformación inversa de coordenadas, a la curva que se busca (fig. 13).

## HIPERBOLÓGRAFO.

### EXPRESIONES FRACCIONARIAS.

#### Teorema fundamental.

El aparato que acabamos de estudiar no se presta para el estudio de las funciones fraccionarias; pero a éstas se les puede aplicar un segundo instrumento, análogo al parabológrafo, del cual nos vamos a ocupar en seguida.

Sea una curva  $y = F(x)$  representando por  $F$  una función cualquiera, y  $N$  un punto de esta curva correspondiente al valor  $x_1$  de  $x$ , de modo que  $y_1 = F(x_1)$  (fig. 1.ª). Supongamos que  $P$  es la intersección de la recta  $ON$  con la recta  $x = 1$ . Si por el punto  $P$  llevamos una paralela al eje de las abscisas, ésta encontrará a la recta  $x = x_1$

en un punto  $M$  que pertenecerá a una segunda curva definida por la ecuación  $y = \frac{F(x)}{x}$ .

En efecto, se tiene (poniendo  $MM' = y_2$ ),

$$NM' = OM' \text{ tang } NOM';$$

pero

$$\text{tang } NOM' = MM';$$

luego

$$NM' = OM' \cdot MM',$$

es decir,

$$y_1 = x_1 \cdot y_2;$$

de donde  $y_2 = \frac{y_1}{x_1}$ , y la ecuación del lugar de los puntos  $M$  será

$$y = \frac{F(x)}{x}.$$

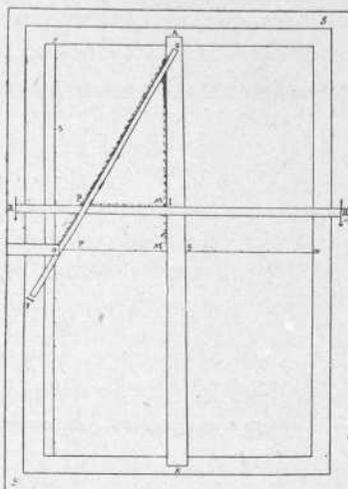


Fig. 14.

El instrumento que da la aplicación continua de este teorema es muy semejante al primero que describimos; la *figura 14* muestra el diseño del aparato, reducido para más claridad al primero y cuarto cuadrantes, con la nueva disposición de las reglas, etc. Una modificación obvia hace el aparato extensible a todo el plano.  $M$  es el instrumento inscriptor que tiende a moverse en la dirección de la flecha correspondiente y es detenido por la regla horizontal. La regla giratoria  $OQ$  está sujeta a una fuerza que la obligue a girar en el sentido de la flecha  $F$ . La comparación entre las dos figuras respectivas pondrán de manifiesto las demás diferencias existentes entre ambos aparatos.

#### Aplicaciones.

Primera aplicación: Como primera aplicación, ocurre inmediatamente la construcción de las curvas  $y = \frac{f(x)}{x}$ , conociendo la curva  $v = f(x)$ .

Segunda aplicación: Construir la curva fraccionaria

$$y = \frac{A}{x^m} + \frac{B}{x^{m-1}} + \dots + \frac{L}{x} + K.$$

Constrúyase la recta  $y = A$ ; por medio del aparato se trazará la hipérbola  $y = Ax^{-1}$ ; moviendo paralelamente a sí mismo el eje  $XX'$  se tendrá  $y = Ax^{-1} + B$ ; el aparato dará entonces la curva

$$y = Ax^{-2} + Bx^{-1};$$

.....

.....

siguiendo el procedimiento indicado, se llegará a obtener la curva pedida

$$y = Ax^{-m} + Bx^{1-m} + Cx^{2-m} + \dots + Lx^{-1} + K.$$

*Ejemplo:* Sea construir la curva

$$y = \frac{cb'x^2 + ca'x + bb'x + ba'}{a'x + b'x^2};$$

efectuando la división se tendrá  $y = \frac{b}{x} + c$ .

Por medio del aparato se construirá inmediatamente esta expresión fraccionaria para obtener la curva que se busca.

Tercera aplicación: Resolución de la ecuación que se obtiene igualando a o el segundo miembro de la ecuación anterior, o sea

$$Ax^{-m} + Bx^{1-m} + \dots + Lx^{-1} + K = 0.$$

Como en el caso de la ecuación entera, se construye la curva cuya ordenada es el primer miembro de esta ecuación, y las abscisas de los puntos de intersección de la curva con el eje  $XX'$ , serán las raíces que se desean. Aquí tienen también cabida las observaciones hechas a propósito del parabológrafo en una aplicación análoga.

Cuarta aplicación: Una aplicación muy importante de este instrumento consiste en la diferenciación de las funciones algebraicas fraccionarias. Sea, por ejemplo, derivar la función  $y = f(x)$  propuesta en la

segunda aplicación; tendrá que construirse la expresión

$$y = -mAx^{-m-1} + (1-m)Bx^{-m} + \dots - Lx^{-2}.$$

Si se trata de hallar la derivada de 2.<sup>o</sup>, 3.<sup>o</sup>, .....  $n$ .<sup>o</sup> orden, se aplicará a cada término del polinomio la fórmula correspondiente; es a saber:

$$Amx^{m-1}, \quad Am(m-1)x^{m-2}, \dots \\ Am(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n}.$$

Quinta aplicación: No menos digno que el anterior es el uso del aparato para la integración de las expresiones fraccionarias. Sea encontrar la integral indefinida de la función antes propuesta,

$$y = Ax^{-m} + Bx^{1-m} + \dots + Lx^{-2} + K;$$

es necesario tener presente que el término en  $x^{-1}$  no puede aparecer, puesto que su integral indefinida es la función transcendente

$$y = \log_e x + C,$$

integral que hay que hallar de una manera especial.

En efecto, siendo transcendente esta integral, para construirla tenemos que recurrir al desarrollo en serie. La fórmula de Mac Laurin no es aplicable aquí, porque la función y sus derivadas se hacen infinitas para  $x=0$ ; nos valdremos, pues, de la serie de Taylor, puesta en la forma siguiente:

$$\log x \int_0^{2a} = \log a + \frac{x-a}{a} - \frac{1}{2} \left( \frac{x-a}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{x-a}{a} \right)^3 - \dots$$

(Cfr. Miranda: *Cálcl. Infi.*, otra forma de la serie de Taylor; Granville: *Diff. and. Integ. Cal.*, pág. 233, etc.). Esta fórmula nos puede dar aproximadamente la curva pedida entre los límites 0 y  $2a$ , siendo  $a$  un valor arbitrariamente escogido.

Sexta aplicación: En las aplicaciones expuestas se suponen, respectivamente, enteros o fraccionarios, según se trate del primero o del segundo instrumento, todos los términos de la función. Si unos términos fuesen enteros y otros fraccionarios, se podrá construir la fun-

ción por este método: Añádanse a los diferentes exponentes de  $x$  tantas unidades positivas como unidades negativas tenga el menor de sus exponentes, lo que nos conducirá a una expresión entera en  $x$ , la cual se construye por medio del parabológrafo; en seguida, valiéndose del segundo aparato, se va rebajando el grado de la expresión hasta llegar a la fórmula buscada.

*Ejemplo:* Sea construir

$$Ax^3 + Bx + C + Dx^{-2} + Ex^{-4}.$$

Se construye

$$Ax^7 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^2 + E;$$

después se construyen las funciones

$$Ax^6 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^1 + Ex^{-1},$$

$$Ax^5 + Bx^3 + Cx^2 + D + Ex^{-2},$$

$$Ax^4 + Bx^2 + Cx^1 + Dx^{-1} + Ex^{-3},$$

$$Ax^3 + Bx^1 + C + Dx^{-2} + Ex^{-4},$$

y esta última expresión será la que se busca.

También se puede transformar la expresión en una puramente fraccionaria, de la cual, construída, fácilmente se pasará a la función que se quiere por medio del primer aparato.

Si se desea resolver gráficamente una ecuación de la forma:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Lx + K + Px^{-1} + Qx^{-2} + \dots + Rx^{-n} = 0,$$

entonces, o se construye por el procedimiento que se acaba de explicar la curva correspondiente, o se pone la ecuación en la forma  $f(x) = F(x)$ ; representando por  $f$  el conjunto de los términos enteros en  $x$  y por  $F$  el de los términos fraccionarios, pudiéndose contar  $K$  en cualquiera de las dos clases. Se construyen en seguida referidas al mismo sistema de ejes, las dos curvas  $f$  y  $F$ ; las abscisas de los puntos de intersección de ambas curvas serán las soluciones que se buscan.

Séptima aplicación: Hemos visto cómo puede construirse por puntos una curva cuya ecuación sea de la forma  $f(y) = F(x)$ , siendo  $f$  y  $F$  funciones enteras. Si se tuviesen funciones fraccionarias, habría

que seguir igual procedimiento, valiéndose para trazar cada una de las curvas auxiliares  $s = f(y)$  y  $s = F(x)$  del segundo instrumento.

Pudiera suceder que una de las funciones,  $f$ , por ejemplo, fuese entera, y la otra,  $F$ , fraccionaria; entonces, ambos aparatos entrarán en combinación para el trazo de las curvas auxiliares, encontrándose la curva definitiva como si las dos funciones fuesen de la misma clase.

Octava aplicación: Construcción por puntos de una fracción racional  $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ . Supongamos las curvas  $y_1 = f(x)$ ,  $y_2 = \varphi(x)$ , trazadas con el parabológrafo, y sea construir la curva fraccionaria  $y = \frac{y_1}{y_2}$  (fig. 15).

Para un valor  $x_1$  de  $x$  se tendrá  $y_1 = BP$ ,  $y_2 = CP$ . Trácese las rectas  $BB'$  y  $CC'$  paralelas a  $XX'$ ; sea  $H$  la intersección de  $CC'$  con la recta  $x = 1$ . La recta que pasa por  $H$  y por el origen de coordenadas encuentra a la recta  $BB'$  en un punto  $I$  cuya abscisa es igual al cociente  $\frac{y_1}{y_2}$ .

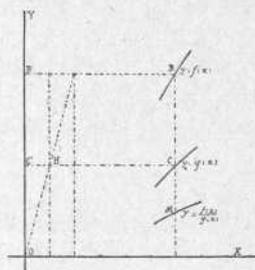


Fig. 15.

En efecto, siendo  $\alpha$  el ángulo  $YOH$ , se tendrá

$$\begin{aligned} I\mathcal{Y} &= O\mathcal{Y} \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = O\mathcal{Y} \operatorname{cotang} \alpha = O\mathcal{Y} \frac{OC'}{HC'} = \\ &= O\mathcal{Y} \cdot OC' \therefore y_1 = O\mathcal{Y} \cdot y_2 \therefore O\mathcal{Y} = \frac{y_1}{y_2}. \end{aligned}$$

Dando a  $x$  valores tan próximos como se quiera, se obtendrá una serie de puntos que, unidos por un trazo continuo, producirá la curva pedida.

Para poder repetir con facilidad la construcción geométrica que se acaba de demostrar, se servirá uno de un ábaco en extremo sencillo; se reduce a un transparente perfectamente cuadrículado que representa la red de coordenadas, con un hilo que pasa por el origen. Se coloca el sistema transparente sobre el sistema de coordenadas, al cual están referidas ambas curvas; encontrado por medio de la cuadrícula el punto  $H$ , se hace pasar por él el hilo y se hallará en seguida el punto  $I$ .

NOTA. Hemos supuesto las dos curvas en el primer cuadrante. Igual procedimiento se debe seguir siempre que las curvas se encuen-

tren del mismo lado del eje  $XX'$ . Cuando una está en un cuadrante superior y la otra en uno inferior, la recta  $OH$  (fig. 16) encuentra a la paralela  $BB'$  en el punto  $I'$ , simétrico de  $I$  con respecto al eje  $yy'$ : el cociente es, pues, negativo.

*Ejemplo 1.º* Trazar por puntos la función homográfica

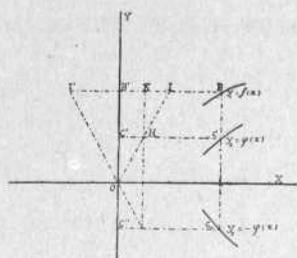


Fig. 16.

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

pongamos

$$a = 1, \quad b = 1, \quad a' = 2, \quad b' = -2,$$

tendremos

$$y_1 = x + 1, \quad y_2 = 2x - 2;$$

ecuaciones que están representadas por las rectas  $QQ'$ ,  $PP'$  (fig. 17); el procedimiento explicado conduce a los puntos  $A, B, C, D, E$ , por los cuales pasan las dos ramas de la hipérbola que se desea.

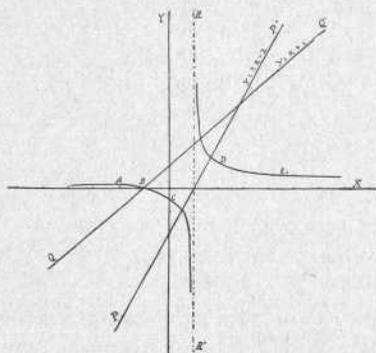


Fig. 17.

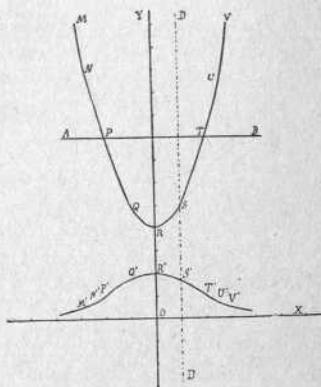


Fig. 18.

*Ejemplo 2.º* Trazar la curva de Agnesi:  $x^2y = 4a^2(2a - y)$ ; resolviendo la ecuación con respecto a  $y$ :

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

poniendo

$$a = 1, \quad y = \frac{8}{x^2 + 4}.$$

En este caso  $y_1 = 8$ ,  $y_2 = x^2 + 4$  (recta  $AB$  y parábola  $MRV$ , figura 18); a los puntos  $M, N, P, \dots U', V'$ , de la parábola corresponden en la curva de Agnesi los puntos  $M', N', \dots U, V$ , por los cuales quedará aproximadamente determinada.

*Observación 1.<sup>a</sup>* Muchas veces la práctica y habilidad del operador harán entrar dentro de la esfera de acción de uno y otro aparatos, mediante procedimientos más o menos artificiosos, casos que aparentemente no pueden reducirse a ninguna de las aplicaciones mencionadas. Construyamos, por ejemplo, la función  $x + y = xy^2$ , que contiene términos en  $x$ , en  $y$ , y en ambas variables. La separación de éstas se hace por un artificio de cálculo muy sencillo. En efecto, despejando a  $x$ ,  $x = \frac{y}{y^2 - 1}$ ; de donde  $\frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$ ; ya se tiene, pues, reducida la expresión propuesta a una de la forma  $F(x) = f(y)$ , siendo  $F$  y  $f$  funciones que se pueden construir sin dificultad.

Las figuras 19 y 20 representan las dos curvas auxiliares

$$z = \frac{1}{x}, \quad z = y - \frac{1}{y}.$$

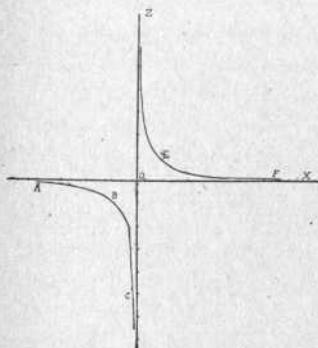


Fig. 19.

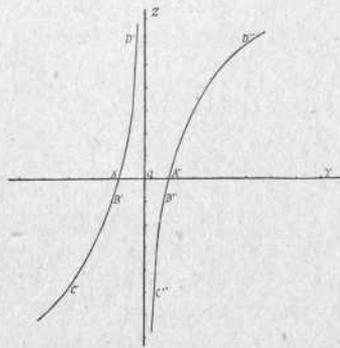


Fig. 20.

El punto  $A$  (cuya abscisa es  $-\infty$ ) en la curva de las abscisas, corresponde a los puntos  $A'$  y  $A''$ , en la curva de las ordenadas; puntos cuyas abscisas tienen por límites respectivos  $+1$  y  $-1$ : se habrá en-

contrado, pues, dos puntos de la curva que se busca:  $M$  y  $M'$  (figura, 21), que tienen por abscisa la de  $A$  y por ordenadas respectivas las abscisas de  $A'$  y  $A''$ . El cuadro siguiente indica la obtención por puntos de toda la curva:

Curva de las $XX$ .	Curva de las $YY$ .	Curva pedida
$A$	$A', A''$	$M, M'$
$B$	$B', B''$	$N, N'$
$C$	$C', C''$	$P, P'$
$D$	$D', D''$	$Q, Q'$
$E$	$E', E''$	$R, R'$
$F$	$F', F''$	$S, S'$

*Observación 2.<sup>a</sup>* El lector habrá podido observar que el aparato de que nos ocupamos sirve, de una manera general, para trazar curvas fraccionarias de la forma  $y = Ax^{-m} + Bx^{1-m} + \dots + Lx^{-1} + K$ , es decir, curvas hiperbólicas; de ahí que le hayamos dado la denominación de «Hiperbológrafo», que quiere decir: instrumento descriptor de hipérbolas.

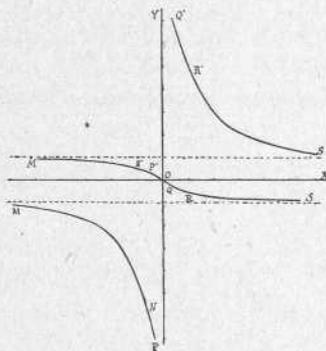


Fig. 21.

El hiperbológrafo puede tanto integrar como diferenciar una función fraccionaria; pero es de notar que los resultados de la integración se han obtenido por medios indirectos y que el hiperbológrafo es por su naturaleza *diferenciador*, puesto que, o ejecuta la diferenciación de la función, o por lo menos efectúa una de las operaciones conducentes a ella. En efecto, dada la función  $f$ , el aparato construye la expresión  $f/x$ , es decir, divide por  $x$  la función propuesta, o lo que es lo mismo, rebaja una unidad al exponente de  $x$  en todos los términos: efectúa, por consiguiente, una de las operaciones de la derivación de las expresiones algebraicas. En algunos casos, si bien pocos, nos dará la derivación completa; por ejemplo, sea derivar la función  $y = mx$ : el hiperbológrafo nos da inmediatamente, sin ninguna operación previa, la curva derivada  $y = m$ . Este aparato es, en consecuencia, de carácter *diferenciador*.

Por fin, el estudio de las funciones algebraicas irracionales y de las funciones transcendentales puede hacerse por medio del hiperboló-

grafo, siempre que el análisis suministre valores de estas funciones, siquiera aproximados, puestos en forma de polinomios fraccionarios en  $x$ .

NOTA (1). Existen varios aparatos de integrar que pueden clasificarse en cuatro grupos: planímetros, integrómetros, integradores compuestos e intégrafos. Puede verse el estudio detallado de esta clase de aparatos y de sus diferentes modelos en la preciosa obra *Les Appareils d'Intégration*, par H. de Morin, Paris, 1913. El intégrafo de Abdank-Abakanowicz, tal vez el más célebre de todos, puede verse también en algunas obras de Cálculo, por ejemplo, las de Pascal, Granville, Davis, etc. En cuanto a instrumentos de diferenciar, se han hecho algunas tentativas de «Derivadores» y «Diferenciadores»; mas todas han quedado frustradas (Morin, obra cit., pág. 188 y siguientes).

Quizá el Parabológrafo e Hiperbológrafo, cada uno en su propio campo de acción, o bien entrando en combinación para trabajar en el mismo problema, puedan, por la extremada sencillez de su mecanismo, aspirar a la precisión de los intégrafos ya conocidos, o al menos suplir en parte la falta de aparatos destinados a la derivación o diferenciación mecánicas.

## APÉNDICE.

### Aplicación a las imaginarias.

Sea una ecuación algebraica con coeficientes imaginarios de la forma

$$(A_0 + B_0i)z^m + (A_1 + B_1i)z^{m-1} + \dots + (A_p + B_pi)z^{m-p} + \dots + (A_m + B_mi) = 0;$$

donde  $z$  es a su vez una cantidad compleja, función de  $x$  e  $y$ :

$$z = x + y\sqrt{-1}.$$

Llamando  $f(z)$  al primer miembro de la ecuación propuesta y se-

(1) Entre los aparatos destinados al trazado de la parábola me es grato citar aquí el *Campilógrafo*, del R. P. Marc Dechevrens, S. J., quien tuvo la bondad de facilitarme varios folletos relativos al instrumento de su invención. Puede verse la teoría en los *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* (t. XXVI, segunda parte).

paradas las expresiones reales de las imaginarias se podrá poner

$$f(z) = P + Qi.$$

Para resolver la ecuación  $f(z) = 0$ , se deberá resolver el sistema  $P = 0$ ,  $Q = 0$ : cada par de valores  $x$  e  $y$  que verifiquen este sistema producirán un valor de  $z$ , raíz de la ecuación  $f = 0$ . En efecto, los valores de  $x$  e  $y$  que nulifiquen a la vez los polinomios  $P$  y  $Q$ , nulificarán también la función  $f(x + y\sqrt{-1})$ . Por otra parte, siempre que  $f(x + y\sqrt{-1})$  sea igual a 0, se verificarán necesariamente las ecuaciones  $P = 0$   $Q = 0$ . Luego las raíces de  $f$  quedarán determinadas por las soluciones comunes a  $P$  y  $Q$ .

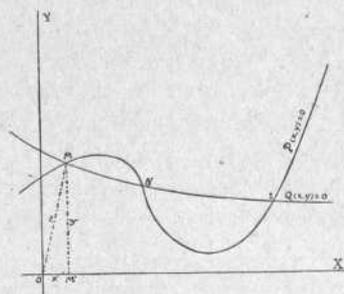


Fig. 22.

Luego las raíces de  $f$  quedarán determinadas por las soluciones comunes a  $P$  y  $Q$ .

Para hallar gráficamente la solución del sistema se trazarán por medio del parabológrafo o hiperbológrafo las dos curvas  $P = 0$  y  $Q = 0$ , referidas al mismo sistema de ejes (fig. 22). Los puntos  $M, N, I$ , de intersección de ambas curvas representarán las raíces de  $f(z) = 0$ . Así, por ejemplo, para obtener el punto raíz  $M$ , se pondrá, como es sabido (fig. 22),

$$z_1 = x_1 + y_1 \sqrt{-1} = \rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

Desde este punto de vista la segunda aplicación del parabológrafo y la tercera del hiperbológrafo no son más que un caso particular de la presente; pues entonces la expresión  $f(z)$  propuesta tiene únicamente coeficientes reales y es función de la variable independiente  $z$ , que por ser real se reduce a la forma

$$y = x + oi.$$

Tenemos, por consiguiente,  $y = 0$ ; es decir, que es nula la ordenada de los puntos de intersección de las curvas  $P$  y  $Q$ . Luego encontrándose estos puntos sobre el eje  $XX'$  se podrá considerar como curva  $Q$  el eje de las abscisas.

NUEVO MÉTODO GRÁFICO  
PARA LA  
DETERMINACIÓN DE LA PÉRDIDA DE FLECHA  
de los resortes de ballesta bajo carga

POR  
D. MARIO VIANI CABALLERO

INGENIERO INDUSTRIAL

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

**Consideraciones preliminares.**

La determinación analítica de la pérdida de flecha de un resorte de ballesta bajo carga, ha sido estudiada de la manera más general posible por Phillips en su *Memoire sur les ressorts en acier employés dans le matériel des chemins de fer*, presentada a la Academia de Ciencias de París en 1851.

Sin embargo, los tipos de resortes que estudió Phillips en aquella época los podemos considerar como puramente teóricos, puesto que los que hoy día se emplean en la práctica difieren por su forma y condiciones de aquéllos. En primer lugar, Phillips consideraba siempre la hoja maestra de un resorte como formada por una lámina única, mientras que ahora, por razón de ser la que por su rotura podría producir los accidentes más graves, y a fin de precaverse contra éstos, dándola una resistencia adecuada, se constituye siempre por la reunión de dos o más láminas. En segundo lugar, Phillips suponía que los extremos de las hojas del resorte, o conservaban su sección constante, o estaban provistos de adelgazamientos, cuyo perfil era una curva parabólica de 3.<sup>er</sup> grado, y aunque la primera forma se emplea hoy con frecuencia, se han adoptado otras muchas, haciendo que el perfil de la planta de dichos extremos sea en forma de trapecio, de semicírculo, etc., o redondeando únicamente el extremo, suprimiendo la arista que no está en contacto con la hoja superior.

La aplicación a estos casos prácticos, de las fórmulas generales deducidas por Phillips sería, si no imposible en algunos de ellos, difícilísima, por tener que introducir en aquéllas las funciones analíticas representativas de los perfiles de dichos extremos; y puestos ya en el caso de tener que calcular un resorte de estas condiciones no quedaba otro remedio que asimilarle a alguno de los tipos, cuyas fórmulas fueran más sencillas, y hallar la pérdida de flecha de éste por la de aquél, procedimiento que, como podemos observar, ni es exacto ni nos demuestra la influencia que en dicha flexión tiene tal o cual forma de adelgazamiento.

En esta situación, el método gráfico que para la determinación de la flexión vamos a desarrollar, resuelve completamente este problema, puesto que en vez de hacer intervenir en las fórmulas generales las funciones representativas de los perfiles, opera sobre estos mismos, construyendo la curva de las sumas de los momentos de inercia para cada sección del resorte y aplicando a ella los principios de la integración gráfica, ya que todo el problema de la flexión de esta clase de resortes queda reducido a integrar dos veces una expresión fundamental, en la que interviene, como una de las cantidades variables, dicha suma.

La aplicación de este nuevo método gráfico es, no sólo sencilla y rápida, sino que hace ver con toda claridad la influencia que en la flexión ejerce la forma escogida para el extremo de las hojas, quedando con ello completamente resuelto el problema de la determinación de la flexión de un resorte cualquiera.

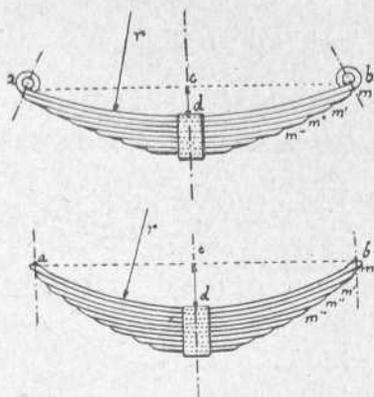
#### Definiciones.

Los resortes de ballesta se encuentran constituidos por hojas de acero de igual anchura, de longitud decreciente, cintradas según arcos de círculo y que se aplican las unas sobre las otras en toda su extensión. Dichas hojas van sujetas en su mitad, de ordinario, por una brida de hierro forjado que ocasiona sensiblemente el empotramiento de las mismas.

La hoja más larga se denomina *hoja maestra* y termina por apéndices cuya forma, así como la de la brida, varía según el montaje de estos resortes. A excepción de la hoja maestra, que a veces se encuentra formada por dos o más hojas superpuestas, todas las demás hojas del muelle se hallan formadas por una sola lámina. Los resortes gene-

ralmente empleados tienen sus hojas del mismo grueso y, por lo tanto, de sección constante; únicamente en la parte que cada lámina rebasa de la inferior puede variar su anchura o su grueso.

En un resorte de ballesta se llama *radio de fabricación del resorte*, el que presenta la hoja maestra después de construido éste; *flecha de fabricación*, la altura  $cd$ ; *cuerda*, la distancia entre los puntos  $a$  y  $b$ ; *longitud de la hoja maestra*, la de esta hoja entre los mismos puntos, y *recubrimiento o escalonamiento*, las porciones  $mm'$ ,  $m'm''$ ,  $m''m'''$ ..... que cada hoja rebasa de la inmediata inferior (fig. 1.<sup>a</sup>).

Fig. 1.<sup>a</sup>

**Fórmula fundamental en la teoría de Phillips  
para la determinación de la flexión de un resorte bajo carga.**

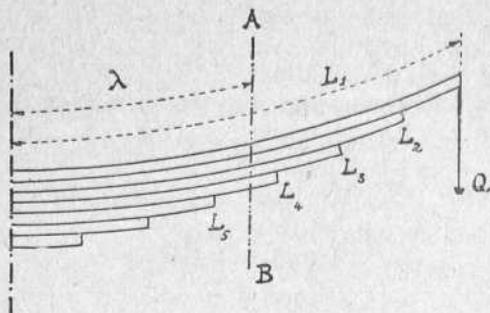
La fórmula fundamental de la teoría de Phillips sirve para determinar el valor del radio de curvatura en un punto cualquiera de la hoja maestra bajo la acción de las cargas que actúan en los extremos del resorte.

Principia dicha teoría por considerar el resorte formado por hojas de distinta longitud con recubrimientos desiguales y que tengan gruesos diferentes; supone también que los radios de curvatura dados a las distintas hojas al fabricarlas son distintos de una a otra hoja, y que tampoco permanecen constantes en diferentes puntos de la misma lámina.

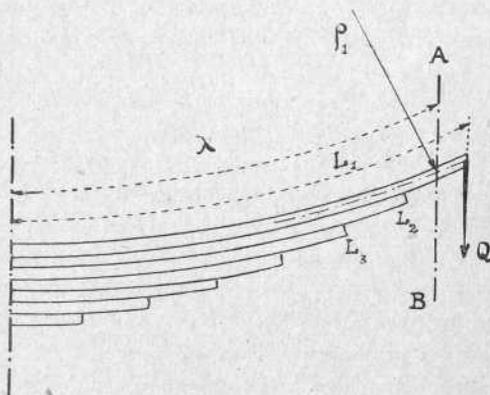
Si todas estas variaciones se reproducen simétricamente a uno y otro lado de la normal a la cuerda de fabricación en su punto medio, resultará que cada una de las dos partes del resorte que separa esta normal, sometidas a una carga  $Q$  en su extremo, y supuestas empujadas por la región central, se comportarán de igual manera que si sobre el resorte entero, apoyado en su punto medio, actuara una fuerza  $2Q$  repartida por igual entre los dos extremos. Por consiguiente, y con objeto de simplificar los cálculos, no consideraremos, de aquí en adelante, más que una mitad del resorte, y haremos entrar

en las fórmulas únicamente las semilongitudes de las hojas y las semicargas totales.

Sea, pues, el resorte cuya mitad está representada en la *figura 2.<sup>a</sup>*, y llamemos:

Fig. 2.<sup>a</sup>

- $n$ ..... el número total de hojas.  
 $L_1 L_2 L_3$ ..... las semilongitudes de éstas.  
 $r_1 r_2 r_3$ ..... sus radios de fabricación, que pueden variar de un punto a otro en una misma hoja.  
 $M_1 M_2 M_3$ ..... sus momentos de elasticidad, iguales, respectivamente, a los productos:  
 $EI_1 EI_2 EI_3$ ..... de los momentos de inercia de las diferentes hojas, que también pueden variar, por el coeficiente de elasticidad.

Fig. 3.<sup>a</sup>

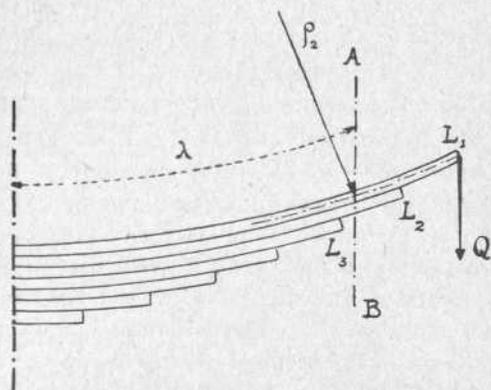
En estas condiciones, deduce Phillips, para valor del radio de curvatura de la hoja maestra bajo carga, en un punto del primer esca-

namiento definido por su distancia  $\lambda$  a la sección media del resorte, el siguiente (fig. 3.<sup>a</sup>):

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{M_1}{r_1} - QL_1 + Q\lambda}{M_1}$$

De la misma manera, para un punto comprendido en el segundo escalonamiento, o sea entre  $L_2$  y  $L_3$ , tendremos (fig. 4.<sup>a</sup>):

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} - QL_1 + Q\lambda}{M_1 + M_2}$$

Fig. 4.<sup>a</sup>

y, en general, para un punto de la hoja maestra comprendido entre  $L_K$  y  $L_{K+1}$ , cortando, por lo tanto, la sección,  $K$  hojas, se obtendrá:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_K} &= \frac{\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \dots + \frac{M_K}{r_K} - QL_1 + Q\lambda}{M_1 + M_2 + \dots + M_K} = \\ &= \frac{\sum_1^K \frac{M_q}{r_q} - Q(L_1 - \lambda)}{\sum_1^K M_q}, \end{aligned}$$

fórmula general en la que habrá que dar a  $q$  los valores sucesivos de 1 a  $K$ .

Una vez conocido el radio de curvatura de la hoja maestra en cada uno de sus puntos (que es sensiblemente el mismo para todas las hojas en la misma sección  $AB$ , puesto que se supone que permanecen éstas constantemente unidas en toda su extensión), puede deducirse fácilmente la forma de dicha hoja maestra, como hace Phillips, refiriendo la curva afectada por esta hoja a dos ejes coordenados rectangulares; el de las  $x$  la tangente al eje neutro de la misma en su punto medio, y el de las  $y$  la normal a la anterior en este punto y dirigida en sentido de la concavidad, obteniendo, para el escalonamiento de orden  $(K + 1)^{\text{ésimo}}$  a partir del centro, la expresión

$$y = C'_{n-K} + C_{n-K}\lambda + \frac{A_{n-K}}{2}\lambda^2 + \frac{B_{n-K}}{6}\lambda^3,$$

en la que hay que substituir los valores de los coeficientes  $C'_{n-K}$ ,  $C_{n-K}$ ,  $A_{n-K}$ ,  $B_{n-K}$ , operación extraordinariamente laboriosa, dando lugar a una cantidad de términos grandísima a pocas hojas que posea el resorte. La fórmula final se complica aún mucho más si pretendemos que los momentos de inercia de las hojas varíen en su longitud de una manera arbitraria, que es el caso más frecuente en la práctica, y, por el contrario, se simplifica al suponer todas las hojas de sección igual, y con adelgazamientos tales en las porciones que comprenden cada escalonamiento, que los momentos de inercia de la hoja adelgazada sean, en dicha región, funciones lineales de la abscisa.

#### Método gráfico de Phillips.

Phillips indicó ya, en la Memoria citada, un procedimiento que se podría seguir para determinar, de una manera gráfica, la flexión de un resorte bajo carga. Consiste este procedimiento en dibujar la hoja maestra deformada, para lo cual se deberá principiar por calcular los valores del radio de curvatura para puntos suficientemente próximos de la misma, valiéndose de la fórmula general expuesta. Una vez determinados, se trazará la curva por elementos, suponiendo cada uno de estos descriptos con un radio igual a la media entre los de sus extremos, obteniendo así la forma general del resorte bajo carga y, por consiguiente, la nueva flecha.

Este procedimiento se comprende que no puede resultar práctico. En efecto, los radios de curvatura alcanzan, tratándose de los de fabricación del resorte, algunos metros, por lo general, y los correspondientes a la carga normal se suponen muchas veces infinitos; luego si se dibuja el resorte a pequeña escala para poder trazar más cómodamente aquellos radios, el trazado de la hoja maestra deformada estará expuesto a errores por la proximidad de las divisiones, y si, por el contrario, dibujamos el muelle a gran escala, resultará engorroso, y muchas veces impracticable el operar con radios de curvatura de tales dimensiones.

### Método de la integración gráfica.

La fórmula fundamental que nos da el valor del radio de curvatura para un punto de la hoja maestra distante  $\lambda$  del centro del muelle, cuando éste soporta una carga  $Q$  en cada extremo, es, según se ha visto:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_1^K \frac{M_q}{r_q} - Q(L_1 - \lambda)}{\sum_1^K M_q}$$

Esta fórmula puede ser transformada, para nuestro objeto, de la siguiente manera. Suponiendo el coeficiente de elasticidad constante, tendremos:

$$\sum_1^K \frac{I_q}{r_q} - \frac{1}{\rho} \sum_1^K I_q = \frac{Q}{E} (L_1 - \lambda),$$

siendo  $r_q$  el radio de fabricación de la hoja de orden  $q$ .

Para una carga nula, o sea para  $Q = 0$ , se deduce:

$$\sum_1^K \frac{I_q}{r_q} - \frac{1}{\rho_0} \sum_1^K I_q = 0,$$

siendo  $\frac{1}{\rho_0}$  una función de  $\lambda$  definida por esta última ecuación, y  $\rho_0$  el

radio de curvatura común para todas las hojas reunidas cuando el resorte no soporta ninguna carga.

Restando la segunda de la primera, quedará:

$$\sum_1^K I_q \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{Q}{E} (L_1 - \lambda),$$

Ahora bien; tomemos como eje de las  $x$  la tangente, y por eje de las  $y$  la normal en el punto medio de la hoja maestra, y llamemos:

- $y$  ..... la ordenada cuando el muelle no soporta ninguna carga.  
 $y + \Delta y$  ..... esta misma ordenada cuando los extremos del resorte soportan cada uno la carga  $Q$ ;  $\Delta y$  será igual y de signo contrario a la flexión que la carga  $Q$  ha ocasionado en dicho punto.

Suponiendo siempre, como en el método analítico, que la tangente en un punto cualquiera de la hoja maestra posee una inclinación pequeña  $y$ , y por lo tanto, que se puede tomar por longitud de un elemento de dicha hoja su proyección horizontal, se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(y + \Delta y)}{dx^2} &= \frac{1}{\rho} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{\rho_0} \end{aligned} \right\} \text{de donde } \sum_1^K I_q \frac{d^2(-\Delta y)}{dx^2} = \frac{Q}{E} (L_1 - \lambda),$$

o sea, llamando  $i_L$  la flexión en la extremidad del muelle:

$$\sum_1^K I_q \frac{d^2 i_L}{dx^2} = \frac{Q}{E} (L_1 - \lambda),$$

de donde

$$\frac{d^2 i_L}{dx^2} = Q \frac{L_1 - \lambda}{E \sum_1^K I_q}.$$

El problema de la determinación de la flexión queda así reducido a resolver esta ecuación diferencial, para lo cual aplicaremos los procedimientos de integración gráfica, construyendo la curva integral se-

gunda de la expresión,

$$\frac{L_1 - \lambda}{E \sum_1 I_q}$$

pues una vez conocidas las ordenadas de esta última, las de la expresión

$$Q \frac{L_1 - \lambda}{E \sum_1 I_q}$$

se obtendrán sencillamente multiplicando aquéllas por la cantidad constante  $Q$ .

Partiendo de esta base, supongamos que tenemos que determinar la pérdida de flecha bajo la carga  $2Q$  del muelle representado en la figura 5.<sup>a</sup>

Con objeto de facilitar las operaciones, dibujaremos siempre el muelle, cuya flexión tratamos de hallar, con sus hojas rectas; es decir, como si la curvatura inicial del resorte fuera nula. Podemos hacer perfectamente esta hipótesis, puesto que no vamos a hallar la verdadera forma del muelle una vez que se le aplique la carga  $2Q$ , como sucedía en el procedimiento gráfico indicado antes, sino que para cada sección que se considere debemos construir el valor de

$$\frac{L_1 - \lambda}{E \sum_1 I_q}$$

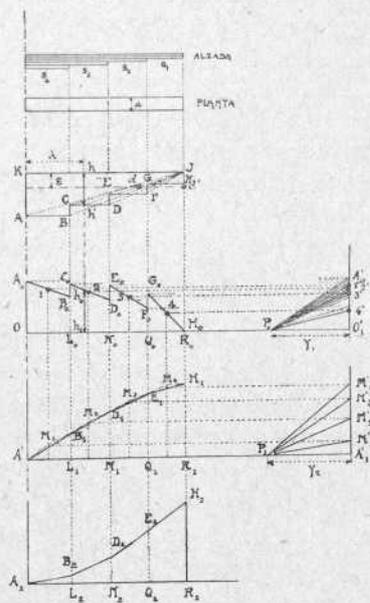


Fig. 5.<sup>a</sup>

y considerando la curva, cuyas ordenadas sean estos valores, como curva inicial, determinar la primera y segunda curva integral de la misma, en cuyas operaciones no interviene para nada la curvatura primitiva.

va del resorte. Además, como se supone siempre, dicha curvatura debe ser lo suficientemente pequeña para poder confundir uno cualquiera de los elementos del eje neutro de las hojas con su proyección horizontal.

Para mayor generalidad, supondremos que las láminas que forman el resorte dado son de diferente espesor  $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ . Las dos primeras, de longitud igual, forman una hoja maestra doble, y las restantes, de longitudes decrecientes, formando así los escalonamientos  $s_1 s_2 s_3 s_4$ . Dicho muelle está dibujado a una escala, por ejemplo, de  $\dot{A}^m/m$  por metro, igual para abscisas y ordenadas.

Dibujemos ahora el muelle con la misma escala para las abscisas, pero siendo las ordenadas proporcionales al cubo de los espesores  $e_1 e_2 e_3 \dots$  y sea  $ABCDEFGH$  el nuevo perfil obtenido. La escala de abscisas continuará siendo como antes  $\dot{A}^m/m$  por metro, pero la escala de ordenadas no será ya ésta, sino que habrá variado según el factor de proporcionalidad escogido para representar el cubo de los espesores, siendo, por ejemplo, dicha escala de  $\dot{A}_1^m/m$ . Representaremos por  $U_1$  la unidad para las abscisas, igual a  $\dot{A}^m/m$  y por  $U_2$  la unidad para las ordenadas, igual a  $\dot{A}_1^m/m$ .

Fijémonos ahora en que las ordenadas de este mismo perfil  $ABC \dots H$  nos pueden representar la suma de los momentos de inercia de las secciones efectuadas en el muelle por un plano normal al eje de las  $x$ , multiplicada además cada suma por el coeficiente de elasticidad, puesto que siendo cada sección rectangular, y llamando  $e$  el espesor y  $a$  la anchura, el momento de inercia de la misma es igual al cubo de este espesor multiplicado por el factor constante  $\frac{a}{12}$  y, en consecuencia, bastará para conseguirlo que cambiemos de escala, adoptando para escala de los productos de los momentos de inercia de las secciones, por el coeficiente de elasticidad, la misma escala que antes teníamos, dividida por el producto de esa constante anterior por el coeficiente  $E$ . Así, pues, si llamamos  $U_M$  la unidad de la nueva escala para el perfil  $ABC \dots H$ , tendremos

$$U_M = \frac{U_2^3}{E \frac{a}{12}},$$

y dicho perfil nos representará la función

$$E \sum_1^K I_q.$$

Nos falta únicamente para terminar de plantear el problema, construir la curva inicial, o sea la representativa de la función

$$y = \frac{L_1 - \lambda}{K \sum_1 I_q}$$

La determinación de este valor para cada uno de los que pueda tener  $\lambda$  es muy sencilla; basta dividir gráficamente las dos líneas  $mh$  y  $hh'$  correspondientes al valor  $\lambda$  de que se trate. Para ello trazaremos paralelamente a  $\mathcal{F}K$  una recta distante de la anterior una cantidad dada  $\varepsilon$ , arbitraria, que tomaremos por unidad; uniendo el punto  $h'$  con  $\mathcal{F}$  cortará a esta última recta en un punto  $d$  y midiendo la longitud  $dd'$ , tendremos el valor de

$$\frac{L_1 - \lambda}{K \sum_1 I_q} \quad \text{para} \quad \lambda = Kh.$$

a una escala cuya unidad será

$$U_c = \varepsilon \frac{U_l}{U_M},$$

puesto que si el numerador y el denominador tuvieran la misma escala, la del cociente sería  $U_c = \varepsilon$ ; pero como la escala del primero es  $U_l$  y la del segundo  $U_M$ , habrá que multiplicar aquélla por la relación de ambas. Por lo tanto, si perpendicularmente a  $Ox$  llevamos como ordenadas en  $h_1, h_2$  las longitudes  $dd'$  correspondientes a las abscisas  $\lambda$ , obtendremos un perfil  $A_0 B_0 C_0 \dots D_0$  representativo de la función

$$\frac{L_1 - \lambda}{K \sum_1 I_q}$$

y cuya primera y segunda curva integral nos proponemos hallar.

En el caso representado por la figura 5.<sup>a</sup>, en el que las hojas no

presentan adelgazamientos en los extremos, es muy fácil la determinación de este perfil, puesto que para cada escalonamiento es una línea recta  $A_0 B_0, C_0 D_0, E_0 F_0 \dots$  ya que el numerador es una función lineal de la abscisa y el denominador una cantidad constante en el mismo intervalo. Bastará, en consecuencia, determinar los puntos correspondientes al principio y al fin de cada escalonamiento y unirlos por rectas en la forma indicada. Ya veremos más adelante el caso en que existan adelgazamientos.

Conocida la curva inicial, el trazado de la primera integral se hace con facilidad, puesto que se compondrá de una serie de arcos de parábola de 2.º grado, cada uno de los cuales corresponderá a la integración del trozo  $A_0 B_0, C_0 D_0, E_0 F_0 \dots$  de la curva inicial, siendo tangentes estos arcos en los puntos de unión  $B_1, D_1, F_1, H_1$ . Para construirlos, tomaremos un polo  $P_0$  con una distancia polar igual a una base de integración  $\gamma_1$  que podemos escoger arbitrariamente. Entre las unidades con que está trazado el perfil  $A_0 B_0 C_0 \dots H_0$ , que hemos representado antes por  $U_i$  y  $U_c$ , la unidad  $U_c$  de las ordenadas de la curva integral y la constante de integración  $\gamma_1$  existe la relación

$$U_c = \frac{U_i \times U_c}{\gamma_1}$$

Trazaremos las cuerdas  $A_1 B_1, B_1 C_1, C_1 D_1 \dots$  proyectando las ordenadas medias de  $A_0 B_0, C_0 D_0, E_0 F_0 \dots$  en  $O' A'_0$  uniendo los puntos  $1', 2', 3'$  y  $4'$  con  $P_0$  y trazando las paralelas a los radios polares.

El trazado de las tangentes a la curva integral se hará proyectando los puntos de la curva inicial sobre  $O' A'_0$ , uniéndolos con  $P_0$  y trazando por  $A_1, B_1, C_1 \dots$  las paralelas a los radios polares; las tangentes en los extremos de cada arco parabólico vendrán a cortarse en un punto de la ordenada de la mitad de  $A_1 L_1, L_1 N_1, N_1 Q_1 \dots$  determinando para cada una la longitud de la ordenada media por los procedimientos ordinarios.

Conocidos los elementos de la primera curva integral, o sean las ordenadas medias para cada intervalo, y los extremos  $A_1, B_1, D_1, F_1, H_1$  de las cuerdas de los arcos parabólicos, podremos trazar la curva integral de esta última, que estará formada por arcos parabólicos de 3.º grado, correspondientes a los de 2.º grado que constituyen la primera. Para trazar aquéllos, se principiará por escoger otro polo  $P_1$  con una distancia polar  $\gamma_2$  igual o diferente de la empleada en la curva an-

terior. La unidad para las ordenadas de esta segunda curva integral, ya que para las abscisas continúa siendo siempre  $U_1$ , vendrá dada por la relación

$$U_2' = \frac{U_1 \times U_2}{\gamma_2}.$$

Generalmente nos bastará con hallar la ordenada de la segunda curva integral correspondiente al extremo  $R_0$ , que multiplicado luego por  $Q$  nos dará la pérdida de flecha del resorte bajo una carga total de  $2Q$  repartida por igual entre los dos extremos, y para esto será suficiente trazar las cuerdas  $A_2B_2, B_2D_2, D_2F_2, \dots$  de los arcos parabólicos, proyectando los puntos de las ordenadas medias de los arcos de la curva primera sobre  $A_1'H_1'$ , uniéndolos con  $P_1$  y trazar después las paralelas a partir de  $A_2$ .

La ordenada  $R_2H_2$  representará a la escala cuya unidad es  $U_2'$ , el valor

$$\int_0^L \int_0^L \frac{L_1 - \lambda}{K} d\lambda^2 \\ E \sum_1 I_q$$

y multiplicándola por  $Q$  obtendremos la pérdida de flecha buscada.

Tanto la primera como la segunda curva integral pueden terminarse de trazar por puntos, pero, como puede observarse, no es necesario para nuestro objeto.

#### Observaciones sobre las escalas.

Con el fin de facilitar las construcciones gráficas y de aumentar su exactitud, conviene emplear siempre las mayores escalas posibles. Así, recomendamos emplear para escala de longitudes en los resortes de tamaño corriente (coches, vagones, automóviles.....), la escala  $1/2$  y sólo en caso de que el resorte sea de exageradas dimensiones, deberá tomarse un valor menor.

El valor elegido para  $\epsilon$  dependerá de la forma del perfil  $ABC, \dots$  a fin de conseguir que las intersecciones de las rectas  $A\mathcal{F}, B\mathcal{F}, \dots$ , con la paralela a  $K\mathcal{F}, \dots$ , queden bien definidas.

Las distancias polares  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se escogerán de modo que las orde-

nadas de la 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup> curva integral no sean ni muy pequeñas ni excesivamente grandes, y es conveniente, para facilitar la deducción de  $U_{\phi}$  y  $U_{\phi'}$  tomar para ellas un número exacto de centímetros.

Por último, no hay inconveniente en reducir las dimensiones del trazado completo dibujando la segunda curva integral sobre la primera, lo que ahorrará papel y trabajo, evitando prolongar líneas y acumular así errores.

### Casos particulares.

Las construcciones gráficas que constituyen el método que acabamos de exponer, se simplifican en muchos casos: así, por ejemplo, si las hojas se adelgazan en sus extremos de modo que los valores de los momentos de inercia en las secciones correspondientes a los escalonamientos sean función lineal de la abscisa, se obtendrá para curva inicial, en vez de un perfil escalonado como el obtenido antes, una línea recta, paralela al eje de las abscisas; la primera curva integral será, pues, una recta inclinada y la segunda una parábola de 2.<sup>o</sup> grado, de la que basta trazar su cuerda.

Al mismo caso quedaría reducido aquel en que las hojas fueran de diferentes espesores, pero con escalonamientos proporcionales a los mismos, según la teoría de Phillips, y con adelgazamientos parabólicos.

### Aplicación al caso de adelgazamientos irregulares.

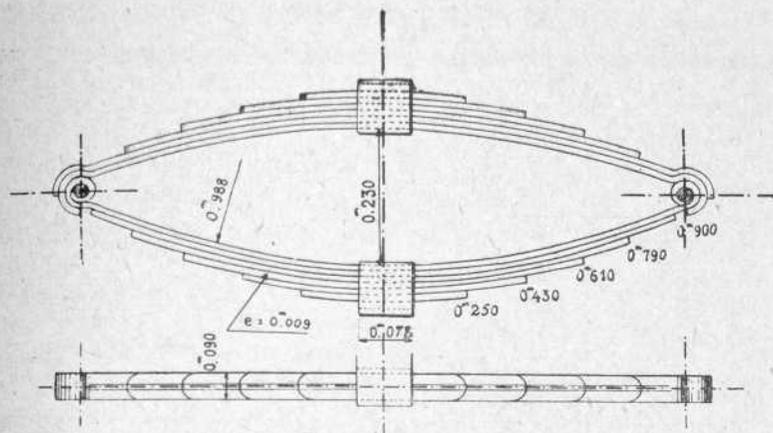
Con objeto de hacer ver la generalidad del método explicado y la manera de hacer los trazados gráficos cuando las hojas se terminen por perfiles arbitrarios, vamos a aplicarlo al caso de determinar la pérdida de flecha de un tipo de resorte empleado por la Compañía del Ferrocarril del Norte de España en su material móvil a bogies.

Este resorte está representado en la *figura 6.<sup>a</sup>*; y supongamos que se trata de determinar la pérdida de flecha del semirresorte inferior por unidad de carga.

Los datos relativos a este último son los siguientes:

Número de hojas .....	6
Espesor de idem. ....	0,009 m.
Ancho de idem. ....	0,090 »
Radio de fabricación de idem. ....	0,988 »
Longitud hoja maestra entre puntos de contacto. ....	0,940 »

Las longitudes de las restantes hojas van indicadas en la figura. La 3.<sup>a</sup>, 4.<sup>a</sup>, 5.<sup>a</sup> y 6.<sup>a</sup> hoja presentan en sus extremos adelgazamientos semicirculares; las dos primeras conservan su sección entera.

Fig. 6.<sup>a</sup>

La aplicación a este resorte de nuestro método gráfico aparece en la figura 7.<sup>a</sup>

Se ha principiado por dibujar la mitad de la derecha de este semi-

resorte en alzada y planta. La curva de  $\sum_{i=1}^K I_{q_i}$  se presentará formando

una línea escalonada, en la que los trozos horizontales correspondrán a las porciones de escalonamiento en que la sección de la última hoja no varía; en cambio, el perfil comprendido entre  $e'$  y  $a'$  ..... será curvo, teniendo que ser determinado por puntos.

Para esto podemos observar que, variando únicamente la anchura de las hojas, los momentos de inercia para las distintas secciones de estos adelgazamientos serán proporcionales a las cuerdas correspondientes  $bb, cc, dd, \dots$  luego los puntos  $e'd'c'$  de la parte curva del perfil deberán encontrarse a distancias de  $Ra'$  proporcionales a dichas cuerdas. Para hallar estas distancias gráficamente se proyectarán las cuerdas  $ee, dd, cc \dots$  sobre la recta  $O''4'$  (para el perfil correspondiente al segundo escalonamiento a partir del centro, por ejemplo), y los puntos  $4'3'2'1'$  sobre la  $RS$ , que a su vez se determina tomando

$PR$  igual al ancho de las hojas, y  $PS$  igual a la altura correspondiente en el diagrama de  $\sum_1^K I_q$  a la hoja considerada. Trazando por los puntos 1" 2" 3" ..... horizontales, los de encuentro con las verticales de  $e, d, c, b$  ..... serán los puntos  $e', d', c'$  ..... que debíamos determinar.

La misma construcción se repetiría para los restantes escalonamientos; claro es que cuanto mayor número de puntos determinemos se obtendrá mayor exactitud; pero conviene advertir que no es preciso unir éstos por una curva continua, puesto que se sabe que para la integración de éstas es preciso sustituirlas por líneas poligonales.

En realidad, lo que se habrá obtenido así para repre-

sentación de  $\sum_1^K I_q$  será un

perfil poligonal, del que ya sabemos deducir el correspondiente a

$$\frac{L_1 - \lambda}{K},$$

$$E \sum_1^K I_q$$

como también la primera y segunda curva integral de este último.

En la *figura 7.<sup>a</sup>* hemos trazado estas dos últimas curvas sobre los mismos ejes, con objeto de poder emplear cómodamente escalas mayores, y para no complicar la figura no se han hecho todas las construcciones auxiliares; sólo se han indicado las correspondientes al segundo escalonamiento a partir del centro.

La determinación de las escalas se hace de la siguiente forma:

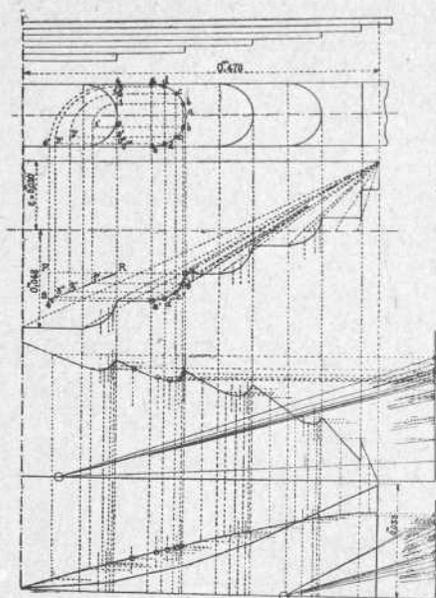


Fig. 7.<sup>a</sup>

**Escala de abscisas.**

$U_e$  ..... constante e igual a 200 mm. por metro.

**Escala de ordenadas.**

a) Perfil y planta del muelle .....  $U_l = 200$  mm. por metro.

b) Representando el cubo del espesor de cada hoja, o sea  $(0,009)^3 = 0^m,000\ 007\ 29$  por una longitud de 8 mm., se tiene

$$U_e = \frac{6 \times 8}{n e^3} = \frac{48}{0,000\ 004\ 374} = 10\ 972\ 565 \text{ mm.}$$

$$U_M = \frac{U_e}{\frac{Ea}{12}} = \frac{10\ 972\ 565}{150 \times 10^6} = 0,073\ 15 \text{ mm.}$$

$$c) \quad U_c = \varepsilon \frac{U_l}{U_M} = 20 \times \frac{200}{0,073\ 15} = 54\ 682 \text{ mm.}$$

$$d) \quad U_e = \frac{U_l \times U_c}{\gamma_1} = \frac{200 \times 54\ 682}{100} = 109\ 364 \text{ mm.}$$

$$e) \quad U_{e'} = \frac{U_l \times U_c}{\gamma_2} = \frac{200 \times 109\ 364}{40} = 546\ 820 \text{ mm.}$$

Flexión por 1 kg. en cada extremo.....  $x$ .

$$\frac{546\ 820}{1} = \frac{33}{x}, \quad x = 0,000\ 060\ 34 \text{ m.}$$

Flexión por 500 kg. en cada extremo.....  $0,000\ 060\ 34 \times 500 = 0,030$  m.

Por consiguiente, el semirresorte considerado sufrirá una pérdida de flecha de 0,030 m. bajo una carga total de 1.000 kg. repartida por igual entre los dos extremos.



ALGUNAS CONSIDERACIONES  
ACERCA DEL  
EMPLEO DE LOS ABONOS QUÍMICOS

y breve estudio de la kalinita, nuevo abono potásico

POR

D. CONRADO GRANELL

DOCTOR EN CIENCIAS QUÍMICAS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

El asunto de esta comunicación es tan vasto que, si pretendiéramos abordarle en toda la extensión que merece, habría materia para escribir un extenso tratado; pero nuestro objeto es únicamente el dar algunas noticias de carácter experimental acerca del sulfato amónico, superfosfatos de cal, nitrato sódico y nitrato potásico; de los abonos potásicos, sulfato y cloruro de potasa y, en especial, de la kalinita, fabricada por el que tiene la satisfacción de leer estas Notas.

Soy de una región de España que toda su riqueza y progreso lo debe al empleo de los abonos químicos; soy de Sueca, ciudad de la provincia de Valencia, la más adelantada del mundo en el cultivo del arroz, como palpablemente se demostró en el último Congreso internacional arrocero.

Las abundantísimas cosechas que actualmente producen aquellos campos desde remotísimos tiempos dedicados al cultivo intensivo y, por lo mismo, esquilados, agotados, solamente se comprende viendo un plantío de arroz. Es tal el número de espigas por metro cuadrado, que no cabe una más, y solamente por un milagro de la vida se comprende que puedan llegar todas a una feliz granazón.

Antes de emplear los abonos químicos, cuando las tierras se estercolaban y encerraban en ellas ganado en el tiempo que no contienen agua, era tan exigua la producción, que a pesar de alcanzar el arroz precios altos con relación a los últimos años y de que los jornales se pagaban precisamente la mitad de los de ahora, en tiempos de planta-

ción y recolección, el cultivo del arroz apenas si remuneraba los gastos que originaba; pero al emplear primero el guano del Perú, hace unos cincuenta y cinco años que triplicó la cosecha, y venir luego los abonos químicos que se emplean desde el año 1860, la producción ha adquirido tan soberanos vuelos que de 1.750 kg. que por término medio una hectárea producía empleando estiércol, se haya llegado con la semilla llamada Benloch a la respetable cifra de 9.000 kg.

Los primeros abonos químicos que se vertieron en los campos de arroz eran fabricados a base de sulfato amónico, superfosfatos de cal, sulfato potásico y materias inertes, tierra generalmente, los fabricaban determinados comerciantes y los vendían al agricultor, con lo que se realizaron muy saneados negocios. Luego las casas productoras de primeras materias dieron facilidades para venderlos directamente a los agricultores, y éstos, con arreglo a recetas, componían sus abonos y tenían, por lo menos, la satisfacción de saber lo que a sus campos echaban.

Primero los fabricaban a base de superfosfatos, sulfato amónico y sulfato potásico o kainita; luego, en vista de que algunos agricultores al suprimir la potasa no notaron merma en sus cosechas, suprimieron esta substancia, y solamente componían los abonos con sulfato amónico y superfostato de cal en partes iguales, a razón de unos 600 kilogramos de cada substancia por hectárea.

Llevados a suprimir, desterraron el empleo de los superfosfatos por notar que con esta supresión no se alteraba las cosechas ni en calidad ni cantidad.

Esta práctica de abonar solamente con sulfato amónico, fué duramente censurada por agrónomos y personas que se creían revestidas de autoridad en estos asuntos; pero no había nadie que sacara a mis paisanos de su rutina, y campo de arroz ha estado abonándose durante más de 15 cosechas consecutivas con sólo sulfato amónico, sin que por eso fuera menor la cosecha que la de los campos abonados con abonos completos.

También se hicieron experiencias abonando con nitrato sódico, que tan excelentes resultados proporciona a las huertos de naranjos, olivos, manzanos, etc., y se vió que el mismo resultado se obtenía abonando los campos de arroz con esta substancia que no echando nada, y esta experiencia que repetidas veces se realizó con el nitrato sódico, se efectuó también con el nitrato potásico y con el sulfato y cloruro de potasa, y en vista de sus nulos resultados, los labradores se resisten y han resistido a emplearlos.

El tiempo y la ciencia creo que esta vez han estado al lado del la-

brador rutinario, terco, que con el legítimo deseo de economizar dinero en abonos se limita a abonar sólo con sulfato amónico.

Nosotros explicamos estos hechos del modo siguiente: durante un período de unos veinte años se ha estado abonando con superfosfatos de cal, a razón de unos 600 kg. por hectárea; pero el superfosfato de cal inmediatamente de ser arrojado al suelo se transforma en fosfato insoluble por la acción de las sales amoniacaes, de la cal y de la magnesia de las tierras; y como una abundante cosecha de arroz, grano y paja solamente, separa en ácido fosfórico una cantidad correspondiente a unos 150 kg. de superfosfato por hectárea al año, resulta que a la vuelta de los veinte años existe en la tierra la enorme cantidad de 9.000 kg. de fosfato; por eso una nueva cantidad de este principio fertilizante no produce ningún efecto sensible.

El no observar tampoco ninguna ventaja en los campos abonados con nitrato sódico y potásico, así como en los que se vierte el sulfato o cloruro potásico, es debido a que el arroz se cultiva, en general, en agua corriente, y estos abonos son llevados, arrastrados, primero a la Albufera y luego al mar; pues no tiene la tierra condiciones para retenerlos a la manera como lo verifica con los abonos amoniacaes que, por su afinidad con la arcilla, son aprisionados y puestos en condiciones de ser asimilados por las plantas.

Este grave inconveniente de no poder con los abonos potásicos, hoy día conocidos, reintegrar a la tierra la potasa que el arroz asimila ha dado origen a muy graves contratiempos en estos últimos años, cuyos resultados se han manifestado en los continuos y terribles *fallaes* de los campos altos, hasta el punto de dejarlos sin segar, y esta enorme pérdida se comprende mejor al fijarnos lo que cuesta en trabajo, abonos y renta un hectárea al año, que viene a ser alrededor de 1.200 pesetas.

Mientras a los campos altos los ataca la *rocha* y *fallan*, en los campos hondos, cuyas aguas escalonadas proceden de los partidos altos, crece la planta del arroz de un modo exuberante y termina con una granazón inmejorable, y es porque aquellas aguas tienen una porción de substancias fertilizantes en disolución.

Este hecho nos denuncia claramente que la causa principal de *les fallaes* radica en las substancias fertilizantes, como hemos tenido ocasión de comprobar en el análisis de una tierra de los partidos altos, en que al lado de una riqueza enorme en ácido fosfórico, 3,69 por 1.000, solamente contenía indicios de potasa.

Como el asunto es de interés grande, pues los años que aprietan

*les fallaes* las pérdidas importan millones de pesetas en la región valenciana, me dediqué al estudio de este asunto y creo haber llegado a una solución del mismo.

Para fabricar este nuevo abono potásico, que titulo kalinita, me he inspirado en la misma naturaleza. Es indudable que la planta del arroz de los campos altos toma la potasa para realizar su síntesis orgánica de los silicatos insolubles de potasa, de donde también toma el anhídrido silícico, cuerpo éste el más refractario a ser transformado en compuestos solubles y, sin embargo, las raíces del arroz tienen ese excepcional poder.

Pero las tierras de los partidos altos del término de Sueca son viejísimas, y no sería aventurado suponer que están produciendo cosechas de arroz centenares de años, a más que desde hace cuarenta y cinco, fecha en que se empezaron a emplear exclusivamente los abonos químicos, han venido produciendo cosechas exorbitantes, con lo cual se explica el por qué son tan propensos los campos altos a la *rocha* y a *les fallaes*.

Nosotros hemos tenido ocasión de comprobar que si de potasa soluble no contienen más que indicios, es también tan escasa la potasa existente en los silicatos insolubles, que en el análisis que practicamos en una muestra procediendo por disgregación, solamente encontramos de potasa insoluble 4,37 por 1.000.

Esta exigua cantidad de potasa de los silicatos insolubles es, sin duda, la única fuente que aún tienen los campos altos, y precisamente la que sostiene en equilibrio inestable las cosechas, solamente llevadas a feliz término en los años de hermosas primaveras, donde los campos, cuando están en seco, reciben los fuertes rayos del Sol y los veranos son plácidos con pocos días bochornosos, que son los que precipitan la madurez de la planta, que al no poder realizar las síntesis orgánicas con la rapidez que las circunstancias climatológicas demandan por disponer de escasa potasa, enferman en el momento crítico de echar las espigas, y *fallan* en tan gran proporción que ni una sola espiga se ve libre de tan terrible azote.

Esta falta de silicatos insolubles de potasa que para el cultivo del arroz se necesitan, pretendemos remediarla echándolos a las tierras en forma también de silicatos insolubles de potasa.

*Fabricación de la kalinita.*—Para fabricar este abono completo de potasio colocamos en un crisol refractario 100 granos de arena silicea, 50 gr. de manganeso, 50 de dolomía (carbonato cálcico-magnésico), 50 de carbonato de potasa, 25 de carbonato de sosa y 10 de tártaro

bruto, como agente reductor, con el fin de impedir la formación de manganatos.

Las proporciones anteriores se pueden variar, y también hemos formado silico-fosfatos, substituyendo parte de la sílice por fosforita de Logrosán, pero estas mezclas necesitan más altas temperaturas para fundir.

Industrialmente se podría fabricar la kalinita empleando crisoles de fundición de hierro. El producto que resulta tiene un color azulado casi negro y es sumamente frágil, cualidad muy recomendable para hacerlo en polvo impalpable con poco coste.

Este silicato, por superabundar en él las bases, tiene necesariamente que ser de más fácil asimilación que los silicatos naturales. Además, por su fácil descomposición, pondrá a disposición de las plantas en condiciones altamente ventajosas, la sílice, manganeso, hierro, magnesia, cal, potasa y sosa, que unidos estos elementos al nitrógeno, azufre del sulfato amónico y al ácido fosfórico de los fosfatos, forman los elementos principales que las plantas de arroz separan de la tierra.

Tenemos la seguridad de que con la kalinita se remediarían *les fallas* del arroz, debidos, en nuestro humilde concepto, a la defectuosa manera de abonar hoy día.

Solamente me resta comunicar que estas experiencias no han salido hasta ahora de nuestro Laboratorio; falta, por consiguiente, la fabricación industrial y la práctica que ha de sancionar, previas las modificaciones consiguientes, nuestros buenos augurios.

Este abono no solamente sería conveniente para los campos de arroz, sino para los de regadío y húmedos, en que se podría fabricar con menos dosis de arena silíceica con el fin de que fuera más fácilmente descomponible; de este modo se evitaría, sin duda, que los abonos potásicos se fueran al subsuelo, como puede acontecer en cierta clase de tierras.

Sería de una gran utilidad para nuestra patria, por el número elevado de hectáreas que se dedican al cultivo del arroz, que el Estado tomara por su cuenta nuestro modesto trabajo y lo llevara a la práctica.

En la Escuela de Agricultura de Madrid se podría montar un horno para la fabricación de la kalinita y ensayar sus efectos en las Granjas Agrícolas y Estación Agronómica arrocera de Sueca.

Esta cuestión que aquí hemos esbozado es de tan gran interés que necesita ser llevada a la práctica, pues con sólo evitar una sola *fallá* en la huerta valenciana se salvarían millones de pesetas.



EL AGUA OXIGENADA  
EN LA  
CONFECCIÓN DEL AGUARDIENTE ESTILO COGNAC

POR

D. CONRADO GRANELL

DOCTOR EN CIENCIAS QUÍMICAS

(Sesión del 18 de Octubre de 1915.)

---

Es conocido de todos que los aguardientes, por la acción del tiempo, ganan considerablemente en bondad; pero esta acción es sumamente lenta y, por lo mismo, antieconómica, por requerir un capital proporcional al género en los almacenes y bodegas.

Con el fin de acelerar esta acción que tan maravillosamente ejecuta el tiempo, puse en práctica cuantos medios se aconsejan para el caso; pero a decir verdad, ninguno me dió resultado satisfactorio. Hice una prueba en pequeño con agua oxigenada, y en vista del éxito conseguido procedí a su empleo desde el punto de vista industrial.

Para ello colocaba en pipas de unos 250 litros de capacidad, de madera de roble, alcohol de 45 grados centesimales y le añadía los extractos hidroalcohólicos de virutas de madera de roble, cortezas de nuez y de almendras dulces, extracto acuoso de ciruelas pasas, vino rancio de Málaga, extracto de vainilla o vainillina y éter enántico en proporciones convenientes. Durante el espacio de diez días no se dejaba de agitar, y al décimo se le añadía 1 litro de agua oxigenada corriente por 100 de aguardiente, se agitaba suavemente y se tapaba con tubo poroso.

Al cabo de tres meses de fabricado el cognac da la sensación de añejo, y se mejora mucho más si se le añade al cabo de este tiempo carbonato amónico en cortísima proporción.

Por este procedimiento se consigue que un cognac de cinco meses pueda competir en pastosidad, finura y bouquet con otro de cuatro años.



# EL HIPOCLORITO DE CALCIO EN AGRICULTURA

POR

D. CONRADO GRANELL

DOCTOR EN CIENCIAS QUÍMICAS

(Sesión del 18 de Octubre de 1915.)

---

Es tal el número de pequeños seres de los reinos vegetal y animal que viven sobre las plantas y en los campos, que su exterminio es siempre una operación que redunde en beneficio de las cosechas.

Varios son los agentes parasiticidas que se emplean: arseniatos, cal en polvo, sulfatos de hierro y cobre, sal común, sulfato sódico, permanganato potásico, ácido fénico, creosotas, polisulfuro cálcico, soluciones jabonosas simples o con infusiones de tabaco, olivarda, torbisco, etc., etc.; pero su acción, tal y como se practica, no es nunca decisiva, y muchas de estas substancias dejan principios tóxicos sobre las plantas y frutos, que pueden ser causa de eminente peligro para la salud pública.

Teniendo en cuenta la máxima que dice: « más vale precaver que remediar », basamos nosotros la práctica para extinguir las plagas del campo en una previa desinfección de las semillas y de las tierras de labor.

La substancia química que empleamos es el hipoclorito de cal (polvos de gas, cloruro), cuerpo eminentemente tóxico para los seres en cuestión, y que obtenido de las aguas residuales de las salinas marítimas, resultaría sumamente económico.

*Desinfección de semillas.*—Las semillas de las plantas que han sido atacadas por hongos, bacterias e insectos, llevan generalmente gérmenes patógenos y huevos, que a su debido tiempo vienen a la vida con grave perjuicio, casi siempre, de las cosechas. Para desinfectar las semillas las tratamos durante algunos minutos removiendo continua-

mente con una solución al 25 por 1.000 y luego se lavan con agua de pozo y se dejan secar.

*Desinfección de los campos.*—Para la extinción de hormigas, larvas, pulgones, alacranes cebolleros, langostas, escarabajos, grillos, cucarachas, caracoles, babosas, etc., y hongos y bacterias parásitos en los campos de regadío, procedemos como sigue: se espera a quitar la cosecha, y antes de recibir el agua para preparar la tierra a un nuevo cultivo, se esparcen de 100 a 600 kg. de hipoclorito de cal por hectárea (no se peca por exceso) e inmediatamente se la inunda. La acción del hipoclorito de calcio es tan mortífera, que todos estos pequeños seres perecen a su acción, que no suele durar más que algunas horas por transformarse en cuerpos inofensivos y a la vez beneficiosos.

Aparte de la acción parasitocida del cuerpo en cuestión, al actuar sobre las substancias orgánicas acelera su descomposición, propiedad muy conveniente; además, en presencia del ácido húmico debe dar origen a ácido clorhídrico, cuerpo que, al actuar sobre los fosfatos y la potasa insoluble de los silicatos, los pondrá en condiciones de ser fácilmente asimilables. Si esto no fuera bastante, proporciona también a la tierra dos elementos de gran valor: el cloro y el calcio.

Esta práctica podría ser utilizada en los campos de secano aprovechando los días nubosos y de inmediata lluvia.

Es tan grande el beneficio que a las cosechas proporciona el hipoclorito de cal, que su efecto se manifiesta de un modo sorprendente; por eso, aprovechando la oportunidad de este importante Congreso, damos a conocer esta práctica con el fin de que al divulgarse sea aplicada por nuestros agricultores, con la que tendrán un poderoso remedio para combatir las plagas del campo y conseguirán también más abundantes y sanas cosechas.

---

FÓRMULA SIMPLIFICADA  
PARA  
CALCULAR LAS CORREAS Y LISTONES DE ARMADURA  
FORMADAS POR HIERROS DE ÁNGULO

POR  
D. MANUEL VELASCO DE PANDO

INGENIERO INDUSTRIAL

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

Sean:

$\alpha$  = ángulo de la vertiente con la horizontal (*fig. 1.<sup>a</sup>*).

$t$  = coeficiente de trabajo del material, o más propiamente la fatiga molecular.

$M$  = momento flector resultante de las cargas y sobrecargas.

$x$  = abscisa. . } de un punto cualquiera de la sección.  
 $y$  = ordenada }

$I_x$  = momento de inercia respecto al eje  $XX$ .

$I_y$  = » » » » »  $YY$ .

$\omega$  = ángulo que forma con el eje de las  $X$  el vector representativo de  $M$ .

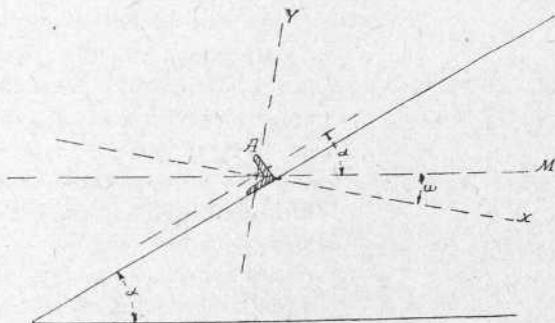


Fig. 1.<sup>a</sup>

Supondremos la escuadra de lados iguales y admitiremos que los ejes coordenados son los ejes principales de inercia de la sección, siendo el  $XX$  el que pasa por el vértice de la escuadra.

Tendremos

$$t = M \left[ \frac{y \cos \omega}{I_x} - \frac{x \operatorname{sen} \omega}{I_y} \right].$$

Supongamos primeramente

$$\alpha < 45^\circ.$$

La figura demuestra que

$$\alpha + \omega = 45^\circ, \quad \omega = 45^\circ - \alpha.$$

El máximo de  $t$  se produce en el punto  $A$ , porque allí los dos sumandos de  $t$  son positivos y tienen su mayor valor.

Con las notaciones de la *figura 2.<sup>a</sup>* el valor de  $t$  máximo será

$$t_m = M \left[ \frac{w}{I_x} \cos (45^\circ - \alpha) + \frac{w-f}{I_y} \operatorname{sen} (45^\circ - \alpha) \right].$$

Si fuera  $\alpha > 45^\circ$  se vería análogamente que la fórmula sería

$$t_m = M \left[ \frac{w}{I_x} \cos (\alpha - 45^\circ) + \frac{w-f}{I_y} \operatorname{sen} (\alpha - 45^\circ) \right].$$

Para calcular la sección precisa darse una escuadra a ojo y comprobar si  $t$  es menor que el coeficiente de trabajo admisible. Si  $t$  resulta mayor o demasiado pequeño, se tantea con otra escuadra.

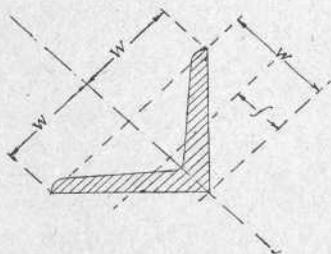


Fig. 2.<sup>a</sup>

A este fin, hagamos

$$\beta = \frac{I_x/w}{I_y/w-f} = \frac{I_x(w-f)}{I_y \times w}.$$

Con objeto de simplificar estos cálculos yo he tratado de obtener una fórmula sencilla, bastante exacta para anteproyectos y que, en todo caso, pueda servir a lo menos para ver aproximadamente qué escuadra responde a la cuestión y comprobarla por la fórmula exacta anterior.

El valor de  $t$  se convierte en

$$t = \frac{Mw}{I_x} [\cos (45^\circ - \alpha) + \beta \operatorname{sen} (45^\circ - \alpha)].$$

Si ahora ponemos

$$\varphi = \cos (45^\circ - \alpha) + \beta \operatorname{sen} (45^\circ - \alpha),$$

nos resulta

$$t = \varphi \frac{Mw}{I_x}, \quad \frac{I_x}{w} = \varphi \frac{M}{t}.$$

#### Estudio del valor de $\beta$ .

He estudiado sobre el álbum español de perfiles el valor de  $\beta$  para las escuadras desde 20 a 90 mm. de lado y resulta variar desde 1,33 hasta 1,64. Desde la escuadra de 25 para arriba no hay ninguna en que pase de 1,6. Podemos, pues, prácticamente hacer  $\beta = 1,6$ .

#### Estudio del valor de $\varphi$ .

Para  $\alpha = 18^\circ$  (que es de las menores pendientes empleadas corrientemente)  $\varphi$  vale 1,62.

A partir de este valor es fácil ver que  $\varphi$  va disminuyendo a medida que  $\alpha$  aumenta, hasta llegar a  $\alpha = 45^\circ$  en que la fórmula deja de ser aplicable.

En efecto; si derivamos el valor de  $\varphi$  e igualamos a cero la derivada, obtenemos sucesivamente

$$\varphi = \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \beta \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right),$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha} = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \beta \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 0,$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \beta \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right), \quad \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \beta = 1,6,$$

$$\alpha = -13^\circ.$$

Como este valor de  $\varphi$  no está comprendido entre  $18^\circ$  y  $45^\circ$ , deducimos que en este intervalo la derivada es siempre del mismo signo.

Dando a  $\alpha$  cualquier valor de este intervalo, se ve que es negativa. La función es, pues, decreciente.

Tenemos

$$\varphi < 1,62.$$

#### Fórmula propuesta.

En vista del análisis anterior propongo la fórmula

$$\frac{I_x}{w} = 1,5 \frac{M}{t},$$

cuya aplicación es sencillísima, puesto que las tablas dan  $\frac{I_x}{w}$  para cada sección.

#### Error cometido empleando esta fórmula.

Llamemos  $e$  el error (valor aproximado menos valor verdadero). Tendremos

$$e = 1,5 \frac{Mw}{I_x} - \varphi \frac{Mw}{I_x} = [1,5 - \varphi] \frac{Mw}{I_x}.$$

Los valores más peligrosos de este error son los negativos, puesto que corresponden a tomar una sección menor.

Escribamos, pues, el valor anterior bajo la forma

$$-e = [\varphi - 1,5] \frac{Mw}{I_x} = \frac{\varphi - 1,5}{\varphi} t.$$

El máximo de  $e$  se obtendrá (entendiendo el máximo en valor absoluto entre los valores negativos) para el valor mayor que pueda recibir  $\varphi$  entre los límites que estudiamos. Este valor será el que corresponda a  $\alpha = 18^\circ$  haciendo al mismo tiempo  $\beta = 1,64$ .

Se obtiene así

$$e = \frac{0,136}{1,636} \times t = 0,083 \times t,$$

lo que para  $t = 10 \text{ kg.} \times \text{mm.}^2$  nos da  $e = 0,83 \text{ kg.} \times \text{mm.}^2$   
Análogamente se estudiarían los valores positivos del error.

**Caso en que se desee mayor aproximación.**

Se debe emplear la fórmula

$$t = \varphi \frac{Mw}{I_x},$$

pudiendo calcularse muy fácilmente los valores de  $\varphi$  que corresponden a cada valor de  $\alpha$  mediante

$$\varphi = \cos(45^\circ - \alpha) + 1,6 \sin(45^\circ - \alpha).$$

De esta manera no se comete otro error que el pequeño que resulta de hacer  $\beta = 1,6$ .

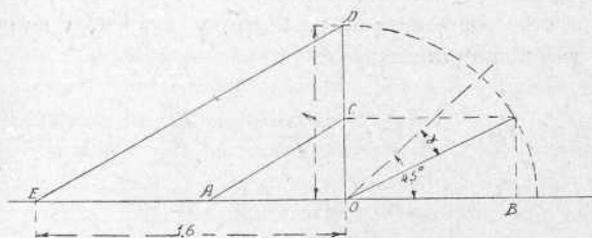


Fig. 3.<sup>a</sup>

$$OB = \cos(45^\circ - \alpha).$$

$$OC = \sin(45^\circ - \alpha).$$

CA se traza paralela a DE.

$$OA = 1,6 \sin(45^\circ - \alpha).$$

Resulta

$$AB = \cos(45^\circ - \alpha) + 1,6 \sin(45^\circ - \alpha).$$

$$AB = \varphi.$$

Se puede formar una tabla de los valores de  $\varphi$  en función de  $\alpha$ . Estos valores se pueden calcular muy fácilmente por las tablas de senos y cosenos naturales y también se pueden obtener por una construcción gráfica muy sencilla. (Véase la figura 3.<sup>a</sup>)

**Caso en que  $\alpha$  es mayor de  $45^\circ$ .**

En tal caso se tiene

$$\varphi = \cos(\alpha - 45^\circ) + \beta \operatorname{sen}(\alpha - 45^\circ).$$

Para  $\alpha = 45^\circ$  se tiene  $\varphi = 1$ . Para  $\alpha = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$  resulta  $\varphi = 1,62$ . La derivada de  $\varphi$  respecto a  $\alpha$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \beta \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

se anula para

$$\alpha = 103^\circ = 90^\circ + 13^\circ.$$

Así, pues, no hay máximo ni mínimo entre los límites asignados.

Por otra parte, la derivada es positiva entre los referidos límites; la función es, pues, creciente.

El mayor valor de  $\varphi$  es, por lo tanto,  $\varphi = 1,62$ , y se puede también tomar prácticamente

$$\varphi = 1,5, \quad t = 1,5 \frac{Mw}{I_x}, \quad \frac{I_x}{w} = 1,5 \frac{M}{t}.$$

**Resumen.**

Esta fórmula merece confianza para los casos prácticos, y únicamente conviene rectificar el valor de  $\varphi$  para las cubiertas muy poco inclinadas o muy inclinadas.

También conviene rectificarlo para las que estén próximamente a  $45^\circ$ , si bien en este caso el error es siempre en beneficio de la resistencia.

## EQUILIBRIO DEL AEROPLANO

---

# AUTOESTABILIDAD Y VUELO A DIFERENTES VELOCIDADES

POR

D. RAFAEL CASADO MOYANO

COMANDANTE DE ARTILLERÍA

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

---

AL LECTOR.

Eran vísperas del día del Corpus del año 1910.

Me acuerdo que estaba en la sala de lectura de un hotel de Madrid pasando la vista por los periódicos, cuando leí en el *Heraldo de Madrid*: «Esta tarde habrá pruebas de aviación en la Ciudad Lineal».

Entré en ganas de ver este espectáculo, y con el deseo de ver volar, en el de enterarme lo que eran los aeroplanos.

A mi regreso a Valladolid compré algunos libros.

Estudiaba muy de prisa, pues mi deseo era sólo adquirir un *ligero barniz* de lo que era la aviación. Pero a medida que iba avanzando en el estudio, confieso que empezaba a interesarme, y llegó a interesarme mucho más cuando llegué al punto culminante: al *equilibrio del aeroplano en el aire*.

Leí una teoría que me gustó mucho, y, tanto llegó a gustarme, que no podía comprender cómo aplicando aquella teoría a los aeroplanos, pudieran ocurrir los muchos accidentes que entonces y ahora ocurren.

Leí otra teoría que me gustó tanto o más que la primera; pero saqué la misma impresión.

Leí una tercera teoría, y aunque los principios fundamentales de todas ellas eran los mismos, yo siempre seguía con mi duda, ¿por qué se caerán los aeroplanos?

No tenía ni tengo grandes conocimientos en esta materia, pero in-

tuitivamente pensé en el timón de profundidad. Antes pensaba en él con miedo, pero hoy ya me atrevo a pensar con más seguridad, en lo brutal de su funcionamiento, y en los efectos desastrosos que produce. Las teorías que leí eran ciertas; todas ellas están inspiradas en principios científicos, rigurosamente matemáticos. Pero el aeroplano actual, tal como todos los autores le consideran, es un sólido apoyado, cuyos apoyos tiene el aviador que graduar en todos los momentos de la marcha.

El que haya hecho sólo un estudio superficial para enterarse de cómo vuela un aeroplano, y haya fijado su atención en el timón de profundidad, habrá podido ver la influencia desastrosa que en su funcionamiento puede ejercer la diversa dirección de las corrientes de aire, la variación de los centros de presión y, algunas veces, la precipitación o impotencia del piloto para hacerle obediente a sus deseos.

Repito que los aeroplanos actuales son sólidos apoyados; uno de los apoyos es la resistencia del aire en las alas, y el otro apoyo, la resistencia del aire en el timón de profundidad; y aunque sin negar cierta estabilidad propia al aeroplano, hay que comprender el trabajo ímprobo del aviador, que no puede en ningún momento perder de vista la graduación conveniente de los dos apoyos.

Teniendo esto en cuenta, pensé suprimir uno de los dos apoyos y *suspender de un solo punto, en el aire, el aeroplano.*

Un aeroplano *suspendido de un solo punto en el espacio* puede cumplir la condición de la autoestabilidad; *entendiendo por autoestabilidad, la propiedad de un aeroplano de poder seguir un camino recto en el vuelo, sin ninguna intervención del piloto.*

Pero para esto, hay necesidad de buscar una ley matemática, que relacione, bajo todas las incidencias prácticas del vuelo, *el centro de presión de la resistencia del aire en las alas con el centro de gravedad del aparato.*

Yo no sabía ni sé; y, como no sabía, no podía apoyarme en conocimientos míos para buscar esta ley; pero me cogí del brazo de la ciencia, dispuesto a marchar en su compañía sin abandonarla un solo momento.

Recuerdo que al poco tiempo hallé esta ley, que por cierto está escrita en todos los Tratados de mecánica, y creo que tuve el acierto de interpretarla mecánicamente con completa exactitud.

Pero como para el que no sabe todo son dudas, yo dudaba si habría resuelto bien lo que para tantos ofrecía tantas dificultades.

Intenté cambiar impresiones con algunos sabios que se hubieran

ocupado de esta clase de aplicaciones científicas, y ninguno quiso es-  
cucharme. Entonces abandoné estos estudios, de los que ya no volví  
más a acordarme.

Todo esto ocurría a fines del año 1910.

### **El Salón de París de 1913.**

Registrando libros y revistas para documentar esta Memoria, en-  
cuentro en *La Technique Aéronautique* del 15 de Enero de 1914 la  
comprobación de todo lo que proyecté tres años antes.

El año 1913 se celebró en París una exposición de aeroplanos con  
el nombre de «Salón de París de 1913».

A esta exposición concurrieron los inventores con sus modelos y  
las casas constructoras con sus aparatos más perfeccionados.

No voy a hablar de los perfeccionamientos progresivos de esta  
nueva industria; sólo voy a pasar revista a algunos de los modelos que  
presentaron orientaciones más radicales, y que, como acabo de decir,  
son una comprobación práctica de lo que teóricamente hice yo el  
año 1910.

EL BIPLANO NIEUPORT-DUNNE.—En Inglaterra, se empezaron a ha-  
cer experiencias de autoestabilidad por el Sr. Dunne, en colaboración  
con el coronel Capper, jefe de la Armada de globos, y el teniente Gibbs.

Estas experiencias, que se hicieron al principio bajo las órdenes  
del *War Office*, fueron continuadas después en Shellners, por cuenta  
del Sr. Dunne, en colaboración con los Sres. Short y Bross.

El punto culminante de estas experiencias fué un vuelo en presen-  
cia de Orville Wrigh y G. Breiver, en el cual el Sr. Dunne, *prescin-  
diendo de los órganos de mando*, escribió notas durante el vuelo, que  
arrojaba a los espectadores, dando con esto una prueba de la autoes-  
tabilidad del aparato.

La principal característica del biplano Nieuport-Dunne, que así se  
llama, es la siguiente:

En lugar de ser rectilíneo el borde de ataque del ala, tiene la  
forma de V, y su incidencia, que es positiva en el centro del ala, ter-  
mina siendo negativa en los dos extremos de la misma.

Con esta forma se consigue, que cuando el centro de presión re-  
trocede en un punto del ala, en otro punto avance, y en estas condi-  
ciones el punto de aplicación de la resultante de sustentación perma-  
nece fijo.

En esta disposición, dice *La Technique Aéronautique*, está el secreto de la autoestabilidad, pues una superficie de esta forma permite considerar el metacentro como un punto fijo perfectamente definido.

EL BIPLANO PAUL SCHMITT.—Según el ingeniero Schmitt, un aeroplano en movimiento está en equilibrio, cuando el centro de gravedad del aparato está colocado debajo del ala y en la misma vertical que pasa por el centro de presión.

Bajo este principio, los establecimientos P. Schmitt construyeron un biplano, haciendo que bajo las incidencias de 0 a 18°, el centro de gravedad se encuentre siempre en la misma vertical que pasa por el centro de presión.

Con esta disposición consiguió un aparato, en el cual, la estabilidad longitudinal está asegurada sin necesidad del timón de profundidad.

EL MONOPLANO BEER.—Más interesante aún es la solución propuesta por el ingeniero Beer, en un monoplano construido por la casa Rafmanoff y Compañía, y expuesto en el *Stand* de esta misma casa en el salón.

Para este aparato, se ha hecho un estudio especial del perfil del ala en el laboratorio de Eiffel. Es decir, se ha estudiado un perfil, en el que los desplazamientos del centro de presión para las incidencias comprendidas entre 0 y 10° sean insignificantes. De este modo, el aparato estará equilibrado para todas las incidencias, y como consecuencia de la casi coincidencia de los centros de presión y gravedad, el aparato presenta una solución bastante aceptable del vuelo a diferentes velocidades.

Todos estos aparatos, cuyo principio fundamental de construcción se basa en hacer que el centro de gravedad esté en la misma vertical que pasa el centro de presión, volaron sin necesidad de tener el piloto que acudir al timón de profundidad.

De aquí sacamos una consecuencia que está conforme con nuestras ideas, y esta consecuencia es la siguiente:

*Que suspendiendo el aeroplano de un punto en el espacio, con arreglo a las leyes de la mecánica, se puede volar en línea recta sin necesidad de tener que acudir al auxilio del timón de profundidad, pero no queriendo esto decir que se debe prescindir del citado timón (1).*

---

(1) Los modelos descritos y otros más, fracasaron en el momento mismo de nacer. Y por si alguien pudiera preguntarme la razón de este fracaso, voy a darla:

Los centros de gravedad, de presión en el ala y de carena están ligados, como

### El equilibrio actual.

El aeroplano, es el vehículo destinado a cruzar el espacio en infinitas direcciones con velocidades asombrosas, y para que un vehículo de esta naturaleza pueda colocarse a la altura de su misión, tiene que ser dotado de especiales condiciones de seguridad.

Saulnier, en su tratado *Equilibre, Centrage et Classification des Aero-planes*, dice lo siguiente sobre los aparatos de un solo centro y de centros distintos:

*Dans les appareils à centres confondus, on s'est appliqué à faire passer l'axe de traction de l'hélice par le centre de résistance à l'avancement, et par le centre de gravité. Il s'en suit, que le centre de gravité se trouve confondu avec le centre de sustentation.*

Según esto, el equilibrio de un aeroplano de centro único, es análogo al de una esfera suspendida por su centro.

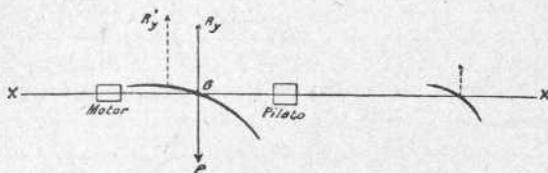


Fig. 1.<sup>a</sup>

Esta comparación del equilibrio de los aparatos de centro único con el de una esfera suspendida por su centro, no es exacta; pues si consideramos la proyección de las diferentes masas (fig. 1.<sup>a</sup>) sobre el

luego veremos, por la ecuación de momentos;

$$R \cdot of - R_n \cdot oe = 0.$$

Y según la mecánica—además de otras condiciones—, cuando esta igualdad se verifica, el equilibrio existe.

Pero no habiendo encontrado los establecimientos constructores indicados, un organismo mecánico capaz de hacer que, bajo todas las incidencias del vuelo, la ecuación de momentos se verifique, acudieron al procedimiento arbitrario de colocar el centro de gravedad debajo del centro de presión y los dos en una misma vertical.

Esto es algo aproximado y por eso en las experiencias, los aeroplanos volaron y volaron bastante bien; pero como el problema del equilibrio mecánico del aeroplano quedaba sin resolver, ninguno de estos aparatos—que yo sepa—ha seguido *viviendo*.

eje longitudinal del aeroplano, y aplicamos la componente vertical de sustentación  $R_y$  al centro de gravedad  $G$ , *el equilibrio será indiferente, que es el equilibrio más conveniente para que el aparato sea muy manejable.*

Ahora bien, si la incidencia aumenta, la componente de sustentación se trasladará a la posición  $R'_y$ , y el equilibrio indiferente desaparecerá, siendo necesaria entonces la intervención del timón de profundidad.

En los aparatos de centros distintos sucede lo mismo, con la diferencia de que el punto de aplicación de la componente de sustentación se encuentra muy elevado. Estos aparatos no pueden invertirse en el vuelo y su equilibrio es comparable al de una esfera suspendida por un punto de su superficie. Pero cualquier perturbación de su equilibrio en marcha produce oscilaciones que no pueden amortiguarse más que con el empleo de órganos de mando muy rápidos y enérgicos.

---

Los pájaros tienen su centro de gravedad debajo de las alas y su facilidad para el vuelo nadie la ha puesto en duda.

De tener que aplicarles la clasificación de Saulnier, los clasificaríamos como *aparatos de centros distintos*. Y, sin embargo, en los aeroplanos actuales—los monoplanos—las tendencias se inclinan por los aparatos de un solo centro; es decir, que van en contra de la constitución de los pájaros.

La cola de los pájaros no es una superficie sustentadora; presentan por consiguiente los pájaros en el vuelo, el caso de un cuerpo suspendido de un solo punto en el espacio. En cambio, el aeroplano actual no puede volar sin un timón de profundidad, que es una superficie sustentadora; es decir, que necesita dos puntos de apoyo.

Además, si los pájaros tienen sólo dos pies, es porque están perfectamente equilibrados para andar o permanecer quietos sobre la tierra. En tierra el aeroplano actual no goza de ningún equilibrio; es un cuerpo que se apoya por tres puntos en la superficie del suelo.

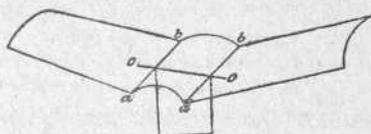
Por todas estas razones, yo creo que debemos intentar en dotar al aeroplano de un equilibrio más perfecto que el actual y más en armonía con su misión.

## EQUILIBRIO LONGITUDINAL DINÁMICO DEL AEROPLANO

**Descripción del aeroplano para la explicación teórica.**

Al empezar a hacer este estudio creí, como creen todos los principiantes, que el secreto de la estabilidad consistía en colocar el centro de gravedad del aparato debajo del centro de presión en las alas. Es cierto que esta idea es una idea de principiante; pero también es cierto que está de acuerdo con la constitución mecánica de los pájaros.

El aeroplano de principiante, al que vamos a aplicar la teoría del equilibrio, se compone (fig. 2.<sup>a</sup>) de dos alas, con un eje  $o-o$  apoyado en dos de sus cuerdas  $ab-ab$ , y de este eje suspendido un trapecio, en el que va sentado el aviador, dentro de su correspondiente navecilla.

Fig. 2.<sup>a</sup>

## EQUILIBRIO LONGITUDINAL DINÁMICO.

Equilibrio es el estado de un sistema material que permanece en reposo, bajo la acción de un sistema de fuerzas; éste es el equilibrio *estático*. Y el equilibrio de un sistema material cuyo movimiento no es alterado por las fuerzas que le solicitan, es el equilibrio *dinámico*.

La condición del equilibrio estático debe ser la misma que la del equilibrio dinámico. En efecto; es un principio experimental que sirve de base a la mecánica, que las fuerzas obran sobre los cuerpos en movimiento de la misma manera que sobre los cuerpos en reposo.

Por consiguiente, si se aplica un sistema de fuerzas en equilibrio a un cuerpo en reposo, se puede afirmar que este sistema de fuerzas estará también en equilibrio cuando el cuerpo esté animado de un movimiento cualquiera; pues si este sistema de fuerzas no puede poner al cuerpo en movimiento cuando está en reposo, no podrá tampoco producir un movimiento que altere el movimiento de que el cuerpo está animado.

Ahora vamos a estudiar el equilibrio dinámico, toda vez que las

fuerzas que produce la resistencia del aire son debidas al movimiento del aeroplano.

Siendo el aeroplano un cuerpo simétrico, las resultantes de las fuerzas que le solicitan estarán en un plano de simetría; por esta razón habrá que referir las fuerzas a un sistema de ejes coordenados, trazados en el mismo plano de simetría del aparato.

Sean (*fig. 3.<sup>a</sup>*):

- $i$  = el ángulo de incidencia.
- $T$  = la tracción de la hélice.
- $T_x$  = su componente horizontal.
- $T_y$  = su componente vertical.
- $R$  = la resistencia del aire en las alas.
- $R_x$  = su componente horizontal.
- $R_y$  = su componente vertical.
- $K, K', K''$  = los coeficientes de la resistencia del aire correspondientes a  $R, R_x, R_y$ .
- $R_n$  = la resistencia del aire en la navicilla.
- $P_t$  = peso total del aparato, que le supondremos gravitando sobre el eje de suspensión  $o-o$ .
- $M_t$  = masa correspondiente a  $P_t$ .

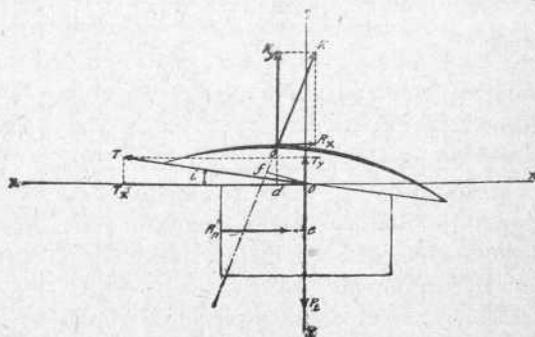


Fig. 3.<sup>a</sup>

Cuando todas las fuerzas están en un mismo plano, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio dinámico de un sistema material, que la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje coordenado perpendicular a la dirección del movimiento sea nula; es decir, que

$$T_y + R_y - P_t = 0; \quad [1]$$

siendo en este caso del equilibrio dinámico

$$T_x - R_x - R_n = T_x - (R_x + R_n) > 0,$$

puesto que la tracción de la hélice es la que produce el movimiento del aeroplano.

Y que la suma algebraica de los momentos de rotación, con relación a un punto cualquiera del plano de los ejes coordenados sea igualmente nula. Suponiendo que el punto  $o'$ , al cual se aplica la fuerza de tracción de la hélice, esté ligado al centro del eje de suspensión  $o-o$  por la pieza  $o'-o$ , y tomando los momentos de todas las fuerzas con relación al origen  $o$  del sistema coordenado, tendremos:

$$R_x \cdot cd + R_y \cdot od - T_x \cdot ob + T_y \cdot o'b - R_n \cdot oe = 0. \quad [2]$$

Esta ecuación, algo complicada, puede simplificarse, trasladando al punto medio del eje de suspensión  $o-o$  (*fig. 4.<sup>a</sup>*) el punto de aplicación del esfuerzo de tracción de la hélice; pues entonces los brazos

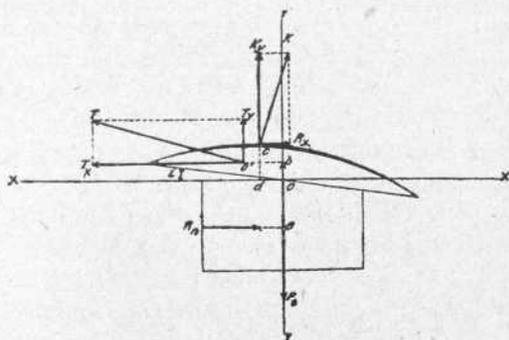


Fig. 4.<sup>a</sup>

de palanca de las componentes de tracción serán cero, y la ecuación anterior se convertirá en la siguiente:

$$R_x \cdot cd + R_y \cdot od - R_n \cdot oe = 0. \quad [3]$$

Y substituyendo la suma de los momentos de los componentes por el momento de la resultante

$$R \cdot of - R_n \cdot oe = 0, \quad [4]$$

ecuación que, por su misma sencillez, nos será fácil poder interpretar mecánicamente.

Tenemos en definitiva, como base de la que vamos a partir para el estudio de la marcha del aeroplano en el aire, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} T_y + R_y - P_t &= 0 \\ T_x - (R_x + R_n) &> 0 \\ R \cdot of - R_n \cdot oe &= 0 \end{aligned} \right\} [5]$$

que son las ecuaciones del *equilibrio longitudinal dinámico* a que está sujeto el aeroplano en su marcha horizontal.

### Determinación del eje de suspensión.

Despejando el valor *of* en la ecuación [4] de los momentos de rotación, tendremos:

$$of = \frac{R_n \cdot oe}{R},$$

cuyo valor nos servirá para determinar la posición del eje de suspensión en las cuerdas de las alas.

Para ello, una vez dibujado el perfil del ala adoptada (*fig. 5.<sup>a</sup>*), y determinado con el auxilio de la balanza aerodinámica el centro de presión *c*, para un ángulo de incidencia *i*, y la resultante de sustentación *R* en el velamen, se levanta en un punto cualquiera de su prolongación la perpendicular *of*; se traza por el punto *o* una paralela a *R*, y el punto de intersección *o'* con la cuerda *ab*, será la proyección del eje de suspensión del aeroplano; es decir, el punto de la cuerda *ab* del ala, del que debemos sus-

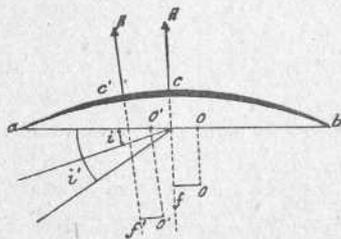


Fig. 5.<sup>a</sup>

pender la navecilla para que se verifique el sistema de ecuaciones [5].

Ahora bien; como los centros de presión del aire en las alas varían con el ángulo de incidencia, resulta que para un ángulo *i'* diferente

del anterior, el nuevo centro de presión estará en  $c'$ , y la proyección del eje de suspensión será  $\rho'$ .

Luego al variar el ángulo de incidencia de  $i$  a  $i'$  el eje de suspensión pasa de la posición  $o$  a  $o'$  a lo largo de la cuerda del ala.

De este modo, y con auxilio de las fórmulas

$$o''f'' = \frac{R_n \cdot oe}{R'} = \frac{i}{R''} \cdot N$$

$$o'''f''' = \frac{R_n \cdot oe}{R''} = \frac{i}{R'''} \cdot N$$

.....  
 .....

que nos dan los valores de los brazos de palanca de las resultantes de sustentación para cada ángulo de incidencia, determinaremos todas las posiciones que el eje de suspensión puede ocupar a lo largo de las cuerdas  $ab-ab$ .

La dirección de la cuerda  $ab$  (figura 6.<sup>a</sup>) la hemos trazado arbitrariamente, y como de la misma manera que hemos elegido la cuerda  $ab$  para suspender el eje de suspensión de la navecilla, lo hemos podido hacer de una de sus paralelas  $a'b'$ ,  $a''b''$ ,  $a'''b'''$ ,....., o de otro sistema de paralelas, resulta que el número de ejes de suspensión que puede tener un aeroplano es infinito.

Resumiendo todo esto, podemos establecer las conclusiones siguientes:

1.<sup>a</sup> La posición del eje de suspensión en un aeroplano sobre las cuerdas del velamen varía a lo largo de estas cuerdas con la incidencia de las alas.

2.<sup>a</sup> Para una incidencia dada, el aeroplano tiene infinitos ejes de suspensión.

La primera de estas dos conclusiones, la que se refiere a la variación de posición del eje de suspensión con la incidencia, nos servirá para determinar las condiciones mecánicas del equilibrio longitudinal, y la segunda, para el estudio de las condiciones de la autoestabilidad longitudinal aerodinámica del aeroplano.

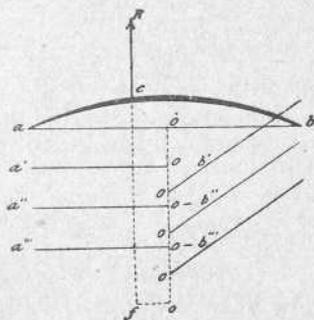


Fig. 6.<sup>a</sup>

### Realización mecánica de la ecuación.

$$R \cdot of - R_n \cdot oe = 0.$$

Realizar mecánicamente esta ecuación de momentos, es encontrar un organismo mecánico que haga que, durante la marcha del aeroplano en el aire, se verifique constantemente la igualdad

$$R \cdot of - R_n \cdot oe = 0$$

para todas las incidencias prácticas del vuelo.

En esta expresión se observa que el valor del brazo de palanca

$$of = \frac{R_n \cdot oe}{R}$$

es muy pequeño, por ser muy pequeños los factores del numerador, y muy grande el denominador. Substituyendo en lugar de  $R$  y  $R_n$  sus iguales en función de  $V$ , tendremos:

$$of = \frac{R_n \cdot oe}{R} = \frac{K_n \cdot S' \cdot V^2 \cdot oe}{K \cdot S \cdot V^2 \cdot f(i)} = \frac{K_n \cdot S' \cdot oe}{K \cdot S \cdot f(i)},$$

que es independiente de la velocidad.

Esta conclusión es de la mayor importancia, pues una vez determinado el brazo de palanca  $of$  para cada incidencia con una velocidad cualquiera de viento, este valor es constante para todas las velocidades del aeroplano.

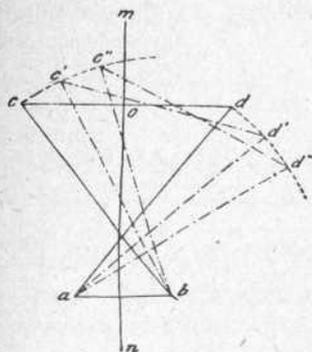
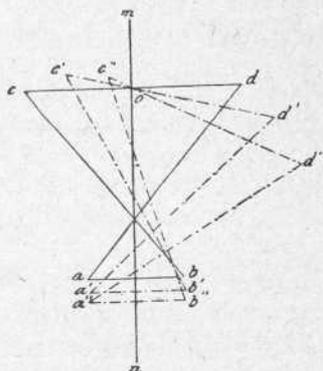
### Organismo mecánico.

Hemos dicho, que cuando el equilibrio longitudinal dinámico se verifica, la posición del eje de suspensión en las cuerdas del ala varía con el ángulo de incidencia. Luego para realizar el organismo mecánico que nos es necesario, tendremos que relacionar ángulos de incidencia con longitudes tomadas sobre las cuerdas del ala.

Para determinar los ángulos de incidencia nos valdremos del sis-

tema articulado  $abcd$  (fig. 7.<sup>a</sup>). En efecto; si suponiendo fijo el lado  $ab$ , hacemos describir al vértice  $c$  un arco de círculo alrededor de  $b$  como centro, el lado  $cd$  irá formando ángulos variables con la dirección  $ab$ .

Si a este mismo sistema articulado le imponemos la condición de que en su movimiento el lado  $cd$  pase constantemente por el punto  $o$  de la recta  $mn$ , y permaneciendo siempre el lado  $ab$  paralelo a sí mismo, el resultado del giro del vértice  $c$  alrededor de  $b$  estará representado en la figura 8.<sup>a</sup>

Fig. 7.<sup>a</sup>Fig. 8.<sup>a</sup>

En el primero de estos movimientos se observa (*lámina II*) que, al pasar el lado  $cd$  a la posición  $c'd'$  para formar un cierto ángulo  $i$  con la horizontal  $ab$ , el vértice  $c$  tiene que recorrer a lo largo de la dirección  $c'd'$  la distancia  $pc'$ , reduciéndose, por consiguiente, la longitud  $oc$  a  $o'c'$ .

En tanto que en el segundo caso, para formar el mismo ángulo  $i$ , el vértice  $c$  tendrá que recorrer, a lo largo de  $c_1d_1$ , la longitud

$$p_1c_1 = p_1c'_1 + c'_1c_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} p_1c'_1 + c_1c_1$$

y la longitud  $oc$  se reducirá a  $oc_1$ .

### Descripción del organismo mecánico.

Las dos cuerdas de las alas en que se apoya el eje de suspensión, están representadas en proyecciones y corte en las *láminas I y II*.

Cada una de estas cuerdas está constituida por dos platabandas, que llevan un tornillo  $T-T$  (1) de dos roscas en sentido contrario, que gira en dos cojinetes  $C-C$ . Las platabandas tienen tres largas ranuras  $R, R', R''$ .

Las ranuras  $R$  son atravesadas por el eje-tuerca  $a$ , y locas en los extremos de este eje van los discos  $D-D$ , que cuando el eje  $a$  recorre la ranura  $R$ , pueden girar, por el movimiento que les comunican las ruedas dentadas  $r$ , que engranan con las cremalleras  $e-e$  fijas en las cuerdas del ala. Las ranuras practicadas en estos discos, de forma algo aproximada a la de una espiral, sirven de alojamiento a los dos extremos del eje  $c$ , vértice del sistema articulado. Este eje tiene un hueco cilíndrico que le permite correr libremente a lo largo del tornillo  $T-T$ .

El eje  $o$  atraviesa las ranuras  $R'$ , y es tuerca del tornillo  $T-T$ .

De este eje va suspendido, por un cojinete  $h-h$  en forma de horquilla, el cilindro de los frenos y tren de aterrizar. Lleva también este eje el volante  $V$  con su rueda dentada  $r'$ , que engrana con la  $r''$ , y ésta comunica su movimiento de rotación al tornillo  $T-T$  por medio de una chaveta.

El tercer eje  $d$  corresponde al vértice  $d$  del sistema articulado; y el lado que une los dos vértices  $c$  y  $d$ , que está representado en las piezas  $mm, mm$  de la lámina  $I$ , tiene una larga ranura para dejar paso al eje de suspensión  $o$ .

Y en la mitad del lado que corresponde al  $ab$ , del mismo sistema articulado, hay una corredera que le permite correr libremente a lo largo del cilindro de los frenos.

### Funcionamiento.

Si valiéndose del volante  $V$ , comunica el piloto un movimiento de rotación al tornillo  $T-T$ , los dos ejes-tuercas  $a$  y  $o$ , se acercarán o alejarán en tantas veces dos pasos de rosca como vueltas dé el tornillo.

El avance o retroceso del eje-tuerca  $o$ , a lo largo del tornillo  $T-T$ , da los desplazamientos de este eje de suspensión a lo largo de la cuerda; y como el avance o retroceso del eje-tuerca  $a$ , a lo largo del tornillo, no puede efectuarse sin que el lado  $cb$ , del sistema articulado, gire alrededor del vértice  $b$ , este giro nos permitirá variar los ángulos de inclinación de las alas.

(1) Equivocadamente se ha dibujado el tornillo  $T-T$  con rosca triangular; esta rosca debe ser cuadrada.

Ya tenemos, por consiguiente, en este organismo los dos movimientos simultáneos que necesitamos: uno, el de desplazamiento del eje de suspensión  $o$  a lo largo de las cuerdas, y el otro, el que nos permite dar a estas cuerdas el ángulo conveniente.

Para que los ángulos de incidencia de las alas correspondan siempre, de acuerdo con los resultados obtenidos en el laboratorio, con los desplazamientos correspondientes del eje de suspensión, nos valdremos de los discos  $D-D$ .

Vamos a ver ahora cómo tendremos que proceder para construir estos discos de ángulos.

Cuando por el giro del tornillo  $T-T$ , el eje-tuerca de suspensión  $o$  haya recorrido de derecha a izquierda la longitud  $\frac{1}{2} p_1 c'_1$ , el eje-tuerca  $a$  habrá recorrido, de izquierda a derecha, la misma longitud  $\frac{1}{2} p_1 c'_1$ : luego con este movimiento del tornillo habremos conseguido reducir la longitud  $oc$  en  $2 \frac{1}{2} p_1 c'_1$ , o sea en el valor del primer término del segundo miembro de la ecuación:

$$p_1 c_1 = 2 \frac{1}{2} p_1 c'_1 + c'_1 c_1,$$

y la longitud expresada en el segundo término la reduciremos por medio del giro de los discos  $D-D$  en sus cremalleras  $e-e$ .

Para esto si llamamos (*fig. 9.<sup>a</sup>*)

$r$  = el radio de la circunferencia primitiva de la rueda dentada  $r$ ; y

$L = \frac{1}{2} p_1 c'_1$  = el recorrido del eje-tuerca  $a$  a lo largo del tornillo, tomando esta longitud sobre la línea primitiva de la cremallera  $e-e$ ,

el ángulo  $\alpha$ , que girará el disco para aquel recorrido  $L$ , se deducirá de la igualdad

$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360^\circ},$$

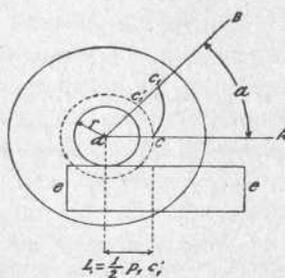


Fig. 9.<sup>a</sup>

de donde

$$a = \frac{L}{2\pi r} \cdot 360^\circ.$$

De aquí resulta que, si sobre el lado  $aB$  del ángulo  $a$ , tomamos, a partir de la circunferencia de trazos, una longitud  $\varepsilon = c'_1 c_1$ , y practicamos una ranura de  $c$  a  $c_1$ , cuando el eje tuerca  $a$  haya recorrido sobre la cuerda del ala la longitud  $L$ , el lado  $aB$  habrá venido a coincidir con la dirección  $aA$ , y la ranura del disco habrá hecho avanzar al eje vértice  $c$  del sistema articulado, el suplemento de longitud  $c'_1 c_1$ , que es el segundo término de la ecuación que estudiamos.

En la práctica se procede del modo siguiente para calcular el valor de la excentricidad en el disco, correspondiente a un ángulo de incidencia dado.

Suponiendo fijo el lado  $ab$  del sistema articulado (*lámina II*), haremos girar el vértice  $c$  alrededor de  $b$ , hasta que forme con la horizontal el ángulo de incidencia dado  $i$ ; hecho esto, trazaremos por el punto  $o$  la recta  $c_1 d_1$  paralela a  $c' d'$ , que limitaremos trazando por los puntos  $c'$ ,  $d'$ , las paralelas  $c' c_1$ ,  $d' d_1$ , a  $mn$ . En estas condiciones, el lado  $c_1 d_1$  corresponderá a la nueva posición del sistema articulado  $a_1 b_1 c_1 d_1$ .

Luego  $p_1 c_1$  será la longitud en que habrá que reducir la  $oc$  para formar el ángulo  $i$ , y si el desplazamiento del eje de suspensión a lo largo de la cuerda, que nos dan las experiencias de laboratorio, es  $L$ , podremos escribir la igualdad

$$p_1 c_1 = 2L + \varepsilon_i,$$

de donde

$$\varepsilon_i = p_1 c_1 - 2L,$$

que será el valor de la excentricidad, correspondiente al ángulo que gire el disco para el recorrido  $L$ .

Siguiendo este sistema de cálculo podremos formar el cuadro siguiente, en el que figuran, para las incidencias prácticas del vuelo, todas las cantidades necesarias para construir un disco de ángulos.

*Cálculo de la ranura de un disco de ángulos  
para un ala determinada.*

Ángulos de incidencia. ( <i>i</i> )	Desplazamientos del eje de suspensión. ( <i>L</i> ) (fig. 5. <sup>a</sup> )	Ángulos de giro del disco. ( <i>a</i> )	Excentricidad en el disco. ( <i>e</i> )
0°	$L = 0$	$a = 0$	$\varepsilon_0 = 0$
1°	$L_1 = 00'$	$a_1 =$	$\varepsilon_1$
2°	$L_2 = 00''$	$a_2 =$	$\varepsilon_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
18°			

La descripción que hemos hecho, de algunos modelos que se presentaron en el Salón de París de 1913, y muchos otros que no describimos por no dar dimensiones exageradas a esta Memoria, son una prueba evidente de la necesidad que se siente de resolver el problema del *equilibrio mecánico del aeroplano* en todas las incidencias del vuelo.

Hemos de confesar que las dificultades que se presentan para dar solución a este problema son grandes, toda vez que si hacemos crecer los ángulos de incidencia según una progresión aritmética,

$$\div 1^\circ \cdot 2^\circ \cdot 3^\circ \cdot \dots \cdot 18^\circ,$$

los desplazamientos del eje de suspensión sobre las cuerdas de las alas, correspondientes a estos ángulos, no obedecen a ninguna ley de crecimiento. Es decir, que se trata de un problema, en el que mecánicamente hay que relacionar ángulos de incidencia, cuyo crecimiento o decrecimiento sigue una ley determinada, con longitudes contadas sobre las cuerdas de las alas, cuya variación no obedece a ninguna ley.

La solución que ahora presentamos de este problema, nos da el medio de hacer que el aeroplano esté en equilibrio perfecto en todas las incidencias del vuelo. Es, en nuestro concepto, este equilibrio el punto fundamental del que hay que partir para poder aplicar al aeroplano, con probabilidades de éxito, las teorías de la aerodinámica.

## Autoestabilidad.

### Equilibrio longitudinal aerodinámico.

Las experiencias de Rateau han demostrado, que las superficies curvas se conducen como planos delgados para las incidencias comprendidas entre 0 y 20°; y que estas superficies curvas son sustentadoras para un valor negativo del ángulo de incidencia, tanto más grande en valor absoluto cuanto mayor es la flecha de la sección recta de la superficie.

Newton dió la siguiente fórmula para expresar la resistencia del aire sobre un plano delgado;

$$R = K \operatorname{sen} i,$$

siendo  $R$  normal al plano móvil, y

$$R_y = \frac{1}{2} K \operatorname{sen}^2 i$$

para el valor de la componente vertical.

Y Duchemin ha dado la fórmula

$$R = \frac{\operatorname{sen} . 2 i}{i + \operatorname{sen}^2 i_1}.$$

Estas dos fórmulas son aplicables a las superficies curvas, con la condición de reemplazar  $i$  por  $i_1 + i'$ , siendo  $i'$  el mayor ángulo negativo para el cual la superficie deja de ser sustentadora.

Nosotros haremos uso de la fórmula general

$$R_y = K f(i) V^2 S^\epsilon$$

para expresar las variaciones de la componente normal de sustentación en función de la velocidad, estando  $\epsilon$  comprendido entre 1,1 y 1,3.

Y de la fórmula de Newton

$$R_y = A \operatorname{sen}^2 (i_1 + i')$$

para expresar las variaciones de  $R_y$  en función de ángulo de incidencia, siendo  $A$  una constante independiente de  $i$ .

Hemos hallado, para el equilibrio longitudinal dinámico del aeroplano, la ecuación de momentos de rotación

$$R \cdot of - R_n \cdot oe = 0,$$

que podemos poner bajo la forma

$$\begin{aligned} R_y \cdot od + R_x \cdot cd - R_n \cdot oe &= R_y \cdot od + (R_x \cdot cd - R_n \cdot oe) = \\ &= R_y \cdot od + R_t \cdot rh = 0. \end{aligned}$$

El segundo término de esta ecuación puede ser menor o mayor que *cero*; y según que sea menor o mayor que *cero*, la resultante tangencial  $R_t$ , que es la resultante de  $R_x$  y  $R_n$ , estará debajo o encima de la trayectoria que pasa por el centro de gravedad  $G$ , que le supondremos coincidiendo con el eje de suspensión (figuras 10 y 11).

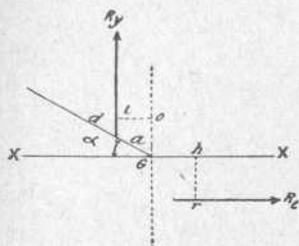


Fig. 10.

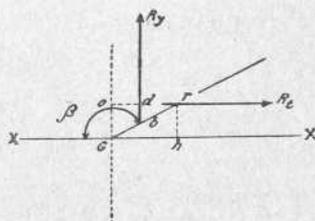


Fig. 11.

De aquí se deduce que, cuando  $R_t$  está situada debajo de la trayectoria  $XX$ , que pasa por el centro de gravedad, la componente de sustentación  $R_y$  tendrá que estar delante de la perpendicular que pasa por el centro de gravedad, para que el momento  $R_y \cdot od$  sea positivo; y al revés cuando  $R_t$  está encima de la trayectoria  $XX$ . Pues para que el equilibrio exista, los momentos de las fuerzas  $R_y$  y  $R_t$  tienen que ser iguales y de signos contrarios.

*Preponderancia.*—El momento de rotación (fig. 10) de la componente de sustentación es

$$C_p = R_y \cdot l = R_y \cdot a \cdot \cos \alpha;$$

y como el primer factor es siempre positivo,  $C_p$  será positivo cuando

$$\cos . \alpha > 0,$$

o bien,

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

y negativo cuando

$$\cos . \alpha < 0,$$

o bien

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Al momento  $C_p$  se le llama de *preponderancia*, y la preponderancia será *retrasada* o *adelantada*, cuando el momento  $C_p$  sea positivo o negativo.

*Empenaje*.—El momento (fig. 11) de la resultante tangencial es

$$C_e = R_t . r h = R_t . b . \text{sen} (\pi - \beta) = R_t . b . \text{sen} \beta,$$

que será positivo cuando

$$\text{sen} \beta > 0,$$

o bien

$$0 < \beta < \pi;$$

y negativo cuando

$$\text{sen} \beta < 0,$$

o bien

$$\pi < \beta < 2\pi.$$

Al momento  $C_e$  se le llama de *empenaje*, y el empenaje es *elevado* o *rebajado*, según que  $C_e$  sea positivo o negativo.

De todo esto se deduce, como condición general para el equilibrio longitudinal del aeroplano:

- 1.º Que una preponderancia *retrasada* tiene que ser equilibrada con un empenaje *rebajado*, y
- 2.º Que una preponderancia *adelantada* tiene que ser equilibrada con un empenaje *elevado*.

**Estudio de la preponderancia (1).**

La expresión del momento de preponderancia en función de la incidencia hemos dicho es

$$C_p = R_y \cdot l = A \cdot \text{sen}^2(i_1 + i') \cdot a \cdot \cos \alpha,$$

y si hacemos  $\omega = i_1 + i'$ , se transformará en la siguiente:

$$C_p = A \text{sen}^2 \omega \cdot a \cdot \cos \alpha,$$

que para una variación en la incidencia  $\Delta i$  se convertirá en

$$C_p = A \cdot \text{sen}^2(\omega + \Delta i) \cdot a \cdot \cos(\alpha + \Delta i).$$

**Preponderancia retrasada (fig. 10).**

En este caso,

$$\cos(\alpha + \Delta i) > 0,$$

siendo  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  en valor absoluto: luego

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \Delta i < \frac{\pi}{2}$$

o sea

$$-\frac{\pi}{2} - \alpha < \Delta i < \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

$C_p$  crece con la incidencia; pero como a medida que el factor  $\text{sen}^2(\omega + \Delta i)$  crece, el factor  $\cos(\alpha + \Delta i)$  decrece, la preponderancia  $C_p$  tendrá que pasar por un valor máximo, que estará tanto más

(1) Las leyes de variación de la preponderancia y empenaje de que aquí hacemos mención las estudia el distinguido ingeniero y constructor de aeroplanos M. Saulnier, en su tratado *Equilibre, Centrage et Classification des aeroplanes*.

cerca de la incidencia de equilibrio cuanto más próximos estén de ser iguales estos dos factores para  $\Delta i = 0$ .

Para interpretar analíticamente estos resultados, vamos a examinar algunos valores particulares de la expresión del momento de preponderancia. La preponderancia se anula cuando separadamente se anulan cada uno de los dos factores

$$\begin{aligned} & \text{sen}^2(\omega + \Delta i) \quad \text{o} \quad \cos(\alpha + \Delta i), \\ C_p = 0, \quad & \text{sen}^2(\omega + \Delta i) = 0, \quad \omega + \Delta i = 0, \quad \Delta i = -\omega, \\ C_p = 0, \quad & \cos(\alpha + \Delta i) = 0, \quad \alpha + \Delta i = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta i = \frac{\pi}{2} - \alpha, \end{aligned}$$

y en los dos casos la superficie deja de ser sustentadora.

*Construcción de la curva  $\cos(\alpha + \Delta i)$ :*

Demos a  $\Delta i$  los valores límites entre que varía para que satisfaga la condición de la preponderancia retrasada

$$\begin{aligned} \Delta i = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad & \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ \Delta i = -\alpha, \quad & \cos(\alpha - \alpha) = \cos 0 = 1, \\ \Delta i = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad & \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \end{aligned}$$

y para la incidencia de equilibrio  $i_1, + i'$ ;

$$\Delta i = 0, \quad \cos(\alpha + \Delta i) = \cos \alpha > 0.$$

Con estos valores ya podemos construir la curva

$$\cos(\alpha + \Delta i) \text{ (fig. 12).}$$

*Construcción de la curva  $\text{sen}^2(\omega + \Delta i)$ :*

Dando a  $\Delta i$  los valores límites entre los que está comprendido;

$$\begin{aligned} \Delta i = -\frac{\pi}{2} - \alpha, \quad & \text{sen}^2\left(\omega - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mA \\ \Delta i = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad & \text{sen}^2\left(\omega + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = m'B, \end{aligned}$$

y como diferencia de estos ángulos

$$\begin{aligned} \omega + \frac{\pi}{2} - \alpha - \left( \omega - \frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \\ = \omega + \frac{\pi}{2} - \alpha - \omega + \frac{\pi}{2} + \alpha &= 180^\circ, \end{aligned}$$

y los senos de dos ángulos, cuya diferencia es  $180^\circ$ , son iguales y de signo contrario, sus cuadrados serán iguales y tendremos  $m A = m' B$ ,

$$\Delta i = -\omega, \quad \text{sen}^2(\omega - \omega) = 0,$$

y para la incidencia de equilibrio  $i + i'$ ,

$$\Delta i = 0, \quad \text{sen}^2 \omega \neq 0.$$

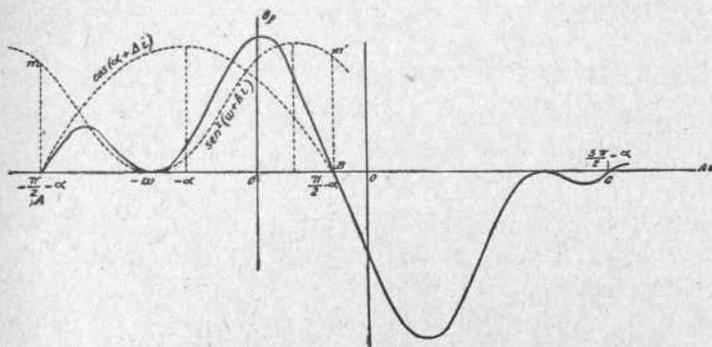


Fig. 12.

Ya podemos, por tanto, construir la curva

$$\text{sen}^2(\omega + \Delta i).$$

Efectuando el producto de las ordenadas correspondientes a una misma abscisa, y multiplicando este producto por el factor  $A$ , tendremos en la curva continua  $AB$  la ley de variación del momento de preponderancia para la preponderancia retrasada.

**Preponderancia adelantada.**

En este caso,

$$\cos(\alpha + \Delta i) < 0;$$

luego

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \Delta i < \frac{3\pi}{2},$$

o sea

$$\frac{\pi}{2} - \alpha < \Delta i < \frac{3\pi}{2} - \alpha.$$

Un razonamiento análogo al anterior nos daría como resultado la curva  $BC$  de la *figura 12*.

Observando la marcha de las dos curvas, vemos que en la rama  $AB$ , el valor de la preponderancia retrasada se conserva sensiblemente constante en las proximidades de la incidencia de equilibrio. En tanto que en la rama  $BC$ , para las incidencias próximas a las de equilibrio, el valor de la preponderancia adelantada crece muy rápidamente con la incidencia.

De todo esto se deduce, que el momento de un par de preponderancia adelantada es mucho más enérgico que el momento de un par de preponderancia retrasada, y que las variaciones de aquel momento son tanto más considerables cuanto mayores sean las variaciones de la incidencia, siempre dentro de las proximidades de la incidencia de equilibrio.

**Estudio del empenaje.**

El momento del par de empenaje en función de la incidencia tiene por expresión

$$C_e = A \cdot F(i_1) \cdot b \cdot \text{sen } \beta,$$

siendo  $A$  una constante independiente de  $i$ , e  $i_1$  la incidencia de equilibrio.

**Empenaje elevado** (*fig. 11*).

Cuando el empenaje es elevado, el valor de

$$C_e = R_t \cdot b \operatorname{sen} \beta > 0,$$

por estar  $\beta$  comprendido entre 0 y  $\pi$ .

Si damos a la incidencia un incremento  $\Delta i$ , la fórmula general del momento de empenaje se transformará en la siguiente:

$$C_e = AF (i_1 + \Delta i) \cdot b \cdot \operatorname{sen} (\beta + \Delta i),$$

que se anulará cuando se anule el factor  $\operatorname{sen} (\beta + \Delta i)$ ,

$$C_e = 0, \quad \operatorname{sen} (\beta + \Delta i) = 0, \quad \beta + \Delta i = 0, \quad \Delta i = -\beta.$$

$$C_e = 0, \quad \operatorname{sen} (\beta + \Delta i) = 0, \quad \beta + \Delta i = \pi, \quad \Delta i = \pi - \beta.$$

Para interpretar analíticamente la expresión del momento de empenaje, substituyamos en lugar de  $\Delta i$  sus iguales y tendremos:

$$\operatorname{sen} (\beta + \Delta i) = \operatorname{sen} (\beta - \beta) = \operatorname{sen} 0 = 0,$$

$$\operatorname{sen} (\beta + \Delta i) = \operatorname{sen} (\beta + \pi - \beta) = \operatorname{sen} \pi = 0.$$

Y efectuando el producto de cada una de las ordenadas de esta curva por las ordenadas de la curva  $R_t$ , que no se anula para  $i = 0$ , puesto que la superficie no deja de ser sustentadora más que para valores inferiores a  $-5^\circ$ , tendremos la curva que nos da la variación del empenaje cuando la incidencia varía (*fig. 13*).

La curva  $DE$  nos da la variación del momento de empenaje elevado.

**Empenaje rebajado.**

Cuando el empenaje es rebajado,

$$C_e = R_t \cdot b \cdot \operatorname{sen} \beta < 0,$$

por estar  $\beta$  comprendido entre  $\pi$  y  $2\pi$ .

Esta fórmula se anulará para los siguientes valores:

$$C_e = 0, \quad \text{sen}(\beta + \Delta i) = 0$$

$$\beta + \Delta i = \pi, \quad \Delta i = \pi - \beta.$$

$$C_e = 0, \quad \text{sen}(\beta + \Delta i) = 0$$

$$\beta + \Delta i = 2\pi, \quad \Delta i = 2\pi - \beta,$$

pues entonces

$$\text{sen}(\beta + \Delta i) = \text{sen}(\beta + \pi - \beta) = \text{sen} \pi = 0,$$

$$\text{sen}(\beta + \Delta i) = \text{sen}(\beta + 2\pi - \beta) = \text{sen} 2\pi = 0.$$

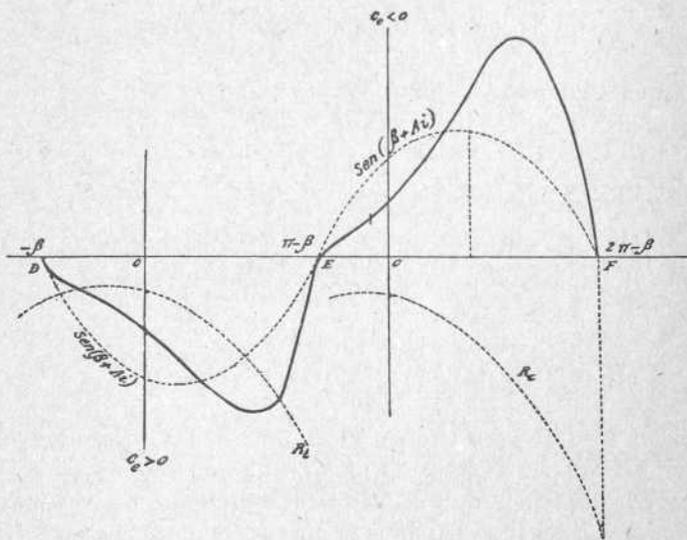


Fig. 13.

La *figura 13* nos da en la rama *EF* de la curva la representación de la variación del momento de empenaje para este caso.

### Par de estabilidad longitudinal.

Tracemos las dos curvas de preponderancia y empenaje en las que se verifique  $C_p > 0$  y  $C_e < 0$  (*fig. 14*).

El punto de intersección de estas dos curvas corresponderá a la

posición de equilibrio del aeroplano para la incidencia de equilibrio

Pero si el aparato se desequilibra, su incidencia experimentará una variación  $i_1 \mp \Delta i$ , y los momentos de preponderancia y empenaje serán, respectivamente, para estas nuevas incidencias,

$$AP \dots AR$$

$$A'P' \dots A'R'$$

que tienen que ser de signo contrario.

A la diferencia

$$AP - AR = \delta$$

$$A'P' - A'R' = \delta$$

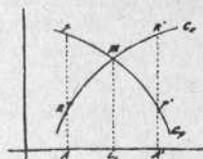


Fig. 14.

se le llama *momento de estabilidad longitudinal*, y para que sea el momento de un par de estabilidad, será necesario que cumpla con ciertas condiciones de signo.

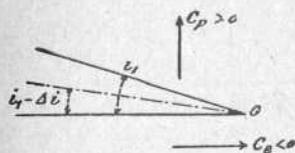


Fig. 15.

En efecto; si la incidencia del aeroplano disminuye, convirtiéndose en  $i_1 - \Delta i$ , el momento del par de estabilidad tendrá que ser positivo (figura 15).

Y si la incidencia aumenta, convirtiéndose en  $i_1 + \Delta i$ , el momento tendrá que ser negativo (fig. 16) para restituir el

aparato a su posición de equilibrio.

Y como el momento del par de estabilidad es la diferencia de los momentos de los pares de preponderancia y empenaje que tienen signo contrario,  $\delta$  tendrá que tener el mismo signo que el que tenga mayor valor absoluto.

Luego para que una posición de equilibrio del aeroplano, representada por la intersección de las dos curvas  $C_p$ ,  $C_e$ , sean una posición de equilibrio

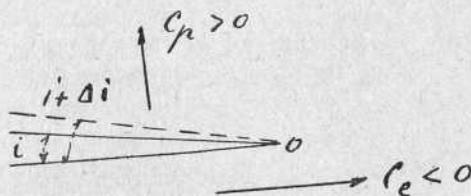


Fig. 16.

estable, será necesario que, a partir de la incidencia de equilibrio, la rama de la curva del par positivo esté por encima de la rama de la curva del par negativo en el sentido de las incidencias decrecientes,

e inversamente para las incidencias crecientes. Y así tendremos:

$$\begin{aligned} + AP - AR &= \epsilon > 0 \\ + A'P' - A'R' &= \epsilon < 0. \end{aligned}$$

De todo esto se deduce:

1.º *Que el momento del par de estabilidad longitudinal aumenta con la variación de la incidencia.*

2.º *Que las variaciones del momento del par de estabilidad longitudinal  $\epsilon$  serán tanto más considerables, cuanto las curvas  $C_p$ ,  $C_e$  se corten en ángulo recto, y estas dos curvas estén casi confundidas con sus tangentes en el punto de intersección.*

De aquí se deducen dos consecuencias importantes:

1.ª *En aparatos de pequeña estabilidad, las dos curvas  $C_p$  y  $C_e$  estarán casi confundidas en las proximidades de la incidencia de equilibrio; y*

2.ª *En un aparato de estabilidad automática muy enérgica, las dos curvas de preponderancia y empenaje  $C_p$ ,  $C_e$  se cortarán según un ángulo próximo a  $180^\circ$ .*

### Estabilidad automática.

Estudiadas las leyes de variación de los momentos de preponderancia y empenaje en función de la incidencia, vamos a hacer uso de estas curvas para analizar las condiciones de estabilidad del aeroplano en los dos casos que hemos considerado en las figuras 10 y 11.

En el caso de la preponderancia retrasada (fig. 10) el valor de  $\alpha$  está comprendido entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ ; luego para hacer el estudio de este caso, consideraremos la rama de la curva  $AB$  de la figura 12 en las proximidades de la incidencia de equilibrio.

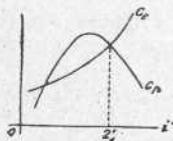


Fig. 17.

Una preponderancia retrasada se equilibra con un empenaje rebajado o negativo; luego la rama de la curva que hemos de considerar es la comprendida en la  $EF$  de la figura 13.

Refiriendo estas dos curvas a un sistema de ejes coordenados (fig. 17), vemos que  $C_p$  decrece a medida que la incidencia aumenta; luego para que en una oscilación del aeroplano el equilibrio exista, será necesario que la curva  $C_e$  crezca a medida que la incidencia aumente, y

para que esto suceda,  $\beta$  tendrá que estar comprendido entre  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ , siendo en este caso la posición de los centros de presión y carena la que se indica en la *figura 18*.

Si la preponderancia es adelantada,  $\alpha$  estará comprendida entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ , y la rama de curva que tendremos que considerar es la que arranca desde el punto *B* de la *figura 12*.

En este caso, el empenaje tiene que ser elevado o positivo, y  $\beta$  tendrá, por consiguiente, que estar comprendido entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$  para que el equilibrio sea



Fig. 18.

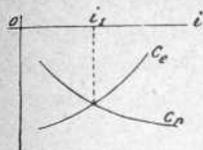


Fig. 19.

estable.

La comparación de estas curvas se hace en la *figura 19* y la posición de los centros de presión y carena en la *figura 20*.

Hemos dicho que la componente de sustentación  $R_y$  se anula para un valor de la incidencia comprendido entre 0 y  $-5^\circ$ . Luego si en una oscilación, el aeroplano adquiere esta incidencia, el momento de preponderancia  $C_p$  se anulará, y entonces el aparato quedará sometido a la acción del momento de empenaje.

Si éste es positivo, el aparato iniciará una elevación; pero si es negativo, la caída de pico será inevitable. Es decir, que estos aparatos son muy peligrosos. Nosotros los desecharemos y aceptaremos para nuestro proyecto como más seguros y de una estabilidad automática considerable los de preponderancia adelantada.

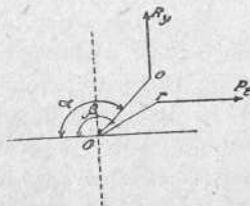


Fig. 20.

## CONSTRUCCIÓN DEL AEROPLANO

### El equilibrio en el vuelo.

Teniendo en cuenta todo lo que se deduce de la comparación de las curvas de preponderancia y empenaje, y resuelto el problema del equilibrio longitudinal dinámico en todas las incidencias del vuelo,

vamos a ver cómo podríamos construir un aeroplano de gran estabilidad automática para las oscilaciones de una amplitud de unos  $25^\circ$ , que son las mayores a que en la práctica está sujeto y en el que se puedan evitar las *caídas de pico*.

Hemos hallado para el equilibrio longitudinal dinámico del aeroplano el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_y + R_y - P_z &= 0 \\ T_x - (R_x + R_n) &> 0 \\ R_y \cdot od + R_x \cdot cd - R_n \cdot oe &= 0 \end{aligned}$$

que cuando (*fig. 21*) la preponderancia es adelantada y la resistencia del aire  $R_n$  en el fuselaje y prolongación del eje de la hélice pasan por el eje de suspensión  $O$ , se convierte en el siguiente:

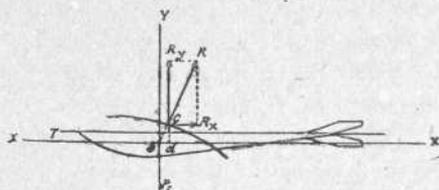


Fig. 21.

$$\begin{aligned} R_y - P_z &= 0 \\ T - (R_x + R_n) &> 0 \\ -R_y \cdot od + R_x \cdot cd &= 0 \end{aligned}$$

Ninguna dificultad se nos presenta para que el eje de la hélice pase por el eje de suspensión.

En cuanto a que la resistencia  $R_n$  pase por este mismo eje, no podemos decir nada *à priori*; es cuestión de experimentación. Para ello se construye un fuselaje experimental, en el que se monta el motor con su hélice, para someterle a la acción de la corriente de aire del ventilador en el laboratorio.

Para determinar la dirección de la resultante  $R_n$ , se coloca el fuselaje en la cámara del laboratorio, de modo que el eje de suspensión se

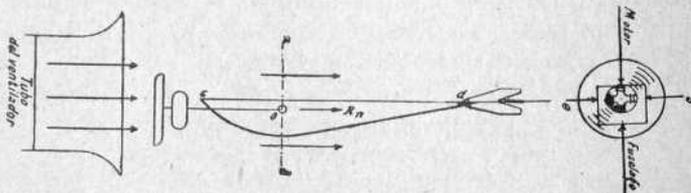


Fig. 22.

apoye entre dos puntas verticales  $o - o$  (*figura 22*). Sometido en estas condiciones a la acción de la corriente de aire del ventilador, al mismo

tiempo que a la acción de la corriente de aire de la hélice, el fuselaje experimentará desviaciones cuando la resultante  $R_n$  no pase por el eje de suspensión  $o-o$ ; pero si por tanteos hacemos variar la posición del eje de suspensión en la dirección  $ab$ , permaneciendo siempre el eje del motor paralelo a  $cd$ , llegará un momento en que el fuselaje no experimentará ninguna desviación por la acción de las dos corrientes de aire, y cuando esto no suceda, la resistencia  $R_n$  pasará por el eje de suspensión. Esta será, por consiguiente, la dirección de la posición que debe ocupar este eje en el fuselaje para que el momento

$$R_n \cdot oe = 0.$$

Fijada la posición del eje de suspensión en el fuselaje, ya no nos queda más que determinar las posiciones que este mismo eje ha de ocupar en las cuerdas del ala para cada uno de los ángulos de incidencia.

Sea el perfil del ala adoptado el representado en la figura 23, y sean  $c, c', c'' \dots$  los centros de presión (que se determinan experimentalmente) correspondientes a las resultantes  $R_0, R_1, R_2 \dots$  para los ángulos de incidencia  $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ \dots$

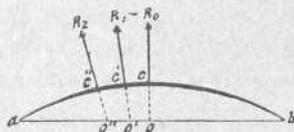


Fig. 23.

Si en la ecuación de momentos sustituimos la suma de los momentos de las componentes por el de la resultante

$$-R_y \cdot od + R_x \cdot cd = R \times \text{brazo de palanca} = 0,$$

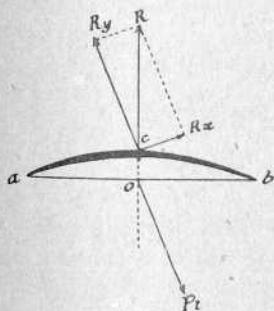


Fig. 24.

y para que sea este producto igual a *cero*, tendrá que serlo el brazo de palanca de  $R$ : es decir, que la prolongación de la resultante tiene que pasar por el eje de suspensión (figura 24).

Luego, para determinar las posiciones del eje de suspensión en las cuerdas del velamen, no tendremos más que trazar el perfil del ala, y prolongar las resultantes de la resistencia del aire correspondientes a las incidencias prácticas del vuelo. Las intersecciones de las prolongaciones de estas resultantes con

la proyección de las cuerdas del ala, serán las posiciones que tiene que ocupar el eje de suspensión, para que constantemente se verifique el sis-

tema de ecuaciones del equilibrio longitudinal dinámico del aeroplano, para cada una de las incidencias del vuelo.

Hecho esto, ya no nos queda más que hacer el trazado del sistema articulado, y disco de ángulos, como lo hemos explicado al tratar de la realización mecánica de la ecuación de los momentos de rotación.

Construido bajo estos principios, resulta que este aeroplano vuela siempre dentro de su *incidencia de equilibrio*, cualquiera que sea el ángulo de incidencia de las alas.

### El equilibrio estático.

Las ecuaciones del equilibrio longitudinal *estático* del aeroplano, referidas a un sistema de ejes coordenados, trazados en el plano de simetría del aparato, son las siguientes:

$$\begin{aligned}\Sigma x &= 0 \\ \Sigma y &= 0 \\ \Sigma M_r &= 0\end{aligned}$$

Si  $P$  es el peso del motopropulsor (*fig. 25*) y  $p$  el del contrapeso, la suma de los momentos de rotación, con relación al centro de gravedad  $G$ , será:

$$\Sigma M_r = p \cdot b - P \cdot a = 0.$$

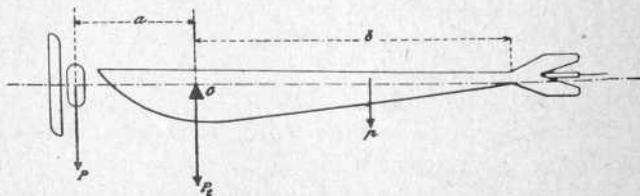


Fig. 25.

De cuya ecuación se deduce la necesidad de colocar un contrapeso  $p$  en el extremo de la cola, para que exista el equilibrio *estático* cuando el aeroplano descansa en tierra. Es el caso de los pájaros parados sobre la superficie del suelo.

Para poder colocar el motor y órganos de mando en el aeroplano, se necesita un espacio delante del piloto de 1,50 a 2 m.; luego si damos al fuselaje una longitud de 6 m. contados desde el eje de suspensión, y el peso del motor es de 80 kg., el número de kilogramos que tiene que tener el contrapeso  $p$  se deducirá de la ecuación de momentos

$$p = \frac{80 \cdot 1,50}{6} = 20 \text{ kg.}$$

En esta ecuación, que no nos da más que una idea aproximada por exceso del peso adicional, no hemos tenido en cuenta los pesos de las partes anterior y posterior del fuselaje. Para determinar exactamente el número de kilogramos que tiene que tener el contrapeso, se coloca el fuselaje descansando por su eje de suspensión en dos cojinetes, y se determina prácticamente el verdadero valor de  $p$  cuando este peso está colocado en el extremo más alejado del eje de suspensión.

#### Horizontalidad del fuselaje en el vuelo.

El fuselaje, en la marcha horizontal, debe conservar la posición horizontal. Es decir, que cualquiera que sea el ángulo de incidencia en el vuelo, el fuselaje debe permanecer constantemente horizontal.

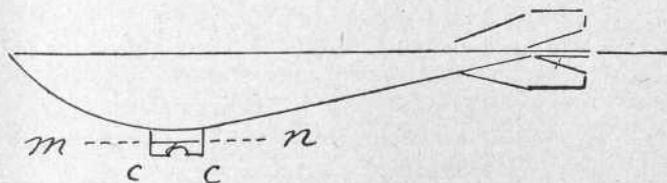


Fig. 26.

Para obtener la horizontalidad, lleva el fuselaje en su parte inferior un cerrojo  $c-c$  (fig. 26), que puede girar alrededor de su eje  $mn$ . Este cerrojo se fija al travesaño superior que une los dos cilindros de los frenos (*lámina III*) después de haber hecho la pesada, para equilibrar el fuselaje cuando está cargado.

Claramente se comprende ahora que, si hacemos girar el volante  $V$  (*láminas I y II*) para variar el ángulo de incidencia de las alas, el fu-

selaje permanecerá siempre horizontal. Y esta propiedad de que goza este aeroplano cuando está descansando en tierra, la conserva lo mismo en el aire durante el vuelo.

Por todas estas disposiciones, que son sencillísimas, se comprende la superioridad del equilibrio de este aeroplano sobre el de todos los demás modelos hoy existentes. En todos los modelos se habla del *equilibrio indiferente*, como base para la facilidad de su gobierno, pero en ninguno de ellos existe; en este aeroplano, el equilibrio indiferente puede ser perfecto, como base fundamental para la autoestabilidad.

Pero como el equilibrio indiferente es en la práctica un equilibrio irrealizable, aceptemos el *equilibrio ligeramente estable*.

Cuando el centro de gravedad  $G'$  del fuselaje (fig. 27) se encuentra debajo del eje de suspensión, sucede que en una oscilación positiva,

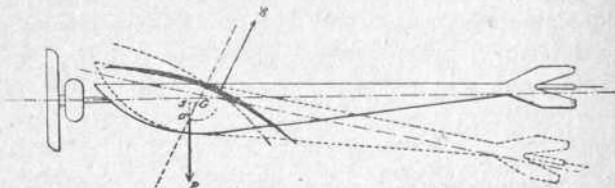


Fig. 27.

el aeroplano se encuentra sometido a la acción del momento de estabilidad longitudinal  $\ell$  y a la acción del momento  $P.G_s$ , que son del mismo signo, y por consiguiente, estos dos momentos se suman para restituir el aeroplano a su posición de equilibrio.

Si la oscilación es negativa (fig. 28), los momentos de los dos

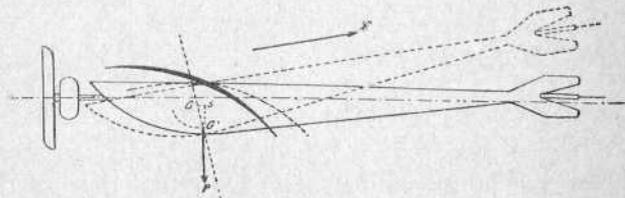


Fig. 28.

pares se suman también. Luego en los dos casos, *el centro de gravedad rebajado contribuye a restablecer en las oscilaciones el equilibrio del aeroplano.*

Claro es que en uno y otro caso, la amplitud de la oscilación

tiende a aumentar, por la fuerza viva que adquiere el centro de gravedad  $G'$ . Pero si tenemos en cuenta que el radio  $GG' = \rho$  es muy pequeño, la fuerza tangencial,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \rho \frac{d\omega}{dt}$$

será también muy pequeña. Y si se tiene además en cuenta que desde el instante en que se inicia la oscilación, el momento del par de estabilidad longitudinal  $\mathcal{E}$ , empieza a actuar, contrarrestando la fuerza tangencial, resulta de todo esto *que no hay ningún inconveniente en colocar en el fuselaje un exceso de carga sobre la que teóricamente puede admitir el aeroplano.*

Como resumen a todo lo que venimos exponiendo, resulta que el equilibrio de este aeroplano es análogo al equilibrio de una balanza, cuya sensibilidad para el gobierno dependerá únicamente de la distancia del centro de gravedad  $G'$  al eje de suspensión, distancia que, como hemos visto, no será grande.

De aquí se deduce la posibilidad de suprimir el timón sustentador y la de poder reemplazarle por una cola análoga a la de los pájaros; es decir, por un timón amortiguador.

### Descripción del aeroplano (1).

(Láminas I, II y III.)

*Alas orientables.*—Para contribuir a la estabilidad lateral en el aire, las alas forman un ángulo diedro, y cuando el aeroplano descansa en tierra, se pueden plegar con la mayor facilidad sobre el cuerpo del fuselaje.

Por todo lo que hemos expuesto en la teoría, resulta que este aeroplano está perfectamente equilibrado en todas las incidencias, sin que el aviador tenga necesidad de ocuparse poco ni mucho del timón de

(1) Las figuras a que aquí hacemos referencia, se han simplificado todo lo posible para facilitar el estudio. En el anteproyecto de este aeroplano se suprimen los patines; los órganos de aterrizaje son tan sólidos como los requieren los esfuerzos que se producen en el momento de tomar tierra; y el sistema articulado se ha reemplazado por otro más ligero y más en armonía con este género de construcciones.

altura en la marcha horizontal. En las marchas ascendentes o descendentes en línea recta no hay más que dar al timón de altura el ángulo conveniente (positivo o negativo) y dejarle fijo; el aeroplano marchará indefinidamente en línea recta.

El sistema de alas orientables permite el vuelo rectilíneo a diferentes velocidades.

Esto quiere decir, que siguiendo el aeroplano en su vuelo una línea recta (fig. 29), puede recorrer la parte  $AB$ , por ejemplo, a 60 kiló-



Fig. 29.

metros por hora, la  $BC$  a 120 y la  $CD$  a 80 con sólo variar la incidencia de las alas, pero sin variar la marha del motor. Pues si  $R_y$  y  $R_x$  aumentan con la

incidencia, el aparato disminuye de velocidad sin ascender ni descender; toda vez que la disminución de velocidad se compensa con el aumento de la componente  $R_y$  con la incidencia.

*Fuselaje.*—El fuselaje se compone de tubos de acero recubiertos de tela.

En los dos costados están los depósitos de esencia y grasas, como se ven en la figura 2.<sup>a</sup> (lámina I). Estos depósitos se componen de varios compartimentos que se comunican entre sí por los orificios  $o$ ,  $o$ ,  $o$ , ... Los orificios superiores  $o'$   $o'$   $o'$  ... son para expulsar el aire durante la carga. Esta disposición tiene por objeto, en las oscilaciones del aeroplano, que no puedan las esencias y grasas trasladarse en su totalidad de un extremo al otro de sus respectivos depósitos aumentando la amplitud de las oscilaciones.

Colocados estos depósitos en los costados, y simétricamente con relación a una vertical pasando por el eje de suspensión, no desequilibran el aeroplano cuando se van consumiendo las grasas y esencia.

*Empenaje amortiguador.*—Explicado el principio fundamental del equilibrio de este aeroplano, claramente se ve lo innecesario de un empenaje estabilizador. Basta el empleo de un empenaje amortiguador, que se compone de varias láminas flexibles de madera en forma de muelles.

Este mismo empenaje amortiguador sirve de timón de altura para los ascensos y descensos del aeroplano, con la inmensa ventaja de alejar los peligros inherentes a los timones sustentadores (fig. 30). En efecto; en el ascenso y en el descenso del aeroplano, el timón de altura afecta las formas siguientes, y como las variaciones de los centros de presión en las superficies convexas, varían en cierto modo proporcio-

nalmente a las incidencias, el funcionamiento de un timón de altura de esta naturaleza es perfectamente regular e inofensivo.

Además, teniendo su eje de giro *o* adelantado, no hay posibilidad de que pueda invertirse en el vuelo; y reduciendo al mínimo su resistencia al avance, este timón permite al aeroplano alcanzar grandes velocidades.

Como vamos viendo, todas estas disposiciones no son más que una copia de lo que es un pájaro; esta es la consecuencia de suspender el aeroplano de un eje, cuya posición en las cuerdas del ala hace que el equilibrio mecánico se verifique constantemente en todas las incidencias.

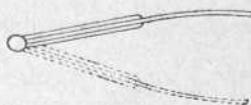


Fig. 30.

*Estabilidad transversal.*—La estabilidad transversal se asegura automática y mecánicamente por la voluntad del piloto. Es decir; que siendo automática esta estabilidad, el piloto puede modificarla por medio del volante en un momento dado sin interrumpir la automática.

*Timones de dirección.*—Se componen de dos planos triangulares de deriva para asegurar la rectitud de la marcha, y de dos planos simétricos, que sin estorbar el giro del timón de altura, permiten dar al aeroplano la dirección que se desee.

*Motor.*—El motor es de 10 cilindros, divididos en dos series de cinco cilindros cada una, con sus magnetos independientes. Las 10 bielas están articuladas al mismo cigüeñal que lleva la hélice.

Si una serie de cinco cilindros se pára, los otros cinco que tienen su magneto independiente continúan funcionando, y las paradas absolutas del motor se hacen casi imposibles (1).

*Planeo.*—Estando el centro de carena encima del centro de gravedad, al planear este aeroplano lo hará siempre describiendo una curva

(1) La revista *España Automóvil y Aeronáutica*, del 15 de Octubre próximo pasado, describe un motor Renault de 220 HP. para aviación.

Este motor se compone de 12 cilindros con sus 12 bielas articuladas a un mismo cigüeñal. Cada seis cilindros tienen su magneto correspondiente, de modo que si en un momento una serie de seis cilindros se pára, los otros seis cilindros continúan funcionando como un solo motor.

Como yo doy a la publicidad este proyecto después del 15 de Octubre, debo manifestar que en instancia que elevé al Ministerio de la Guerra con fecha 12 de Julio de 1912, dándole cuenta de estos estudios, hablaba de un motor de estas mismas propiedades; y si bien es cierto que la casa Renault no tiene necesidad de copiar nada mío, conviene, sin embargo, poner las cosas en su verdadero estado.

convexa a la tierra. Es el mismo caso de los pájaros, que se lanzan rápidamente con las alas inmóviles desde lo alto de los árboles para cazar los insectos que andan por la superficie de las aguas.

*Tren amortiguador.*—El tren amortiguador se compone de un cilindro de aire y un freno de glicerina con su vástago.

En el extremo inferior de estos cilindros van las ruedas con neumáticos. El eje de estas ruedas lleva en cada uno de sus extremos dos piezas horizontales, que son atravesadas por los vástagos de cada patín y sirven al mismo tiempo de apoyo a dos resortes en espiral.

Estos resortes mantienen elevados los patines durante el vuelo, pero en el momento del aterrizaje y al comprimirse el aire de los cilindros, las uñas  $u, u$ , bajan, y venciendo la resistencia de los resortes  $m, m$ , ponen los patines en contacto con el suelo, obrando desde este momento como frenos y dando estabilidad en tierra al aeroplano cuando no vuela. Y en el momento del vuelo, al aligerarse el aparato, los patines se elevan automáticamente por la acción de los resortes.

*El aeroplano como vehículo de carga.*—Cuando se pone una carga en el fuselaje, hay que acercar el contrapeso  $p$  al eje de suspensión, a fin de que el aeroplano no se desequilibre, y como el equilibrio se comprueba siempre antes del vuelo, resulta que este aeroplano vuela siempre en equilibrio perfecto.

### **Biplanos e hidroplanos.**

Resuelto el problema del equilibrio en el vuelo para todas las incidencias, podemos aplicarle a la construcción de biplanos e hidroplanos, de la misma manera que lo hemos hecho para los aeroplanos. Pues siendo este problema un problema fundamental, tiene en aquellos aparatos la misma aplicación que en los monoplanos.

### **CONCLUSIÓN.**

Aparte de las razones técnicas que deben ser el fundamento de todo proyecto, las aplicaciones de la mecánica deben ser oportunistas.

Toda máquina debe ser sencilla, y ninguna debe serlo tanto como el aeroplano. Una máquina que tiene que funcionar en el aire, donde no pueden hacerse reparaciones, debe ser tan reducida en el número de sus órganos mecánicos como refractaria a descomposiciones. Por

estas razones he procurado que los órganos de que he hecho uso sean sencillos y de construcción corriente en la industria.

Así vemos que las alas del aeroplano son como las alas de todos los aeroplanos; la cola o fuselaje muy parecido a todos los fuselajes, y el motor en sus fundamentos como todos los motores.

El sistema de orientación de las alas se compone de un sistema articulado, accionado por un tornillo y un disco de ángulos, que a la vez que nos da los avances del eje de suspensión y los ángulos de incidencia correspondientes con una seguridad absoluta, sirven de órganos irreversibles para evitar preocupaciones y cansancio al piloto durante el vuelo.

Y los frenos para dulcificar el aterrizaje son los mismos que los primitivos frenos que usó la artillería al iniciarse hace algunos años la actual evolución de los modernos cañones.

En todo esto que afecta a la constitución mecánica del aeroplano y a la realización de su equilibrio, creo que he acertado. Pero a estas máquinas, por encima de sus órganos mecánicos, les hace falta otra condición esencial: la seguridad.

Hay quien pretende dar condiciones de seguridad al aeroplano en el aire, valiéndose de órganos mecánicos de condiciones apropiadas; y entre los que de éstos conozco, debo citar el estabilizador Dautre, por la genialidad que revela en su autor.

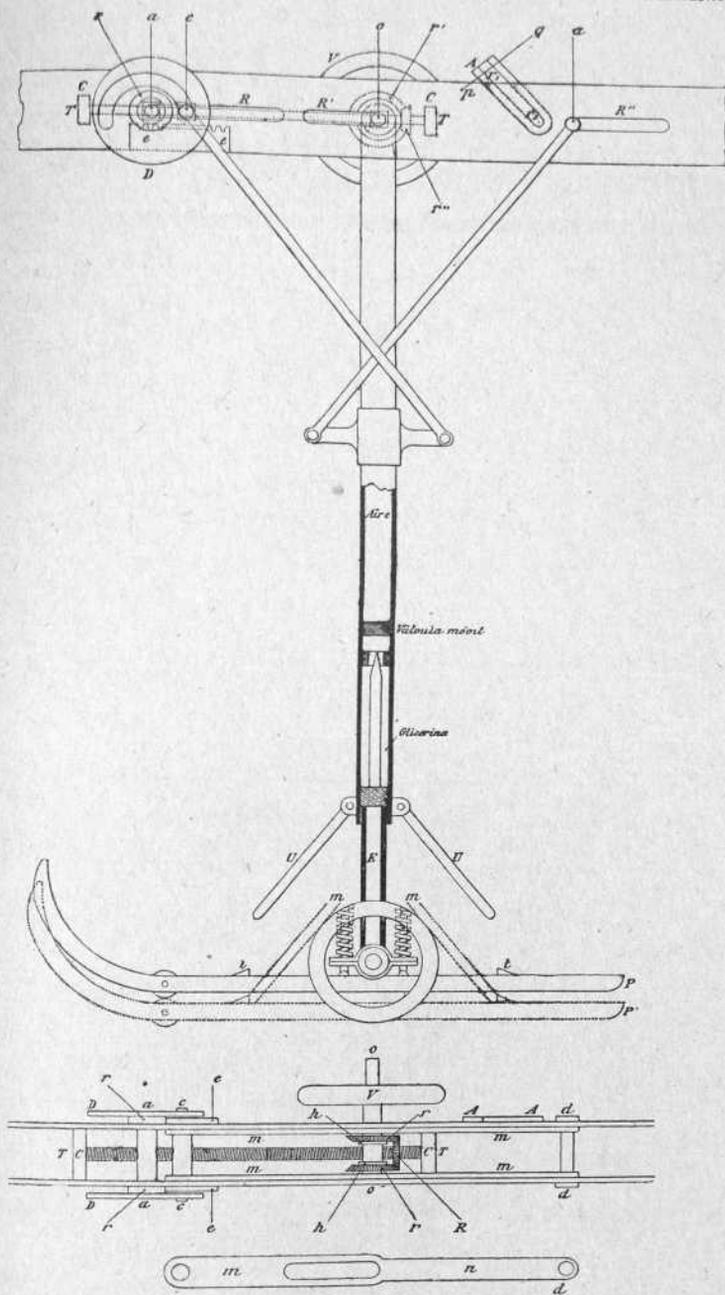
Pero yo creo que lo mejor es simplificar el problema, prescindiendo de toda clase de aparatos auxiliares, que pueden fallar en el momento menos pensado, y dotar al aeroplano de condiciones autoestabilizadoras capaces de restituir el equilibrio cuando momentáneamente se haya perdido.

El estudio que hasta ahora se ha hecho de la autoestabilidad aerodinámica es muy completo, pero para que las acciones aerodinámicas se desarrollen con completa libertad, es necesario que ninguna causa pueda estorbarlas.

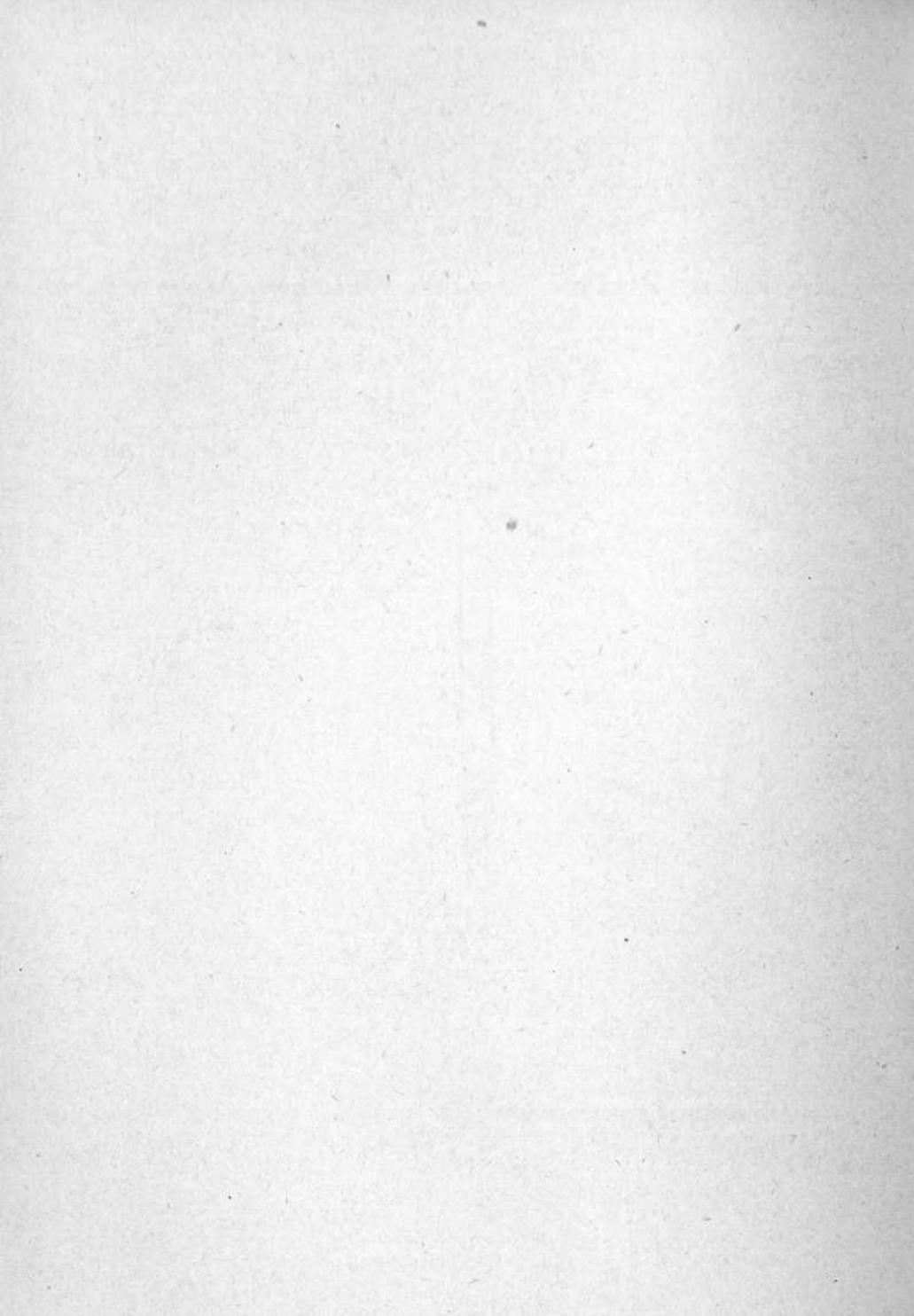
De aquí la necesidad de dotar al aeroplano de un equilibrio mecánico que sea constantemente igual en todas las incidencias del vuelo.

En estas condiciones, las acciones aerodinámicas podrán desarrollarse en completa libertad, y ya podremos confiar al mismo aire nuestra seguridad en el vuelo.



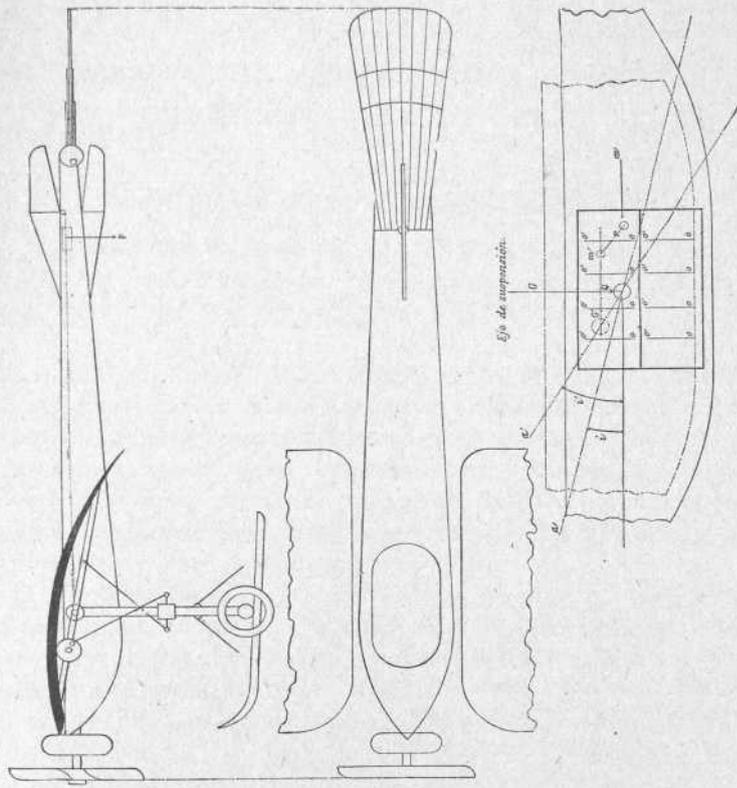


Equilibrio del aeroplano.











# SOBRE LA RESISTENCIA A LA ROTURA

y al movimiento de los cuerpos comprimidos que se tocan  
según un punto o según una línea

POR

D. PEDRO M. GONZALEZ QUIJANO

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

---

Cuando un cuerpo natural se encuentra sometido a un sistema de fuerzas, se desarrollan en su superficie y en su interior reacciones moleculares que tienden a mantener la solidaridad entre sus distintas partes y a prevenir la rotura. Estas reacciones, que corresponden siempre a deformaciones más o menos acentuadas del cuerpo, no pueden crecer por cima de determinado límite, y cuando éste es alcanzado por las fuerzas exteriores la rotura se produce al fin.

Enseña la experiencia que, cuando las dimensiones del cuerpo crecen, las fuerzas necesarias para romperle deben crecer también y que han de ser, en general, del mismo orden de magnitud que el cuadrado de aquellas dimensiones. Es, pues, natural, y así se hace en la práctica, referir a la unidad de superficie las fuerzas exteriores y las reacciones que originan.

Esto supuesto, si para una misma fuerza la superficie de aplicación disminuye indefinidamente, la intensidad de su acción crecerá sin límite y llegaría a ser infinita si la superficie se redujera rigurosamente a cero. Es lo que ocurriría en el contacto de dos cuerpos que se tocaran en un punto o según una línea.

Ahora bien, una acción infinita no puede ser resistida por los cuerpos naturales: las superficies ceden, la materia se deforma y el punto o la línea teóricos son de este modo substituidos por una zona de contacto que irá creciendo hasta que la acción quede reducida dentro de

los límites que soporta la resistencia del material, o hasta que la rotura sobrevenga, si tal fuera la intensidad de las fuerzas que hiciera imposible el equilibrio final.

Cuando los cuerpos son suficientemente duros estas zonas de contacto son, sin embargo, muy pequeñas y, aunque siempre se esté a infinita distancia de la concepción teórica, los problemas que en tales casos se plantean difieren bastante de los demás que se presentan en la práctica, para que sea lógico concederles una atención especial.

Aumentan, por otra parte, el interés de estos problemas la frecuencia de sus aplicaciones, de gran importancia muchas de ellas en la construcción y en la maquinaria. Sirvan de ejemplo los cilindros de apoyo de los puentes metálicos para prevenir los efectos de las dilataciones y contracciones debidas a las diferencias de temperatura, las rótulas de los arcos de fábrica, los trenes de rodillos, ruedas de vehículos, juegos de bolas y demás mecanismos con los que se procura reducir a un mínimo los rozamientos.

Hácese uso en la mayor parte de estos casos de fórmulas empíricas, que suelen bastar en la práctica ordinaria, pero que no dan a conocer el mecanismo íntimo de los fenómenos, y son sólo una guía insuficiente e insegura cuando hayan de excederse los límites de lo ya experimentado.

Algunos ensayos, sin embargo, se han hecho en este sentido, y a dar cuenta del estado actual del asunto, de las deficiencias que aún se notan, y de la necesidad de recurrir para subsanarlas a nuevas investigaciones experimentales se dirige principalmente la presente Nota, en la que estudiaremos separadamente tres puntos distintos, a saber:

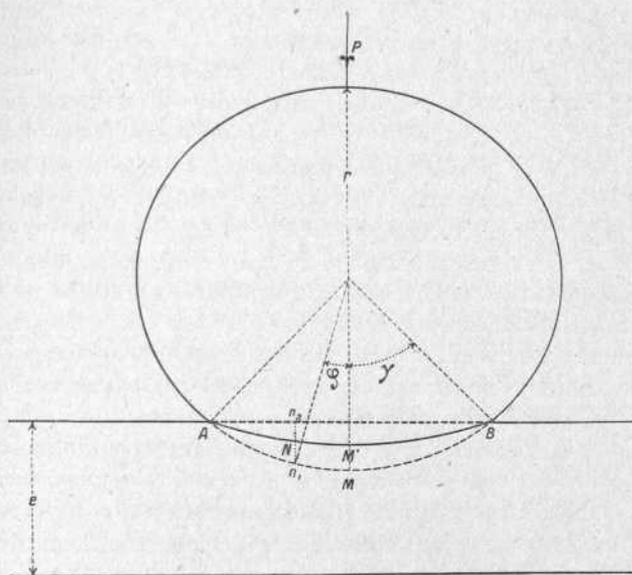
- 1.º La repartición de las presiones en la zona de contacto.
- 2.º Su distribución en el interior de los cuerpos y las causas determinantes de la rotura, y
- 3.º Las resistencias que por razón de estos fenómenos se oponen al movimiento de los cuerpos en cuestión.

## I.

Respecto al primer punto, la teoría quizás más antigua es la de Grashof (1). Considera este autor el caso de un cilindro de sección recta circular, colocado sobre una placa plana, a la cual es tangente y

(1) *Theorie der Elasticität und Festigkeit*. Berlín, 1878.

contra la cual es comprimido por una cierta fuerza normal a ambas superficies, y uniformemente repartida a lo largo de la generatriz de contacto. Bajo la acción de esta fuerza, el cilindro y la placa se deforman y el contacto se establecerá finalmente según una superficie cilíndrica de generatrices paralelas a las del cilindro, y cuya directriz se supone ser una curva tal como  $AM'B$ , intermedia entre la cuerda  $AB$ , que prolonga la primitiva superficie plana de la placa, y el arco  $AMB$  directriz del cilindro antes de la deformación.



Admitido esto, las deformaciones superficiales paralelamente a la dirección de la fuerza en un punto cualquiera  $N$  de la zona de contacto, serán respectivamente  $Nn_1$  para el cilindro y  $Nn_2$  para la placa. Grashof admite que las reacciones moleculares correspondientes a estas deformaciones sean

$$\frac{E_1}{r} \times Nn_1 \quad \text{y} \quad \frac{E_2}{e} \times Nn_2$$

representando por  $r$  y  $e$  el radio del cilindro y el espesor de la placa y por  $E_1$  y  $E_2$  los módulos respectivos de elasticidad de las materias de

que están constituídos ambos cuerpos; iguala en seguida ambos valores por razón de equilibrio, y como la suma de ambas deformaciones, que son siempre muy pequeñas, depende sólo de la situación del punto y del ancho total de la zona de contacto, deduce de fáciles consideraciones geométricas, y despreciando infinitamente pequeños de orden superior, que la presión común en ese punto es

$$f = \frac{r}{\frac{r}{E_1} + \frac{e}{E_2}} \cdot \frac{\psi^2 - \varphi^2}{2}, \quad [1]$$

fórmula en la cual  $\varphi$  y  $\psi$  representan los ángulos en el centro correspondientes a los arcos  $Mn_1$  y  $MA = MB$ . En ella sólo es desconocido el ángulo  $\psi$ , que puede determinarse igualando la fuerza total de compresión  $P$  a la integral de todas las reacciones moleculares.

Salta, sin embargo, a la vista que la fórmula [1] no puede ser de aplicación general, pues si se hiciera en ella  $e = \infty$ ,  $f$  sería nula, cualquiera que fuera  $\psi$ , y ocurriría, por consiguiente, que a la presión más débil, y aun bajo la acción de su propio peso, el cilindro se hundiría en su soporte, supuesto indefinido en espesor.

Síguese esta consecuencia del error fundamental de referir las deformaciones, principalmente superficiales, a las dimensiones totales de los cuerpos en contacto. En lo que a la placa se refiere, el error resulta patente, y sin duda huyendo de él, Culmann elude tomar en cuenta el espesor de aquélla, y admitiendo una relación constante entre las deformaciones de ambos cuerpos, refiere al radio la del cilindro, como Grashof, y llega, por último, a representar la presión en el punto  $N$  por la fórmula

$$f = \lambda E \left( 1 - \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right)$$

la que, si se substituyen  $\cos \psi$  y  $\cos \varphi$  por los primeros términos de sus desarrollos, prescindiendo de infinitamente pequeños de orden superior al segundo, se transformará en

$$f = \lambda E \cdot \frac{\psi^2 - \varphi^2}{2}, \quad [2]$$

que, en el caso de ser iguales los materiales del cilindro y de la placa,

sólo diferirá de la [1] por el coeficiente  $\lambda$ , que debería ser igual a  $\frac{r}{r+e}$  para que la identidad fuera completa.

A resultados análogos son conducidos por la misma vía Resal y Canevazzi, y Bach llega a prescindir por completo de la contracción de la placa, lo que equivaldría a hacer  $\lambda = 1$  en la fórmula de Culmann.

En realidad, si nada justifica el referir la deformación de la placa a su espesor total, comparar la del cilindro con su radio y tomar esta relación por base para aplicar la ley de Hooke, no es más congruente. Tanto en un cuerpo como en otro las grandes presiones se encuentran concentradas en las inmediaciones de la zona de contacto, desde donde se propagan hacia el interior, debilitándose en intensidad lo que ganan en superficie de aplicación.

Si, pues, por un punto cualquiera de contacto se traza en el interior del cilindro una recta paralela a la fuerza, que supondremos vertical, las presiones a lo largo de esa línea irán disminuyendo desde la superficie hasta el plano diametral horizontal; las deformaciones elementales serán proporcionales a esas presiones, y la deformación total, igual a la integral de las deformaciones elementales, deberá ser referida a una longitud menor que el radio, y tanto menor cuanto más rápidamente la presión disminuya de la superficie al centro.

La verdadera medida de la presión en la superficie no la daría, pues, la deformación total, sino la derivada de esta deformación con relación al espesor comprimido. Esta derivada dependerá de la forma del contacto y en su expresión deberá entrar, por consiguiente, el radio del cilindro; pero, en tanto, en cuanto este radio define la curvatura de la superficie en el punto de tangencia y con independencia casi completa de las dimensiones del cuerpo, de tal suerte que la expresión hubiera de ser la misma para un cilindro de sección elíptica, por ejemplo.

Sin embargo, como las mayores presiones se localizan, como ya hemos tenido ocasión de notar, en las inmediaciones del contacto, puede admitirse, con las debidas reservas y a título de primera aproximación, que la derivada sea proporcional a la deformación misma, dejando a la experiencia el determinar cuál hubiera de ser el coeficiente de proporcionalidad. Podría así llegarse a la misma fórmula de Culmann, a la que no habría que hacer entonces otra observación que la ya apuntada sobre la significación del coeficiente.

En esta hipótesis se tendría, haciendo  $\varphi = 0$  en la expresión [2],

que la presión máxima sería

$$F = \frac{\lambda E \psi^2}{2},$$

y si llamamos  $p$  a la presión por unidad de longitud sobre la generatriz de contacto, se tendrá

$$p = 2 \int_0^{r\psi} f r d\varphi = \frac{2\lambda}{3} E r^3 \psi,$$

de donde se deduce para valor de  $\psi$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{3p}{2\lambda E r}},$$

lo que permite poner ya a  $F$  en función de la fuerza conocida y del radio del cilindro. Se llega así a la fórmula

$$F = \sqrt[3]{\frac{9\lambda E}{32}} \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}},$$

y para ancho de la zona de contacto a

$$a = 2\psi r = \sqrt[3]{\frac{12}{\lambda E}} \sqrt[3]{pr^2}.$$

Es fácil ver que la presión media sería igual en tal caso a los dos tercios de la presión máxima. En cuanto al coeficiente  $\lambda$  sería igual a  $\frac{1}{2}$  según Culmann y a 1 según Bach; su valor con aproximación suficiente sólo podría darlo la experiencia.

La teoría que acabamos de exponer podría igualmente aplicarse al caso de dos cilindros tangentes a lo largo de una generatriz. Ya hemos dicho antes que la distribución de las presiones no debe depender del radio del cilindro, sino en cuanto éste define la curvatura de la superficie. Por la misma razón esa distribución de presiones deberá quedar definida en este otro caso más general por el ángulo de contingencia de las superficies en contacto, y, por consiguiente, si representamos

por  $r_1$  y  $r_2$  los radios de los dos cilindros, la distribución de las presiones y el ancho de la zona de contacto serán los mismos que para un cilindro reposando sobre un plano y cuyo radio viniera dado por la expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2},$$

en la que el signo  $+$  correspondería al caso de dos cilindros exteriores uno a otro y el signo  $-$  al de un cilindro macizo reposando sobre la concavidad de otro hueco.

Con igual facilidad podría tratarse el caso de una esfera apoyada sobre un plano. La zona de contacto sería entonces un círculo, cuyo radio designaremos por  $\rho$ , y las líneas de igual presión circunferencias concéntricas. El valor de la presión vendría dado por la misma fórmula [2] en la que  $\varphi$  y  $\psi$  tendrían análoga significación, y si se representa por  $P$  la fuerza total de compresión se tendrá

$$P = 2\pi r \int_0^{\psi} f r \varphi d\varphi = \frac{\pi \lambda E r^2}{4} \psi^4,$$

de donde

$$f = \frac{\lambda E \psi^2}{2} = \sqrt{\frac{\lambda E P}{\pi r^2}} \quad \rho = \psi r = \sqrt[4]{\frac{4 P r^2}{\pi \lambda E}}.$$

Si la esfera reposara sobre un casquete cóncavo o se apoyara sobre otra esfera, las mismas consideraciones hechas anteriormente para el caso de dos cilindros, y aun la misma fórmula allí empleada, permitirían determinar el radio de la esfera única que en contacto con un plano produciría las mismas reacciones.

Alguna mayor complicación, aunque no más dificultad, tendría el caso de dos superficies cualesquiera que se tocasen en un punto. Si tomamos este punto como origen de coordenadas y por plano de las  $xy$  el plano tangente común a las dos superficies, es sabido que los valores de  $z$  en las inmediaciones del punto de tangencia vendrán expresados en el caso más general, despreciando infinitamente pequeños de orden superior al segundo, por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2 \\ z_2 &= A_2 x^2 + 2 B_2 xy + C_2 y^2, \end{aligned}$$

en las que  $z_1$  y  $z_2$  serán del mismo signo o de signo contrario, según que las dos superficies se toquen interior o exteriormente.

Si dos puntos de ambas superficies vienen al contacto, la deformación total, que según la hipótesis ha de repartirse en relación constante entre los dos cuerpos, será igual a  $z_1 - z_2$  y las curvas de igual presión se proyectarán sobre el plano de la  $xy$  según curvas de segundo grado, que serán homotéticas con relación al origen, y elipses si se trata de superficies de curvatura positiva, como ocurrirá en casi todos los casos de la práctica.

Síguese de lo que acabamos de decir que las presiones y la extensión de la zona de contacto serán en este caso las mismas que si se tratara de la superficie representada por

$$z = (A_1 - A_2)x^2 + 2(B_1 - B_2)xy + (C_1 - C_2)y^2$$

comprimida contra un plano por la misma fuerza  $P$ . Bastará, pues, tratar este caso.

Tratándose de un paraboloido elíptico, un giro de los ejes coordenados alrededor del eje de las  $z$  permitirá dar a la ecuación la forma

$$z = \frac{x^2}{2r_1} + \frac{y^2}{2r_2}$$

en la que  $r_1$  y  $r_2$  representan los dos radios de curvatura principales del paraboloido en el punto de contacto. Si los dos fueran iguales, el paraboloido sería de revolución y el problema quedaría reducido al caso de la esfera. Siendo desiguales, como las elipses de igual presión son homotéticas, podrán considerarse como las proyecciones de las circunferencias de igual presión determinadas por la esfera de radio  $R$  dado por la expresión

$$R = \sqrt{r_1 r_2}.$$

Si las indicatrices de ambas superficies fueran de grado superior al segundo, los radios de curvatura serían infinitos y las fórmulas no serían ya aplicables. Sería preciso hacer directamente la integración de las presiones elementales para, después de igualada a la presión total, calcular la presión máxima y la forma y dimensiones de la zona de contacto, que dependerían ahora de los infinitamente pequeños despreciados en el cálculo anterior. El problema, sin embargo, sería quizá

más teórico que práctico, pues mientras más íntimo fuera el contacto, mayor exactitud exigiría la labra de las superficies para que pudieran ser aplicadas las conclusiones del cálculo, y esta exactitud tiene un límite impuesto por las condiciones del material y del trabajo.

Las hipótesis que sirven de fundamento a la teoría general que acabamos de bosquejar son, como hemos visto, tan sólo aproximadas. La teoría de la elasticidad permite una aplicación más precisa y correcta de la ley de Hooke para la determinación de las deformaciones y de las reacciones correspondientes. Es lo que ha intentado Hertz, integrando para este caso las ecuaciones fundamentales

$$\Delta^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dx} = 0,$$

$$\Delta^2 \eta + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dy} = 0,$$

$$\Delta^2 \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dz} = 0,$$

en las que  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  representan, como es sabido, las componentes de las deformaciones lineales,  $e$  la dilatación cúbica,  $m$  el coeficiente de Poisson y  $\Delta^2$  el símbolo de Lagrange.

Como resultado de sus investigaciones, llega Hertz a la conclusión de que la superficie de contacto es también en el caso general una elipse cuyos ejes coinciden en dirección con los de la elipse más atrás considerada, pero que la relación de sus longitudes es distinta, salvo en el caso en que una y otra elipse degeneren en círculo. Esta relación es, sin embargo, función exclusiva de la que existe entre los ejes de la primera elipse, y Hertz ha calculado una tabla que da para cada caso los valores de los correspondientes coeficientes que designaremos por  $\mu$  y  $\nu$ .

Esto supuesto, los semiejes de la elipse de contacto vienen dados por las fórmulas

$$a = \mu \sqrt[3]{\frac{3 P(\theta_1 + \theta_2)}{8 \left( \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \right)}},$$

$$b = \nu \sqrt[3]{\frac{3 P(\theta_1 + \theta_2)}{8 \left( \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \right)}}},$$

en las que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son coeficientes que dependen de las constantes elás-

ticas de los dos cuerpos y que responden para cada uno a la fórmula

$$\theta = \frac{4}{E} \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right);$$

en cuanto a los  $r$  representan los radios de curvatura principales de ambas superficies.

La presión en un punto interior a la elipse de contacto viene dada por

$$f = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

y será máxima para  $x = y = 0$ .

En el caso en que el contacto se produjese entre dos puntos umbilicales de ambas superficies o, más en particular, cuando se trate de dos superficies esféricas del mismo material, el radio del círculo de contacto será

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{3 \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) P}{E \left( \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \right)}}$$

y la presión máxima

$$F = \frac{3}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{PE^2}{9 \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)^2} \left( \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \right)^2}$$

correspondiendo en estas fórmulas el signo + a los contactos exteriores y el - a los interiores. En este último caso, y la observación es igualmente valedera para la teoría anterior, es claro que las fórmulas no podrían aplicarse si  $r_1 = r_2$ , o si la diferencia entre ambos radios fuera muy pequeña con relación a  $P$ .

Si los cuerpos en contacto fueran dos cilindros tangentes a lo largo de una generatriz, la misma teoría conduce a las fórmulas siguientes:

$$a = 4 \sqrt{\frac{2 \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) P}{\pi E \left( \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \right)}},$$

$$F = \sqrt{\frac{E P \left( \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \right)}{2\pi \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)}}$$

en las que las letras tienen la misma significación que en la teoría anterior.

Si se comparan estas fórmulas con las allí obtenidas, se observa, desde luego, que prescindiendo de coeficientes numéricos, sometidos siempre a la comprobación experimental, el orden de magnitud de los valores dados para las presiones y para las superficies de contacto no es el mismo; el ancho de la impresión que según las primeras obtenidas debía ser proporcional a la raíz cúbica de  $p$ , habría de serlo según las segundas a la raíz cuadrada, el radio del contacto en el caso de esferas habría de ser según unas proporcional a la raíz cuarta, y según otras a la raíz cúbica de la compresión total. La influencia del radio del cilindro o de la esfera tampoco sería la misma; su exponente en las fórmulas pasaría en el primer caso de  $\frac{2}{3}$  a  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{3}$  en el segundo. En cuanto al módulo de elasticidad, entra siempre en sentido inverso de la fuerza de compresión y la acompaña en sus variaciones.

Los resultados no pueden, pues, ser concordantes ni la diferencia acusarse siempre en el mismo sentido. Para grandes valores de la fuerza de compresión, las fórmulas de Hertz darían un contacto más extenso que las de Grashof y Culmann, pero en la práctica, antes de que la fuerza alcance esos valores, el material, en la mayoría de los casos, cederá bajo la carga. Serán, pues, estas últimas fórmulas las que de ordinario den valores mayores para la superficie de contacto y menores, por consiguiente, para la presión máxima.

Los grandes valores de la compresión harían, además, inaplicables las fórmulas de Hertz, porque éstas suponen la exactitud rigurosa de la ley de Hooke, y que las deformaciones son perfectamente elásticas y suficientemente pequeñas para que puedan considerarse infinitesimales en comparación con los radios de curvatura.

Y es, sobre todo, de observar que estos límites de aplicación son mucho más restringidos en la práctica de lo que pudiera pensarse. Si se aceptan, en efecto, las fórmulas de Hertz y se toma en ellas para el coeficiente de Poisson el valor  $m = \frac{10}{3}$ , aplicable con aproximación suficiente a los metales usuales, sería preciso, para no exceder con la presión máxima el límite de elasticidad del material, reducir la carga de los rodillos de dilatación de los puentes metálicos a la quinta parte, por lo menos, de las que se admiten sin dificultad en la práctica, y en algunos casos a la octava.

De aquí que, a poco que aumenten las cargas, aparezcan ya las deformaciones permanentes, como pudo comprobar Deslandres en sus importantes experimentos resumidos por él en una nota publicada en 1893 en los *Anales de Puentes y Calzadas*. Estas deformaciones permanentes parecían crecer proporcionalmente a las cargas, hasta un cierto valor crítico de éstas, para el que se producía un rápido aumento, que pronto cesaba, para crecer de nuevo con más lentitud.

Ahora bien, traspasado el límite de elasticidad, las deformaciones crecen con más rapidez que las fuerzas y, por otra parte, las deformaciones permanentes han de contribuir a igualar las presiones en la zona a que alcancen; de aquí que los contactos efectivos han de ser mayores y menores las presiones de lo que acusarían las fórmulas de Hertz, y que podrán tal vez, por consiguiente, a pesar de su menor rigor teórico, dar en los intervalos de la práctica valores más próximos a la verdad las de Grashof y Culmann, sobre todo si se determinan convenientemente sus coeficientes.

No sabemos que se hayan hecho investigaciones suficientemente precisas para decidir experimentalmente la cuestión. El profesor Greco, en un notable trabajo no hace mucho publicado en el *Giornale del Genio Civile*, y del que más adelante nos ocuparemos, se inclina, sin embargo, a la fórmula de Hertz, fundado en determinadas experiencias de Bach, que parecen confirmarla. Efectuáronse éstas sobre cilindros de granito comprimidos contra prismas del mismo material. Una vez desaparecidas las cargas y observando las superficies de contacto de ambas probetas, se notaban huellas discontinuas y más o menos irregulares, cuya superficie total, dividida por la longitud de la generatriz, se ha tomado por ancho de la zona. Comparando estos resultados con los deducidos de la fórmula de Hertz, la concordancia es bastante grande, y aun son con frecuencia menores los observados que los calculados.

Pero esta comprobación parece un poco fortuita, porque las huellas observadas *después de descargado el cilindro* responden a deformaciones permanentes y han de quedar, por consiguiente, limitadas a una superficie menor que la del contacto.

Es, sin embargo, notable, que en los experimentos de Bach la deformación permanente crezca aproximadamente con la raíz cuadrada de la carga y no con la carga misma, que es lo que parece ocurrir con los materiales metálicos, como se deduce del trabajo de Deslandres y de las observaciones sobre la dureza de estos cuerpos que han dado origen al cada vez más acreditado y extendido método de prueba de

la bola de Brinell (1). Todo ello parece indicar la necesidad de nuevas investigaciones experimentales que den a conocer mejor el fenómeno real, y que sirvan en su caso de base a una clasificación racional de los materiales.

Entre tanto parece lo más probable, dentro de nuestros actuales conocimientos, que las deformaciones y las presiones empiecen a producirse bajo cargas mínimas obedeciendo a las fórmulas de Hertz, que al crecer las cargas crezcan también aquéllas, acercándose cada vez más a los valores indicados por las teorías de Grashof, Culmann y similares y que, si las deformaciones permanentes se acentúan, pueden aún ser traspasados estos límites en un período plástico, si la naturaleza del material lo consiente, antes de que se produzca la rotura.

Las condiciones que determinan ésta es otro de los puntos de la mayor importancia práctica, y del cual pasamos a ocuparnos.

## II.

En las aplicaciones suele ser, en efecto, más interesante el límite de rotura que la entidad de las deformaciones, y si se procura que éstas no crezcan excesivamente, es principalmente porque revelan la proximidad de aquélla; pero respecto a las causas que la producen, la unanimidad no es completa.

Es un hecho experimental que, cuando las fuerzas crecen, la rotura acaba por producirse y, según como las fuerzas obran, tres clases de roturas suelen de ordinario considerarse: rotura por compresión, rotura por tracción y rotura por deslizamiento; las demás suelen reducirse a ellas mediante la aplicación de teorías más o menos justificadas. Para cada una de estas tres clases de rotura, la experiencia da un límite a las fuerzas cuando las pruebas se efectúan en condiciones comparables.

Esto supuesto, la primera idea que ocurre es limitar las compresiones en la zona de contacto, que es donde alcanzan su máxima intensidad, para alejarse del esfuerzo que determina la rotura por com-

---

(1) A la misma conclusión han llegado Föppl y su discípulo Schwerd, operando sobre probetas semicilíndricas de hierro o de acero, que colocadas con las generatrices en cruz se comprimían fuertemente. Desde que el diámetro de la huella excedía de 1,5 a 2 mm., el área de la superficie de contacto era sensiblemente proporcional a las fuerzas de compresión correspondientes.

presión. Es lo primero que se ha pensado, y de aquí la importancia concedida a la distribución de las presiones de que acabamos de ocuparnos.

Pero la rotura por compresión es una idea que repugna a muchos. Cuesta trabajo, en efecto, admitir que sólo fuerzas que tienden a aproximar las moléculas puedan destruir los enlaces que mantienen la solidaridad de un cuerpo y, de todos modos, cualquiera que sea el efecto que pudieran producir fuerzas colosales de las que no disponemos dentro de nuestros actuales medios de acción, parece que cuando la rotura por compresión se produce en la práctica, son esfuerzos secundarios de dilatación o de deslizamiento los que en la realidad destruyen la solidaridad de los elementos materiales.

Esta observación no resta, sin embargo, todo valor a la indicación que puedan dar en nuestro caso las presiones de contacto, porque si el cilindro o la esfera se rompieren por dilatación o por deslizamiento, también se rompen de este modo las probetas que sirven para fijar el límite de compresión, y las causas que en un caso producen efectos secundarios suficientes bien podrían producirlos también en el que ahora nos interesa.

Sólo la experiencia puede, pues, dar una contestación segura; pero para interpretarla debidamente, convendrá estudiar cómo se reparten las presiones en el interior de los cuerpos en contacto. Boussinesq ha aplicado la teoría de la elasticidad al caso de una fuerza aislada aplicada normalmente a la superficie plana de un medio elástico indefinido; sus conclusiones podrían aplicarse a una placa horizontal sustentadora de una esfera que la comprime.

Las presiones, concentradas en la superficie, van extendiéndose al repartirse sobre los planos paralelos a la misma y cada vez más distantes de ella. Según la línea de acción de la fuerza, las presiones unitarias decrecen proporcionalmente al cuadrado de la profundidad.

En cada plano horizontal las presiones verticales son inversamente proporcionales a la quinta potencia de la distancia al punto de aplicación. Los esfuerzos tangenciales van dirigidos en estos planos hacia el punto de paso de la fuerza, son máximos en este punto y varían a lo largo de la línea de acción de la fuerza en sentido inverso del cuadrado de la profundidad, y en cada plano el de la cuarta potencia de la distancia al punto de aplicación. Esto origina otros esfuerzos que se desarrollan en cada punto sobre los planos verticales normales al plano radial que pasa por el punto y la fuerza. Finalmente, sobre estos planos radiales el deslizamiento es nulo.

Como consecuencia de esta repartición, los esfuerzos se atenúan a medida que penetran en la placa, y bastará un espesor no muy grande para que lleguen de tal modo reducidos a la cara opuesta, que desaparezca todo peligro de rotura fuera de la zona misma de contacto. Claro es, sin embargo, que si ésta cede, la repartición se altera y la rotura iniciada podrá propagarse.

En la esfera, la repartición de los esfuerzos sería mucho más compleja. Se atenuarían indudablemente los esfuerzos de compresión al retirarse de la zona de contacto; pero esta atenuación tendría un límite, porque habrían de concentrarse de nuevo en los puntos de aplicación de las fuerzas que mantienen el contacto. Si acción y reacción actúan, por ejemplo, sobre los extremos de un diámetro, la simetría exigirá que sea la sección diametral normal a la fuerza la que sufra los esfuerzos mínimos. Pero al atenuarse las compresiones, nacen de una parte esfuerzos tangenciales y de otra dilataciones que se propagan hasta la superficie, donde nada las contrarresta. La estabilidad, como se ve, es más dudosa.

Consideraciones análogas podrían aplicarse al cilindro soportado por un plano; pero habrá que recordar de nuevo que las hipótesis fundamentales de la teoría de la elasticidad dejan de verificarse en nuestro problema, no sólo para el caso de la rotura, que si es el que hay que prevenir, debe quedar siempre alejado en la práctica por amplio margen, sino hasta cuando las condiciones del trabajo son las usuales.

Cierto es que esta extralimitación no se produce en todos los puntos del cuerpo, pero, para aplicar correctamente la teoría, aun en las regiones donde los esfuerzos se mantienen dentro del intervalo elástico, sería preciso poder trazar la superficie divisoria y conocer sobre ella la repartición de los esfuerzos que determinara las condiciones en los límites de la integración de las ecuaciones fundamentales.

Por otra parte, las leyes aproximadas de que suele hacerse uso en el estudio de la resistencia de los materiales no podrían tener tampoco aplicación adecuada. La ley de repartición plana, tan usada en muchos casos, sólo puede justificarse entre ciertos límites cuando las secciones por donde las fuerzas se transmiten no varían sino de un modo gradual. A falta de comprobación experimental, cualquiera otra teoría dejaría siempre amplia entrada a lo arbitrario; alguna, adelantada, sin embargo, por persona competente, sería francamente inadmisibles. Bach, por ejemplo, en el caso de cilindro contra placa, supone que la presión se reparte siempre sobre el primero a todo lo largo del diámetro vertical sobre una superficie igual a la del contacto. Greco, que

hace la cita, rechaza la hipótesis con razón y aun hace notar que quedaría desmentida por experimentos hechos por el propio Bach sobre un cilindro de plomo comprimido entre placas del mismo material.

No cabe, pues, dentro de nuestros conocimientos actuales, un análisis elemental completo del problema y si sólo comparar los esfuerzos medios que se desarrollan en las distintas secciones, y que pueden ser conocidos por la sola aplicación de las leyes de la Mecánica, con los que provocan la rotura en las pruebas ordinarias o los que suelen ser resistidos en las obras.

Ahora bien, si se estudia en estas condiciones un cilindro o una esfera en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas iguales y opuestas, aplicadas a las generatrices o puntos extremos de un mismo plano diametral, toda sección plana que pase entre los puntos de aplicación cortará a las fuerzas y estará sometida a un esfuerzo cortante total igual a la proyección sobre su plano de la resultante. Si llamamos, pues,  $\alpha$  al ángulo de la sección con la horizontal, el esfuerzo cortante será, pues,  $P \operatorname{sen} \alpha$  o  $p \operatorname{sen} \alpha$ , total en el primer caso y referido en el segundo a la unidad de longitud de la generatriz. De todos los planos que correspondan al mismo  $\alpha$  los que darán mayor esfuerzo medio serán, por consiguiente, los que presenten sección más reducida, que serán, precisamente, los que pasen por uno de los puntos o generatrices de contacto.

Síguese de aquí que para los cilindros el máximo esfuerzo cortante medio será para todos los planos igual a  $\frac{p}{2r}$ , mientras que en la esfera tendrá por expresión  $\frac{P}{\pi r^2 \operatorname{sen} \alpha}$ , y sería máximo en el contacto mismo aunque no llegaría a ser infinito, como indica la fórmula, gracias, precisamente, a la deformación.

El esfuerzo cortante, tal como acaba de ser valorado, no es, sin embargo, el que provoca la rotura, pues suele considerársele contrarrestado en parte por una fuerza proporcional a la compresión que obraría a la manera del rozamiento, a la que se da de ordinario este mismo nombre y se evalúa haciendo uso del mismo coeficiente. Conviendría, sin embargo, hacer la debida distinción y buscar en la experiencia directa la justificación de los valores numéricos adoptados, porque no puede llamarse con todo rigor rozamiento sino a las fuerzas desarrolladas en las superficies de contacto de dos cuerpos diferentes. Es a estas fuerzas a las que se refieren las mediciones efectuadas, que sólo por analogía pueden extenderse a fuerzas desarrolladas *antes de la*

rotura y que se supone han de añadirse a las resistencias moleculares puramente tangenciales.

Conformándonos, sin embargo, con el uso, después de hechas las precedentes reservas, admitiremos la existencia de esa fuerza que parece probable que se desarrolle, aunque quede incierta su evaluación, y representaremos por  $R$  el coeficiente que interviene en su medida. El esfuerzo tangencial que hubiera de provocar la rotura sería, según esto,

$$p(\operatorname{sen} \alpha - R \cos \alpha) \quad \text{o} \quad P(\operatorname{sen} \alpha - R \cos \alpha),$$

y referido a la unidad de superficie

$$\frac{p}{2r}(1 - R \cotang \alpha) \quad \text{o} \quad \frac{P}{\pi r^2} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{R \cotang \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right),$$

debiendo tener presente que estas expresiones deberán ser siempre nulas o positivas, por lo que  $R$  tomará valores crecientes con  $\alpha$ , hasta un cierto límite que corresponderá al ángulo cuya tangente sea igual al valor de  $R$  que consideramos.

Si se toman valores de  $\alpha$  mayores que ese límite, se ve inmediatamente que el esfuerzo cortante medio aumenta en el cilindro hasta alcanzar su valor máximo en el plano diametral vertical. En la esfera la fórmula daría para el aumento un límite, si  $R$  tiene valor adecuado. Derivando con relación a  $\alpha$  correspondería, en efecto, un máximo para los valores que satisficieran a la ecuación

$$3R + R \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha = 0,$$

que haciendo

$$\cos 2\alpha = x,$$

correspondería a

$$(1 + R^2)x^2 + 6R^2x + 9R^2 - 1 = 0,$$

ecuación que sólo tendrá raíces reales cuando se tenga

$$R < \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3714.$$

Ahora bien, si  $R$  tiene un valor mayor, como de ordinario se supone en la práctica, el crecimiento del esfuerzo medio no se detendrá tampoco, sino cuando el plano sección llegue a ser vertical. La sección vertical será, pues, en ambos casos la más peligrosa desde el punto de vista del esfuerzo cortante.

En cuanto a las dilataciones más intensas, deberán ser normales a la dirección de las presiones dominantes que las provocan, y que deben estar con ellas en la relación indicada por el coeficiente de Poisson, cuya constancia será probablemente alterada, una vez excedido el límite de elasticidad. Estas dilataciones, equivalentes a tensiones, deberán, por consiguiente, también tender a romper el cuerpo según un plano diametral vertical.

Vemos, pues, que las dos acciones de tensión y de esfuerzo cortante deben conducir al mismo resultado: a la rotura del cuerpo por una de las secciones que vendrían indicadas por la simetría y por aquella precisamente por la que en la práctica se produce.

Así resulta, en efecto, de los interesantes experimentos efectuados por el profesor Greco en el laboratorio de ensayo de materiales de la Real Escuela de Aplicación de Palermo y de los cuales da cuenta en un interesante trabajo al que más atrás hemos ya aludido (1). Efectuáronse las pruebas sobre cilindros y placas de cemento y de mortero que, o bien se comprimían entre sí, o bien los cilindros solos, ya en contacto directo con los platillos de acero de la prensa o con interposición de hojas de cartón o de plomo.

Los resultados no han variado gran cosa con el modo operatorio: las cargas medias de rotura para cilindros de igual material y diámetro no eran muy diferentes de uno a otro caso, y en casi todos ellos son los cilindros los que se han roto en la dirección indicada por la teoría.

En cuanto a las cargas totales de rotura fueron, próximamente, proporcionales a las secciones diametrales correspondientes y casi iguales a vez y media las que corresponderían a la misma superficie rompiéndose por tracción. De aquí cree poder deducir el experimentador que es la tensión, en efecto, la que actúa en la rotura, y confirma su opinión por el hecho de que, calculadas las presiones máximas que resultan para la zona de contacto, ya sea por la fórmula de Grashof-Culmann, ya por la de Hertz, los números a que se llega son muy superiores a las cargas de rotura que se obtienen rompiendo a la compresión cubos de ensayo del mismo material.

(1) *Giornale del Genio Civile*, 30 de Septiembre de 1914.

La conclusión es verosímil, pero su fundamento nos parece insuficiente. Es verosímil porque las tensiones, aunque desigualmente repartidas sobre la sección diametral, deben ser menores que las compresiones, y por eso no debe extrañar que el límite de rotura se aleje cuando se toman como cargas las fuerzas actuantes, tanto más cuanto que es sabido que los valores encontrados para la resistencia a la tracción de los cementos y morteros son inferiores a los verdaderos, y muy próximamente la mitad, si hubiéramos de considerar como exactos los que resultan de los ensayos a la flexión.

No nos parecen suficientes las indicaciones que se deducen de las fórmulas de Hertz y de Culmann, porque habría que demostrar previamente que estas fórmulas eran aplicables al momento de la rotura. Ya hemos indicado más atrás que, para ese caso, aun la última de estas fórmulas podría ser deficiente, y esto no sólo porque el ancho del contacto podrá ser excedido en la realidad, sino porque al producirse deformaciones permanentes se altera la distribución de las presiones, tendiendo a una uniformidad cada vez mayor. El mismo Greco confiesa que, al tratar alguna vez en sus experimentos de determinar la anchura de la zona de contacto, ha llegado a valores que se aproximaban mucho a los indicados por la fórmula de Grashof-Culmann, aunque no se cree autorizado para sacar partido de esta concordancia, por creer que la deformación local se hubiera exagerado por el hecho mismo de la rotura.

Ahora bien, los resultados obtenidos con la fórmula de Grashof-Culmann que Greco presenta en uno de sus cuadros son, para una serie de cilindros de pasta pura de cemento y de diámetros diferentes, los que se copian a continuación:

Diámetro en centímetros.....	2,5	5,0	7,5	10,0
Presión máxima.....	877,6	718,9	695,3	713,4

de donde resulta un valor medio para la presión de rotura de 748,8 kilogramos por centímetro cuadrado. Pero esta presión máxima, calculada admitiendo la proporcionalidad entre las reacciones moleculares y las deformaciones correspondientes, supondría una presión media de 499,2, mientras que la carga de rotura a la compresión fué para el mismo cemento de 504,5.

La casi igualdad de las cifras no es tampoco prueba plena de que la rotura haya tenido lugar por compresión, dada la inseguridad del cálculo y dado, sobre todo, que la misma rotura a la compresión de

las probetas de ensayo puede ser debida, y parece lo más probable, a efectos secundarios; pero siempre cabría la duda de si la rotura de los cilindros pudiera haber sido producida por esfuerzo cortante, como suele creerse que ocurre con las probetas mencionadas, y entonces la asimilación a éstas sería la más lógica, y el límite de compresión el que debiera ser tomado para los cálculos de resistencia como término de comparación.

El mismo Greco cita también otro hecho que viene a confirmar la idea de que la rotura del cilindro depende muy poco de las condiciones del contacto, y mucho de las dimensiones generales del cuerpo. Son las experiencias de Bach efectuadas sobre probetas de granito, a las que más atrás hemos aludido. En ellas el cilindro no es completo, sino que queda limitado por dos generatrices distantes entre sí 350 milímetros, terminándose el bloque por planos que con el de las generatrices vendrían a formar un paralelepípedo recto rectangular. La carga de rotura, aunque creciente con el radio, tiende cuando éste aumenta hacia un límite al que rápidamente se aproxima. Parece deducirse de aquí que, aunque la rotura llegara a iniciarse en la zona de contacto, sería preciso para que se propagara al resto del cuerpo que las dimensiones de éste fueran suficientemente débiles para ceder ante los esfuerzos secundarios, únicos que romperían definitivamente la solidaridad entre las distintas partes del bloque. Por otra parte, el beneficio de un gran radio, que según las fórmulas habría de reducir sin límite la presión máxima, no podría aprovechar en la experiencia desde que la anchura teórica de la zona de contacto excediera de la distancia entre las generatrices extremas.

Pero si este nuevo argumento contribuye indudablemente a restar importancia a la compresión, como tal, en el fenómeno de la rotura, todavía quedaría indecisa la cuestión de si es la dilatación o el deslizamiento el efecto predominante. Aún pudiera ocurrir que el predominio fuera de uno u otro, según la naturaleza del material, y quizás en esta vía hubiera que buscar la explicación de una circunstancia interesante observada por Greco en sus experiencias. Es el caso que, mientras los cilindros fabricados con mortero parece que han presentado siempre una línea de rotura única en la dirección teórica, con pequeños aplastamientos en los puntos de contacto con las placas, los de pasta de cemento puro, además de romperse según el plano diametral, presentaban otras dos superficies de fractura simétricas con relación a la principal, y hacia la cual volvían la convexidad en la zona central y la concavidad en las extremas, con presencia menos marcada de los aplas-

tamientos terminales, o más bien apareciendo en estos puntos el material más astillado que aplastado.

Podría ser la razón de la diferencia que el mortero se hubiera roto por esfuerzo cortante y el cemento por tracción, bien porque en cada material fueran esos límites de resistencia los primeros alcanzados, bien porque la repartición de los esfuerzos fuera distinta de uno a otro caso, lo que nada tendría tampoco de extraño, pues sin gran dificultad se comprende que la hipótesis de homogeneidad e isotropía habrían de admitirse siempre con menos reservas para el cemento que para el mortero.

Si estas consideraciones tuvieran algún valor, bien se pudiera pensar que las dilataciones transversales hubieran de encontrar en el cemento mayor facilidad para propagarse, dando origen, por consiguiente, a esfuerzos de tensión mayores, mientras que en el mortero, debiendo transmitirse a través de materiales distintos y poseyendo tal vez distintos coeficientes de Poisson, podrían ser compensadas en parte o distribuídas, en suma, de modo más uniforme o con intensidades relativamente más reducidas. Los esfuerzos cortantes, más directamente ligados a las fuerzas de compresión, no admitirían reducciones semejantes y llegarían por eso a preponderar en el mortero, mientras que en el cemento quedarían por bajo de la resistencia del material.

A esta diferencia en la propagación de dilataciones y deslizamientos podría igualmente referirse tal vez la independencia relativa que parece existir entre las dos especies de resistencia, como con gran copia de datos ha tratado de demostrar Feret.

Tan interesantes cuestiones están, como vemos, bastante lejos de quedar resueltas de un modo decisivo. El número de observaciones parece todavía pequeño, y no han sido aún suficientemente variadas las condiciones de experimentación, para que las conclusiones tengan suficiente peso. El ensayo de morteros de distinta riqueza, el de cilindros de directrices de formas diferentes o apoyados sobre más de una generatriz, las discontinuidades o el refuerzo de las secciones resistentes y otras análogas disposiciones experimentales podrían llegar, en efecto, a dar alguna idea de las causas determinantes de la rotura y aun de la distribución de los esfuerzos, revelada quizás con más o menos precisión para las tensiones del cemento, si no fueran erróneas las ideas apuntadas, por las formas muy características de esas superficies de rotura que, según los experimentos de Greco, acompañan a la principal.

En espera de datos más precisos, fuerza será acomodarse todavía en la práctica a las dimensiones ya experimentadas y a las fórmulas empíricas usuales.

### III.

Un último punto habíamos anunciado al principio de esta Memoria, y es el del estudio de las resistencias que se oponen al movimiento relativo de los cuerpos sometidos a las condiciones ya definidas. No lo trataremos sino someramente.

Si los contactos han de mantenerse, y abstracción hecha de los trabajos de las fuerzas aplicadas fuera de los contactos o normalmente a ellos, las resistencias habrán de reducirse a rozamientos que podrán ser de dos clases: rozamientos de deslizamiento y rozamientos de rodadura. Las leyes del rozamiento de deslizamiento son bastante conocidas, y no hemos de entrar en su discusión; si el deslizamiento del contacto ocurre a lo largo de una línea, como el rozamiento parece depender tan sólo de la presión total, el problema no diferirá del de los rozamientos ordinarios de superficies de dimensiones finitas, igualmente cargadas, que deslizan paralelamente a sí mismas siguiendo trayectorias de igual longitud.

Teóricamente al menos, no hay diferencia ninguna esencial, y en la práctica el problema carecería de importancia, pues cuando en las máquinas o en las construcciones han de rozar cuerpos diferentes, se procura que las superficies de apoyo sean suficientes para que las deformaciones no hagan el movimiento más premioso.

Pero podrían presentarse deslizamientos sin desplazamiento del contacto. Es lo que ocurriría si uno de los cuerpos girara apoyado en el otro alrededor de la normal común. Supongamos que el contacto se produzca entre dos puntos umbilicales; su forma será la de un círculo y la distribución de las presiones alrededor del eje de giro se mantendrá constante durante el movimiento. Esta distribución ha sido ya estudiada en la primera parte de esta Memoria, y ya allí se ha señalado cuán imperfectos son actualmente nuestros conocimientos en la materia.

Para calcular el rozamiento en este caso, supuesta conocida la ley de distribución, habría que determinar la integral

$$2\pi R \int_0^{\rho} f\omega\rho^2 d\rho,$$

en la que  $\omega$  representa el ángulo de giro,  $R$  el coeficiente de rozamiento y  $f$  y  $\rho$  tienen la significación que se les dió anteriormente. Es de observar que como las mayores presiones corresponden al centro del contacto, estos rozamientos serán siempre débiles. Suponiendo, en efecto, las presiones uniformemente repartidas, lo que habría de dar evidentemente un máximo, se tendría para valor de la integral

$$\frac{2}{3} \pi R f \omega \rho^3 = \frac{2}{3} R P \omega \rho$$

cantidad del mismo orden de pequeñez que  $\rho$ .

Si en vez de una repartición uniforme se admitiera la que deriva de la teoría de Grashof y Culmann, la expresión sería la misma, con la sola diferencia del coeficiente numérico, que se reduciría a  $\frac{8}{15}$ . De adoptar la de Hertz tampoco variaría más que el coeficiente, que será entonces

$$3 \int_0^1 u^2 \sqrt{1-u^2} du = \frac{3\pi}{16}.$$

Los tres valores encontrados se encuentran comprendidos entre 0,53 y 0,67, lo que demuestra la poca influencia que ejercen los distintos modos de repartición.

Cuando los puntos de contacto no fueran umbilicales en ambas superficies, la zona común variaría de forma durante el movimiento y también, por consiguiente, la distribución de las presiones; los cálculos se complican, y además del rozamiento propiamente dicho, intervendría en el fenómeno el trabajo de deformación resultante de estos cambios. Es fácil demostrar que la resistencia es en estos casos del mismo orden de magnitud que la longitud de la elipse que limita el contacto. Admitiendo hipótesis análogas a las que sirven de base a las teorías de Grashof y Culmann, Leauté ha llegado, para representar el momento del rozamiento con relación al centro del contacto, a la expresión

$$0,085 RPl,$$

siendo  $l$  la longitud de la elipse. De la teoría de Hertz se deduciría con las mismas notaciones

$$0,093 RPl.$$

En el caso límite de presiones uniformemente repartidas, se tendría:

$$0,106 RPl.$$

Si se hiciera  $l = 2 \pi r$  se recaería en las fórmulas del caso anterior.

Pasemos ya a ocuparnos de la resistencia a la rodadura. Es esta una cuestión que, como afirma Lecornu (1), es de las más oscuras de la Mecánica aplicada. No hay acuerdo ni sobre su causa ni sobre sus leyes, y De Mauni ha llegado a decir:

«No existe fuerza pasiva, específica, general, uniforme que pueda llamarse resistencia a la rodadura. En ausencia de una causa externa cualquiera, la resistencia a la rodadura no existe.»

La resistencia aparente provendría, según este autor, de adherencias accidentales, de la resistencia del aire y, sobre todo, de la rugosidad de las superficies, que podrían ser causa, ya de aplastamientos, ya de desplazamientos de las presiones, con pérdida en uno u otro caso de fuerza viva.

Ciertamente que todas estas circunstancias variables e imprecisas tienen su importancia, y aun podría admitirse que en los casos más ordinarios de la práctica sean ellas las dominantes en el fenómeno, quedando como oscurecida o casi anulada la influencia de la naturaleza y de la forma de los cuerpos en contacto; porque si éstos fueran absolutamente rígidos y perfectamente lisos, ninguna resistencia parecería justificada; pero a la manera como tampoco existiría rozamiento de deslizamiento entre las superficies ideales de los sólidos invariables de la Mecánica racional.

En la práctica, sin embargo, acabamos de ver que los cuerpos naturales están sujetos a deformaciones y, si éstas son muy pequeñas para fuerzas débiles, su importancia aumenta con las cargas, y cuando éstas son considerables, como ocurre para los rodillos de las computas de los pantanos, la influencia de las deformaciones puede hacerse sentir con mayor intensidad, alcanzando valores que sean ya comparables y aun superen a las otras causas de resistencia. El punto sería entonces tanto más digno de estudio cuanto que en tales casos la interposición de los rodillos, que siempre suponen una complicación, tiene precisamente por objeto el disminuir resistencias.

Si se reflexiona sobre el efecto que las deformaciones pueden producir, todavía no aparece muy claro, como de ellas se deriva, una re-

(1) *Dynamique appliquée*, Paris, 1908.

sistencia al movimiento, por lo menos, mientras se trate de deformaciones elásticas, pues si la deformación exige un esfuerzo y consume una cierta cantidad de energía, esta energía será devuelta cuando la materia recobre su forma primitiva. Esta devolución, sin embargo, no será completa, en primer lugar, porque no es instantánea, y en segundo, porque la deformación no consiste sólo en contracciones en el sentido de la normal a la superficie de contacto, sino que va acompañada de dilataciones transversales, y por una y otra causa las fuerzas de resorte, que van quedando libres durante el movimiento, no siempre encontrarán superficie a qué aplicarse, dando origen a vibraciones que se propagarán por el cuerpo o se disiparán en el medio.

Se concibe, sin embargo, que estas pérdidas puedan ser muy pequeñas y, desde luego, considerablemente inferiores a las resistencias resultantes de causas accidentales; pero cuando su importancia es innegable, es cuando traspasado el período elástico, la deformación llega a ser permanente, pues entonces ninguna devolución puede esperarse de lo que podríamos llamar su componente plástica, y persistirían además las pérdidas inevitables procedentes de su componente elástica.

Existe, pues, una resistencia a la rodadura; pero sus verdaderas leyes son poco menos que desconocidas. Para darse cuenta de ella en la práctica se ha tratado de estudiar la fuerza que, aplicada tangencialmente a la sección recta de un cilindro cargado, inicia y conserva el movimiento. Un momento antes de romperse el equilibrio, la carga y la fuerza, que le supondremos paralela, tendrán una resultante vertical, cuya distancia al eje del cilindro recibe el nombre de *parámetro de rodadura*.

Parece haber sido Coulomb el que primero se ha ocupado en 1781 de la determinación de ese parámetro, llegando como resultado de sus experiencias, muy poco numerosas por cierto, a la conclusión, aunque en otra forma expresada, de que el parámetro en cuestión es independiente del diámetro. A igual resultado llegó el general Morin en experiencias posteriores; pero Dupuit más tarde creyó encontrar que era independiente de la velocidad y del ancho del contacto, aunque proporcional a la raíz cuadrada del diámetro del cilindro, leyes que parecen confirmadas por las experiencias hechas hacia mediados del siglo pasado por Poirée en el ferrocarril de Lyon.

No parece, sin embargo, que unas y otras experiencias, por la escala reducida en que algunas de ellas se han realizado y por la falta de garantía de que hayan sido eliminadas todas las influencias acci-

dentales, puedan ser fundamento suficiente para una teoría un poco segura. Faltaría en todo caso conocer la naturaleza precisa de la resistencia para ver hasta qué punto podrían extenderse las fórmulas empíricas encontradas más allá de los límites de la experimentación.

Según la ley de Dupuit, por ejemplo, el parámetro sería *independiente* del ancho del contacto, pero proporcional a la raíz cuadrada del diámetro. Ahora bien, según las fórmulas de Hertz aplicadas al caso, el ancho del contacto es precisamente proporcional a esa raíz cuadrada. Es verdad que dicho ancho es, según las mismas fórmulas, proporcional también a la raíz cuadrada de la carga; pero si en las experiencias éstas hubieran variado menos que los radios, la influencia de esa raíz cuadrada de la carga, que hubiera podido parecer *a priori* muy poco probable, habría pasado inadvertida y habría quedado englobada en la divergencia siempre concedida a los errores experimentales.

Si en definitiva conviniéramos en llamar resistencia a la rodadura, a la que de la existencia de las deformaciones depende, o si redujéramos al menos el problema a la parte de resistencia a ellas debidas, es claro que el ancho del contacto no podría ser despreciado. Es, en efecto, casi evidente que el parámetro de que se trata no puede ser mayor que la mitad de ese ancho, pues cuando así ocurriera, la resultante de la carga y de la fuerza motora caería fuera de la base de sustentación. No parece que deba ser ni aun igual, mientras se trate de deformaciones elásticas, pues algo habrá que esperar siempre en este caso de las fuerzas de resorte que se desarrollan en el contacto; pero, por las razones apuntadas más atrás, no podría admitirse tampoco que llegara a ser, ni aun en este caso, rigurosamente nulo.

Fuera ya del período rigurosamente elástico, un límite inferior perfectamente determinado parece probable, a saber: el semiancho de la deformación plástica, que obedecerá quizás también en su origen a la fórmula de Hertz, como parecían demostrarlo las experiencias de Bach, pero que acaba al fin por ser proporcional a las cargas, como se deduce de los ensayos de dureza.

Si estas inducciones fueran exactas, parece probable que el parámetro en estudio fuera igual al semiancho de contacto multiplicado por un factor variable y siempre creciente que, empezando por cero, acabara por ser igual a la unidad cuando las cargas excedieran de determinado límite. La resistencia que de aquí resultaría, y es un punto de la mayor importancia, crecería en tal caso mucho más de prisa que la carga, mientras el rozamiento de deslizamiento crece, como es sa-

bido, con la carga misma, de suerte que, aun siendo para presiones débiles muy superior a aquélla, podría verse superado para las altas presiones, circunstancia muy de tener en cuenta cuando se trata precisamente de facilitar el movimiento.

Será, pues, siempre muy interesante en tales casos limitar las deformaciones, aunque, como se haya visto, puedan alcanzar valores de cierta importancia sin provocar la rotura; pero para quedar siempre dentro del intervalo elástico o para no excederlo demasiado, sería preciso aumentar las dimensiones de los cuerpos, que habrían de alojarse en espacios reducidos que no sería posible aumentar tampoco sin aumentar al mismo tiempo las fuerzas actuantes, con lo que se estaría encerrado entre condiciones contradictorias, de las que habría que procurar sacar el mejor partido posible.

Para proceder con seguridad en la elección, será preciso conocer a fondo el fenómeno, y éste, como acabamos de ver, se encuentra todavía envuelto en muchas nebulosidades. Por eso ha de ser también la conclusión de esta tercera parte, como de toda esta Memoria, la necesidad de una experimentación minuciosa y metódica que ponga en luz tantos extremos oscuros.

Ella siempre es la madre de todo conocimiento cierto, y a ella habrán de acudir siempre los que hayan de arrancar sus secretos a la Naturaleza, para establecer sobre el mundo aquel dominio del hombre que las más antiguas tradiciones señalan como ideal de la especie, condensado en aquellas palabras divinas: «Id y poblad el mundo y domadle».

---



LOS HORNOS ELÉCTRICOS  
DEL  
LABORATORIO DEL MATERIAL DE INGENIEROS

POR  
D. FÉLIX GONZÁLEZ

CAPITÁN DE INGENIEROS

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

---

En estos últimos años la calefacción eléctrica se ha ido generalizando en los laboratorios, siendo hoy en muchos de un uso corriente. La experiencia que del funcionamiento de estos aparatos se posee no es tan larga que resulten desprovistas de interés unas líneas dedicadas a dar a conocer las características y rendimiento de algunos modelos por nosotros manejados.

Los libros de análisis y electricidad no suelen hacer un estudio muy detallado de los hornos de laboratorio; los segundos, sobre todo, dedican preferente atención a los hornos eléctricos empleados en las industrias metalúrgicas; respecto a los primeros, suelen limitarse a indicar su teoría y copiar las figuras y datos que las casas constructoras publican. La temperatura que en cada tipo de horno se alcanza claro es que no podemos directamente deducirla de las leyes de transformación de la energía, pues nos faltan en este caso coeficientes prácticos para tener en cuenta las distintas pérdidas de calor.

Tampoco conviene que de lleno nos confiemos en los datos de las casas constructoras, cuya respetabilidad no dejamos de conocer. Ya nos ha sucedido el habérsenos quemado un horno haciendo pasar por él la corriente para la que, según el fabricante, estaba construído. No suelen los industriales ser muy explícitos respecto al tiempo en que se alcanza una temperatura determinada con un cierto régimen de corriente.

Por estas y otras particularidades hemos juzgado de algún interés

la redacción de la presente Nota, dando a conocer los hornos del Laboratorio Central de Ingenieros militares, con los que hace algunos años venimos trabajando, y las medidas de intensidad, voltaje y temperatura con ellos efectuadas. Anticipamos desde luego lo elemental del trabajo, y no pretendemos que tenga otra utilidad que la de abrir el camino para que investigadores con más medios de todas clases que nosotros se animen a darnos a conocer trabajos más profundos e interesantes sobre el particular.

\*  
\* \*

Con las investigaciones de Davy hacia 1805 sobre el arco voltaico, puede decirse que se ideó el horno eléctrico. Sin embargo, sus aplicaciones prácticas no aparecen hasta que nos las dió a conocer Moissan.

Los progresos realizados en esta rama han continuado en rápida progresión creciente desde entonces hasta la fecha, sobre todo en lo que se refiere a las aplicaciones industriales. Los hornos eléctricos funcionan hoy corrientemente en la mayor parte de los establecimientos metalúrgicos, elaborándose con ellos miles de toneladas de aceros especiales.

Los hornos eléctricos pueden clasificarse en dos grandes grupos, formando uno de ellos los hornos de arco voltaico, que son los más empleados en la industria. Los que forman el otro grupo son los llamados *hornos de resistencias*, y presentan, como veremos, disposiciones muy variadas.

La temperatura alcanzada por los de arco es elevadísima. Muchos físicos, desde su descubrimiento, se han ocupado en medirla, pudiendo citar entre otros Violle, Vanner, Fery, Le Chatelier y Rosetti. El primero de ellos dedujo de la primera serie de experimentos realizados que la temperatura del arco era independiente de la potencia gastada y correspondía a la de *ebullición del carbono*, unos 3.500° C. Autoridad tan grande en estas cuestiones como Moissan opinaba que la temperatura dependía de la intensidad de la corriente. Repitió Violle en vista de ello sus trabajos con intensidades variables entre 10 y 1.000 amperios, deduciendo que la temperatura del arco, superior a la del carbón positivo, era proporcional a la potencia consumida.

Los Sres. Gui y Leleux han establecido una fórmula para la determinación de la temperatura del arco, según la cual esta temperatura crece proporcionalmente al cuadrado de la densidad de corriente y a la

relación de la resistividad al calor específico, por unidad de volumen de la atmósfera del arco. Las temperaturas encontradas por distintos autores varían entre 3.500 y 4.000° C. o exceden poco estos límites. A estas temperaturas los compuestos más estables de la química mineral desaparecen, ya por disociación ya por volatilización.

El Laboratorio de Ingenieros militares tiene uno de estos hornos, adquirido hace una decena de años. Consiste sencillamente en un arco cuyos carbones forman entre sí un ángulo de 90°. Dos piñones, que engranan en sendas cremalleras unidas a los electrodos, facilitan el movimiento de éstos para variar la longitud del arco. El arco salta dentro de una cámara formada por materiales refractarios. En ella, además de las aberturas para el paso de los electrodos, hay otros dos orificios, uno superior para la introducción de las materias que hayan de tratarse y evacuar los vapores producidos, y otro inferior para meter el crisol que se apoya en un soporte móvil. Tiene, además, una puerta de mica, doblada por una pantalla de color para facilitar la observación.

Este horno ha sido empleado para ensayar arcillas refractarias.

Claro es que aun las que lo son en mayor grado se funden rápidamente; pero comparando la cantidad de materia fundida recogida en el crisol en un tiempo y con una intensidad determinadas, con la que se funde de una arcilla tomada como tipo o de unas pirámides de Seger, puede juzgarse muy aproximadamente de su fusibilidad.

Dejando aparte los hornos de arco (de sobra conocidos), vamos a ocuparnos de los otros tipos más empleados en los laboratorios para substituir los de gas, acetileno, alcohol, etc. Sobre el principio general que preside a la construcción de estos hornos, no hemos de extendernos aquí, por ser harto conocido. La fórmula de Joule determina el calor desarrollado por el paso de una corriente por un conductor. Todos los hornos de esta clase están constituidos por una resistencia a través de la cual se hace pasar una corriente. El calor desarrollado eleva la temperatura de la mufla, tubo, crisol o disposición que se adopte, según el uso a que se destine. Las resistencias empleadas son muy diversas y más aún la forma de disponerlas. Cada casa constructora tiene una o varias patentes.

Las resistencias más frecuentemente usadas son las metálicas, las lámparas de incandescencia, las metálico-cerámicas y el carbón.

Las metálicas se emplean en forma de alambres o cintas que se arrollan alrededor del cuerpo cuya temperatura quiere elevarse. Si éste es buen conductor eléctrico, claro es que ha de interponerse un bar ni

o materia aisladora, que debe ser buen conductor calorífico, para transmitir fácilmente el calor que de la resistencia recibe.

Las lámparas de incandescencia se han empleado para construir aparatos de calefacción domésticos y en las estufas de desecación o cultivos. Su uso, lejos de aumentar, parece que tiende a desaparecer.

Las resistencias metálico-cerámicas están formadas amasando y moldeando una mezcla de un cuerpo conductor reducido a polvo y una materia aisladora. Se comprende que variando las proporciones de la mezcla cambia la resistencia del producto obtenido.

Para obtener en estos hornos temperaturas superiores a  $1.000^{\circ}\text{C}$ ., se emplea el platino como resistencia.

De esta clase de hornos posee dos el Laboratorio Central de Ingenieros militares, uno de ellos de mufla y otro de tubo con *disposición* para operar con atmósferas determinadas.

Posteriormente se han construído hornos eléctricos en que la resistencia está formada por una masa granular de carbón. Con ellos las temperaturas que pueden obtenerse están limitadas solamente por la fusibilidad de los materiales refractarios que componen el horno. Los dos últimos hornos por nosotros adquiridos son de este tipo.

Hemos dispuesto los hornos eléctricos en una salita, habiendo reunido en un sencillo cuadro de distribución los interruptores, fusibles y aparatos de medida necesarios para su empleo.

La corriente procede de una batería de acumuladores, que puede proporcionárnosla hasta a 120 voltios. Generalmente, la tensión en las barras es de 110. Como solamente uno de los hornos tiene reóstato propio, para todos los demás empleamos una resistencia de lámparas de 100 bujías con filamento de carbón. Un voltímetro y un amperímetro, con su conmutador, y cinco interruptores bipolares con sus correspondientes fusibles, completan tan elemental cuadro, que no requiere descripción detallada.

Sí hemos de advertir que no hemos empleado estos aparatos de medida para el trabajo que nos ocupa, pues son de tipo industrial; únicamente nos servimos de ellos para las operaciones que no exigen precisión alguna.

*Horno Heraeus de mufla.*—La mufla tiene 220 mm. de largo, 130 milímetros de diámetro y 85 mm. de altura. La resistencia va aplicada exteriormente y cubierta con una pasta protectora. En este tipo de horno, en vez de emplear hilo o cinta de platino como resistencia, ha preferido el constructor fabricarla de una redcilla de este metal, con

malla muy fina. Recubre la mufla por completo, asegurando así una repartición de calor muy uniforme.

Debajo de la mufla, y formando la base del horno, está colocado el reóstato, que permite regular la temperatura alcanzada en un tiempo determinado. Necesita este horno un interruptor, pues el reóstato no tiene tope o botón aislador. Para evitar que una maniobra inadecuada del reóstato pueda producir la fusión de la malla de platino, tiene en uno de los costados un hilo testigo, que se enrojece por el paso de la corriente.

El manejo de este horno es tan sencillo que apenas merece explicarse. Corriendo la manivela del reóstato vamos aumentando la intensidad de la corriente, observando al mismo tiempo el hilo testigo. Cuando éste empieza a enrojarse se suspende el avance del reóstato. La elevación de temperatura va aumentando la resistencia de la malla de platino, con lo que disminuye la intensidad y el hilo testigo se enfría. Entonces podemos seguir avanzando el reóstato hasta que nuevamente el testigo se enrojezca. Debe, pues, proporcionarse la corriente de modo que dicho testigo no esté rojo, pero muy próximo a enrojarse. De este modo, a menos de una elevación repentina de la tensión en las barras, podemos estar seguros de la buena conservación de la mufla. La del horno Heraeus que nos ocupa, lleva más de cuatro años funcionando bastante, y será necesario sustituirla, no por deterioro de la resistencia de platino, sino porque la tierra refractaria va llenándose de grietas.

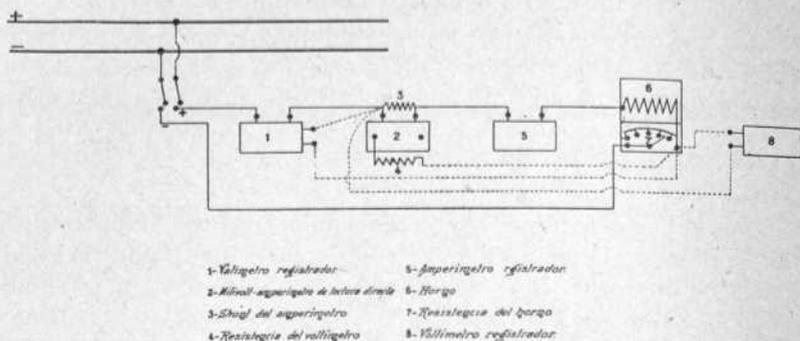
Hay que evitar poner los objetos fríos sobre la solera de la mufla cuando está al rojo; lo mejor es colocar sobre ella una placa refractaria y allí apoyar los crisoles, probetas, navéculas, etc.

El cambio de mufla, cuando una haya quedado inservible, es, por otra parte, operación breve y facilísima. Basta separar el frontal del horno, quitando los tornillos que le sujetan a las paredes laterales y extraer la mufla, después de haber desempalmado los hilos que llevan la corriente. Colocada la nueva se hace el empalme, siendo preferible soldarle.

Según la casa constructora, este horno para una temperatura de  $1.000^{\circ}$  C. consume una potencia de 1.540 vatios. La temperatura máxima que se puede alcanzar es de  $1.200^{\circ}$  C.

Para estudiar la marcha de este horno, que es uno de los más usados en los laboratorios, hemos dispuesto los aparatos como puede apreciarse en el esquema (*fig. 1.<sup>a</sup>*). El primero intercalado es un vatímetro registrador; a continuación un amperímetro de igual tipo; inme-

diatamente un voltamperímetro de precisión Hartmann Braun, de lectura directa con su *shunt* y, finalmente, un voltímetro registrador.

Fig. 1.<sup>a</sup>

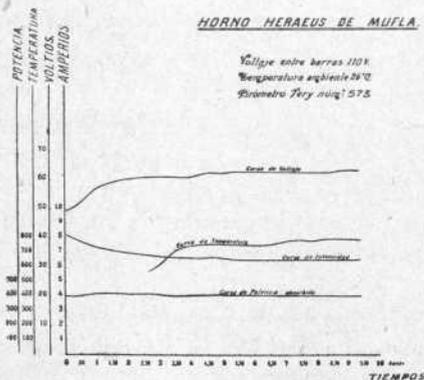
El voltaje lo hemos tomado excluyendo el absorbido por la parte de reóstato que esté intercalado, es decir, midiendo sólo el que corresponde a la resistencia útil del horno.

Las temperaturas han sido observadas con el pirómetro de radiación de Fery, núm. 573, comprobado entre 500 y 2.000° C. por el Conservatorio Nacional de Artes y Oficios de Francia.

Nº 1

HORNO HERAEUS DE MUFLA.

Voltaje entre barras 110 V.  
Temperatura ambiente 20° C.  
Pirómetro Fery núm. 573



tiempo	potencia	temperatura	potencia	temperatura
0	0,1	20	-	202
20	1,1	22	-	205
1	1,4	27	-	212
1,30	1,8	28	-	215
2	1,9	30	-	220
3,30	2,9	33	600	221
3	2,9	33	610	219
3,30	4,1	33	710	220
4	4,1	33	715	220
3,30	4,1	32,5	710	219
5	4,1	32,5	710	219
5,30	4,4	33	700	218
6	4,4	33	700	218
6,30	4,4	33	700	218
7	4,4	33	700	218
7,30	4,4	33	700	218
8	4,4	33	700	218
8,30	4,4	33	700	218
9	4,4	33,5	700	218
9,30	4,4	33,5	700	218

Fig. 2.<sup>a</sup>

Los grupos de curvas números 1 y 2 (figuras 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup>) nos dan la marcha del horno en las dos formas en que le hemos ensayado, con

la corriente mínima que puede suministrarse (siempre suponiendo 110 voltios en las barras), es decir, intercalando todo el reóstato, y con la marcha normal, variando la resistencia de modo que el hilo testigo esté comenzando a enrojecerse, pero no al rojo por completo.

Examinando las curvas núm. 1 vemos que la intensidad de la corriente ha variado durante las nueve horas treinta minutos que ha durado la experiencia entre 8,2 y 6,6 amperios, correspondiendo, naturalmente, la primera al momento de encenderse el horno, en que la resistencia de la malla de platino es mínima. El voltaje ha seguido una marcha inversa, empezando por la cifra 49 y terminando por 63,5. Ya

hemos indicado que este voltaje es el absorbido por la resistencia que forma la mufla; el restante hasta la tensión de barras es consumido en el reóstato. No llega, pues, el consumo de este horno en estas condiciones a  $1\frac{1}{2}$  kilovatio, oscilando entre 402 y 425 vatios.

El diagrama del vatímetro es, como se ve, sensiblemente una recta.

En las ocho horas treinta minutos primeras, la

temperatura ha llegado a 800° C., teniendo un aumento medio horario de unos 94°. Este aumento está muy lejos de ser constante, puesto

que en las tres primeras horas de funcionamiento la temperatura llegó a 610°, y en las cinco horas treinta minutos restantes no subió más que 200° escasamente.

La resistencia de la malla que forma el horno varía de 5,98 ohmios a 9,62, o sean 0,455 ohmios cada 100°.

La marcha del horno en las condiciones que vamos reseñando no es económica, puesto que para llegar a conservar la temperatura de 800°, hemos gastado 4 kilovatios-hora, que al precio de 0,3 pesetas hacen un gasto de 1,20 pesetas. El 40 por 100 aproximadamente de la corriente, con nuestra distribución a 110 voltios se consume en el reós-

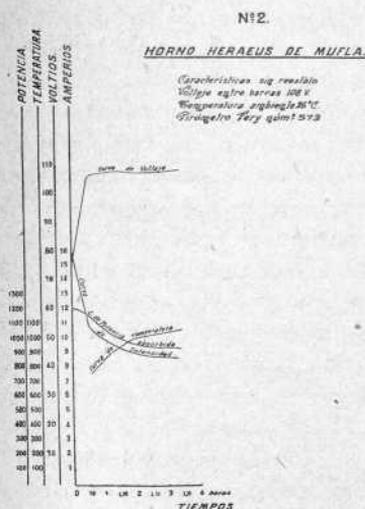


Fig. 3.<sup>a</sup>

horas	amperios	potencia	temperatura	temperatura
0	16	78	-	1218
30	11	106	740	1086
1	10	107	825	1070
1,30	8,4	107,8	895	1010
2	9	107	1005	903
2,50	8,8	107	1030	922
3	8,8	102,5	1050	926
3,30	8,7	108	1085	920
4	-	-	-	-

tato del horno, siendo, por lo tanto, completamente perdido para su rendimiento. Este gasto corresponde exclusivamente a la corriente absorbida por el horno; pero teniendo en cuenta la intensidad media y el voltaje en las barras, el consumo total es de unos 7.400 vatios-hora.

La potencia útil de 4.000 vatios se divide en dos partes: la primera corresponde a la energía gastada para alcanzar la temperatura de  $800^{\circ}$  y es de 3.585 vatios-hora. La conservación de esta temperatura exige unos 415 vatios. Siendo 60 voltios los que hay entre los terminales del horno, aproximadamente, y 110 la tensión de línea, casi otro tanto resulta perdido en el reóstato.

El grupo de curvas núm. 2 (*fig. 3.<sup>a</sup>*) se refiere a la marcha de este horno, haciendo pasar por él la máxima intensidad compatible con su buena conservación, es decir, manejando el reóstato de modo que el hilo testigo esté al rojo naciente, pero sin llegar a tomar un rojo intenso.

Fácilmente se aprecia la distinta forma de las curvas para todos los elementos determinados. En primer lugar, la experiencia no duró más que tres horas treinta minutos, pues al llegar a los  $1.000^{\circ}$  empezamos a oír algunos chasquidos en el horno y advertimos que una de las grietas de la mufla se ensanchaba sensiblemente. No teniendo otra de recambio, y no siendo fácil adquirirla en las actuales circunstancias, creímos prudente no prolongar la operación. Al empezarla, la intensidad era de 16 amperios y el voltaje de 76 voltios entre los hilos de entrada y salida de la mufla, esto es, dejando aparte la porción de reóstato intercalada. Claro es que con esta marcha, y siendo el calor desarrollado función del cuadrado de la intensidad, la resistencia de la malla sube rápidamente, así como la temperatura, que a los treinta minutos era ya de  $740^{\circ}$  C. El voltaje absorbido subió a 106 y la intensidad descendió a 11 amperios.

Desde este momento al final de la experiencia el voltaje sólo subió 2 unidades y la intensidad descendió 2,3 amperios. En el mismo tiempo, la temperatura aumentó  $325^{\circ}$ .

Vemos que con esta marcha el horno alcanzó en una hora treinta minutos, mayor temperatura que en el experimento anterior al cabo de las nueve horas treinta minutos. El aumento medio ha sido de  $304^{\circ}$  centígrados hora.

Durante las tres horas treinta minutos el horno ha consumido 3,06 kilovatios hora, es decir, unos 27 céntimos por hora.

Como hemos dicho en el caso anterior, este gasto es el correspondiente a la resistencia del horno, que es la realmente útil. Pero este gasto útil es ahora casi igual al total, puesto que el voltaje absorbido

a partir de los primeros momentos oscila entre 106 y 108; es decir, casi la tensión entre barras. En la primera experiencia perdimos en el reóstato el 40 por 100 de la potencia gastada.

*Horno Heraeus de tubo.*—El modelo que adquirió el laboratorio tiene un tubo de calefacción de 50 mm. de diámetro interior y 60 centímetros de longitud. Sobre él está arrollada una doble hélice de cinta de platino de unos 2 cm. de anchura y 2 centésimas de milímetro de espesor, próximamente. El tubo, con su resistencia, se coloca en el interior de otro también de tierra refractaria, en el que están los casquillos de toma de corriente. El conjunto se apoya en un soporte hecho de pletina de hierro.

Los primeros hornos de esta clase tenían como resistencia alambre de platino en vez de cinta.

La cinta se adapta más al tubo que el hilo, presentando mayor contacto por unidad de sección. La transmisión de calor se facilita, favoreciéndose así la mejor conservación del horno. De este mismo tipo se construyen modelos variados; unos montados sobre un eje perpendicular al del tubo, alrededor del cual pueden bascular, facilitándose así la rápida extracción de las barras de acero en los estudios de temple. Otros son verticales, pudiendo correr a lo largo de unas guías.

El que nos ocupa es fijo y tiene un tubo accesorio para ensayos en atmósferas de gases determinados.

Las características de este horno que figuran en los catálogos son 33 amperios, con una tensión de 110 voltios y una temperatura máxima de 1.300°.

No se le ha montado, sin embargo, directamente sobre la línea, sino colocándole en serie con una resistencia de lámparas de carbón de 100 bujías. Esta precaución ha sido necesaria, pues una vez por descuido, y últimamente tratando de darle la mayor intensidad posible, se ha disminuído y aun suprimido la resistencia adicional, y las dos veces se ha fundido la cinta de platino.

De este horno presentamos también dos grupos de curvas correspondientes a dos experiencias: la primera intercalando mayor resistencia que la segunda.

En el experimento correspondiente al grupo de curvas núm. 3, la resistencia adicional fué la misma durante toda la operación: 15 lámparas de 100 bujías colocadas todas en derivación.

En las curvas y cuadro que se acompañan (*fig. 4.<sup>a</sup>*), vemos que la intensidad que en un principio alcanza el valor de 20 amperios, al cabo de una hora, tiempo suficiente para que la temperatura se eleve

a 500°, desciende a 14 amperios. En las seis restantes la variación total es sólo de 1 amperio.

La diferencia de potencial es en un principio de 76 voltios y alcanza al final la cifra de 61. La variación importante, lo mismo que ocurre con la intensidad, se verifica en la primera hora de funcionamiento.

Se observa que, tanto la intensidad como el voltaje, tienen algunos valores que no concuerdan con la serie descendente, para la primera, y ascendente para el segundo. No cambiando nosotros la resistencia introducida y calentándose ésta progresivamente, no se explican bien las cifras 14,4 amperios y 61 voltios que corresponden a una hora

treinta minutos. Como, respecto a la intensidad, es éste el único valor que altera la marcha de la curva, pudiera achacarse a un error de lectura del anterior, mas no debemos hacerlo así, porque

el gráfico acusa también esta anomalía.

Con los valores del voltaje, ésta se repite en algunos otros momentos.

Nos parece más lógico atribuir las a ligeras

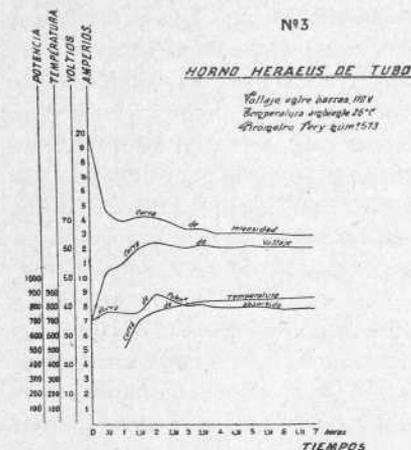


Fig. 4.<sup>a</sup>

hora	amperios	voltaje	potencia	temperatura
0	20	86	-	180
30	14,8	83	-	780
1	14	55,5	500	777
1,30	14,2	61	700	878
2	14,3	63	780	877
2,30	14	62	810	868
3	13,8	61	850	855
3,30	13,5	62	850	877
4	13,2	61	855	805
4,30	13,2	61	900	805
5	13,2	61,5	895	878
5,30	13,2	61	885	805
6	13,1	61	875	799
6,30	13	61	875	799
7	13	61	875	799

variaciones de la tensión en las barras, por el arranque y parada de motores para distintas operaciones del laboratorio.

La temperatura llega hasta 875° al cabo de las seis horas; en este punto parece que se establece ya el equilibrio entre el calor que recibe y el perdido, pues durante una hora más no subió un solo grado. Dimos por terminada la experiencia. El aumento por hora es de unos 146°, con una potencia gastada de 4.800 vatios-hora. La conservación de esta temperatura exige un gasto de 800 vatios próximamente.

Estos valores se refieren, como en los casos anteriores, a la potencia utilizada en el horno. Con la tensión de 110 voltios, debemos

contar casi con una cantidad doble por lo absorbido en la resistencia de lámparas. Cuesta, por tanto, llegar a 800° C., 1,45 pesetas, y la marcha del horno a esta temperatura unos 25 céntimos por hora. No hace falta insistir en que estas cifras se refieren el gasto útil del horno; si añadimos el del réostato, hay casi que duplicar las cantidades.

La resistencia de la cinta de platino varía entre los límites de 4,7 ohmios y 1,80 ohmios; cada 100° aumenta, por lo tanto, 0,36 ohmios.

En la segunda experiencia con este horno (grupo de curvas número 4, *fig. 5.<sup>a</sup>*), hemos aumentado el número de lámparas progresivamente, es decir, disminuído la resistencia. La forma tan irregular de las tres curvas superiores se explica por las variaciones rápidas de la resistencia, debido a no

disminuir ésta de un modo continuo, sino por grupos de cinco lámparas.

La intensidad media ha sido de 15,5 amperios próximamente, es decir, poco más que en el caso anterior y, sin

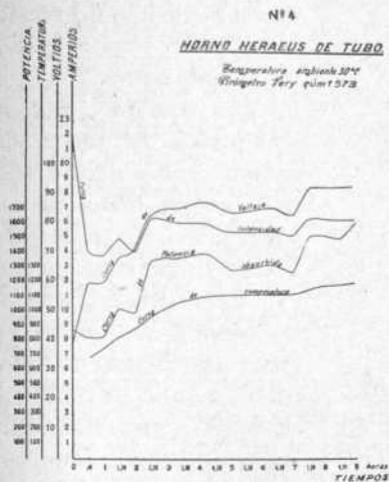


Fig. 5.<sup>a</sup>

embargo, las temperaturas obtenidas son mucho más altas y más rápidamente alcanzadas. En cambio, los voltajes absorbidos por el horno son mucho mayores, por el aumento de resistencia de la cinta debido a las temperaturas alcanzadas. Esta resistencia ha tenido como valores extremos 1,82 y 5,74 ohmios, o sea un aumento de 0,33 ohmios por 100° C.

La elevación de temperatura es en este caso bastante rápida, puesto que treinta minutos después de haberse encendido llega ya a 700°, y antes de las tres horas, a los 1.000°. En cambio, en las seis horas restantes sólo ha aumentado 165°.

Al final de la operación, en la última hora, no subió más que 10°, a pesar de disminuir la resistencia exterior cuanto nos era posible.

Grupos	Resistencia	Vóltaje	Temperatura	Resistencia	Temperatura
0	22	40	-	880	
1	12	50,5	856	888	
2	12,5	50,5	910	921	
3	14,5	50,5	930	1000	
4	14	77	985	104	
5	16,3	82,8	940	1046	
6	16,2	86	1025	1077	
7	16	86,4	1005	1069	
8	16	87	1030	1082	
9	16,3	86,8	1110	1087	
10	16,4	86	1115	1088	
11	16,4	86	1115	1088	
12	15,4	86	1090	1100	
13	15,3	86	1125	1100	
14	16,2	88	1120	1082	
15	16,4	82,8	1150	1007	
16	16,2	82,8	1175	1008	
17	16,2	92,6	1180	1009	
18	16,2	93	1185	1007	

Para llegar a esta temperatura de  $1.185^{\circ}$ , hemos gastado 11,4 kilovatios-hora, o sean, al precio que venimos asignándole 3,50 pesetas. Contando la energía gastada en la resistencia adicional, tendríamos un gasto de 5 pesetas escasas.

Con objeto de poder aumentar la temperatura, suprimimos la resistencia adicional poniendo el horno sobre la línea a 110 voltios. La cinta de platino se fundió rápidamente.

*Horno Seger.*—El horno de que vamos a ocuparnos tiene como resistencia una masa de granos de carbón. De los dos ejemplares que posee el Laboratorio de Ingenieros sólo nos ocuparemos del más modernamente adquirido, que

está mejor estudiado por varios conceptos.

Los croquis que se acompañan, y que representan cortes de los hornos por un plano diametral, muestran claramente la disposición de ambos (*fig. 6.<sup>a</sup>*). En el interior de un cilindro hueco de arcilla refractaria se coloca el tubo que constituye la cámara del horno. El espacio intermedio se rellena con la arena de carbón.

Los cables conductores de la corriente terminan en unos electrodos tronco-cónicos de hierro, que se meten dentro de la masa de carbón, cuyo espesor ha de atravesar. El contacto defectuoso que hacen los granos de carbón forma una resistencia, que se calienta por el paso de la corriente. No puede imaginarse nada más sencillo ni más barato, pues sólo entran en la composición del horno arcilla y polvo de carbón.

Por la sección meridiana se ve que la forma de doble T que presenta la masa aisladora hace que la zona de resistencia y, por tanto, de calentamiento máximo, estén en el medio de su altura, cosa que no ocurre con el primer horno adquirido, como fácilmente se aprecia. Este, que es cerrado por su parte inferior, no presenta facilidad alguna para introducir y, sobre todo, sacar los materiales que se someten al calor.

Con objeto de poder aumentar la temperatura, suprimimos la resistencia adicional poniendo el horno sobre la línea a 110 voltios. La cinta de platino se fundió rápidamente.

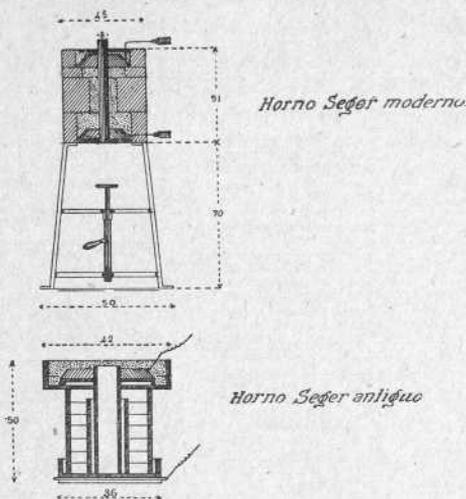


Fig. 6.<sup>a</sup>

Cuando la temperatura se eleva mucho, el tubo se llena de vapores, ya procedentes del cuerpo que se volatiliza, ya de la resistencia, que siempre se quema algo. En estas condiciones no es posible observar lo que pasa en el interior por estar el tubo lleno de humos; y sacar los crisoles o probetas con una pinza, no deja de presentar dificultades, teniendo en cuenta la escasa anchura del tubo.

Finalmente, como los anillos refractarios están rodeados de una cubierta de cartón de amianto, sujeta con unos flejes, por las juntas sale continuamente arena de carbón y el conjunto presenta muy poca solidez.

Todos estos inconvenientes se han evitado en el segundo tipo, pues por estar forrado de chapa, sujeta con robloncillos, es muy sólido, y siendo abierto por sus dos extremos y montado sobre un trípode metálico, el mismo calor crea un tiro, que despeja bastante la atmósfera del interior y permite, con un espejo, examinar lo que pasa en el tubo.

La maniobra de meter y sacar los objetos es facilísima, pues el trípode tiene en su centro un soporte móvil a lo largo de un tubo que le sirve de guía. Sobre el soporte, cuando está fuera del horno, se coloca el crisol, probeta, cono de Seger, etc., introduciéndoles con comodidad y pudiendo fácilmente ser examinados durante la operación.

No creemos necesario, con el croquis acotado y lo últimamente expuesto, hacer una descripción detallada de este horno. Inferiormente llevará una placa de amianto con un orificio central para alojar la base del tubo. Encima hay un disco de chamota refractaria y en la parte superior otro igualmente dispuesto. La gran sección que tiene la resistencia en ambos extremos tiene por objeto preservar los electrodos de un excesivo calentamiento y asegurar así su conservación.

Este horno funciona de modo opuesto a los de resistencia de platino. En efecto; vemos que en éstos la intensidad de la corriente va disminuyendo por efecto del calentamiento y consiguiente aumento de la resistencia. En el horno de arena de carbón sucede lo contrario: la intensidad aumenta rápidamente según el horno se va calentando, siendo necesario vigilar el amperímetro para no estropearle. Vemos, pues, que así como en los hornos de resistencia de platino, esta misma, al limitar la intensidad, fija la temperatura normal máxima que puede alcanzarse, llegando si aumentamos la tensión a fundir dicha resistencia, en el horno de carbón, parece que la temperatura que puede alcanzarse (puesto que la intensidad crece), no tiene otra limitación que

el ablandamiento de la chamota que forma el horno y, por lo tanto, su destrucción.

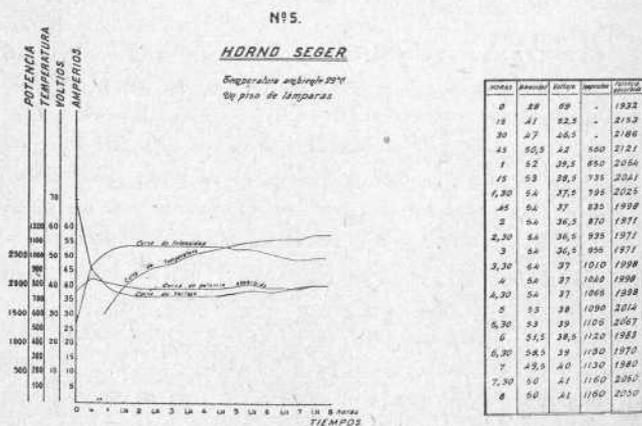
No hemos encontrado publicadas instrucciones para el manejo de este horno; en un catálogo hay una somera descripción y sólo indica, respecto de la corriente eléctrica, que debe ser de 80 voltios y 136 amperios, debiendo emplearse un reóstato cuando sea otro el régimen de corriente.

La chamota con que está formado el tubo resiste, según el mismo catálogo, a la temperatura del Seger, núm. 40.

En nuestros trabajos, como más adelante se detallará, no hemos visto comprobados estos asertos. Respecto al régimen de corriente, pueden explicarse las diferencias que hemos encontrado por el distinto asiento que puede darse a la arena de carbón y que no es fácil fijar de un modo preciso.

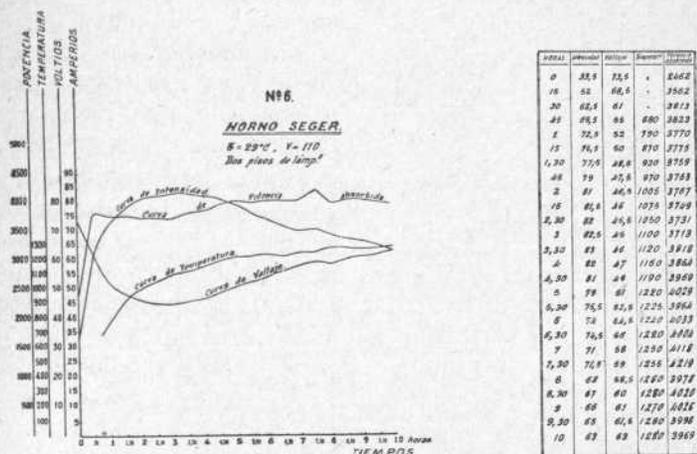
Presentamos en esta Nota los resultados correspondientes a tres pruebas realizadas con este horno, intercalando distintas resistencias (grupos números 5, 6 y 7; *figuras 7.<sup>a</sup>, 8.<sup>a</sup> y 9.<sup>a</sup>*). Finalmente, le hemos ensayado también sin resistencia alguna.

La que tenemos instalada en serie ya hemos dicho se compone de 90 lámparas de 100 bujías montadas todas en derivación. El primer

Fig. 7.<sup>a</sup>

ensayo se hizo colocando en el circuito la tercera parte de la resistencia, o sean 30 lámparas. Al encender el horno, el número de amperios, como se ve en el grupo de curvas núm. 5, es de 28 y el voltaje en

los electrodos del horno, 69 voltios. Siendo 110 el de la línea, la aplicación de la fórmula elemental  $I = \frac{E}{R+r}$ , en que  $R$  y  $r$  son las resistencias del horno y de las lámparas, respectivamente, nos da el valor de las mismas. El primero tiene una resistencia de 2,47 ohmios y las segundas 1,46 ohmios, correspondiendo ambos al momento inicial de la operación. En la curva se aprecia el rápido aumento de la intensidad, que al cabo de una hora llega a valer 52 amperios, es decir,

Fig. 8.<sup>a</sup>

casi el doble. El voltaje absorbido por el horno desciende también mucho. A partir de este momento, el régimen varía poco, puesto que la intensidad sólo sube dos amperios en la primera media hora siguiente, quedando luego constante durante tres horas, al cabo de las cuales comienza a descender.

La temperatura ha llegado a 1.160°, o sea un calentamiento medio de 145° por hora. Sin embargo, hay que notar que en poco más de tres horas llegó a 1.000° y en las cinco restantes, en cambio, el aumento fué muy pequeño. La resistencia varió entre los límites de 2,47 y 0,67 ohmios. Debemos hacer notar que este mínimo valor no corresponde al final de la prueba, como parecía natural, sino a las tres horas de funcionamiento. Pasado este momento, la resistencia vuelve a aumentar.

La potencia absorbida por el horno durante toda la experiencia ha

sido de 16 kilovatios-hora, aproximadamente; es decir, unas 5 pesetas, al precio que al fluido eléctrico venimos asignando. Como el voltaje medio absorbido por el horno ha sido unos 40 voltios, resultan gastados en la resistencia unos 28 kilovatios-hora, es decir, el 175 por 100 de la energía realmente utilizada.

Vemos que con este régimen de funcionamiento el horno tiene un mediano rendimiento eléctrico. No podemos hacer una comparación exacta del coste de los tres hornos, para llegar a una misma temperatura, por no ser iguales sus dimensiones.

Sin embargo, el volumen útil de caldeo viene a ser casi igual en el de cinta de platino que en el Seger, y para alcanzar en el primero  $1.185^{\circ}$  no hemos necesitado más que 11,4

kilovatios-hora, es decir, 4,6 kilovatios menos que en éste. El de mayor rendimiento bajo este aspecto parece ser el de mufla, puesto que a la temperatura de  $1.065^{\circ}$ , por ejemplo, gasta 940 vatios; el de tubo con cinta de platino, 1.369, y

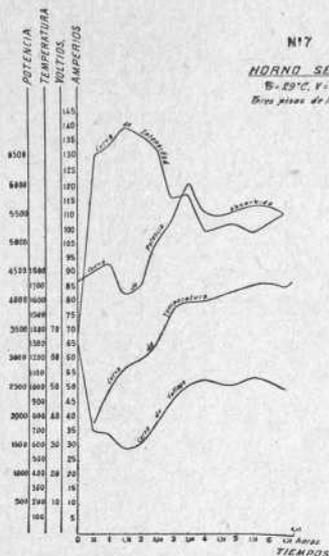


Fig. 9.<sup>a</sup>

Horas	Temperatura	Potencia	Amperios	Watts
0	27,5	65	-	4200
10	121,5	62	-	6100
20	135,5	70	740	2640
30	150,5	71,0	815	3200
4	134	85	895	3600
10	120	90,0	1020	3540
1,30	100,0	98,0	1100	3700
20	100	293,0	1150	3100
2	100	31	1240	3470
10	111	31	1240	3750
1,30	123	32	1230	4010
35	121	66,0	1230	3880
3	119,0	67	1180	3730
3,30	117,0	61,0	1000	3000
4	100	63,0	1060	3060
4,30	100	32	1450	3510
5	107,0	36,0	1480	3530
5,30	100	50,0	1730	3640
6	107	53	1750	3670
6,30	106,0	50	1720	3580
6,45	-	-	1770	-

el de carbón, 1.998 vatios. Estudiando los valores de la potencia gastada para otros momentos llegamos a la misma consecuencia.

No hemos de deducir de esto que el horno de carbón sea inferior al de Heraeus de mufla, ni mucho menos. Sólo hacemos la comparación en este caso particular de la resistencia adicional aplicada.

El grupo de curvas núm. 6 explica la marcha de este horno poniendo en circuito doble número de lámparas, y la simple inspección de sus valores nos indica que la marcha del horno con este régimen tampoco es económica. Refiriéndonos solamente a las ocho primeras horas de trabajo, puesto que en las dos restantes la temperatura no ha subido un solo grado, e integrando la superficie de trabajo tenemos un

valor de 31 kilovatios-hora, es decir, casi exactamente el doble que en el caso anterior, y sólo hemos conseguido aumentar la temperatura en 120°. Calculando la resistencia del horno y la de las lámparas para los valores iniciales de la intensidad y voltaje, resulta un total de 3,28 ohmios; es decir, que no es la mitad de la anterior, lo cual explica que los amperios que permite pasar no sean doble que en aquel caso. Como no podía menos de suceder, la relación de resistencias en las dos pruebas  $\frac{3,94}{3,28}$  es la misma que la de intensidades  $\frac{33,5}{28}$ .

Aquí también observamos el mismo fenómeno que hicimos notar en el ensayo anterior. La intensidad va aumentando, mas al cabo de tres horas y media queda estacionaria y luego toma una marcha descendente. Claro es que lo contrario va ocurriendo con el voltaje.

Siendo constante la tensión en las barras, el aumento de resistencia del horno (que sólo de esto puede provenir el hecho citado), hay que atribuirlo a la transformación que va experimentando la arena de carbón. A partir de 1.000°, cuando se destapa el horno surge una nube de vapores blanquecinos mezclados con algo de humo; según el tiempo va pasando, aumentan y llegan a convertirse en fuertes llamaradas. Además, continuamente salen ya estos humos por la superficie de contacto entre el tubo y el carbón. Éste va quemándose y van aumentando los huecos entre los granos y disminuyendo, por lo tanto, la sección de paso de la corriente. No cabe duda, además, de que el tubo a estas temperaturas se hace permeable a los productos de la combustión.

Pudiera evitarse esto si el carbón de la parte superior descendiese por gravedad para llenar los huecos que van quedando; pero esto no ocurre más que parcialmente y en las primeras horas, pues según hemos observado al desmontar el horno, la resistencia ha sufrido una especie de destilación y en la zona más estrecha se ha coquificado, pegándose a las paredes del horno e impidiendo así el descenso del resto.

Hay que advertir que antes de cada prueba removíamos con una espátula los granos de carbón, procurando darles un asiento uniforme, mas no es fácil llegar por este medio a la parte más estrecha del horno.

Continuando los ensayos con este horno, le pusimos en marcha, intercalando las 90 lámparas de 100 bujías, es decir, reduciendo todo lo que podíamos la resistencia adicional. La intensidad es en el primer momento de 27 amperios y la tensión absorbida 87,5 voltios,

llegando a las tres horas de funcionamiento a 88,5 amperios y 61 voltios. La temperatura en este momento es de  $1.280^{\circ}$ . Después, la intensidad fué decreciendo y la tensión aumentando, lo mismo que la temperatura, aunque ésta relativamente poco, pues no pasó de  $1.360^{\circ}$ . Estos resultados, así como las fuertes llamaradas que salían del horno, nos hicieron pensar que su funcionamiento no era normal.

Le apagamos, y después de enfriado le desmontamos. Al hacerlo, encontramos el tubo interior destruído en su parte central, con muchos agujeros pequeñísimos y presentando un aspecto como de piedra pómez. Alrededor tenía un collar de carbón endurecido y muy resistente. La parte exterior del horno tenía también una capa fuerte de carbón tan adherida, que hubo que picar para poder separarla. Algo de la arcilla refractaria se había alterado, no presentándose ya la superficie lisa, sino con algunas oquedades.

Este efecto no puede ser producido por la temperatura de  $1.360^{\circ}$ , a la que resisten las arcillas refractarias corrientes. La casa constructora del horno afirma, por otra parte, que el tubo interior resiste como el cono Seger número 40. Creemos que hay que atribuirlo a la continuidad de funcionamiento, puesto que las sesiones han sido muy largas. Esta acción continuada sobre las materias que no son especies químicas definidas, ni tienen un punto fijo de fusión, sino que van ablandándose, es muy importante. Los constructores de los conos de Seger hacen esta advertencia refiriéndose a las equivalencias en grados de los distintos números que se insertan en los libros y catálogos de pirometría. Es decir, que un cono número 36, por ejemplo, que corresponde a  $1.780^{\circ}$ , puede doblarse a temperatura inferior, si la acción del calor es muy prolongada.

Limpio el horno sustituímos el tubo por otro de repuesto (que no era precisamente igual al deteriorado, pero también muy refractario), y rellenamos con carbón el espacio intermedio, procurando un igual asiento. En el soporte colocamos sobre un crisol de los enviados con el horno, tres conos de Seger núm. 005, 10 y 36, correspondientes a 1.000, 1.300 y  $1.780^{\circ}$ . Volvimos a encender en las mismas condiciones que anteriormente, es decir, con la mínima resistencia, y la intensidad inicial fué, como puede verse en el grupo de curvas núm. 7, de 67,5 amperios. A la media hora de encendido, la temperatura era ya de  $750^{\circ}$ , llegando a 1.000 al cabo de una hora. La intensidad máxima que se alcanzó fué de 141 amperios, siendo la tensión correspondiente de 29,5 voltios. La intensidad empezó a decrecer, efecto, como después vimos, de empezarse a aglomerar el carbón y formarse huecos

que dificultaban el paso de la corriente. La temperatura subió a  $1.770^{\circ}$ . En este momento empezó el horno a dar llamas, y como la temperatura no subía, dimos por terminada la prueba.

A los 1.000 y 1.300<sup>o</sup> examinamos los Seger correspondientes, que se doblaron con un error máximo de siete minutos, puesto que las lecturas se hacían cada 15 minutos. El núm. 36, equivalente a  $1.780^{\circ}$ , tenía al examinarle el vértice inclinado; mas no se puede dar mucha fe a esta observación, porque el crisol que le servía de soporte se derretía en aquellos momentos, y el cono apareció, al sacarle, acostado sobre la masa refractaria fundida.

Las lecturas del pirómetro en estos últimos momentos presentaban alguna dificultad, pues, enfocado sobre la base del crisol, al fundirse éste perdía su forma plana y había que rectificar el foco. Al retirar el crisol vimos que también el tubo refractario sobre que se apoyaba se había fundido, apoyándose la masa derretida sobre la pared del horno. El tubo de éste sufrió también mucho, presentando agujeros y una zona fundida.

La energía gastada en las seis horas y media que duró la prueba fué de 34 kilovatios-hora, representando un coste de 10,20 pesetas, dato que se refiere exclusivamente, como tantas veces hemos indicado, al horno, sin contar lo que se gasta en la resistencia adicional que, como se ve observando los voltajes, es mucho mayor.

La resistencia del horno varió entre los límites extremos 0,96 y 0,22 ohmios, valor que alcanzó a las dos horas y quince minutos.

Después de frío el horno quisimos repetir la prueba anterior, encontrando que la corriente no pasaba, pues el amperímetro apenas marcaba dos décimas de amperio. Esto es efecto, como ya hemos señalado, de los huecos que quedan por debajo de la capa de carbón endurecida. Es, pues, necesario, cada vez que con este horno se trabaje en sesiones largas, renovar la resistencia para que marche en las debidas condiciones.

También podemos deducir de estas pruebas que los tubos del horno que, según la casa constructora, resisten como el cono 40, no pueden emplearse para estas temperaturas, o por lo menos no las soportan durante mucho tiempo, pues los dos se han inutilizado al llegar a la del cono núm. 36. Pudiera objetarse que el primer tubo llevaba mucho tiempo trabajando y el segundo no era de igual procedencia, pero no hay que olvidar que los crisoles enviados con el horno se funden en la primera prueba.

Finalmente, y antes de terminar con este horno, quisimos ensa-

yarle con el régimen de corriente indicado en el catálogo a que nos hemos referido, es decir, con 80 voltios. Desconectados de la batería de acumuladores los elementos necesarios, dejamos dicha tensión en las barras, poniendo el horno directamente sobre ellas sin resistencia alguna. Antes de un cuarto de hora hubimos de suspender la operación, pues la intensidad que en el momento de encenderle era inferior a los 136 amperios que el catálogo indica, pasó rápidamente esta cifra, y antes de los diez minutos estaba en los 140 amperios. Como la tendencia a subir era grande, juzgamos peligrosa la marcha para la buena conservación del horno y le apagamos.

*Horno de arco.*—Muy interesantes son los trabajos que pueden llevarse a cabo con este aparato, llamado a descubrir muy amplios horizontes en la química mineral, mas para el objeto que nos proponemos al redactar esta Nota apenas tiene margen utilizable. Con sólo diez amperios, el cono Seger núm. 42, es decir, el más resistente de cuantos se fabrican, se derrite como la cera en unos instantes y no hay que hablar de que los pirómetros eléctricos son inútiles para la medición de estas temperaturas. Por estas razones no hacemos su estudio detallado.

\*  
\* \*

Teniendo en cuenta las pruebas que hemos reseñado y el resultado que en la práctica corriente del Laboratorio hemos visto, creemos que el uso de estos hornos irá generalizándose rápidamente. Las ventajas de su cómodo manejo y facilísima regulación de la temperatura son inapreciables. Además evitan las constantes precauciones que hay que tomar para que los materiales sometidos a la acción del calor no sufran la acción de los productos de la combustión del gas, carbón, acetileno, etc., etc.

No hay que olvidar la cuestión de precio, aunque en un laboratorio no tiene la misma importancia que en la industria. En una de las noticias relativas al horno de mufla, publicadas por la casa Poulenc Frères, se afirma que para muflas de iguales dimensiones, y suponiendo que los precios del metro cúbico de gas y del kilovatio-hora sean de 0,20 y 0,42 pesetas, respectivamente, el precio resulta igualado para los dos sistemas, pudiéndose, con el eléctrico, obtener temperaturas 200° más altas.

Esta afirmación, bien natural, tratándose de hacer la propaganda de un tipo de horno, necesita, probablemente, comprobarse, y sobre

todo aclarar a qué tipo de horno de gas se refiere, composición y presión del mismo, marcha con aire a la presión ordinaria o a mayores presiones, etc., etc.

Juzgando nosotros de interés este punto, pensamos realizar una serie de observaciones con dos hornos Perrot de mufla y de tubo, trabajando con gas y aire a distintas presiones. La primera se efectuó con gas a 40 mm. de agua y aire a la presión ordinaria.

No van incluídas en estos modestos apuntes, porque antes de terminarlas y comprobarlas recibió su autor orden de incorporarse a prestar sus servicios en Marruecos. Forzoso es, pues, un paréntesis, sin responder de cuándo podremos continuar.

Otros dos puntos que pensábamos tratar y que, por la imperiosa razón antedicha, hemos de dejar en blanco, son la comparación de una serie completa de conos Seger, con las indicaciones del pirómetro de Fery y la comprobación del aserto que en libros y catálogos se encuentra, de que las indicaciones de este aparato son independientes de su distancia al objeto observado, siempre que su imagen cubra el elemento sensible que está colocado en el fondo del espejo cóncavo.

Modernamente hemos leído la descripción de un tipo de pirómetro Fery que no tiene disposición para enfocar la imagen del objeto apuntado; es decir, que siempre está en foco, sea cualquiera la distancia, dentro de ciertos límites.

Algunas veces hemos notado también ciertas anomalías. Por ejemplo, la temperatura máxima marcada no corresponde a la perfecta coincidencia de las dos medias imágenes en el campo del antejo.

Señalamos estos puntos en espera de que cualquiera de nuestros colegas, mejor preparados científicamente que nosotros, aborde su estudio, que presenta bastante interés.

---



EMPLEO  
DE  
ALGUNOS MÉTODOS MODERNOS DE ENSAYO  
EN LA RECEPCIÓN DE HIERROS Y ACEROS

POR  
D. DOMINGO MENDIZÁBAL  
INGENIERO DE CAMINOS

(Sesión del 19 de Octubre de 1915).

**Consideraciones generales.**

Los pliegos de condiciones generalmente empleados en la recepción de hierros y aceros, lo mismo los correspondientes a carriles que los referentes a elementos de construcción, máquinas, etc., conservan la misma estructura y disposición general desde hace buen número de años, habiéndose únicamente modificado en algunos, los coeficientes en ellos exigidos, según variaban las condiciones de trabajo de los materiales metálicos, pero conservándose invariables, como antes se ha indicado, el número y clase de ensayos prescritos, como si respondieran a la forma de trabajo de los mentados materiales.

Hace ya algunos años se han dado a conocer nuevos procedimientos para el ensayo de los materiales metálicos, métodos que, hasta ahora, no habían pasado, en realidad, de constituir experiencias y ensayos de laboratorio; pero por el mucho estudio que de ellos se ha hecho, pueden pasar a la categoría de ensayos prácticos, muy adecuados, por lo demás, para dar a conocer las propiedades que dichos materiales deben poseer.

Considero, pues, de oportunidad estudiar aquéllos con objeto de deducir si es o no conveniente su inclusión en los «Pliegos de condiciones», bien en substitución de algunos de los ensayos actualmente prescritos o adicionándolos para obtener datos más completos, refe-

rentes a sus propiedades, no olvidando, sin embargo, que los mentados «Pliegos» no deben recargarse de condiciones y ensayos en excesivo número, por resultar expuesto a que si aquéllas no están perfectamente estudiadas, resulten en algún caso hasta contradictorias.

La presente Nota constituye una recopilación de los trabajos que de un modo más completo y adecuado tratan de estos ensayos, desde que fueron dados a conocer por sus autores, no habiendo en esta parte de la misma nada original por parte del autor.

Después de esta recopilación, se relacionan y contrastan unos con otros trabajos y opiniones; tratando de hacer desaparecer las más aparentes que reales contradicciones que resultan, se deducen consecuencias de las afirmaciones sentadas, y finalmente, en forma de conclusiones, se concretan las proposiciones que el autor tiene la honra de someter al Congreso para su discusión y examen.

### **Resistencia de los materiales.**

Sometidos los elementos metálicos de una construcción cualquiera a la acción de las fuerzas exteriores, deben trabajar aquéllos en tales condiciones que no varíen sensiblemente de forma; es decir, que no haya variaciones apreciables de situación de sus diversas partes, o sea que deben producirse como si fuesen completamente rígidos.

Se sabe que en la Naturaleza no existen cuerpos perfectamente rígidos, puesto que los cuerpos conocidos con aquel nombre tienen todas sus moléculas en movimiento, llamándose cuerpo resistente aquél que no pierde su forma exterior sino que ofrece resistencia suficiente a los esfuerzos que tienden a modificarla.

Ciertos cuerpos trabajan de modo que su forma primitiva experimenta modificaciones, para volver a aquélla tan pronto cesen los esfuerzos exteriores que produjeron aquella deformación.

Esta propiedad (*elasticidad*) es indispensable la posean todos los materiales metálicos al mismo tiempo que la *resistencia* precisa para su existencia.

La *dureza* es otra de las propiedades que los materiales de construcción deben poseer, sobre todo aquéllos que por la clase de trabajo a que están sometidos sufren frecuentes e importantes desgastes por rozamientos repetidos.

La *tenacidad* (*fragilidad*) debe igualmente ser muy tenida en cuen-

ta, sobre todo en aquellos materiales que están sometidos a esfuerzos que se producen rápidamente, como vibraciones, choques, etc.

Estas propiedades de los materiales es indispensable comprobarlas antes de su empleo en obra, construcción, máquinas, etc., y para ello se establecen los correspondientes «Pliegos de condiciones», en los que se prescriben los ensayos necesarios para ello.

Para comprobar la *resistencia* y *elasticidad* se verifican los ensayos de *tracción*, *compresión*, *flexión*, *torsión*, *corte*, etc., según el modo que los materiales deben trabajar.

Tanto para determinación de la *tenacidad* y *fragilidad*, como para hacer trabajar los materiales tal y como en la práctica tienen que producirse, se ha establecido el ensayo al *choque*, el que no falta en ninguno de los actuales «Pliegos de condiciones», sobre todo en los que han de ser usados en ferrocarriles, por la serie de esfuerzos dinámicos a que están sometidos.

Respecto a la *dureza* poco o nada hay establecido en los actuales «Pliegos», y éste es precisamente el punto que deseo tratar, con objeto de lograr se salven las deficiencias existentes y no se olvide propiedad tan esencial en las aplicaciones de los materiales.

Los nuevos ensayos a que en el principio de esta Nota se hace alusión se refieren a ésta tan interesante propiedad, detallándose lo suficiente en las dos partes de que consta la misma.

Los ensayos mecánicos hoy establecidos los considero acertadamente dispuestos, y únicamente al terminar la exposición y estudio de los nuevos ensayos, se dirá lo pertinente respecto a la posible sustitución de uno de aquéllos por alguno de los nuevos que se proponen.

### Concepto de dureza.

La *dureza* de los materiales es una propiedad que constantemente está entrando en juego al clasificar, dividir, definir, etc., aquéllos.

Los constructores, proyectistas, mineralogistas, etc., tienen múltiples ocasiones de apreciar esta propiedad.

Parecía natural que su concepto, su definición, estuviesen completamente determinados y, sin embargo, nada más lejos de ello; existe una verdadera confusión acerca de este punto, apenas hay una definición concreta y precisa de dicha propiedad.

La razón principal de esta indeterminación es la casi natural e intuitiva tendencia de relacionar y unir íntimamente la dureza a las de-

más propiedades de los materiales, la mayor parte de las cuales están bien determinadas y precisas.

Generalmente se expone el grado de dureza por el de estas propiedades.

Esta confusión es motivo de que indistintamente se usen en ocasiones palabras y conceptos que con significados completamente distintos se pretende que expresen lo mismo, dando así ocasión a numerosos errores.

*Definición de dureza.*—La definición más comúnmente admitida y más generalmente empleada es la siguiente:

«*La dureza en la resistencia que un cuerpo opone a la penetración de otro más duro.*»

*Graduación de la dureza.*—Existen varias escalas de dureza, es decir, orden de colocación de diversos cuerpos con relación a la posibilidad de ser rayados por otros cuya dureza se supone conocida.

Los mineralogistas emplean especialmente la muy conocida escala de Mohs, que comienza en el *talco* y termina en el *diamante*; esta escala ha sido completada por Lemnis.

La disposición de esta escala tiene lógica razón de ser, pues en general, los cuerpos que con arreglo a la misma se clasifican y que se comparan con los cuerpos tipos, tienen, por lo común, para la misma clase de cuerpo la misma dureza.

Dumas trató de establecer otra escala de dureza para los metales; pero no obtuvo un resultado completamente satisfactorio, pues bien sabido es lo difícil que es lograr obtener metales completamente puros, y dada esta circunstancia, a cada muestra ensayada corresponde, en general, dureza diferente. Esto que ocurre para los metales naturales puede aplicarse en mayor grado a los metales manufacturados.

La más ligera variación en la composición química produce diferencias considerables en el grado de dureza.

La dureza de los metales depende especialmente de su composición química; ejemplo bien conocido es el hierro y acero, en los que su mayor o menor dureza depende de la cantidad de carbono y otros cuerpos que entran en su composición; por ello casi instintivamente se habla del hierro dulce o duro (acero), pensando, no solamente en su dureza, sino también en su composición química.

Como generalmente ocurre que los cuerpos resistentes son al mismo tiempo duros, se ha establecido la costumbre de hablar y clasificar como duros o blandos, según los resultados obtenidos en el ensayo de *resistencia*.

*Métodos para la medición de la dureza.*—Los procedimientos más empleados para la determinación de la dureza pueden clasificarse en los dos grupos siguientes:

1.<sup>o</sup> Se determina la dureza por la penetración de un cuerpo en el que se ensaya, por uno de los dos métodos siguientes:

a) El cuerpo penetrante no cambia de posición respecto al cuerpo ensayado (*penetración*).

b) El cuerpo penetrante varía de posición respecto al cuerpo ensayado (*estriado o rayado*).

2.<sup>o</sup> Se determina la dureza por las condiciones de resistencia del metal.

No se detallan en esta Nota los procedimientos de penetración, no sólo por ser sobradamente conocidos, distinguiéndose por los nombres de sus autores, Middeberg, Kerpely, Kich, Johnson, Keep, etcétera, sino también por ser realmente métodos completamente de laboratorio e inaplicables quizá dentro de los procedimientos rápidos y expeditos que deben emplearse, no sólo en las fábricas productoras, sino por los mismos consumidores, disponiendo unos y otros, aunque no siempre, de laboratorios que no se encuentran dotados del número y calidad de aparatos y máquinas tan precisas como las existentes en los laboratorios de índole exclusivamente experimental y, además, que tampoco se dispone del tiempo preciso para realizar cierta clase de ensayos que así lo exigen.

A la misma categoría pertenecen los ensayos por *choque* y *estriado*, como son los de Hanenschild, Bauschinger, Smith, etc.

Quizá ésta sea una de las causas por las que no han sido incluidos estos ensayos en los «Pliegos» para determinar la dureza de los metales.

A continuación se detallan dos clases de ensayos de dureza de los metales, cada uno de los cuales determina, dentro de la misma propiedad, finalidades distintas, y que teniendo otro carácter de aplicación distinto de los expresados pueden, sin inconveniente, considerarse como de aplicación práctica.

En cada una de las dos partes de que consta esta Nota se trata de cada uno de estos ensayos.

## PRIMERA PARTE.

## PROCEDIMIENTO BRINELL.

El procedimiento que se ha de describir puede incluirse en el grupo 1.º a) de la clasificación antes establecida.

En el Congreso celebrado en París el año 1900 por la Asociación Internacional de ensayos de materiales de construcción, segundo de la serie, presentó una muy interesante Memoria J. A. Brinell, Ingeniero Jefe de la importante fábrica metalúrgica y siderúrgica de Fagersta Westanfors (Suecia), describiendo un procedimiento para la determinación de la dureza de los materiales metálicos, el cual desde dicha fecha lleva, como es natural, su nombre y, además, el de ensayo a la bola.

En el encabezamiento de su Memoria se encuentra concretado y expuesto todo lo que a su procedimiento se refiere, decía así:

*Nuevo método para determinar la dureza, la resistencia, el límite de elasticidad aparente, el alargamiento y los defectos de homogeneidad de los aceros, así como también la dureza de los demás cuerpos sólidos, por medio de una pequeña bola de acero templado, marcando una impresión en el cuerpo ensayado.*

El método Brinell se caracteriza por reunir todas las condiciones que debe poseer un buen ensayo, como son:

Dar resultados homólogos y exactos.

Ser fácil de ejecutar y aprender.

No exigir grandes preparativos, emplear poco tiempo y no ser costoso.

Poderse efectuar en pieza y materiales terminados, sin producir deformaciones ni deterioros.

Determinar la dureza absoluta y no la relativa en comparación con otros cuerpos.

El método Brinell consiste en obtener una impresión en el material a ensayar, por medio de una bola de acero templado mediante una presión ejercida en la misma, haciéndola penetrar en aquél, dada su propiedad de poder introducirse sin romperse ni deformarse sensiblemente en los cuerpos muy duros.

Esta propiedad es debida, no sólo a su forma esférica, sino también y principalmente a la homogeneidad de un temple por refrigeración instantánea en un cuerpo de pequeño tamaño y forma regular.

Brinell comenzó sus experiencias con la sola idea de emplear un procedimiento sencillo y rápido para que pudiera ser utilizado por un obrero cualquiera sin tener que recurrir a los especialistas llamados «conocedores del acero».

Después de obtenida la impresión se determina su diámetro, se calcula la superficie esférica de la misma y se divide la presión total empleada por la mentada superficie, obteniéndose un número que es el que Brinell llama *grado o número de dureza*.

Los aparatos que en el principio de las experiencias usaba Brinell se reducían simplemente a un microscopio de tubo vertical y de movimiento de traslación mediante un tornillo horizontal, con objeto de conseguir que el eje de aquél coincidiera con los bordes opuestos de la impresión, midiéndose su diámetro en la escala del tornillo, el cual está dotado de su nonius correspondiente.

Para obtener la impresión disponía Brinell de un sencillo aparato, compuesto de dos placas horizontales, entre las que colocaba la probeta y la bola; la superior de aquéllas se movía por medio de un volante horizontal y se transmitía el movimiento y la presión por un tornillo de eje vertical.

Debajo de la placa inferior, un sistema de resortes comunicaba a un manómetro de cuadrante la presión en la experiencia.

Después de muchas y largas experiencias consideró y así aconsejó para los ensayos de hierros y aceros el empleo de bolas de 10 milímetros de diámetro, sometidas a una presión de 3.000 kg.

Las principales ventajas del método son las siguientes, además de las antes ya enumeradas:

- 1.<sup>a</sup> Determinar la dureza en diversos puntos y zonas del mismo cuerpo.
- 2.<sup>a</sup> Fijar la influencia del trabajo de recalentado, martillado, temple, etc.
- 3.<sup>a</sup> Comprobar la homogeneidad de los materiales.

Las más interesantes aplicaciones de este método fueron deducidas por Brinell después de constantes observaciones en 1.700 probetas, y se fundan en la correlación existente entre los resultados del método practicado tal como se ha expuesto y la determinación del límite de resistencia (coeficiente de rotura), alargamiento proporcional y límite de elasticidad aparente.

Brinell ha deducido que para los aceros con una dosis de carbono menor de 0,8 por 100, existe una relación constante o casi constante entre el número de dureza deducido y el límite de resistencia.

Esta relación o coeficiente multiplicado por el número de dureza, da el límite de resistencia.

El coeficiente deducido por Brinell, es 0,346.

En el caso en que la experiencia confirmase, como ha confirmado, las presunciones de aquél, se podrían obtener los límites de resistencia de materiales, en casos en que la insuficiencia de materia hiciese imposible la preparación de las probetas precisas para el ensayo corriente de tracción, como, por ejemplo, en los fragmentos de la pieza de una máquina que se hubiese roto.

A continuación se inserta un cuadro, en el que para diversas clases de acero se detallan los datos y características deducidos de los ensayos realizados.

En este cuadro tienen la siguiente significación las letras que se indican:

$d$  = Diámetro de la impresión.

$a$  = Area de la superficie esférica de la misma.

$\Delta$  = Número de dureza.

$R$  = Límite de resistencia.

$C$  = Coeficiente medio, que para el acero es igual a 0,346.

$d$	$a$	$\Delta = \frac{3000}{a}$	$R = C \cdot \Delta$
<i>mm.</i>	<i>mm.<sup>2</sup></i>		<i>kg. <math>\times</math> mm.<sup>2</sup></i>
4,05	13,47	223	77,5
4,10	13,83	217	75,1
4,15	14,18	212	73,5
4,20	14,54	207	72,0
4,25	14,89	202	70,0
4,55	17,21	174	60,5
4,60	17,61	170	59,0
4,65	18,02	166	57,5
4,70	18,43	163	56,5
4,75	18,85	159	55,0
5,20	22,91	131	45,5
5,25	23,39	128	44,5
5,30	23,88	126	43,7
5,35	24,37	124	43,0
5,40	24,88	121	42,0
5,45	25,38	118	41,0
5,50	25,89	116	40,3

Para la determinación del alargamiento, preconiza Brinell que el ensayo se verifique en la siguiente forma:

Se coloca una bola de 5 mm. de diámetro, de tal modo que su punto de contacto con la cara superior de la probeta, que en este caso tiene que estar perfectamente labrada en forma paralelepípedica, estuviere situado a 2 mm. del borde de la misma; en esta situación se ejerce la presión hasta que en el reborde que en la arista correspondiente se habrá de formar, se inicie la rotura. En este instante la flecha máxima horizontal de dicho reborde media el alargamiento, puesto que suponía que, para los diversos metales, dicho reborde era proporcional al alargamiento, en cuyo caso, por medio de un ensayo comparativo a la tracción en un metal sometido también al ensayo Brinell, se obtenían elementos para hacer dicho cálculo.

Para obtener el límite de elasticidad aparente, se inicia el ensayo en igual forma, pero se detiene en el momento en que la expresada arista comienza a deformarse, instante que se determina fácilmente por la observación sobre la cara correspondiente, previo pulimento, por reflexión de la luz de un foco luminoso.

En la hoja primera se representan los gráficos deducidos por Brinell para diversas clases de acero, en los que se representan las curvas determinadas mediante ensayos de tracción y de bola.

En ellas se observan algunas diferencias de importancia secundaria, y cuyo valor relativo se determina más adelante.

#### **Estudios y comprobaciones del sistema.**

*Alargamiento y límite de elasticidad.*—Antes de pasar adelante, y aunque sea alterando el orden en que anteriormente han sido expuestas, siguiendo a Brinell, las consecuencias y deducciones por él obtenidas, me ocuparé de la posibilidad de obtener los coeficientes correspondientes a los ensayos indicados en el encabezamiento de este párrafo.

El objeto de esta alteración es prescindir ya en esta Nota de ellos, pues el resultado obtenido no ha sido satisfactorio, para no ocuparnos de otra cosa que de la parte útil del ensayo Brinell, cual es la determinación de la resistencia.

Gran interés despertó la afirmación de Brinell, de que con su método se podrían determinar de un modo tan sencillo coeficientes tan interesantes, y numerosos especialistas se dedicaron al estudio de su método.

En Francia, entre otros, se ocuparon de ello especialmente Breuill, Charpy, Chatelier y Dillner.

El primero presentó en la Sección francesa de la Asociación Internacional de ensayos de materiales de construcción, en su sesión de 21

de julio de 1902, un interesante estudio sobre el particular, el cual fué nuevamente presentado, ampliado con algunos nuevos datos y experiencia, en el Congreso que la mencionada Asociación celebró en Bruselas en 1906.

Respecto a la determinación del *alargamiento*, Breuill, en los múltiples ensayos que ha realizado, comprobó, en primer término, la verdadera dificultad, casi imposible de vencer, de que la bola, una vez iniciado el ensayo, conserve su punto más bajo en la vertical del de contacto primitivo con la probeta, o sea a 2 mm. de la arista de ésta, pues aquélla, al realizarse la experiencia, se hincan en el material, el cual al desbordarse en la cara vertical de la probeta acerca ésta a la bola, no habiendo forma práctica de evitarlo, caminando la bola en la dirección en que encuentra mínima resistencia, no quedando tampoco, como Brinell afirmaba, la arista en su deformación en el mismo plano horizontal

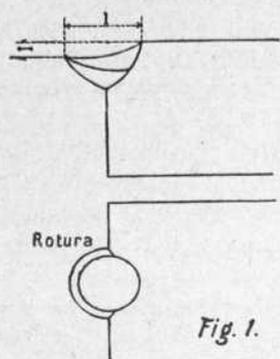


Fig. 1.

en la cara superior, sino que desciende en la forma representada en la *figura 1.<sup>a</sup>*

La rotura se produce comúnmente en la unión de la arista deformada con la cara; en los metales blandos se ve limpia y claramente aparecer, después de la deformación, la grieta; en los metales duros es muy difícil darse cuenta del instante de la rotura, pues es brusca y sin anuncio. El valor de  $L'$  disminuye igualmente con la dureza de los metales.

Si para varios metales se miden los valores de  $L'$  y se comparan, bien con los alargamientos, bien con las estricciones que le son proporcionales, se obtiene:

METALES	Valores de $L$ .	Valores de $L'$ .	Alargamientos.
	mm.	mm.	Por 100.
Cobre.....	3,00	3,00	51,0
Acero de palastros.....	3,15	4,00	36,0
Aceros Thomas.....	2,7	4,00	31,0
Acero al níquel.....	2,7	2,7	29,5
Idem de ejes.....	3,7	2,7	28,0
Idem de cañones.....	3,00	2,5	25,0
Idem al crisol.....	2,5	2,00	24,0
Idem de llantas.....	2,5	1,3	18,5

Se observan, en general, variaciones en el mismo sentido en los números de las columnas 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup>, y con alguna proporcionalidad, aunque con variaciones suficientemente grandes para que no pueda deducirse regla alguna fija y determinada. Los números de las columnas 1.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> varían sin orden alguno y no en el mismo sentido.

Por lo expuesto se deduce sería peligroso confiar la determinación del *alargamiento* a la fijación de las flechas señaladas, tanto en sentido horizontal como vertical.

En cuanto al *límite aparente de elasticidad*, se han determinado análogamente, y en muy numerosos ensayos, los valores de la relación  $\frac{E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}}{E_{\text{med}}}$  para las dos formas del ensayo, o sea para el de tracción como para el Brinell, variando aquélla, para el primero, del 2 al 25 por 100, y en el segundo, del 5 al 35 por 100.

La relación  $\frac{E_B}{E_T}$  varía entre el 14 y el 22 por 100, sin ley fija.

Tampoco se puede, por lo tanto, confiar en este ensayo para la determinación del límite de elasticidad.

Estos dos puntos fueron tratados en el ya citado Congreso de Bruselas de 1906, al que concurrió Brinell, y en las conclusiones adoptadas, después de detenida discusión, se hizo mención muy favorable del método, por lo que se refiere a la determinación de la resistencia de los materiales, pero ni siquiera se mencionó nada respecto a estos dos ensayos.

He hablado de ellos, por el interés que hubieran tenido en el caso de haber dado resultado favorable y para no dejar de mencionar asunto en el que tanto hincapié hizo Brinell en 1900.

Desarrollado este punto, paso al estudio detenido de la

*Determinación de la resistencia.*—Como ya se ha indicado anteriormente, quien, en primer término, comenzó en Francia el estudio de este método, fué Breuill, jefe del Laboratorio de ensayos de la Compañía del ferrocarril de París-Lyon-Mediterráneo.

Este operador se mostró desde el primer instante poco afecto a este sistema, pues en todas las comunicaciones por él redactadas se observa tendencia a quitar seguridad y exactitud a los resultados obtenidos.

En la Sección francesa de la Asociación Internacional, y en su ya mentada sesión de 21 de Julio de 1902, presentó un cuadro de resultados, que después volvió a presentar, unido a un informe, al Congreso de Bruselas de 1906, en el cual, que se copia a continuación,

hacia resaltar la importancia de las variaciones observadas en los resultados obtenidos, tanto en el método clásico de tracción como en el de Brinell, en los valores deducidos para ambos de las relaciones

$$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\text{med}}}$$

METALES	Limite de resistencia.	TRACCIÓN	BRINELL
		$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\text{med}}}$	$\frac{R'_{\max} - R'_{\min}}{R'_{\text{med}}}$
Acero Martin ácido . . . . .	76 kgs.	1,7 por 100.	7,4 por 100.
Idem id. id. . . . .	64 —	9,2 —	11,8 —
Idem de cañones. . . . .	57 —	2,2 —	3,6 —
Idem de ejes . . . . .	49 —	2,9 —	4,4 —
Idem al crisol. . . . .	46 —	6,6 —	10,4 —
Idem id. id. . . . .	44 —	2,8 —	11,3 —
Idem de palastros. . . . .	44 —	2,5 —	8,3 —
Idem id. id. . . . .	33 —	7,1 —	6,5 —
Idem Thomas. . . . .	40 —	1,4 —	1,8 —
<i>Valores medios</i> . . . . .		4,04 por 100.	7,26 por 100.

De estos valores deducía las siguientes consecuencias:

a) Para un mismo metal, las variaciones de  $R$  son inferiores a las de  $R'$  y, sin gran exactitud, aquéllas son la mitad de éstas.

b) Para un mismo metal, las variaciones del número de dureza y las del límite de resistencia no son del mismo signo.

c) La relación entre  $R$  y  $R'$  que, según Brinell, debía ser constante, varía entre 0,322 y 0,376, sin ley fija ni determinada.

d) Si se utiliza como coeficiente constante el valor medio de las cifras deducidas, se obtendrá en algún caso un error en la apreciación del límite de resistencia del 12 por 100, error de importancia muy superior a los admitidos en esta clase de ensayos.

Concluía Breuill diciendo: «En resumen, para este género de ensayos no he encontrado la concordancia anunciada por Brinell, entre  $R$  y  $R'$ ; sin embargo, debe reconocerse que la aproximación es notable. Este modo de determinar el límite de resistencia podría, según mi opinión, bastar para ciertos ensayos rápidos y de poca precisión».

Graves son, en efecto, los cargos formulados por Breuill, pero conviene hacer constar que los aparatos que utilizó para la determinación de los elementos necesarios para sus cálculos, especialmente el

diámetro de la impresión, eran mucho más sencillos e inexactos que los usados por Brinell en sus trabajos.

Utilizaba Breuill una placa de acero (*fig. 2.<sup>a</sup>*), en la que está practicada una ranura angular con una amplitud determinada.

Uno de sus lados, labrado en bisel, lleva una graduación tal, que a cada 20 mm. de separación entre sus trazos corresponde una variación en el diámetro de variación del diámetro de la impresión, la que debe quedar tangente a ambos lados del ángulo, de 1 mm.; se puede, por lo tanto, leer hasta  $\frac{1}{20}$  mm., pero fácilmente se comprende que los errores que en las lecturas se producen han de ser de un orden muy superior a los que Brinell obtendría con su microscopio.

Además, teniendo en cuenta que las impresiones producidas en las probetas presentan, según el corte producido por un plano diametral de las mismas, la disposición representada en la *figura 3.<sup>a</sup>*, se comprende la dificultad de aplicar la reglilla descrita para la determinación exacta del diámetro de aquélla.

Insistiendo sobre lo expuesto, no hay que olvidar que el mismo Breuill en su informe ya indicaba que con sus métodos se puede llegar en las medidas a cometer un error del 3 al 4 por 100; luego las variaciones más fuertes observadas en la medida de la dureza pueden estar afectadas por esta causa del 7 por 100 de error, pues pueden cometerse en los términos que se comparan en uno u otro sentido.

Si se resta este 7 por 100 de error, que no tiene nada que ver con el método en sí, se encuentran errores del mismo orden que los hallados en el procedimiento ordinario para la determinación de la resistencia.

Volviendo sobre la medición de las impresiones, se indicará que Breuill hacía dos impresiones casi unidas en la misma probeta, las cuales, por esta razón y haber sido hechas con la misma bola e igual presión, debían ser idénticas, pues según el mismo autor las diferencias entre sus diámetros son de la importancia de los errores de lectura.

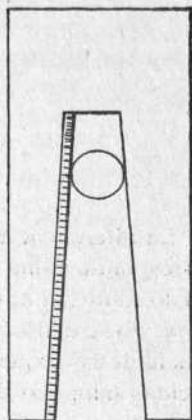


Fig. 2.



Fig. 3.

Hizo así 41 experiencias, y las diferencias halladas fueron las siguientes:

Diferencia de 0,35 mm.....	1 vez.
— 0,20 — .....	1 —
— 0,15 — .....	2 veces.
— 0,10 — .....	6 —
— 0,05 — .....	14 —
— 0,00 — .....	17 —
TOTAL.....	<u>41 veces.</u>

La diferencia de 0,10 mm. entre dos medidas del mismo diámetro corresponde a una variación entre los números de dureza del 4 por 100; por lo tanto, si aquélla es de 0,20 mm., ésta valdrá el 8 por 100. De lo expuesto se deduce que no deben considerarse como con una exactitud suficiente las experiencias de Breuill; luego las conclusiones por él deducidas tampoco deben aceptarse sin grandes reservas.

Charpy y Dillner, el primero ingeniero principal de las fábricas de Saint-Jaques y el segundo jefe del Laboratorio de ensayos de la Universidad técnica de Estokolmo, han trabajado con gran perseverancia siguiendo el camino trazado por Brinell, habiendo obtenido resultados mucho más satisfactorios que los enunciados por Breuill, empleando, respectivamente, aceros de procedencia francesa y sueca.

Los primeros resultados obtenidos no fueron completamente favorables, pues de ellos podía deducirse que el coeficiente encontrado disminuía rápidamente con la dosis de carbono, siendo esta disminución casi idéntica para toda clase de aceros de cualquier procedencia.

Admitiendo un solo coeficiente, el cálculo de la resistencia a la rotura por medio del número de dureza se obtenía para unas y otras clases de acero con valores bastante separados de la realidad.

Se ha buscado el modo de eliminar este error admitiendo un coeficiente medio para los aceros que tuvieran dosis de carbono inferiores a 0,50 por 100, y otro distinto para aquéllos en que dicho componente entrase en dosis superior a aquel límite.

Este procedimiento supondría el conocimiento de la composición química del acero ensayado y la dosificación del carbono, lo cual no siempre ocurre, o si hubiese que hallarle previamente perdería su carácter rápido y práctico el ensayo; por ello es más lógico suponer diferentes los expresados coeficientes, según el número de dureza obtenido, tomando por ejemplo como límite el núm. 175.

También se ha observado en los ensayos (y sobre este punto tan interesante se ha de volver a tratar con gran detalle), que según se hagan las impresiones, en sentido normal o paralelo a la dirección del laminado, se obtienen números algo diferentes.

Por todo ello Dillner establece los siguientes coeficientes, cuyos valores medios, determinados como se indica a continuación, proporcionan la comprobación de que el coeficiente general de Brinell tiene gran exactitud:

Cifras de dureza.	Normal al laminado.	Paralelo al laminado.	Valores medios.
$\Delta < 175$	0,362	0,314	0,358
$\Delta > 175$	0,344	0,324	0,334
<i>Valores medios.....</i>	0,353	0,339	0,346

En la hoja segunda de dibujos se representan gráficamente las curvas determinadas por los límites de resistencia hallados, bien directamente, bien por el método de Brinell, tanto en el sentido del laminado como normalmente, y puede comprobarse que existe concordancia muy satisfactoria, sobre todo para las dosis de carbono inferiores a 0,50 por 100; también para las superiores existe hasta en los menores a 0,80 por 100, límite que ya había fijado Brinell en su Memoria original.

Para el primer grupo, las diferencias sólo alcanzan al 3,3 por 100, y para el segundo llegan al 6,1 por 100, pero esta diferencia sólo corresponde a las dosis superiores.

En los cuadros que se insertan en la hoja tercera se agrupan las experiencias de Charpy, con el mismo criterio antes expuesto, es decir, determinando coeficientes distintos según el número de dureza sea inferior o superior a 175.

Los coeficientes medios difieren algo de los antes indicados, pero bien poco: son 0,351 y 0,336 para uno u otro caso, con un promedio de 0,343, defiriendo del de Brinell menos del 1 por 100.

Los errores entre los límites de resistencia hallados directamente o por los números de dureza son 3,1 y 2,1 por 100, respectivamente, límites bien bajos y que quedan comprendidos dentro de los que aun con los aparatos más perfeccionados se cometen.

Se ve confirmado por todo lo expuesto lo acertado de las afirmaciones de Brinell por lo que se refiere a esta aplicación del método.

III. *Experiencias de Benedicks.*—Este ilustre profesor de Upsala ha estudiado cuidadosamente este método, tratando de conocer y definir la influencia que en la determinación de la dureza podrían tener el diámetro de la bola y la presión.

En 1904 publicó las consecuencias por él deducidas, las cuales fueron posteriormente comprobadas por el mismo Brinell, el cual las ha hecho suyas mostrando su conformidad.

Respecto a la influencia del diámetro de la bola, dedujo la siguiente regla:

a) Para un mismo metal se obtiene una cifra de dureza constante multiplicando la deducida por el método de Brinell, por la raíz quinta del radio de curvatura de la bola.

En el cuadro que se inserta a continuación se indican para una misma presión 3.000 kilos y diferentes diámetros de bola  $D$ , las experiencias con tres metales, los diferentes números de dureza deducidos directamente y los calculados por Benedicks:

$D$	TIPOS DE ACERO					
	NÚMERO 1.		NÚMERO 2.		NÚMERO 3.	
	$\Delta$	$\Delta \sqrt[5]{\rho}$	$\Delta$	$\Delta \sqrt[5]{\rho}$	$\Delta$	$\Delta \sqrt[5]{\rho}$
mm.						
3,75	107	139	208	271	315	410
5,00	99	136	201	177	306	422
7,50	95	142	178	266	272	407
<i>Diferencias máximas.</i>	12	6	30	11	43	15

Si conviene, por lo tanto, tomar como número de dureza normal el que se refiere a la bola de 10 mm. de diámetro; su valor se obtendrá en el caso de no disponer de bola de este tamaño y sí de otra de diámetro  $D'$  por la fórmula

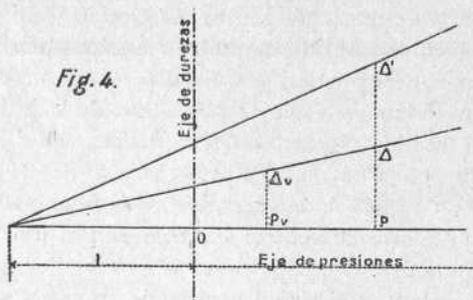
$$\Delta = \Delta_{D'} \cdot \sqrt[5]{\frac{D'}{10}}$$

b) Las curvas representativas de la dureza en función del diámetro para diversas presiones están ligadas por una relación muy sencilla.

Las ordenadas del diagrama de uno de los metales no difieren más

que por un factor constante de las ordenadas correspondientes a la misma presión en los diagramas de otros metales.

Estas curvas son, por lo tanto, congruentes; luego las tangentes en todos los puntos de los diagramas correspondientes a la misma abscisa, o sea igual presión, se cortan en el mismo punto situado en el eje de las durezas (*fig. 4.<sup>a</sup>*); por esta circunstancia, y ser estas curvas de muy débil curvatura, se pueden utilizar substituyéndolas por sus tangentes, lo que permite con mínimo error determinar la dureza  $\Delta_0$  correspondiente a la presión  $P_0$ , conociendo la dureza  $\Delta$  relacionada con la presión  $P$ ,



$$\Delta_0 = \Delta \frac{l + P_0}{l + P},$$

siendo el valor de  $l$  constante y dependiendo de las presiones  $\frac{P_1 + P_2}{2}$ , entre las cuales se quiere operar. Benedicks las ha calculado según los límites siguientes:

Valores de $P_1$	Valores de $P_2$	$\frac{P_1 + P_2}{2}$	Valor de $l$
kg.	kg.	kg.	kg.
100	500	300	3.700
500	4.000	2.250	17.000

Por consiguiente, para deducir el número de dureza normal, o sea con bola de 10 mm. y presión de 3.000 kilos en función del número determinado con presión y diámetros diferentes, se utilizará la fórmula

$$\Delta = \Delta_{d\phi} \cdot \sqrt[5]{\frac{\rho}{10} \cdot \frac{20000}{17000 + \rho}}$$

*Estudios de Grard.*—El capitán de artillería del ejército francés, Mr. Grard, ha estudiado detenidamente el método Brinell, y ha sido uno de los experimentadores que ha llegado, no sólo a conclusiones más concretas y favorables para el método, sino también el que ha hecho experiencias más detalladas y minuciosas.

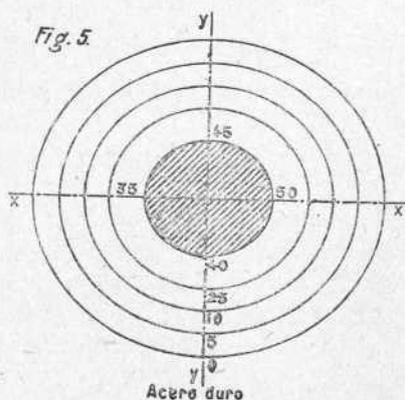
Su estudio tiene como principal finalidad determinar las causas de error que pueden presentarse al operar con este método y evaluar su importancia, para darse cuenta de la influencia que en los resultados obtenidos pueden tener aquéllas, al objeto de ponderar las garantías que puede ofrecer el método.

*Cálculo de la superficie de la impresión.*—En la *figura 3.<sup>a</sup>* se indica la sección diametral de una impresión realizada en las condiciones normales.

Para evaluar su superficie, pueden adoptarse dos criterios, según se mida su profundidad o su diámetro.

En el primer caso, la fórmula que debe emplearse es:  $a = \pi \cdot D \cdot h$ .

Examinando dicha figura se observa pueden adoptarse dos valores diferentes para  $h$ , según se tome como referencia el plano superior de la probeta o la arista de la impresión.



Dichas alturas son  $h$  y  $h' = h + \epsilon$ , luego la superficie de la impresión resulta más pequeña con el primer valor que con el segundo, o sea que el número de dureza será mayor en el primer caso.

Como ejemplo de la forma exacta que tiene la impresión, se representan en la *figura 5.<sup>a</sup>*, y en planta acotada, las alturas de los diver-

Los puntos de una impresión en acero duro, en la que se indican para diversos diámetros las cotas de los mismos.

Si se adopta la medida  $h$ , es preciso, para tomar esta cota, apoyar el aparato necesario a bastante distancia de la impresión, para tener la seguridad de que la superficie de referencia no está alterada, lo que obliga a que dicha superficie se encuentre labrada y pulimentada, sujeción que dado el carácter rápido y práctico del ensayo y, sobre todo, la posibilidad y ventaja de operar sobre los mismos cuerpos acabados, hace casi imposible trabajar en esta forma, debiéndose, por lo tanto, adoptar  $h'$  como cota inicial; pues para su determinación se puede, en cualquier caso y forma, tomar las cotas de varios puntos de la arista y determinar la media.

En el segundo caso, o sea si se mide el diámetro, la fórmula que debe emplearse es

$$a = D \cdot \frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2}.$$

Se miden dos diámetros rectangulares y se deduce el valor medio. Este procedimiento tiene el inconveniente de que si la bola se ovala algo durante el ensayo, la medida de aquéllos puede ser mayor que la que correspondería al verdadero diámetro de la bola, siendo muy difícil la determinación de esta diferencia, por verificarse dicha deformación en su período elástico y recobrar, por lo tanto, su diámetro y forma primitiva.

Las experiencias anotadas en el cuadro adjunto están realizadas en estas condiciones, y puede observarse que los resultados obtenidos operando con  $h$  o con  $d$  son tan parecidos, que justifica sea igual adoptar uno u otro procedimiento.

Siendo más cómodo determinar  $d$  que  $h$ , se adoptará aquel método en las experiencias que deben practicarse.

Tipos de aceros.	D	OPERANDO CON $h$				OPERANDO CON $k'$				Diferencia de los valores de
		$h$	$a$	$\Delta$	$\Delta_{med}$	$k'$	$\alpha'$	$\Delta$	$\Delta_{med}$	
	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>			<i>mm.</i>	<i>mm.</i>			
1	10,008	0,604	18,99	158	164	0,696	21,88	138	143	21
2	»	0,571	17,95	167		0,675	20,22	148		
3	»	0,571	17,45	167		0,677	21,28	141		
4	»	0,579	18,20	165		0,674	21,19	142		
5	»	0,571	17,95	167		0,656	20,62	146		
6	10,010	0,497	15,63	192	191	0,591	18,58	161	166	25
7	»	0,507	15,94	189		0,589	18,52	162		
8	»	0,497	15,63	192		0,573	18,01	167		
9	»	0,500	15,72	191		0,570	17,92	176		
10	»	0,500	15,72	191		0,576	18,11	166		
11	10,006	0,428	13,45	223	228	0,408	14,71	204	201	27
12	»	0,421	13,23	227		0,497	15,63	192		
13	»	0,420	13,20	227		0,478	15,03	204		
14	»	0,413	12,98	231		0,468	14,71	204		
15	»	0,409	12,86	233		0,462	14,52	207		

Tipos de aceros.	D	OPERANDO CON $d$				
		$d$	$a$	$\Delta$	$\Delta_{med}$	
		mm.	mm. <sup>2</sup>			
Dulces . . . .	1	10,008	5,06	21,60	139	142
	2	»	5,00	21,04	143	
	3	»	5,00	21,04	143	
	4	»	5,00	21,04	143	
	5	»	4,98	20,88	144	
Semiduros..	6	10,010	4,70	18,43	163	166
	7	»	4,66	18,11	166	
	8	»	4,63	17,86	168	
	9	»	4,64	18,99	167	
	10	»	4,66	18,11	166	
Duros . . . .	11	10,006	4,29	15,24	197	203
	12	»	4,25	14,93	201	
	13	»	4,24	14,86	202	
	14	»	4,22	14,68	205	
	15	»	4,19	14,49	210	

*Apreciación de los errores que pueden cometerse.*—En dos grupos pueden clasificarse estos errores:

1.º Errores debidos a la precisión de los aparatos empleados.

a) Aparatos de presión.

b) Aparatos para la medición del diámetro.

2.º Errores debidos a las condiciones de la experiencia.

c) Rapidez de poner en presión el aparato.

d) Duración de la presión.

e) Influencia del sentido en que se ejerce la presión con relación a la dirección del laminado.

Teniendo en cuenta todas estas causas de error, y siguiendo de un modo constante un método racional y uniforme, es fácil darse cuenta de la influencia de todas y cada una de estas causas de error.

*Grupo 1.º, a) y b).*—La fórmula general que determina los errores que pueden cometerse, es la siguiente:

$$\frac{\delta \Delta}{\Delta} = \frac{\delta r}{p} + 2 \frac{\delta d}{d},$$

por entrar en primer grado la presión y en segundo el diámetro.

Dada la precisión de los aparatos que después se describirán y las muchas experiencias realizadas, la presión se puede medir sin inconveniente alguno con el 0,30 por 100 de error.

La precisión en la medida de los diámetros está, como es natural, limitada por la limpieza de los bordes de la impresión, suponiéndolas netas; el aparato utilizado, menos exacto, mide el 1,20 de mm., o sea para un diámetro medio de 5 mm., el 1 por 100, luego  $\frac{\delta\Delta}{\Delta} = 3$  por 100.

Detallando estas consideraciones generales, transformemos este error en cifras Brinell.

*Aparatos de compresión.*—Las máquinas empleadas permiten hacer una tara con una aproximación en el manómetro de 5 kg., luego el error total, teniendo en cuenta que las lecturas pueden estar afectadas de error por paralaje de otros 5, llegaría a 10 kg.

Después de varias experiencias anotadas en el cuadro que se inserta a continuación, para diversas clases de acero y presiones variables de 100 en 100 kg., se han hallado las influencias de éstas en el diámetro de la impresión y, por lo tanto, en el número de dureza:

ACEROS	Presiones.	Diámetro de la impresión.	Aumento de diámetro.	Número de dureza.	Disminución del número de dureza.
	kg.	mm.	$\frac{1}{10}$ mm.		
Dulces.....	2.700	5,25	»	128	»
	2.800	5,35	+ 10	124	- 4
	2.900	5,45	+ 10	118	- 6
	3.000	5,55	+ 10	114	- 4
	3.100	5,62	+ 7	111	- 3
Semiduros.....	2.700	4,26	»	201	»
	2.800	4,33	+ 7	193	- 8
	2.900	4,40	+ 7	187	- 6
	3.000	4,46	+ 6	182	- 5
	3.100	4,52	+ 6	177	- 5
Duros.....	1.700	4,03	»	225	»
	2.800	4,11	+ 8	216	- 9
	2.900	4,17	+ 6	210	- 6
	3.000	4,23	+ 6	204	- 6
	3.100	4,29	+ 6	197	- 7

Del cuadro se deduce que las variaciones máximas del número de dureza para una diferencia de 100 kg., en la presión es 9; luego para los 10 kg., error máximo cometido al leer en el aparato, la variación será 0,9, o sea menos de una unidad Brinell.

*Influencia de la bola.*—Las bolas utilizadas son de 10 mm. de diámetro, de acero templado al cromo, y son casi rigurosamente esféricas.

Se han medido los diámetros de 100 bolas, en las cuales 70 variaban entre 10,000 mm. y 10,010 mm., quedando desechadas las restantes; de este lote se separaban 20, cuyo error de diámetro variaba entre 10,002 y 10,010 mm., utilizándose sólo las 50 cuyo diámetro más distinto del reglamentario llegaba a valer 10,002 mm.

Este error no es apreciable en unidades Brinell.

*Aparatos de medida del diámetro.*—Se han hecho numerosas y repetidas experiencias con uno y varios experimentadores, para determinar, dados los aparatos usados, el error cometido en la lectura de la dimensión del diámetro de la impresión, y se ha llegado con apreciaciones de centésimas de milímetro al error del 2 por 100, que traducido en unidades Brinell representan 3, aproximadamente.

*Error total.*—Sumando los dos errores así determinados, se llega a que el error total es de 4 unidades Brinell, aproximadamente; pero considerando un límite superior, dejando margen muy suficiente para cualquier otro accidental, se fija como máximo el de 5 unidades Brinell.

*Grupo 2.º c).*—La influencia que en los resultados obtenidos puede tener la rapidez en llegar a la máxima presión en los aparatos, ha sido comprobada y representada en la *figura 6.ª*, en la que la curva dibujada es función de los diámetros y del tiempo empleado en llegar a la presión máxima, o sea la normal de 3.000 kg.

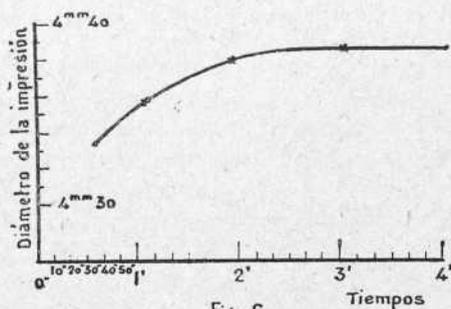


Fig. 6

Se comprueba que tardando unos tres minutos en esta operación, se llega al máximo diámetro de la impresión; luego puede adoptarse este tiempo como uniforme y reglamentario para esta operación.

*d) Duración de la presión máxima.*—Análogas experiencias se han realizado para determinar la influencia de la duración en la presión máxima, y en la *figura 7.ª* se representa la curva de los diámetros en

función del mentado tiempo, deduciéndose de la misma que a los cinco minutos ya no aumenta sensiblemente el diámetro de la impresión.

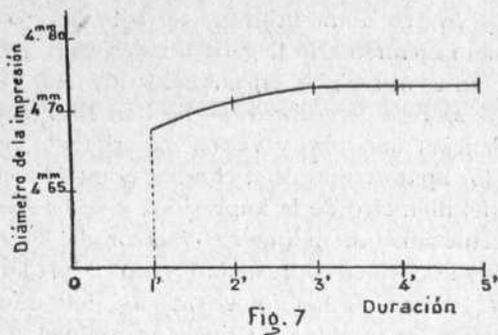


Fig. 7

Puede igualmente considerarse este tiempo como normal y uniforme para los ensayos.

e) *Influencia de la dirección del laminado.*—En una pieza de acero laminado pueden hacerse los ensayos normal o paralelamente al sentido de la laminación (fig. 8.<sup>a</sup>).

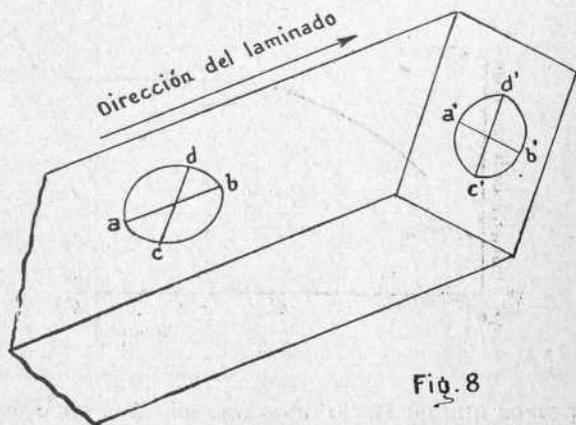


Fig. 8

En el cuadro que se inserta a continuación se han reunido ordenadamente los resultados de múltiples ensayos, y se indican para diversas clases de aceros las dimensiones de los diámetros de las impresiones, según se realicen en una u otra forma, y dentro de cada im-

presión, las diferencias importantes que se encuentran, según el diámetro que se considere.

CLASES DE ENSAYO	ACERO DULCE		ACERO SEMIDURO		ACERO DURO	
	Diámetro <i>a b.</i>	Diámetro <i>c d.</i>	Diámetro <i>a b.</i>	Diámetro <i>c d.</i>	Diámetro <i>a b.</i>	Diámetro <i>c d.</i>
	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>	<i>mm.</i>
Normal al laminado....	5,31	5,32	4,64	4,67	4,30	4,31
	5,40	5,42	4,65	4,67	4,36	4,34
	5,35	5,37	4,62	4,64	4,18	4,29
	5,38	5,40	4,58	4,61	4,33	4,33
	5,30	5,33	4,55	4,55	4,31	4,32
	5,40	5,41	4,60	4,60	4,28	4,30
<i>Medios.....</i>	5,36	5,37	4,61	4,62	4,30	4,33
Paralelo al laminado ...	<i>a' b'.</i>	<i>c' d'.</i>	<i>a' b'.</i>	<i>c' d'.</i>	<i>a' b'.</i>	<i>c' d'.</i>
	5,18	5,22	4,29	4,32	4,11	4,13
	5,12	5,14	4,30	4,31	4,07	4,09
	5,15	5,18	4,28	4,28	4,09	4,11
	5,07	5,12	4,32	4,33	4,10	4,12
	5,10	5,13	4,36	4,36	4,09	4,11
	5,14	5,14	4,30	4,30	4,10	4,10
<i>Medios.....</i>	5,13	5,15	4,31	4,32	4,09	4,11

De su examen se deducen las siguientes observaciones:

1.<sup>a</sup> Las impresiones realizadas normalmente al sentido del laminado son mayores que las efectuadas paralelamente a esta dirección, luego los números de dureza correspondientes a aquéllas serán menores que los que se deducen de éstas.

2.<sup>a</sup> Dadas las diferencias existentes entre los diámetros de una misma impresión, hay que fijar para llegar a conclusiones concretas cuál es el que hay que tomar, o si es la media de dos normales, etc.

En general, para las impresiones realizadas normalmente a la dirección del laminado, los diámetros paralelos a éste son menores *a b*; así también para con los diámetros *a' - b'* en las impresiones obtenidas paralelamente al laminado situado en un plano normal al de las anteriores impresiones.

Se explican estas sistemáticas diferencias recordando también existen en la resistencia del material, debidas a la estructura que produce el laminado y acusadas en los ensayos de tracción.

Conviene, a la vista de todo lo indicado, insistir en la necesidad de que se fijen para los ensayos comparativos las mismas reglas que determinen el diámetro, así como las impresiones que deben efectuarse.

Como conclusión de todo lo expuesto, se llega a la posibilidad, procediendo uniformemente en los ensayos, de anular los errores correspondientes a este segundo grupo, quedando únicamente los calculados como pertenecientes al primer grupo.

Éstos han sido evaluados en cinco unidades Brinell; luego dos impresiones realizadas en un mismo acero no deben diferir más de 10 unidades de esta clase, suponiendo que en cada ensayo se haya cometido el máximo error, cada uno con signo distinto.

Es evidente que con la manera de operar, ya detallada, de sumar los errores, la cifra hallada, casi se puede asegurar no se encontrará nunca en la práctica, pues el error probable es mucho menor; pero para colocarse en el terreno adecuado para la recepción de aceros conviene más bien exagerar en el sentido apuntado, para que el método expuesto no inspire recelos a los fabricantes si éste se aplicare e incluirse en los «Pliegos de condiciones», pues tal como va expuesto no se puede culpar al método si los resultados obtenidos no son favorables.

Luego si se encuentran en estos ensayos diferencias mayores que la expresada ya no deben atribuirse a ellos, sino a falta de homogeneidad del metal, punto interesantísimo que se tratará extensamente.

*Determinación del coeficiente de proporcionalidad.*—Utilizando todos los ensayos apuntados, se han deducido diferentes valores para el coeficiente por el que debe multiplicarse el número de dureza para determinar el límite de resistencia, indicándose a continuación los resultados obtenidos:

Clases de acero.	Normal al laminado.		Paralelo al laminado.		Límite de resistencia.
	$\Delta$	C	$\Delta$	C	
Extra dulces.....	< 120	0,360	< 115	0,345	kg. por mm. <sup>2</sup> 34 a 40 40 a 55 55 a 65 65 a 75
Dulces.....	120 < 160	0,355	115 < 155	0,342	
Semiduros.....	160 < 180	0,353	155 < 175	0,337	
Duros.....	> 180	0,349	> 175	0,321	
<i>Medias.....</i>		0,354		0,336	
<b>MEDIA TOTAL.....</b>				<b>0,345</b>	

Si los datos anteriores se agrupan buscando el valor medio de los dos coeficientes de proporcionalidad correspondientes a las dos primeras clases de acero y luego a las dos últimas, se obtienen valores de 0,350 y 0,340 con el mismo valor medio total ya hallado de 0,345; los que recuerdan con bastante aproximación los valores hallados por Dillner, antes mentados, de 0,351, 0,336 y 0,343.

*Estudios de Meyer.*—El profesor de Berlín, von Meyer, ha hecho un interesante estudio del método Brinell, aunque pecando algún tanto de teórico, partiendo de bases diferentes y llegando a consecuencias casi de acuerdo con las de éste, defendiendo y recomendando algunas ligeras variaciones en la forma de realizar los cálculos y, por lo tanto, de llegar a los números definitivos; al terminar la exposición de este estudio se comparan ambos métodos y se justifican las consecuencias deducidas.

Parte Meyer de lo que denomina presión media  $P_m$ , que se obtiene dividiendo la presión total  $P$  por la proyección sobre un plano normal a la dirección del esfuerzo del círculo de la impresión

$$P_m = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} \text{ en kg. por mm.}^2$$

Considera el caso del ensayo Brinell como particular del estudiado por Foppl para el contacto de dos esferas, en cuyo caso las curvas que ligan las cargas variables y las impresiones obtenidas están representadas por expresiones de la fórmula  $P = \alpha d^n$  siendo  $\alpha$  y  $n$  coeficientes variables.

Tomando logaritmos en esta fórmula, queda:

$\log P = \log \alpha + n \log d$ , y representando gráficamente para cada metal estas curvas, se comprueba que son rectas que se confunden con el lugar geométrico de los puntos determinados, buscando los valores de los diámetros en función de las presiones.

Utilizando esta fórmula ha realizado Meyer su estudio comenzando por averiguar la *influencia del diámetro de la bola sobre el de la impresión y sobre la presión media.*

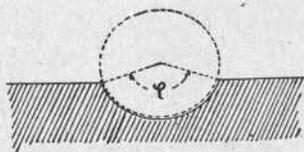


Fig. 9

Expresando la presión media en función del ángulo  $\varphi$  formado por los dos radios correspondientes a los bordes de la impresión,

resulta:

$$d = \text{sen } D \left( \frac{\varphi}{2} \right),$$

luego

$$P_m = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} D^2 \text{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

De esta fórmula se deduce que las presiones  $P$ , que para bolas de distinto diámetro producen iguales presiones medias, con igual ángulo de impresión varían con el cuadrado de los diámetros de aquéllas.

Si se toman dos bolas de diámetro  $D_1$  y  $D_2$  se puede establecer:

$$P = \alpha_1 d^{n_1} = \alpha_2 d^{n_2}.$$

$$P_m = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4\alpha_1 d^{n_1}}{\pi} = \frac{4\alpha_1}{\pi} D_1^{n_1-2} \text{sen}^{n_1-2} \left( \frac{\varphi}{2} \right),$$

y si se suponen iguales las dos presiones medias, se obtendrá

$$\alpha_1 D_1^{n_1-2} \text{sen}^{n_1-2} \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \alpha_2 D_2^{n_2-2} \text{sen}^{n_2-2} \left( \frac{\varphi}{2} \right).$$

Para que esta relación exista para cualquier valor de  $\varphi$  es preciso que  $n_1 = n_2$ ; en cambio, el valor de  $\alpha$  varía con  $D_1$ ; si se conoce su valor para un determinado diámetro, podría deducirse:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{D_1}{D_2}. \quad [1]$$

Para todos los materiales en que  $n > 2$ ,  $\alpha$  aumenta con el diámetro de la bola, así como el de la impresión, tanto más cuanto mayor es  $n$ .

*Consecuencias de la ley  $P = \alpha d^n$ .*—La constante  $\alpha$  representa la carga que es precisa para producir una impresión de 1 mm. de diámetro; se la puede expresar, por lo tanto, en kg. por mm.<sup>2</sup>

La presión media se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_m = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4\alpha}{\pi} d^{n-2} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} \left( \frac{P}{\alpha} \right)^{\frac{2}{n}}} = \frac{4}{\pi} \alpha^{\frac{2}{n}} P^{\frac{n-2}{n}}.$$

Para un material en que  $n = 2$  la presión media o dureza (según Meyer) es independiente del diámetro de la impresión y de la presión total, y es igual para todas las cargas a  $\frac{4\alpha}{\pi}$ , recordando la fórmula [1] queda  $\alpha_1 = \alpha_2$ , luego para este material la dureza es independiente del diámetro de la bola.

Para los cuerpos en que  $n < 2$  la presión media disminuye con el aumento de diámetro de la impresión y de la presión total, cuanto más se comprime la bola más disminuye su dureza, aumenta para un mismo diámetro de impresión y una misma carga cuando el diámetro de la bola aumenta.

Para los metales en que  $n > 2$ , la dureza, de Meyer, aumenta con el diámetro de la impresión tanto más cuanto mayor es  $n$ .

Si se comparan dos metales diferentes, si éstos tuvieran el mismo valor para  $n$ , se calificarían por  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , que son diferentes.

Para conservar las mismas cifras comparativas deberían hacerse los ensayos con un mismo diámetro  $d$  o con una misma presión  $P$ .

En el primer caso las durezas o presiones medias estarían en la relación

$$\frac{P_{m_1}}{P_{m_2}} = \frac{\frac{4}{\pi} \alpha_1 d^{n-2}}{\frac{4}{\pi} \alpha_2 d^{n-2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Como

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha_1 d^n}{\alpha_2 d^n} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

estas dos relaciones darían la de

$$\frac{F_{m_1}}{F_{m_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

es decir, que las durezas estarían en la misma relación que los esfuerzos necesarios para producir impresiones de igual diámetro.

Si se comparan durezas para cargas iguales

$$\frac{P_{m_1}}{P_{m_2}} = \frac{\frac{4}{\pi} \alpha_1^n P^{\frac{n-2}{n}}}{\frac{4}{\pi} \alpha_2^n P^{\frac{n-2}{n}}} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{2}{n}},$$

obteniéndose la relación independientemente de la carga escogida.

En los dos casos se deduce que las relaciones no dependen de otra cosa que de la naturaleza del metal ensayado y son independientes del diámetro y carga escogidos; todo esto siempre que  $n$  tenga el mismo valor para ambos.

Como esto no suele ocurrir, pues los valores de  $n$  varían entre 1,91 y 2,48, o sea entre límites bastante extensos, veamos qué sucede en este caso, suponiendo primero que  $d$  es el mismo:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha_1 d^{n_1-2}}{\alpha_2 d^{n_2-2}} = \frac{P_{m_1}}{P_{m_2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} d^{n_1-n_2}.$$

La relación de las durezas varía con el diámetro tanto más cuanto  $n_1$  es mayor que  $n_2$ .

Para iguales cargas resulta:

$$\frac{P_{m_1}}{P_{m_2}} = \frac{\frac{P}{\frac{\pi}{4} d_1^2}}{\frac{P}{\frac{\pi}{4} d_2^2}} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\frac{4}{\pi} d_1^{n_1} P^{\frac{n_1-2}{n_1}}}{\frac{4}{\pi} d_2^{n_2} P^{\frac{n_2-2}{n_2}}} = \frac{\alpha_1^{\frac{2}{n_1}} P^{\frac{2}{n_1}(n_1-n_2)}}{\alpha_2^{\frac{2}{n_2}}}$$

La relación varía con la carga, pero estas variaciones son menores en este caso que en el anterior, consecuencia también de acuerdo con las recomendaciones de Brinell, de exigir las mismas cargas y no los mismos diámetros de impresión para comparar metales.

En resumen: para expresar la dureza, según Meyer, hacen falta largas experiencias con diferentes presiones, bola y diámetro de impresión para determinar  $P$  y  $n$ .

**Resumen.**—*Comparación de los números de dureza de Meyer y Brinell.*—Brinell toma como superficie de carga la del casquete esférico y Meyer la proyección de éste en un plano (mucho más ajustado a la realidad lo primero); el número de aquél es menor que el segundo.

La relación es:

$$K = \frac{\frac{\pi D^2}{2} - \frac{\pi D}{2} \sqrt{D^2 - d^2}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{d^2},$$

y su valor para diversos diámetros de impresión son los siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} a = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \text{ mm.} \\ K = & 1000 & 1014 & 1027 & 1044 & 1070 & 1112 & 1197. \end{array}$$

Para pequeños diámetros, la diferencia entre ambos números es insignificante; para diámetro mayor ya tiene importancia, pues llega al 4,4 por 100 para 4 mm. y 16,7 por 100 para 7 mm.

Resumiendo todo lo expuesto, se deduce que el sistema Brinell tiene un carácter práctico extraordinario, comparándole con el de Meyer, pues para operar con éste es preciso, como antes se ha indicado, experiencias previas comparativas para determinar el valor de los coeficientes, que una vez conocidos permiten determinar el número de dureza o presión media, no resultando de inmediata aplicación como aquél por no utilizarse para conocer el límite de resistencia a la rotura y, sobre todo, que para la principal ventaja que del método Brinell se saca, cual es el conocimiento de la homogeneidad de una pieza fabricada (punto que todavía no he tratado), no se obtienen datos tan concluyentes, puesto que la deducción de los coeficientes exigiría en la misma las experiencias ya citadas, lo que resultaría largo y en varios casos impracticable, en tanto que con el método Brinell cada número deducido da idea de las condiciones del metal ensayado.

Como ya he dicho, el método Meyer tiene un carácter más apropiado para experiencias de laboratorio que para ser llevado a la práctica de la recepción de material.

*Teorías de Kurth.*—Kurth, Director del Laboratorio de ensayos de la Real Escuela superior técnica de Berlín, ha estudiado asimismo el ensayo Brinell, basándose en los mismos principios de Meyer, con la excepción de no admitir que el coeficiente  $n$  de aquella fórmula sea constante para un mismo metal.

Argumenta diciendo, que tanto en el ensayo ordinario de tracción como en el de bola, el estado del metal o cuerpo ensayado varía constantemente de un instante a otro durante los ensayos, como consecuencia de la tensión experimentada en el primero y deformación de su sección, así como la variación de forma en el segundo, por la presión uniforme que reparte la bola.

El valor de  $n$  es variable para cada estado momentáneo del metal y no puede existir constancia en el coeficiente deducido por Brinell para pasar de uno a otro ensayo.

Explica, sin embargo, la casi constancia de los coeficientes deducidos por Brinell, Charpy y Dillner, la que no puede negar y que a él mismo le resulta para ensayos análogos por él practicados, diciendo que cuanto mayor es la presión sufrida por la bola y mayor, por lo tanto, el diámetro de la impresión, más se aproxima el estado momentáneo del metal en este ensayo al estado final en el ensayo de tracción,

en cuyo estado final deben coincidir sus coeficientes en todos los ensayos, por ser el mismo el estado del metal.

En cambio afirma que la influencia del estado momentáneo sobre el valor del coeficiente de dureza es tanto mayor cuanto más al comienzo del ensayo se encuentra o menor sea la presión e impresión, por estar muy alejado del estado final.

Corroboran estas observaciones las precauciones recomendadas por Brinell para emplear presiones elevadas.

*Trabajos de H. Moore.*—Este conocido ingeniero de las fábricas metalúrgicas de Woolvich (Inglaterra) se ha preocupado, al estudiar este ensayo, especialmente de su parte práctica o de aplicación después de haber llegado a coeficientes y datos análogos a los de Benedicks.

Sus experiencias más salientes, de las que deduce reglas prácticas para la ejecución del ensayo, se refieren al *espesor mínimo* de las probetas, así como a la *distancia mínima de la impresión al borde de aquélla*.

Respecto al primer punto, indica que cuando la profundidad de la impresión es  $1/16$  del espesor de la probeta, se nota en la cara inferior de ésta y debajo de aquélla un alisado y brillo en una superficie algo mayor que la de aquélla; si la profundidad

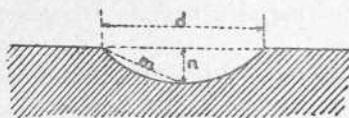


Fig. 10

de aquélla pasa de  $1/7$  del espesor, entonces se deforma dicha cara inferior, formándose un saliente en correspondencia

con la impresión, produciéndose una alteración en la forma de aquélla que dificulta la toma de datos y quizá modifique la naturaleza del metal.

Recomienda como límite inferior práctico para el espesor el de 10 veces la profundidad aproximada que haya de tener la impresión.

Respecto al segundo punto, ha deducido de varios ensayos que el centro de la impresión no debe estar a menos de  $2\frac{1}{2}$  veces su diámetro del borde de la probeta.

*Simplificaciones para la aplicación del sistema.*—Revillon ha encontrado el modo de estudiar unos ábacos que simplifican en extremo la aplicación del sistema.

Según las nomenclaturas de Brinell:

$$R = C \cdot \Delta = C \cdot \frac{P}{a} = C \cdot \frac{P}{\pi m^2} = \frac{C \cdot P}{\pi} \cdot \frac{1}{m^2};$$

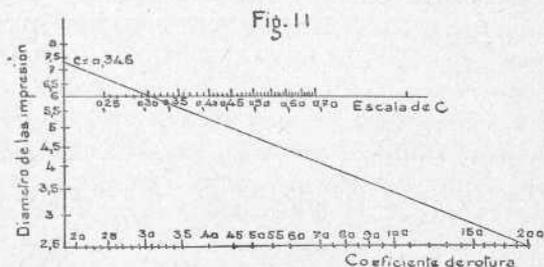
$$\log R = \log C + \log \frac{P}{\pi} + \log m^2;$$

$$\log R + \log m^2 = \log C + \log \frac{P}{\pi}.$$

Como  $P = 3.000$  kg.  $\log \frac{P}{\pi} = 2,979$ ; conociendo  $d$  o  $h$ , se conoce  $m$  y, por lo tanto,  $\log m^2$ .

Llevando a un sistema de coordenadas logarítmicas en abscisas las cantidades correspondientes a  $\log R$  y anotando en los puntos marcados los valores de  $R$ , y en ordenadas los valores de  $\log m^2$ , anotando los de  $d$ , la curva que enlaza  $R$  y  $d$ , que es una recta (fig. 11), ocupa la posición correspondiente a la clase del metal o sea al valor de  $C$ .

En la figura se representa dicha recta para el valor típico de Brinell  $C = 0,346$ .



Esta recta se moverá paralelamente a sí misma, según el valor de  $C$  y de acuerdo con la escala elegida para éste.

Con estos ábacos es bien fácil obtener todos los datos necesarios para determinar la dureza.

*Grenet.*—Grenet ha estudiado también la manera de facilitar el ensayo, sobre todo en los casos en que no es preciso una gran exactitud, valiéndose del método indirecto o comparativo.

Utilizando una prensa cualquiera, que pueda desarrollar la presión de 3.000 kg., se comprime una bola de ensayo de 10 mm. entre dos probetas, una del metal que se desea ensayar, y otra de un metal de dureza conocida.

Podría determinarse la dureza midiendo la superficie de las impresiones, que estarán en razón inversa de las durezas respectivas, pero

en vez de este procedimiento algo largo, es más sencillo el siguiente:

Si la dureza del metal tipo es  $\Delta$  y en el ensayo comparativo se ha medido en el mismo diámetro  $d$  que corresponda, según la talla de dureza, a una  $\Delta'$ , y si sobre el metal a ensayar se ha producido una impresión de diámetro  $d'$ , correspondiente a una dureza  $\Delta''$ , se puede deducir, siguiendo las indicaciones expuestas a continuación, el valor absoluto de la dureza del cuerpo que se ensaya:

METALES		Tipo.	Ensayado.
Experiencia.....	{ Dureza absoluta.....	$\Delta$	$\varphi$
	{ Idem relativa.....	$\Delta'$	$\Delta''$
	{ Diámetro.....	$d$	$d'$

$$\varphi = \Delta \frac{\Delta''}{\Delta'} = \Delta \frac{d^2}{d'^2}.$$

Siguiendo este procedimiento se simplifican mucho las operaciones del ensayo y con una prensa cualquiera, el metal tipo y la tabla de durezas, se pueden obtener las durezas de todos los cuerpos.

Se han hecho por Grenet ensayos múltiples para determinar los números de dureza de varios cuerpos, directa o indirectamente, obteniéndose números que difieren pequeñas cantidades en general, siendo sólo para un ensayo dicha diferencia el de 11 unidades Brinell.

#### Estudio de homogeneidad.

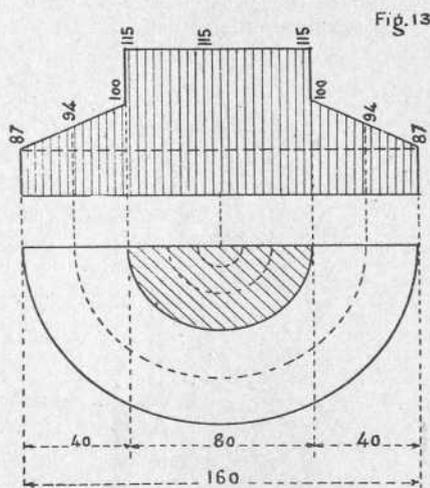
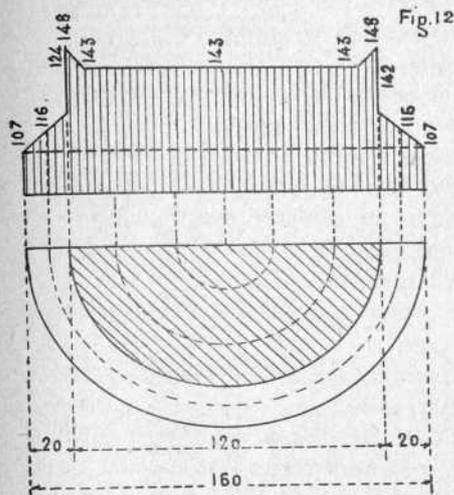
La más importante aplicación quizá del método Brinell es la determinación de la homogeneidad de los cuerpos sometidos al ensayo; homogeneidad naturalmente superficial, puesto que su efecto no llega en las impresiones más que una pequeña capa superficial.

Especialmente en los cuerpos manufacturados, tiene importancia esta aplicación del ensayo, que permite comprobar la homogeneidad en todos sus puntos, cosa imposible de lograr con el ensayo de tracción, no sólo porque no es cosa de destrozar un cuerpo ya terminado, sino también porque aunque las probetas se hagan muy pequeñas (Fremont), nunca permiten multiplicar los ensayos, como con el método Brinell.

No hay, por tanto, que esforzarse mucho para comprender la importancia del ensayo de esta forma practicado.

Cuando en varios puntos ensayados en un mismo material se obtienen resultados en unidades Brinell que difieren más de 10 unidades, cantidad que antes se dedujo como valor máximo del error que podía cometerse, esto nos indica que en los puntos ensayados no hay homogeneidad.

Para el ensayo de la homogeneidad en la masa con que se construyen los cañones, en los que tanta importancia tiene esta cualidad, es empleado el sistema con excelente resultado en Francia e Inglaterra.



En las *figuras 12 y 13* se representan en planta dos semisecciones de dos lingotes estudiados por Ast, realizando en sus cabezas múltiples impresiones Brinell y llevando, en ordenadas, longitudes proporcionales a los números obtenidos, para dibujar los diagramas representados en las mismas figuras sobre las mentadas plantas.

Los números obtenidos del mismo valor corresponden, en general, a impresiones concéntricas, como debe ocurrir si el enfriamiento de la masa es regular y uniforme.

Estos dibujos dan idea de que probetas obtenidas del mismo lingote dan resultados diferentes a la tracción, según el lugar que aquéllas ocuparen.

Para ensayos rápidos de carriles, tanto en su cabeza como en el alma y patín, convendría emplear el procedimiento, que daría resulta-

dos muy interesantes al comprobar la existencia o falta de homogeneidad de la masa.

Piezas de máquinas, elementos de construcción, etc., etcétera, son cuerpos en que la homogeneidad tiene verdadera importancia.

#### Máquinas y aparatos empleados para el ensayo.

Muchos tipos de aparatos han sido estudiados y contruidos por las casas especialistas, basados en principios diferentes y aun con disposiciones distintas para los proyectados sobre el mismo principio.

Aunque la mayor parte de ellos han dado resultados favorables, fijándose en el carácter práctico del ensayo, me limitaré a describir algunos.

En primer término se describen los empleados por Brinell, que aunque ya anticuados, dado su carácter histórico, conviene conocerlos.

Se dividen en dos grupos:

- 1.º Aparatos que producen la impresión.
- 2.º Aparatos que miden las dimensiones de la impresión.

**PRIMER GRUPO: Máquina Brinell.**—En la *figura 14* se representa este aparato de compresión, compuesto de dos placas horizontales, entre las que se introducen la bola y probetas, produciéndose la presión moviendo por un volante horizontal la superior de aquéllas, por intermedio de un

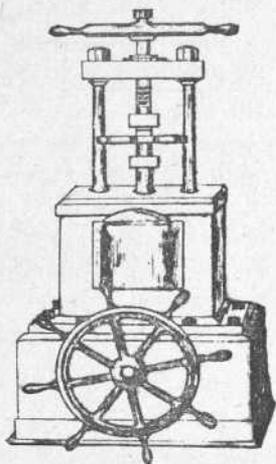


Fig. 14

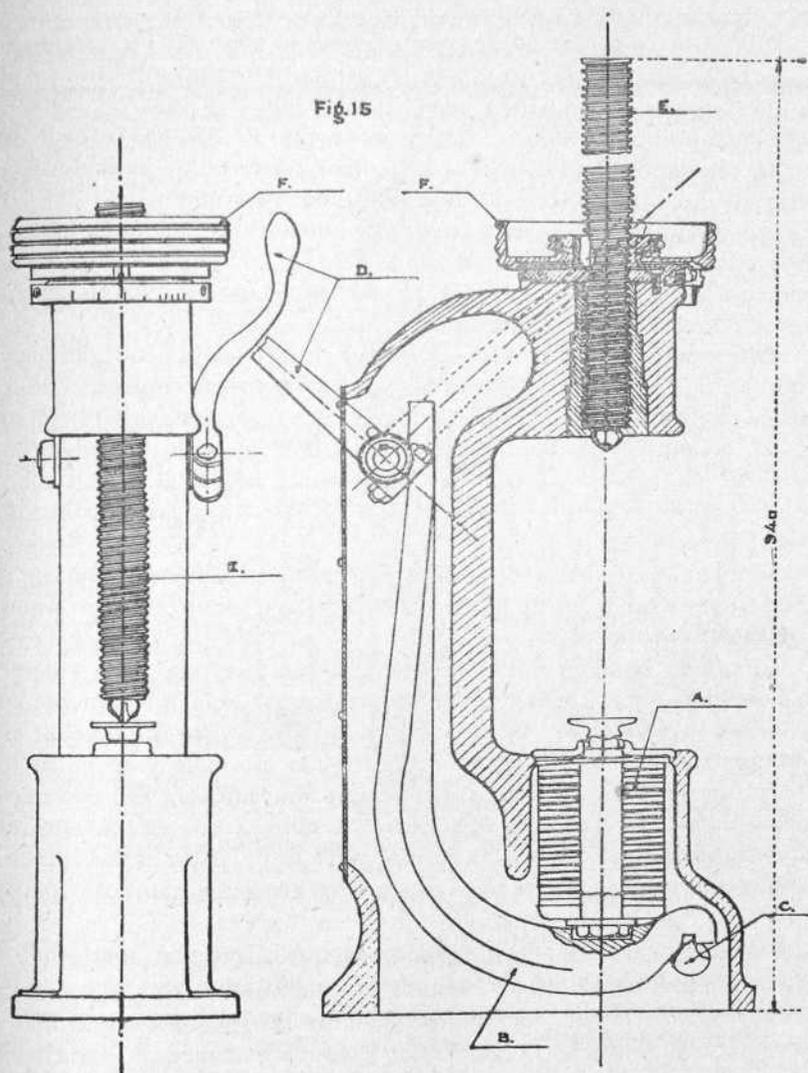
tornillo vertical, en tanto que la inferior, que descansa sobre un sistema de resortes, acusa la presión en un manómetro de cuadrante.

Es muy sencillo, aunque algo imperfecto, y ha sido substituído por otros más perfeccionados.

**Máquinas Guillery.**—Esta máquina es una de las más perfeccionadas y mejor estudiadas.

En la *figura 15* se representa en alzado y sección para el ensayo normal, es decir, con bola de 10 mm. de diámetro y presión de 3.000 kilogramos.

Una pieza de fundición, hueca, tiene dispuestos en su parte inferior y superior los elementos necesarios para el ensayo.



En su parte inferior, un conjunto de anillos *Belleville* *A* graduados antes de introducirse en el aparato, permiten llegar a aquella presión;

reposan sobre una palanca acodada  $B$ , apoyada a su vez en un cuchillo fijo  $C$  y relacionada con la palanca exterior de maniobra  $D$ ; produciendo el movimiento oportuno de ésta, se desarrolla la presión para que están graduados aquéllos.

La parte superior del aparato permite el paso de un tornillo  $E$ , porta-bola, estando su tuerca labrada en un manguito introducido en la misma pieza de fundición, recibiendo movimiento de rotación por intermedio de un volante  $F$ , que en el sentido de descenso puede cesar de transmitir el movimiento helicoidal del tornillo, limitándose a girar, y en su elevación sólo tiene el primer movimiento.

Acompañando al volante en su movimiento hay un índice que se mueve sobre una escala cilíndrica fija colocada en la parte superior de la máquina, la que directamente da por las lecturas de sus indicaciones el número de dureza medido.

Para operar se coloca la pieza que se desea ensayar sobre la placa inferior, y girando el volante se pone la bola en contacto con la misma; tan pronto el tornillo encuentra en su movimiento dificultad, cesa el volante de producir descenso de la bola, girando, sin embargo, en virtud de la disposición indicada, haciendo mover al índice sobre la graduación hasta que se coloca en el cero o en un punto conocido como referencia.

Se mueve la palanca  $D$ , obran los anillos Belleville elevando el cuerpo a ensayar y clavándole en la bola, la que se introduce en aquél, permitiendo medir su dureza.

Se vuelve la palanca a su posición normal, se mueve el volante hasta restablecer el contacto, introduciéndose la bola nuevamente en la impresión, habiendo descendido ésta la profundidad de aquélla; en este momento el volante volvería a girar sin arrastrar al tornillo, lo que indica ha llegado al fondo de la impresión, midiéndose entonces en la graduación cilíndrica el número de dureza correspondiente al diámetro o profundidad de impresión, cuya graduación es sencilla de establecer, puesto que todos los ensayos se hacen en idénticas condiciones.

Este aparato puede disponerse, si se quiere ensayar piezas muy pesadas, como elementos de máquinas, carriles, etc., en forma que la dirección de la presión sea horizontal o inclinada, según convenga, con objeto de que los discos Belleville no tengan que contrarrestar además el peso del cuerpo ensayado, operando en una disposición parecida a la de las remachadoras portátiles, a las que se puede mover y hacer tomar la posición que se desee.

También podrían graduarse los anillos de forma que pudiesen desarrollar la presión de 3.000 kg. + peso; esto sólo convendría hacerlo cuando todos los cuerpos ensayados tuvieran el mismo peso, pues si no habría que cambiarlo para cada pieza que se sometiese al ensayo.

Este aparato da directamente el número de dureza y evita el empleo de los accesorios necesarios para la medición y lectura de las dimensiones de la impresión.

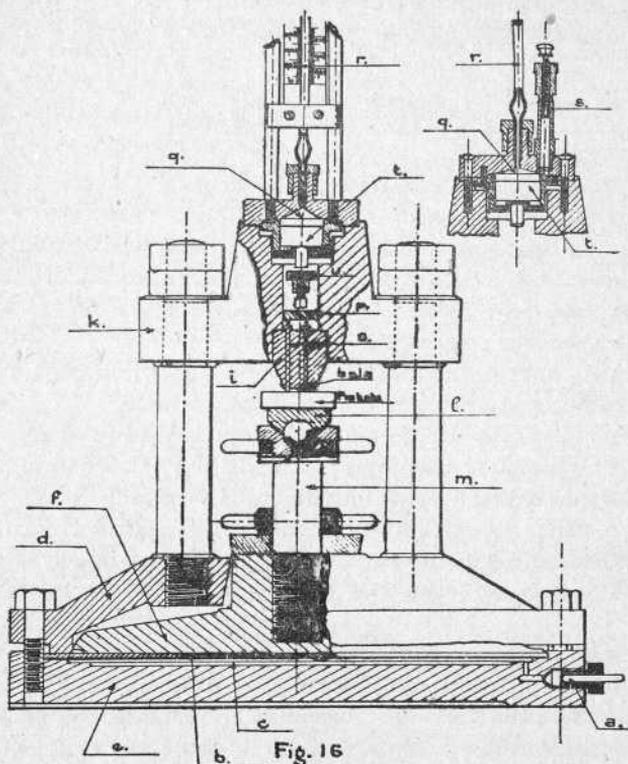


Fig. 16

*Aparatos Martens.*—V. Martens, Director del Real Laboratorio de Ensayos de Charlottenburgo, ha ideado otro aparato fundado en distinto principio, pero que también da las lecturas con gran precisión y sencillez y que, análogamente al anterior, practica la medición directa de la profundidad de la impresión.

El aparato representado en la *figura 16* está en comunicación por el tubo *a* con un depósito de agua a presión, penetrando debajo de un

disco de cuero  $b$ , inferior al cual hay una membrana  $c$ , ambas fuertemente comprimidas, aislando de un modo perfecto el espacio comprendido entre la armadura  $d$  y el platillo  $e$ .

Cuando penetra el agua, se elevan el émbolo  $b \cdot c$  y el pistón  $f$ , cuya superficie útil es de 500 cm.<sup>2</sup>, transmitiendo estos elementos una presión determinada.

Se determina la del agua por un manómetro cuyo grado 300 equivale en el pistón a una presión superficial de 6 kg. por cm.<sup>2</sup>, luego la presión en ésta cuando el manómetro marque  $g$ , será

$$P = g \frac{6500}{300} = 10 \cdot g,$$

al llegar a la presión máxima,  $g = 300$ , luego  $P = 3.000$  kg., o sea la presión del ensayo normal.

La bola se sujeta por medio de cera en una pieza  $i$ , que se apoya en la armadura principal del aparato  $k$ , colocándose la probeta sobre la pequeña base  $l$  que descansa sobre el tornillo  $m$  que sirve para colocarlos en contacto con la bola.

La disposición destinada a la lectura de la profundidad de la impresión está colocada en la parte superior del aparato.

Tres pequeñas varillas de acero  $o$  se aplican sobre la superficie del cuerpo que se ensaya, terminan en el dado  $p$ , sobre éste descansa un pistón  $n$  que transmite sus movimientos verticales a la pieza sobre la cual, y aislada, se encuentra la cámara  $q$  llena de mercurio, que se eleva dentro de un estrecho tubo  $r$ , en el que por medio de una pequeña bomba se hace llegar dicho cuerpo hasta el índice cero de la escala.

La operación se ejecuta del siguiente modo: se coloca el cuerpo a ensayar sobre  $l$ , se eleva con el tornillo  $m$  hasta ponerle en contacto con la bola, que no varía de posición, apoyándose entonces en el cuerpo las tres varillas  $o$ ; se da entrada al agua hasta que el manómetro llegue al grado 300, o sea una presión contra la bola de 3.000 kilogramos, quedando el cuerpo marcado por aquélla, elevándose lo que permite su natural dureza.

Las tres varillas  $o$  se elevan y hacen subir la pieza  $t$ , la que comprime el mercurio, haciéndole ascender por el tubo, marcando en la escala correspondiente una cierta altura  $h'$ .

Esta altura no es, como a primera vista parece, la profundidad de la impresión, sino que en ella está incluida además de esta altura  $h$ ,

otra  $h''$ , debida a las deformaciones elásticas del aparato, el aplastamiento de la bola y la variación de espesor de la probeta, puesto que el aparato lo que únicamente registra es la cantidad que la superficie superior del cuerpo ensayado se eleva con relación a su posición inicial.

Para determinar el valor de  $h$  pueden utilizarse dos procedimientos.

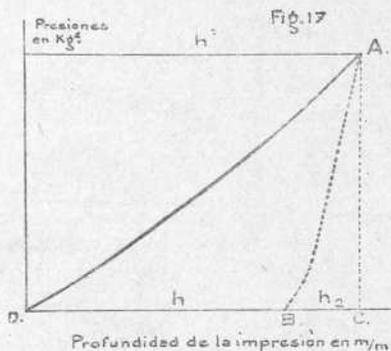
Si se comprime sobre un cuerpo cualquiera una bola con una presión creciente, la relación entre ésta y la profundidad de la impresión se puede representar por la curva  $OA$  de la *figura 17*, en la que la ordenada son las presiones y las abscisas las profundidades. Supongamos que el punto  $A$  es el final de la experiencia y la altura medida en el aparato es  $h'$ .

Si se cierra el tubo de llegada del agua y se da salida a la que había penetrado en el aparato, la presión baja, siendo la forma de la curva de presiones en la descarga la indicada por  $AB$ , quedando el menisco de mercurio en una altura  $h$  para una presión cero durante algún tiempo, descendiendo luego por su peso hasta cero.

La abscisa  $OB = h$  corresponde a la profundidad efectiva de la impresión, y  $B.C$  es la suma de las correspondientes a las deformaciones antes mentadas.

Otro modo bien sencillo de determinar  $h$ , consiste en utilizar el tornillo  $m$  para descender la probeta, con objeto de que quede libre del contacto de la bola, descargándose un tanto el aparato; cuando ha terminado la descarga se vuelve a elevar hasta restablecer el contacto efectivo, llevando la bola al fondo de la impresión. El valor que en la escala marque el mercurio indicará la profundidad buscada.

El número de dureza sería, según Brinell,  $\frac{P}{2\pi\rho h}$ , siendo  $\rho$  el radio de la bola; pero no sería exacta esta expresión si se tiene en cuenta la deformación de la bola, sino esta otra,  $\frac{P}{2\pi\rho'h}$ , siendo  $\rho'$  el radio de curvatura de la impresión variable, según la presión.



Para la aplicación del sistema se emplean únicamente valores fijos para  $P$  y  $r$ , o sean 3.000 kg. y 5 mm., no habiendo entonces otra incógnita en la expresión que el valor de  $h$ .

Otros aparatos.—Han sido construídos por las casas Falcot, Aktrenbalaget-Alpha, Amsler-Lafan y Huber Wagner, y en la descripción de ellos no hay para qué detenerse, pues aunque tienen algunas disposiciones particulares interesantes, no difieren gran cosa de los descritos.

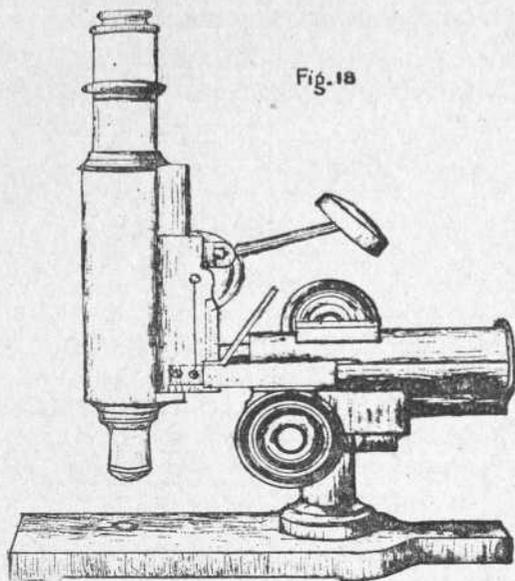


Fig. 18

SEGUNDO GRUPO: *Microscopio de Brinell*.—En la *figura 18* se representa el usado por el creador del método, no siendo preciso explicación alguna para comprender perfectamente su funcionamiento y utilización, siendo pequeña en realidad la variación que han experimentado los micros-

copios hoy en uso, casi idénticos al primitivo.

Otros tipos de aparatos se utilizan, sobre todo para la determina-

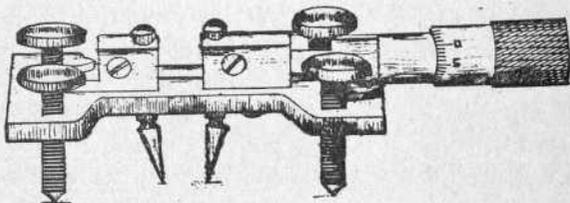


Fig. 19

ción del diámetro en piezas terminadas de máquinas, etc. Uno de ellos se representa en la *figura 19*, no siendo preciso tampoco explicación ni descripción para comprender su mecanismo.

### Aplicación práctica del método.

El procedimiento que se ha estudiado puede considerarse desde dos puntos de vista diferentes:

El primero como ensayo de dureza en sí.

El segundo por su relación con la determinación del límite de resistencia de los materiales.

Como corolario de ambos, el de la comprobación de la homogeneidad de la masa de los metales.

Como ensayo de dureza está indicada su aplicación, pues todas las experiencias realizadas han sido concordantes y convincentes.

Desde el expresado punto de vista los resultados han sido muy satisfactorios, y todos los estudios realizados han llegado, en resumen, a coincidir en las bases primordiales del método, aunque ligeramente difieren en pequeños detalles de números y coeficientes, siendo evidente que su aplicación sería de verdadera importancia y transcendencia.

La substitución del ensayo de tenacidad y resistencia por el de dureza sería muy ventajosa, pues permitiría reemplazar las costosas máquinas de ensayo a la tracción por otras mucho más sencillas, pues aunque se quisiera conocer el alargamiento y estricción bastaría un simple aparato que ejerciese los esfuerzos de tracción, sin que tuviese que dar indicación de los mismos, pues las medidas que deberían obtenerse se tomarían en las mismas probetas.

¿Puede y debe, en la situación actual de la cuestión, substituirse un ensayo por otro? Quizá todavía no.

Seguramente esta substitución será el límite de una larga serie de ensayos comparativos de ambos, los dos con carácter práctico, no con el carácter de sencillas experiencias de laboratorio experimental, que hasta ahora han tenido.

Conviene estudiar dicha substitución examinando la cuestión, no sólo desde el punto de vista del constructor o el que emplea los materiales, sino también por el fabricante de ellos. Para el primero, realmente, el ensayo de tenacidad con sus derivaciones para determinar el límite elástico, alargamiento, etc., tiene gran importancia, puesto que le da a conocer características de los metales que le son necesarias para su empleo racional y adecuado; pero le es indiferente que la indicación que le dan a conocer de estos materiales se la deduzcan por uno u otro procedimiento.

En cambio, ¿qué de ventajas no le reporta el que estos ensayos puedan multiplicarse mucho más que los métodos clásicos, pues así conoce mucho mejor el material con que trabaja?

Esto es de gran importancia para los materiales que utiliza en sus construcciones; pero ¿qué no se dirá si el método le permite conocer las propiedades características del metal mismo de que están construídas piezas terminadas, lo que con aquellos métodos era imposible realizar?

Ha de tener, por lo tanto, el constructor gran interés en la adopción de este procedimiento.

Por lo que se refiere al fabricante, su interés quizá sea mayor todavía, pues el empleo de este método no ha de dar lugar a cambio alguno ni en la fabricación ni en la clasificación de los materiales, lo que podía ocasionarle gastos cuantiosos; en cambio, estos ensayos puede multiplicarse en extremo con gran economía; le ha de ser muy fácil evitar que le sean rechazadas grandes partidas de materiales, porque uno o varios de los que las constituyen dé mal resultado, como sucede con los métodos hasta ahora empleados; pues como los ensayos son en pequeño número, hay que fiarse del resultado obtenido en pequeño número de piezas para juzgar del estado y calidad de todas las pertenecientes a un lote, pudiéndose así desechar algunas en buen estado, o recíprocamente, si el resultado obtenido ha sido favorable, admitir quizá algunas en malas condiciones, y como todo fabricante de buena fe ha de desear que lo que entrega sea realmente de recibo, ha de encontrar este procedimiento excelente, pues considerando el argumento en su límite, permite probar y ensayar todas las piezas fabricadas, con gran economía.

Queda demostrado que el fabricante no puede por menos de mirar con simpatía este método de ensayo.

Convendrá, pues, ver si en el estado actual del asunto se puede o no verificar la substitución del método clásico.

Opino que todavía es algo prematuro, pero sí se debe incluir en los «Pliegos de condiciones», al mismo tiempo que el método antiguo; pues utilizando los dos simultáneamente se reúnen datos y enseñanzas bastantes para que más adelante, con verdadero conocimiento de causa y de los materiales que en España se emplean, pueda hacerse insensiblemente la substitución.

En los Congresos de Bruselas de 1906, Copenhague 1909 y en Washington en 1912, celebrados por la Asociación Internacional de ensayos de materiales de construcción, se ha tratado esta cuestión, adop-

tándose en el primero una conclusión orientada en el sentido indicado, que decía textualmente:

*El Congreso opina que para la recepción de los materiales metálicos, la medida de la tenacidad puede completarse a título de documental, en el mayor número posible de casos, con el número de dureza Brinell.*

El Congreso de 1909 en Copenhague acordó recomendar la *continuación de los ensayos*, y en el más reciente de Washington se volvió a tratar del asunto, pero sin tomar acuerdo alguno, dejando, por lo tanto, vigente a la tácita el del Congreso anterior.

Seguramente partiendo de estos acuerdos, y en vista de los buenos resultados obtenidos, se han establecido ambos ensayos en muchas fábricas y administraciones. A continuación se indican algunas de las más importantes:

**Fábrica de armas y cañones.**—En Francia e Inglaterra se ha establecido en las fábricas nacionales y particulares para el acero empleado en los cañones.

**Compañías de ferrocarriles.**—*Ferrocarriles prusianos.*—Propuesto por Schewarse, se ha adoptado para la recepción y ensayo final en llantas montadas en sus ejes.

Para los carriles prescriben se hagan doble número de ensayos Brinell que de tracción.

Piden profundidades de impresión con bolas de 19 mm. y presiones de 50.000 kg., comprendidas entre 5 y 5,5 mm. para los carriles con resistencia mínima de 60 kg. por  $\text{mm}^2$ , y de 4,5 a 5 mm. para los que tienen resistencias mínimas de 70 kg. por  $\text{mm}^2$ .

*Ferrocarril Norte Emperador Fernando.*—Hacen múltiples ensayos Brinell en la recepción de carriles, sólo a título informativo, pero con tendencia a la substitución.

*Ferrocarriles rusos.*—Está prescrito el ensayo Brinell en todos los pliegos, pero sin que los resultados que de él se obtengan decidan la aceptación o rechazo de la partida.

*Ferrocarriles italianos del Estado.*—Se han hecho múltiples ensayos en el Laboratorio oficial de estos ferrocarriles, habiéndose publicado en *Ingeniero Ferrovia* los resultados de 34 grupos de los mismos, copiándose a continuación las consecuencias deducidas:

1.<sup>a</sup> Existe una relación casi constante entre el número de dureza y el límite de resistencia, la cual para carriles escogidos, presentando entre sí las mayores anomalías, resulta con valores cuyo promedio, para diversas dosis de carbono, es de 0,333.

2.<sup>a</sup> Las anomalías observadas en el ensayo de dureza son de menor importancia que las registradas en el ensayo de tracción.

3.<sup>a</sup> Se puede medir de un modo suficientemente aproximado el número de dureza con una probeta tipo, y pueden emplearse aparatos portátiles que permitan hacer las pruebas sin mover los carriles objeto del ensayo.

Vemos, pues, que ya han pasado los ensayos Brinell del período de Laboratorio al terreno práctico, y esto invita todavía más a pensar su inclusión en España en los «Pliegos de condiciones», y en su vista tengo la honra de proponer al Congreso la siguiente conclusión por lo que se refiere a la primera parte de esta Nota:

CONCLUSIÓN 1.<sup>a</sup>—*Procede y es conveniente incluir cuanto antes en los «Pliegos de condiciones» para la recepción de los materiales metálicos y en especial de carriles, el ensayo Brinell, que deberá practicarse en número doble, por lo menos, que el de tracción, por ahora sólo a título informativo, recogiendo los datos que de los mismos se deduzcan para llegar en momento oportuno a su substitución por aquél.*

Como propuesta aproximada e hipotética, dada la calidad general de los carriles usados en España y sobre la base de modificarla a la vista de los resultados obtenidos en los ensayos, podría exigirse que con el ensayo normal, es decir, con presiones de 3.000 kg. y bola de 10 mm. de diámetro, se hiciesen impresiones cuyo diámetro variase entre 4,25 y 4,50 mm.

## APÉNDICE.

Sólo con el carácter de complemento a todo lo expuesto, se indican a continuación muy ligeramente dos métodos de ensayo de materiales metálicos, deducidos del método Brinell, y del que pueden considerarse como variantes.

Como los resultados obtenidos no han sido todavía completamente satisfactorios, pues los resultados teóricos no concuerdan con los obtenidos en la práctica, no pueden todavía salir estos métodos del período de ensayo; pero considero interesante su mención, por el carácter de los mismos, de derivados del Brinell.

*Método Roos.*—Este método es del mismo género que el Brinell, es decir, consiste en determinar las condiciones de un metal por la impresión que en él produce una bola; pero produciéndose aquélla, no por presión estática, sino por acción dinámica; es decir, mediante el choque de una maza en la bola apoyada en el cuerpo a ensayar.

Roos, después de prolijos cálculos, que no considero necesario copiar en esta Nota, deduce la constancia de la relación  $\frac{a^2}{Q}$ , siendo  $a$  la superficie de la impresión y  $Q$  el trabajo mecánico gastado en el choque, no existiendo tal constancia en la práctica, aunque sin ser demasiado grandes las diferencias.

Para pasar al límite de resistencia, necesita utilizar las cifras de dureza estática, y como consecuencia también de largos cálculos deduce que la relación  $\frac{\Delta_d^2}{\Delta_F}$ , siendo sus términos ambos números de dureza, debe ser también constante; pero los resultados obtenidos difieren en cantidades de importancia, que llegan al 22 por 100.

Estos resultados no permiten todavía la aplicación del sistema que, aunque muy interesante, se encuentra aún en período de ensayo.

*Método Ludwik.*—En este método se substituye la bola del sistema Brinell por un útil cilíndrico en su parte superior, limitado por un plano normal a las generatrices, y en su parte inferior está labrado un cono recto, tal que el ángulo de las generatrices sea  $90^\circ$ .

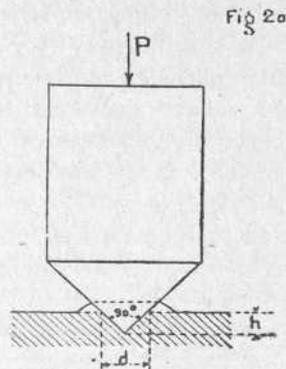
El número de dureza (*figura 20*), es:

$$\Delta = \frac{P}{a} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2}} = \frac{P}{1,11 d^2} = \frac{P}{4,44 h^2}.$$

El aparato empleado permite medir la profundidad al mismo tiempo que se verifica la impresión.

También puede medirse el diámetro siguiendo los procedimientos usados en el sistema Brinell.

Este procedimiento presenta pocas ventajas sobre el Brinell, pues aunque casi es el mismo, todavía no están bien determinados los coeficientes y valores numéricos correspondientes, y esto hace que no se haya extendido.



## SEGUNDA PARTE.

## MEDICIÓN DE LAS DUREZAS POR EL DESGASTE SUPERFICIAL.

Una gran parte de los metales en su forma definitiva de aplicación están sometidos a importantes e intenso trabajo de desgaste, por rozamiento de unas superficies con otras.

Es muy interesante y útil poder clasificar los metales de frecuente uso y aplicación, por su mayor o menor resistencia al mencionado trabajo; conocer las circunstancias que modifican esta resistencia, como composición, fabricación, etc., a fin de aplicar aquéllas, en cada caso particular, en la forma más conveniente y apropiada al objeto de que se trate.

La resistencia que presentan los cuerpos para ser más o menos desgastados, es una manifestación o aspecto especial de la dureza de los mismos, y puede sin inconveniente alguno incluirse en la definición general de dureza, dada al comienzo de esta Nota, al considerarla como la mayor o menor dificultad que un cuerpo presenta para ser penetrado por otro.

Hasta ahora, poco o nada se ha tratado acerca de la conveniencia de someter a los cuerpos metálicos que en su trabajo habitual han de estar sometidos a enérgico rozamiento, a ensayos que determinen su aptitud para el mismo, y esta segunda parte de la presente Nota se dedica íntegra a tan interesante aspecto del ensayo general de dureza.

Se estudiarán los antecedentes o corta historia de esta clase de ensayos, todos ellos de índole experimental; las varias formas en que pueden realizarse; sus relaciones con otros ensayos de dureza y, por último, su aplicación a la práctica.

*Ensayos de desgaste.*—Los cuerpos, al trabajar al rozamiento y experimentar desgaste el uno por el otro, pueden hacerlo en tres formas distintas, según se indica a continuación, anotándose un ejemplo típico de cada trabajo:

- a) Desgaste sencillo.—Los canchales de los elevadores.
- b) Idem lubricado.—Los elementos de las máquinas.
- c) Idem en seco.—Los carriles al paso de los trenes.

En las tres formas de realizar el desgaste, el hecho que se produce consiste simplemente en que el cuerpo más duro, por muy pulimentado que prácticamente esté, penetra en la superficie del más blando

por las rugosidades y salientes microscópicas que aquél presenta, haciendo en aquél arañazos y estrías más o menos profundos, haciéndole perder en su movimiento relativo cierta cantidad de materia, según el grado de dureza relativa del uno con relación al otro.

Ensayos de esta clase han sido realizados desde 1902, siendo sus iniciadores *Codron* y *Schleringer*, y continuados por *Saniter*, *Nusbaumer* y, últimamente, por *Breuil* y *Robin*.

Todos los ensayos practicados tienen, como es natural, un aspecto común; consisten en producir un rozamiento más o menos enérgico en el cuerpo que se quiere ensayar, por medio de un cuerpo desgastante más duro, como, por ejemplo, piedra de afilar, arena, papeles esmeril, acero extra duro, etc.

En general, se adopta como coeficiente de desgaste o término de comparación para clasificar los metales y realizar los estudios señalados, la cantidad en peso o volumen desgastado del cuerpo ensayado en un cierto tiempo y determinadas condiciones.

A continuación se detallan los ensayos recientemente verificados, no parándonos en los de *Codron* y *Schleringer*, que aunque pueden considerarse como los iniciadores de esta clase de trabajos, llegaron a resultados poco precisos, que no aclaran ni ilustran las consecuencias a que es menester llegar.

*Ensayos modernos. Método Breuil.*—Breuil, encargado de la Sección de metales en el Laboratorio de la Escuela Central de París ha realizado numerosos ensayos de desgaste en metales, tanto como consecuencia de peticiones de particulares como a título especulativo.

Empleó primeramente la máquina Dorry, una plataforma de fundición perfectamente horizontal, constantemente cubierta por arena fina y húmeda de Fontaineblau.

Las probetas eran cilíndricas, de 10 mm. de diámetro, sometidas a presiones variables de 0,5 y 12,3 kg. por cm.<sup>2</sup>

Los metales que principalmente ensayó fueron bronces, aleaciones blancas a base de aluminio y fundiciones.

El número de vueltas que la plataforma tenía que dar desgastando a la probeta variaba de 5.000 a 200.000, según la naturaleza de los metales.

Sobre estos ensayos hizo Breuil una moción que presentó a la Sección francesa de la Asociación Internacional de ensayos de materiales de construcción, en su sesión de 6 de Marzo de 1909, en la que confesaba el poco éxito de los ensayos realizados, pues no le permitían deducir consecuencias concretas.

Abandonó la máquina Dorry y utilizó la piedra de afilar para los ensayos, igualmente sin éxito, pues observó que ésta no cumplía la condición inexcusable para esta clase de trabajos, cual es la absoluta constancia práctica de las condiciones del mismo, lo que exige perfecta invariabilidad del medio empleado, y en la piedra sus granos se redondean si el ensayo es un poco largo, disminuyendo su poder de ataque con la duración de aquél.

Podría retocarse la piedra, pero esta operación no ofrece garantías de que quede en el mismo estado primitivo, no siendo tampoco cosa de cambiar la piedra para cada ensayo.

Fué igualmente abandonada la piedra y adoptado el papel esmeril del comercio, el cual, después de numerosas tentativas, encontró de una constancia y uniformidad grandes, que le hacían apto para esta clase de ensayos, a pesar de la exactitud de los mismos.

Se puede renovar el papel para cada ensayo, siendo muy bajo en coste; no produce grandes dispendios esta precaución.

El ensayo de una muestra dura tres minutos, tiempo en el cual no se deteriora el papel ni se eleva la temperatura de aquélla sensiblemente; esta circunstancia es muy de apreciar, pues podrían variar completamente las condiciones del ensayo.

Los resultados obtenidos para varios metales permiten clasificar éstos cuando las condiciones del ensayo han sido idénticas para todos.

A continuación se indican, en corroboración de lo expuesto, los coeficientes de desgaste para varios aceros experimentados con una presión de 1 kg. por cm.<sup>2</sup> durante tres minutos, habiéndose repetido tres veces cada ensayo:

Aceros con 0,7 de C.....	$\left. \begin{array}{l} 340 \text{ mg.} \\ 352 \text{ —} \\ 354 \text{ —} \end{array} \right\}$	Medio 349 mg.
Idem con 0,94 de C. (templado).....	$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ —} \\ 80 \text{ —} \\ 90 \text{ —} \end{array} \right\}$	— 90 —
Idem con 0,13 de C y 0,05 Ni.....	$\left. \begin{array}{l} 313 \text{ —} \\ 312 \text{ —} \\ 352 \text{ —} \end{array} \right\}$	— 325 —
Idem con 0,5 de C, 21 de Ni y 0,017 Cr..	$\left. \begin{array}{l} 102 \text{ —} \\ 112 \text{ —} \\ 107 \text{ —} \end{array} \right\}$	— 107 —

En la mentada sesión, en que Breuil presentó su trabajo, fué éste objeto de gran discusión, no alcanzando por los miembros presen-

tes gran acogida los datos obtenidos y consecuencias deducidas, principalmente por la forma de practicar el ensayo, que no inspiraba demasiada confianza, por el poco tiempo a que cada cuerpo estaba sometido al ensayo, separándose por ello algún tanto de las condiciones prácticas de su empleo, no saliéndose del terreno experimental.

La realidad difiere mucho en un caso del otro, sobre todo por el tiempo que los materiales trabajan en el ensayo de Breuil.

Fué excitado a que continuara los estudios de tema tan interesante.

*Ensayos de Robin.*—F. Robin presentó en el Iron and Steel Institute, el año 1909, un interesante trabajo sobre este asunto, acudiendo a uno de los varios concursos Carnegie, costeados por este conocido filántropo.

Los ensayos realizados por Robin, que le han servido para redactar su trabajo, han sido practicados utilizando papeles esmeril, distinto en cada ensayo.

También ha encontrado en el comercio, aun en contra de ideas muy extendidas, ejemplares de papeles de suficiente uniformidad para poder ser utilizados en estos trabajos.

Dispuso de un torno de eje vertical con una plataforma horizontal móvil, a la que se aplica el papel esmeril por cualquier procedimiento.

La probeta que se ha de ensayar se coloca sobre el papel y se la mantiene fija en el extremo de una palanca, unida a una disposición que, por intermedio de una junta Cardan, permite un movimiento sobre la superficie del papel, manteniendo constante y exactamente horizontal la superficie de la probeta colocada en contacto de aquél.

Esta palanca, lastrada por pesos, está mantenida contra la superficie de la plataforma por resortes debidamente colocados.

Conviene evitar en el ensayo que la temperatura de la probeta se eleve sensiblemente sobre la del ambiente.

Generalmente, se toma un recorrido de 200 m. sobre una pista de 145 mm. de diámetro con una velocidad media de 150 vueltas por minuto, siendo la superficie de la probeta en contacto la de 15 mm. de diámetro, determinándose la pérdida en peso de éstos (1).

En esta forma no se llega a calentar la probeta, la que se enfría durante cada pesada, y al mismo tiempo se comprueba la uniformidad del ensayo.

---

(1) Se subdivide el ensayo de tres minutos en tres ensayos de un minuto; después de cada uno de éstos se comprueba el desgaste experimentado.

El coeficiente de desgaste de cada probeta se fija dividiendo la pérdida de peso total durante los tres minutos de experiencia con el mismo papel, por el número de centímetros cuadrados de la sección en contacto con ésta.

Para que el método tenga valor es preciso que los resultados obtenidos sean bastante concordantes; en ellos se han apreciado algunas variaciones que oscilan, en la casi totalidad de los casos, entre el 2 y 4 por 100; únicamente en un ensayo llegó al 10 por 100.

Puede aceptarse como bastante exacto el método empleado, aunque tiene los mismos defectos que se señalaron en las experiencias de Breuil al no acomodarse a la realidad por la corta duración del ensayo.

*Circunstancias que influyen en el ensayo.*—Entre las varias que pueden escogerse se señalarán las siguientes:

1) *Presión.*—El desgaste es tanto mayor cuanto lo es la presión de la probeta sobre el cuerpo desgastado.

Tiene como límite la de la substancia que une los granos al papel, así como la de éste mismo.

En general, no debe pasarse de 1 kg. por cm.<sup>2</sup>

En cada metal es distinta la curva que relaciona los desgastes con las presiones, variando también con la dureza de los esmeriles, haciéndose más rápido el aumento del desgaste.

2) *Superficie.*—El desgaste es proporcional a la superficie en contacto con el esmeril; su forma es indiferente, no conviniendo que sea poligonal, pues con los vértices se producen bruscos arranques del grano del papel.

3) *Velocidad.*—La velocidad aumenta la potencia del desgaste para un mismo recorrido y en las mismas condiciones de presión.

Este efecto se explica por el hecho de que la fuerza viva del grano proyectado sobre la superficie a estudiar crece con el cuadrado de la velocidad.

Con el paso de un mismo número de granos por la superficie de la probeta, cuanto mayor sea su fuerza viva el trabajo será mayor y, por lo tanto, más considerable el desgaste.

Según la naturaleza de los metales varía el grado de proporcionalidad.

4) *Naturaleza del cuerpo desgastante.*—Como es natural, influye grandemente esta circunstancia en el desgaste.

El tamaño del grano influye también en el valor numérico de los resultados, sin cambiar mucho la clasificación.

Para los aceros al carbono no duros el desgaste crece con el tamaño del grano; en los aceros duros se arrancan o se redondean.

En el Laboratorio de la Escuela Central de París se han fijado, como esmeriles reglamentarios, los de la casa *Denis Poulot*, núm. 3, y el número 2,5 de Vakey.

### CONCLUSIONES.

Como consecuencia de todo lo expuesto respecto a este método de ensayo, no olvidando que cada modo de operar puede clasificar en distinto orden los cuerpos ensayados, deduzco las siguientes:

1.<sup>a</sup> Es preciso tener gran cuidado en el uso de este ensayo, pues por ser método de medida que puede verificarse de muchas maneras, puede dar apreciaciones muy variadas.

2.<sup>a</sup> Hay que desconfiar de las conclusiones deducidas por analogía en este género de ensayo si no corresponden exactamente las circunstancias en que se practique.

3.<sup>a</sup> Puede aplicarse este método para deducir la potencia desgastante de un cuerpo con relación a otro.

*Estudio del acero al carbono.*—Las condiciones del ensayo han sido las siguientes: tres minutos de duración en pista de 145 mm. de diámetro, con una velocidad de 1,15 m. por segundo y presión de 1 kilogramo por cm.<sup>2</sup>

Muy interesantes son los resultados obtenidos y muy dignos de tenerse en cuenta, sobre todo en la redacción de los «Pliegos de condiciones» para carriles, material que está sometido a desgaste constante, siendo, por lo tanto, de gran importancia dotarles de las condiciones necesarias para que presenten resistencia máxima al desgaste, haciendo entrar en su composición los elementos necesarios para ello, siempre que éstos no sean perjudiciales para su resistencia, o que, sin perder ésta, los haga demasiado frágiles.

Esta parte de los ensayos al desgaste es, por consiguiente, la más importante y de la que pueden deducirse consecuencias más útiles.

Parece natural que la resistencia al desgaste sea mayor en los aceros al carbono cuanto más duros sean éstos, o bien cuanto mayor sea la dosis de carbono que posean; pero las experiencias no han confirmado estas presunciones.

Después de repetidos ensayos en múltiples lotes de aceros de dis-

tinta composición, se han reunido y coleccionado los resultados, los que son muy concordantes.

En el primer lote de aceros tienen todos ellos idéntica composición, por lo que se refiere al Mn, Si y Ph; varían las dosis de carbono.

Las dosis comunes de los cuerpos ya mentados, son:

Mn.....	0,25 a 0,30	por 100
Si.....	0,20	por 100
Ph.....	0,015 a 0,04	por 100

Los resultados obtenidos se anotan a continuación, habiéndose utilizado en los ensayos el esmeril núm. 3 de *Denis Poulot*:

	Dosis de carbono.	Número de desgaste.
C.....	0,07 por 100	170
C.....	0,12 —	198
C.....	0,25 —	175
C.....	0,38 —	204
C.....	0,60 —	143
C.....	0,65 —	110
C.....	0,83 —	100
C.....	1,00 —	101
C.....	1,03 —	81
C.....	1,80 —	47

Se observan en esta relación dos anomalías: la primera al segundo tipo ensayado; la segunda al cuarto, o sea la que tiene por dosis 0,38 por 100, a la que precisamente corresponde el número máximo de desgaste, o sea el mínimo de resistencia a este trabajo; es muy interesante esta observación, pues corresponde precisamente a las dosis de carbono aproximada a la que tienen los carriles más usados en España (0,45 a 0,55).

De esta serie de ensayos se deduce la conveniencia de introducir algún otro componente, o aumentar la dosis de algunos de los existentes para aumentar dicha resistencia.

Veamos los resultados obtenidos variando las dosis de Mn y Si para dosis constantes y pequeñas de C.

Se indican las composiciones de los aceros ensayados, así como los números de desgaste obtenidos:

COMPOSICIÓN				Número de desgaste.	
C.....	0,07	por 100	Mn.....	0,26 por 100	161
C.....	0,07	—	Mn.....	0,38 —	170
C.....	0,38	—	Mn.....	0,81 —	160
C.....	0,038	—	Mn.....	0,90 —	154

Se observa en los dos primeros ensayos que aunque las dosis de carbono son débiles los números de dureza no son crecidos.

Los dos últimos aceros son muy interesantes, por corresponder a las dosis de carbono que en la primera serie de ensayos daban el minimum de resistencia o máximo de desgaste, habiendo bajado el número correspondiente en 49 unidades por ser superior la dosis de Mn.

Esto puede servir de norma para fijar la composición química que deben tener los aceros de carriles, en los que, si bien hay que dar dosis de carbono relativamente altas, para proporcionar una buena tenacidad al metal, debe agregarse Mn y Si para hacer al material apto para resistir el desgaste, sin perder de un modo apreciable aquella condición.

Estudiemos ahora la influencia de Ph:

COMPOSICIÓN				Número de desgaste.	
C.....	0,12	por 100	Ph.....	0,02 por 100	198
C.....	0,10	—	Ph.....	0,16 —	123
C.....	0,06	—	Ph.....	1,00 —	81

Resulta muy regular la influencia de la dosis de Ph en los aumentos de resistencia al desgaste; según estos ensayos, debería aumentarse la dosis de Ph en los aceros para carriles, pero no hay que olvidar lo quebradizos y frágiles que resultan, no adecuados, por lo tanto, para el trabajo que tienen que resistir. Debe, pues, proibirse el aumento de resistencia al desgaste mediante la agregación de este cuerpo, y limitarse por ahora a la adición de Mn y Si.

Como propiedad general, puede establecerse que el martillado, prensado y trabajo del acero aumenta su resistencia al desgaste.

*Acción de las llantas en los carriles.*—Robin ha realizado diversos ensayos en los carriles y ha podido observar que en sus cabezas, después de algún tiempo de uso, se va formando una capa de material que cada vez va adquiriendo mayor dureza (debido al golpeado de la

rueda-ecruissage), la que decrece según aumenta la distancia a la superficie.

Esta zona, representada en la *figura 21*, experimenta además en los puntos de vía en que la velocidad es menor, entradas de estaciones, etc., una cierta alteración, presentándose bandas de sórbita con una resistencia grande al desgaste, siendo su fragilidad tan extraordinaria que, a veces, determina la fragmentación de la cabeza por grietas normales al eje de la vía.

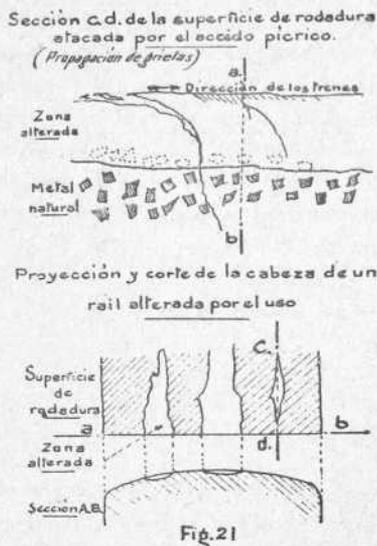


Fig. 21

Estas grietas pueden propagarse con el tiempo al interior del carril, produciendo su rotura.

Si se pudiera dar a los carriles, aunque fuese superficialmente, la estructura sorbítica atenuada sería una gran ventaja, pero es algo peligroso por resultar frágil.

*Ensayos de Nusbaumer.*—Para sus experiencias utilizó la máquina *Derihón*, que se encuentra representada en la *figura 22* y cuya descripción se detalla seguidamente.

Se compone de un disco de acero extra-duro, que gira dentro de un recipiente lleno de aceite en su tercio, tiene 1 m. de circunferencia, pudiendo variar su velocidad de 500 a 3.200 vueltas por minuto, co-

respondiendo a una velocidad tangencial comprendida entre 8 y 53 metros por segundo.

La probeta que se desea estudiar, de forma cilíndrica, cargada con un peso conocido, se apoya sobre la periferia del disco, está fuertemente sujeta a una pieza dispuesta para evitar vibraciones, así como las fugas de aceite al ser éste proyectado constantemente en el asiento de la probeta; un nivel exterior permite comprobar la lubricación.

La presión con que está cargada la probeta se obtiene por un sistema de palancas, que permiten al mismo tiempo medir el desgaste de aquélla.

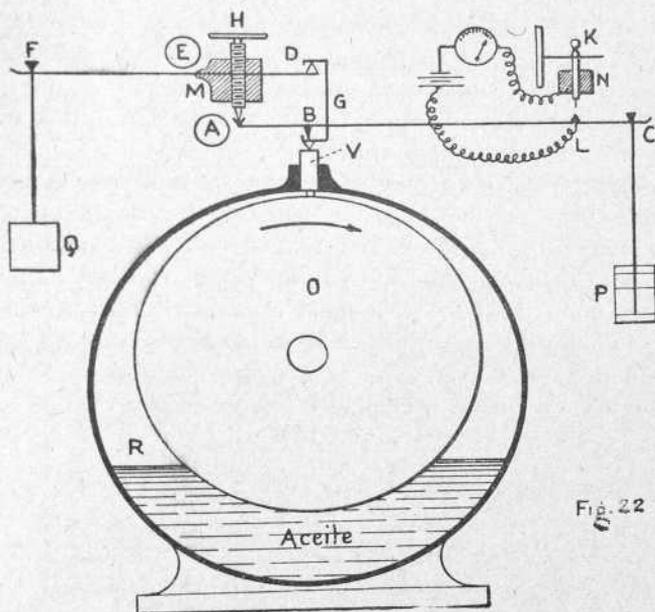


Fig. 22

La palanca  $ABC$ , fija en  $A$ , se apoya constantemente en la probeta en el punto  $B$  y se encuentra cargada en  $C$  con un peso conocido, conociéndose la carga en  $B$  dada la relación de los brazos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{12}.$$

Otra palanca  $DEF$  que en  $F$  sostiene un contrapeso con el punto  $F$  fijo, sostiene en  $D$ , por intermedio de la pieza  $G$ , a la palanca  $ABC$  en equilibrio, cuando ésta no tiene carga en  $C$ .

Al desgastarse la probeta, el punto  $B$  desciende una cierta cantidad igual a este desgaste vertical, el punto  $L$  también descenderá una cantidad  $\frac{AL}{AB} = 10$  veces el desgaste de la probeta.

Siendo  $N$  un punto fijo, con el tornillo micrométrico  $K$ , que aprecia centésimas de milímetro, se apreciará lo que el punto  $L$  desciende, o sea, en resumen, el desgaste de la probeta, con una aproximación de 0,001 de mm.

Para hacer esta lectura, se coloca primeramente la palanca  $ABC$  horizontal, por medio del tornillo  $H$ , quedando en contacto  $K$  con  $L$ ; una vez efectuado el ensayo, se ponen nuevamente en contacto en los dos puntos, haciéndose la lectura para evitar errores cuando funcione un galvanoscopio, unido a ambos por intermedio de una pila.

Se mantiene la temperatura constante por medio de una corriente de agua que refrigera toda la máquina, colocándose en  $V$  un termómetro para seguir la temperatura de la probeta.

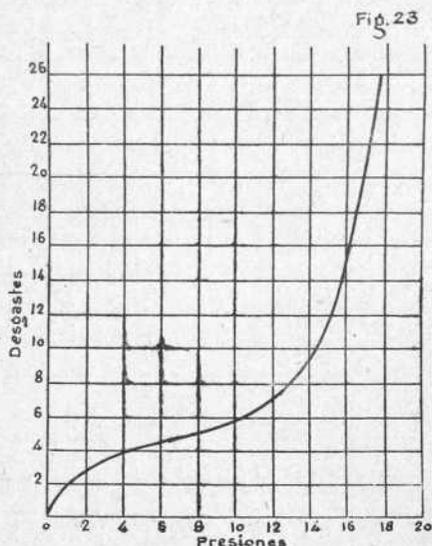
Las características constantes de todos los ensayos practicados por *Nusbaumer* con esta máquina, han sido: Presión de 48 kilos por centímetro cuadrado, el disco giraba a 3.200 vueltas por minuto, durando la operación el tiempo preciso para que diese 10.000.000 de vueltas y se tomaba como número de desgaste el número de resistencia.

En el cuadro que se inserta a continuación se indican los resultados obtenidos con diez tipos de acero, detallándose su composición, así como los principales coeficientes que los caracterizan:

ACEROS.	COMPOSICIÓN.										COEFICIENTES.			
	C	Mn	Si	S	Ph	Cv	Ni	Rotura.	Límite de elasticidad.	Dureza.	Desgaste.			
Ordinarios. {	1	0,20	0,10	0,02	0,05	»	»	65	38	156	85			
	2	0,43	0,30	0,02	0,06	»	»	82	50	255	151			
	3	0,06	0,50	0,02	0,03	0,01	»	40	25	99	325			
Especiales. {	4	0,36	1,70	0,16	»	»	»	77	56	187	57			
	5	0,38	1,35	0,08	»	»	»	89	71	187	80			
	6	0,34	1,20	0,06	»	»	»	92	74	196	200			
Templados. {	7	0,43	0,80	0,30	0,02	0,06	»	130	123	340	89			
	8	0,06	0,50	0,02	0,03	0,01	»	»	»	228	25			
Al níquel. {	9	0,08	0,33	0,16	0,01	0,01	4,76	»	»	444	20			
	10	0,28	0,48	0,22	0,01	0,02	4,55	170	160	387	28			

Los resultados apuntados en el primer grupo, constituido por los tres aceros, 1, 2 y 3, permiten deducir análogas consecuencias respecto a los efectos producidos por el C, Mn y Si, que los deducidos por Robin en sus ensayos, es decir, la menor influencia del C y el gran efecto del Mn y Si, así como la menor resistencia al desgaste en los aceros con dosis aproximadas al 0,40 de C.

Las relaciones entre las presiones y desgastes adoptan formas parecidas a la curva representada en la *figura 23*, creciendo al principio rápidamente con las presiones, después más lentamente y, por último, de un modo muy rápido, quedando asíntótica de una paralela al eje de los desgastes.



*Experiencias Saniter.*—E. Saniter, de Rotherdam, concurrió el año 1909 al concurso celebrado por el *Iron and Steel Institute*, ya mentado al hablar de los ensayos de Robin, presentando un aparato que esquemáticamente está representado en la *figura 24*, y cuyo principio es el siguiente:

La probeta *F* gira sujeta por una garra *K* accionada oportunamente; el extremo de la probeta sirve de apoyo a un anillo *P*, al que hace girar por rozamiento, el cual, por intermedio de un juego de bo-

las, se mueve dentro de otro anillo exterior *E*, cogidos ambos por la pieza *N*, suspendida de la palanca *C* cargada con un peso.

El anillo interior *P* es de acero al níquel al 6 por 100, con una dureza Brinell 555.

Las cifras de desgaste de Saniter corresponden a 0,0001 de pulgada, en que el diámetro de las probetas normales ha sido reducido para un número fijo de vueltas, variables de unos a otros.

En el resumen de todos estos trabajos que se hace a continuación, se copian algunos de los resultados obtenidos por Saniter.

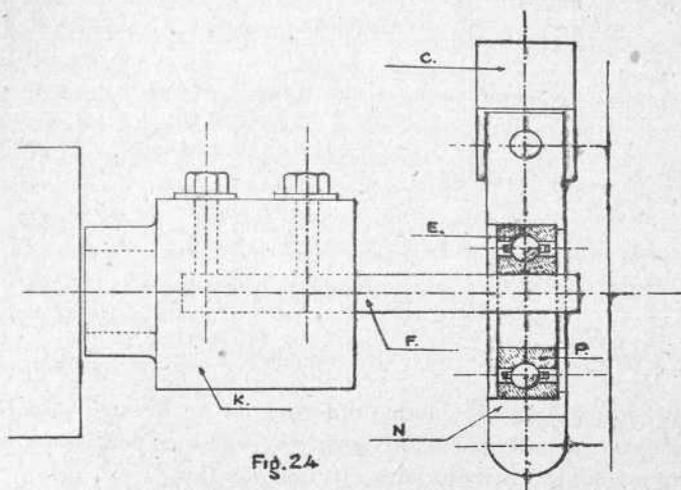


Fig. 24

*Comparación con otros métodos para determinar la dureza.*— Aunque sean muchos los procedimientos que pueden usarse para determinar la dureza de los cuerpos, me limitaré en estas consideraciones al método Brinell, no sólo por ser el extensamente estudiado en esta Nota, sino porque es el que más afinidad tiene con el método de desgaste para hallar la dureza superficial de los materiales.

Recordando la clasificación que al principio de esta segunda parte se ha hecho de las distintas formas en que el desgaste podría producirse, veremos que los métodos para su determinación ya reseñados se ajustan bien a aquéllos.

a) Desgaste sencillo.— Los canchilones de los elevadores.— Método Robin.

b) Desgaste lubricado.—Elementos de las máquinas.—Método Nusbaumer con máquina Derihon.

c) Desgaste en seco.—Paso de las ruedas por los carriles.—Método Saniter.

Se resumen a continuación para cada uno de estos ensayos los resultados en los mismos obtenidos, así como los hallados en el método Brinell en los mismos materiales, con objeto de ver si del segundo se pueden sacar deducciones respecto al primero, o es preciso para el perfecto conocimiento de los metales efectuar los dos ensayos.

GRUPO a).		GRUPO b).		GRUPO c).	
Número de Brinell.	Número de desgaste.	Número de Brinell.	Número de desgaste.	Número de Brinell.	Número de desgaste.
95	160	99	325	202	39
160	55	»	»	223	22
155	170	156	85	228	43
180	58	187	57	241	47
190	204	187	80	250	48
250	47	196	200	252	38
255	202	255	151	269	36
355	27	340	89	288	46
453	105	387	28	288	61
574	27	»	»	315	25

De la observación del cuadro anterior no se deduce relación fija ni regla alguna que ligue los dos ensayos; luego es preciso para conocer completamente los materiales efectuar los dos.

Por lo tanto, si se considera necesario, o por lo menos conveniente, que en los ensayos de los materiales destinados a ser empleados, sobre todo en ferrocarriles, en los que tanto afecta a la seguridad de la explotación cualquier defecto que pase inadvertido en la recepción, así como también tiene tanta transcendencia económicamente que si se adquiere una gran partida de material, como por ejemplo, carriles sin que reúnan todas las condiciones necesarias para que tengan toda la larga vida que se les puede y debe exigir, y resulta ésta más corta por sufrir rápida inutilización, por desgaste, es natural que se adopten todas las precauciones para comprobar su verdadera aptitud y utilidad.

En este mismo sentido se ha ocupado Von R. Schaibe, consejero en Dresde de los ferrocarriles sajones, en el estudio que ha publicado en *Zeitung des Vereins Deutscher Eszanbah*, en el cual anota la falta del ensayo de dureza al desgaste en los «Pliegos de condiciones», e

inserta un largo y amplio cuadro, que no se copia por su extensión, en el que hace resaltar las contradicciones existentes en los aceros para carriles empleados en casi todos los ferrocarriles alemanes y austro-húngaros, entre el coeficiente de calidad de cada uno de ellos (deducidos de muy diverso modo), y los desgastes producidos por el peso de diverso número de millones de toneladas necesario para producir el desgaste de 1 mm. en el material colocado.

Para llenar esta laguna—dice—conviene tener muy en cuenta las cifras expuestas, y preconiza el empleo del ensayo al desgaste, bien por las piedras-arena, a gran velocidad, etc.

En vista de todo lo expuesto, tengo la honra de proponer al Congreso la siguiente conclusión por lo que se refiere a la segunda parte de esta Nota:

CONCLUSIÓN 2.<sup>a</sup>—*Procede y es conveniente incluir en los « Pliegos de condiciones » para la recepción de materiales metálicos, y en especial de carriles, algún ensayo que determine la resistencia al desgaste, por ahora sólo a título informativo, en número igual, por lo menos, al del actual ensayo de tracción, e insistir cerca de las entidades que posean elementos para ello, continúen los ensayos de esta clase, por la gran utilidad que han de reportar para el completo conocimiento de los materiales metálicos.*

CUADRO A.

## Aceros con número de dureza inferior a 175 (según Charpy).

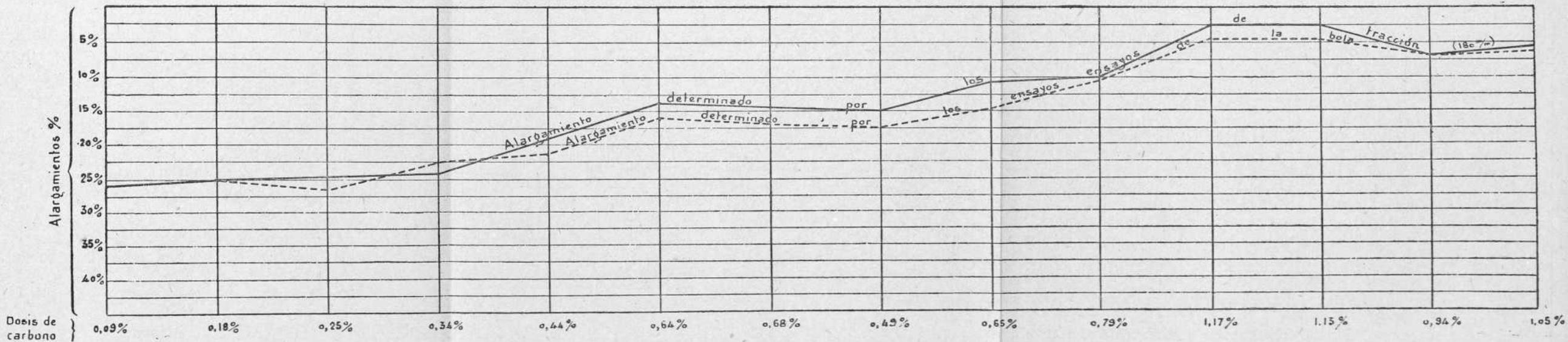
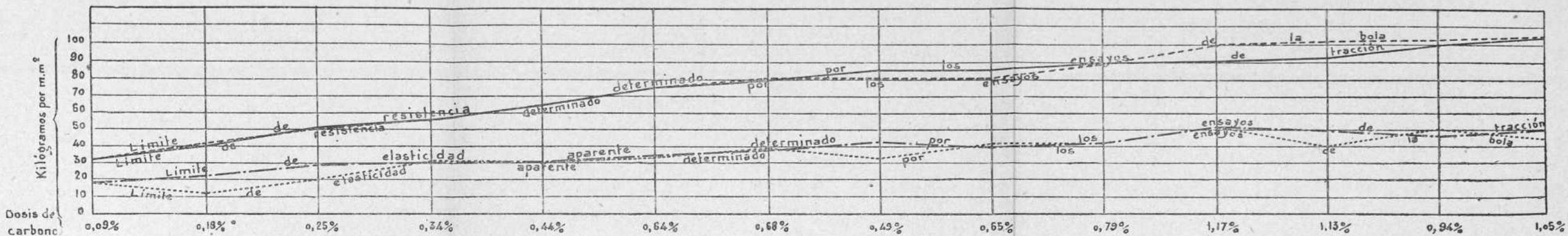
Resistencia a la tracción R.	Número de dureza Δ.	$\frac{R}{\Delta} = C$	Resistencia a la tracción deducida del número de dureza.	Diferencia.	Resistencia a la tracción R.	Número de dureza Δ.	$\frac{R}{\Delta} = C$	Resistencia a la tracción deducida del número de dureza.	Diferencia.
kg. × mm. <sup>2</sup>			kg. × mm. <sup>2</sup>	Por 100	kg. × mm. <sup>2</sup>		*	kg. × mm. <sup>2</sup>	Por 100.
30,4	80,0	0,380	28,1	7,6	46,8	137,2	0,341	48,2	3,0
32,1	91,2	0,395	32,0	0,3	46,8	141,4	0,331	49,6	6,0
35,4	95,6	0,370	33,6	5,1	49,1	140,8	0,346	49,4	6,1
36,4	92,0	0,395	32,3	11,3	49,1	142,0	0,345	49,8	1,4
36,8	100,8	0,365	35,4	3,8	50,1	146,8	0,341	51,5	2,8
36,8	106,4	0,345	37,3	1,4	50,8	152,4	0,333	53,5	5,3
38,1	112,4	0,339	39,5	3,7	51,1	148,6	0,344	52,1	2,0
38,8	110,0	0,352	38,6	0,5	51,8	146,8	0,353	51,5	0,6
39,1	114,4	0,342	40,2	2,8	52,1	146,8	0,355	51,5	1,1
40,1	118,0	0,340	41,4	3,2	54,2	162,9	0,333	57,2	5,5
41,1	118,8	0,358	40,3	2,0	54,8	153,1	0,356	53,7	2,0
41,5	114,4	0,363	40,2	3,1	54,8	155,2	0,353	54,5	0,5
41,5	120,0	0,346	42,1	1,4	55,1	158,7	0,347	55,7	1,1
42,1	113,6	0,371	39,9	5,2	55,8	165,75	0,337	58,2	4,3
42,8	116,0	0,369	40,7	4,9	56,4	162,9	0,346	57,2	1,4
41,3	126,4	0,341	44,4	3,0	56,4	166,5	0,339	58,4	3,5
43,8	130,0	0,337	45,6	4,1	56,8	166,5	0,341	58,4	2,8
44,1	121,0	0,364	42,5	3,6	58,1	171,75	0,338	60,3	3,8
44,1	130,0	0,339	45,6	3,4	59,4	169,5	0,350	59,4	0,0
46,8	132,4	0,353	46,5	0,6	60,8	174,2	0,349	61,1	0,5
							0,351		3,1

CUADRO B.

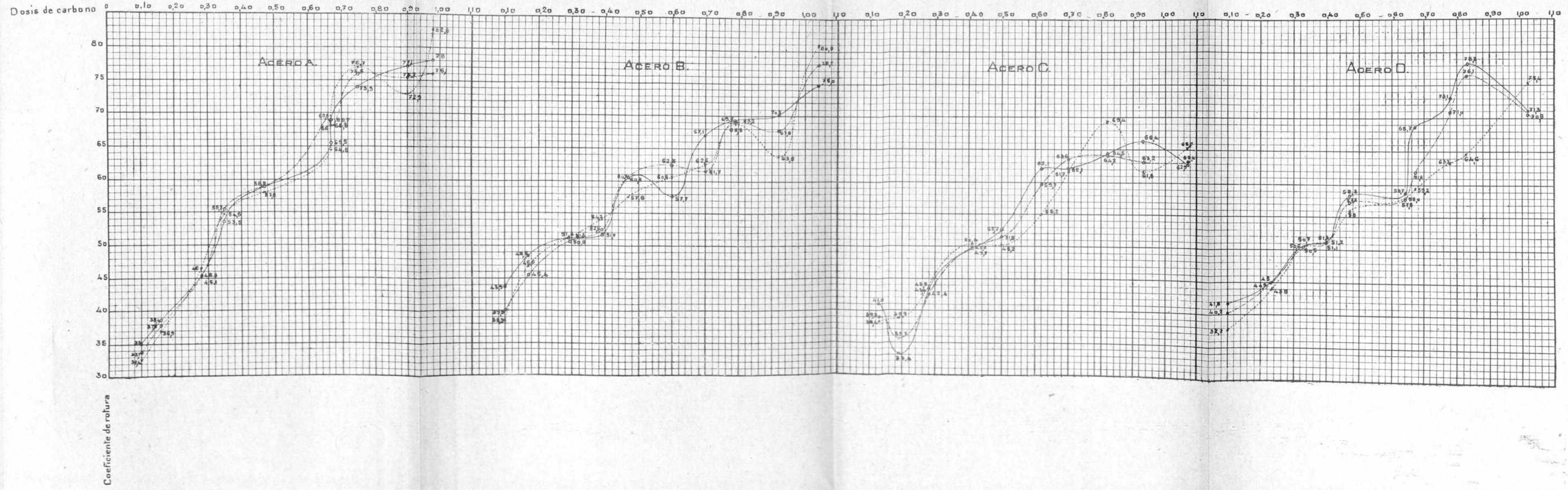
Aceros con número de dureza inferior a 175 (según Charpy).

Resistencia a la tracción <i>R</i> .	Número de dureza $\Delta$ .	$\frac{R}{\Delta} = C$	Resistencia a la tracción deducida del número de dureza.	Diferencia
<i>kg. × mm.<sup>2</sup></i>			<i>kg. × mm.<sup>2</sup></i>	<i>Por 100.</i>
57,1	175,0	0,326	58,8	3,0
59,4	175,15	0,339	58,9	0,9
61,5	175,9	0,350	59,1	2,3
62,1	188,65	0,329	63,4	2,1
62,7	182,7	0,343	61,4	2,1
64,4	185,25	0,347	62,3	3,3
65,4	187,8	0,348	63,1	3,5
66,1	196,3	0,337	66,0	0,2
66,8	200,0	0,334	67,2	0,6
68,1	204,0	0,334	68,5	0,6
69,4	199,0	0,348	66,9	3,6
69,4	209,0	0,332	70,2	1,1
70,4	201,0	0,350	67,5	4,1
78,5	244,5	0,321	82,1	4,5
97,5	291,5	0,334	97,9	0,4
102,0	308,0	0,331	103,5	1,5
109,5	338,0	0,324	113,6	4,0
121,6	362,0	0,336	121,6	0
121,6	366,0	0,332	123,0	1,2
		0,336		2,1

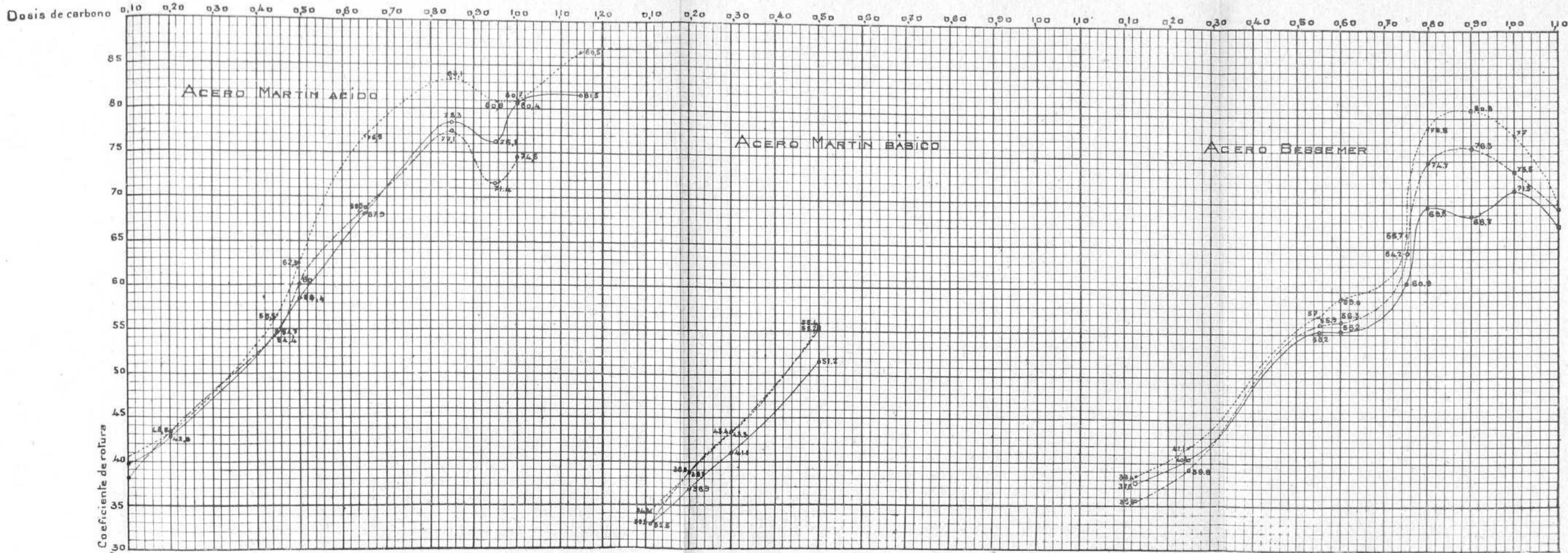












————— } Carga de rotura determinada en el ensayo con bola { presión paralela al sentido del laminado  
 - - - - - } } presión perpendicular al sentido del laminado  
 ..... Carga de rotura determinada en el ensayo de tracción



# NOTA

SOBRE

## UN SISTEMA DE COMPUERTAS PARA PANTANOS

POR

D. PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

La Escuela especial de Ingenieros de Caminos presenta en la Exposición aneja a este Congreso un modelo de las compuertas que hube de proyectar en 1902 para el pantano del Guadalcaçín, entendiendo, sin duda, que representan una solución relativamente original, atendiendo sobre todo a la época en que fué propuesta, de los problemas que plantea el cierre y maniobra de los desagües y galerías de servicio de los pantanos. Dar una idea sucinta, pero lo más completa posible de las características del sistema y de sus condiciones de aplicación, es el objeto de la presente Nota.

Las principales dificultades que en estos cierres suelen presentarse proceden, en primer término, de la carga considerable que sobre la compuerta actúa y que es causa de resistencias al movimiento y motivo de fugas, que no sólo suponen pérdidas de embalse, por lo general poco importantes, sino que pueden producir, por las arenillas en suspensión que conduzca el agua, rara vez limpia en el fondo, dada sobre todo la velocidad considerable con que tiende a escapar, rayados en la superficie de ajuste que agravarían el daño, pudiendo provocar averías de mayor consideración.

Otra dificultad de importancia puede derivarse de los tarquines acumulados en el vano y que tienden a reunirse en la parte inferior, donde naturalmente habrán de colocarse las compuertas de fondo, cuyo objeto es dejar el pantano en seco cuando a ello obliga la necesidad de las limpias, la reparación de alguna avería u otra circunstan-

cia especial. Estos tarquines, envolviendo la compuerta si ésta se encuentra situada en el interior del pantano, pueden dificultar su movimiento tanto o más que la presión del agua y, aunque esta nueva resistencia fuera vencida, al elevarse la compuerta podría el vano quedar obstruido por una masa de escasa resistencia y en equilibrio poco estable, sobre la que sería peligroso actuar directamente y que podría presentar todavía un nuevo obstáculo para el cierre, sobre todo si la masa encerraba empastados cuerpos duros (piedras sobre todo) lo que es un caso bastante frecuente.

En las antiguas compuertas de deslizamiento estas dificultades no se encontraban resueltas sino de una manera imperfecta. Constituidas esencialmente por un tablero portador de un marco que viene a aplicarse sobre otro marco fijo al vano y efectuándose el movimiento en el mismo plano de ajuste de los dos marcos, si la presión actúa sobre la cara de la compuerta opuesta al marco fijo, el rozamiento que habrá que vencer durante la maniobra será considerable, a menos de ser muy reducidas las dimensiones del vano, y si es la cara opuesta la que se encuentra en contacto con el agua, será casi imposible alcanzar un ajuste conveniente que asegure la impermeabilidad.

En la época en que redactábamos nuestro proyecto (1902), las compuertas de deslizamiento eran, sin embargo, casi las únicas empleadas, tanto en España como en el extranjero, y la posición preferida aquélla en la que el empuje del agua favorece el cierre, posición que si tiene esta ventaja indudable, presenta, en cambio, los inconvenientes arriba apuntados, especialmente en el caso de haber tarquines. Para evitar éstos se recurría a alojar las compuertas en pozos o galerías donde los sedimentos no tuvieran fácil acceso y a impedir, por medio de maniobras frecuentes, que llegaran a acumularse en cantidades tales que pudieran obstruir el desagüe.

Los excesivos rozamientos que en este sistema se desarrollan se superaban o bien a expensas de la duración de la maniobra, mediante mecanismos que multiplicaran el esfuerzo, o con el empleo de motores hidráulicos que substituyeran el trabajo a brazo y que tomaban su energía, ya de acumuladores especiales o ya de la que representaba la caída entre el nivel del agua en el pantano y en el cauce exterior; pero como por lo general los pantanos se encuentran situados en parajes alejados de población, donde faltan operarios y medios para la reparación de mecanismos algo complicados, aun en el caso de instalaciones hidráulicas se solía prever la maniobra a brazo para caso de avería.

Para reducir estos esfuerzos, algunos ensayos se habían hecho (no precisamente en pantanos profundos sino en algunas tomas de canales sometidas siempre a cargas más débiles) de compuertas soportadas por ruedas o rodillos que substituyeran total o parcialmente el rozamiento de deslizamiento por el de rodadura, mucho más pequeño a igualdad de presión. Estos ensayos, hechos principalmente en canales de la India, habían dado ya origen al sistema Stoney, en que el objeto se lograba mediante trenes de rodillos independientes de la compuerta e interpuestos entre ésta y las partes fijas del vano.

Esta interposición era causa de que los ajustes entre los marcos fijo y móvil fueran poco precisos, con perjuicio de la impermeabilidad, y los rodillos mismos, situados en el interior del embalse, si llegaban a quedar envueltos por los tarquines, encontrarían nuevas resistencias al movimiento, que harían un poco ilusorias las ventajas que se trataban de obtener. Además, en el sistema de Stoney, como los rodillos son independientes de la compuerta, no acompañan a ésta en su movimiento, sino que quedan retrasados, siendo su carrera solamente la mitad que la de aquélla, de modo que, a menos de disposiciones especiales, encuéntranse expuestos al paso del agua.

Por todas estas razones, el sistema no se había extendido a los pantanos propiamente dichos, hasta que fué empleado en la presa de Asuán, que quedó terminada precisamente el año mismo en que redactábamos nuestro proyecto, y aun en este caso, dado el número considerable de vanos situados a alturas distintas, no es preciso hacer maniobras con cargas superiores a 9 m. Parece que se hacen con gran facilidad, pero la impermeabilidad es bastante precaria.

En nuestro caso, la carga máxima sobre el desagüe de fondo era de 30 m. y nos pareció un poco arriesgado el empleo a esas profundidades del tren Stoney, independiente de la compuerta, que podría verse anegado en una corriente de velocidad considerable, capaz de sacarlo de sus guías, sobre todo cuando al llegar la compuerta al final de su carrera faltara a aquél la presión que le mantuviera en la posición prevista. Nos pareció preferible recurrir a rodillos, cuyos ejes giraran en cojinetes fijos a la compuerta, pues aunque de este modo no se suprimieran en absoluto los deslizamientos, se evitaba el peligro de dislocaciones y, dadas las dimensiones del vano de 1 m. de ancho por 1,50 de altura, las resistencias quedarían siempre reducidas dentro de límites prácticamente admisibles.

Era conveniente, además, por las razones apuntadas más atrás, asegurar el funcionamiento normal de los rodillos alejándolos del con-

tacto con los tarquines, y para ello se los colocó en la cara de la compuerta que mira hacia aguas abajo.

Por último, para conseguir un ajuste lo más perfecto posible, a pesar de emplear una compuerta que el empuje del agua tendía a separar del marco fijo, se dió a ésta la forma de cuña que permite regular el contacto de los marcos haciendo descender el sistema móvil hasta que el cierre sea completo, lo que siempre será posible si las superficies son bien planas y se mantienen durante las maniobras perfectamente paralelas.

Se llegaba así a la disposición que se representa esquemáticamente en la *figura 1.<sup>a</sup>*

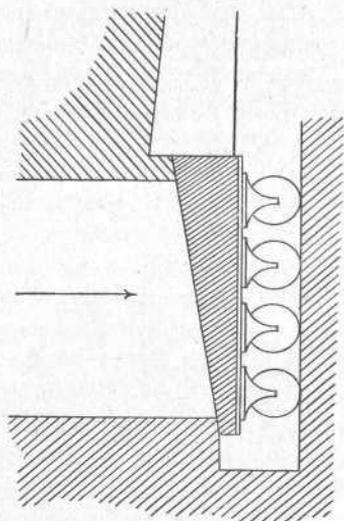


Fig. 1.<sup>a</sup>

Es claro que en este caso el objeto se conseguirá con un descenso tanto menor cuanto mayor sea la inclinación de los marcos, pero al crecer ésta, aumenta también la componente vertical del empuje que se opone al cierre. En la mayoría de los casos bastará una inclinación pequeña, que no supondrá para el empuje ascendente intensidad superior al peso propio de la compuerta, con lo que podrá mante-

nerse el contacto una vez alcanzado, sin necesidad de ejercer con los mecanismos de maniobra presiones permanentes que vencieran la resultante perjudicial.

Se concibe que con este sistema la maniobra de abrir el pantano se facilita considerablemente, pero es necesario que el montaje sea bastante preciso para que se pueda obtener un buen cierre. Por otra parte, en previsión de posibles averías, es conveniente contar con más de una compuerta, y por una y otra razón se proyectaba, además de la ya descrita, otra situada inmediatamente hacia aguas abajo, también de forma de cuña y montada sobre rodillos, pero con una inclinación opuesta a la de la primera.

En esta segunda compuerta, no sólo el empuje del agua contribuye al cierre, sino que encontrándose del mismo lado del tablero el marco y los rodillos, se encuentran contiguos también en la parte fija el marco y los caminos de rodadura, que pueden hacerse solidarios y ajustarse

en talleres con una precisión mucho mayor que la que puede obtenerse en obra con piezas independientes.

Entre ambas compuertas queda, en nuestro caso, una pequeña cámara que se prolonga superiormente mediante un pozo que llega hasta la coronación de la presa, donde se encuentran los mecanismos de maniobra resguardados de la intemperie en una casilla especial. Pero esta disposición no es esencial al sistema, pues los mecanismos podrían colocarse igualmente en una cámara de maniobras situada inmediatamente encima de la cámara de compuertas, bien en el interior del macizo de la presa o adosada a su paramento de aguas arriba, si así se lo prefiere para no debilitar la obra. El pozo, en tal caso, podría servir sólo para el acceso, que podía obtenerse también mediante una galería horizontal, como es uso bastante generalizado en los pantanos modernos.

Fácilmente se comprende que esta segunda compuerta ha de exigir mayor esfuerzo para ser levantada, aunque siempre menos que una compuerta ordinaria de deslizamiento, si la inclinación de los marcos se mantiene dentro de límites reducidos, pero la existencia de la primera hace posible no maniobrar en ningún caso la segunda, sino bajo cargas pequeñas, a cuyo efecto va provista de un grifo del que puede hacerse uso en la forma siguiente:

Si el pantano estuviera lleno y la compuerta de aguas arriba levantada, el nivel del agua en el pozo sería el mismo que en el embalse y la carga máxima actuaría sobre la compuerta de aguas abajo; pero si se baja la de aguas arriba, el pozo quedará ya aislado y será posible vaciarlo abriendo el grifo, con lo que quedaría ya la compuerta sin carga y podría ser levantada sin dificultad, elevando en seguida la de aguas arriba y dejando abierto el pantano. El cierre se hará siempre fácilmente con la compuerta de aguas abajo que, además de descender por su propio peso, sería aplicada con fuerza contra el marco fijo por el mismo empuje del agua.

La compuerta de aguas arriba va provista también de otro grifo, cuyo objeto es cerciorarse antes de levantarla de que no se encuentra en contacto con tarquines que pudieran mantener obstruido el desagüe. Si así ocurre, el grifo no daría agua, pero introduciendo por él barras que removieran los sedimentos, podrán practicarse con toda seguridad orificios por donde se establezca una corriente que acabe por arrastrar los limos cuando la compuerta sea levantada.

Tal es el sistema en sus líneas generales. En cuanto a los mecanismos pueden ser cualesquiera, con tal de que puedan desarrollar el

esfuerzo de tracción necesario. Para calcularlo debe tenerse presente que, aunque durante casi toda la maniobra no existe contacto entre los marcos, en el momento de la arrancada habrá que vencer, si el ajuste es preciso, el rozamiento íntegro que además, como es sabido, es máximo a la partida. Como esto no ocurre sino en los primeros momentos y no sería práctico disponer para tan corto tiempo un suplemento de fuerza, convendrá que los mecanismos puedan marchar a dos velocidades distintas, la una rápida, que es la que deberá aplicarse durante la mayor parte de la maniobra, y lenta la otra hasta que sea vencida la resistencia adicional y la compuerta descansa ya íntegramente sobre los rodillos.

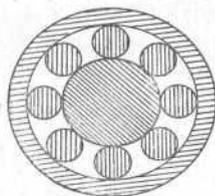
Posteriormente a nuestro proyecto, se han ideado y construido en los Estados Unidos las compuertas del pantano de Roosevelt que, aparte de las dimensiones y ciertas disposiciones de detalle, sólo se diferencian de nuestra compuerta de aguas abajo en que, en vez de llevar rodillos cuyos cojinetes vayan fijos invariablemente al cuerpo principal, va apoyada en trenes Stoney. La misma disposición se ha empleado en España en el pantano de La Peña por mi distinguido compañero D. Severino Bello, y en el pantano de Riudecañas, su competente Ingeniero Director D. José M. Pérez de Petinto, ha adoptado la doble compuerta con inclinaciones opuestas características del sistema descrito, aunque substituyendo también los rodillos fijos por los trenes independientes del sistema Stoney.

Es indudable que de este modo se reducen los rozamientos, teóricamente al menos, a puras rodaduras, pero en la práctica pequeñas desviaciones, favorecidas por independencia entre los rodillos y el cuerpo de la compuerta y agravadas por los remolinos de la corriente, que escapa a velocidad considerable, pueden hacer un poco ilusoria esta ventaja, como ya hemos hecho notar más atrás. Ello será, sobre todo, temible cuando la compuerta se encuentre casi del todo levantada, y se reduzca, por consiguiente, hasta casi anularse la presión que mantiene a los rodillos contra las guías.

Para evitar que se desprendan los trenes deben ser suspendidos por medio de cables que no deberán ser muy gruesos si no han de presentar una rigidez exagerada, lo que ha inducido en algunos casos, como en Asuán, a aumentar el número de ramales y con ellos el riesgo de averías. Estos cables, mantenidos en un ambiente excesivamente húmedo, están, en efecto, expuestos a la oxidación y pueden perder rápidamente su resistencia primitiva, y entonces los rodillos pueden desprenderse al efectuarse las maniobras, como ha ocurrido ya alguna vez.

Estos inconvenientes podrían evitarse conservando, sin embargo, la ventaja teórica de la supresión de los deslizamientos, constituyendo cada rodillo de apoyo por una llanta que girara alrededor de un eje, fijo invariablemente al cuerpo de la compuerta, por el intermedio de una corona de otros rodillos más pequeños, en la forma indicada por la *figura 2.<sup>a</sup>* Fué lo que propuse en otro proyecto posterior al revisar y completar el primitivo, para proceder a la construcción inmediata de esta parte de la obra; pero como ni la carga ni las dimensiones de las compuertas son en nuestro caso de las más considerables y los esfuerzos que, por lo tanto, se desarrollan pueden ser vencidos a brazo sin grandes dificultades, se prescindió, al fin, de la disposición mencionada, que hubiera sido motivo de aumento

de gasto, tanto por la mayor complicación que supondría, como por exigir una gran precisión en el trabajo, si las hipótesis teóricas habían de verse realizadas con la necesaria aproximación. Sería utilizable, sin embargo, en casos en que sea de mayor importancia la reducción de las resistencias.

Fig. 2.<sup>a</sup>



## GIROSCOPIO, II <sup>(1)</sup>

# AMORTIGUAMIENTO Y PERCUSIÓN

POR

D. MATEO GARCÍA DE LOS REYES

TENIENTE DE NAVÍO, INGENIERO ELECTRICISTA

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

La realización física de un punto de giro consiste en disponer tres ejes concurrentes, alrededor de los cuales pueda moverse simultáneamente el sólido.

Este procedimiento permite que el punto de cruce sea cualquiera, exterior o interior al sólido, y las *dimensiones* de este punto pueden ser casi las del punto matemático, o sean nulas.

Una suspensión sistema Cardan es, prácticamente, la representación física más perfecta del *punto de giro*.

Tenemos, pues, medios de obtener mediante el cruce de los tres ejes un punto de giro de dimensiones tan pequeñas, que pueda considerarse prácticamente como un punto matemático, y con un sólido de revolución así montado tendremos realizado físicamente un giroscopio capaz de moverse alrededor de los infinitos ejes que pasan por el punto de cruce. Habremos obtenido, en una palabra, el punto de giro que podrá coincidir con el centro de inercia del sólido y abstraerle así a la acción del campo terrestre.

Entre este sistema de suspensión y el caso teórico no existe más diferencia que las resistencias pasivas, el rozamiento contra el aire y el de los cojinetes necesarios para obtener los tres ejes de giro.

El rozamiento contra el aire puede atenuarse a punto tal, que pueda considerarse como eliminado; queda, como medio supremo, el llegar

(1) Véase la Primera parte en Congreso de Granada, tomo IX, páginas 97-125.

a hacer el vacío en el recinto en que se mueve el giroscopio; pero los rozamientos contra los cojinetes, si bien el esmero en la construcción puede hacerlos pequeñísimos, jamás podrán descender por debajo de un límite, y tendrán su valor que, despreciable quizás en la mayor parte de los casos, no lo será en alguno determinado. Importa, por consiguiente, hacer ahora el estudio de la influencia de estas resistencias pasivas y ver cómo modifican los resultados que acabamos de encontrar para el caso teórico de no existir éstas.

En lo sucesivo, y mientras no se advierta lo contrario, supondremos que el movimiento de rotación propia  $\omega$  del sólido de revolución permanece constante a pesar de las resistencias pasivas.

El por qué de esta convención estriba en que, mientras que es im-

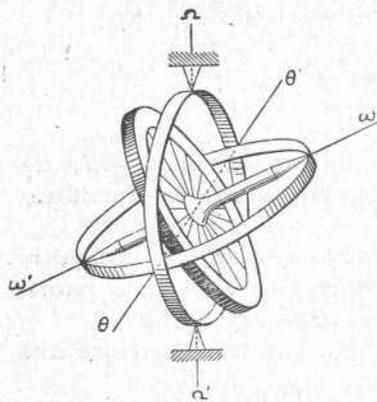


Fig. 1.<sup>a</sup>

posible anular los efectos que las resistencias pasivas ejercen sobre los movimientos en nutación y precesión, hay posibilidad práctica de mantener la velocidad de giro  $\omega$  uniforme, aunque existan resistencias pasivas, ya de los cojinetes, ya debidas al aire. Bastará suministrar al órgano móvil la energía que representan las pérdidas por rozamiento, lo cual es posible prácticamente.

Consideremos un giroscopio real, constituido por un sólido de revolución que puede girar alrededor de su eje de figura  $\omega\omega'$  (figu-

ra 1.<sup>a</sup>), y montado en suspensión Cardan, cuyos ejes  $\Omega\Omega'$  y  $\theta\theta'$  supondremos el uno vertical y el otro horizontal.

En estas condiciones es claro que el sólido puede moverse alrededor de los infinitos ejes que pasen por el punto de cruce de los tres,  $\omega$ ,  $\Omega$  y  $\theta$ ; este punto será, pues, un punto de giro. El eje  $\omega$  será el de la rotación propia, el  $\Omega$  el de la precesión, y el  $\theta$ , línea de los nodos, el de la nutación. Siendo  $\theta\theta'$  normal a  $\Omega\Omega'$ , el eje de la nutación describirá un círculo horizontal que cortará a una esfera de radio arbitrario cuyo centro coincida con el punto de cruce o giro, según un círculo máximo que llamaremos en adelante el ecuador. Las rotaciones del eje del sólido alrededor de  $\theta\theta'$ , harán que el eje del sólido corte a la esfera según círculos máximos verticales que llamaremos meridianos.

Si determinamos, como hemos hecho para los casos anteriormente

estudiados, la trayectoria que en la esfera sigue el punto en que la corta el eje del sólido, habremos determinado todas las incidencias del movimiento desde el punto de vista cinemático, y si al mismo tiempo tenemos conocimiento del valor de los pares que entran en juego, el estudio quedará completo dinámica y cinemáticamente.

Entre este caso y los estudiados anteriormente no existe otra diferencia que la existencia de las resistencias pasivas, debidas a las rotaciones que puedan existir alrededor de los ejes  $\Omega$  y  $\theta$  de precesión y nutación, porque, como hemos dejado ya advertido, prescindiremos de las correspondientes al eje  $\omega$ .

Es de todo punto evidente que estas resistencias son una cierta función de las velocidades de rotación. Teóricamente, esta función es muy compleja; probablemente una función exponencial de la velocidad y el valor del exponente variable con la magnitud de ella. En la práctica podemos adoptar una forma sencilla para esta función que nos permita el que las ecuaciones diferenciales que expresen el fenómeno sean *accesibles*, porque una buena construcción de los cojinetes y el escaso valor que tiene la velocidad de precesión permiten admitir que el valor del par, debido a los razonamientos contra dichos cojinetes y contra el aire, sea proporcional a la primera potencia de la velocidad, y si  $R$  es el valor en unidades absolutas del par engendrado por la velocidad unidad,  $R$ , multiplicado por el valor de la velocidad, será la expresión del par de amortiguamiento.

Los movimientos en nutación son rapidísimos, aunque de muy pequeña amplitud; el coeficiente  $R_1$  correspondiente será diferente de  $R$ , de modo que, en realidad, habría que contar en el planteo con dos coeficientes  $R$  y  $R_1$  distintos, lo cual no traerá otra consecuencia que hacer más penosas las transformaciones de cálculo; pero la consideración de que los movimientos en nutación, sobre ser de escasísima amplitud e insensibles en la mayor parte de los casos, en éste, como veremos pronto, quedan rápidamente amortiguados, nos ha llevado a suponer  $R = R_1$ , con lo cual se hacen menos laboriosos los desarrollos y se llega al mismo fin, que es el régimen permanente con idéntica exactitud.

Hechas ya todas las convenciones, pasemos al planteo y resolución de las ecuaciones diferenciales del movimiento.

La ecuación del movimiento del eje del giroscopio alrededor del eje  $\theta\theta'$ , línea de los nodos, o lo que es lo mismo, el movimiento del eje en el meridiano, la escribiremos diciendo que hay equilibrio entre el par perturbador  $C$  y los pares que nacen por efecto de su influencia.

Estos pares serán:

El par debido a la reacción de inercia del sólido, que valdrá  $i \frac{d^2\theta}{dt^2}$ .

El par debido a los rozamientos, o sea  $R \frac{d\theta}{dt}$  y el par giroscópico  $C'' = I\omega \frac{d\alpha}{dt}$ , cuyo nacimiento ha quedado suficientemente demostrado al hacer el estudio de los casos anteriores.

La ecuación será, pues,

$$i \frac{d^2\theta}{dt^2} + R \frac{d\theta}{dt} + I\omega \frac{d\alpha}{dt} = C, \quad [1]$$

análoga a la del caso antes aludido, salvo el término  $R \frac{d\theta}{dt}$ , representativo de las resistencias pasivas.

La otra ecuación, la que nos define el movimiento del eje del giroscopio en sentido normal a los meridianos, o sea a lo largo de los paralelos de la esfera de radio arbitrario de que hemos dejado hecha mención, sería

$$i \frac{d^2\alpha}{dt^2} + R_2 \frac{d\alpha}{dt} = C',$$

o sea

$$i \frac{d^2\alpha}{dt^2} + R \frac{d\alpha}{dt} = I\omega \frac{d\theta}{dt}. \quad [2]$$

Las ecuaciones simultáneas [1] y [2] nos dan la solución del problema.

La resolución no ofrece otras dificultades que la de ser un poco laboriosos los desarrollos.

Supondremos para facilitarlos, y por las razones dichas, que  $R = R_1 = R_2$ , y las pondremos en la forma abreviada siguiente:

$$\theta'' + A\theta' + C\alpha' = B, \quad [3]$$

$$\alpha'' + A\alpha' + C\theta' = 0, \quad [4]$$

en las cuales los tildes representan el orden de las derivadas, y  $A, B$

y  $C$  son constantes que valdrán, respectivamente,  $\frac{R}{i}$ ,  $\frac{C}{i}$ ,  $\frac{I\omega}{i}$ , en donde  $R$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $i$  y  $\omega$  ya sabemos que representan el coeficiente de rozamiento, el par perturbador, los dos momentos de inercia y la velocidad de rotación propia.

Si de [4] deducimos el valor de  $\theta'$  en función de  $\alpha''$  y  $\alpha'$ , y derivamos una vez, obtendremos  $\theta''$  en función de  $\alpha''$  y  $\alpha'''$ , y substituídos ambos valores de  $\theta'$  y  $\theta''$  en [3], obtendremos una ecuación diferencial lineal de tercer orden, que será

$$\alpha''' + 2A\alpha'' + (A^2 + C^2)\alpha' = BC. \quad [5]$$

Análogamente, si de [3] deducimos el valor de  $\alpha'$ , derivamos una vez para obtener  $\alpha''$  y substituímos en [4], obtendremos la ecuación

$$\theta''' + 2A\theta'' + (A^2 + C^2)\theta' = BA. \quad [6]$$

Las ecuaciones [5] y [6] las pondremos en la forma abreviada

$$\alpha''' + F\alpha'' + G\alpha' = H, \quad [7]$$

$$\theta''' + F\theta'' + G\theta' = H_1; \quad [8]$$

en donde

$$F = \frac{2R}{i}, \quad G = A^2 + C^2 = \frac{R^2 + I^2\omega^2}{i^2},$$

$$H = BC = \frac{CI\omega}{i^2} \quad \text{y} \quad H_1 = BA = \frac{RC}{i^2}.$$

Cualquiera de las ecuaciones [7] u [8] integrada, nos resuelve el problema, es decir, que la [7] o la [8] equivalen al sistema [3] [4], porque integradas cualquiera de ellas nos darían  $\alpha'$  ó  $\theta'$ , y entonces la [3] o la [4] nos darían por integración la otra variable  $\theta'$  ó  $\alpha'$  y, por consiguiente  $\theta$  y  $\alpha$ . No hay más diferencia que en la determinación de las constantes que para el caso de resolver la [7] las condiciones son, para  $t=0$ ,

$$\alpha' = 0 \quad \text{y} \quad \alpha'' = 0.$$

Según puede verse introduciendo la condición  $t=0$  en la ecuación

ción [4], puesto que es evidente que en el instante  $t = 0$  de principiar el movimiento, el eje está en reposo y  $\alpha'$  y  $\theta'$  son nulos.

Si operamos en la ecuación [8], al introducir en [3] las condiciones  $t = 0$ ,  $\alpha' = 0$  y  $\theta' = 0$ , nos resultaría  $\theta'' = B$ .

Resolveremos la ecuación [7], o sea  $\alpha''' + F\alpha'' + G\alpha' = H$  en forma abreviada, y que representa

$$\frac{d^3\alpha}{dt^3} + \frac{2R}{i} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{R^2 + I^2\omega^2}{i^2} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{CI\omega}{i^2},$$

ecuación lineal de tercer orden que puede reducirse fácilmente al segundo haciendo a  $\alpha' = x$ , y quedará

$$x'' + Fx' + Gx = H. \quad [9]$$

La integral general de la ecuación lineal de segundo orden y con segundo miembro, es

$$x = \frac{d\alpha}{dt} = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} + \frac{H}{G}, \quad [10]$$

siendo  $\rho_1$  y  $\rho_2$  las raíces del trinomio  $\rho^2 + F\rho + G$ , que valdrán

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{F}{2} + \sqrt{\frac{F^2}{4} - G} = -\frac{R}{i} + \sqrt{\frac{I^2\omega^2}{i^2} - 1} = \\ &= a + b\sqrt{-1}, \\ \rho_2 &= -\frac{F}{2} - \sqrt{\frac{F^2}{4} - G} = -\frac{R}{i} - \sqrt{\frac{I^2\omega^2}{i^2} - 1} = \\ &= a - b\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

haciendo, para abreviar, a  $a = -\frac{R}{i}$  y  $b = \frac{I\omega}{i}$ .

Substituidos estos valores en [10], darán

$$\frac{d\alpha}{dt} = e^{at} (C_1 e^{b\sqrt{-1}t} + C_2 e^{-b\sqrt{-1}t}) + \frac{H}{G}. \quad [11]$$

El término entre paréntesis puede ponerse bajo la forma

$$A_1 \cos bt + A_2 \operatorname{sen} bt,$$

y si introducimos las condiciones iniciales del movimiento, o sea que para  $t = 0$ ,  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ , obtendremos

$$0 = A_1 + \frac{H}{G} \quad \text{o sea} \quad A_1 = -\frac{H}{G} = \frac{CI\omega}{I^2\omega^2 + R^2},$$

derivando [11] hecha ya la substitución del término entre paréntesis, obtendremos

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = e^{at}(-A_1 b \operatorname{sen} bt + A_2 b \operatorname{cos} bt) + a e^{at}(A_1 \operatorname{cos} bt + A_2 \operatorname{sen} bt),$$

en la que introduciendo la condición  $t = 0$ , obtenemos

$$0 = A_2 b + a A_1,$$

de donde

$$A_2 = -\frac{a}{b} A_1 = \frac{a}{b} \frac{H}{G} = -\frac{Re}{I^2\omega^2 + R^2}.$$

Determinadas así las constantes tendremos, finalmente,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{CI\omega}{I^2\omega^2 + R^2} - \frac{C e^{-\frac{R}{i}t}}{I^2\omega^2 + R^2} \left( R \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} t + I\omega \operatorname{cos} \frac{I\omega}{i} t \right), \quad [12]$$

que pondremos en la forma abreviada

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{CI\omega}{Z} - \frac{C e^{at}}{Z} (R \operatorname{sen} bt + I\omega \operatorname{cos} bt). \quad [13]$$

Derivando la [12], obtendremos el valor de  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ , que hechos los desarrollos, resulta

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{C}{i} e^{-\frac{R}{i}t} \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} t, \quad [14]$$

y entonces de la ecuación [1] podemos deducir el valor de  $\frac{d\theta}{dt}$ , que

resulta en definitiva

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{RC}{R^2 + I^2\omega^2} + \frac{Ce^{-\frac{R}{i}t}}{R^2 + I^2\omega^2} \left( I\omega \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} - R \cos \frac{I\omega}{i} t \right), \quad [15]$$

y en forma abreviada

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{RC}{Z} + \frac{C}{Z} e^{at} (I\omega \operatorname{sen} bt - R \cos bt) \dots \quad [16]$$

Ya tenemos determinadas las ecuaciones finitas que nos dan los valores de las velocidades  $\frac{d\alpha}{dt}$  y  $\frac{d\theta}{dt}$  en función del tiempo, de las constantes del giroscopio y del par perturbador.

Integradas nos darán los valores de  $\alpha$  y  $\theta$  en función de  $t$ , pero antes podemos hacer algunas observaciones sobre ellas y deducir consecuencias útiles.

La [15] o [16] representan la velocidad angular del giroscopio en nutación, o sea sobre el meridiano; es una velocidad proyectada sobre dicho plano del meridiano y las [12] o [13] nos representan la velocidad angular del eje en sentido normal a la nutación. No es precisamente la velocidad de precesión,

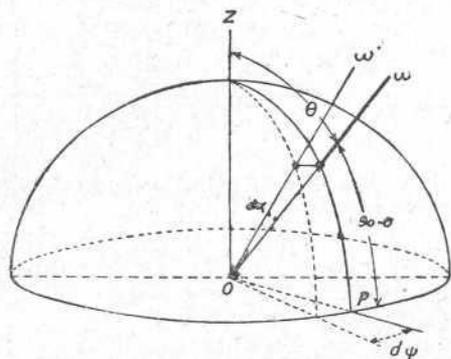


Fig. 2.<sup>a</sup>

puesto que el punto de corte del eje con la esfera distará un cierto ángulo ( $90^\circ - \theta$ ) del ecuador y la velocidad de precesión será

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{\cos(90 - \theta)} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}.$$

La significación de  $\frac{d\alpha}{dt}$  es, por consiguiente, la velocidad del punto de corte del eje con la esfera, estimada a lo largo de los paralelos, en tanto que  $\frac{d\theta}{dt}$  lo es a lo largo de los meridianos. Considerando al

punto de corte como un móvil sobre la esfera y a ésta suponiendo que sea la terrestre,  $\frac{d\theta}{dt}$  (nutación) será la velocidad en latitud y  $\frac{dx}{dt}$  la velocidad en *apartamento*, en tanto que  $\frac{d\psi}{dt}$  (precesión) sería la velocidad en longitud, que podremos deducirla siempre del valor de  $\frac{dx}{dt}$  y del que tenga  $\theta$ , colatitud (contada siempre desde un polo) del punto de corte del eje de la esfera.

Las ecuaciones [15] y [17] o [16] y [18] tienen sus primeros términos independientes de  $t$ ; representan, pues, dos valores fijos y determinados por las constantes del giroscopio. Los segundos términos representan un movimiento vibratorio, amortiguado, en razón del factor exponencial.

Quando  $C$  y  $R$  son pequeños en comparación con  $I\omega$ , que es el caso ordinario, el valor máximo de estos términos es pequeño, de modo que, efecto del factor exponencial, al cabo de un tiempo corto llegarán a ser insensibles, es decir, que el término vibratorio llegará a ser despreciable y la expresión aludida se convertirá en

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{RC}{Z} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{CI\omega}{Z},$$

que divididas una por otra nos dan

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{I\omega}{R} = \text{tang } \rho, \quad [19]$$

lo cual nos dice que la trayectoria que sigue el punto de corte sobre la esfera cuando se ha extinguido prácticamente el movimiento vibratorio, forma con los meridianos un ángulo constante y cuyo valor es

$$\rho = \text{tang}^{-1} \frac{I\omega}{R}.$$

La trayectoria es, pues, una loxodrómica cuyo ángulo de rumbo es tal, que su tangente vale  $\frac{I\omega}{R}$ . Siendo  $R$  ordinariamente muy pequeño, esta fracción será muy grande y  $\rho$  muy próximo a  $90^\circ$ . Si  $R$  fuese nulo,  $\text{tang } \rho$  sería  $\infty$  y  $\rho$  valdría  $90^\circ$ ; el punto de corte recorrería

un paralelo y los valores de  $\frac{d\alpha}{dt}$  y  $\frac{d\theta}{dt}$ , introducida en sus ecuaciones la condición  $R = 0$ , se reducirían a

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{C}{I\omega} - \frac{C}{I\omega} \cos \frac{I\omega}{i} t \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{I\omega} \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} t,$$

que son los valores que hemos encontrado antes al estudiar este caso particular del que ahora examinamos.

Teniendo  $R$  algún valor, el eje se iría separando del paralelo y formando constantemente su trayectoria con el meridiano el ángulo de rumbo  $\rho$ ;  $\theta$  iría aumentando; el eje del giroscopio se iría deprimiendo, iría cayendo lentísimamente, puesto que  $\rho$  casi vale  $90^\circ$ .

La ecuación que acabamos de encontrar,

$$\operatorname{tang} \rho = \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{I\omega}{R}, \quad [19]$$

nos puede dar la ecuación de la loxodrómica, referida a las dos coordenadas latitud y longitud  $\theta$  y  $\psi$ , o sea nutación y precesión. Referida a *apartamento* y latitud es bien sencilla, basta integrar esta ecuación y resulta

$$\alpha = \frac{I\omega}{R} \theta + K;$$

el valor de  $K$  depende del instante  $t$ , a partir del cual consideremos insensibles los términos exponenciales de las ecuaciones [16] y [18].

Si llamamos  $\theta_1$  al valor de  $\theta$  cuando ha transcurrido este intervalo  $t_1 - t$ , es decir, cuando extinguiendo prácticamente el movimiento vibratorio no queda más que el régimen que llamamos permanente, y  $\alpha_1$  el valor correspondiente de  $\alpha$ , tendremos que

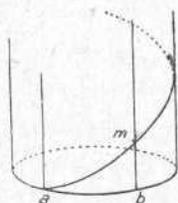
$$\alpha_1 = \frac{I\omega}{R} \theta_1 + K \quad \text{ó} \quad K = \alpha_1 - \frac{I\omega}{R} \theta_1,$$

y la ecuación sería

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{I\omega}{R} (\theta - \theta_1), \quad [20]$$

que dice que el ángulo  $\alpha - \alpha_1$ , o sea el *apartamiento*, es proporcional a la diferencia en latitud, que es la forma *lineal* de la ecuación de la loxodrómica. Esta forma analítica dice que la loxodrómica es en la esfera lo que la recta referida a ejes rectangulares en el plano.

Comparada también esta ecuación con la que da el valor de la altura de un punto  $m$  de la hélice, trazada en un cilindro recto, sobre la base de éste en función del arco  $ab$  descrito por la proyección del punto sobre la circunferencia base que es  $mb = ab \operatorname{tang} \rho$ , nos dice que la loxodrómica es en la esfera lo que la hélice en el cilindro. Ambas curvas alabeadas llegan a ser líneas rectas cuando los radios de las superficies donde están trazadas se hacen infinitamente grandes, es decir, se aproximan a ser planos.

Fig. 3.<sup>a</sup>

Reframos ahora la ecuación a las coordenadas  $\psi$  y  $\theta$ , precesión y nutación.

La ecuación anterior pierde en sencillez aunque se presta a otras deducciones.

Si en la ecuación  $\frac{d\alpha}{dt} = \operatorname{tang} \rho$  ponemos en lugar del apartamiento elemental  $d\alpha$  su equivalencia en diferencia en longitud  $d\psi \operatorname{sen} \theta$ , sacada de la relación

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = \operatorname{sen} \theta,$$

tendremos para ecuación diferencial de la loxodrómica

$$d\psi = \operatorname{tang} \rho \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

que integrada nos dará

$$\psi = \operatorname{tang} \rho \left( \log_e \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} + C \right).$$

La determinación de la constante la haremos como antes, llamando  $\psi_1$  y  $\theta_1$  los valores a que han llegado  $\psi$  y  $\theta$  cuando transcurrió el intervalo  $t_1 - t$  que juzgamos suficiente para considerar ya insensible el movimiento vibratorio. Introduciendo estos valores  $\psi_1$  y  $\theta_1$  en la ecuación

ción que acabamos de encontrar, tendremos

$$\psi_1 = \text{tang } \rho \log_e \text{ tang } \frac{\theta_1}{2} + (\text{tang } \rho) C,$$

de donde

$$C = \frac{\psi_1 - \text{tang } \rho \log_e \text{ tang } \frac{\theta_1}{2}}{\text{tang } \rho},$$

y substituyendo, obtendremos

$$\psi - \psi_1 = \text{tang } \rho \log_e \frac{\text{tang } \frac{1}{2} \theta}{\text{tang } \frac{1}{2} \theta_1}, \quad [21]$$

que es la ecuación finita de la loxodrómica referida a la precesión, o diferencia en longitud  $\psi - \psi_1$  y a la nutación o distancia al polo (colatitud con respecto a un polo),  $\theta_1$  y, por consiguiente,  $\text{tang } \frac{1}{2} \theta_1$  es una constante, así como  $\text{tang } \rho$ ; la ecuación [21] podemos ponerla en la forma

$$\text{tang } \frac{1}{2} \theta = \text{tang } \frac{1}{2} \theta_1 e^{\text{cotang } \rho \cdot (\psi - \psi_1)}, \quad [22]$$

que nos dice que para que el eje del giroscopio, en su caída lentísima, llegue a la vertical inferior, es decir, para que  $\theta$  valga  $\pi$ , ó  $\frac{\theta}{2} = 90^\circ$ , el primer miembro será infinito, luego será necesario que  $\psi - \psi_1$  lo sea también, es decir, que el eje del giroscopio llegará a la vertical, describiendo espiras cada vez más apretadas y en número infinito.

La forma de la ecuación [22] es la de una espiral logarítmica y será tanto más próxima a ella cuanto menor sea  $\theta$  y puedan tomarse indiferentemente los arcos por sus tangentes. En estas condiciones, es decir, en las proximidades de los polos, la loxodrómica se confunde sensiblemente con la espiral logarítmica, porque podremos escribir la ecuación [22] en la forma

$$\theta = 2 \text{ tang } \frac{1}{2} \theta_1 e^{\text{cotang } \rho \cdot (\psi - \psi_1)}.$$

La velocidad de precesión, que vale  $\frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{\sin \theta}$ , irá aumentando indefinidamente, puesto que de la ecuación [12], desprovista del término exponencial, que hemos supuesto ya insensible, deducimos

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{\sin \theta} = \frac{CI\omega}{I^2\omega^2 + R^2} \frac{1}{\sin \theta}$$

y se ve que cuando  $\theta$  se acerca a  $\pi$ ,  $\frac{1}{\sin \theta}$  crece indefinidamente. El movimiento cónico del eje del giroscopio alrededor de la vertical será tanto más rápido cuanto más se acerque a ella, y tenderá a hacerse infinito, y así debe ser, puesto que tiene que llegar al polo con una velocidad  $\frac{d\theta}{dt}$  finita, recorriendo un número de espiras infinito.

Estudiemos ya el período variable, o sea el intervalo durante el cual el movimiento vibratorio amortiguado es sensible.

Repetiremos, para mayor comodidad, las dos ecuaciones de las velocidades, que son

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{CI\omega}{Z} - \frac{C}{Z} e^{at} (R \sin bt + I\omega \cos bt) \quad [13]$$

y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{RC}{Z} + \frac{C}{Z} e^{at} (I\omega \sin bt - R \cos bt); \quad [16]$$

multiplicándolas por  $dt$ , e integrándolas, tendremos, teniendo en cuenta que las integrales de la forma

$$\int e^{at} \sin btdt \quad \text{e} \quad \int e^{at} \cos btdt,$$

valen, respectivamente

$$\frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \sin bt - b \cos bt) + C$$

y

$$\frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (b \sin bt + a \cos bt) + C$$

que

$$a = \frac{CI\omega}{Z} t + \frac{Ci e^{at}}{Z^2} [(R^2 - I^2\omega^2) \operatorname{sen} bt + 2RI\omega \cos bt] + K.$$

La constante  $K$  la determina la condición  $t = 0$  y  $a = 0$ , y resulta

$$K = -\frac{2CI\omega iR}{Z^2},$$

y si además tenemos en cuenta que las expresiones de la forma

$$a \operatorname{sen} \beta + b \cos \beta \quad \text{y} \quad a \operatorname{sen} \beta - b \operatorname{sen} \beta,$$

se pueden poner en la forma

$$\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} (\beta + \varphi_1) \quad \text{y} \quad \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} (\beta + \varphi_2),$$

en las cuales

$$\varphi_1 = \operatorname{tang}^{-1} \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \operatorname{tang}^{-1} \left( -\frac{b}{a} \right),$$

tendremos finalmente,

$$a = -\frac{2CI\omega iR}{(R^2 + I^2\omega^2)^2} + \frac{CI\omega}{R^2 + I^2\omega^2} t + \left. \begin{aligned} &+ \frac{Ci}{R^2 + I^2\omega^2} e^{-\frac{R}{i}t} \operatorname{sen} \left( \frac{I\omega}{i} t + \varphi_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad [23]$$

en donde

$$\operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{2RI\omega}{R^2 - I^2\omega^2},$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{2RI\omega}{R^2 + I^2\omega^2} \quad \text{y} \quad \cos \varphi_2 = \frac{R^2 - I^2\omega^2}{R^2 + I^2\omega^2}.$$

La ecuación [16] integrada y hecha en ella análogas transformaciones da, teniendo en cuenta que para  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ ,

$$\theta = \theta_0 + \left. \begin{aligned} & \frac{Ci(I^2\omega^2 + R^2)}{(I^2\omega^2 + R^2)^2} + \frac{RC}{I^2\omega^2 + R^2} t - \\ & - \frac{Ci}{I^2\omega^2 + R^2} e^{-\frac{R}{i}t} \operatorname{sen} \left( \frac{I\omega}{i} t + \varphi_1 \right) \end{aligned} \right\}, \quad [24]$$

en donde

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{-R^2 + I^2\omega^2}{2RI\omega}, \quad \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{-R^2 + I^2\omega^2}{R^2 + I^2\omega^2}$$

y

$$\operatorname{cos} \varphi_1 = \frac{2RI\omega}{R^2 + I^2\omega^2}.$$

Desde luego, deducimos de los valores de las tangentes de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  que estos ángulos difieren en un número impar de cuadrantes, porque  $\operatorname{tang} \varphi_1 \cdot \operatorname{tang} \varphi_2 = -1$ .

Siendo  $\operatorname{sen} \varphi_1$  y  $\operatorname{cos} \varphi_1$  positivos,  $\varphi_1$  estará en el primer cuadrante, y como  $\operatorname{sen} \varphi_2$  es positivo y  $\operatorname{cos} \varphi_2$  negativo,  $\varphi_2$  estará en el segundo; luego podremos escribir que

$$\varphi_1 + \frac{\pi}{2} = \varphi_2,$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} \left( \frac{I\omega}{i} t + \varphi_2 \right) = \operatorname{cos} \left( \frac{I\omega}{i} t + \varphi_1 \right),$$

y los valores de  $\alpha$  y  $\theta$  escritos en forma abreviada, serán:

$$\alpha = -\frac{2CI\omega iR}{Z^2} + \frac{Ci\omega}{Z} t + \frac{Ci}{Z} e^{at} (\operatorname{cos} bt + \varphi_1)$$

y

$$\theta = \theta_0 + \frac{Ci(I^2\omega^2 - R^2)}{Z^2} + \frac{RC}{Z} t - \frac{Ci}{Z} e^{at} (\operatorname{sen} bt + \varphi_1),$$

y teniendo en cuenta los valores de  $\text{sen } \varphi_1$  y  $\text{cos } \varphi_1$ , tendremos

$$\alpha = -\frac{Ci}{Z} \cos \varphi_1 + \frac{CI\omega}{Z} t + \frac{Ci}{Z} e^{at} \cos (bt + \varphi_1) \quad [25]$$

y

$$\theta = \theta_0 + \frac{Ci}{Z} \text{sen } \varphi_1 + \frac{RC}{Z} t - \frac{Ci}{Z} e^{at} \text{sen } (bt + \varphi_1), \quad [26]$$

en donde como siempre

$$a = -\frac{R}{i}, \quad b = \frac{I\omega}{i} \quad \text{y} \quad Z = R^2 + I^2\omega^2.$$

La eliminación de  $t$  entre las ecuaciones [25] y [26] nos conduciría a la de la trayectoria.

No es cosa sencilla esta operación, dado el carácter complicado de las ecuaciones; pero podemos llegar al conocimiento completo de la trayectoria del modo siguiente:

Puesto que los sentidos de  $\theta$  y  $\alpha$  son siempre perpendiculares, podemos afectar a cualquiera de ellos del símbolo  $\sqrt{-1}$  que nos represente la perpendicularidad, y como el movimiento resultante es la *suma* de los dos componentes, la ecuación de la trayectoria será

$$T = \alpha + \theta \sqrt{-1},$$

y tendremos entonces, agrupando los términos convenientemente,

$$T = \alpha + \theta \sqrt{-1} = \left[ -\frac{Ci}{Z} \cos \varphi_1 + \left( \theta_0 + \frac{Ci}{Z} \text{sen } \varphi_1 \right) \sqrt{-1} \right] + \left[ \left( \frac{CI\omega}{Z} t + \frac{RC}{Z} t \right) \sqrt{-1} \right] + \left[ \frac{Ci}{Z} e^{at} [\cos (bt + \varphi_1) - \text{sen } (bt + \varphi_1)] \sqrt{-1} \right] \quad [27]$$

que nos dice que el primer paréntesis representa un punto, cuyas coordenadas son

$$-\frac{Ci}{Z} \cos \varphi_1 \quad \text{y} \quad \theta_0 + \frac{Ci}{Z} \text{sen } \varphi_1,$$

y sirve de punto de partida a la loxodrómica representada por el segundo paréntesis.

En cuanto al tercer paréntesis, es una espiral logarítmica, cuyo radio inicial vale (para  $t=0$ ),

$$\frac{Ci}{Z} (\cos \varphi_1 - \operatorname{sen} \varphi_1 \sqrt{-1}) = \frac{Ci}{Z},$$

porque  $\cos \varphi_1 - \operatorname{sen} \varphi_1 \sqrt{-1}$ , vectores a  $90^\circ$ , dan por resultante

$$\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \operatorname{sen}^2 \varphi_1} = 1.$$

Como  $a$  vale  $-\frac{R}{i}$  que es siempre negativo, la espiral es convergente y su radio  $\frac{Ci}{Z}$  decrece indefinidamente, teniendo por límite cero.

En la adjunta figura está representado un trozo de la superficie esférica en proyección Mercatoriana.  $O$  es el punto de partida distante un ángulo  $\theta_0$  del polo.  $OA$  vale  $\frac{Ci}{Z}$ ,  $AC$  y  $AD$  son, respectivamente, un meridiano y un paralelo. El ángulo  $AOB$  es  $\varphi_1$  el  $E'AT$ ,  $\rho$  y el  $BOB'$ ,  $\varphi_2$ .

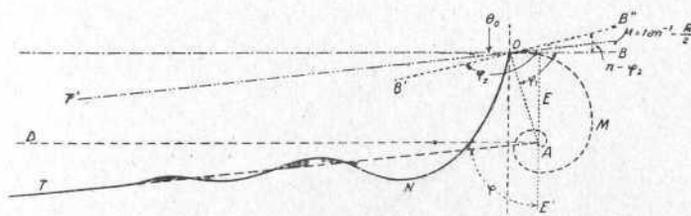


Fig. 4.<sup>ª</sup>

El primer paréntesis define el punto  $A$ .

El segundo, la loxodrómica  $OT'$ ; el tercero, la espiral logarítmica  $OMA$ , y toda la ecuación [27] representa la trayectoria  $ONT$  que, ondulada en un principio, llega a confundirse pronto con la loxodrómica  $AT$ , paralela a  $OT'$ .

Del tercer paréntesis de la ecuación [27] se deduce que el ángulo

que forma la espiral con la normal al radio vector vale  $a$ , o sea  $-\frac{R}{i}$ . Este es, pues, muy pequeño, puesto que se supone que  $R$  lo es.

En la práctica, el ángulo  $B''OB'$ , complemento de  $\varphi_1$ , vale muy próximamente el doble del  $DAT = \frac{\pi}{2} - \rho$ , porque

$\text{tang}(90 - \rho) = \frac{R}{I\omega}$  y  $\text{tang } BOB'' = \text{cotang } \varphi_1 = \frac{2RI\omega}{I^2\omega^2 - R^2}$ , que siendo  $R$  muy pequeño con relación a  $I\omega$ , puede ponerse en la forma  $\frac{2R}{I\omega}$ , y ambos ángulos son pequeñísimos, dado el predominio de  $I\omega$  sobre  $R$ .

Resulta en definitiva, que considerando a las loxodrómica y espiral logarítmica como curvas que cortan a los meridianos formando ángulos iguales, podemos decir que el punto de corte del eje del giroscopio a la superficie esférica que nos sirve de superficie de trazado, describe simultáneamente dos loxodrómicas o dos espirales, y que tienen por polos respectivos una, un punto cuyas coordenadas son

$$\theta_0 + \frac{Ci}{Z} \text{sen } \varphi_1 \quad \text{y} \quad -\frac{Ci}{Z} \text{cos } \varphi_1$$

y cuyo rumbo es  $90 - \mu$  y la otra el polo principal de la esfera y con un rumbo  $\rho$ .

La velocidad de rotación del punto alrededor de los polos respectivos será  $b = \frac{I\omega}{i}$  para la espiral pequeña y  $\Omega$  para la grande; la velocidad de precesión será

$$\frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{CI\omega}{Z \text{sen } \theta},$$

que en la región ecuatorial, en la que  $\text{sen } \theta$  es sensiblemente la unidad, es sumamente lenta, puesto que

$$\frac{CI\omega}{Z} = \frac{CI\omega}{I^2\omega^2 + R^2},$$

y como  $R$  es muy pequeño en relación a  $I\omega$ , se puede considerar que esta expresión vale  $\frac{C}{I\omega}$ .

La velocidad a lo largo de la trayectoria, que después de extinguido el período oscilatorio, vale

$$V \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2},$$

es constante y vale, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{tang} \rho = \frac{I\omega}{R}, \quad \operatorname{sen} \rho = \frac{I\omega}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{cos} \rho = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{RC}{Z} = \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}} \operatorname{cos} \rho.$$

y

$$\frac{dx}{dt} = \frac{CI\omega}{Z} = \frac{C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I\omega}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \rho;$$

$$V \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \frac{C}{\sqrt{2}} = \frac{C}{\sqrt{I^2\omega^2 + R^2}}.$$

Prescindiendo en las ecuaciones [25] y [26] de los primeros términos que definen el punto de partida y de los últimos que representan el movimiento oscilatorio amortiguado, quedan los términos

$$\frac{CI\omega}{Z} t \quad \text{y} \quad \frac{RC}{Z} t,$$

que puestos en la forma

$$\frac{C}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \rho \cdot t \quad \text{y} \quad \frac{C}{\sqrt{2}} \operatorname{cos} \rho \cdot t,$$

son enteramente análogos a los que dan la velocidad en *apartamiento* y en diferencia en latitud, contraídas por un buque que navega al rumbo  $\rho$  con una velocidad  $\frac{C}{\sqrt{2}}$ .

Cuando el par  $C$  es de la forma  $Pa \operatorname{sen} \theta$ , la ecuación [5] pierde el carácter de lineal, puesto que su segundo miembro contiene una función de  $\theta$ , el seno, y no es integrable. Para vencer esta dificultad

podemos hacer la integración primera, considerando a la función  $\sin \theta$  como constante y obtener los valores de

$$\frac{d\alpha}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt}$$

en función, no solamente de las constantes del giroscopio, sino también en función del  $\sin \theta$ . Esto equivale a substituir en los valores de

$$\frac{d\alpha}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt},$$

ecuaciones [12] y [15] o [13] y [16],  $Pa \sin \theta$  por  $C$  y obtendríamos, tomando las [13] y [16]

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sin \theta \left[ \frac{PaI\omega}{Z} + \frac{Pa}{Z} e^{at} (R \sin bt + I\omega \cos bt) \right] \quad [28]$$

y

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin \theta \left[ \frac{PaR}{Z} + \frac{Pa}{Z} e^{at} (I\omega \sin bt - R \cos bt) \right], \quad [29]$$

que nos dicen que ambas velocidades decrecen a medida que  $\theta$  se aproximan a 0 ó a  $\pi$ , y que son máximas en el ecuador.

La primera [28], da inmediatamente, dividiendo por  $\sin \theta$ , que la velocidad de precesión que es

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt \sin \theta}$$

es constante, e integrada, nos da el valor de la longitud, o sea del ángulo  $\psi$ , y que es enteramente igual a la ecuación [25] del valor de  $\alpha$ , salvo la substitución de  $C$  por  $Pa$ .  $\psi$  crece indefinidamente y, como en el caso anterior, el número de espiras que describe el punto de corte del eje del giroscopio a la esfera, alrededor del polo superior, es infinito, pero con la diferencia de que antes al ser  $\frac{d\alpha}{dt}$  constante,  $\frac{d\psi}{dt}$  que es igual a  $\frac{d\alpha}{dt \sin \theta}$ , aumentaba hasta hacerse infinito, y ahora es constante siempre, resultando de ello que, debiendo recorrer el punto

tantas veces aludido infinitas espiras con velocidad uniforme, no llega jamás a la posición vertical inferior, es decir, que esta posición es *asintótica*.

De la ecuación [29] se deduce, separando variables e integrando que

$$\log_e \operatorname{tang} \frac{\theta}{Z} = \frac{Pai}{Z} \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{RPa}{Z} t - \frac{Pai}{Z} e^{at} \operatorname{sen} (bt + \varphi_1), \quad [30]$$

en la que también se ve que para  $\theta = 2\pi$  el primer miembro se hace infinito; luego  $t$  tiene también que serlo, es decir, que teóricamente no llega el eje jamás a la verticalidad.

Claro está que en este caso la velocidad a lo largo de la trayectoria, que sería

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2},$$

una vez extinguido prácticamente el movimiento oscilatorio, no es constante, sino que va disminuyendo y tiende hacia cero, puesto que valdrá

$$\frac{C}{\sqrt{Z}} \operatorname{sen} \theta.$$

En resumen, el movimiento del eje del giroscopio es enteramente análogo al del caso de ser  $C$  constante, y las diferencias son solamente en los valores de

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt}.$$

Se llega muy fácilmente a conocer la forma de la trayectoria razonando como sigue.

Supongamos que no existen resistencias pasivas. Sabemos que en este caso el movimiento del giroscopio consiste en la rodadura de un cono muy agudo, de abertura  $\frac{2Ci}{I^2\omega^2}$ , que girando alrededor de su eje con velocidad  $\frac{I\omega}{i}$ , rueda sin resbalar sobre otro cono de abertura  $2\theta_0$ .

Consideremos, pues, descompuesto el movimiento en uno de rotación uniforme con la velocidad de precesión  $\Omega = \frac{C}{I\omega}$  del eje del conito alrededor del eje vertical que pase por el punto fijo y formando con él un ángulo  $\theta_0$  y el movimiento también cónico con velocidad  $\frac{I\omega}{i}$ . La superposición de estos dos movimientos produce el movimiento cicloidal del eje del giroscopio.

Así, descompuesto el movimiento, estudiemos el efecto de las resistencias pasivas, las cuales vamos a hacer intervenir desde este momento.

Para un desplazamiento elemental  $dx$  habrá sido necesario un trabajo  $dx \cdot R \cdot \frac{dx}{dt}$ , medido por el producto del ángulo  $d\alpha$  por el par resistente que vale  $R \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ , y este trabajo tiene que salir del único manantial de energía disponible, que es el que representa el par  $C$ , o sea la *energía de posición* del giroscopio. Será, pues, necesario que el eje se deprima un cierto ángulo  $d\theta$  tal que  $d\theta \cdot C$  iguale al trabajo desarrollado; la ecuación será, pues,

$$Cd\theta = dx \cdot R \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

y como

$$C = I\omega\Omega \sin \theta,$$

tendremos

$$I\omega\Omega \sin \theta d\theta = dx \cdot R \cdot \frac{dx}{dt},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{dx}{dt \sin \theta} = \Omega,$$

obtendremos finalmente

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{I\omega}{R} = \text{tang } \rho.$$

La trayectoria es, pues, una loxodrómica, cuyo ángulo de rumbo  $\rho$  vale

$$\text{tang}^{-1} \frac{I\omega}{i}.$$

Claro está que si  $C$  hubiese sido de la forma  $Pa \text{ sen } \theta$ , hubiéramos obtenido igual resultado, porque  $Pa$  vale siempre  $I\omega\Omega$ .

Casi se obtiene rápidamente la forma de la trayectoria y la constante  $\rho$  que la define, mas no los demás datos que completan el conocimiento perfecto del movimiento.

Todavía se puede razonar de otro modo para obtener la forma de la trayectoria en el régimen permanente aplicando una vez más el teorema fundamental, demostrado anteriormente.

Supongamos un giroscopio  $I, \omega, i$ , que en virtud de la acción de un cierto par perturbador  $C$  gira con movimiento de precesión uniforme  $\Omega$  alrededor del eje vertical  $OZ$  y formando un ángulo  $\theta$  con él. Efecto de los rozamientos sobre los cojinetes que forman dicho eje, nacerá un par resistente  $R \cdot \Omega$ , cuyo eje será  $OZ$ . Este par lo descompondremos en dos, cuyos ejes serán  $OX$ , eje del giroscopio, y la perpendicular  $OY$ , contenida siempre en el plano  $ZOX$  de la nutación y que valdrá  $R \cdot \Omega \cdot \text{sen } \theta$ . El par, cuyo eje es  $OX$ , no influye nada en los movimientos giroscópicos. En cuanto al otro par, el  $OY$ , tendrá, por consecuencia, el nacimiento de un movimiento de precesión en el plano  $ZOX$ , y cuyo valor será tal que

$$R\Omega \text{ sen } \theta = I\omega \frac{d\theta}{dt},$$

o sea

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R\Omega \text{ sen } \theta}{I\omega}.$$

Como  $\frac{dx}{dt}$ , que es la velocidad estimada sobre el paralelo, vale

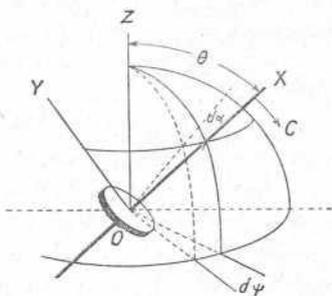


Fig. 5.<sup>a</sup>

$\Omega \sin \theta$ , tendremos, dividiendo, que

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \operatorname{tang} \rho = \frac{\Omega \sin \theta \cdot I\omega}{\Omega \sin \theta \cdot R} = \frac{I\omega}{R}.$$

### Efecto de una percusión.

Vamos a estudiar el efecto que produce una percusión en el eje del giroscopio.

Desde luego, supondremos que la dirección de la percusión sea normal al eje, porque si no lo fuese le descompondríamos en dos, una normal y otra a lo largo del eje. Esta última no produce otro efecto que la traslación de todo el sistema paralelamente a sí mismo, sin ningún fenómeno giroscópico.

En cuanto a la palabra percusión conviene aclarar el concepto. Se llama así en Mecánica a la acción de una fuerza durante un tiempo muy corto. *Un tiempo muy corto* no define bien qué intervalo es y, desde luego, se comprende que una percusión dada puede considerarse como tal cuando el cuerpo que la recibe es de gran masa y, sin embargo, esta misma percusión pasaría a la categoría de impulsión si el cuerpo que la recibiese fuera de masa muy pequeña. La duración, *esencialmente finita* de una percusión es, pues, relativa y depende de la masa del cuerpo o sistema que la recibe. Nosotros entenderemos por percusión al producto  $F \cdot \Delta t$ , supuesto constante a  $F$ , cuando en el intervalo  $\Delta t$  el cuerpo no ha empezado a moverse de un modo apreciable, es decir, que la masa de este cuerpo es lo suficientemente grande para que su posición, al finalizar  $\Delta t$ , sea sensiblemente la misma que al principio.

Esto sentado, sea un giroscopio definido por  $I, i$  y  $\omega$ , giratorio libremente y sin resistencias pasivas alrededor de su centro de inercia. Sea  $F$  la fuerza que actúa durante el intervalo *muy corto*  $\Delta t$  y  $a$  la distancia del punto de aplicación de la percusión al centro de inercia.

Tomaremos como plano de la nutación el que contiene a  $F$  y al eje del giroscopio, y para mayor comodidad en los razonamientos le supondremos vertical.

Por corto que sea el intervalo  $\Delta t$ , durante él estamos en el caso de un par  $F \cdot a$  que obra normalmente sobre el eje del giroscopio; podremos, pues, escribir

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{I\omega}{i} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{F \cdot a}{i}. \quad [1']$$

Integrando esta ecuación, entre los límites 0 y  $t$ , que limitan el intervalo  $\Delta t$ , y teniendo en cuenta que durante todo este intervalo no ha tenido tiempo de moverse el eje  $y$ , y, por consiguiente,  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ , tendremos  $\frac{d\theta}{dt} i = F \cdot a \cdot \Delta t$ , y llamando al momento de la percusión  $F \cdot a \cdot \Delta t$ ,  $P$ , será:

$$\frac{d\theta}{dt} i = P \quad \text{o} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{i}. \quad [2]$$

Claro está que esta ecuación la podríamos haber obtenido directamente escribiendo que el momento de la impulsión era igual al aumento del momento de la cantidad del movimiento. Esta ecuación nos servirá para la determinación de las constantes de integración.

Extinguido el intervalo  $\Delta t$ , el segundo miembro de [1'] se anula, y resultará

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{I\omega}{i} \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad [1]$$

La otra ecuación será análogamente a los casos anteriores,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{I\omega}{i} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad [3]$$

El sistema simultáneo [1] y [3] resuelve el problema.

Puesto en forma abreviada, será

$$\left. \begin{aligned} \theta'' + \frac{I\omega}{i} \alpha' &= 0 \\ \alpha'' - \frac{I\omega}{i} \theta' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [m]$$

y despejando, respectivamente, a  $\theta'$  y  $\alpha'$ , derivando estos valores y substituyendo en [m], obtendremos

$$\left. \begin{aligned} \theta''' + \frac{I^2\omega^2}{i^2} \theta' &= 0 \\ \alpha''' + \frac{I^2\omega^2}{i^2} \alpha' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [n]$$

de las cuales, cualquiera de ellas es equivalente al sistema [m].

Tomando la segunda de ellas, por ejemplo, que es

$$\frac{d^3\theta}{dt^3} + \frac{I^2\omega^2}{i^2} \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

y haciendo a  $\frac{d\theta}{dt} = y$ , tendremos

$$y'' + \frac{I^2\omega^2}{i^2} y = 0,$$

en donde

$$y = \frac{d\theta}{dt} = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}, \quad \rho_1 = \frac{I\omega}{i} \sqrt{-1} \text{ y } \rho_2 = -\frac{I\omega}{i} \sqrt{-1},$$

luego

$$y = C_1 e^{\frac{I\omega}{i} \sqrt{-1} t} + C_2 e^{-\frac{I\omega}{i} \sqrt{-1} t},$$

para  $t = 0$ , de la ecuación [2], se deduce que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{i} \text{ luego } C_1 + C_2 = \frac{P}{i}.$$

Derivando el valor de  $y$  se obtiene

$$y' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{I\omega}{i} \sqrt{-1} \left( C_1 e^{\frac{I\omega}{i} \sqrt{-1} t} - C_2 e^{-\frac{I\omega}{i} \sqrt{-1} t} \right);$$

para

$$t = 0, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = y' = 0,$$

luego

$$C_1 = C_2 = \frac{P}{2i},$$

y el valor de  $\frac{d\theta}{dt}$  será, poniendo la forma trigonométrica del parénte-

sis exponencial,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{i} \frac{1}{2} \left( e^{\frac{I\omega}{i}t\sqrt{-1}} + e^{-\frac{I\omega}{i}t\sqrt{-1}} \right) = \frac{P}{i} \cos \frac{I\omega}{i} t, \quad [4]$$

e integrando

$$\theta = \frac{P}{I\omega} \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} t + C.$$

Para  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ , luego  $C = \theta_0$ , y tendremos, finalmente,

$$\theta = \theta_0 + \frac{P}{I\omega} \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} t. \quad [5]$$

Puesto que

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{i}{I\omega} \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

tendremos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{P}{i} \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i} t \quad [6]$$

y

$$\alpha = \frac{P}{I\omega} \cos \frac{I\omega}{i} t + C.$$

Para  $t = 0$ ,  $\alpha = 0$ ; luego  $C = -\frac{P}{I\omega}$ , y tendremos

$$\alpha = -\frac{P}{I\omega} + \frac{P}{I\omega} \cos \frac{I\omega}{i} t. \quad [7]$$

El eje del giroscopio describe un cono tangente al plano de la percusión, puesto que  $\alpha$  oscila, armónicamente, entre 0 y  $\frac{2P}{I\omega}$ , que es la abertura del cono, y la velocidad de rotación será  $\frac{I\omega}{2}$ , o sea la misma que si la acción del par en vez de ser cortísima hubiese sido permanente.

La semiapertura del cono que vale  $\frac{P}{I\omega}$  es el ángulo descrito por

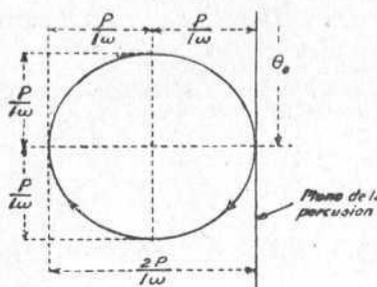


Fig. 6.<sup>a</sup>

el eje del giroscopio bajo la acción de un par  $F \cdot a$ , obrando durante un tiempo  $\Delta t$ , porque el dicho par  $Fa$  engendra un movimiento de precesión, cuya velocidad  $\Omega$  valdrá  $\frac{Fa}{I\omega}$

y el ángulo descrito sería  $\Omega \Delta t$ , o sea  $\frac{F \cdot a \cdot \Delta t}{I\omega} = \frac{P}{I\omega}$ .

Cuando existen resistencias pasivas, la ecuación [1'] se convertirá en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{I\omega}{i} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{R}{i} \frac{d\theta}{dt} = \frac{Fa}{i} \quad [8]$$

y la [3] será

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{R}{i} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{I\omega}{i} \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad [9]$$

que puede ponerse en la forma, teniendo en cuenta que el segundo miembro de [8] se anula,

$$\begin{aligned} \theta'' + m\theta' + n\alpha' &= 0, \\ \alpha'' + m\alpha' - n\theta' &= 0. \end{aligned}$$

En donde  $m = \frac{R}{i}$  y  $n = \frac{I\omega}{i}$  y los tildes representan el orden de las derivadas.

De la segunda se deduce, despejando a  $\theta'$  y derivando este valor,

$$\theta' = \frac{\alpha''}{n} + \frac{m}{n} \alpha' \quad \text{y} \quad \theta'' = \frac{\alpha'''}{n} + \frac{m}{n} \alpha'',$$

y substituyendo en la primera y haciendo reducciones, tendremos

$$\alpha''' + 2m\alpha'' + (m^2 + n^2)\alpha' = 0 \quad [10]$$

y análogamente obtendríamos

$$\theta''' + 2m\theta'' + (m^2 + n^2)\theta' = 0, \quad [11]$$

cualquiera de las ecuaciones [10] u [11] resuelven el problema. Escogeremos la [11]. Haciendo a  $\theta' = x$ , tendremos

$$x'' + 2mx' + (m^2 + n^2)x = 0,$$

de donde

$$x = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}, \quad \rho_1 = -\frac{R}{i} + \frac{I\omega}{i} \sqrt{-1}$$

y

$$\rho_2 = -\frac{R}{i} - \frac{I\omega}{i} \sqrt{-1}$$

y tendremos, haciendo a  $-\frac{R}{i} = a$  y  $b = \frac{I\omega}{i}$ ,

$$x = e^{at} (C_1 e^{bt\sqrt{-1}} + C_2 e^{-bt\sqrt{-1}}).$$

Para determinar las constantes, integraremos, como antes, la ecuación [8] entre  $\theta$  y  $t$ , teniendo en cuenta que durante este intervalo,  $\alpha$  y  $\theta$  son nulos, y tendremos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{i},$$

luego introduciendo en el valor de  $x$  que acabamos de encontrar las condiciones  $t = 0$  y  $x = \frac{P}{i}$ , será

$$\frac{P}{i} = C_1 + C_2.$$

Derivando el valor de  $x$  se tiene

$$x' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = a e^{at} (b C_1 e^{bt\sqrt{-1}} - b C_2 e^{-bt\sqrt{-1}}) b \sqrt{-1}$$

y para  $t = 0$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ , luego tendremos

$$0 = C_1 - C_2 \quad \text{o} \quad C_1 = C_2;$$

luego valdrán las constantes  $\frac{1}{2} \frac{P}{i}$  cada una y el valor de  $x$  será

$$x = \frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{i} e^{-\frac{R}{i}t} \frac{1}{2} \left( e^{\frac{I\omega}{i}t\sqrt{-1}} + e^{-\frac{I\omega}{i}t\sqrt{-1}} \right) = \left. \begin{aligned} &= \frac{P}{i} e^{-\frac{R}{i}t} \cos \frac{I\omega}{i}t. \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

Resolviendo la ecuación [10], que es enteramente análoga, encontraríamos el valor de  $\frac{d\alpha}{dt}$ , que es

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{P}{i} e^{-\frac{R}{i}t} \operatorname{sen} \frac{I\omega}{i}t. \quad [13]$$

Comparando estos valores con los del caso anterior, se ve que difieren únicamente en el término exponencial  $e^{-\frac{R}{i}t}$ , que representa el amortiguamiento. Ambas velocidades tienden a cero, y el eje del giroscopio tiende, pues, a una posición de reposo. Basta la inspección de los valores de  $\frac{d\theta}{dt}$  y  $\frac{d\alpha}{dt}$  para ver la trayectoria espiraloidea del eje del giroscopio. Para determinar bien esta espiral, integraremos ambas ecuaciones y obtendremos, teniendo en cuenta que

$$\int e^{at} \operatorname{sen} bt dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bt - b \cos bt)$$

y

$$\int e^{at} \cos bt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos bt + b \operatorname{sen} bt),$$

para valores de  $\theta$  y  $\alpha$ ,

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -\frac{P}{Z} e^{at} (I\omega \operatorname{sen} bt + R \cos bt) + \theta_0 = \\ &= -\frac{P}{\sqrt{Z}} e^{at} \operatorname{sen} (bt + \varphi_1) + \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad [15]$$

y

$$\alpha = \frac{P}{Z} e^{at} (R \operatorname{sen} bt - I\omega \cos bt) = \frac{P}{\sqrt{Z}} e^{at} \cos (bt + \varphi_1). \quad [16]$$

En donde

$$Z = R^2 + I^2 \omega^2 \quad \text{y} \quad \varphi_1 = \tan^{-1} \frac{R}{I\omega}.$$

Como  $\frac{R}{I\omega}$  es sumamente pequeño,  $\varphi_1$  es muy próximo a cero, y los valores de  $\theta$  y  $\alpha$  serán muy próximos a

$$\theta = -\frac{P}{\sqrt{Z}} e^{at} \sin bt \quad [17]$$

y

$$\alpha = \frac{P}{\sqrt{Z}} e^{at} \cos bt. \quad [18]$$

La trayectoria será

$$T = \alpha + \theta \sqrt{-1} = \frac{P}{Z} e^{at} (\cos bt + \sin bt \sqrt{-1}),$$

que es una espiral logarítmica o una loxodrómica, cuyo ángulo de rumbo vale  $\tan^{-1} \frac{R}{i}$  y el radio inicial  $\frac{P}{\sqrt{Z}}$  y dicho radio inicial forma un ángulo  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 = \tan^{-1} \frac{I\omega}{R}$  con el meridiano. El eje del giroscopio, que parte de la posición  $O$ , tiende a la posición de reposo  $O'$ , centro o polo de la espiral o loxodrómica, y habrá recorrido en precesión un ángulo

$$OO' = \frac{P}{\sqrt{Z}} \cos \varphi_1,$$

y se habrá deprimido

$$O'O'' = \frac{P}{\sqrt{Z}} \sin \varphi_1.$$

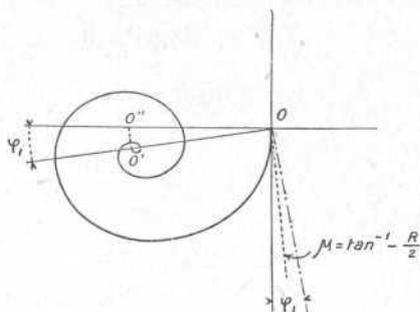


Fig. 7.<sup>a</sup>



# ARIETE DUPLEX VIDAL-CASTELLS

POR

D. LUIS MARIANO VIDAL

INGENIERO DE MINAS

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

El ariete hidráulico es un medio sencillo y económico de elevar agua cuando se dispone de un salto o caída en el caudal. Tiene sobre otras maquinarias elevatorias las grandes ventajas de que se reúnen en un mismo artefacto el motor y el elevador, y de que la ausencia de pistones y, por lo tanto, de estopadas y de órganos sujetos a rozamiento, favorece la duración del aparato, no exigiendo, además, personal para su vigilancia.

Es la energía del agua en movimiento la que se aprovecha para ascender una parte del caudal; pero se da a veces el caso de que por sus cualidades éste no puede utilizarse para la bebida, y de que existiendo en las inmediaciones un manantial de agua potable o de agua mineral, no puede ésta elevarse aplicándola a un ariete, porque no se dispone de salto para ella y el caudal es pequeño; de modo que, aunque se posea un ariete movido por abundante agua impotable, no se puede aplicarlo a la elevación del agua que interesa, porque el tal aparato no es capaz de levantar otra agua que la que le da movimiento. Esto ha hecho pensar en dar al ariete una disposición que permitiese elevar aguas distintas, y a este fin obedece el aparato de Durozoi, llamado *ariete-bomba universal*, que está descrito en la obra de Berthot *Traité de l'évation des eaux*.

Pero este artefacto se aparta por completo de la idea fundamental que distingue al invento de Montgolfier (1), pues consta de un pistón

---

(1) Fué Montgolfier, en 1796, quien construyó el primer aparato, fundado en la idea de aprovechar el choque que se produce al detener el movimiento de una columna de agua.

que transmite al agua que se trata de elevar el esfuerzo producido por el choque de la columna de agua motriz. Y desde el momento que entran cuerpos de bomba en el artefacto, se producen en éste fuertes rozamientos, y ya pierde la verdadera condición del ariete hidráulico.

El problema se ha resuelto de un modo perfecto por el medio que paso a describir y que da lugar a dos modos de obrar, habiendo ideado para cada uno un aparato distinto, y son:

- 1.º Ariete de acción discontinua o intermitente.
- 2.º Ariete de acción continua.

*Ariete duplex de acción intermitente (fig. 1.<sup>a</sup> y lám. 1.<sup>a</sup>).*—Este aparato consta de un recipiente *V*, en donde entra rodada el agua del

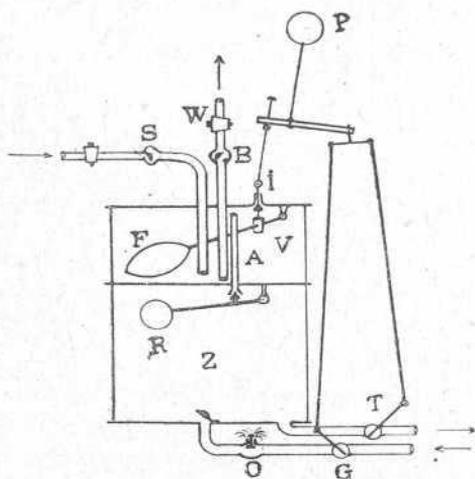


Fig. 1.<sup>a</sup>—Esquema del *Ariete duplex* de acción intermitente.

manantial potable o mineral que se trata de elevar. Mientras se llena, está abierta la válvula *I*, gobernada por un flotador *F* para la salida del aire.

Cuando está lleno, el flotador cierra la válvula, y una varilla que de ésta sale al exterior hace caer el disparo de un peso *P* que abre el grifo *G*, de entrada del agua motriz al ariete *O*.

La acción del ariete va introduciendo parte del agua motriz en el recipiente *Z* que hay debajo del que hemos visto, y el aire de aquél es expulsado por el tubo *A* y forzado a penetrar en el *V*. La presión que ejerce así sobre el agua del *V* impele a ésta por el tubo *B*, y

cuando está casi agotada, el flotador abre la válvula *I*, y el disparo del peso se hace en sentido contrario, cerrándose el grifo *G*, de entrada en el ariete, y abriéndose el *T*, de salida o descarga del recipiente. Y, entretanto, entra nuevamente agua del manantial por elevar en el recipiente *V*, a través de la válvula *S*, que se abre de fuera a dentro.

El flotador que se ve en *R* no tiene más objeto que impedir que por un accidente cualquiera se llegase a mezclar el agua motriz con el agua que se trata de utilizar.

*Ariete duplex de acción continua* (fig. 2.<sup>a</sup> y lám. 4.<sup>a</sup>).—El mecanismo en éste es mucho más sencillo que en el anterior.

El choque del agua motriz, detenida en su movimiento al cerrarse la válvula *M*, se transmite a un sifón situado debajo y en cuyo fondo hay mercurio. Este mercurio separa el agua motriz del agua del manantial potable o mineral que entra por *L*, atravesando una válvula *N*, y él es el que obliga a esta agua a penetrar en el recipiente de aire *O*, de donde es elevada por la compresión de este último.

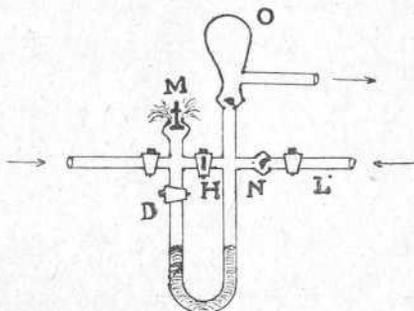
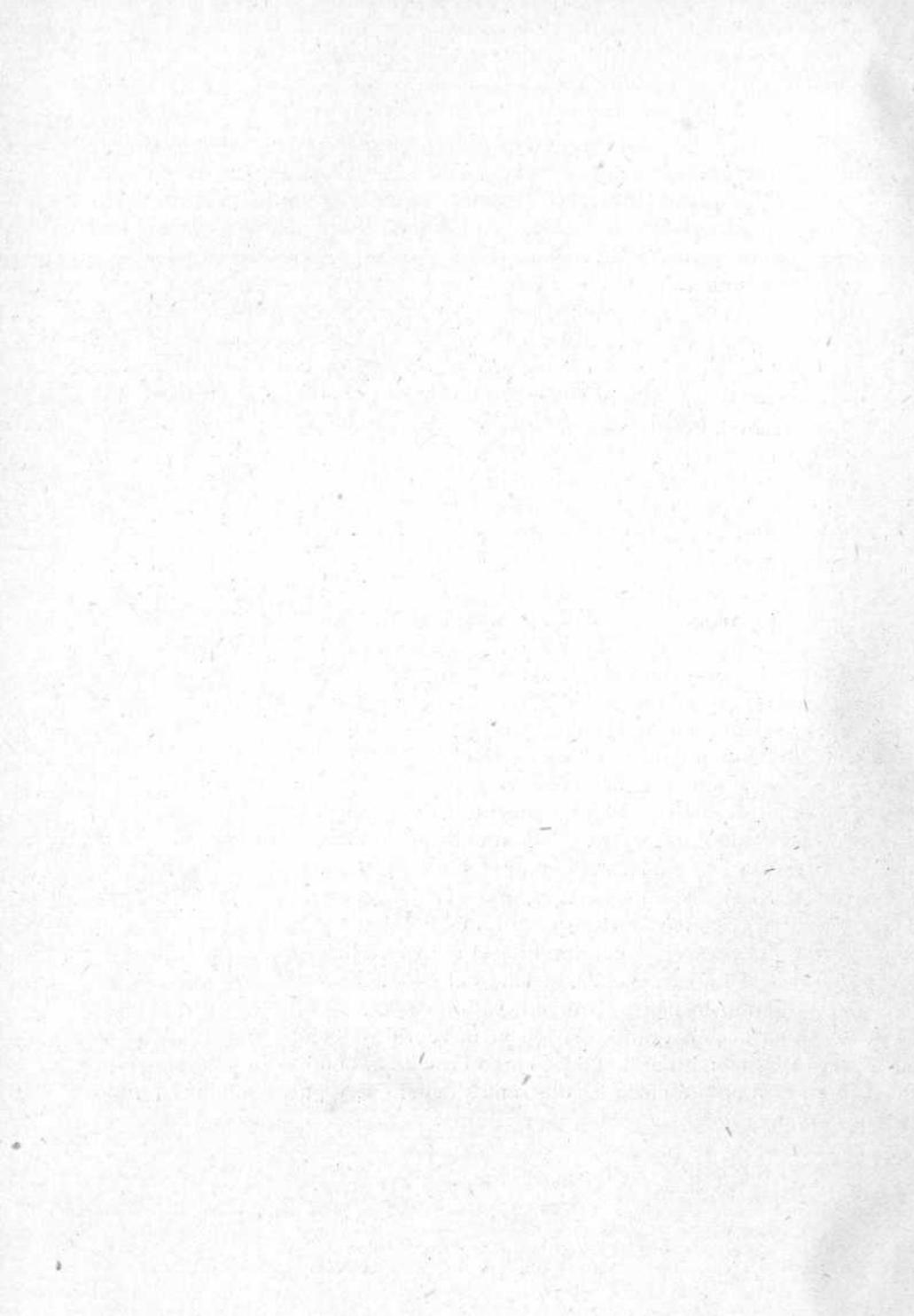


Fig. 2.<sup>a</sup>—Esquema del *Ariete duplex* de acción continua.

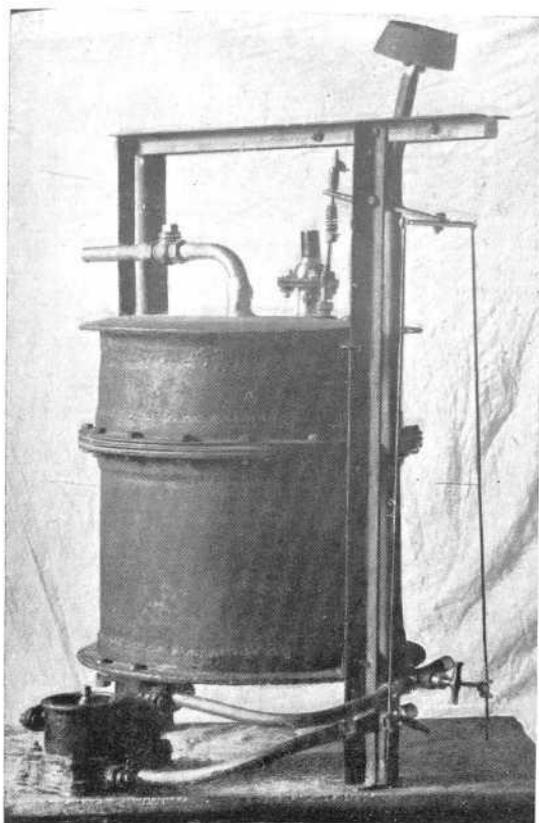
Tanto el primer aparato como el segundo pueden fácilmente transformarse en elevadores de la propia agua motriz. Para ello, en el de acción intermitente basta cerrar el grifo *W*, de salida del agua potable o mineral, y tener abierto el *T*, de descarga del recipiente *Z*, que se deberá empalmar con la tubería elevadora, convirtiéndose en tubo de conducción.

En el de acción continua basta abrir el grifo *H* y cerrar el de entrada *L* del agua, y el *D*, aislando el sifón.

Cuando la naturaleza del agua que se trata de elevar puede ejercer una acción química sobre el mercurio, deberá reemplazarse éste por una membrana flexible, como en ciertas bombas de agotamiento, que se montará entre las dos ramas del sifón, y puede también usarse el *ariete duplex* de acción discontinua.



Ariete Vidal-Castells.

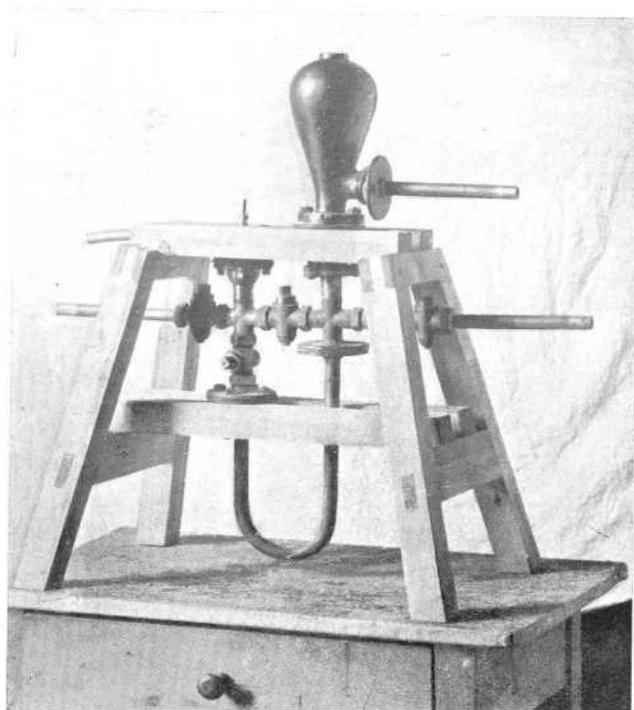


Ariete duplex de acción intermitente.

Escala 1 : 10.



Ariete Vidal-Castells.



Ariete duplex de acción continua.

Escala 1 : 10.



# ACTAS DE LAS SESIONES

CELEBRADAS POR LA

## SECCIÓN DE APLICACIONES DEL CONGRESO DE VALLADOLID

---

### **Sesión de apertura.**

(18 de Octubre de 1925.)

Dió comienzo a las nueve de la mañana en el aula designada para las Juntas de la Sección, en el edificio de la nueva Universidad. El Presidente de la Sección en el Comité local, *Sr. D. Eduardo Domingo Mambrilla*, Ingeniero jefe de Caminos, dirigió un expresivo saludo a los señores congresistas, y propuso presidiera el acto el ilustre Ingeniero *Sr. D. Leonardo Torres de Quevedo*, excusándose éste fundándose en la práctica de otros Congresos.

Concedida la palabra al *Sr. Pérez de los Cobos*, leyó el discurso de apertura de los trabajos de la Sección, que fué escuchado con marcadas muestras de complacencia por todos los señores presentes.

Suspendido el acto por algunos minutos, se reanudó a las diez de la mañana, acordándose, a propuesta del Sr. Presidente, que las sesiones se abran diariamente a las nueve y media, y que la exposición del material científico pueda ser visitada de diez a trece y de quince a veinte horas, por los señores congresistas, y por el público de quince a diecisiete y media. Además se acordó que los domingos se dediquen exclusivamente a la visita de obreros, para lo cual se proveerá a las Sociedades o entidades que los representen de las tarjetas de admisión correspondientes.

### **Sesión del día 19 de Octubre.**

A las nueve y media de la mañana abre la sesión el Sr. Presidente, concediendo la palabra al Ingeniero de Caminos *Sr. Marqués de Echan-*

*día*, el cual, en nombre de los respectivos autores, lee las Memorias siguientes:

1.<sup>a</sup> «Aplicación de la Estática gráfica al cálculo de las líneas eléctricas de tracción», por D. Luis Sánchez Cuervo.

2.<sup>a</sup> «Nomograma para el cálculo de canales, derivado del propuesto por Mr. D'Ocagne, con el fin de evitar la doble alineación de puntos que éste exige», por D. Pablo Fernández Quintana.

3.<sup>a</sup> «Arcada múltiple», por D. Juan Manuel de Zafra.

Terminada la lectura de esos trabajos, el Capitán de Ingenieros, *D. Carlos Barutell*, leyó dos Comunicaciones, la primera acerca del Método de Kleiton para ensayo de una máquina de vapor, y la segunda sobre la locomotora moderna como central de energía.

Por último, el Ingeniero de Caminos, *D. Domingo Mendizábal*, procedió a la lectura de su trabajo sobre el empleo de algunos métodos modernos de ensayo en la recepción de hierros y aceros.

La Sección hizo suyas las conclusiones sustentadas por el autor de esta interesante Memoria, acordando transmitir las al Comité ejecutivo de la Asociación.

### Sesión del 20 de Octubre.

Abierta a las nueve y media de la mañana, leyó el Ingeniero de Minas, *D. Luis Mariano Vidal*, una Memoria para dar a conocer el nuevo Ariete duplex Vidal-Castells.

A continuación, el General de Artillería *D. Ricardo Aranz*, leyó su anunciada conferencia sobre descomposición de las pólvoras.

Sucesivamente fueron presentadas y leídas por sus respectivos autores las Memorias siguientes:

«Aplicaciones de la aviación», por el P. Ascunce.

«Caso práctico de aplicación de los métodos de la mecánica elástica», por el Ingeniero de Caminos D. José López Franco.

«Los hornos eléctricos del Laboratorio del material de Ingenieros del ejército», por el Capitán del Cuerpo D. Félix González.

«Influencia del rumbo y la velocidad sobre el desplazamiento del buque», por el Teniente de navío D. Ramón Fontenla.

«El empleo del hipoclorito de cal en agricultura» y «El agua oxigenada en la confección de aguardientes estilo coñac», por D. Conrado Granell, Doctor en Ciencias químicas.

«Intervención del Estado en la explotación económica de los fe-

rocarriles» y «La tracción por vapor en los ferrocarriles», por D. Vicente Burgaleta, Ingeniero Industrial.

«Fórmula simplificada para calcular las correas y listones de armadura formadas por hierros de ángulo», por D. Manuel Velasco de Pando, Ingeniero Industrial.

«Nuevo método gráfico para la determinación de la pérdida de flecha de los resortes de ballesta bajo carga», por D. Mario Viani Caballero, Ingeniero Industrial.

«Adherencia del hormigón armado», por el Ingeniero de Caminos D. Fermín Casares.

«Sobre la resistencia a la rotura y al movimiento de los cuerpos comprimidos que se tocan según un punto o según una línea» y «Nota sobre un sistema de compuertas para pantanos», por D. Pedro M. Sánchez Quijano, Ingeniero de Caminos.

### Sesión del 21 de Octubre.

A la hora señalada se reúne la Sección para el examen de la Memoria titulada «Parabológrafo e hiperbológrafo», de que es autor el P. Gastón Ferrer, S. J., y de la escrita por D. Vicente Ventosa bajo el título de «Elipsógrafo Ventosa». Ambas merecen ser aprobadas por la Sección.

El Ingeniero de Caminos *D. Pedro M. González Quijano*, lee su trabajo sobre la resistencia a la rotura y al movimiento de los cuerpos comprimidos que se tocan, según un punto o según una línea.

El *Sr. D. Enrique Hauser*, Ingeniero de Minas, explica su aparato para el análisis de los gases combustibles.

Se da cuenta de la Comunicación presentada por el Ingeniero de Minas *D. Antonio Torroja Miret*, sobre el Estereógrafo de que es autor.

Igualmente es leída la Memoria acerca de los progresos de la Fotogrametría en España, escrita por el Ingeniero de Caminos *D. José María Torroja Miret*.

El de igual clase, *D. Virgilio García Antón*, lee su trabajo sobre un procedimiento gráfico para la distribución de las varillas de resistencia en muros de hormigón armado.

El Secretario presenta una Memoria que, bajo el título de «Círculos calculadores para el Oficial de Infantería», ha escrito el Capitán de dicha Arma *D. Sixto Cámara Tecedor*.

Se concede la palabra al Comandante de Artillería *D. Rafael Casado Moyano*, para que dé cuenta de sus estudios sobre equilibrio del aeroplano.

También da cuenta de un abono potásico de su invención, el Doctor en Ciencias *D. Conrado Granell*.

A las doce en punto comenzó la conferencia del Comandante de Ingenieros *D. Ricardo M. Unciti*, quien explicó las características de los pisos dobles o de cámara intermedia de aire, sistemas Hennebique, Demay, Coularou, Melan y Coignet, pasando luego a la descripción del sistema de su invención, cuyo modelo a escala natural ha construído en uno de los patios de la Universidad. Examinadas todas las partes componentes del piso doble allí construído, se procedió a las pruebas de resistencia y de rigidez por medio de sobrecarga de arena en sacos, no apreciándose flecha alguna, no obstante ser crecidos los pesos y haberse ejecutado la obra el día 15 de los corrientes.

Terminadas la presentación, lectura y examen de todos los trabajos anunciados para ocupar las sesiones de la Sección, el Presidente felicita a los autores de las Comunicaciones leídas, y se congratula del gran éxito alcanzado, no sólo por la Sección de Aplicaciones, sino por todas las que han constituído el Congreso.

# ÍNDICE

Páginas.

Intervención del Estado en la explotación económica de los ferrocarriles, por D. Vicente Burgaleta.....	5
Arcada múltiple, por D. Juan Manuel de Zafrá.....	31
La tracción por vapor en los ferrocarriles, por D. Vicente Burgaleta.....	39
Aplicación de las construcciones de la estática gráfica al cálculo de líneas eléctricas de tracción, por D. Luis Sánchez Cuervo.....	59
La adherencia en el hormigón armado y las variaciones de volumen en el fraguado, por D. Fermín Casares Bescansa.....	71
Influencia del rumbo y de la velocidad en el desplazamiento del buque, por D. Ramón Fontenla.....	99
Fototaquímetro Más y Zaldúa Md. 1914: Instrumento empleado en los trabajos de campo del moderno procedimiento estereofotogramétrico, por D. Alejandro Más Gaminde.....	121
Procedimiento gráfico para la distribución de las varillas de resistencia en muros de hormigón armado, con contrafuertes, sometidos al empuje del agua, de las tierras, o al de una y otras simultáneamente, por D. Virgilio García Antón.....	131
El estereógrafo, por D. Antonio Torroja Miret.....	139
Sobre los progresos de la fotogrametría en España, por D. José María Torroja.....	151
Círculos calculadores del Oficial de Infantería, por D. Sixto Cámara Teceador.....	161
Nomograma para el cálculo de canales, por D. Pablo Fernández Quintana.....	207
Proyecto de un elipsógrafo, por D. Vicente Ventosa.....	211
Parabológrafo e Hiperbológrafo, por el Padre Gastón Ferrer, S. J.....	221
Nuevo método gráfico para la determinación de la pérdida de flecha de los resortes de ballesta bajo carga, por D. Mario Viani Caballero.....	249
Algunas consideraciones acerca del empleo de los abonos químicos y breve estudio de la kaliníta, nuevo abono potásico, por D. Conrado Granell..	267

	Páginas.
El agua oxigenada en la confección del aguardiente estilo cognac, por D. Conrado Granell.....	273
El hipoclorito de calcio en agricultura, por D. Conrado Granell.....	275
Fórmula simplificada para calcular las correas y listones de armadura formadas por hierros de ángulo, por D. Manuel Velasco de Pando.....	277
Equilibrio del aeroplano: Autoestabilidad y vuelo a diferentes velocidades, por D. Rafael Casado Moyano.....	283
Sobre la resistencia a la rotura y al movimiento de los cuerpos comprimidos que se tocan según un punto o según una línea, por D. Pedro M. González Quijano.....	325
Los hornos eléctricos del Laboratorio del Material de Ingenieros, por don Félix González.....	353
Empleo de algunos métodos modernos de ensayo en la recepción de hierros y aceros, por D. Domingo Mendizábal.....	375
Nota sobre un sistema de compuertas para pantanos, por D. Pedro M. González Quijano.....	441
Giroscopio, II: Amortiguamiento y percusión, por D. Mateo García de los Reyes.....	449
Ariete duplex Vidal-Castells, por D. Luis M. Vidal.....	481
Actas de las sesiones celebradas por esta Sección.....	485







SL 3340

3573



10000152729





CONGRESO  
DE  
VALLADOLID

9-10

SL  
3340