BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS

TEXTOS DE LA PRIMERA ENSEÑANZA

POR

SATURNINO CALLEJA.

GEOMETRÍA

LIT. MATEU, MADRID.

BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS

GEOMETRÍA

BIBLIOTECA

DE LAS

ESCUELAS

TEXTOS DE LAS ASIGNATURAS

DE LA

ENSEÑANZA PRIMARIA SUPERIOR

ARREGLADOS AL PROGRAMA OFICIAL DE INGRESO EN LAS NORMALES

Y ESCRITOS POR

SATURNINO CALLEJA

Tomo V

GEOMETRÍA

EDICIÓN AUMENTADA Y REFORMADA

Obra de texto aprobada por la Autoridad eclesiástica

MADRID
SATURNINO CALLEJA, EDITOR
Calle de Valencia, núm. 28.

1898

Establecimiento tipográfico «Sucesores de Rivadeneyra».

PRÓLOGO.

La presente obra pertenece á la Biblioteca de las Escuelas, bajo cuyo título publicamos una serie de libros destinados al grado superior de la Enseñanza Primaria, y escritos con sujeción á un plan que promete fecundos resultados.

En el *Prólogo* del primer volumen de esta colección explicamos en los términos siguientes el plan ó método didáctico y literario de la Biblioteca de las Escuelas:

«Nos han sugerido ese nuevo plan: 1.°, la comparación que hemos hecho de los diversos métodos seguidos en sus libros por los autores más reputados de España y del Extranjero; 2.°, las opiniones que hemos consultado de distinguidos pedagogos y de profesores de larga y fructuosa experiencia; 3.°, la necesidad de estimular las facultades de análisis de los niños para que éstos no cultiven solamente su memoria y se acostumbren á desentrañar el sentido de lo que leen; 4.°, la conveniencia, debidamente apreciada por Brochard, Marión y Montesinos, de que los educandos, en todo cuanto leen y estudian, se habitúen á distinguir lo que es fundamental de lo que es accesorio, ó de otra manera, el contenido substancial de cada párrafo y lo que en éste sirve de mera aclaración ó de explicación amena.

»El plan á que sujetamos la Biblioteca de las Escuelas, que con el presente libro se inicia, consiste: 1.º, en dedicar un párrafo de cada capítulo para cada asunto, con sujeción á programa ó cuestionario determinado y preciso, pero sin interrumpir la lectura con la intercalación de las preguntas en el texto; 2.º, en colocar al pie de cada página las preguntas correspondientes á los párrafos de la misma página; 3.º, en poner con letra cursiva ó bastardilla en cada párrafo un extracto del mismo, ó sea la respuesta sucinta de la respectiva pregunta; y 4.º, en hacer al final de cada capítulo un resumen abreviadísimo de su contenido substancial.

»De este modo, cada libro de los que corresponden á la serie del presente contiene en sí mismo tres de diferente extensión: uno abreviado, constituído por los resúmenes de todos los capítulos; otro más completo, formado por la parte que va de letra cursiva ó bastardilla en todos los párrafos; y otro más extenso, que es el libro en toda su integridad.

»Con lo precedente queda también dicho que el presente libro puede servir de útil lectura amena, y de libro para aprender de memoria todo lo que exige el programa oficial de primera enseñanza para el ingreso en las Escuelas Normales. Luego la presente obra es educativa é instructiva, carácter que procuramos dar á todos los libros de esta casa.»

Saturnino Calleja.

GEOMETRÍA.

INTRODUCCIÓN.

1. *Geometría es la ciencia que tiene por objeto el estudio de la extensión;* es decir, el estudio de la porción de espacio que ocupa cada cuerpo en el espacio infinito.

2. *Extensión es una porción cualquiera del espacio infinito* en que se hallan todos los cuerpos y en que giran todos los mundos que constituyen el Universo.

3. *Todos los cuerpos son extensos,* porque la extensión es una de las propiedades esenciales de la materia, supuesto que todo lo que existe corporalmente ha de estar en alguna parte; pero la extensión puede considerarse de varios modos: con relación á la longitud, con relación á la latitud y con relación á la altura ó profundidad.

4. *Se llaman dimensiones los diferentes modos con que se puede medir la extensión;* porque la extensión

---

1. ¿Qué es Geometría?
2. ¿Qué es extensión?
3. ¿Son extensos todos los cuerpos?
4. ¿Qué son dimensiones?

no sólo puede apreciarse por la cantidad, sino por la forma de los cuerpos.

5. *Las dimensiones principales son tres, y se designan con los nombres de longitud ó largo, latitud ó ancho y altura ó grueso:* la longitud se mide regularmente desde la parte superior (arriba) á la inferior (abajo), ó lo contrario; la latitud se mide de un lado á otro; y la altura, grueso ó profundidad desde la parte anterior á la posterior.

6. *Se llaman superficies los límites que separan el espacio que ocupa un cuerpo del espacio absoluto.* Las superficies tienen dos dimensiones, que son: longitud y latitud. En cualquiera porción del espacio se consideran infinitas superficies.

7. *Líneas son los límites de las superficies.* Las líneas sólo tienen una dimensión, que es la longitud. En las superficies se considera una infinidad de líneas.

8. *Puntos son los límites de las líneas.* El punto es el cero de la extensión, y, por tanto, el punto no tiene dimensión. En cualquiera línea se considera una infinidad de puntos.

9. *La forma de la extensión de los cuerpos se llama su figura.* Luego la figura de los cuerpos tiene longitud, latitud y altura ó grueso.

10. *Volumen de un cuerpo es la cantidad total de la extensión de ese cuerpo*, ó sea el producto de su longitud por su latitud y por su altura. *Area de una superficie es la cantidad total de la extensión de esa su-*

---

5. ¿Cuántas son las principales dimensiones de los cuerpos?
6. ¿Qué son superficies?
7. ¿Qué son líneas?
8. ¿Qué son puntos?
9. ¿Qué es la figura de los cuerpos?
10. ¿Qué es volumen de un cuerpo, área de la superficie y longitud de la línea?

perficie, ó sea el producto de su longitud por su latitud. *Longitud de una línea es la extensión de esa misma línea.* Aunque el punto matemático no tiene extensión, y, por tanto, carece de figura, para considerarlo independiente de la línea se suele señalar con un punto de la escritura común.

11. *La Geometría se divide en*
Geometría plana
y Geometría del espacio.

12. *La Geometría plana estudia la extensión, cuyos elementos están en un solo plano*, como las líneas rectas y curvas planas, y las superficies terminadas por esas líneas.

La Geometría del espacio estudia la extensión de los cuerpos que están en diferentes planos, como las superficies quebradas y curvas.

Resumen de la Introducción.

Geometría es la ciencia de la extensión.

Extensión es una parte limitada del espacio.

La extensión de los cuerpos debe considerarse de varios modos, que se llaman dimensiones. Las dimensiones principales son: longitud, latitud y altura, grueso ó profundidad.

El punto es el cero de la extensión: la línea es la extensión con una sola dimensión de longitud: la superficie es la extensión con dos dimensiones de longitud y de latitud: volumen es la extensión que tiene tres dimensiones, que son: longitud, latitud y profundidad ó altura.

La Geometría se divide en Geometría plana, que estudia la extensión en un plano; y Geometría del espacio, que estudia la extensión en diferentes planos.

---

11. ¿Cómo se divide la Geometría?
12. ¿Qué es Geometría plana y qué es Geometría del espacio?

GEOMETRÍA PLANA.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA LÍNEA RECTA.

1. *Línea recta es la línea que tiene todos sus puntos en una misma dirección:* toda línea se considera como una pluralidad de puntos, y para designarla se escribe una letra en cada uno de sus dos extremos y se leen unidas ambas letras: son líneas rectas las líneas *A B*, *C D*, *E F* y *G H*, de la figura 1.ª

2. PROPIEDADES DE LA LÍNEA RECTA:

1.ª *Dos puntos determinan la posición de una recta*; porque todos los puntos de una recta seguirán la misma dirección que dos cualesquiera de ellos.

2.ª *Si dos ó más rectas tienen sus extremos comunes, serán iguales*; porque todos sus puntos coincidirán, es decir, estarán exactamente conformes todos los puntos de una recta con todos los puntos de la otra ó de las otras.

3.ª *La distancia más corta entre dos puntos es la línea recta que los une*; porque cualquiera otra línea

---

1. ¿Qué es línea recta?
2. ¿Cuáles son las propiedades de la línea recta?

que no sea recta ocupará mayor extensión y constará de más puntos que la línea recta.

4.ª *Dos líneas rectas que sigan distinta dirección se encontrarán necesariamente en un punto*; como las rectas *A B* y la inmediata de la figura 1.ª *El punto en que dos líneas se cortan se llama intersección.*

5.ª *Por un punto se pueden trazar muchas líneas rectas*, las cuales podrán seguir direcciones distintas.

6.ª *Entre dos puntos no se puede trazar más que*

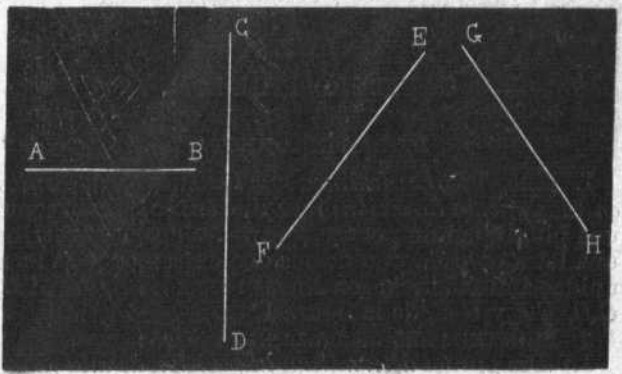

Fig. 1.ª

una sola línea recta; porque cualesquiera otras que se tracen, ó no serán rectas, ó se confundirán con la primera.

3. *La línea recta se llama vertical cuando sigue la dirección de arriba á abajo, ó de abajo hacia arriba*, sin inclinarse á un lado más que á otro, como la recta *CD* (fig. 1.ª); si suspendemos un hilo por un extremo,

---

3. ¿Cuál es la línea recta vertical?

y en el otro extremo le colocamos un peso, la dirección que siga será exactamente vertical.

4. *La línea recta se llama horizontal cuando sigue la dirección del horizonte*, es decir, de izquierda á derecha ó de derecha á izquierda; como la recta *A B* (fig. 1.ª).

5. *La línea recta se llama inclinada cuando no es vertical ni horizontal*, como las líneas *E F* y *G H* (figura 1.ª).

6. *Línea curva es la línea que no tiene recta ninguna porcion*, por pequeña que sea, como la *A B C* (fig. 2.ª), porque sus puntos cambian continuamente de dirección.

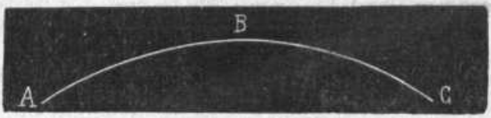

Fig. 2.ª

7. *Línea quebrada es la formada por varias rectas* (fig. 3.ª), trazadas cada una á continuación de otra.

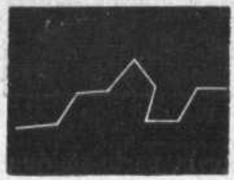

Fig. 3.ª

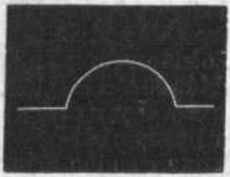

Fig. 4.ª

---

4. ¿Cuál es la línea recta horizontal?
5. ¿Cuándo se llama inclinada la línea recta?
6. ¿Qué es línea curva?
7. ¿Qué entendemos por línea quebrada?

8. *Línea mixta es la que consta de recta y curva* (fig. 4.ª).

9. *Dos rectas trazadas sobre un plano pueden ser recíprocamente perpendiculares, oblicuas ó paralelas.*

Dos líneas son perpendiculares entre sí cuando una de ellas cae sobre la otra sin inclinarse á ningún lado de esa otra. En la fig. 5.ª, las líneas *A B* y *C D* son perpendiculares entre sí, y las líneas *a b* y *c d* son igualmente perpendiculares, porque ninguna de esas líneas se inclina respecto de la otra á ningún lado con preferencia.

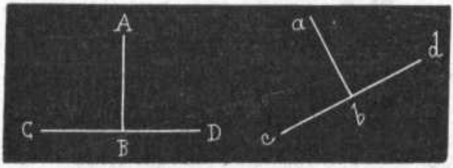

Fig. 5.ª

Dos líneas son oblicuas entre sí cuando una de ellas cae sobre la otra, inclinándose á un lado de esa otra. En la figura 6.ª las líneas *C D* y *A B* son oblicuas, y también lo son las líneas *a b* y *c d*. Dos líneas oblicuas que tienden á juntarse, por la parte en que se juntan se llaman *convergentes;* y las que tienden á separarse ó con relación á la parte en que se apartan, se llaman *divergentes.*

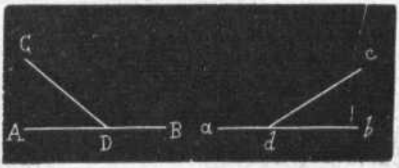

Fig. 6.ª

---

8. ¿Qué clase de línea es la mixta?

9. ¿De cuántas maneras pueden ser entre sí dos rectas trazadas en un plano?

Dos líneas son paralelas cuando se hallan trazadas en un mismo plano, y nunca se encuentran por mucho que se prolonguen; como las rectas AB y CD de la figura 7.ª Las dos barras de hierro de una vía de ferrocarril son entre sí paralelas, aunque no siempre son rectas.

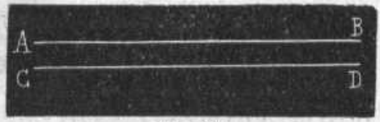

Fig. 7.ª

10. *Las superficies pueden ser planas y curvas. Las superficies planas se llaman también planos*, y son aquellas superficies con las cuales coincide en toda su extensión una recta aplicada á dos cualesquiera de sus puntos. *Una superficie curva es la cara exterior de un cuerpo redondo. Una continuación de planos se llama superficie quebrada.* Ejemplo de superficie plana ó de plano es la parte superior del tablero de una mesa. Ejemplo de superficie curva es la parte exterior de una manzana. Ejemplo de superficie quebrada es la figura que afectan los tramos de una escalera.

Resumen del capítulo primero.

Las líneas se dividen en rectas y curvas. La línea recta puede ser vertical, horizontal ó inclinada. La línea quebrada es la formada por varias rectas: la línea mixta es la que consta de recta y curva.

Dos líneas rectas pueden ser entre sí perpendiculares, oblicuas ó paralelas.

Las superficies son planas y curvas. Una serie de superficies planas forman una superficie quebrada.

---

10. ¿Cómo se dividen las superficies? ¿Cuáles son las superficies planas? ¿Qué es superficie curva? ¿Cuál es la superficie quebrada?

CAPÍTULO II.

DE LOS ÁNGULOS.

1. *Angulo es la extensióu comprendida entre dos rectas indefinidas que concurren en un punto. Las líneas del ángulo se llaman «lados», y el punto en que concurren se denomina «vértice».* Se dice que las rectas que determinan el ángulo son indefinidas porque pueden prolongarse cuanto se quiera, sin que por eso cambien la naturaleza, la cualidad ni la medida del ángulo.

2. *El ángulo se designa por tres letras*, y se lee en el medio la que lleva el vértice: *cuando un ángulo*

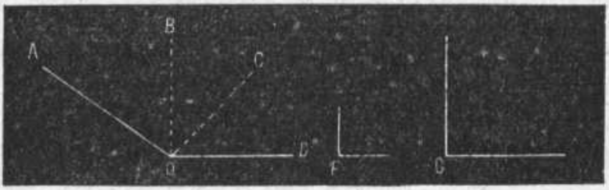

Fig. 8.ª

está solo, para designarlo *basta nombrar la letra del vértice.* Así, diremos: el ángulo *A O B* se convierte en *A O C* y *A O D;* el ángulo *F* es igual al ángulo *G* (fig 8.ª).

Las rectas *A O* y *B O* son lados del ángulo *A O B*, cuyo vértice es *O;* las rectas *B O* y *C O* son lados del

---

1. ¿Qué es ángulo? ¿Qué son lados y vértice del ángulo?
2. ¿Cómo se designa ó se nombra un ángulo?

ángulo BOC, cuyo vértice es O; luego en el primer grabado de la figura 8.ª hay seis ángulos: AOB, AOC, AOD, BOC, BOD y COD.

3. *Se llama bisectriz de un ángulo la recta que lo divide en dos partes iguales*: un ángulo no tiene más

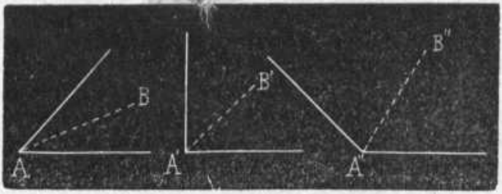

Fig. 9.ª

que una bisectriz. En el ángulo A aparece trazada la bisectriz $A\,B$; la recta $A'\,B'$ es la bisectriz del ángulo A', y la recta $A''\,B''$ es la bisectriz del ángulo A'' (fig. 9.ª).

4. Los ángulos se dividen en rectos, agudos y obtusos. *Angulo recto es aquel que está formado por dos líneas perpendiculares que coinciden en uno de sus extremos*. Todos los ángulos rectos son iguales. En la figura 10, las rectas $A\,B$ y $B\,C$, que son perpendiculares entre sí y coinciden en el punto B, son lados del ángulo recto $A\,B\,C$.

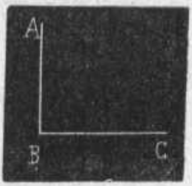

Fig. 10.

Angulo agudo es aquel cuyos lados tienen menor abertura que el recto. Cualquier án-

---

3. ¿Qué es bisectriz de un ángulo?
4. ¿Qué es ángulo recto? ¿Cuál es el ángulo agudo? ¿Y el ángulo obtuso?

gulo agudo es menor que el ángulo recto. Los tres ángulos de la figura 11 son agudos.

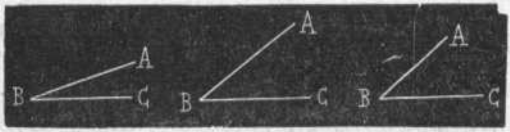

Fig. 11.

Angulo obtuso es aquel cuyos lados dejan mayor abertura que en el recto. Cualquier ángulo obtuso es

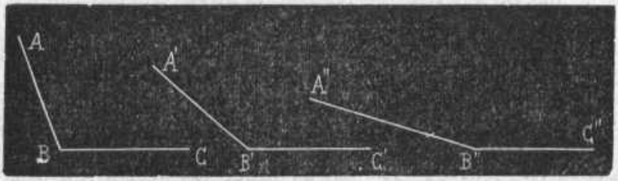

Fig. 12.

mayor que el ángulo recto. Los tres ángulos de la figura 12 son obtusos.

5. *La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la abertura ó separación de*

Fig. 13.

---

5. ¿De qué depende la magnitud de un ángulo?

esos lados: á mayor ángulo corresponde mayor abertura; mientras menor sea la abertura, menor es el ángulo. El ángulo A de la figura 13 es mayor que el ángulo B, porque su abertura es mayor.

Si la magnitud de un ángulo depende de la abertura de sus lados, podremos decir que ángulo agudo es todo ángulo menor que el recto, y ángulo obtuso es todo ángulo mayor que el recto.

6. *Angulos complementarios son dos ángulos que juntos valen tanto como un solo recto;* porque sumadas sus dos respectivas aberturas resultaría una abertura igual á la del ángulo recto.

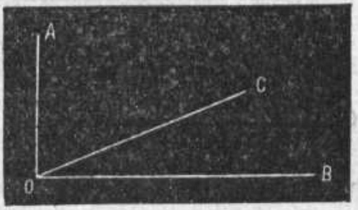

Fig. 14.

Los ángulos $A\ O\ C$ y $C\ O\ B$ de la fig. 14 son complementarios y los dos juntos equivalen al ángulo recto $A\ O\ B$.

7. *Se llaman ángulos adyacentes y también ángulos suplementarios, dos ángulos que tienen un lado común y los otros dos lados están formados por una sola recta.* Los dos ángulos adyacentes valen tanto como dos rectos; y se llaman suplementarios porque lo que al uno sobra para valer un

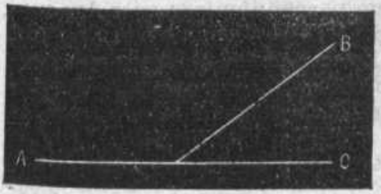

Fig. 15.

---

6. ¿Qué son ángulos complementarios?
7. ¿Cuáles son los ángulos adyacentes ó suplementarios?

recto, es lo que falta al otro para alcanzar el mismo valor.

Los ángulos *A B* y *B C* (fig. 15) son adyacentes y suplementarios; el lado común para los dos, es *B*, y los dos lados *A*, de un ángulo, y *C*, del otro, están formados por la recta *A C*.

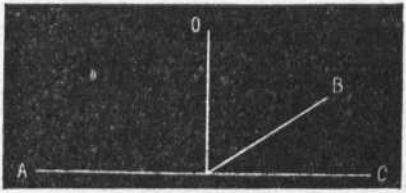

Fig. 16.

Los dos ángulos, *A O B* y *B O C*, valen dos rectos.

Demostración (1): Si levantamos la perpendicular *O* al vértice (fig. 16), veremos que el ángulo

A vértice *B* = 1 Recto + *O* vértice *B*.
y el ángulo *B* vértice *C* = 1 Recto — *O* vértice *B*.

Luego los dos valen 2 Rectos.

8. *Dos líneas rectas que se cortan, dan origen á cuatro ángulos:* si se cortan perpendicularmente, los cuatro ángulos son rectos; y si oblicuamente, dos son rectos y dos obtusos. En el primer grabado de la figura 17, las dos líneas *B D* y *C E*, se cortan perpendicularmente en el punto *A*, y forman cuatro ángulos rectos; en el segundo grabado, las líneas *B'D'* y *C'E'* se cortan oblicuamente en el punto *A'*, y forman los dos ángulos agudos *B'A'C'* y *D'A'E'*, y los dos obtusos *C'A'D'* y *B'A'E'*.

---

8. ¿Cuántos ángulos forman dos líneas que se cortan?

---

(1) Demostración es una serie de argumentos que sirven para probar la verdad contenida en la proposición enunciada.

9. *Se dice que dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los dos lados del uno son prolongaciones de los dos lados del otro:* los ángulos opuestos por el vértice son iguales. En el segundo grabado de la fi-

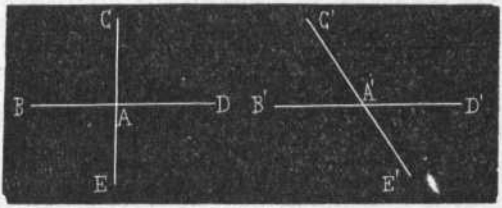

Fig. 17.

gura 17, los dos ángulos agudos son entre sí iguales y opuestos por el vértice; y los dos ángulos obtusos también son opuestos por el vértice, y por consiguiente, iguales entre sí.

10. *Si dos rectas, sean ó no sean paralelas, se cortan por una tercera, ésta recibe el nombre de secante, y forma con las primeras ocho ángulos, de los cuales cuatro se llaman externos y los otros cuatro internos.*

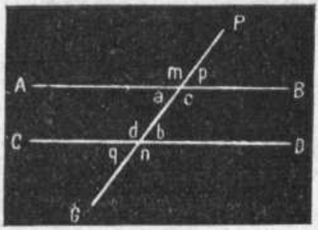

Fig. 18.

En la figura 18, las líneas $A B$ y $C D$, que pueden no ser paralelas, se hallan cortadas por la se-

---

9. ¿Cuándo se dice que dos ángulos son opuestos por el vértice?

10. ¿Cuántos ángulos forman dos líneas cortadas por una tercera? ¿Cómo se llama esa tercera línea, y cómo se llaman los ángulos que forma con las dos primeras?

cante PG, y forman los ocho ángulos m, p, a, c, d, b, q, n.

De esos ángulos, son internos a, c, d, b; y son externos m, p, q, n.

11. Los ocho ángulos formados por dos rectas cortadas por una secante reciben también el nombre de alternos y correspondientes.

Son ángulos alternos los externos ó internos de diferente lado de la secante: son ángulos alternos entre sí (fig. 18), a y b, c y d, m y n, p y q.

Y son ángulos correspondientes entre sí, el ángulo interno y el ángulo externo del mismo lado de la secante: son ángulos correspondientes, m y d, p y b, a y q, c y n.

12. PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS.—*Si las dos rectas que se cortan por una secante son paralelas*, como en la figura 19, se efectúan las propiedades siguientes:

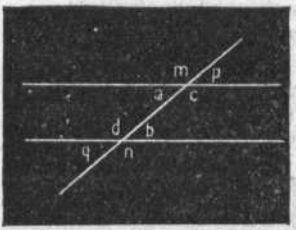

Fig. 19.

1.ª Que *los ángulos alternos son iguales:* $a = b$; $c = d$; $m = n$; $p = q$.

2.ª Que *los ángulos correspondientes son iguales:* $m = d$; $p = b$; $a = q$; $c = n$.

3.ª Que *los ángulos opuestos por el vértice son también iguales:* $m = c$; $p = a$; $d = n$; $b = q$.

4.ª Que *cualquier ángulo es igual á otros tres:*

$a = b$ por alternos,

---

11. ¿Cuáles son los ángulos alternos? ¿Cuáles son los ángulos correspondientes?

12. ¿Cuáles son las propiedades de los ángulos formados por dos líneas paralelas cortadas por una secante?

$a = q$ por correspondientes,
$a = p$ por opuestos.

5.ª Que los ocho ángulos son respectivamente suplementarios y equivalen á ocho rectos; porque si por los respectivos vértices trazamos perpendiculares (fig. 20), observaremos que lo que á cada ángulo falta para ser recto, es lo que sobra á su adyacente.

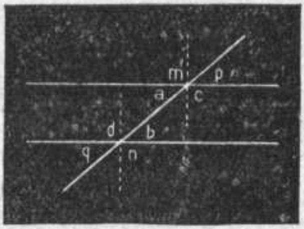

Fig. 20.

6.ª Que las partes de líneas paralelas interceptadas por otras paralelas son iguales; y, por tanto, que los ángulos de los lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios; los ángulos B y b de la figura 21 son iguales, como son iguales las partes $B\,o$ y $b\,p$, y también $o\,b$ y $B\,p$, interceptadas por las prolongaciones de sus respectivos lados, que resultan líneas paralelas.

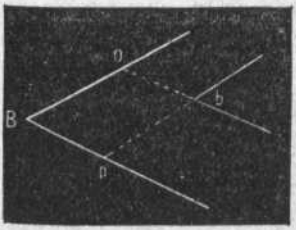

Fig. 21.

Resumen del capítulo II.

Ángulo es la extensión comprendida entre dos rectas, llamadas lados, que convergen en un punto llamado vértice; la magnitud del ángulo depende de la abertura de sus lados; á mayor abertura, mayor ángulo. Bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.

Los ángulos se dividen en rectos, agudos y obtusos; el ángulo agudo es menor que el recto, y el obtuso es mayor. Dos ángulos son complementarios cuando valen juntos un ángulo recto. Dos ángulos adyacentes valen juntos dos ángulos rectos.

Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados del uno son prolongaciones de los lados del otro: los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

CAPÍTULO III.

DE LA CIRCUNFERENCIA.

1. *Circunferencia es una curva cerrada y plana cuyos puntos se hallan á igual distancia de uno interior que está en el medio, llamado centro* (fig. 22). *El espacio comprendido dentro de la línea de la circunferencia se llama círculo.*

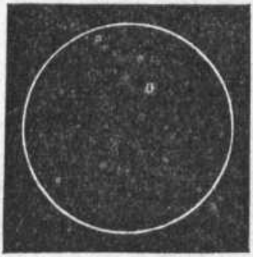

Fig. 22.

2. *Las rectas que desde el centro van á la circunferencia se llaman radios.* Todos los radios de una circunferencia son iguales; porque siendo igual la distancia que hay desde el centro á cualquier punto de la circunferencia, iguales han de ser las rectas que se tracen desde el cen-

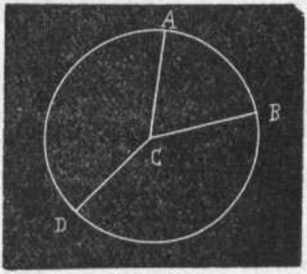

Fig. 23.

---

1. ¿Qué es circunferencia y qué es círculo?
2. ¿Qué son radios de la circunferencia?

tro á cualquiera de aquellos puntos. En la figura 23, las rectas *AC*, *BC* y *DC* son radios, y, por consiguiente, iguales.

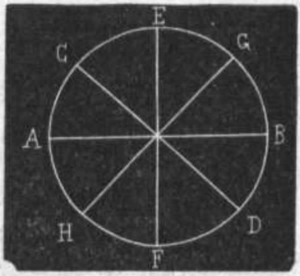

Fig. 24.

3. *Diámetros son las rectas que, pasando por el centro, terminan en dos puntos opuestos de la circunferencia.* Todos los diámetros de una misma circunferencia son iguales, y cada uno equivale á dos radios. En la figura 24 hay trazados cuatro diámetros, todos iguales, equivalentes á ocho radios; esos diámetros son: *A B*, *C D*, *E F*, *G H*.

4. *Arco es una porción cualquiera de la circunferencia.* En la figura 25 hay señalados tres arcos: *B C* *C D* y *BD*.

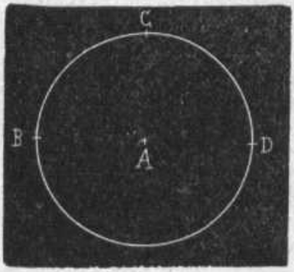

Fig 25.

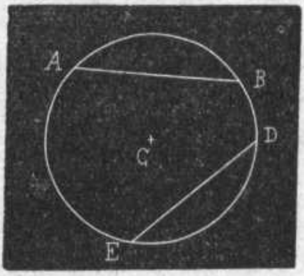

Fig. 26.

---

3. ¿Qué son diámetros?
4. ¿Qué es arco de la circunferencia?

5. *Se llama cuerda de un arco la recta que une los extremos de ese arco.* En la figura 26 las rectas *A B* y *E D* son cuerdas de los arcos respectivos. *Toda cuerda divide al círculo en dos partes llamadas «segmentos»*.

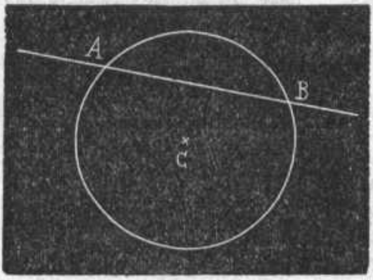

Fig. 27.

6. *Secante es la recta que corta á la circunferencia en dos cualesquiera de sus puntos*, como la recta *A B* de la figura 27, que corta á la circunferencia en el punto *A* y en el punto *B*.

7. *Tangente es la línea recta que*, aunque se prolongue indefinidamente, *no tiene con la circunferencia más que un punto de contacto, llamado punto de tangencia;* como la recta *A B* de la figura 28.

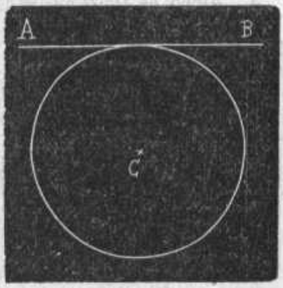

Fig. 28.

8. PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA.— En toda circunferencia se efectúan las propiedades siguientes:

1.ª *Todo diámetro divide*

---

5. ¿Qué es cuerda de un arco? ¿En cuántas partes divide la cuerda al círculo, y qué son segmentos?

6. ¿Qué es secante? ¿En cuántos puntos toca á la circunferencia?

7. ¿Qué es tangente? ¿Cuál es el punto de tangencia?

8. 1.ª ¿En cuántas partes divide el diámetro á la circunferencia?

la circunferencia en dos partes iguales llamadas semicircunferencias: en efecto; si doblamos la circunferencia *A B C D* de la figura 29 por el diámetro *A C*, resultará que todos los puntos de la semicircunferencia *A B C* coincidirán con todos los puntos de la semicircunferencia *A D C*.

2.ª *El diámetro es la mayor de las cuerdas*; porque toda cuerda será mayor cuanto más se aproxime al

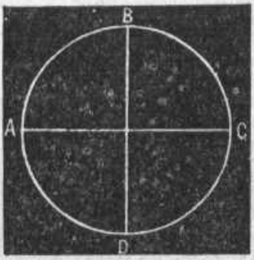

Fig. 29.

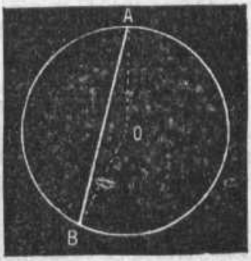

Fig. 30.

centro; y como no puede ninguna cuerda aproximarse al centro tanto como el diámetro, que pasa por el mismo centro, es evidente que ninguna otra cuerda será mayor que el diámetro. Además; si trazamos en una circunferencia la mayor cuerda que podamos describir, con tal que no sea un diámetro, por ejemplo, la *A B* de la figura 30, y desde los puntos *A* y *B* trazamos dos radios, *A O* y *B O*, resultará que *A O* + *B O* equivaldrán á un diámetro, y valdrán más que la recta *A B*; porque la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta que los une.

---

8. 2.ª ¿Qué relación tiene el diámetro con las cuerdas?

3.ª *Si un diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales, dos diámetros perpendiculares entre sí la dividirán en cuatro partes* perfectamente iguales, llamadas *cuadrantes;* tres diámetros de igual separación en sus extremos, en seis partes, llamadas sextantes; cuatro diámetros perpendiculares dos á dos, la dividirán en ocho partes iguales. En la figura 31, el diámetro $A\ C$ divide la circunferencia en dos partes iguales ó semicircunferencias; en la misma figura, los dos diámetros $A\ B$ y $C\ D$, que son perpendiculares entre sí, dividen la circunferencia en cuatro partes iguales, ó cuadrantes.

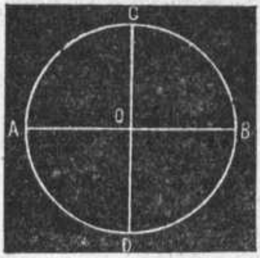

Fig. 31

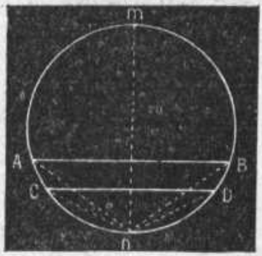

Fig. 32.

Los cuatro diámetros de la figura 24, página 27, dividen la circunferencia en ocho partes iguales.

4.ª *Si dos arcos son iguales, lo serán sus cuerdas; y si son desiguales, el mayor arco tendrá mayor cuerda;* y recíprocamente, si las cuerdas son iguales, lo serán sus respectivos arcos; y si son desiguales, á mayor cuerda corresponderá mayor arco.

---

8. 3.ª ¿En cuántas partes iguales dividen una circunferencia dos diámetros? ¿Qué son cuadrantes?

8. 4.ª ¿Qué relaciones tienen las cuerdas y los arcos?

5.ª *Todo diámetro que sea perpendicular á una cuerda dividirá á ésta y á sus arcos en dos partes iguales:* por consiguiente, si un diámetro divide á una cuerda ó á sus arcos correspondientes en dos partes iguales, el diámetro será perpendicular á la cuerda. En la figura 32 el diámetro *m n* es perpendicular á las cuerdas *A B* y *C D*.

6.ª *Los arcos interceptados por dos cuerdas paralelas son iguales.* En la figura 32, siendo el arco *A Cn*=arco *n D B*, y el arco *C n*=*D n*, es indudable que los arcos *A C* y *B D* también son iguales.

7.ª *Si las cuerdas son iguales equidistan del centro; y si son desiguales, la mayor se acerca más al centro.* En la figura 32 puede comprobarse que de las dos cuerdas *A B* y *C D*, la mayor, que es la *A B*, está más próxima al centro.

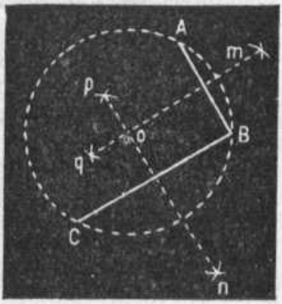

Fig. 33.

8.ª *Tres puntos que no estén en línea recta, determinan la posición, centro y radio de una circunferencia;* ó de otra manera: por tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta, puede trazarse una circunferencia. Sean los puntos *A*, *B* y *C* de la figura 33: uniremos esos puntos por las rectas *A B* y *B C*: por me-

---

8. 5.ª ¿En cuántas partes divide á una cuerda el diámetro perpendicular á ella?

8. 6.ª ¿Qué propiedad tienen los arcos interceptados por cuerdas paralelas?

8. 7.ª ¿Qué propiedad tienen las cuerdas iguales?

8. 8.ª ¿Cuántos puntos fijan la posición, centro y radio de una circunferencia?

dio del compás, y con un radio cualquiera trazaremos desde A, B y C arcos que se corten á uno y otro lado de dichas rectas, y tendremos, por ejemplo, los arcos m, n, p y q; desde esos arcos trazaremos rectas, que resultarán perpendiculares en el punto medio de $A\,B$ y $B\,C$, y el punto O, en que esas perpendiculares se encuentren, será el centro de la circunferencia pedida: el radio será la distancia del centro á uno de los puntos A, B ó C.

9.ª *Toda línea tangente de una circunferencia será perpendicular al radio correspondiente al punto de contacto*; porque la perpendicular es la línea más corta que se puede trazar desde un punto á una recta. En la figura 34, la tangente $A\,B$ y el radio $O\,C$ son perpendiculares, porque cualesquiera otras rectas trazadas desde O sobre la $A\,B$, como $O\,m$, $O\,n$, $O\,p$, $O\,q$, caerán fuera de la circunferencia, y por consiguiente, cada una de ellas será mayor que $O\,C$.

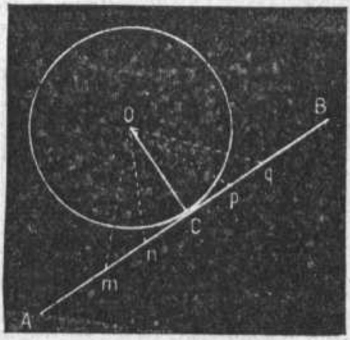

Fig. 34.

9. *La circunferencia se considera dividida en* 360 *arcos iguales, llamados grados*; cada grado tiene 60 minutos, y cada minuto 60 segundos: *un cuadrante de la circunferencia tendrá, por tanto,* 90 *grados;* á

---

8. 9.ª ¿Qué relación tiene la tangente con el radio respectivo al punto de contacto?
9. ¿Cuántos grados tiene la circunferencia? ¿Y el cuadrante?

un sextante de la circunferencia corresponde 60 grados.

Para significar en la escritura los grados, se escribe el número correspondiente, y en la parte superior, á la derecha, se marca un cerito, que se llama cerito volado (por ejemplo: 22 grados$=22^{\circ}$); los minutos se indican escribiendo una rayita diagonal al lado del número correspondiente (20 minutos$=20'$), y

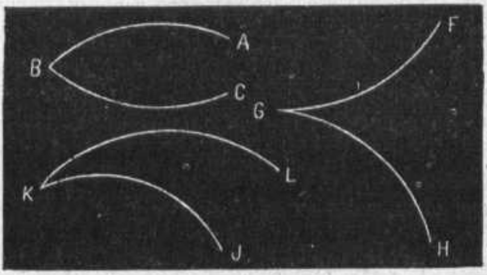

Fig. 35.

segundos con dos rayitas (15 segundos$=15''$). Luego para representar 22 grados, 20 minutos y 15 segundos de la circunferencia, se escribirá:

$$22^{\circ}, 20', 15''.$$

10. Los arcos de circunferencia pueden formar ángulos y dar origen á los ángulos *curvilíneos* y *mixtilíneos*, nombres con que se diferencian de los ángulos formados por líneas rectas, que por esta razón deben llamarse ángulos *rectilíneos*.

Angulos curvilíneos son los formados por dos líneas curvas correspondientes á dos arcos de circunferencia: se dividen en cóncavos, como *A B C* de la fi-

10. ¿Qué son ángulos curvilíneos y mixtilíneos?

gura 35; convexos, como *F G H*, y cóncavo-convexos, como *J K L*.

Angulos mixtilíneos son los formados por una línea

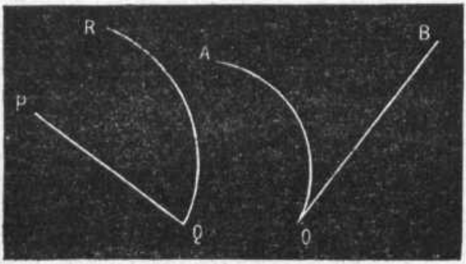

Fig. 36.

curva y otra recta, como *A O B* y *P Q R* de la figura 36.

Fácil es averiguar la circunferencia á que pertenece cualquiera de los dos lados de un ángulo curvilíneo ó el lado curvo de un ángulo mixtilíneo. Supongamos que se desea conocer el radio de la circunferencia, y por tanto, la circunferencia á que corresponde el lado señalado con puntos *A O P* del ángulo mixtilíneo *A P B* (fig. 37). Dividiremos la curva *A O P* en los dos arcos *A O* y *O P*; trazaremos las cuerdas correspondientes; dividiremos estas cuerdas por las dos perpendiculares *m n* y *r s*, las cuales, prolongadas, se encontrarán en el centro de la cir-

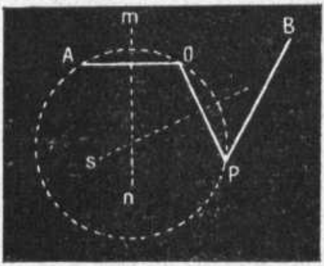

Fig. 37.

cunferencia pedida, cuyo radio será la distancia de ese centro á cualquiera de los puntos A O P.

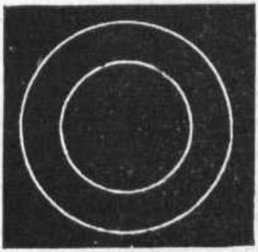

Fig. 38.

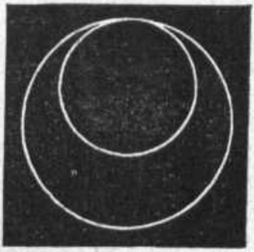

Fig. 39.

11. *Dos circunferencias* que se tracen en un mismo plano *pueden guardar entre sí una de las cinco distintas posiciones siguientes:*

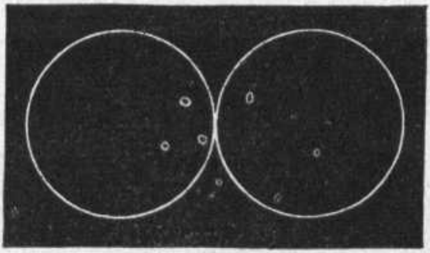

Fig. 40.

1.ª *Una dentro de la otra, teniendo ambas el mismo centro*: se llaman concéntricas y no se tocan. El es-

11. ¿Cuántas y cuáles son las posiciones que pueden tener dos circunferencias trazadas en un mismo plano?

pacio que queda entre las dos circunferencias concéntricas se llama corona ó anillo (fig. 38).

2.ª *Una dentro de otra, teniendo distinto centro:* se

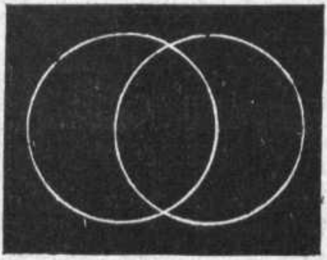

Fig. 41.

llaman excéntricas, y son tangentes; como en la figura 39.

3.ª *Las dos exteriores, tocándose en un punto de tangencia;* como en la figura 40.

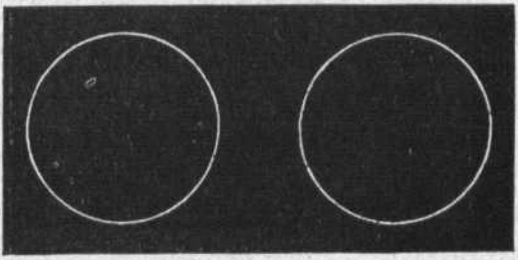

Fig. 42.

4.ª *Siendo secantes la una de la otra;* como sucede en la figura 41.

Y 5.ª *Siendo las dos exteriores, sin punto alguno común* (fig. 42).

Resumen del capítulo III.

Circunferencia es la recta curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. Radio es la recta que va desde el centro á la circunferencia. Diámetro es la recta que va desde un punto de la circunferencia al opuesto, pasando por el centro. Otras líneas relacionadas con la circunferencia son la cuerda, la tangente y la secante. Arco de la circunferencia es cualquiera porción de la circunferencia. La circunferencia se considera dividida en 360 arcos iguales, llamados grados; cada grado se divide en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos.

Los arcos de la circunferencia pueden formar ángulos curvilíneos y mixtilíneos: ángulos curvilíneos se forman con dos líneas curvas, consideradas como arcos de circunferencia; ángulos mixtilíneos son los formados de una recta y de una curva.

Dos circunferencias trazadas en un plano pueden ser tangentes interiores ó exteriores; secantes; interiores sin punto alguno común, y exteriores sin punto alguno común.

Las interiores sin punto común, pero con el mismo centro, se llaman concéntricas; las interiores tangentes se llaman también excéntricas.

CAPÍTULO IV.

ESTEREOMETRÍA Y ESTEREOGRAFÍA DE LAS LÍNEAS.

1. *Se llama Estereometría el arte de medir los cuerpos geométricos; y* se designa con la denominación de *Estereografía el uso de los aparatos ó instrumentos necesarios para trazar* ó dibujar *las figuras geométricas.*

---

1. ¿Qué es Estereometria y Estereografía?

2. *Los instrumentos más necesarios para medir y dibujar las figuras geométricas son: el semicírculo graduado, la regla, el cartabón, la escuadra y el compás.*

El semicírculo graduado es un instrumento de talco, vidrio ó metal, que tiene la forma de la mitad del

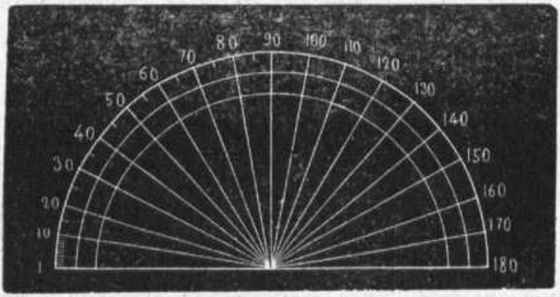

Fig. 43.

círculo, y está graduado con los 180° de la mitad de la circunferencia (fig. 43). El semicírculo se destina especialmente para medir los ángulos, porque la abertura de todo ángulo corresponde siempre á un arco de

Fig. 44.

circunferencia, y ha de ser menor que la mitad de la circunferencia.

---

2. ¿Cuáles son los instrumentos más necesarios para medir y dibujar las figuras geométricas?

La regla es un listoncito de madera ó metal, que sirve para guía al trazar las líneas rectas: la regla está

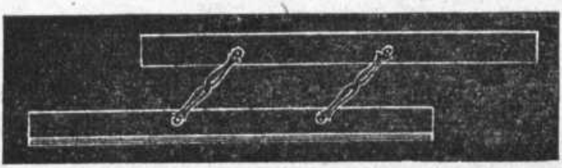

Fig. 45.

dividida en centímetros y milímetros, para que con ella se puedan medir las líneas (fig. 44). Hay también dos reglas unidas convenientemente para trazar paralelas (fig. 45).

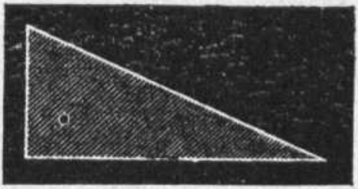

Fig. 46.

El cartabón es un instrumento de madera ó de metal, con tres lados muy desiguales, dos de los cuales forman ángulo recto (fig. 46). Sirve para trazar perpendiculares y ángulos rectos.

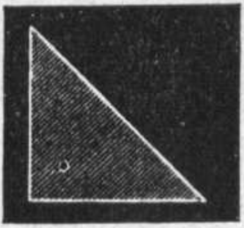

Fig. 47.

La escuadra es también una tableta como la anterior, pero dos de cuyos lados son perfectamente iguales (fig. 47). Sirve para trazar ángulos rectos y rectas, perpendiculares y paralelas oblicuas.

El compás es un instrumento de metal, compuesto de dos piernas unidas en la cabeza por un clavillo ó eje, y sirve para tomar medidas y trazar círculos (figura 48).

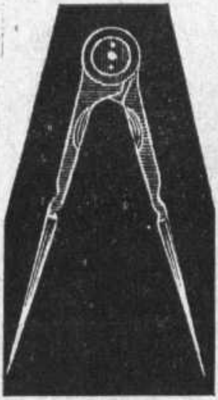

Fig. 48.

3. *Trazar una recta perpendicular á otra en un punto dado de ésta.*

Por medio de la escuadra: se hace coincidir el vértice del ángulo recto con el punto dado, y uno de los lados de dicho ángulo con la recta; el otro lado indicará la dirección de la perpendicular. También se puede trazar con el auxilio del compás y del semicírculo graduado.

4. *Trazar una perpendicular en el extremo de una recta.*

Por medio de la escuadra, como en el caso anterior.

Por medio del compás: se prolonga la recta dada por el extremo en que se desea levantar la perpendicular; desde aquel extremo, por ejemplo, A, de la recta $A\ B$ en la figura 49, se traza un arco con cualquier radio, y desde los puntos en que corte á la línea se trazan con otro radio mayor dos arcos que se cortarán en el punto C, desde el cual se bajará la perpendicular pedida, que es la recta $C\ A$.

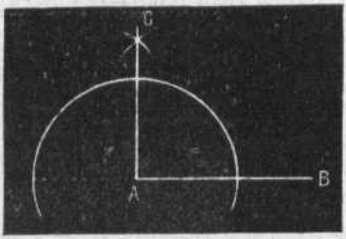

Fig. 49.

3. Trazar una perpendicular á otra en un punto dado de esa otra.

4. Trazar una perpendicular en el extremo de una recta.

5. *Desde un punto fuera de una recta, trazar á ésta una perpendicular.*

Sea la recta *M N* (fig. 50), y *O* el punto dado. Se hace coincidir uno de los lados del ángulo recto de la escuadra con la línea *M N*, de modo que el otro lado del ángulo recto pase por el punto *O*, y nos indicará la dirección que debe seguir la línea *Or*, que será la pedida.

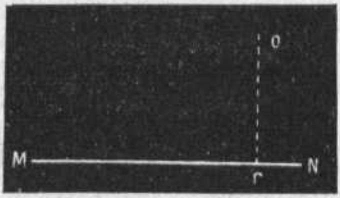

Fig. 50.

6. *Demostrar que la perpendicular es la línea más corta que desde un punto dado se puede trazar á otra.*

Sea la recta *M N*, y *o* el punto dado. Si trazamos

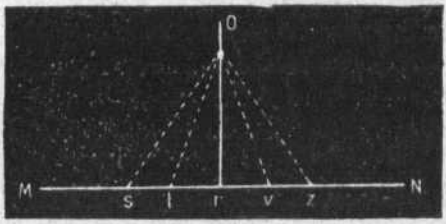

Fig. 51.

desde *O* varias rectas *o s*, *o t*, *o r*, *o v*, *o z* (fig. 51), sobre la *M N*, la menor será *o r*, que es la perpendicular.

---

5. Desde un punto dado fuera de una recta, trazar á ésta una perpendicular.

6. Demostrar gráficamente que la perpendicular es la línea más corta que desde un punto dado se puede trazar á otra recta.

7. *Trazar á una recta una perpendicular en su punto medio, ó dividir una recta en dos partes exactamente iguales.*

Sea la recta dada la *A B* de la figura 52: desde sus extremos se trazan arcos con un radio algo menor que la misma recta: los puntos *c* y *d*, en que á uno y otro lado se cortan los arcos determinarán la posición de la recta *c m*, que será perpendicular á *A B* en el punto medio de ésta, y que, prolongada hasta *d*, cortará á la referida línea en dos partes iguales, *A m* y *m B*.

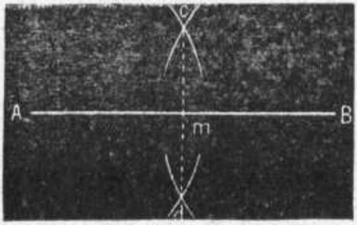

Fig. 52.

8. *Trazar una recta paralela á otra recta dada.*

Se puede trazar con dos reglas. También se puede

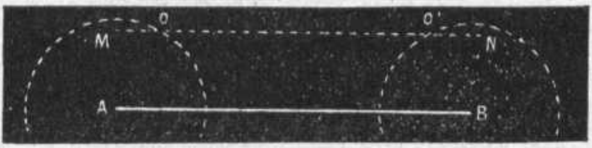

Fig. 53.

trazar con el semicírculo graduado, tomando á uno y otro lado de la recta dada igual distancia del diámetro de dicho círculo. Y, por último, se puede trazar como

---

7. Trazar á una recta una perpendicular en su punto medio, ó dividir una recta en dos partes iguales.

8. Trazar una recta paralela á otra.

en la figura 53, por medio de arcos dibujados con igual radio á los dos extremos de la recta, y marcando luego

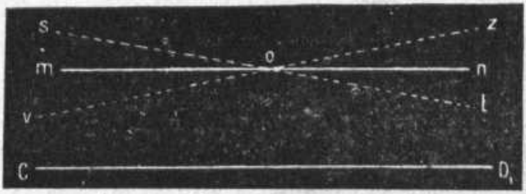

Fig. 54.

en los dos arcos un punto (o, o') á igual distancia de la recta: de ese modo trazada la recta $M\ N$ es paralela á la recta dada $A\ B$.

9. *Desde un punto dado fuera de una recta no se puede trazar á ésta más que una línea perpendicular*; ó, igualmente, desde un punto dado fuera de una recta, no se puede trazar á ésta más que *una paralela*.

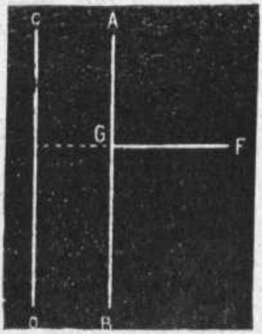

Fig. 55.

Desde el punto o sólo se puede trazar á la recta $M\ N$ de la figura 51 la perpendicular $o\ r$; porque cualquiera otra sería más larga que $o\ r$, según se deduce del caso 6.º (pág. 41).

También desde el punto o, de la figura 54, sólo se puede trazar á $C\ D$ la paralela $m\ n$; porque cualquiera otra que no fuese $m\ n$, como

9. ¿Cuántas perpendiculares se pueden trazar á una recta desde un punto dado fuera de la recta?

$s\,t$ y $v\,z$, llegaría á encontrarse con $C\,D$ si se prolongara.

10. *Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas, lo será á la otra;* como puede verse con la sola inspección de la figura 55, en la que la recta $F\,G$, siendo perpendicular á $A\,B$, lo es también precisamente á $G\,D$, que es paralela á $A\,B$.

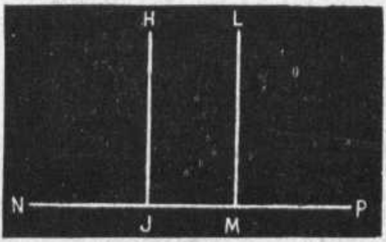

Fig. 56.

11. *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí; pero dos rectas paralelas entre sí, podrán ser ó no ser perpendiculares á una tercera.*

En la figura 56, las dos rectas $H\,J$ y $L\,M$ son perpen-

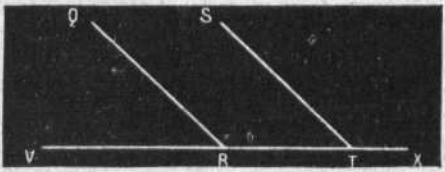

Fig. 57.

diculares á la $N\,P$, y son paralelas entre sí; pero en la figura 57 las dos rectas $Q\,R$ y $S\,T$ son paralelas entre

10. Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas, ¿qué relación tendrá con la otra?

11. Si dos rectas son perpendiculares á una tercera, ¿qué relación tendrán entre sí?

sí, y no son perpendiculares á la VX, porque no forman con ésta ángulos rectos.

12. *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí;* como las rectas $a\,b$ y $c\,d$, que son paralelas á la recta $f\,g$ y son también paralelas entre sí (fig. 58).

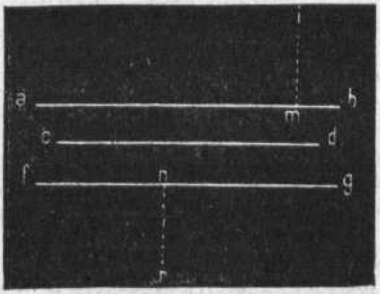

Fig. 58.

13. *Si dos rectas como* $a\,b$ y $f\,g$ (figura 58) *son paralelas, sus perpendiculares* respectivas, como $l\,m$, que es perpendicular á $a\,b$, y $n\,r$ que es perpendicular á $f\,g$, *son paralelas entre sí*, porque, aunque fuesen prolongadas indefinidamente, nunca se encontrarían.

Resumen del capítulo IV.

Ejercicios de Estereometría y de Estereografía son las prácticas que se hacen con los instrumentos adecuados para medir y trazar figuras geométricas.

Los instrumentos adecuados son, principalmente, el semicírculo, el cartabón y el compás. Para trazar líneas perpendiculares y paralelas, podemos hacer uso indistintamente de los tres instrumentos dichos: las medidas tomadas con el compás á fin de señalar la dirección de las paralelas y perpendiculares, son las más exactas.

---

12. Si dos rectas son paralelas á una tercera, ¿qué relación tendrán entre sí?

13. ¿Qué relación tendrán entre sí dos rectas que sean perpendiculares respectivamente á cada una de dos paralelas?

CAPÍTULO V.

ESTEREOMETRÍA Y ESTEREOGRAFÍA DE LOS ÁNGULOS Y DE LA CIRCUNFERENCIA.

1. *La medida de un ángulo es la medida del arco de circunferencia interceptado entre sus lados;* porque á todo ángulo corresponde un arco trazado con cualquier radio desde el vértice del mismo ángulo.

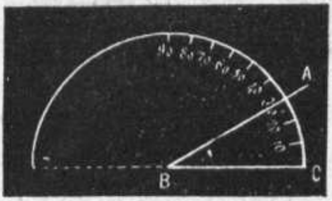

Fig. 59.

2. *Para medir un ángulo se hace coincidir uno de sus lados*, como el lado *B C* de la figura 59, *con el diámetro del semicírculo graduado, y el punto central de éste con el vértice del referido ángulo; el otro lado, B A, del mismo ángulo*, prolongado, si hace falta, *señalará en el semicírculo el número de grados que corresponde á su arco:* el ángulo *A B C* tiene 30°.

También se puede trazar en el ángulo un arco desde su vértice; con cualquier radio tomar con el compás la medida de ese arco, y ver en un semicírculo de igual radio cuántos son los grados que corresponden á la medida tomada: el ángulo *a* de la figura 60 tiene 16°; el ángulo *b* tiene 50°; el ángulo *c* tiene 106°; el ángulo *d* tiene 90°.

---

1. ¿Cuál es la medida de un ángulo?
2. ¿Cómo se mide un ángulo?

3. *El ángulo recto tiene* 90° *de la circunferencia;* un ángulo agudo tiene menos de 90°; un ángulo ob-

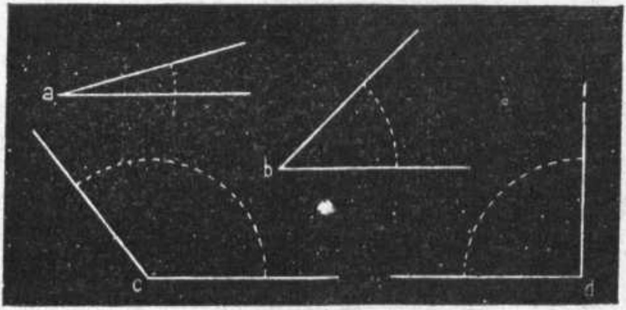

Fig. 60.

tuso tiene más de 90°; *dos ángulos adyacentes* ó dos ángulos rectos *valen* 180°, ó sea la mitad de la circunferencia; *todos los ángulos formados alrededor de un punto valen cuatro rectos*, ó bien los 360° de la circunferencia (figura 61).

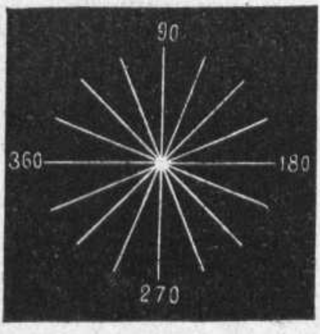

Fig. 61.

4. *Para trazar la bisectriz de un ángulo* se señala en los lados de

---

3. ¿Cuántos grados de la circunferencia vale el ángulo recto? ¿Y dos ángulos adyacentes? ¿Y todos los ángulos formados alrededor de un punto?

4. ¿De qué manera se traza la bisectriz de un ángulo?

éste un punto á igual distancia del vértice, ó bien *se traza un arco* al ángulo, y *desde los puntos de intersección se describen arcos* que se corten; *el punto de encuentro* de esos arcos y *el vértice* del ángulo *determinan la bisectriz pedida* (figura 62).

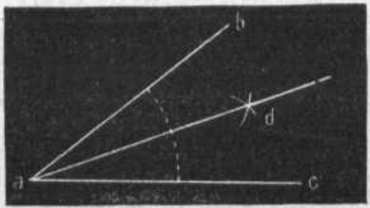

Fig. 62.

5. *Para trazar un ángulo igual á otro dado, basta trazar dos líneas paralelas respectivamente á los lados del ángulo, y el ángulo que resulte será igual al anterior.* Dado el ángulo *A B C*, y trazada la recta *a b* paralela á *A B* y la *b c* prolongación de *B C*, resultará

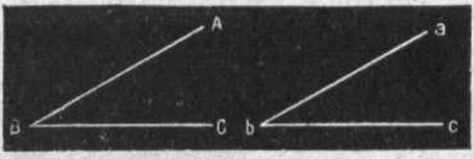

Fig. 63.

el ángulo *a b c* igual exactamente al ángulo *A B C* (figura 63).

También se pueden prolongar desde el vértice los lados del ángulo dado, y resultarán ángulos opuestos por el vértice, que son iguales dos á dos: el ángulo *s o n* es igual á *m o r*, y el ángulo *s o m* es igual á *n o r* (figura 64).

---

5. ¿Cómo se traza un ángulo igual á otro dado?

6. *Para construir un ángulo doble, triple, cuádruple*, etc., *de otro dado, se traza una recta*, se marca en ésta el vértice del nuevo ángulo, desde el cual se traza un arco indefinido; *se mide* con el semicírculo *el ángulo dado*, se multiplica por 2, por 3, por 4, etc.; *se señala* en el arco indefinido *el punto* por donde deba pasar la otra recta, y *el ángulo que resulte será el pedido.*

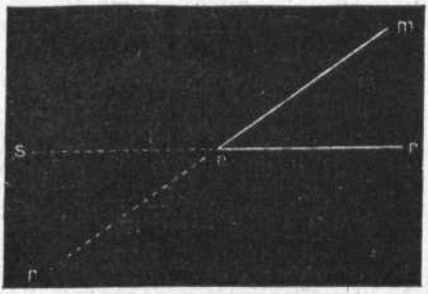

Fig. 64.

Trácese un ángulo triple del $A\ O\ B$ (fig. 65). Vértice

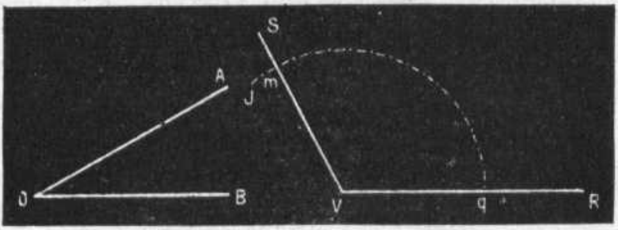

Fig. 65.

del nuevo ángulo en la línea $V\ R = V$; arco indefinido $= J\ q$; triple medida del ángulo $A\ O\ B = q\ m$; ángulo pedido $= S\ V\ R$.

---

6. ¿Cómo se construye un ángulo doble, triple, de otro?

7. *Para dividir un ángulo en otros dos iguales, bastará trazar una bisectriz á dicho ángulo.* Así, en la figura 62, el ángulo *b a c*, mediante la bisectriz *a d*, ha quedado dividido en el ángulo *b a d* y en el *d a c*, que son iguales.

8. *Para hallar el centro de una circunferencia dada*, ó de un arco dado, *se eligen tres puntos en dicha circunferencia*, ó en el arco; *se unen por cuerdas, y la intersección de las perpendiculares* de esas cuerdas *será el centro pedido* (fig. 33, pág. 31).

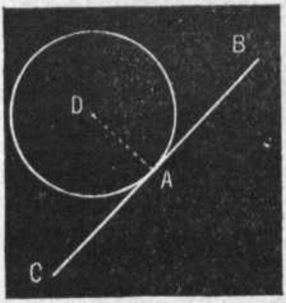

Fig. 66.

9. *Para trazar una tangente á una circunferencia en un punto dado de la circunferencia, se traza el radio* correspondiente al punto de la tangencia, *y la recta perpendicular* á ese radio en su extremo *será la tangente pedida* (fig. 66).

Punto dado = *A*; radio = *D A*; tangente = *B C*.

10. *Para trazar una tangente ó dos á una circunferencia por un punto dado fuera de ésta*, se une por una recta el punto con el centro de la circunferencia, y tomando como diámetro de una nueva circunferencia la recta, *se traza* esa *otra circunferencia que pasará por el centro de la anterior; y las líneas rectas que se tracen desde el punto dado á la intersección de*

---

7. ¿Cómo se divide un ángulo en otros dos iguales?
8. ¿Cómo se halla el centro de una circunferencia dada?
9. ¿Cómo se traza una tangente á una circunferencia en un punto de ésta?
10. ¿Cómo se traza una tangente á una circunferencia por un punto fuera de ésta?

las dos circunferencias, serán tangentes de la primera.
Punto dado fuera = A; diámetro = $A\ O$; tangen-

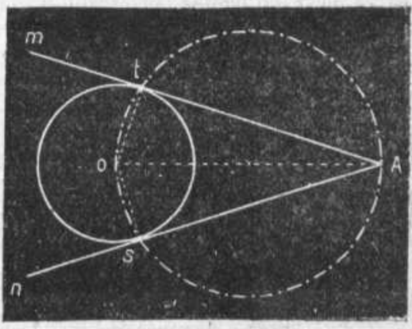

Fig. 67

tes = $A\ m$ y $A\ n$, que son perpendiculares, respectivamente, á los radios $o\ t$ y $o\ s$ (fig. 67), y tangentes á la circunferencia O en los puntos s y t.

Resumen del capítulo V.

La medida de un ángulo es la medida del arco trazado desde su vértice con cualquier radio. Los ángulos se miden con el semicírculo graduado, para lo cual se prolonga uno de los lados del ángulo cuanto sea necesario.

El ángulo recto tiene 90°; dos ángulos adyacentes valen 180°; todos los ángulos que se tracen alrededor de un punto valen 360°, que son los grados de la circunferencia.

Para construcción de ángulos es el principal elemento la medida del arco correspondiente. Para construcción de circunferencias, el principal é indispensable elemento es el radio. Teniendo tres puntos cualesquiera de la circunferencia se puede determinar el radio; también se puede determinar conociendo un arco de la circunferencia.

Al trazar figuras geométricas se necesita, á las veces, describir algunas figuras auxiliares; ésas se trazan de puntos separados, para distinguirlas de las figuras fundamentales, que se trazan de líneas, es decir, de puntos tan próximos que forman líneas continuas.

CAPITULO VI.

DE LOS POLÍGONOS.

1. *Se llama «polígono» la superficie limitada por rectas: las rectas que forman el polígono se llaman «lados», y sus intersecciones, «vértices». Diagonal* de un polígono *es la recta que une dos vértices no consecutivos. Perímetro* de un polígono *es la suma de sus lados.* La figura 68 representa un polígono de ocho lados, que son $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$, $d\,f$, $f\,g$, $g\,h$, $h\,j$, $j\,a$; la suma de sus lados, $a\,b + b\,c + c\,d + d\,f + f\,g + g\,h + h\,j + j\,a$, es el perímetro del polígono; la recta $b\,h$ es una diagonal del polígono.

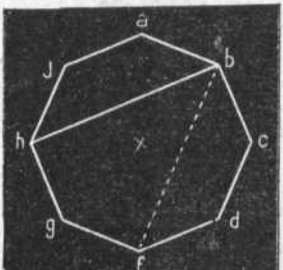

Fig. 68.

Base de un polígono es el lado sobre el cual se considera que insiste ó descansa.

Altura de un polígono es la perpendicular trazada desde el vértice más distante de la base hasta la misma

---

1. ¿Qué es polígono? ¿Qué son lados del polígono? ¿Qué son vértices? ¿Qué es diagonal? ¿Qué es perímetro? ¿Qué es base y altura del polígono?

base ó su prolongación. En la figura 68: base $= g\,f$; altura $= f\,b$.

2. *Cuando el polígono tiene todos sus lados iguales*

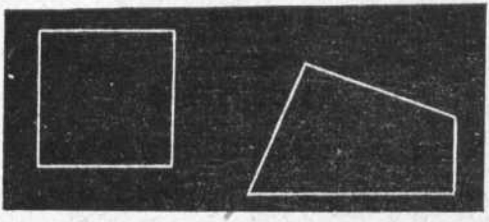

Fig. 69.

recibe la calificación de «equilátero»; cuando tiene todos sus ángulos iguales se llama polígono «equiángulo»; y se dice que el polígono es «regular» cuando tiene iguales todos sus lados y todos sus ángulos. El polígono de la figura 68 es regular.

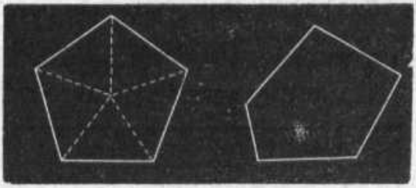

Fig. 70.

3. Los polígonos reciben diferentes nombres, con arreglo al número de sus lados.

---

2. ¿Cuál es el polígono equilátero? ¿Y el polígono equiángulo? ¿Y el polígono regular?

3. ¿Qué nombre se da al polígono de tres lados, de cuatro, de cinco, etc.?

El polígono de tres lados se llama *triángulo;*
» cuatro » *cuadrilátero;*
» cinco » *pentágono;*

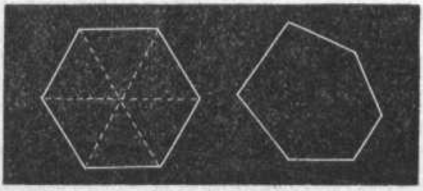

Fig. 71.

El polígono de seis lados se llama *hexágono;*
» siete » *heptágono;*
» ocho » *octógono;*
» nueve » *eneágono;*
» diez » *decágono;*
» once » *endecágono;*
» doce » *dodecágono.*

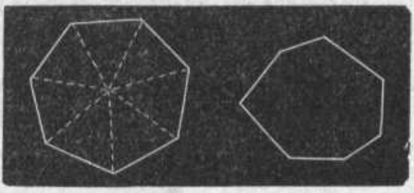

Fig. 72.

Y los demás se llaman polígonos de trece lados, de catorce, etc.

La figura 69 representa un cuadrilátero regular y otro irregular.

La 70, un pentágono regular y otro irregular.

La 71, un hexágono regular y otro irregular.
La 72, un heptágono regular y otro irregular.
La 73, un octógono regular y otro irregular.
La 74, un eneágono regular y otro irregular.

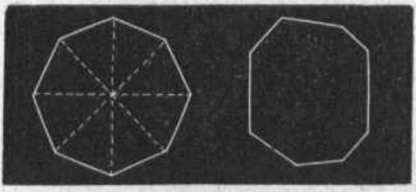

Fig. 73.

La 75, un decágono regular y otro irregular.

4. Los polígonos reciben también la calificación de cóncavos y convexos.

Son polígonos cóncavos aquellos que pueden ser cor-

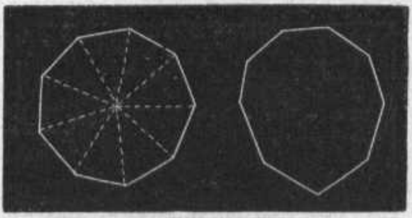

Fig. 74.

tados por una recta en más de dos puntos; como los de la figura 76, uno regular y otro irregular, que son cortados, el primero en cuatro puntos, y el segundo en seis.

---

4. ¿Qué son polígonos cóncavos? ¿Qué son polígonos convexos?

Son polígonos convexos los que no pueden ser cortados por una recta más que en dos puntos, como los de la figura 77, uno regular, cortado por la recta XZ en

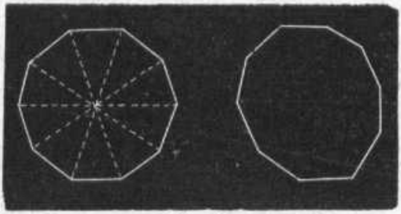

Fig. 75.

dos puntos; y otro irregular, que tampoco podría ser cortado por cualquier recta en más de dos cualesquiera puntos.

5. *En el polígono regular se llama «centro» el punto*

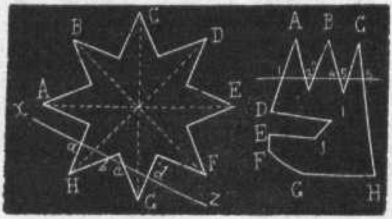

Fig. 76.

interior que se halla á igual distancia de todos los vértices; «radio», la recta que va desde el centro á cualquiera de los vértices; y la recta que va perpendicu-

---

5. ¿Cuál es el centro, el radio y el apotema del polígono regular?

larmente desde el centro á cualquier lado, se denomina «apotema».

En la figura 78 se representa un octógono del cual

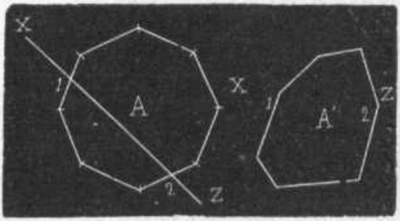

Fig. 77.

son radios las rectas *O'A', O'B', O'C', O'D', O'E' O'F', O'G', O'H'.*

En la figura 79 se representa un hexágono, desde cuyo centro parten perpendiculares, llamadas apotemas, á cada uno de los lados.

6. *Los ángulos de un polígono valen tantas veces*

Fig. 78.

Fig. 79.

dos rectos como lados, menos dos, tiene el polígono; porque se verifica siempre que si desde un vértice del

---

6. ¿Cuántos ángulos rectos valen todos los ángulos de un polígono?

polígono se trazan diagonales á todos los demás, el polígono queda dividido en tantos triángulos como lados tiene, menos dos; y cada triángulo se compone de tres ángulos, uno obtuso y dos agudos, que juntos valen dos rectos. En la figura 80 aparecen un octógono regular y un heptágono irregular;

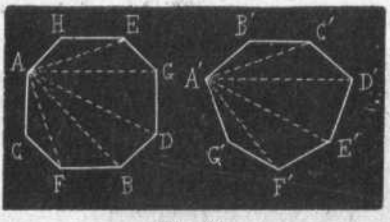

Fig. 80.

desde el vértice A del octógono se han trazado á todos los demás vértices no inmediatos las diagonales que se pueden trazar, y el octógono ha quedado dividido en seis triángulos; pero cada triángulo consta de tres ángulos que valen dos rectos; luego el octógono $A\,H\,E\,G\,D\,B\,F\,C\,A$ vale doce ángulos rectos; de igual modo se demuestra que el heptágono $A'B'C'D'E'F'G'$ vale diez ángulos rectos.

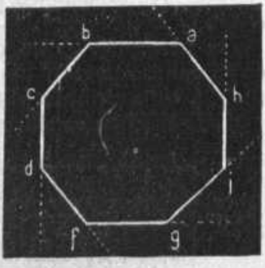

Fig. 81.

7. Se llaman ángulos exteriores de un polígono convexo los formados por cada lado y la prolongación del consecutivo, al exterior del polígono.

La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual á cuatro rectos, porque se consideran equivalentes á los ángulos que pueden trazarse alrededor de

---

7. ¿Cuánto valen todos los ángulos que se pueden formar hacia el exterior de los polígonos?

un punto. En la figura 81, si se prolongan hacia el exterior los lados del polígono, resultarán los ángulos *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *j*, *h*, equivalentes á cuatro rectos.

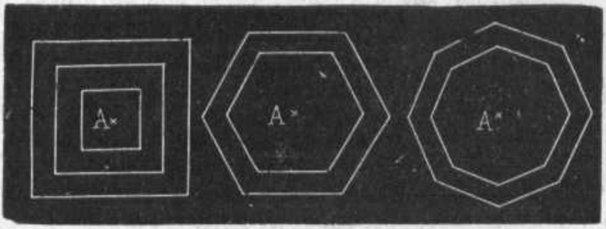

Fig. 82.

8. Los polígonos reciben también el nombre de concéntricos, inscriptos y circunscriptos.

Polígonos concéntricos son dos ó más polígonos que tienen el mismo centro. En la figura 82 aparecen en primer término tres cuadriláteros regulares concéntricos; en segundo término, dos hexágonos regulares del mismo centro; y en tercer término, dos octógonos regulares con un solo centro.

Fig. 83.

Polígonos inscriptos son los polígonos trazados dentro de una circunferencia: los vértices del polígono inscripto deben tocar siempre en la circunferencia. La figura 83 representa un hexágono regular inscripto.

Polígonos circunscriptos son los polígonos cuyos lados son tangentes de la circunferencia. La figura 84 representa un hexágono circunscripto.

---

8. ¿Qué son polígonos concéntricos, inscriptos y circunscriptos?

9. *La circunferencia se considera como un polígono de indefinido número de lados.* El lado del hexágono inscripto en la circunferencia es muy aproximadamente igual al radio.

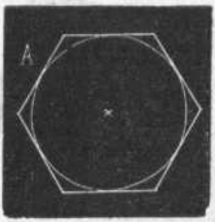

Fig. 84.

10. FIGURAS SEMEJANTES, IGUALES Y EQUIVALENTES.— *Figuras semejantes son las que tienen igual forma y diferente extensión*; como dos circunferencias de distinto radio. *Figuras iguales son las que tienen la misma forma y la misma extensión*; como dos circunferencias del mismo radio. *Figuras equivalentes son las que tienen diferente forma y la misma extensión*; como una circunferencia y un exágono de igual radio.

Resumen del capítulo VI.

Polígono es superficie terminada por rectas.
Lados del polígono son las rectas que lo forman.
Vértices son las intersecciones de las rectas.
Diagonal es la línea que une dos vértices no consecutivos.
Perímetro es la suma de los lados.
El polígono se llama triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc., cuando tiene tres, cuatro, cinco ó seis lados.
Los polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares, irregulares, cóncavos, convexos, concéntricos, inscriptos y circunscriptos.
Los polígonos que tienen todos sus ángulos y todos sus lados iguales, son los llamados regulares. En todo polígono regular

---

9. ¿Qué relación tienen el polígono y la circunferencia?
10. ¿Qué relación tienen entre sí las figuras llamadas semejantes, iguales y equivalentes?

hay centro, radio y apotema; el centro es el punto interior medio; el radio es la distancia del centro á cualquier vértice; y apotema es la distancia del centro á cualquier lado.

CAPÍTULO VII.

DEL TRIÁNGULO.

1. Se llama triángulo el espacio comprendido por tres líneas.

Triángulo rectilíneo es el triángulo formado por líneas rectas.

Triángulo curvilíneo ó mixtilíneo es el formado por líneas curvas ó por líneas mixtas.

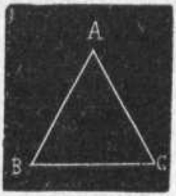

Fig. 85.

El triángulo, con relación á sus lados, *se divide en:*

Equilátero, si sus tres lados son iguales (fig. 85);

Isósceles, si tienen dos lados iguales (fig. 86);

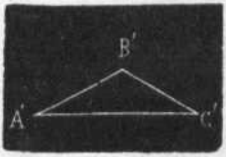

Fig. 86.

Escaleno, si los tres lados son desiguales (fig. 87).

El triángulo, con relación á sus ángulos, también se divide en:

Rectángulo, cuando tiene un ángulo recto (fig. 88);

Obtusángulo, cuando tiene un ángulo obtuso (fig. 89);

Acutángulo, cuando sus tres ángulos son agudos (fig. 90).

---

1. ¿Qué es triángulo rectilíneo, curvilíneo, mixtilíneo? ¿Cuándo el triángulo se llama equilátero, isósceles y escaleno? ¿Cuándo se llama rectángulo, obtusángulo y acutángulo?

El triángulo equilátero se llama también *equiángulo, porque sus tres ángulos agudos son iguales*; es decir, de 30° cada uno.

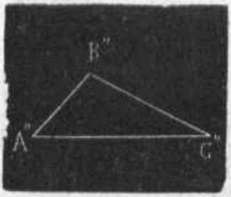

Fig. 87.

2. *Base de un triángulo es uno cualquiera de sus lados;* aunque, generalmente, se llama base del triángulo el lado inferior.

Altura es la perpendicular trazada á la base, ó á su prolongación desde el vértice opuesto.

En la figura 91 la base del triángulo *A B C* es el lado *A C*, y la altura es la perpendicular *B D*.

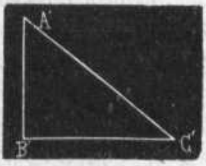

Fig. 88.

3. *En el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, y los otros dos lados se denominan catetos.* En la figura 88 aparece un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el lado *A'C'*.

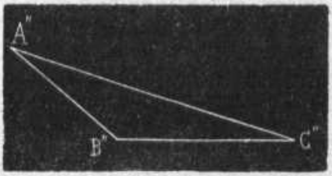

Fig. 89.

En el triángulo rectángulo, la altura está representada por uno de los catetos.

4. *La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos.*

Demostración ó prueba: Si por uno de los vértices de un triángulo trazamos una perpendicular

---

2. ¿Qué es base y qué es altura de un triángulo?
3. ¿Cómo se llaman los lados del triángulo rectángulo?
4. ¿Cuántos ángulos rectos valen los tres ángulos de un triángulo?

al lado opuesto, el triángulo dado quedará dividido en dos ángulos rectos (fig. 92). Triángulo dado = *a b c;* perpendicular trazada = *b d;* ángulos rectos = *a b d* y *b d c*.

Fig. 90.

Otra demostración: Si por uno de los vértices, *a*, trazamos una paralela, *d f*, al lado opuesto, *b c*, en dicho vértice se formarán tres ángulos, *d a b*, *b a c* y *c a f* (fig. 93); pero el ángulo *b a c* es también del triángulo dado; *d a b* = *b a c* por alternos, y *c a f* = *a c b*, también por alternos; y como los ángulos trazados en un punto y en un lado de una recta valen dos rectos, es evidente que los ángulos *a*, *b* y *c* del triángulo dado valen dos rectos.

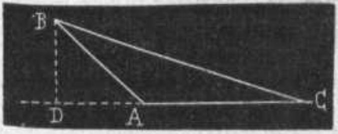

Fig. 91.

5. *Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia;* es decir, que si sumamos dos lados de un triángulo, la suma resultante será mayor que el otro lado; y si los restamos, la diferencia será menor.

6. *A lados iguales se oponen ángulos iguales.* De este principio se deduce que todo triángulo

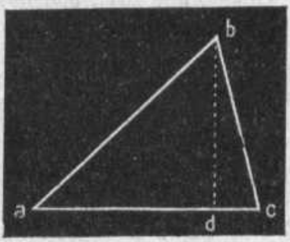

Fig. 92.

5. ¿Cuál es el valor de un lado cualquiera de un triángulo?
6. A lados iguales, ¿qué clase de ángulos se oponen?

equilátero es también equiángulo, y que un triángulo rectángulo ú obtusángulo no puede ser triángulo equilátero.

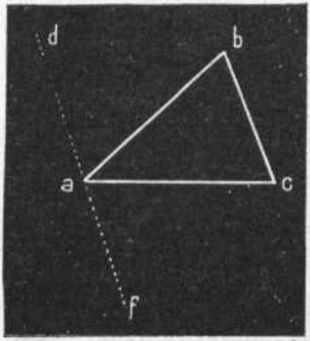

Fig. 93.

7. *A mayor lado se opone mayor ángulo.* Luego la hipotenusa del triángulo rectángulo se opone al ángulo recto, y es mayor que cada uno de los catetos.

Demostración: Siendo el lado *a b* mayor que *a c* (fig. 94), el ángulo *c* será mayor que el ángulo *b*, y mayor que el *c*. Y recíprocamente; siendo *c* el ángulo mayor del triángulo *a b c*, el lado opuesto, *a b*, será mayor que cualquiera de los otros dos.

8. *Los triángulos son iguales cuando tienen iguales sus tres lados;* ó bien cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido; ó bien cuando tienen un lado igual é iguales los dos ángulos adyacentes.

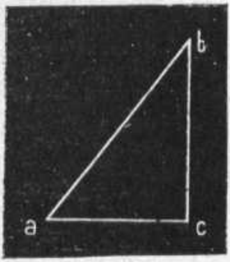

Fig. 94.

9. *Los triángulos son semejantes cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales;* ó bien cuando los tres lados del uno son proporcionales

7. A mayor lado, ¿qué ángulo se opone?
8. ¿Cuándo son iguales dos triángulos?
9. ¿Cuándo son semejantes dos triángulos?

á los lados del otro; ó bien cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo que forman.

10. Reglas de Estereografía.—*Para construir un triángulo, dados sus tres lados* (*a*, *b* y *c*), *se trazan desde los extremos de una de las líneas* (*d f*) *dos arcos* con radios iguales á los otros dos lados, y *su punto de intersección* (*g*) *será el tercer vértice* del triángulo pedido (fig. 95).

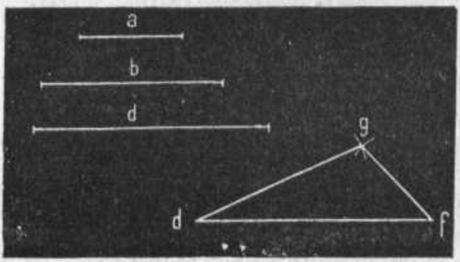

Fig. 95.

11. *Para construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido, se toman en los lados del ángulo* dado *longitudes iguales á los lados* conocidos, y se tendrán los otros dos vértices del triángulo pedido (fig. 96): *a* y *b*=lados; *o*=ángulo; *m o n*=triángulo pedido.

12. *Para construir un triángulo, dados un lado y los ángulos adyacentes, se construyen en los extremos*

---

10. ¿Cómo se construye un triángulo, dados sus tres lados?

11. ¿Cómo se construye un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido?

12. ¿Cómo se construye un triángulo, dados un lado y los ángulos adyacentes?

de la recta dos ángulos respectivamente *iguales* á los

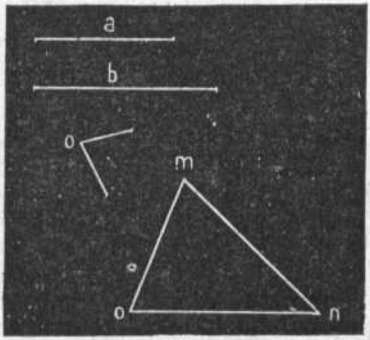

Fig. 96.

conocidos, y *resultará el triángulo que se pide* (fig. 97):

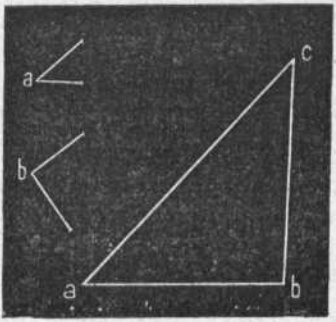

Fig. 97.

a y *b*=ángulos adyacentes; *c b*=lado conocido; *a b c* =triángulo pedido.

13. *Para construir un triángulo semejante á otro, basta trazar sobre cualquier recta arcos iguales* á dos del triángulo dado, y el problema quedará resuelto. En la figura 98, siendo el ángulo $a = A$ y $b = B$, el triángulo $A\ B\ C$ es semejante al $a\ b\ c$.

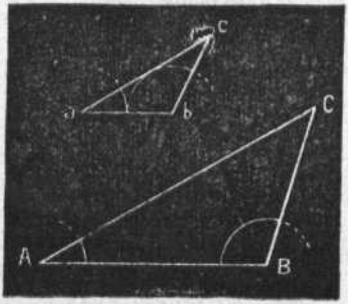

Fig. 98.

También puede construirse por medio de paralelas: siendo paralelas $a\ b$ y $A\ B$, $b\ c$ y $B\ C$, $a\ c$ y $A\ C$, son semejantes los triángulos $a\ b\ c$ y $A\ B\ C$.

Resumen del capítulo VII.

Triángulo es un polígono de tres lados.

Puede ser rectilíneo, curvilíneo y mixtilíneo, según que sus lados sean formados por líneas rectas, curvas ó mixtas.

Con relación á sus lados se divide en equilátero, isósceles y escaleno.

Con relación á sus ángulos se divide en rectángulo, obtusángulo y acutángulo. El triángulo equilátero se llama también equiángulo, porque sus tres ángulos son iguales.

En el triángulo rectángulo el lado mayor se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados se denominan *catetos*.

Los tres ángulos de cualquier triángulo valen tanto como dos ángulos rectos.

---

13. ¿Cómo se construye un triángulo semejante á otro?

Los triángulos son iguales cuando sus lados son iguales; y son semejantes cuando los ángulos del uno son respectivamente iguales á los lados del otro.

CAPÍTULO VIII.

DEL CUADRILÁTERO.

1. *Cuadrilátero es el polígono de cuatro lados;* ó bien el espacio comprendido por la figura cerrada por cuatro líneas llamadas lados (fig. 99).

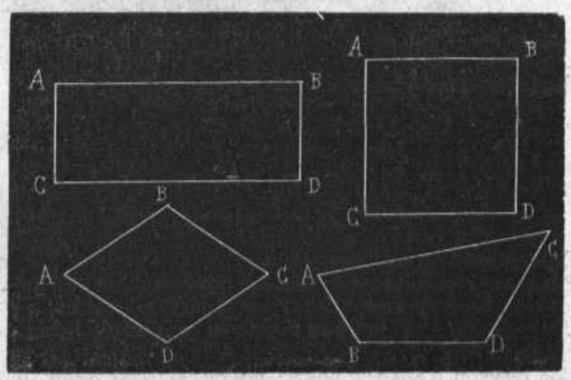

Fig. 99.

El cuadrilátero admite varias divisiones: unas fun-

---

1. ¹¿Qué es el cuadrilátero? ¿Qué es paralelogramo? ¿Y trapecio? ¿Y trapezoide? ¿Qué es cuadrado? ¿Y rectángulo? ¿Y rombo? ¿Y romboide?

dadas en que sus líneas sean ó no paralelas, y otras en que sus ángulos sean ó no sean rectos.

Paralelogramo es el cuadrilátero cuyos lados son paralelos dos á dos. En la figura 100 aparece un paralelogramo cuyo lado *A B* es paralelo al *C D*, y cuyo lado *A D* es paralelo al *B C*. La línea *A C* es una diagonal.

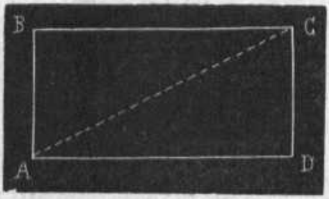

Fig. 100.

Trapecio es el cuadrilátero que no tiene más que dos lados paralelos; como el que aparece en la figura 101, cuyos lados *A D* y *B C* son paralelos; pero no lo son los lados *A B* y *C D*.

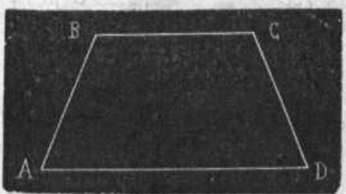

Fig. 101.

Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo á otro; como se ve en la figura 102

Cuadrado es el paralelogramo cuyos lados son iguales y cuyos ángulos son rectos, como el cuadrilátero de la figura 103, en el cual los cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos son rectos; las líneas *A D* y *C B* son dos diagonales del cuadrado.

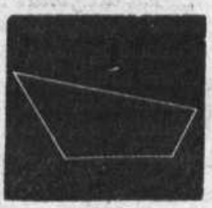
Fig. 102.

Rectángulo es el paralelogramo que tiene iguales sus lados dos á dos y sus ángulos son rectos. (Véase el rectángulo de la figura 104.) El rectángulo se llama también *cuadrilongo.*

Rombo es el paralelogramo de lados iguales, pero *cuyos ángulos no son rectos* (fig. 105). El rombo es una depresión del cuadrado.

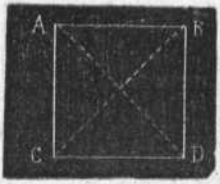

Fig. 103.

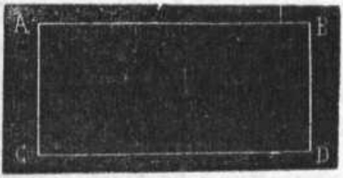

Fig. 104.

Romboide es el paralelogramo de lados iguales dos á dos, y cuyos lados no son rectos. El romboide es una depresión del rectángulo (fig. 106).

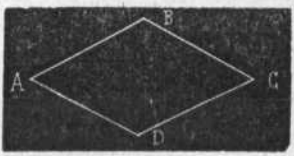

Fig. 105.

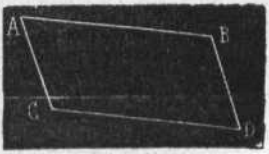

Fig. 106.

2. *La diagonal de un paralelogramo divide á éste en dos triángulos iguales;* puesto que tienen un lado común é iguales los ángulos adyacentes á dicho lado. (Véase la fig. 107.)

3. *La suma de los ángulos componentes de un cuadrilátero vale cuatro rectos;* pues si todo cuadrilátero puede ser dividido por una diagonal en dos trián-

---

2. ¿En cuántos triángulos iguales divide la diagonal á un paralelogramo?

3. ¿Cuantos ángulos rectos valen los ángulos de todo cuadrilátero?

gulos, y cada triángulo vale dos rectos, es evidente que los cuatro ángulos del cuadrilátero valen cuatro rectos.

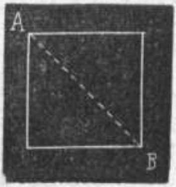

Fig. 107

4. *En todo paralelogramo son iguales los ángulos y los lados opuestos.* En efecto: los ángulos opuestos tienen sus lados paralelos; luego son iguales: y los lados opuestos son líneas interceptadas por paralelas; luego también son iguales.

5. *La base de un cuadrilátero es uno cualquiera de sus lados*, pero se considera gene-

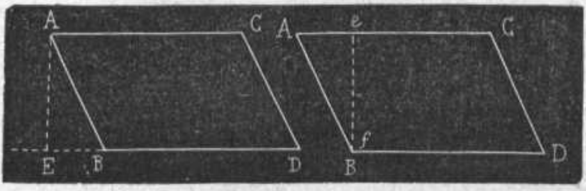

Fig. 108.

ralmente como base el lado sobre el cual se supone que descansa; y *altura* de un cuadrilátero *es la perpendicular trazada sobre la base ó su prolongación*, desde el vértice más distante. En la figura 108 la altura del primer cuadrilátero es la recta *A E*, y la del segundo es la perpendicular *e f*: la base del primero es *D E*.

---

4. ¿Qué relación tienen los ángulos y los lados opuestos de un paralelogramo?
5. ¿Cuál es la altura y cuál es la base de un cuadrilátero cualquiera?

☞ 6. *Los cuadrados son iguales si tienen un lado igual: todos los cuadrados son semejantes.*

Los rectángulos son iguales si tienen iguales dos lados contiguos; y son semejantes si tienen proporcionales la base y la altura.

Los rombos son iguales si tienen iguales un lado y un ángulo; y son semejantes si tienen un ángulo igual.

Los romboides son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido; y son semejantes si tienen igual un ángulo.

7. Reglas de Estereografía.—*Para construir un cuadrado, conociendo su lado, se levantan en los extremos de la recta dada dos perpendiculares* de igual longitud que la recta conocida, y uniendo sus extremos se tendrá el cuadrado pedido.

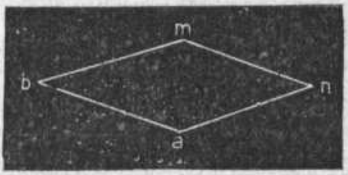

Fig. 109.

8. *Para construir un rombo, siendo conocidos un ángulo y un lado, se toman iguales distancias* que el lado conocido, *en los lados del ángulo;* desde sus extremos *se trazan arcos, y el punto de intersección nos dará el* cuarto vértice del *rombo pedido.*

Figura 109: ángulo conocido = a; lado = $b\ a$; rombo = $b\ a\ n\ m$.

---

6. ¿Cuándo son iguales los cuadrados? ¿Cuándo son semejantes?

7. ¿Cómo se construye un cuadrado conociendo su lado?

8. ¿Cómo se construye un rombo siendo conocidos un ángulo y un lado?

9. *Para construir un rectángulo conociendo dos lados contiguos, se traza con ellos un ángulo recto*, y desde los extremos libres de ambas perpendiculares *se trazan dos arcos* con un radio igual á la recta menor, desde el extremo de la mayor; y con un radio

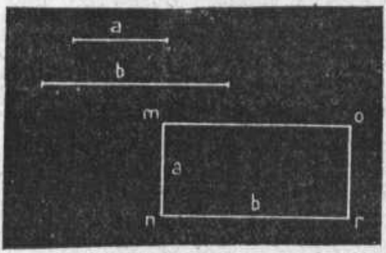

Fig. 110.

igual á la recta mayor desde el extremo de la menor; *y la intersección de ambos arcos nos dará el vértice que nos falta.*

En la figura 110, los dos lados conocidos son *a* y *b*, y el rectángulo formado es *m n r o*.

De igual modo se construye un romboide.

10. *Las diagonales del cuadrado y del rombo siempre se cortan perpendicularmente* en su punto medio; por tanto, *para construir un cuadrado ó un rombo*, conocidas sus diagonales, *basta unir con* líneas *rectas los extremos de dichas diagonales*, teniendo en cuenta que las diagonales del cuadrado son inclinadas, y las del rombo son una vertical, y horizontal la otra.

---

9. ¿Cómo se construye un rectángulo conociendo los lados contiguos?

10. ¿Cómo se cortan las diagonales del cuadrado y del rombo? ¿Cómo se construye un cuadrado ó un rombo siendo conocidas sus diagonales?

Figura 111: diagonales del cuadrado$=A$; cuadrado

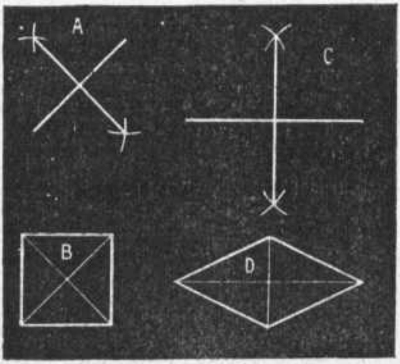

Fig. 111.

pedido $= B$; diagonales del rombo $= C$; rombo pedido $= D$.

Resumen del capítulo VIII.

El cuadrilátero se divide en paralelogramo,
trapecio
y trapezoide.
El paralelogramo se subdivide en cuadrado,
rectángulo,
rombo
y romboide.
Todo cuadrilátero equivale á cuatro ángulos rectos.
La diagonal de un paralelogramo divide á éste en dos triángulos iguales.

CAPÍTULO IX.

DEL CÍRCULO Y DE LOS POLÍGONOS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.

1. *Se llama círculo la superficie comprendida por la circunferencia.*

Corona ó anillo es la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

Sector circular es la parte de círculo determinada por dos radios y el arco correspondiente.

Segmento circular es la porción de círculo comprendida entre dos cuerdas, ó entre una cuerda y su arco.

Trapecio circular es la parte de corona interceptada por dos radios.

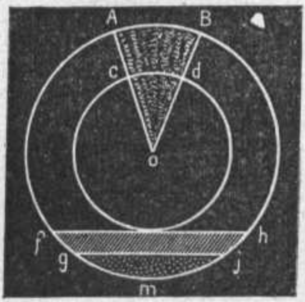

Fig. 112

En la figura 112, AOB es un sector circular; Ac y Bd es un trapecio circular; $f\,g\,h\,j$ es un segmento circular de dos bases; $g\,m\,j$ es otro segmento circular de una base.

2. Las propiedades de los círculos son:

Los círculos que tienen un mismo radio son iguales;

Las coronas ó anillos son iguales si los radios respectivos son iguales;

---

1. ¿Qué es círculo? ¿Qué es corona ó anillo? ¿Qué es sector circular, segmento circular y trapecio circular?

2. ¿Cuales son las propiedades de los círculos?

Todos los círculos son semejantes.

3. *Un polígono está inscripto en una circunferencia cuando todos los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.*

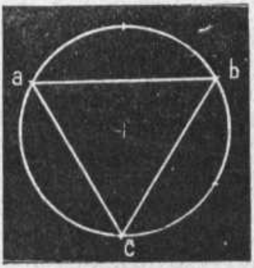

Fig. 113.

La circunferencia que tiene un polígono inscripto, está circunscripta á ese mismo polígono (fig. 113).

4. *Un polígono está circunscripto á una circunferencia cuando todos los lados del polígono son tangentes de la circunferencia.*

Una circunferencia circunscripta por un polígono, está inscripta en ese mismo polígono (fig. 114).

En la figura 113, el triángulo equilátero *a b c* está inscripto en la circunferencia; y, por tanto, la circunferencia está circunscripta al triángulo.

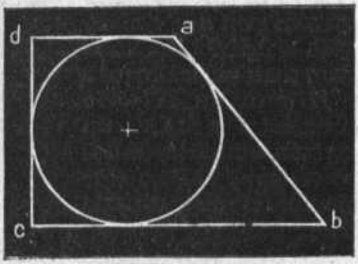

Fig. 114.

En la figura 114, el trapecio *a b c d* está circunscripto á la circunferencia; y, por tanto, la circunferencia está inscripta en el trapecio.

5. *Si una circunfe-*

---

3. ¿Cuándo se dice que un polígono está inscripto en una circunferencia?

4. ¿Cuándo se dice que un polígono está circunscripto á una circunferencia?

5. ¿Cómo se inscribirán y se circunscribirán polígonos?

rencia se divide en partes iguales, y por los puntos de división se trazan cuerdas ó tangentes, resultará un polígono regular inscripto ó circunscripto.

Por consiguiente, todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia ó circunscribirse á ella.

6. *La relación de la circunferencia al diámetro es una misma en todos los círculos;* esa relación es 3,14159, porque si suponemos la línea curva de la circunferencia convertida en línea recta, podremos comprobar que esa línea equivale siempre á tres veces el diámetro y 14159 cienmilésimas de diámetro.

7. *Dado el radio de una circunferencia, se hallará el valor de ésta multiplicando el radio dos veces por* 3,14159, porque sabido es que todo diámetro equivale á dos veces el radio; y, dada la circunferencia, se hallará el radio dividiendo su longitud por dos veces el número 3,14159.

La relación constante de la circunferencia al diámetro, se expresa en Geometría por la letra griega π, que se lee *pi* $= 3{,}14159$.

Luego la circunferencia $= 2\,\pi\,R$; de donde se deduce que

$$\frac{\text{Circunferencia}}{2\,R} = \pi$$

8. *Para inscribir un triángulo equilátero en una circunferencia se marca* en la misma circunferencia *cada dos veces el radio, y resultarán señalados los tres vértices del triángulo:* las cuerdas respectivas serán los tres lados del triángulo equilátero inscripto (figura 113).

---

6. ¿Cuál es la relación de la circunferencia al diámetro?

7. ¿Cómo se averigua el valor de una circunferencia, dado su radio?

8. ¿Cómo se inscriben triángulos equiláteros?

Para circunscribir un triángulo se trazarán tangentes á la circunferencia por los mismos puntos (figura 115).

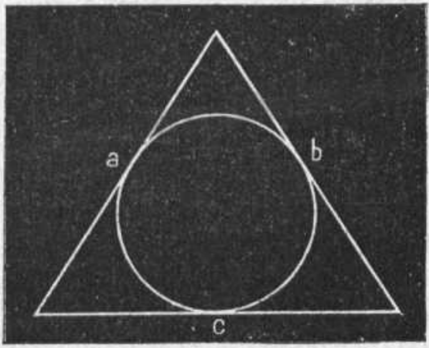

Fig. 115.

Para trazar en una circunferencia una estrella de tres puntas se dividirá la circunferencia en tres partes iguales, lo mismo que para inscribirle un triángulo equilátero, y con el mismo radio de la circunferencia desde los puntos intermedios de la misma línea curva se trazarán tres semicircunferencias que se corten (fig. 116).

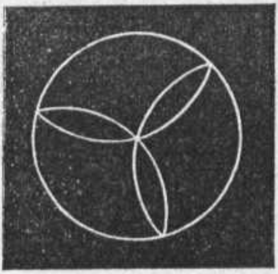

Fig. 116.

9. *Para inscribir un cuadrado* en una circunferencia dada *se trazan dos diámetros perpendiculares,*

---

9. ¿Cómo se inscribe un cuadrado en una circunferencia dada?

y uniendo sus extremos con cuerdas, quedará resuelto el problema (fig. 117).

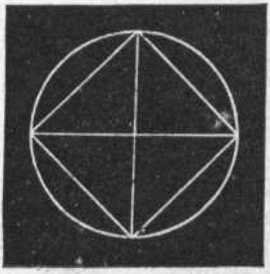

Fig. 117.

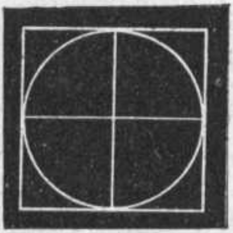

Fig. 118.

Para circunscribir un cuadrado se trazarán tangentes perpendiculares á los mismos diámetros (fig. 118).

Para inscribir una estrella de cuatro puntas dentro de una circunferencia se marcarán en ésta los cuatro puntos (*a b c d*, de la fig. 119), y con el mismo radio de la circunferencia se trazarán, desde ésta y desde los puntos convenientes, ocho arcos que se corten.

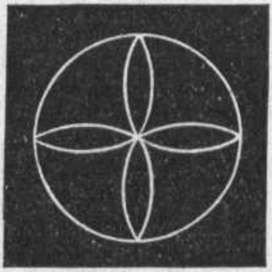

Fig. 119.

10. *Para inscribir en una circunferencia un pentágono regular se marcarán en ésta con el radio, más un sexto del radio, cinco divisiones, entre las cuales se trazan cuerdas, que serán los lados del pentágono* (figura 120).

---

10. ¿Cómo se inscribe un pentágono regular?

Si en vez de cuerdas se trazan tangentes, el pentágono regular estará circunscripto (fig. 121).

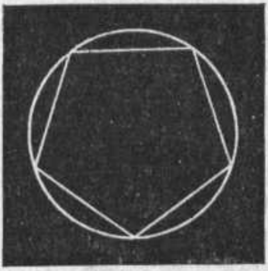

Fig. 120.

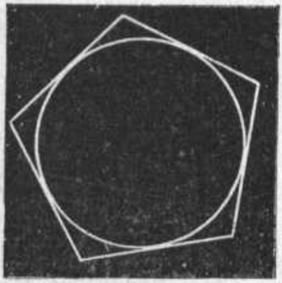

Fig. 121.

Para inscribir una estrella de cinco puntas se observará la misma regla que en el caso anterior (figura 122).

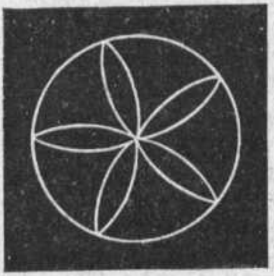

Fig. 122.

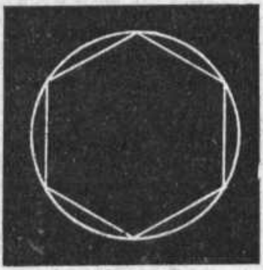

Fig. 123.

11. *Para inscribir un hexágono regular se lleva el*

11. ¿Cómo se inscribe un hexágono regular?

radio seis veces seguidas alrededor de la circunferencia, y las cuerdas de esos arcos formarán el hexágono inscripto (fig. 123).

Para circunscribir un hexágono se trazarán en la circunferencia tangentes por los seis puntos de división (fig. 124).

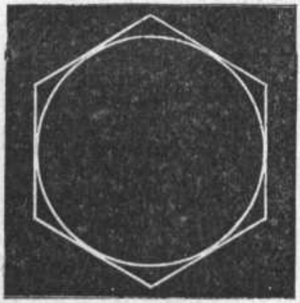

Fig. 124.

Para inscribir en la circunferencia una estrella de seis puntas se marcarán las seis divisiones con el radio, y con el mismo radio se trazarán desde los seis puntos semicircunferencias que se corten (fig. 125).

12. *Para inscribir y circunscribir polígonos de ocho lados, diez, doce, dieciseis, etc., se dividirán en dos ó en tres partes las cuerdas y tangentes respectivas de los polígonos de cuatro lados, cinco ó seis, y se trazarán como éstos.*

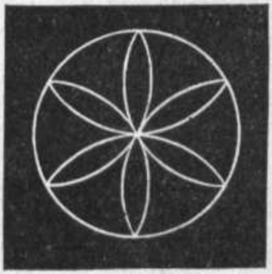

Fig. 125.

Igual procedimiento se seguirá para inscribir en la circunferencia estrellas de ocho puntas, diez, doce, dieciséis, etc.

13. *Hay algunas líneas curvas que merecen citarse*

---

12. ¿Cómo se inscriben y circunscriben polígonos de ocho lados, diez, doce ó dieciseis?

13. ¿Hay algunas otras líneas curvas, á más de la circunferencia, que merezcan citarse?

antes de entrar en el estudio de la Geometría del espacio: *tales son la elipse, el ovoide, la espiral, la hipérbola y la parábola.*

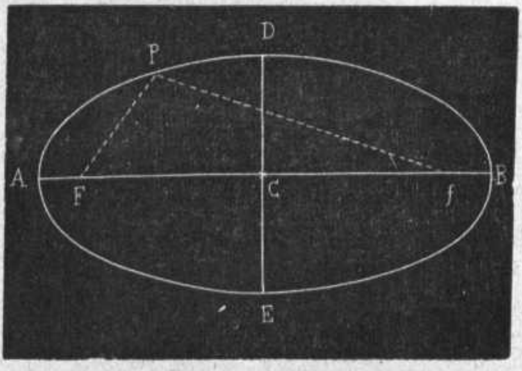

Fig. 126

La elipse es una curva cerrada y prolongada (figura 126) con dos puntos de origen llamados focos: la línea $A\ B$ se llama eje mayor; la línea $D\ E$ eje menor.

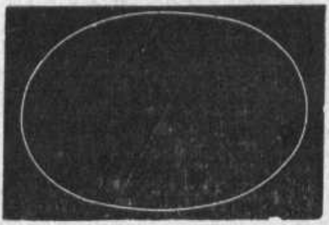

Fig. 127

El óvalo es una curva cerrada que se forma con cuatro arcos de círculo trazados con distinto radio (fig. 127).

El ovoide es una curva cerrada compuesta de cuatro arcos de círculo desiguales: tiene alguna semejanza con la forma de un huevo (fig. 128).

La espiral es una línea curva abierta en forma de

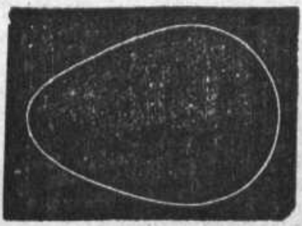

Fig. 128.

caracol, que circula alrededor de un punto dado,

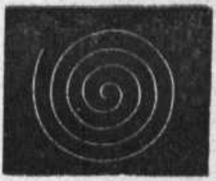

Fig. 129.

Fig. 130.

y cuyo radio va aumentando á medida que se separa del centro (fig. 129).

La hipérbola es una línea curva abierta, de ramas prolongadas (fig. 130).

Y la parábola es otra línea curva abierta, cuyos puntos equidistan de otro fijo (fig. 131).

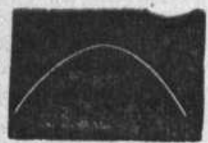

Fig. 131.

Resumen del capítulo IX.

Circulo es el espacio comprendido por la línea que forma la circunferencia.

En el círculo hay que considerar la corona ó anillo, el sector, el segmento y el trapecio circular.

En la circunferencia se pueden inscribir polígonos, cuyos lados serán cuerdas de la misma; y también á ésta se pueden circunscribir polígonos, cuyos lados serán tangentes de la misma circunferencia.

La circunferencia tiene una relación constante con el diámetro; éste se halla comprendido tres veces y una fracción en la circunferencia; y como el diámetro vale dos radios, se dice que la

Circunferencia=dos veces el radio multiplicado por 3,14159.

Además de la circunferencia hay otras líneas curvas de menor importancia.

CAPÍTULO X.

DE LAS ÁREAS.

1. *Area de una figura es la medida de su extensión superficial;* y como las superficies tienen dos dimensiones, longitud y latitud, es evidente que el área de una figura es la medida de su longitud y de su latitud; es decir, del producto de su longitud y su latitud.

2. *El área de un triángulo es igual á la base multiplicada por la mitad de la altura;* porque todo trián-

---

1. ¿Qué es área de una figura?
2. ¿Cuál es el área de un triángulo?

gulo se puede considerar la mitad de otra figura de igual base y de lados paralelos, cuya área sería el producto de su base por su altura. En la figura 132, siendo el triángulo *a b c* la mitad del paralelogramo *a b c d*, su área debe ser la mitad de la de dicho paralelogramo.

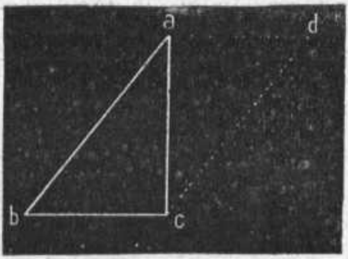

Fig. 132.

3. *El área de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de su base por su altura;* porque todo paralelogramo se puede convertir en un rectángulo, cuya área es el producto de su base por su altura. En la figura 133, *a b c d* se puede convertir en el rectángulo *b f c g*, porque el ángulo *a b f*, que se le suprime, es exactamente igual á *c g d*, que se le añade.

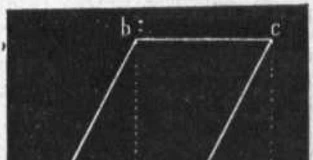

Fig. 133.

4. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura*; porque mediante la observación podremos comprobar el hecho de que en toda superficie de lados paralelos y ángulos rectos, la unidad de medida, que es un cuadrado, está comprendida en el rectángulo tantas veces como lo

---

3. ¿Cuál es el área de un paralelogramo?
4. ¿Cuál es el área de un rectángulo?

permita su longitud multiplicada por su latitud; y en el rectángulo, la longitud está representada por la base, y la latitud por la altura. Véase la figura 134, en la cual, puesto que la unidad de medida entra ocho

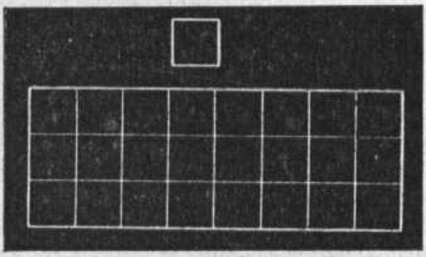

Fig. 134.

veces en la longitud, y tres veces en la latitud, dicha unidad está comprendida $3 \times 8 = 24$ veces.

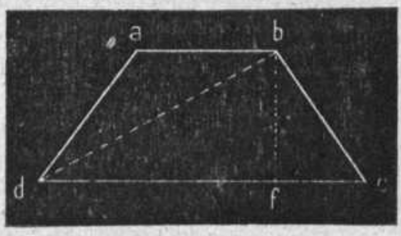

Fig. 135.

5. *El área de un trapecio es igual á sus dos bases por la mitad de su altura*; pues todo trapecio puede ser dividido en dos triángulos mediante una diagonal.

---

5. ¿Cuál es el área de un trapecio?

En la figura 135 el trapecio *a b c d* ha quedado dividido en el triángulo *a b d* y el triángulo *b d c;* y como el área de un triángulo es la mitad del producto de su base por su altura, el área del trapecio *a b c d* será igual al producto de sus dos bases, *a b* y *c d*, por su altura, *b f*, dividido por 2.

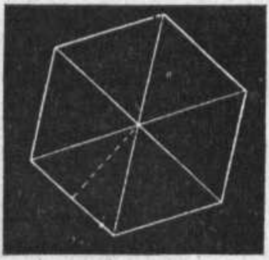

Fig. 136.

6. *El área de un polígono regular es igual á su perímetro multiplicado por su apotema y dividido por* 2; pues si desde el centro del polígono se trazan radios á todos los vértices, el polígono quedará dividido en triángulos; y por tanto, el área del polígono será la suma de las áreas de los triángulos, ó sea la suma de todos los lados considerados como bases, multiplicada por el apotema, y dividido por 2 el producto (fig. 136).

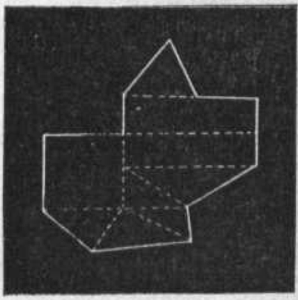

Fig. 137.

7. *El área de un polígono irregular es igual á la suma de las áreas de los triángulos, paralelogramos y trapecios en que pueda dividirse:* de ese modo, para medir una extensión considerable de terreno, se comienza la obra dividiéndolo en figuras geométricas regulares;

6. ¿Cuál es el área de un polígono regular?
7. ¿Cuál es el área de un polígono irregular?

después se averigua el área de cada figura, y la suma de todas las áreas parciales será el área total.

En la figura 137 se ve un paralelogramo irregular, que para su medición está dividido en un cuadrado, dos rectángulos y seis triángulos.

8. *El área de un círculo es igual á* πR^2; *es decir, al número constante* 3,14159 *multiplicado por el cuadrado del radio;* también es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.

9. Reglas de Estereografía.—*El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo equivale á los cuadrados construídos sobre los catetos.* Luego para construir un cuadrado doble

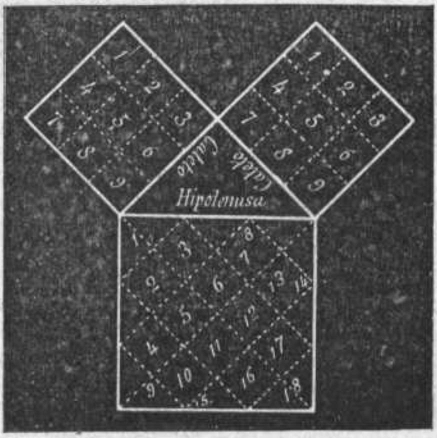

Fig. 138.

---

8. ¿Cuál es el área de un círculo?

9. ¿Cuál es el valor de un cuadrado construído sobre la hipoenusa de un triángulo rectángulo?

de otro basta construir un triángulo que tenga por cateto el lado del cuadrado dado, pues, evidentemente, el cuadrado que se construya sobre la hipotenusa de ese triángulo será el cuadrado pedido (fig. 138).

10. *Todo polígono puede reducirse á otro equivalente y que tenga un lado menos;* y, de reducción en reducción, todo polígono puede convertirse en cuadrilátero ó en triángulo equivalente.

Propongámonos reducir á cuadrilátero el pentágono *a b c d f* (fig. 139).

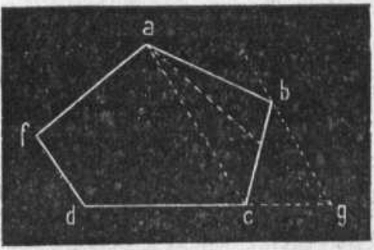

Fig. 139.

Prolongamos el lado *d c;* trazamos la diagonal *a c*, y una paralela á esa diagonal para determinar el límite de la prolongación de la recta *d c;* trazamos después la recta *a g*, y el pentágono *a b c d f* quedará convertido en el cuadrilátero equivalente *a g d f*.

Resumen del capítulo X.

Área de una figura es la medida de su extensión.

La unidad de medida de toda superficie es un cuadrado.

---

10. ¿Puede reducirse un polígono á otro equivalente que tenga un lado menos?

Generalmente, el área de una figura es el producto de su base por su altura; el área de un triángulo es la mitad de ese producto; el área de un trapecio es la mitad de sus dos bases por su altura; el área de un polígono es la mitad de todos sus lados por su apotema; el área de un círculo es la mitad de la circunferencia por el radio, ó bien πR^2.

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Todo polígono puede reducirse á un triángulo equivalente.

CAPÍTULO XI.

PROBLEMAS NUMÉRICOS.

1.° ¿Cuál es el área de una plaza cuadrada de 120 metros de lado?

Planteo y resolución:

$$120 \times 120 = 14.400 \text{ metros cuadrados.}$$

2.° ¿Cuántos metros cuadrados de alfombra se necesitan para cubrir una sala rectangular que tiene 18 metros de largo y 13 de ancho?

Planteo y resolución:

$$18 \times 13 = 234 \text{ metros.}$$

3.° ¿Cuántos metros de papel se necesitan para cubrir una pared trapecial, cuya base mayor es de 80 metros, la menor de 65, y la altura de 100?

Planteo del problema:

$$\frac{(80 + 65) \times 100}{2}$$

Resolución:

$$145 \times 50 = 7.250 \text{ metros.}$$

4.° ¿Cuál es la extensión de una plaza de toros que tiene 50 metros de radio?

Planteo del problema:

El área del círculo es πR^2.

$$\pi = 3,14159.$$

En el problema propuesto, $R = 50$ metros.

Luego $\pi R^2 = 3{,}14159 \times 50 \times 50$.

Resolución:

$3{,}14159 \times 50 \times 50 = 7843{,}97$ metros cuadrados.

5.° ¿Cuántos espectadores cabrán en dicha plaza, sabiendo que el radio del círculo de arena es de 18 metros, y que cada tres personas ocupan un metro cuadrado?

Planteo del problema:

	Metros cuadrados.
Área de la plaza....................................	7.853,97
Área del círculo de arena $= 3{,}14159 \times 18 \times 18 =$	1.017,78
Área ocupada por los espectadores................	6.836,19

Y multiplicando esta cantidad por 3, tendremos resuelto el problema.

Resolución:

$6.836{,}19 \times 3 = 20.508$ espectadores.

6.° ¿Cuál es el área de una dehesa de forma irregular?

Se divide en las figuras regulares que sean posibles, aun cuando tengan muy poca extensión; se averigua el área de cada triángulo, de cada trapecio, rectángulo ó paralelogramo en que se haya dividido, y la suma de las áreas parciales nos dará resuelto el problema.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

CAPÍTULO XII.

DE LOS PLANOS.

1. *Tres puntos que no estén en línea recta determinan la posición de un plano;* pues si concebimos que por la recta que une á dos puntos pasa un plano, y que éste gira alrededor de la referida recta (véase la figura 140), forzosamente ocupará una de las posiciones determinadas por tres puntos. *A B C* son los tres puntos supuestos.

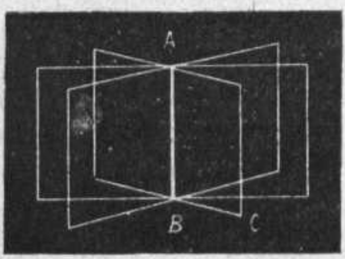

Fig. 140.

Ya sabemos que plano, ó superficie plana, es una sucesión de líneas rectas que forman una superficie á la cual se puede aplicar, en dos ó más puntos, una línea recta (fig. 141); y superficie curva es aquella en la cual no puede tocar una recta más que en un punto

1. ¿Cuántos puntos determinan la posición de un plano?

(fig. 142). Suponiendo hueca una superficie curva, recibirá el nombre de convexa por la parte saliente, y cóncava por la parte hueca.

2. *La intersección de dos planos es una línea recta*; como fácilmente se comprende de la sola inspección de la figura 140.

3. *Una recta y un plano que se cortan, son entre sí perpendiculares, oblicuos ó paralelos.* Son perpendiculares cuando la recta es perpendicular á todas las que pasen por su pie: *se llama pie de la recta el punto en que una recta y un plano se tocan.* Son oblicuos cuando la recta no es perpendicular á todas las que pasen por su pie. Son paralelos una recta y un plano cuando no se encuentran aunque se prolonguen.

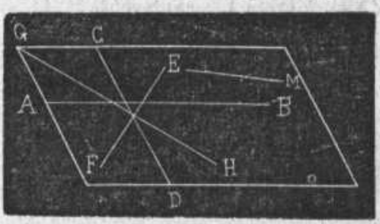

Fig. 141.

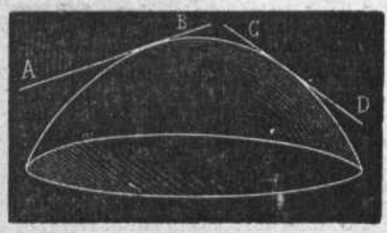

Fig. 142.

4 *Por un punto dado fuera de un plano no puede trazarse á éste más que una perpendicular*

---

2. ¿Cuál es la intersección ó corte de dos planos que se cruzan?

3. ¿De cuántas maneras pueden ser entre sí una recta y un plano que se corten?

4. ¿Cuántas perpendiculares se pueden trazar sobre un plano desde un punto dado en el espacio?

y diferentes oblicuas; pues de lo contrario resultaría un triángulo con dos ángulos rectos, lo cual es un absurdo.

5 *Por un punto fuera de un plano pueden pasar diferentes paralelas á ese mismo plano;* porque todas esas rectas, aun cuando coincidan en un punto, pueden seguir distintas direcciones, todas paralelas al mismo plano.

6. *Proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular levantada sobre dicho punto al plano.* Proyección de una línea recta ó curva sobre un plano es la línea formada por las proyecciones de todos sus puntos: la proyección de una recta se determina por la proyección de sus extremos. *En el lenguaje usual se dice que proyección es la representación de un cuerpo sobre un plano.*

7. *Los planos pueden ser entre sí perpendiculares, oblicuos y paralelos.* Son planos perpendiculares los planos que coinciden en una línea y forman ángulos rectos; por ejemplo, una pared y el piso de una habitación.

Son planos oblicuos aquellos que coinciden en una línea y están más ó menos inclinados entre sí; como las hojas de un libro medio abierto.

Son planos paralelos aquellos que no se encuentran aunque se prolonguen; como el techo recto y el piso recto de una habitación.

8. La dirección que toma en el espacio un hilo que esté sujeto y del cual penda un peso, recibe el nombre de línea de aplomo ó línea vertical. *Todo plano*

---

5. ¿Cuántas paralelas pueden trazarse sobre un plano por un punto fuera del mismo plano?

6. ¿Qué entendemos por proyección?

7. ¿Qué relaciones tienen los planos entre sí?

8. ¿Qué es plano vertical y qué es plano horizontal? ¿Qué es plano inclinado?

que pase por una línea vertical se llama plano vertical. La intersección de dos planos verticales es una línea vertical. *Todo plano perpendicular á la línea vertical es horizontal:* el nivel de las aguas en un lago representa un plano horizontal. La intersección de dos planos, uno vertical y otro horizontal, es horizontal. *Plano inclinado es el que ocupa una posición media entre la vertical y la horizontal.*

9. *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano, son líneas paralelas;* y, por tanto, las partes de planos comprendidas entre planos paralelos, son iguales.

Resumen del capítulo XII.

Plano es una sucesión de líneas que forman una superficie á la cual se puede aplicar en dos ó más puntos una línea recta.

Tres puntos que no están en línea recta determinan la posición de un plano.

Los planos, como las líneas, pueden ser entre sí perpendiculares, oblicuos y paralelos.

Los planos, por la dirección particular que ocupen en el espacio, pueden ser verticales, horizontales ó inclinados.

La intersección de dos planos es una línea.

CAPÍTULO XIII.

DE LOS ÁNGULOS DIEDROS Y POLIEDROS.

1. *Angulo diedro es la mayor ó menor inclinación de dos planos que se cortan ó concurren en una línea,*

---

9. ¿Cuáles son las intersecciones de planos paralelos con otro plano?

1. ¿Qué es ángulo diedro?

llamada arista. Caras del ángulo son los planos que lo forman.

Un ángulo diedro se designa por cuatro letras, de las cuales corresponden la primera al primer plano, la segunda y tercera á la arista, y la cuarta al segundo plano.

En la figura 143, el plano *A B C D* y el plano *E F B D* se unen en la línea *B D*, que es la arista, y forman el ángulo diedro *A B D F.*

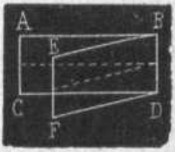

Fig. 143.

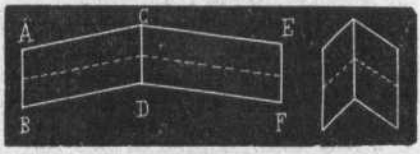

Fig. 144.

En la figura 144, ese mismo ángulo está más abierto.

2. *La magnitud de un ángulo diedro depende de la mayor abertura ó inclinación de sus lados;* y su medida se aprecia por la del rectilíneo formado por dos perpendiculares á la arista.

3. *Los ángulos diedros*, lo mismo que los rectilíneos, *pueden ser rectos, agudos* y *obtusos:* hay también ángulos diedros *adyacentes*, y ángulos diedros *opuestos por la arista.* Las definiciones de todos esos ángulos corresponden exactamente á las de los ángulos rectilíneos.

4. *Angulo poliedro es la inclinación de tres ó más planos que concurren en un punto, llamado vértice.*

---

2. ¿De qué depende la magnitud de un ángulo diedro?
3. ¿Cómo se clasifican los ángulos diedros?
4. ¿Qué entendemos por ángulo poliedro?

5. *Los planos del ángulo poliedro se llaman caras, y sus intersecciones se denominan aristas* del ángulo poliedro. Los planos unidos por dos aristas se llaman planos diagonales.

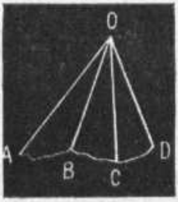

Fig. 145.

En la figura 145 aparece un ángulo poliedro cuyo vértice es *O*, y cuyos planos son *O A B*, *B O C*, *C O D* y *D O A*: todos esos planos son diagonales.

6. *El ángulo poliedro que está formado solamente por tres ángulos planos se llama ángulo triedro.*

7. *Todo ángulo poliedro puede descomponerse en tantos triedros como caras tiene*, ó en tantos triedros como caras tiene, menos dos.

8. *Tres planos que se cortan dividen todo el espacio indefinido en ocho ángulos triedros* que tienen un vértice común; porque cada plano divide el espacio indefinido en dos mitades, y cada una de esas mitades quedará dividida por los otros dos planos en cuatro ángulos triedros.

9. *Una cara cualquiera de un ángulo poliedro es menor que la suma de las otras.*

10. *La suma de los ángulos planos de cualquier poliedro es menor que cuatro rectos;* y por consiguiente, valen menos que los 360° de la circunferencia.

---

5. ¿Cuáles son las caras y las aristas y el vértice del ángulo poliedro?

6. ¿Qué es ángulo triedro?

7. ¿Cómo puede descomponerse el ángulo poliedro?

8. ¿En cuántos ángulos triedros dividen tres planos al espacio indefinido?

9. ¿Cuánto vale una cara de un ángulo respecto de las otras?

10. ¿Cuántos ángulos rectos valen los ángulos planos de cualquier poliedro?

Resumen del capítulo XIII.

Dos planos que coinciden en una recta forman un ángulo diedro.

Los ángulos diedros admiten las mismas divisiones que los ángulos rectilíneos.

Varios planos que tengan un punto común, llamado vértice, forman un ángulo poliedro.

Si los ángulos no son más que tres, forman un ángulo triedro.

Todo ángulo poliedro puede descomponerse en ángulos triedros.

CAPÍTULO XIV.

DE LOS CUERPOS POLIEDROS.

1. *Se llama cuerpo poliedro, ó solamente poliedro, el espacio terminado por superficies planas.* Los planos que forman el poliedro se llaman *caras;* las líneas

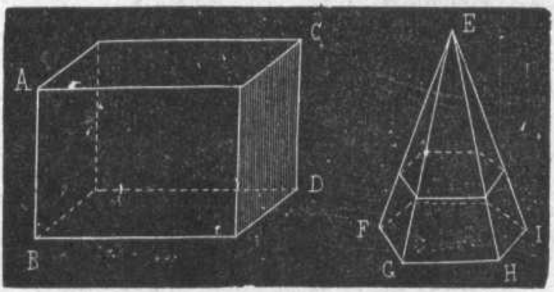

Fig. 146.

---

1. ¿Qué es cuerpo poliedro, ó simplemente poliedro?

en que se cruzan los planos se denominan *aristas;* los puntos de intersección de unas aristas con otras se nombran *vértices;* y es diagonal la recta que une dos vértices de caras diferentes (fig. 146).

2. *Planos diagonales son los que pasan por tres vértices que no están en una misma cara*, ó bien los que unen dos aristas de caras diferentes. *Base de un poliedro es cualquiera de sus caras*, aunque generalmente se da ese nombre á aquella sobre la cual se considera que descansa. *Caras laterales son todas las caras menos su base* ó sus bases. *Aristas laterales son las intersecciones de dos caras laterales.*

3. *Poliedro regular es el que tiene todas sus caras regulares é iguales*, y asimismo iguales todos sus ángulos poliedros.

4. *Los poliedros toman diferentes nombres, con arreglo al número de sus caras:*

El poliedro de cuatro caras se llama *tetraedro* (fig. 147).

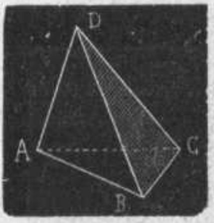

Fig. 147.

El de cinco caras se llama *pentaedro* (fig. 148).

El de seis caras se llama *hexaedro* (fig. 149).

El de ocho caras se llama *octaedro* (fig. 150).

El de diez caras, *decaedro;* el de doce, *dodecaedro;* el de veinte, *icosaedro.*

5. *Los poliedros que principalmente se consideran en el estudio de la Geometría,*

---

2. ¿Qué son planos diagonales, base, caras laterales y aristas laterales de un poliedro?
3. ¿Cuáles son las condiciones del poliedro regular?
4. ¿Qué nombres reciben los poliedros?
5. ¿Cuáles son los principales poliedros?

son el prisma, la pirámide y los poliedros regulares, porque tienen frecuentes aplicaciones enl a Naturale-

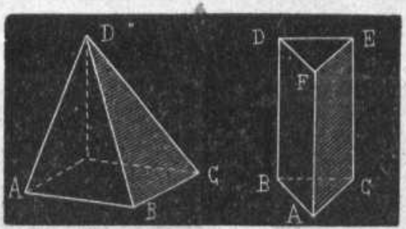

Fig. 148.

za, en las artes, en las construcciones monumentales y arquitectónicas, en la edificación y en la mecánica.

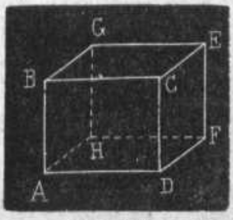

Fig. 149.

Fig. 150.

6. *Pirámide es el poliedro terminado por una base poligonal y tantos triángulos como lados tiene esa base.*

Todos los triángulos que forman las caras de la pirámide se reunen en un punto llamado vértice ó *cúspide* de la pirámide (fig. 151).

Altura de la pirámide es la perpendicular que se

---

6. ¿Qué es una pirámide? ¿Qué nombres reciben las pirámides?

puede trazar desde la cúspide á la base. La recta *a b* determina la altura de la pirámide de la figura 152.

Las pirámides toman el nombre del polígono de su base:

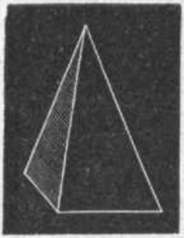

Fig. 151.

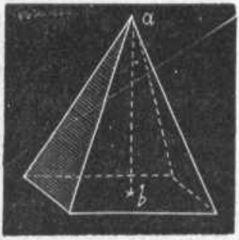

Fig. 152.

Si la base es un triángulo, la pirámide se llama pirámide *triangular* (fig. 153).

Si la base es un cuadrilátero, la pirámide se llama pirámide *cuadrangular* (fig. 154).

Si la base es un pentágono, la pirámide se llama pirámide *pentagonal* (fig. 155).

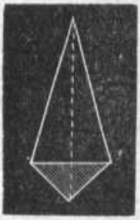

Fig. 153.

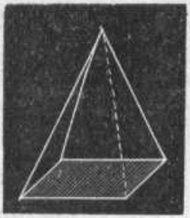

Fig. 154.

Fig. 155.

Si la base es un hexágono, la pirámide se llama pirámide *hexagonal* (fig. 156).

Y así sucesivamente.

Si la base de la pirámide es un polígono regular, la pirámide es también *regular* (fig. 157); pero si el po-

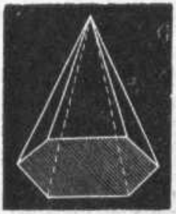

Fig. 156.

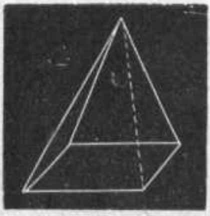

Fig. 157.

lígono que sirve de base á la pirámide es irregular, ésta recibe también el nombre de pirámide *irregular*, como la de la figura 158.

Pirámide truncada ó tronco de pirámide es la pirámide que carece de vértice, como sucede á la representada en la figura 159.

7. *Se llama prisma todo poliedro que tiene por bases*

Fig. 158.

Fig. 159.

dos polígonos iguales y paralelos, y por lados ó caras varios paralelogramos.

En la figura 160 hay un prisma triangular, ó que

7. ¿Qué es prisma? ¿De cuántas maneras puede ser?

tiene por bases dos triángulos iguales; un prisma cuadrangular, ó que tiene por bases dos cuadriláteros

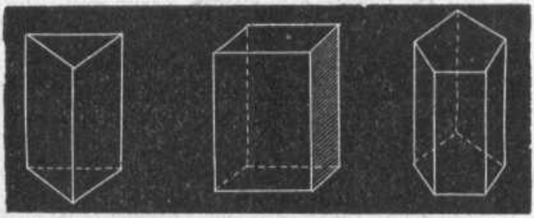

Fig. 160.

iguales; y un prisma pentagonal, ó que tiene por bases dos pentágonos iguales y paralelos.

El prisma puede ser recto si tiene sus aristas laterales perpendiculares á las bases (fig. 161); *oblicuo*, si sus aristas laterales son oblicuas á los planos de las bases (fig. 162); *regular*, cuando es recto y sus bases

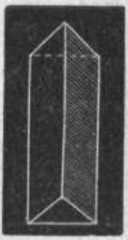

Fig. 161.

Fig. 162.

son polígonos regulares; *irregular*, si no es recto ó sus bases son polígonos irregulares; *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc., si sus bases representan triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos.

8. *Los prismas cuadrangulares* ó de bases forma-

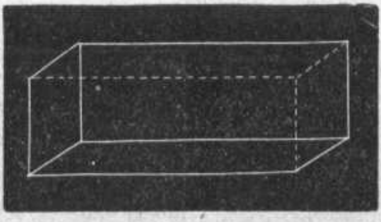

Fig. 163.

das por planos de cuatro lados, reciben nombres especiales:

Se llaman paralelepípedos, cuando sus bases son paralelógramos (fig. 163).

Prismas trapeciales, cuando sus bases son trapecios (fig. 164).

Y *prismas trapezoidales*, cuando sus bases son trapezoides (fig. 165).

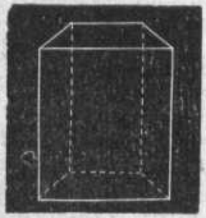

Fig. 164.

Pero los paralelepípedos admiten una segunda división en cinco grupos, que se llaman:

Cubo, que es el prisma formado por cuadrados (figura 166).

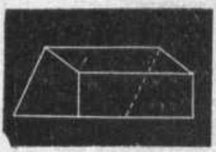

Fig. 165.

Paralelepípedo rectangular, que tiene las bases cuadradas y los lados son rectángulos (fig. 167).

Paralelepípedo rombal, que tiene por base un rombo (fig. 168).

Paralelepípedo romboidal, que tiene por base un romboide (figura 169).

---

8. ¿Qué nombres reciben los prismas cuadrangulares?

Y romboedro, que es el paralelepípedo cuyos lados son rombos iguales (fig. 170).

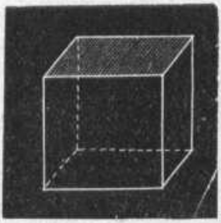

Fig. 166.

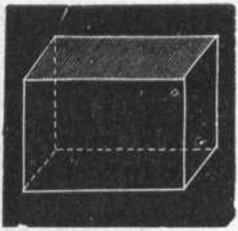

Fig. 167.

9. *Toda pirámide puede descomponerse en tantos tetraedros como lados tiene el polígono de su base; y todo prisma puede descomponerse en tantos prismas triangulares como lados tiene la base.*

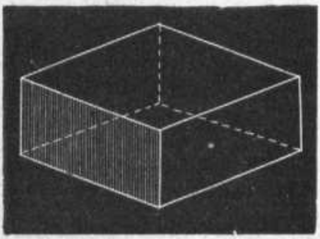

Fig. 168.

10. *El área lateral de una pirámide regular es igual al perímetro de su base por la mitad de su apotema;* y el total se halla añadiendo al área lateral el área de la base. *El área lateral de un prisma recto es igual al pro-*

---

9. ¿En cuántos tetraedros puede descomponerse una pirámide? ¿En cuántos prismas triangulares puede descomponerse un prisma?

10. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide regular y de un prisma recto?

ducto de una de sus aristas laterales por el perímetro

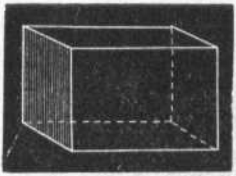

Fig. 169.

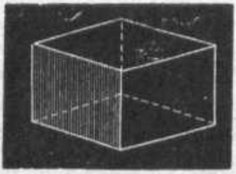

Fig. 170.

de su base; y el área total se halla agregando á la lateral la de las bases.

Resumen del capítulo XIV.

Poliedro es el espacio terminado por superficies planas, llamadas caras.

Poliedro regular es el que tiene sus caras regulares.

Los poliedros reciben el nombre de tetraedros, si tienen cuatro caras ó lados; pentaedros, si tienen cinco; hexaedros, si tienen seis; octaedros, decaedros, dodecaedros, icosaedros, si tienen diez, doce ó veinte caras.

Pirámide es un poliedro cuyas caras terminan en la parte superior por un vértice ó cúspide, y en la parte inferior por una base poligonal.

Prisma es un poliedro que tiene dos bases poligonales iguales y paralelas.

Los prismas cuadrangulares de lados paralelos se llaman paralelepípedos: el paralelepípedo que tiene seis caras cuadradas, como un dado, se llama cubo; el paralelepípedo parecido á un ladrillo, es un paralelepípedo rectangular.

CAPÍTULO XV.

POLIEDROS REGULARES.

1. *Los poliedros regulares* no *son* más que *cinco*, y se denominan: *tetraedro* ó de cuatro lados;

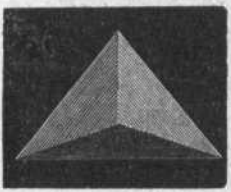

Fig. 171.

hexaedro ó de seis lados;
octaedro ó de ocho lados;
dodecaedro ó de doce lados; y finalmente,
icosaedro ó de veinte lados.

2. *El tetraedro* (fig. 171) *es un poliedro regular que tiene cuatro caras ó lados, formando cuatro triángulos equiláteros iguales:* sus ángulos son triedros; tiene seis aristas y cuatro vértices.

3. *El hexaedro es un poliedro regular que consta de seis lados ó caras formadas por seis cuadrados iguales*

Fig. 172.

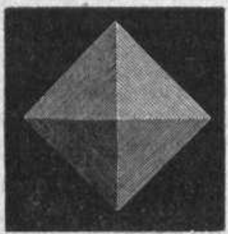

Fig. 173.

(fig. 172): sus ángulos son triedros; tiene doce aristas y ocho vértices.

---

1. ¿Cuántos son los poliedros regulares?
2. ¿Cómo se forma el tetraedro?
3. ¿Cómo se forma el hexaedro?

4. *El octaedro es un poliedro regular de ocho caras formados por ocho triángulos equiláteros iguales* (figura 173): sus ángulos están formados por cuatro planos; tiene doce aristas y seis vértices.

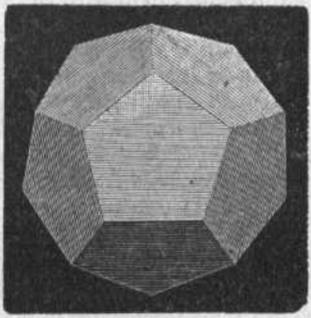

Fig. 174.

5. *El dodecaedro es un poliedro regular de doce caras constituídas por doce pentágonos regulares iguales* (fig. 174): sus ángulos son triedros; tiene treinta aristas y veinte vértices.

6. *El icosaedro es un poliedro regular de veinte lados formados por veinte triángulos equiláteros iguales:* sus ángulos están compuestos por cinco planos; tiene treinta aristas y doce vértices (figu- 175).

Fig. 175.

7. *De los cinco poliedros regulares, tres*, que son el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, *están terminados por triángulos; uno*, que es el hexaedro, *por cuadrados; y otro*, que es el dodecaedro, *por pentágonos.*

8. *Todo poliedro puede descomponerse en pirámides,*

---

4. ¿Cómo está constituido el octaedro?
5. ¿De qué modo está formado el dodecaedro?
6. ¿Cómo está terminado el icosaedro?
7. ¿Cuántos poliedros regulares están formados por triángulos?
8. ¿De qué modo puede descomponerse todo poliedro?

y por consiguiente en tetraedros. En efecto: si se trazan planos secantes por todas sus aristas y un punto cualquiera elegido dentro del poliedro, resultará éste dividido en tantas pirámides como sean sus caras.

9. *El área de un poliedro cualquiera es igual á la suma de las áreas de todas sus caras.*

10. *El área de un poliedro regular es igual al área de una de sus caras multiplicada por el número de todas.* En efecto: siendo todas las caras iguales, basta conocer el área de una para conocer, por multiplicación, el área de todas.

Resumen del capítulo XV.

Hay cinco clases de poliedros regulares:

El tetraedro, que está formado por cuatro triángulos equiláteros;

El hexaedro, que consta de seis cuadrados iguales;

El octaedro, compuesto de ocho triángulos equiláteros;

El dodecaedro, constituído por doce pentágonos regulares;

El icosaedro, formado por veinte triángulos equiláteros.

Todo poliedro puede descomponerse en tetraedros.

El área de un poliedro es igual al área de sus caras.

CAPÍTULO XVI.

CUERPOS REDONDOS.

1. *Se llaman cuerpos redondos aquellas figuras que no presentan ángulos* ó esquinas *en su superficie*, y

---

9. ¿Cuál es el área de un poliedro cualquiera?
10. ¿Y el área de un poliedro regular?
1. ¿Qué entendemos por cuerpos redondos?

se consideran originadas por el movimiento giratorio de algunas figuras planas sobre uno de sus lados. Los principales cuerpos redondos son tres: el cono, el cilindro y la esfera.

Fig. 176.

2. *Cono es un cuerpo redondo de base circular, terminado en un punto llamado vértice* (fig. 176): se supone originado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos: la hipotenusa del triángulo generador describe la superficie cónica; el cateto mayor, *A B*, es el eje del cono, y el cateto menor traza la base.

3. *El cono puede ser recto y oblicuo.* Cono recto es el que tiene su eje perpendicular á la base (fig. 177). Cono oblicuo es el que no tiene su eje perpendicular á la base (fig. 178).

4. *Cono truncado es el cono que carece de vértice* (fig. 179). Se llama trozo de cono la parte de éste comprendida entre la base y un plano que corta el cono en cualquiera dirección.

Fig. 177.

5. *El área lateral de un cono es igual al producto de la circunferencia de la base por la mitad de su lado.* El área total es igual al área lateral más el área de la base.

6. *Cilindro es un cuerpo redondo y terminado en bases circulares iguales y paralelas:* se considera originado por la revolución

2. ¿Qué es cono?
3. ¿De cuántas maneras puede ser el cono?
4. ¿Qué es cono truncado?
5. ¿Cuál es el área lateral de un cono?
6. ¿Qué es cilindro?

de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados (fig. 180). Eje de un cilindro es la recta del triángulo generador que une las dos bases (fig. 181, en la cual la recta *A B* es el eje y determina la altura del respectivo cilindro).

Fig. 178.

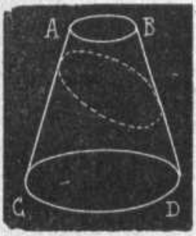

Fig. 179.

7. *El cilindro puede ser recto y oblicuo.* Cilindro recto es aquel en que el eje es perpendicular á la base (figura 182). Cilindro oblicuo es aquel cuyo eje no

Fig. 180.

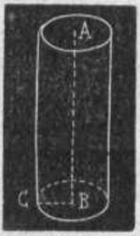

Fig. 181.

Fig. 182.

Fig. 183.

es perpendicular al plano en que descansa la base (figura 183).

---

7. ¿De cuántas maneras puede ser el cilindro?

8. *El área lateral de un cilindro es igual al producto de la circunferencia de su base por su altura.* El área total es la suma del área lateral y del área de sus dos bases.

9. *Esfera es un cuerpo redondo terminado por una superficie curva convexa,* como una pelota ó una bola de billar (fig. 184).

Se llama centro de la esfera el punto interior del

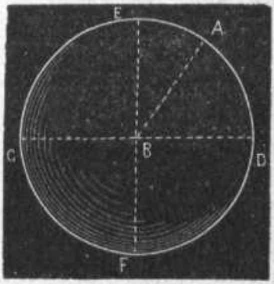

Fig. 184.

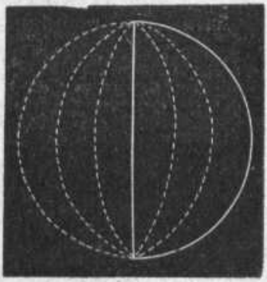

Fig. 185.

cual equidistan todos los de la superficie esférica (*B* en la fig. 184). Radios de la esfera son las rectas que se dirigen desde el centro á la superficie, como la recta *B A*. Eje de la esfera es el diámetro sobre el cual se puede considerar que la esfera gira, como la recta *E F*. Polos de la esfera son los extremos del eje; éstos son *E* y *F*. Diámetro es cualquiera recta que pasa por el centro y termina en la superficie esférica.

La esfera se supone originada por un semicírculo que gira alrededor de un diámetro (fig. 185).

10. *Círculos de la esfera son las secciones hechas por*

---

8. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro?
9. ¿Qué es esfera?
10. ¿Qué entendemos por círculos de la esfera?

un plano en la esfera. Círculo máximo es el que tiene por radio el mismo radio de la esfera, y círculo menor es aquel que tiene distinto radio.

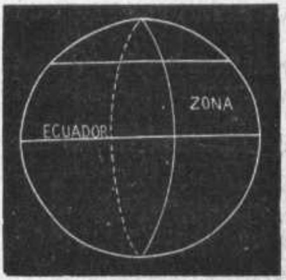

Fig. 186.

El círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales, llamadas hemisferios.

En la esfera terrestre, el Ecuador es un círculo máximo que divide á la Tierra en dos partes iguales, una hacia el Norte, llamada septentrional, y otra hacia el Sur, llamada meridional (fig. 186). Meridiano de la Tierra es cualquiera de los círculos máximos que pasan por los polos. Zona esférica es cualquiera porción de la esfera comprendida entre dos cortes paralelos al Ecuador.

11. *El área de la esfera es igual á cuatro veces el área de un círculo máximo;* ó bien la circunferencia máxima multiplicada por su diámetro.

Resumen del capítulo XVI.

Cuerpos redondos son aquellas figuras que se suponen originadas por la revolución de un triángulo, de un rectángulo ó de un semicírculo.

Son principalmente el cono, el cilindro y la esfera.

El cono es un cuerpo redondo que tiene base circular, y termina en un punto como la pirámide; el cilindro tiene dos bases iguales y paralelas; la esfera es un cuerpo completamente redondo como una bola de billar.

Cualquiera sección de la esfera se llama círculo: si el radio

---

11. ¿Cuál es el área de la esfera?

de éste es el mismo de la esfera, se llama círculo máximo. El Ecuador es un círculo máximo de la esfera de la Tierra y divide á ésta en dos hemisferios, septentrional el uno, y meridional el otro.

CAPÍTULO XVII Y ÚLTIMO.

VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

1. *Volumen de un cuerpo es la medida de sus tres dimensiones* de longitud, de latitud y de altura, grueso ó profundidad.

2. *La unidad de volumen es un cubo* cuyo lado ó arista es la unidad lineal, ya sea un metro, ya un decímetro, bien un pie, bien una pulgada.

3. *Los cuerpos geométricos que tienen igual volumen son equivalentes;* y si fueran huecos ó vacíos, como una medida para granos ó para líquidos, ó un vagón, ó una habitación, teniendo igual volumen tendrían exactamente la misma capacidad, cualquiera que fuese su forma.

4. *El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura.*

5. *El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura.*

6 *El volumen de una pirámide cualquiera es igual al producto del área de su base por el tercio de su altura;* porque todo prisma triangular se puede descomponer en tres pirámides equivalentes.

---

1. ¿Qué es volumen de un cuerpo?
2. ¿Cuál es la unidad de volumen?
3. ¿Qué relación tienen entre sí los cuerpos de igual volumen?
4. ¿Cuál es el volumen de un paralelepípedo?
5. ¿Y el de un prisma?
6. ¿Y el de una pirámide cualquiera?

7. *El volumen* de un poliedro cualquiera es igual á la suma de los volúmenes de los paralelepípedos, prismas y pirámides en que pueda descomponerse; pero el volumen *de un poliedro regular es igual al tercio del producto de su área por su apotema.*

8. *El volumen de un cono es igual al producto de su base por el tercio de su altura;* porque el cono es como una pirámide de indefinido número de caras ó lados.

9. *El volumen de un cilindro es igual al producto de su base por su altura;* porque el cilindro es como un prisma recto de indefinido número de caras.

10. *El volumen de una esfera es igual al producto de su área por el tercio del radio;* porque la esfera es como un poliedro regular de un número indefinido de lados.

Resumen del capítulo XVII y último.

Volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa: el volumen interior de un cuerpo es la capacidad que tiene: el volumen de un cono de sal, por ejemplo, cuya altura fuese de 12 metros y el radio de su base 8, sería:

$3.14159 \times 12 \times 12 \times 4 = 1809{,}556$; es decir, $1809^{m},556^{mm}$

Otro ejemplo: ¿Cuál será el número de metros cúbicos de agua que puede contener un estanque de 9 metros de longitud, 7 de latitud y 5 de profundidad? $9 \times 7 \times 5 = 315$ metros cúbicos.

La unidad de volumen es un cubo, como la unidad superficial es un cuadrado, y la unidad longitudinal una línea.

---

7. ¿Cuál es el volumen de un poliedro regular?
8. ¿Cuál es el volumen de un cono?
9. Volumen de un cilindro.
10. Volumen de una esfera.

FIN.

ÍNDICE.

RESUMEN DE LOS JUICIOS CRITICOS

que «Albores de la Enseñanza» y «Biblioteca de las Escuelas» han merecido á periódicos profesionales y á individuos de Profesorado español.

Voz del Magisterio (Santander).—«Si éstos no aprenden, es porque no quieren.

»Así suelen decir los amigos que se dignan visitarnos en nuestro *taller*, refiriéndose á nuestros discípulos, después de haber hojeado algunos de los libros de texto que, para examinarlos, les entregamos.

»—Les sobran á ustedes razones para hablar de ese modo—replicamos nosotros:—con libros tan magníficos como los que publica D. Saturnino Calleja, únicamente los *vagos de profesión* dejan de instruirse; porque únicamente éstos, que sólo miran las obras por el forro, son los que no pueden *digerir* el contenido de las mismas.

»Explícase muy bien que veinte años há, época en que nosotros pertenecíamos á la *sexta*, nos quedásemos en *ayunas* después de haber leído muchos de los puntos que comprende el hermosísimo libro *Juanito;* porque, para la *mejor inteligencia* de aquéllos, seis viñetas, á lo sumo, se habían intercalado en el texto. ¿Pero hoy? Hoy, para explicarnos por qué un niño *no entiende lo que lee* en el Tesoro de las Escuelas, de Calleja, adornado con cientos de láminas y viñetas, nos veremos precisados á suponer que el alumno es una *verdadera calamidad* dirigida por una *calamidad verdadera*.

»Acordémonos en este momento de los libros que encerraba nuestro *morral*, y no podemos menos de compadecer al maestro que con tales auxiliares contaba para enseñar á sus discípulos: el *Catecismo*, con un grabado; el *Fleury*, con ocho; el *Amigo*, con doce, las *Fábulas de Samaniego*, con seis; el manuscrito de Aranda, que los reclamaba, pero que nadie se los concedía, y..... pare usted de contar; pare usted, sí, pues el *Juanito*, de Palucie, y las *Páginas* de Terradillos, eran diamantes que pocos niños lograban poseer.

»Hoy, gracias á la privilegiada inteligencia é incansable actividad de D. Saturnino Calleja, lo mismo el niño rico que el pobre, el de la ciudad que el del campo, el de la escuela completa que el de la temporera, todos, en fin, tienen á su disposición libros escritos, impresos é ilustrados en armonía con las exigencias de la moderna Pedagogía; libros con infinidad de *santos*, libros que les facilitan grandemente el penoso trabajo de aprender, como al maestro el nada ligero de enseñar. Unos y otros, maestros y discípulos, somos, pues, deudores al Sr. Calleja del grán beneficio de haber apartado no pocos de los obstáculos que nos dificultaban considerablemente la senda que los últimos por una sola vez, y nosotros por varias, tenemos que seguir; y justo es, por tanto, que en pago de lo que como educadores somos en deber al Sr. Calleja, hagamos á lo menos, en estas descosidas líneas, manifestación de nuestro agradecimiento.

»Bombo tenemos, dirá tal vez algún lector tocado de suspicacia; pero se equivoca grandemente. El Sr. Calleja no necesita de nuestro insignificante apoyo para salir adelante en su empresa. Sin él ha hecho llegar sus libros á sitios donde el mismo editor no puede suponer; sin él ha hecho una revolución en el material de nuestros establecimientos de enseñanza; sin él son buscados sus libros hasta por los niños *que no saben leer*, como hemos observado en nuestra escuela; y sin él, en una palabra, realizará el doble ideal de beneficiar sus intereses particulares y los generales de la nación, que no creemos nosotros sean incompatibles.

»Si nos expresamos de manera tan favorable al Sr. Calleja, no se piense que obedece á miras interesadas, ni á que tengamos un elevadísimo concepto de él como escritor. Como tal no le colocamos sobre el gran número de los que se dedican á escribir obras para la niñez; y, somos francos, algunas de las que tiene publicadas las encontramos inferiores en valor literario y científico á otras similares que conocemos. Nuestra pasión por las obras de D. Saturnino nace de que ellas se amoldan, en nuestro concepto, mucho mejor que otras al gran principio de *enseñar intuitivamente;* nace de que nosotros, tal vez tomando el rábano por las hojas y confundiendo el oro con el oropel, damos nuestra preferencia á un libro regularmente escrito, pero profusamente ilustrado, sobre otro bien escrito, pero en absoluto falto de láminas y grabados.

»Pero nos vamos apartando del objeto de estos renglones, hacer una pequeña reseña de la última obra que nos ha remitido el señor Calleja, y fuerza es volver á aquél so pena de molestar á nuestros lectores.

»Es la obra en cuestión una *Historia Sagrada*, tomo primero de la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, que para las del grado superior va á publicar el Sr. Calleja; obra que, á nuestro juicio, es de las mejores que ha escrito y editado el librero de la calle de Valencia.

»En efecto, y empezando la reseña de la parte material, encontramos una encuadernación que por primera vez se emplea en las obras de la expresada Casa, pues tiene el libro de que hablamos sólida pasta y canto de tela; ha desaparecido, por tanto, de esta obra uno de los defectos que se señalaban en todas las de Calleja, la falta de solidez en la encuadernación. Añádase á esta reforma 238 páginas de excelente papel, grandes y claros tipos de letra, 85 láminas nuevas de igual tamaño, y que, ampliadas, formarían una hermosa colección, y pocas menos láminas de las que ya se han empleado en la historia de Loriquet, y se tendrá una pequeña idea de las cualidades materiales del libro.

»En cuanto á la parte literaria de éste, á más de un estilo y lenguaje capaces de satisfacer al más exigente maestro, encontrámosla ajustada exactamente en su exposición á un plan cíclico. En efecto: cada capítulo de los treinta que abraza la obra tiene una parte detallada de toda la materia referente al capítulo; otra parte de letra bastardilla que encierra la síntesis de cada párrafo, y un resumen de todo el capítulo. Para que las preguntas no interrumpan el texto, van colocadas al pie de la página y numeradas con el del párrafo á que se refieren. Si el Sr. Calleja realiza tan á maravilla su *tarea cíclica* en los demás tomos de la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, cual lo ha hecho en el de que nos venimos ocupando, bien podemos darnos la enhorabuena los que, por razones que no son de este artículo, somos partidarios de que el texto ha de ser *grande*, *mediano* ó *pequeño*, según que el alumno sea también *grande*, *mediano* ó *pequeño*.

»Para terminar, y como muestra del acierto con que el Sr. Calleja ha llevado á término su empresa en la *Historia Sagrada*, vamos á copiar un párrafo de ella, recomendando á nuestros compañeros lo lean primero íntegro, y después sólo lo escrito con bastardilla:

«2. *Cuando San Pedro confesó* tan espontáneamente *su convic»ción de que Jesús era el Cristo* ó Mesías, *Jesús le dijo:—Bienaven»turado eres, Simón*, hijo de Jonás, porque lo que has dicho no te »lo ha revelado carne ni sangre, sino mi Padre, que está en los »cielos; *y yo ahora te digo que tú eres Pedro, y sobre esta piedra »edificaré mi Iglesia*, contra la que no prevalecerán las puertas »del infierno. Todo lo que atares en la tierra quedará atado en los »cielos, y todo lo que desatares en la tierra será también desatado »en los cielos.»

»En el resumen del capítulo dice sobre este punto: «Y en aquel »instante Jesus lo designó como la piedra fundamental de su »Iglesia.»

»LEONCIO SUÁREZ.»

«La *Historia Sagrada* (tomo primero de la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS) que ha dado recientemente á luz D. Saturnino Calleja, es de tal importancia para la juventud y á la vez para el Profesorado, que no vacilamos en conceptuarla joya entre las obras didácticas. Respecto á la doctrina que abarca, vemos que nada interesante omite; todo se halla expuesto con sencillez y claridad, y en tan breves páginas se armonizan la amenidad que deleita y la instrucción que eleva. Si con todo esto sumamos la novedad del sistema cíclico tan acertadamente trazado por el autor, podemos asegurar que tal novedad ha de ser la antorcha que ilumine el derrotero que muchos autores han de seguir en las sucesivas publicaciones.

»Si respecto del fondo la obra puede considerarse perfectamente acabada, en cuanto á la forma, su magnífica ilustración le da un carácter verdaderamente edificante.

»JIMÉNEZ AROCA.»

«Con grata sorpresa leí sus inimitables obritas, primeros tomos de ALBORES DE LA ENSEÑANZA y BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS.

»Tratándose de obras didácticas, nunca me han seducido anuncios pomposos ni encuadernaciones elegantes, acordándome de la fábula de Iriarte; mas después de hojear con detenimiento ambas producciones, debo decirle, sin ningún género de lisonja, que son capaces de satisfacer al gusto más refinado. En los ALBORES es imposible decir más ni mejor en tan pocas páginas y tan metódicamente ordenadas; y en cuanto á la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, nada suponen, con ser mucho, la severidad de sus grabados, tan recomendables en Historia Sagrada, y la elegancia y solidez en su impresión y encuadernación, al lado de las condiciones pedagógicas que reune.

»Felicito á usted, me felicito á mí y felicito también al Magisterio primario por la publicación de tales joyas, suplicándole no ceje en su propósito de terminar ambas colecciones, las que espero con avidez.

»Lequeitio. GERMÁN MONEO.»

«Examinadas las nuevas obras ALBORES DE LA ENSEÑANZA y BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, son, en mi humilde opinión, de trascendental importancia, tanto por la sencillez, corrección y amenidad de su estilo, exactitud en la exposición de los hechos y enlace de las narraciones, cuanto por los numerosos grabados con que se hallan adornadas, los cuales favorecen la adquisición de conocimientos, los hacen más duraderos en las tiernas inteligencias y atienden á la cultura estética del educando. Si á esto se añade que el plan á que están sujetas es completamente pedagógico, puesto que en él se cuida de que los conocimientos sean comprensivos y tengan el carácter racional que les asigna la Pedagogía, evitando el intelectualismo memorista que tanto perjudica á la educación integral y armónica, las dos obritas están llamadas á ser, entre los libros de texto, las preferidas por el Magisterio.

»La parte material está juzgada con sólo saber es usted quien las edita.

»Ventas con Peña Aguilera. JUAN DÍAZ Y GÓMEZ.»

«He leído los tomos primeros de ALBORES DE LA ENSEÑANZA y BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS.

»En cuanto al primero de estos libros, me parece muy bien pensado para niños de corta edad; pero donde á mi humilde juicio ha estado usted acertadísimo, donde ha hecho usted un verdadero derroche de ingenio, de paciencia y de conocimientos pedagógicos, y ha demostrado su competencia en cuestiones de educación, es en la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS.

»Nada hay que hablar de la doctrina contenida en el libro; y en cuanto á su forma, sencilla, correcta, de mérito indiscutible, está hecha con verdadero deseo de seguir las corrientes pedagógicas modernas, y seguramente llenará cierto vacío que vengo notando en muchos de los libros que he leído, algunos de los cuales suelen pecar por incorrección en el lenguaje, no pocos por incompletos en la exposición de su doctrina, varios por la sequedad de su estilo, y muchos por su excesiva concisión.

»Seguro, segurísimo estoy de que, sabiendo hacer uso de ella, su BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS dará todos los resultados apetecibles y llenará cumplidamente los deseos de usted al escribirla; yo la considero hoy por hoy insustituíble, dada la tendencia á generalizar el procedimiento intuitivo y el orden cíclico en la enseñanza.

»Rasillo de Cameros. JOSÉ B. MORALES.»

«Es la obra ALBORES DE LA ENSEÑANZA, según se advierte en su primer tomo, reproducción por separado de cuanto contiene la ENCICLOPEDIA PARA NIÑOS. Cuantos elogios se le han tributado á tan acabada obra son perfectamente aplicables á estas partes integrantes de aquélla.

»En cuanto á la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, á juzgar por su primer tomo, bastaría esta obra por sí sola, si no hubiese ya otras muchas, para acreditar á su autor como hombre conocedor de la enseñanza primaria, de sus necesidades y de la manera de remediarlas, por cuanto estos libritos, al contestar de un modo tan magistral, sencillo y preciso, á todos los temas comprendidos en los programas de ingreso en las Normales, llenan uno de los más grandes vacíos que hoy encontraban nuestros escolares.

»Tengo por muy útil y conveniente el plan que preside en dicha obra, por cuya publicación le felicito.

»Astorga. JUAN SÁNCHEZ HERNÁNDEZ.»

«He examinado con algún detenimiento el librito de *Historia Sagrada* (primer tomo de la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS publicada por el Sr. Calleja, y declaro:

»Que el contenido histórico es muy semejante al de la *Historia Bíblica* de Businger, de texto en la Normal Central y en el Instituto del Cardenal Cisneros de esta corte, lo cual constituye un elogio; que la exposición se ha hecho con gran habilidad pedagógica y con mucha claridad, disponiéndola de una manera que pueda servir, á la vez que de ameno libro de lectura, de *socorrido* libro de texto para las escuelas en que los usen, á cuyo fin lleva cada página un pequeño interrogatorio y cada capítulo un breve resumen discretamente formulados; que los grabados, la tipografía y la encuadernación son de lo mejor (quizá lo mejor) que la casa Calleja ha ofrecido al público en esta clase de libros, y sabido es que esta Casa trabaja de modo, no diré insuperable (porque de eso no cabe hablar, y la misma Casa probará tal vez muy pronto que puede superarse: ¿quién limita el progreso?), pero sí se puede afirmar con verdad que no ha sido superada ni aun igualada por ninguna otra casa editorial española.

»Madrid. MANUEL POLO DE LA T. TORIBIO.»

«Con el título de BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS ha empezado á publicar el Sr. Calleja una serie de obras destinadas á la educación y enseñanza de la juventud.

»El tomo primero, que trata de *Historia Sagrada*, es un precioso libro de 238 páginas en 8.º, editado con el gusto y esmero proverbiales en esta Casa.

»Entre las reformas adoptadas por el Sr. Calleja en su libro, descuella la supresión del diálogo. Las preguntas se hallan al pie de cada página, constituyendo así por capítulos el programa de la asignatura.

»Pero la novedad más importante que, á nuestro juicio, contiene el libro, es un resumen que de la doctrina expuesta en cada capítulo hay al terminarle. En virtud de este procedimiento, puede el maestro auxiliarse del mencionado libro para la enseñanza de la lectura razonada y para enseñar á estudiar á los alumnos, desarrollando al mismo tiempo sus facultades intelectuales.

»Para obtener este resultado pueden hacer los niños el resumen de lo que lean y compararlo con el escrito al final del capítulo. Así conseguiremos formar hombres inteligentes y desterrar la rutina, que tantos papagayos produce.

»Damos las gracias al Sr. Calleja por el donativo que nos ha hecho de su libro, y esperamos con impaciencia el término de la empresa que con tanto entusiasmo ha emprendido.

»Madrid. JOSÉ MARTÍN OSORIO.»

«Minuciosamente he leído las dos obritas de Aritmética, correspondientes al grado elemental y al grado superior de la primera enseñanza; una y otra me han causado singular placer, especialmente la de BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS; y aunque mi insuficiencia no me permita hacer apreciaciones exactas acerca del mérito de una obra de educación, sin embargo, he de manifestar á usted que en las que se trata todo está, á mi juicio, admirablemente pensado y trazado de mano maestra; método rigurosamente didáctico, cual corresponde á una ciencia del grupo de las *exactas;* exposición sencilla, completa, en la medida necesaria y llena de atractivo, merced á los abundantes ejemplos y curiosos problemas que ilustran sus diferentes capítulos, despojando así al estudio de esa aridez que con tanta frecuencia se ofrece en obras de la misma clase, donde las aplicaciones prácticas deben estar puestas á contribución, á juzgar por el cuidado que, al parecer, se pone en omitirlas; innovaciones y detalles de gran utilidad con la introducción de los resúmenes expuestos al final de cada capítulo y los interrogatorios estampados al pie de cada plana; condiciones todas justas de gran precio desde el punto de vista pedagógico, y que hacen de dichas obritas un modelo de libros para la enseñanza primaria; por último, referente á las condiciones materiales, cuanto se diga resultaría pálido ante la palpable realidad.

»Santibáñez Zarzaguda. JUAN M. ROBLEDO.»

«En mi poder el segundo tomo de ALBORES DE LA ENSEÑANZA y tercero de BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, aprovecho esta ocasión para manifestarle que si los tomos primero y segundo fueron, por mi parte, objeto de elogios merecidísimos, no lo son menos el segundo y tercero; no sólo por su índole, esencialmente metódica, sino por la doctrina verdaderamente filosófica en que ambas están calcadas, y los resúmenes tan fáciles y sencillos á la tierna infancia, expuestos al final de cada capítulo, los cuales simplifican de una manera prodigiosa el estudio fundamental de los principios elementales del lenguaje.

»Una vez más tengo la satisfacción de felicitar á usted por tan cultas producciones, que, sin duda alguna, serán acogidas por el Magisterio con el mismo entusiasmo que las demás publicaciones de esa importante Casa.

»Villahoz. VÍCTOR JIMÉNEZ.»

«Con sumo gusto he recibido los tomos tercero de ALBORES DE LA ENSEÑANZA y cuarto de BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS, no pudiendo menos de dar á ustedes gracias muy sinceras y la más cordial enhorabuena por sus nuevas y hermosísimas obras; asegurándole que si los tomos que le faltan publicar reunen las condiciones que los dados á luz, no tardará usted en recoger exquisito fruto de su penoso trabajo.

»Una de las ventajas que, á mi juicio, poseen las expresadas obras comparadas con las de otros autores, es la de estar en un todo ajustadas á los programas oficiales de ingreso en las Normales.

»Nada le digo respecto á la impresión, papel y encuadernación de esos libros, pues todo el Magisterio español tiene ya por proverbial que las obras por usted publicadas reunen excelentes condiciones materiales.

»Guzmán. ANASTASIO RAMÍREZ.»

«Quisiera expresarle mi entusiasmo; pero ¿qué podré decirle de su nueva publicación, tomo cuarto de la BIBLIOTECA DE LAS ESCUELAS? Todo cuanto yo pudiera decirle sería escaso en comparación de su mérito artístico y literario, y otro entendimiento más claro que el mío podrá hacerle la justicia que se merece; pero, no obstante, en mi humilde opinión, no se puede poner en manos de los niños una *Aritmética* más clara ni más acabada, ni plan de mejores resultados, y desde luego queda adoptado de texto en la escuela de mi dirección.

»Palazuelos de la Sierra. LINO BARBERO.»
