PROBLEMA XXXII.

672. Se tienen tres ingredientes que se han de mezclar, cuyos precios son dados, y además está dada la cantidad de uno de ellos; se pide determinar las partes de los otros dos, para que la mezcla salga á un precio medio dado.

Supóngase que los precios de los ingredientes y de la mezcla son respectivamente reales 150, 125, 115, 140 por cada arroba, y que la cantidad dada del primer ingrediente es 9 arrobas. Llámense x, y las respectivas partes del segundo y tercer ingrediente que entran en la mezcla; y por la condicion del Problema se tendrá $150 \times 9 + 125 \times x + 115 \times y = (9 + x + y) \times 140$, ó bien $1350 + 125x + 115y = 1260 + 140x + 140y$, de donde resulta ser $18 = 3x + 5y$, y $x = \frac{18 - 5y}{3}$. Por tanto el Problema propuesto es indeterminado, y se resuelve de infinitos modos. Por exemplo, si se supone $y = 1$, será $x = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$, esto es si se mezclan 9 arrobas del primer ingrediente, $4\frac{1}{3}$ del segundo, y una del tercero, la mezcla que resulta valdrá á 140 reales por arroba: si se supone $y = 2$, será $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$: si se supone $y = 3$,

será $x = 1$: ahora dando á la y valores quebrados propios, se tendran otros tantos valores de la x ; y respecto á que los primeros pueden ser en número infinito, lo serán igualmente los segundos. Pero si se quiere que los valores de x, y sean enteros y positivos, el Problema propuesto no se puede resolver de infinitos modos, como ahora se hará ver. Porque es $x = \frac{18 - 5y}{3}$, será tambien $x = 6 - y - \frac{2y}{3}$: de la primera equacion resulta evidentemente que y no podrá ser mayor que 3, para que x sea número positivo ; y de la segunda equacion resulta que deberá ser y igual á 3, para que x sea número entero. Por tanto haciendo $y = 3$, será $x = 1$; y en este único caso se podrá resolver el Problema propuesto en números enteros y positivos.

ESCOLIO.

673. Los dos Problemas antecedentes manifiestan el método que se ha de seguir para la resolucion de todas aquellas qüestiones, en quienes son dados los precios de tres ó mas ingredientes que se han de mezclar, y además la cantidad de alguno de ellos, y se pide determinar las partes de los demás, para que la mezcla valga á un precio medio dado.

PROBLEMA XXXIII.

674. Dados el valor del oro y él de la plata, se pide determinar las cantidades de uno y otro metal para formar una cantidad dada de mixto cuyo valor sea tambien dado.

Llámense, a el valor de una libra de oro, b él de una libra de plata, c el valor de una libra de mixto, d la cantidad dada del mixto, y x, y las cantidades de oro y plata que entran en el mixto d. Porque una libra de oro vale a, la cantidad x del mismo oro valdrá $a\,x$: por igual razon será $b\,y$ el valor de la cantidad y de plata, y $c\,d$ el valor del mixto d. Ahora respecto á que las partes x, y han de componer la cantidad d del mixto, será $x+y=d$; y porque los valores de dichas partes han de ser iguales á él del mixto d, se tendrá tambien $a\,x+b\,y=c\,d$. Multiplicada la primera equacion por a, y despues restada de la segunda, será $b\,y-a\,y=c\,d-a\,d$, de donde resulta ser $y=\frac{a\,d-c\,d}{a-b}$: tambien multiplicada la primera equacion por b, y restada de la segunda, se tendrá $a\,x-b\,x=c\,d-b\,d$, de donde $x=\frac{c\,d-b\,d}{a-b}$.

PROBLEMA XXXIV.

675. Se tienen tres ingredientes que se han de

mezclar, cuyos precios son dados; se pide determinar la parte de ellos que se necesita para formar una cantidad dada de mixto á un precio dado.

Supóngase que una arroba de los ingredientes y del mixto vale respectivamente 150, 125, 115, 140, y que el mixto debe ser 24 arrobas. Llámense x, y las respectivas partes de los dos primeros ingredientes que entran en dicho mixto; y será la parte del tercer ingrediente igual á $24 - x - y$. Esto supuesto, se tendrá por la condicion del Problema la equacion $150 \times x + 125 \times y + 115 \times (24 - x - y) = 24 \times 140$, ó bien $150x + 125y + 2760 - 115x - 115y = 3360$, de donde resulta ser $y = \frac{600 - 35x}{10} = 60 - 3x - \frac{x}{2}$. Por tanto el Problema propuesto es indeterminado; y si se piden los valores de x, y en números enteros y positivos, se deberá hacer x igual á 2 ó á un multíplice de 2, hasta que no sea mayor que 16: en conseqüencia si se supone sucesivamente $x = 2, 4$, &c. los valores correspondientes de y serán como se sigue.

$x = 2, 4, 6, \ldots 16$

$y = 53, 46, 39, \ldots 4$

ESCOLIO.

676. Si los ingredientes que entran en la mez-

cla son 4, 5, &c. y están dados sus precios, como tambien él de la mezcla, y además la cantidad de ella y de alguno de los ingredientes; con método semejante á él del Problema antecedente se hallarán las partes de los demás ingredientes para formar la cantidad dada de la mezcla al precio dado.

PROBLEMA XXXV.

677. Hallar dos números enteros y positivos, de suerte que multiplicado el primero por 33, y el segundo por 59, la diferencia entre estos dos productos sea 76.

Llámese x el primer número, y el segundo y: será por la condicion del Problema $33x = 59y + 76$, de donde resulta ser $x = \frac{59y + 76}{33}$. Por tanto el Problema propuesto es semideterminado, respecto á que los números x, y deben ser enteros y positivos. Porque es $x = \frac{59y + 76}{33}$, será tambien

$$(A)\ x = y + 2 + \frac{10 + 26y}{33} = y + 2 + 2 \times \frac{5 + 13y}{33}:$$

como debe ser x número entero y positivo, tambien la fraccion $\frac{5 + 13y}{33}$ lo deberá ser. Supóngase esta fraccion igual al número entero p, esto es $p = \frac{5 + 13y}{33}$; por consiguiente será $33p = 5 + 13y$,

de donde resulta ser $(B)\ y = \frac{33p-5}{13} = 2p + \frac{7p-5}{13}$: como y debe ser número entero y positivo, tambien lo deberá ser $\frac{7p-5}{13}$. Supóngase esta fraccion igual al número entero y positivo q, esto es $q = \frac{7p-5}{13}$; por consiguiente será $13q = 7p - 5$, de donde resulta ser $(C)\ p = \frac{13q+5}{7} = q + \frac{6q+5}{7}$. Supóngase $\frac{6q+5}{7} = r$; será $6q + 5 = 7r$, y $(D)\ q = \frac{7r-5}{6} = r + \frac{r-5}{6}$. Finalmente supóngase $\frac{r-5}{6} = t$; será $r - 5 = 6t$, y $(E)\ r = 6t + 5$. Hágase ahora $t = o$; y por medio de las equaciones $(E)\ (D)\ (C)\ (B)\ (A)$ se hallarán sucesivamente los valores de r, q, p, y, x, esto es, $r = 5$, $q = 5$, $p = 10$, $y = 25$, $x = 47$. Despues hágase $t = 1$, y por medio de dichas equaciones se hallará ser $r = 11$, $q = 12$, $p = 23$, $y = 58$, $x = 106$: y así sucesivamente como se manifiesta en la siguiente tabla.

$t =$	o,	1,	2,	3, &c.
$r =$	5,	11,	17,	23, &c.
$q =$	5,	12,	19,	26, &c.
$p =$	10,	23,	36,	49, &c.
$y =$	25,	58,	91,	124, &c.
$x =$	47,	106,	165,	224, &c.

Respecto á que los valores de x, y están en progresion aritmética, será facil de continuar la série de estos valores que resuelven la qüestion propuesta.

PROBLEMA XXXVI.

678. Hallar un número entero y positivo, que partido por 15 dé por resíduo 7, y partido por 23 dé por resíduo 11.

Llámense, x el número que se busca, y el primer quociente, z el segundo: luego por las condiciones del Problema se tendrán las equaciones $\frac{x}{15} = y + \frac{7}{15}$, $\frac{x}{23} = z + \frac{11}{23}$, de las quales resulta ser (A) $x = 15y + 7$, $x = 23z + 11$; por consiguiente $15y + 7 = 23z + 11$, ó bien $15y = 23z + 4$; y partiendo por 15, se tendrá $y = \frac{23z + 4}{15}$. Por tanto el Problema propuesto es indeterminado; pero debiendo ser los números y, z enteros y positivos, pertenecerá á la clase de los semideterminados. Porque es $y = \frac{23z + 4}{15}$, será tambien (B) $y = z + \frac{8z + 4}{15} = z + 4 \times \frac{2z + 1}{15}$. Supóngase $\frac{2z + 1}{15} = p$, y se tendrá $2z + 1 = 15p$, de donde (C) $z = \frac{15p - 1}{2} = 7p + \frac{p - 1}{2}$. Ahora su-

póngase $\frac{p-1}{2} = q$, y resultará $p - 1 = 2q$, de donde $p = 2q + 1$. Si en esta equacion se substituyen en lugar de q los números 0, 1, 2, &c. se hallarán los que corresponden á p, y sucesivamente por medio de las equaciones $(C)(B)(A)$ los valores de z, y, x, como manifiesta la siguiente tabla.

$q =$	0,	1,	2,	&c.
$p =$	1,	3,	5,	&c.
$z =$	7,	22,	37,	&c.
$y =$	11,	34,	57,	&c.
$x =$	172,	517,	862,	&c.

PROBLEMA XXXVII.

679. Hallar un número entero y positivo, que partido por 28 dé por resíduo 8, y partido por 19 dé por resíduo 10.

Llámense, x el número que se busca, y el primer quociente, z el segundo: luego por las condiciones del Problema se tendrán las equaciones $\frac{x}{28} = y + \frac{8}{28}$, $\frac{x}{19} = z + \frac{10}{19}$, de las quales resulta ser $(A)\ x = 28y + 8$, $x = 19z + 10$; por consiguiente $28y + 8 = 19z + 10$, ó bien $19z = 28y - 2$, de donde $(B)\ z = \frac{28y - 2}{19} = 2 \times \frac{14y - 1}{19}$.

Supóngase 1°. $\frac{14y - 1}{19} = p$, y será $14y - 1 = 19p$;

por consiguiente (*C*) $y = \frac{19p+1}{14} = p + \frac{5p+1}{14}$: 2°. $\frac{5p+1}{14} = q$, y será $5p + 1 = 14q$; por consiguiente (*D*) $p = \frac{14q-1}{5} = 2q + \frac{4q-1}{5}$: 3°. $\frac{4q-1}{5} = r$, y será $4q - 1 = 5r$; por consiguiente (*E*) $q = \frac{5r+1}{4} = r + \frac{r+1}{4}$: 4°. $\frac{r+1}{4} = t$, y será $r + 1 = 4t$, de donde (*F*) $r = 4t - 1$. Ahora por medio de las equaciones (*F*) (*E*) (*D*) (*C*) (*B*) (*A*) se hallarán los valores de r, q, p, y, z, x, substituyendo sucesivamente en lugar de t los números 1, 2, 3, 4, &c.

$t =$	1,	2,	3, &c.
$r =$	3,	7,	11, &c.
$q =$	4,	9,	14, &c.
$p =$	11,	25,	39, &c.
$y =$	15,	34,	53, &c.
$z =$	22,	50,	78, &c.
$x =$	428,	960,	1492, &c.

Si se añade otra condicion al Problema propuesto, por exemplo, que el número partido por 13 dé por resíduo 7, se hallará dicho número del modo siguiente. Es evidente que si á qualquier valor hallado de x, como 428, se añade un número que se parte exâctamente por 28 y 19, la suma parti-

da por 28 y 19 dará igualmente los resíduos 8 y 10. Ahora qualquier número que se parte exâctamente por 28 y 19, puede expresarse por $28 \times 19 \times s$, siendo s número entero: luego la tercera condicion del Problema será expresada por la equacion $(A)\ \frac{u}{13} = \frac{28 \times 19 \times s + 428}{13} = t + \frac{7}{13}$, nombrando u el número que se busca, y t el quociente de la division; por consiguiente será $28 \times 19 \times s + 428 = 13t + 7$, de donde resulta ser (B) $t = \frac{28 \times 19 \times s + 421}{13} = 40s + 32 + \frac{12s + 5}{13}$. Supóngase 1°. $\frac{12s + 5}{13} = m$, y será $12s + 5 = 13m$; por consiguiente $(C)\ s = \frac{13m - 5}{12} = m + \frac{m - 5}{12}$: 2°. $\frac{m - 5}{12} = n$, y será $m - 5 = 12n$; por consiguiente $(D)\ m = 12n + 5$. Dando ahora valores á n, se hallarán los que corresponden á m, s, t, u por medio de las equaciones $(D)(C)(B)(A)$ y serán como se sigue.

$n =$	0,	1,	2, &c.
$m =$	5,	17,	29, &c.
$s =$	5,	18,	31, &c.
$t =$	237,	769,	1301, &c.
$u =$	3088,	10004,	16920, &c.

PROBLEMA XXXVIII.

680. Hallar dos números, que tengan iguales la suma, el producto, y la diferencia de sus quadrados.

Llámense, x el número mayor, y el menor. Por las condiciones del Problema se tendrán las equaciones $x^2 - y^2 = x + y$, $x + y = xy$; partiendo la primera por $x + y$, se tendrá $x - y = 1$, de donde (A) $x = y + 1$; y substituyendo el valor de x en la segunda de dichas equaciones, resultará $y + 1 + y = (y + 1) \times y$, ó bien $2y + 1 = y^2 + y$; por consiguiente $y^2 - y = 1$ equacion del segundo grado, que resuelta segun el método explicado dá $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; pero es $x = y + 1$: luego será $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Por tanto los dos números que se buscan, son $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, ó bien $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

PROBLEMA XXXIX.

681. Cierto número de hombres concurre á ver un Espectáculo, y entre todos pagan 48 reales, y respecto á que 10 de ellos no pagan, cada uno de los otros gasta 20 reales mas de los que hubiera gas-

tado ; se pide determinar el número de todos los hombres.

Llámese x el número de los hombres que fueron juntos á ver el Espectáculo, y será $x - 10$ el número de los que pagaron : luego $\frac{48}{x-10}$ será lo que pagó cada uno de éstos ; pero si todos hubiesen pagado, cada uno habría gastado $\frac{48}{x}$: luego por la condicion del Problema será $\frac{48}{x-10} - \frac{48}{x} = 20$, ó bien $48x - 48x + 480 = 20x^2 - 200x$, de donde resulta ser $x^2 - 10x = 24$, equacion del segundo grado que resuelta dá $x = 12$, $x = -2$. Por tanto el número de los hombres que se busca es 12 solamente, porque la raíz negativa no puede tener uso para resolver el Problema propuesto.

Si en la equacion $\frac{48}{x-10} - \frac{48}{x} = 20$ se muda el signo á x, se tendrá $\frac{48}{x} - \frac{48}{x+10} = 20$, cuya raíz positiva es 2, y resuelve la qüestion siguiente : cierto número de hombres concurre á ver un Espectáculo que cuesta 48 reales, y habiéndose agregado á ellos 10 mas, pagó cada uno de los primeros 20 reales menos que hubiera pagado, si no se hubieran agregado los 10 ; se pide determinar dicho número de hombres.

PROBLEMA XL.

682. Dada la diferencia de dos nùmeros y su producto, determinar dichos dos números.

Sea a la diferencia de los números que se buscan, y b el producto de ellos. Llámese x el número mas pequeño, y será $x+a$ el mayor número: luego por la condicion del Problema se tendrá $x \times (x+a) = b$, ó bien $x^2 + a\,x = b$, equacion del segundo grado cuyas raíces son $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$. Por tanto los dos números que se buscan son $-\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$, $\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$, ó bien $-\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$, $\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$. Si es $a = 4$, $b = 21$, serán dichos dos números 3, 7, como tambien -3, -7.

PROBLEMA XLI.

683. Dada la suma de dos números y la de sus quadrados, determinar dichos dos números.

Sea a la suma de los números, y b la suma de sus quadrados. Llámese x el mayor de dichos números, y será $a - x$ el menor de ellos: luego por la condicion del Problema se tendrá $x^2 + (a-x)^2 = b$, ó bien $x^2 + a^2 - 2\,a\,x + x^2 = b$, equacion

del segundo grado que resuelta dá $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{4})}$. Por tanto los dos números que se buscan son $\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{4})}$, $\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{4})}$. Si es $b = 68$, y $a = 6$, serán los dos números en este caso 8, -2: si es $b = 100$, $a = 16$, serán los dos números $8 + \sqrt{-14}$, $8 - \sqrt{-14}$; y por ser estos números imaginarios, el Problema será imposible en este caso, esto es, no se podrán hallar dos números reales, cuya suma sea 16, y la de sus quadrados sea 100.

PROBLEMA XLII.

684. Dividir un número dado en dos partes tales, que su producto sea igual á qualquier otro número dado.

Sea a el número que se ha de dividir en dos partes. Llámese x la mayor de dichas partes, y será $a - x$ la menor de ellas: luego por la condicion del Problema será $x \times (a - x) = b$, ó bien $ax - x^2 = b$, y multiplicando uno y otro miembro por -1, se tendrá $x^2 - ax = -b$, cuyas raíces son $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} - b)}$. Por tanto las dos partes del número a que se buscan son $\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4}$

$-b)$, $\frac{a}{2}-\sqrt{(\frac{a^2}{4}-b)}$. Si el número que se ha de dividir en dos partes es 14, y el producto de ellas debe ser 13, serán las partes que se buscan 13, 1.

PROBLEMA XLIII.

685. Dada la suma de dos números y la de sus cubos, determinar los números.

Llámense, a la suma de los números que se buscán, b la suma de los cubos de los mismos números, x el mayor de éstos; y será $a-x$ el mas pequeño: luego por la condicion del Problema se tendrá $x^3+(a-x)^3=b$, ó bien $x^3+a^3-3a^2x+3ax^2-x^3=b$, equacion que se reduce á la quadrada $x^2-ax=\frac{b-a^3}{3a}$, cuyas raíces son $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{b-a^3}{3a}+\frac{a^2}{4})}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12})}$. Por tanto los dos números que se buscan son $\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12})}$, $\frac{a}{2}-\sqrt{(\frac{b}{3a}-\frac{a^2}{12})}$. Si es $a=12$, y $b=5040$, en este caso los números que resuelven el Problema propuesto serán $6+\sqrt{128}$, $6-\sqrt{128}$.

PROBLEMA XLIV.

686. Dividir un número dado en dos partes,

de modo que su producto sea á la suma de sus quadrados en la razon dada de m á n.

Llámense, a el número dado, x la mayor de las partes en que se ha de dividir dicho número; y será $a - x$ la parte mas pequeña: luego por la condicion del Problema será $x \times (a - x) : x^2 + (a - x)^2 = m : n$, ó bien $ax - x^2 : x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = m : n$; multiplicando los antecedentes por 2, será tambien $2ax - 2x^2 : 2x^2 + a^2 - 2ax = 2m : n$; y $a^2 : 2ax - 2x^2 = 2m + n : 2m$; por consiguiente $2ax - 2x^2 = \frac{2ma^2}{2m+n}$, ó bien $x^2 - ax = -\frac{ma^2}{2m+n}$, equacion del segundo grado cuyas raíces son $x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{n-2m}{n+2m}}$: luego las partes que se buscan serán $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{n-2m}{n+2m}}$, $\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{n-2m}{n+2m}}$. Si es $a = 80$, $n = 9$, $m = 2$, las partes en que se ha de dividir el número 80 serán $40 + 40\sqrt{\frac{5}{13}}$, $40 - 40\sqrt{\frac{5}{13}}$.

PROBLEMA XLV.

687. Dada la suma de tres números, que están en progresion geométrica, y la suma de sus quadrados, determinar dichos números.

Llámense x, y, z los números que se buscan, a la suma de ellos, y b la suma de los quadrados: luego por la condicion del Problema se tendrán las tres equaciones siguientes (de las quales la tercera deriva de la proporcion $x : y = y : z$) $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b$, $xz=y^2$: elevando al quadrado la primera, será $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=a^2$, de quien restando la segunda resulta $2xy+2xz+2yz=a^2-b$; pero $xz=y^2$, y $2xz=2y^2$: luego será $2xy+2yz+2y^2=a^2-b$, ó bien $2y\times(x+z)+2y^2=a^2-b$: y como de la primera equacion resulta ser $x+z=a-y$, será tambien $2y\times(a-y)+2y^2=a^2-b$, de donde $y=\frac{a^2-b}{2a}$. Determinado el valor de y, se hallarán los de x, z por medio de las equaciones $x+y+z=a$, $xz=y^2$: pues substituyendo en ellas dicho valor de y, resultarán las equaciones $x+z=a-\frac{a^2-b}{2a}=\frac{a^2+b}{2a}$, $xz=\frac{(a^2-b)^2}{4a^2}$, que tratadas segun el método enseñado antes, dán $x=\frac{a^2+b}{4a}+\sqrt{\left[\frac{(a^2+b)^2}{16a^2}-\frac{(a^2-b)^2}{4a^2}\right]}$, $z=\frac{a^2+b}{4a}-\sqrt{\left[\frac{(a^2+b)^2}{16a^2}-\frac{(a^2-b)^2}{4a^2}\right]}$.

PROBLEMA XLVI.

688. Dada la suma de dos números, el producto de ellos, y la suma de sus quadrados, determinar dichos números.

Llámense x, y los números que se buscan, a su suma, b el producto, y c la suma de los quadrados de los mismos números: luego por las condiciones del Problema se tendrán las equaciones $x+y=a$, $xy=b$, $x^2+y^2=c$: y respecto á que el número de las equaciones es mayor que él de las incógnitas, el Problema propuesto será mas que determinado, y será posible en el solo caso, de que una de las condiciones sea conseqüencia necesaria de las otras dos: como por exemplo siendo $x+y=a$, $xy=b$, y determinando los valores de x, y, resulte que la suma de los quadrados de éstos sea igual á c. Tratadas las equaciones $x+y=a$, $xy=b$, segun el método enseñado, se hallará ser $x=\frac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$, $y=\frac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$: y en el caso de ser $\left[\frac{a+\sqrt{(a^2-4b)}}{2}\right]^2+\left[\frac{a-\sqrt{(a^2-4b)}}{2}\right]^2=c$ será posible el Problema propuesto. Si se supone $a=12$, $b=11$, $c=122$, será $x=11$, $y=1$; y por ser $x^2+y^2=121+1=c$, será posible el Problema, esto es, los números 11 y 1

tendrán su suma igual á 12, el producto igual á 11, y la suma de los quadrados de los mismos números igual á 122: pero si en lugar de suponer $c = 122$, se hubiese supuesto igual á qualquier otro número, el Problema sería imposible.

PROBLEMA XLVII.

689. Si se forman las séries ÷ 1, 2, 3, 4, 5, &c. ÷ 1, 3, 5, 7, 9, &c. ÷ 1, 4, 7, 10, 13, &c. y así sucesivamente, de modo que todas ellas tengan la unidad por primer término, y sus diferencias sean respectivamente 1,2,3, . . . m; se pide hallar la Suma general de dichas séries, ó lo que es lo mismo el Término general de las séries 1, 3, 6, 10, &c. 1, 4, 9, 16, &c. 1, 5, 12, 22, &c. cuyas diferencias segundas son constantes: los términos de la primera de estas séries se llaman números Triangulares, los de la segunda Quadrados, los de la tercera Pentágonos, y en general Polígonos. Al contrario, dado qualquier número Polígono, se pide determinar el número n de términos, que se llama Lado del mismo Polígono.

I. En la fórmula $An + Bn^2$ de la suma general de qualquier série aritmética substitúyanse sucesivamente los números 1, 2 en lugar de n, y se tendrán el primero y la suma de los dos primeros tér-

minos de la misma série, esto es, $A+B$, $2A+4B$; compárense estas cantidades con las respectivas de qualquiera série de las propuestas, y resultarán las equaciones $A+B=1$, $2A+4B=m+2$, de donde se hallará ser $B=\frac{m}{2}$, $A=\frac{2-m}{2}$: luego la suma general de qualquiera de las séries propuestas, ó bien el término general de qualquiera série de números polígonos, será $(A)\ \frac{m}{2}\times n^2+\frac{2-m}{2}\times n$.

II. Si dicha suma general está dada, y se supone igual á la cantidad a, se tendrá $\frac{m}{2}\times n^2+\frac{2-m}{2}\times n=a$: resolviendo esta equacion, en quien se ha de considerar n como incógnita, se hallará el número que se busca $(B)\ n=\frac{m-2}{2m}+\sqrt{\left[\frac{2a}{m}+\frac{(2-m)^2}{4m^2}\right]}$. Como, por exemplo, si el número dado es triangular é igual á 91, será $m=1$, $a=91$, y hechas estas substituciones en la equacion (B) se hallará el lado del mismo triángulo, esto es $n=13$: asimismo si el numero dado es pentágono é igual á 22, será $m=3$, $a=22$, y el lado n del mismo pentágono será 4: tambien si el número dado es hexágono é igual á

1225, será $m = 4$, $a = 1225$, y $n = 25$.

COROLARIO.

690. Si en la suma general (*A*) de las referidas séries se substituyen sucesivamente en lugar de *m* los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. se tendrán los términos generales de los números triangulares, quadrados, pentágonos, hexágonos, &c. como manifiesta la siguiente tabla.

Números	*Términos generales*
Triangulares 1, 3, 6, 10, &c.	$\frac{n \times (n+1)}{2}$
Quadrados 1, 4, 9, 16, &c.	n^2
Pentágonos 1, 5, 12, 22, &c.	$\frac{n \times (3n-1)}{2}$
Hexágonos 1, 6, 15, 28, &c.	$\frac{n \times (4n-2)}{2}$
Heptágonos 1, 7, 18, 34, &c.	$\frac{n \times (5n-3)}{2}$
Octágonos 1, 8, 21, 40, &c.	$n \times (3n-2)$
&c.	&c.

PROBLEMA XLVIII.

691. Si se forman las séries 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c. de las quales la segunda deriva de la primera sumando sucesiva-

mente sus términos, la tercera de la segunda haciendo igualmente la suma de sus términos, y así sucesivamente; se pide hallar los Términos generales de dichas séries de números, que se llaman respectivamente Figurados del primer órden ó constantes, del segundo órden ó naturales, del tercer órden ó triangulares, del quarto órden ó piramidales, del quinto órden ó triángulo-piramidales, &c. Al contrario, dado qualquier número figurado, se pide determinar el número n de términos.

I. Teniendo las séries segunda, tercera, quarta, &c. las diferencias constantes primera, segunda, tercera, &c. las fórmulas del término general de las mismas séries serán respectivamente (546) $A+Bn$, $A+Bn+Cn^2$, $A+Bn+Cn^2+Dn^3$, y así sucesivamente; y por medio de ellas se hallarán los términos generales que se buscan, y serán como se sigue.

Números figurados		*Términos generales*
Naturales	1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.	n
Triangulares	1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.	$\frac{n\times(n+1)}{2}$
Piramidales	1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.	$\frac{n.(n+1).(n+2)}{2\times3}$
Del 5º órden	1, 5, 15, 35, 70, 126, &c.	$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{2\times3.4}$
Del 6º órden	1, 6, 21, 56, 126, 252, &c.	$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4)}{2\times3\times4\times5}$
&c.		&c.

II. Si el término general de dichas séries está dado, y se supone igual á la cantidad a, se tendrán las equaciones $n = a$, $\frac{n \times (n+1)}{2} = a$, $\frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{2 \times 3} = a$, &c. y resolviéndolas, se hallarán los respectivos valores del número n de terminos.

ESCOLIO.

692. El Problema antecedente puede aplicarse para determinar las balas de una pila triangular: pues cada órden de balas paralelo á la base tiene (691) la expresion $\frac{n \times (n+1)}{2}$, porque dichas balas en cada órden forman una série aritmética que empieza por la unidad, y su suma es siempre un número triangular: luego la suma de estos números triangulares formará un número piramidal, cuya expresion es $\frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{2 \times 3}$. Al contrario, si está dado el número total a de las balas contenidas en una pila triangular, se hallará el valor de n resolviendo la equacion $\frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{2 \times 3} = a$, ó bien $n^3 + 3n^2 + 2n = 6a$. Pero sin resolver la misma equacion, se podrá hallar el valor de n en fuerza del raciocinio siguiente: por ser $(n+1)^3 > 6a$, y $(n-1)^3 < 6a$, será $n+1 > \sqrt[3]{6a}$, y $n-1 < \sqrt[3]{6a}$:

luego la raíz cúbica de $6a$ no podrá diferir de n en una unidad: y como n ha de ser número entero, será n la raíz cúbica del mayor cubo contenido en $6a$.

PROBLEMA XLIX.

693. Dada la série ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. se propone determinar la suma general de las séries que resultan, elevando sucesivamente dichos términos al quadrado, al cubo, &c. esto es, la suma general de las séries 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c.

I. Teniendo la série 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. las segundas diferencias constantes, será la fórmula de su suma general $An + Bn^2 + Cn^3$; y por medio de esta fórmula se hallará segun el método enseñado que la suma general de dicha série es $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$, ó bien $\frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$.

II. Siendo la série 1, 8, 27, 64, 125, &c. de terceras diferencias constantes, la fórmula de la suma general tendrá la expresion $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$; y por medio de ésta se hallará, segun el método enseñado, que la suma general de la série propuesta es $\frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}$, ó bien $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Con el mismo raciocinio se hallarán las sumas

generales de las séries formadas por las quartas, quintas, &c. potestades de los números naturales, advirtiendo que dichas séries tienen las quartas, quintas, &c. diferencias constantes.

ESCOLIO.

694. El Problema antecedente puede aplicarse para determinar el número de balas, que hay en una pila quadrada, conociendo el número de las que se hallan en uno de los lados de la base quadrada de la misma pila: pues ésta se compone de órdenes paralelos á la base, en quienes se contienen tales números de balas que forman la série de los quadrados de los números naturales.

PROBLEMA L.

695. Hallar dos números racionales, cuyos quadrados juntos formen un quadrado perfecto.

Es claro que si al quadrado $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ se añade el quadrado $4x^2y^2$, será la suma $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ un quadrado perfecto: luego los dos números que se buscan serán $x^2 - y^2$, $2xy$, respecto á que los quadrados de estos son juntos iguales al quadrado de $x^2 + y^2$. Si se supone $x=4$, $y=3$, se tendrá $x^2 - y^2 = 16 - 9 = 7$, $2xy = 24$, y $49 + 576 = 625$, quadrado de $x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25$.

PROBLEMA LI.

696. Hallar tres números racionales, de modo que el quadrado de cada uno de ellos junto con los demás números fórmen un número quadrado.

Llámense $x, 2x, 1$ los tres números que se buscan; y por la condicion del Problema deberán ser números quadrados $x^2 + 2x + 1$, $4x^2 + x + 1$, $3x + 1$, de los quales el primero lo es efectivamente. Ahora obsérvese que si se tienen dos quadrados a^2, b^2, y del mayor a^2 se resta el menor b^2, la diferencia $a^2 - b^2$ será igual á $(a+b) \times (a-b)$; por consiguiente la semisuma de estos factores es igual á la raíz del mayor quadrado a^2, y la semidiferencia de ellos es igual á la raíz del menor quadrado b^2. Por tanto si se resta del quadrado $4x^2+x+1$ el quadrado $3x+1$, se tendrá $4x^2-2x$ ó bien $(4x-2)\times x$, y la semisuma de estos factores, esto es $\frac{5x}{2} - 1$ será la raíz del mayor quadrado, y la semidiferencia de los mismos factores, esto es, $\frac{3x}{2} - 1$ será la raíz del menor quadrado; por consiguiente se tendrán las dos equaciones $\frac{25}{4} \times x^2 - 5x + 1 = 4x^2 + x + 1$, $\frac{9}{4} \times x^2 - 3x + 1 = 3x + 1$, de las quales resulta ser $\frac{9}{4} \times x^2 - 6x = o$, y $x = \frac{8}{3}$: luego los nú-

meros x, $2x$, 1, que se buscan, serán respectivamente $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{3}$, 1.

PROBLEMA LII.

697. Dividir la suma de dos quadrados dados en otros dos quadrados, cuyas raíces sean números racionales.

Sean a^2, b^2 los quadrados dados, y x^2, z^2 los dos quadrados que se buscan: luego por la condicion del Problema será (A) $x^2 + z^2 = a^2 + b^2$. Hágase $x = a - y$, $z = yu - b$; por consiguiente será $x^2 = a^2 - 2ay + y^2$, $z^2 = y^2u^2 - 2byu + b^2$. Substituyendo los valores hallados de x^2, z^2 en la equacion (A), se tendrá $a^2 - 2ay + y^2 + y^2u^2 - 2byu + b^2 = a^2 + b^2$, de donde resulta 1^o. $y = o$, y por consiguiente $x = a$, $z = -b$: 2^o. $y = \frac{2a+2bu}{1+u^2}$, y por consiguiente $x = \frac{au^2-a-2bu}{1+u^2}$, $z = \frac{2au+bu^2-b}{1+u^2}$. Por tanto substituyendo en estas expresiones en lugar de u qualquier número racional, se tendrán los valores de x, z, que se buscan.

PROBLEMA LIII.

698. Hallar dos números racionales, de modo que restando del quadrado del uno el producto del

quadrado del otro por el quadrado de un número dado b, el resíduo sea igual á un número dado a.

Sean x, z los dos números que se buscan: luego por la condicion del Problema se tendrá (A) $x^2 - b^2 z^2 = a$. Hágase $x = y - bz$; por consiguiente será $x^2 = y^2 - 2byz + b^2 z^2$. Substituyendo el valor de x^2 en la equacion (A) se tendrá $y^2 - 2byz + b^2z^2 - b^2z^2 = a$; de donde resulta ser $z = \frac{y^2 - a}{2by}$, $x = y - bz = y + \frac{ab - by^2}{2by} = \frac{y^2 + a}{2y}$. Ahora si en estas expresiones se substituye en lugar de y qualquier número racional, se tendrán los valores de x, z, que se buscan.

PROBLEMA LIV.

699. Hallar un número racional que dividido en dos partes, el quadrado de la una parte multiplicada por a, y el producto hecho de la otra parte y de b, fórmen un quadrado perfecto.

Llámense, x el número que se busca, y la parte del mismo número; y será $x - y$ la otra parte: luego por la condicion del Problema será $a^2 y^2 + b \times (x - y)$ un quadrado perfecto, ó bien $y^2 - \frac{by}{a^2} + \frac{bx}{a^2}$; lo que se tendrá suponiendo $\frac{bx}{a^2} = \frac{b^2}{4a^4}$, de donde resulta ser $x = \frac{b}{4a^2}$.

PROBLEMA LV.

700. Hallar dos números racionales, cuya suma fórme un número quadrado, y su raíz sea igual á la suma del quadrado del primer número y del otro número.

Llámense x, y los dos números que se buscan: luego por la condicion del Problema será $x+y=(x^2+y)^2$. Hágase uno y otro miembro de la equacion igual á n^2x^2; y se tendrá $x+y=n^2x^2$, $(x^2+y)^2=n^2x^2$: sacada la raíz quadrada de esta última equacion, será $x^2+y=nx$; pero siendo $x+y=n^2x^2$, será $y=n^2x^2-x$: luego se tendrá $x^2+n^2x^2-x=nx$, de donde resulta ser $x=\frac{n+1}{n^2+1}$, y por consiguiente $y=n^2x^2-x=\frac{n^2\times(n+1)^2}{(n^2+1)^2}-\frac{n+1}{n^2+1}$.

PROBLEMA LVI.

701. Hallar dos números racionales, cuya suma esté con la de sus quadrados en la razon constante de $a:b$.

Llámense x, z los dos números que se buscan: luego por la condicion del Problema será $x+z:x^2+z^2=a:b$, de donde resulta la equacion (A) $bx+bz=ax^2+az^2$. Hágase $z=yx$; y substituído el valor de z en (A), se tendrá $bx+byx$

$= a x^2 + a y^2 x^2$, ó bien $b + by = a x + a y^2 x$, de donde resulta sér $x = \frac{b+by}{a+ay^2}$; y por ser $z = y x$, se tendrá $z = \frac{by+by^2}{a+ay^2}$.

PROBLEMA LVII.

702. Hallar tres números aritméticamente proporcionales, cuya diferencia sea dada, y tambien el producto de dichos números.

Llámense, d la diferencia de la progresion, a el produćto de los tres números que se buscan, y x el número medio entre éstos; por consiguiente serán $x + d$, $x - d$ los dos extremos: luego por la condicion del Problema se tendrá la equacion $(x + d) \times x \times (x - d) = a$, ó bien $x^3 - d^2 x - a = o$. Comparando esta equacion con la de la fórmula (461) $x^3 + p x + q = o$, dá $p = -d^2$, y $q = -a$; pero dicha fórmula tiene la raíz $x = \sqrt[3]{[-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}]} + \sqrt[3]{[-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}]}$: luego la equacion $x^3 - d^2 x - a = o$ tendrá la raíz $x = \sqrt[3]{[\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a^2}{4} - \frac{d^6}{27})}]} + \sqrt[3]{[\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} - \frac{d^6}{27})}]}$. Si se supone $a = 80$, y $d = 3$,

será $x = \sqrt[3]{(40 + \sqrt{1573})} + \sqrt[3]{(40 - \sqrt{1573})}$; y extrayendo las raíces terceras de estos binómios segun el método enseñado (471) se hallará ser $x = 5$: luego los tres números que se buscan serán en este caso $\div$ 8,5,2. En dichas suposiciones las otras dos raíces ó valores de x son imaginarios, por haberse presentado el primero baxo una forma real: pero si se supone $d = 3$, y $a = \frac{190}{27}$, la equacion $x^3 - d^2 x - a = o$ tendrá en este caso sus tres raíces reales, esto es, $x = \frac{10}{3}$, $x = \frac{-5-\sqrt{6}}{3}$, $x = \frac{-5+\sqrt{6}}{3}$; y los números que resolverán la qüestion serán $\div \frac{1}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{19}{3}$; $\div \frac{-14-\sqrt{6}}{3}$, $\frac{-5-\sqrt{6}}{3}$, $\frac{4-\sqrt{6}}{3}$; $\div \frac{-14+\sqrt{6}}{3}$, $\frac{-5+\sqrt{6}}{3}$, $\frac{4+\sqrt{6}}{3}$.

PROBLEMA LVIII.

703. Hallar un número, cuyo cubo añadido al producto del mismo número multiplicado por 9 haga una suma igual á 100.

Sea x el número que se busca, y será por la condicion del Problema $x^3 + 9 \times x = 100$, ó bien $x^3 + 9x - 100 = o$. Comparando esta equacion con la de la fórmula $x^3 + px + q = o$, resulta ser p

$= 9$, $q = -100$; y substituyendo estos valores en la primera raíz de dicha fórmula, se tendrá la de la equacion que resuelve el Problema, esto es, $x = \sqrt[3]{(50+\sqrt{2527})} + \sqrt[3]{(50-\sqrt{2527})}$: extrayendo ahora las raíces terceras de estos binómios segun el método dado, se hallará $x = 4$.

PROBLEMA LIX.

704. Dada la diferencia de dos números, y la suma de sus cubos, hallar dichos dos números.

Llámense, d la mitad de la diferencia de los dos números que se buscan, x la mitad de la suma de ellos, y $2b$ la suma de los cubos; por consiguiente dichos números serán $x+d$, $x-d$: luego por la condicion del Problema se tendrá la equacion $(x+d)^3 + (x-d)^3 = 2b$, ó bien $x^3 + 3dx^2 + 3d^2x + d^3 + x^3 - 3dx^2 + 3d^2x - d^3 = 2b$, que reducida es $2x^3 + 6d^2x = 2b$ ó bien $x^3 + 3d^2x - b = o$. Compárese esta equacion con la de la fórmula $x^3 + px + q = o$, y será $p = 3d^2$, $q = -b$: substituyendo ahora los valores de p, q en la primera raíz de la misma equacion, se tendrá que la mitad de la suma de los números que se buscan, esto es, x es igual á $\sqrt[3]{[\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} + d^6)}]} + \sqrt[3]{[\frac{b}{2}$

$-\sqrt{(\frac{b^2}{4}+d^6)}]$; por consiguiente dichos dos números serán $d+\sqrt[3]{[\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{4}+d^6)}]}+\sqrt[3]{[\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b^2}{4}+d^6)}]}$, $-d+\sqrt[3]{[\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{4}+d^6)}]}+\sqrt[3]{[\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b^2}{4}+d^6)}]}$.

PROBLEMA LX.

705. Dada la suma, y el producto de quatro números en progresion geométrica, hallar dichos números.

Sean $x-y$, $x+y$ los dos términos medios de la progresion que se busca; y serán $\frac{(x-y)^2}{x+y}$, $\frac{(x+y)^2}{x-y}$ los dos extremos. Llámese a la suma de los quatro términos proporcionales, y $64b^2$ su producto: luego por las condiciones del Problema se tendrán las dos equaciones $\frac{(x-y)^2}{x+y}+x-y+x+y+\frac{(x+y)^2}{x-y}=a$, $\frac{(x-y)^2}{x+y}\times(x-y)\times(x+y)\times\frac{(x+y)^2}{x-y}=64b^2$: de éstas resulta ser $1^o.\ (x-y)^3+2x\times(x^2-y^2)+(x+y)^3=a\times(x^2-y^2)$, $2^o.\ (x-y)^2\times(x+y)^2=64b^2$, y extrayendo la raíz quadrada $x^2-y^2=8b$: substituyendo el valor de x^2-y^2 en la primera, será

$(x-y)^3+16bx+(x+y)^3=8ab$, ó bien $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+16bx+x^3+3yx^2+3y^2x+y^3=8ab$, que reducida suministra la equacion (A) $2x^3+6y^2x+16bx=8ab$; pero por ser $x^2-y^2=8b$, será $y^2=x^2-8b$: luego substituyendo el valor de y^2 en (A) resultará $2x^3+6x^3-48bx+16bx=8ab$; y partiendo por 8, será $x^3-4bx=ab$ ó bien (B) $x^3-4bx-ab=o$. Comparando esta equacion con la de la fórmula $x^3+px+q=o$, será $p=-4b$, y $q=-ab$; y substituyendo los valores de p, q en la primera raíz de dicha fórmula, se tendrá la de la equacion (B), esto es $x=\sqrt[3]{[\frac{ab}{2}+\sqrt{(\frac{a^2b^2}{4}-\frac{64b^3}{27})}]}+\sqrt[3]{[\frac{ab}{2}-\sqrt{(\frac{a^2b^2}{4}-\frac{64b^3}{27})}]}$. Si se supone $a=30$, y $64b^2=1024$ ó bien $b=4$, hechas las substituciones en (B) resultará la equacion $x^3-16x-120=o$, cuya raíz $x=6$: y como es $y^2=x^2-8b$, será $y^2=36-32=4$, de donde $y=2$. Por tanto los dos números medios $x-y$, $x+y$ de la progresion que se busca son 4, 8: luego los dos extremos serán 2, 16, esto es, $\div\div$ 2, 4, 8, 16, que son los quatro números cuyo producto es igual á 1024, y su suma es 30. Las otras dos raíces de la equacion $x^3-16x-120=o$ son imaginarias.

PROBLEMA LXI.

706. Se ponen 1000 pesos en cierto comercio, y añadiendo todos los años los réditos al caudal se halla despues de tres años la ganancia de 200 pesos; se pide determinar á quánto por 100 sube la ganancia.

Llámese x la ganancia que se busca: y para resolver el Problema en general, háganse $1000 = a$, $1000 + 200 = b$. Porque 100 vale $100 + x$ al cabo de un año, el caudal a valdrá $\frac{a \times (100 + x)}{100}$ al fin del mismo tiempo; asímismo si 100 dá $100+x$, $\frac{a \times (100 + x)}{100}$ dará $\frac{a \times (100 + x)^2}{100^2}$, que será el caudal al cabo de dos años. Con el mismo método se hallará que el caudal al cabo de tres años debe ser $\frac{a \times (100 + x)^3}{100^3}$: luego por la condicion del Problema se tendrá la equacion $\frac{a \times (100 + x)^3}{100^3} = b$, ó bien $a \times (100 + x)^3 = 1000000\, b$: y haciendo $100 + x = z$, y partiendo por a, será $z^3 = \frac{1000000\, b}{a}$, de donde $z = 100 \times \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$; pero $100 + x = z$, y $x = z - 100$: luego será $x = -100 + 100 \times \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Ahora substituyendo en esta

equacion los valores de b, a, resultará $x = -100 + 100 \times \sqrt[3]{\frac{1200}{1000}} = -100 + 10 \times \sqrt[3]{1200} = -100 + 10 \times 10$, 6 próximamente, de donde $x = 6$.

PROBLEMA LXII.

707. Dada la suma de cinco números en progresion geométrica, y la suma de sus cubos, determinar dichos números.

Sean x, y, z los tres medios de la progresion que se busca; y serán $\frac{x^2}{y}$, $\frac{z^2}{y}$ los dos extremos de ella. Llámese a la suma de los cinco números en progresion geométrica, y b la suma de sus cubos. Esto supuesto, se tendrán por las condiciones del Problema las equaciones $\frac{x^2}{y} + x + y + z + \frac{z^2}{y} = a$, $\frac{x^6}{y^3} + x^3 + y^3 + z^3 + \frac{z^6}{y^3} = b$; haciendo $x + z = u$, la primera equacion se convertirá en la $\frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{y} = a - u - y$, de donde resulta que la suma de los dos términos extremos de dicha progresion es igual á $a - u - y$. Por sér $\therefore \frac{x^2}{y}, x, y, z, \frac{z^2}{y}$, será tambien $\therefore \frac{x^2}{y}, y, \frac{z^2}{y}$, y por consiguiente el

producto de dichos dos términos será igual á y^2. Por tanto siendo $\frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{y} = a - u - y$, y $\frac{x^2}{y} \times \frac{z^2}{y} = y^2$, se tendrá $\frac{x^6}{y^3} + \frac{z^6}{y^3} = (a - u - y)^3 - 3y^2 \times (a - u - y)$: además siendo $x + z = u$, y $xz = y^2$ por ser $\div\div x, y, z$, resultará $x^3 + z^3 = u^3 - 3y^2u$: luego será $\frac{x^6}{y^3} + \frac{z^6}{y^3} + x^3 + z^3 = (a - u - y)^3 - 3y^2 \times (a - u - y) + u^3 - 3y^2u$; y añadiendo y^3 á ambas partes, se tendrá $\frac{x^6}{y^3} + \frac{z^6}{y^3} + x^3 + z^3 + y^3 = (a - u - y)^3 - 3y^2 \times (a - u - y) + u^3 - 3y^2u + y^3$; pero el primer miembro es igual á b por la segunda condicion del Problema : luego será $(a - u - y)^3 - 3y^2 \times (a - u - y) + u^3 - 3y^2u + y^3 = b$, ó bien $(A)\ (3a - 3y) \times u^2 + (6ay - 3y^2 - 3a^2) \times u + 3y^3 - 3a^2y + a^3 = b$. Se ha demostrado antes ser $\frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{y} = a - u - y$; y multiplicando por y, será $x^2 + z^2 = ay - uy - y^2$; pero por ser $x + z = u$, y $\div x, y, z$ ó bien $y^2 = xz$, se tendrá $x^2 + z^2 = u^2 - 2y^2$: luego $u^2 - 2y^2 = ay - uy - y^2$, ó bien $(B)\ u^2 + yu = y^2 + ay$. Ahora si por medio de las equaciones $(A)\ (B)$ se excluye la incógnita u segun el método dado (400) se hallará la equacion del quarto grado y^4

$-ay^3-\frac{(2a^3+b)}{3a}\times y^2+\frac{2a^3+b}{3}\times y-\frac{(a^3-b)^2}{9a^2}$ $=o$, que resuelta (525) dará el valor de la y. Si es $a=62$, y $b=37448$, la equacion antecedente se convertirá en la $y^4-62y^3-2764y^2+171368y-1166400=o$, que tiene una de sus raíces $y=8$; y por medio de las correspondientes equaciones que arriba se hallaron, se tendrán los valores de las incógnitas x, z, esto es, $x=4$, $z=16$. Por tanto los cinco números son en este caso $\div$ 2, 4, 8, 16, 32.

PROBLEMA LXIII.

708. La suma de quatro nùmeros, la de sus quadrados, la de sus cubos, y la de sus quartas potestades, siendo dadas, determinar dichos números.

Llámense x, y, z, u los números que se buscan, la suma de ellos a, la de sus quadrados b, la de sus cubos c, y la de sus quartas potestades b: luego por las condiciones del Problema se tendrán las equaciones $x+y+z+u=a$, $x^2+y^2+z^2+u^2=b$, $x^3+y^3+z^3+u^3=c$, $x^4+y^4+z^4+u^4=d$; y trasponiendo los términos, en quienes se halla u, y sus potestades, resultarán las siguientes.

I..... $x+y+z=a-u=A$
II.... $x^2+y^2+z^2=b-u^2=B$
III.... $x^3+y^3+z^3=c-u^3=C$
IV.... $x^4+y^4+z^4=d-u^4=D$

Elevando la primera al quadrado, será $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=A^2$; restando de ésta la segunda equacion se tendrá la V. . $2xy+2xz+2yz=A^2-B$: asímismo si del quadrado de la segunda se resta la quarta equacion, resultará la VI. . $2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2=B^2-D$: ahora si del quadrado de la quinta se resta el doble de la sexta, se tendrá $8x^2yz+8y^2xz+8z^2xy=A^4-2A^2B-B^2+2D$, ó bien $8xyz\times(x+y+z)=A^4-2A^2B-B^2+2D$; y por ser $x+y+z=A$, partiendo por $8A$ resultará la VII. . $xyz=\frac{A^4-2A^2B-B^2+2D}{8A}$. Multiplicando la primera equacion por la quinta, se hallará la VIII. . $2x^2y+2x^2z+2y^2x+2y^2z+2z^2x+2z^2y+6xyz=A^3-AB$: y multiplicando la primera por la segunda, se tendrá la IX. . $x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y=AB$: restando el doble de ésta de la antecedente quedará el resíduo $6xyz-2x^3-2y^3-2z^3=A^3-3AB$ que añadido al doble de la tercera equacion dá $6xyz=A^3-3AB+2C$, ó bien $xyz=\frac{A^3-3AB+2C}{6}$. Comparando el valor de xyz con él de la equacion séptima, será $\frac{A^3-3AB+2C}{6}=\frac{A^4-2A^2B-B^2+2D}{8A}$; y reduciendo se tendrá $A^4-6A^2B+8AC+3B^2$

$-6D=o$, en quien substituyendo los valores de A, B, C y D, y dividiendo por 24, dá $u^4 - au^3 + \frac{a^2-b}{2} \times u^2 - \frac{a^3-3ab+2c}{6} \times u + \frac{a^4-6a^2b+8ac+3b^2-6d}{24} = o$. Si se suponen las cantidades $a=10$, $b=30$, $c=100$, $d=354$, la equacion antecedente se convertirá en la $u^4 - 10u^3 + 35u^2 - 50u + 24 = o$, que tiene una de las raíces $u=4$: hecho el cálculo se hallará que los valores de las incógnitas x, y, z son respectivamenre 1, 2, 3.

Del uso del Cálculo para resolver los Problemas Geométricos.

PROBLEMA LXIV.

709. Inscribir en un triángulo dado BAC un quadrado, de suerte que uno de sus lados esté en la base BC de dicho triángulo. *Fig.* 48.

Sea $EDGF$ el quadrado que se pide inscribir en el triángulo BAC. Báxese la perpendicular AH á la base BC: llaménse, $BC=a$, $AH=b$, $DE=HI=x$, y por consiguiente será $AI=b-x$. Siendo pues las rectas BC y EF paralelas, se tendrá $AB : AE = AH : AI$; y por la misma razon será $AB : AE = BC : EF$: luego $AH : AI = BC : EF$, esto es, $b : b-x = a : x$, de

donde resulta ser $bx = ab - ax$, $bx + ax = ab$, y $x = \frac{ab}{a+b}$. Por tanto el lado del quadrado, ó bien la recta HI es la quarta proporcional á las cantidades $a + b$, a, b.

Prolónguese la recta HB, de suerte que sea $HM = a + b$, y $HL = a$; únanse los puntos A y M con la recta AM, y á ésta tírese la paralela LI que determinará la recta $HI = x$ por ser HM: $HL = AH$: HI; y tirada por el punto I la recta EF paralela á la BC, y baxadas las perpendiculares ED y FG á la base BC, será la figura $DEFG$ el quadrado que se busca. Obsérvese que si los ángulos B y C son agudos, el quadrado $DEFG$ estará inscrito en el triángulo BAC; y si uno de dichos ángulos es recto, por exemplo C, caerá el lado FG sobre AC: en fin si uno de dichos ángulos es obtuso, parte del quadrado estará fuera del triángulo, y por consiguiente no quedará inscrito en él.

PROBLEMA LXV.

710. En el círculo dado $FABC$ se pide inscribir un triángulo isósceles ABC tal que uno de los lados AB esté con la base AC en la razon dada de m á n. *Fig.* 49.

Tírese el diámetro *BFE* que dividirá por medio la base *AC*; y únanse los puntos *A* y *E* con la recta *AE*. Por la condicion del Problema ha de ser $AB : AC = m : n$, ó bien $AB : AD = m : \frac{n}{2}$; pero por la semejanza de los triángulos *BAD* y *BAE* es $AB : AD = BE : AE$: luego será $BE : AE = m : \frac{n}{2} = 2m : n$. Por tanto hallando una quarta proporcional á las tres rectas $2m$, n, BE, se determinará la cuerda *EA*; y tirando *AC* perpendicular al diámetro *BE*, y las cuerdas *AB* y *BC*, se tendrá determinado el triángulo *ABC* que se pedía.

PROBLEMA LXVI.

711. Si por los vértices *E* y *F* de los triángulos *AEC* y *CFB* equiláteros se tira la recta *EF* prolongada hasta encontrar la recta *AB* alargada en *D*, y haciendo centro en *D* con el intervalo *CD* se describe el círculo *DCG*; se propone determinar el punto *G* en su circunferencia, de suerte que tiradas las rectas *AG* y *GB*, sea $AC : CB = AG : GB$. *Fig.* 50.

Báxese la perpendicular *GH* al radio *CD*; y llámense, $CA = a$, $CB = b$, $CH = x$, $HG = y$. Por la semejanza de los triángulos *ADE* y *CDF* es $AE : CF = DA : DC$, y dividiendo será $AE - CF$:

$CF = AC : CD$, esto es, $a-b : b = a : DC = \frac{ab}{a-b}$. Consta (436) que la equacion al círculo es $\frac{2ab}{a-b} \times x - x^2 = y^2$, y por los triángulos rectángulos AHG y BHG son $(AG)^2 = (a+x)^2 + y^2$, $(BG)^2 = (b-x)^2 + y^2$; pero por la condicion del Problema ha de ser $AC : CB = AG : GB$: luego será $a : b = \sqrt{[y^2 + (a+x)^2]} : \sqrt{[y^2 + (b-x)^2]}$, ó bien $a^2 : b^2 = y^2 + (a+x)^2 : y^2 + (b-x)^2 = \frac{2ab}{a-b} \times x - x^2 + a^2 + 2ax + x^2 : \frac{2ab}{a-b} \times x - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$, de donde $\frac{2a^3b}{a-b} \times x + a^2b^2 - 2a^2bx = \frac{2ab^3}{a-b} \times x + a^2b^2 + 2ab^2x$: quitando ahora el término a^2b^2 de ambos miembros, y partiendo por $2abx$, se tendrá $\frac{a^2}{a-b} - a = \frac{b^2}{a-b} + b$, ó bien $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b$; lo qual siendo cierto indica que la qüestion propuesta es un Teorema, de suerte que tomando qualquier punto G en la circunferencia del círculo descrito, será siempre $AC : CB = AG : GB$.

PROBLEMA LXVII.

712. Dados dos círculos ACH y BDN desiguales, que tienen sus centros en A y B, tirar á ellos una tangente. *Fig.* 51.

Sea CD la tangente que se busca. Prolónguense las rectas CD y AB, hasta que se corten en E; y tírense los rádios AC y BD á los puntos de contacto C y D. Llámense las rectas, $AB=a$, $AC=R$, $BD=r$, $BE=x$. Siendo pues los ángulos C y D rectos, serán las rectas AC y BD paralelas; por consiguiente se tendrá $AC : BD=AE : EB$, esto es, $R : r=a+x : x$; de donde resulta ser $Rx=ar+rx$, $Rx-rx=ar$, y $x=\frac{ar}{R-r}$. Tírense dos rádios AL y BM paralelos, y la recta LM; prolónguense AB y LM hasta cortarse en E; y desde el punto E tírense las tangentes ED y Ed al círculo BDN, las que prolongadas serán tambien tangentes al círculo ACH: pues, por ser las rectas $AL : BM=AE : EB$, será dividiendo $AL-BM : BM=AB : BE$, esto es, $R-r : r=a : BE$; por consiguiente se tendrá $BE=\frac{ar}{R-r}=x$.

Quando los dos círculos BDN y ACH no se cortan, se podrán tirar otras dos tangentes MH y mh desde el punto R puesto en la recta AB, el qual se determinará de este modo. Nombrada $BR=x$, por la semejanza de los triángulos ARL y BRN será $AL : BN=AR : RB$, esto es, $R : r=a-x : x$; de donde resulta ser $Rx=ar-rx$, $Rx+rx=ar$, y $x=\frac{ar}{R+r}$: luego tirados qualesquiera dos rádios

AL y BN paralelos, y junta la recta LN, se tendrá determinado el referido punto R. Es evidente ser imposible el Problema, quando el círculo BDN está contenido en el círculo ACH.

PROBLEMA LXVIII.

713. Dado el diámetro AE del semicírculo AFE, y tambien las partes CB y CD del mismo diámetro tomadas desde el céntro C, y levantadas las perpendiculares BG y DF, determinar el punto G, de suerte que tirada la recta GF sea $GF \times FD = AC \times BD$. *Fig.*52.

Tírese la recta FH paralela al diámetro AE. Llámense, $AC=r$, $CB=a$, $CD=b$, $HG=x$; y serán las rectas $DF=BH=\sqrt{(r^2-b^2)}$, $HF=BD=a+b$, y $GF=\sqrt{(x^2+a^2+2ab+b^2)}$: luego por la condicion del problema se tendrá $\sqrt{(x^2+a^2+2ab+b^2)} \times \sqrt{(r^2-b^2)}=ar+br$; y quadrando será $(x^2+a^2+2ab+b^2) \times (r^2-b^2) = a^2r^2+2abr^2+b^2r^2$, ó bien $r^2x^2+a^2r^2+2abr^2+b^2r^2-b^2x^2-a^2b^2-2ab^3-b^4=a^2r^2+2abr^2+b^2r^2$, y reduciendo $(r^2-b^2) \times x^2 - a^2b^2 - 2ab^3 - b^4 = o$; de donde resulta ser $x^2 = \frac{a^2b^2+2ab^3+b^4}{r^2-b^2}$, y $x = \pm \sqrt{\frac{a^2b^2+2ab^3+b^4}{r^2-b^2}} = \pm \frac{ab+b^2}{\sqrt{(r^2-b^2)}}$. Porque x debe ser el quarto término proporcional á

las cantidades $\sqrt{(r^2-b^2)}$, b, $a+b$, es evidente que formando los ángulos HFG y HFg iguales á CFD, los puntos G y g resolverán la qüestion propuesta.

PROBLEMA LXIX.

714. Dados en la recta DC los puntos D, A, C, y dada tambien de posicion la recta DH, determinar el círculo que pasa por los puntos A, C, y á quien sea tangente la recta DH. *Fig.* 53.

Sea el círculo AFC él que se busca; y llámense, $DC=a$, $DA=b$, $DF=x$. Siendo la recta DF tangente, y la recta DC secante de dicho círculo, será $CD\times DA=(DF)^2$, esto es, $ab=x^2$, de donde resulta ser $x=\pm\sqrt{ab}$. Prolónguese la recta CD, hasta que sea $Da=DA$, y descríbase sobre Ca como diámetro el semicírculo $C.Ga$; tirese la recta DG perpendicular á dicho diámetro, y por la propiedad del círculo será $(DG)^2=DC\times Da$, ó bien $DG=\sqrt{ab}$: ahora tómense las rectas DF y Df iguales cada una á la ordenada DG, y haciendo pasar un círculo por los puntos F, A, C, y tambien otro por los puntos f, A, C, resolverán entrambos círculos el Problema propuesto.

PROBLEMA LXX.

715. Dado un punto G hacer pasar por él un círculo tangente á las rectas AF y AI dadas de posicion. *Fig.* 54.

Sea BGC el círculo que se busca. Divídase igualmente el ángulo FAI con la recta AE, y á ésta báxese la perpendicular GE prolongada de una y otra parte, hasta que encuentre la circunferencia y la recta AI en los puntos H y D. Llámense las rectas, $GE=a$, $DE=b$, $DC=x$, y será tambien $EH=a$. Siendo púes DC tangente, y DH secante del círculo BGC, se tendrá $(DC)^2 = DH \times DG$, ó bien $x^2 = (a+b) \times (-a+b) = b^2 - a^2$, de donde resulta ser $x = \pm \sqrt{(b^2 - a^2)}$. Hállese una media proporcional á las rectas $a+b$, $b-a$; tómense las DC, Dc iguales cada una á dicha media; y haciendo pasar un círculo por los puntos C, G, H, y otro por los c, G, H, resolverán entrambos círculos el Problema propuesto.

PROBLEMA LXXI.

716. Dados los círculos ADL, AIM, y la recta MG tangente al círculo AIM, determinar el círculo DIH tangente á dichos círculos y á la recta. *Fig.* 55.

Por los céntros F, E de los círculos AIM, DIH tírese la recta FE que pasará por el punto I del contacto: tambien por los centros C, E de los círculos ADL, DIH tírese la recta CE, que prolongada pasará por el contacto D. Llámense, $CL=R$, $FM=r$, $ED=EH=x$; y serán las rectas, $FE=r+x$, $CE=R-x$, $FB=r-x$, $CF=R-r$, $CB=CM-MB=2r-R-x$. Siendo pues los triángulos EBC, EBF rectángulos en B, será $(CE)^2-(CB)^2=(FE)^2-(FB)^2$, ó bien $(R-x)^2-(2r-R-x)^2=(r+x)^2-(r-x)^2$; de donde resulta ser

$$\left.\begin{array}{l} R^2-2Rx+x^2 \\ -4r^2+4rx-x^2 \\ +4Rr-2Rx \\ -R^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} r^2+2rx+x^2 \\ -r^2+2rx-x^2 \end{array}\right.$$

y reduciendo se tendrá $-4r^2+4rR-4Rx=0$: por consiguiente $Rx=rR-r^2$, y $x=\frac{(R-r)\times r}{R}$. Por tanto el semidiámetro DE del círculo que se busca será el quarto término proporcional á las rectas CL, CF, FM.

PROBLEMA LXXII.

717. Dado el quadrante circular ACB cuya cuerda AB, determinar en el rádio CB prolonga-

do el punto G, de suerte que tirada la recta AG sea $GA \times AF = (AB)^2$. Fig. 56.

Llámense, el rádio $CA = r$, $AF = x$. Complétese el semicírculo ABD, y tírense la cuerda DF y la recta FE perpendicular al diámetro AD. Siendo pues los triángulos ACG y AFD semejantes, será $AG : AC = AD : AF$, esto es, $AG : r = 2r : x$, de donde $AG = \frac{2r^2}{x}$; pero por la condicion del Problema es $GA \times AF = (AB)^2$: luego será $\frac{2r^2}{x} \times x = 2r^2$, ó bien $2r^2 = 2r^2$, lo que indica que el Problema propuesto es un Teorema que se enuncia de este modo: si de qualquier punto G tomado en el rádio CB prolongado se tira la recta AG, será siempre el rectángulo hecho de dicha recta y de la cuerda AF igual al quadrado de la cuerda AB del quadrante circular.

PROBLEMA LXXIII.

718. Dados los quatro lados del trapezio $ABCD$ inscrito en el círculo ABC, determinar el diámetro del mismo círculo. *Fig.* 57.

Tírese la diagonal AC, y de los puntos A, C báxense las perpendiculares AE, CF á los lados BC, AD. Llámense las rectas, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BE = x$. Siendo

pues el ángulo $CDF=ABE$, los triángulos rectángulos AEB, CFD serán semejantes, y por consiguiente $AB : BE=CD : DF$, ó bien $a : x = c : DF=\frac{cx}{a}$; pero es $(AB)^2+(BC)^2-2BC\times BE=(AC)^2=(AD)^2+(CD)^2+2AD\times DF$: luego será $a^2+b^2-2bx=d^2+c^2+\frac{2cdx}{a}$; de donde se saca $x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2b+\frac{2cd}{a}}$. Dada pues x ó BE, cuyo valor llámo m, se tendrá $AE=\sqrt{(a^2-m^2)}$, y $AC=\sqrt{(a^2+b^2-2bm)}$; pero es $AE : AC = AB : AG$ diámetro del circulo, por ser los triángulos AEC, ABG semejantes: luego será $AG=\frac{a\sqrt{(a^2+b^2-2bm)}}{\sqrt{(a^2-m^2)}}$.

PROBLEMA LXXIV.

719. Dada la distancia ED entre las paralelas AD, FE, y siendo $AB=BC$, determinar en la recta FE un punto E, de suerte que tiradas las AE, BE, CE estén en contínua proporcion. *Fig.*58.

Llámense las rectas, $AB=BC=b$, $ED=a$, $BD=x$; y será $AD=b+x$, y $CD=x-b$. Siendo los triángulos rectángulos ADE, BDE, CDE, serán $(AE)^2=(AD)^2+(DE)^2$, $(BE)^2$

$= (BD)^2 + (DE)^2$, $(CE)^2 = (CD)^2 + (DE)^2$, ó bien $(AE)^2 = b^2 + 2bx + x^2 + a^2$, $(BE)^2 = x^2 + a^2$, $(CE)^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$; pero por la condicion del Problema es $AE : BE = BE : CE$, y en conseqüencia $(AE)^2 : (BE)^2 = (BE)^2 : (CE)^2$: luego será $b^2 + 2bx + x^2 + a^2 : x^2 + a^2 = x^2 + a^2 : b^2 - 2bx + x^2 + a^2$, y dividiendo $b^2 + 2bx : x^2 + a^2 = 2bx - b^2 : x^2 - 2bx + b^2 + a^2$, de cuya analogía resulta la equacion

$$\left.\begin{array}{l} 2bx^3 + b^2x^2 - 2b^3x + b^4 \\ -4b^2x^2 + 2b^3x + a^2b^2 \\ +2a^2bx \end{array}\right\} = 2bx^3 - b^2x^2 + 2a^2bx - a^2b^2$$

y reduciendo $-2b^2x^2 + 2a^2b^2 + b^4 = o$, de donde resulta ser $x^2 = a^2 + \frac{b^2}{2}$, y $x = \pm\sqrt{(a^2 + \frac{b^2}{2})}$. Tírese la perpendicular BF á la recta FE, y tómese $FH = BC = b$; descríbase sobre FH como diámetro el semicírculo FGH, y tírese en el quadrante FG su cuerda, que será igual á $\frac{b^2}{2}$; tómese $FI = FG$, y únanse los puntos B, I con la recta BI que resultará igual á $\sqrt{(a^2 + \frac{b^2}{2})}$: ahora cortada $BD = BI$, y tirada DE perpendicular á FE, quedará determinado el punto E que se buscaba.

PROBLEMA LXXV.

720. Hallar dos rectas que formen un rectán-

gulo igual al dado $ABDC$, y la suma de sus quadrados sea igual al quadrado $EFHG$. *Fig.*59, 60.

Llámense, $AB=a$, $AC=b$, $EF=c$, y las dos rectas que se buscan x, z: luego por las condiciones del Problema se tendrán las dos equaciones $zx=ab$, $x^2+z^2=c^2$; restando y despues añadiendo el dúplo de la primera equacion á la segunda, resultará $x^2-2xz+z^2=c^2-2ab$, y $x^2+2xz+z^2=c^2+2ab$; y extrayendo la raíz quadrada, será $x-z=\pm\sqrt{(c^2-2ab)}$, y $x+z=\pm\sqrt{(c^2+2ab)}$; por consiguiente $x=\frac{\pm\sqrt{(c^2-2ab)}\pm\sqrt{(c^2+2ab)}}{2}$, $z=\frac{\pm\sqrt{(c^2+2ab)}\mp\sqrt{(c^2-2ab)}}{2}$: y como debe ser $zx=ab$, se tendrá $x=\frac{\sqrt{(c^2-2ab)}+\sqrt{(c^2+2ab)}}{2}$, y $z=\frac{\sqrt{(c^2+2ab)}-\sqrt{(c^2-2ab)}}{2}$, en quienes la $\sqrt{(c^2-2ab)}$ será siempre cantidad real por ser $(x-z)^2=c^2-2ab$.

Córtese la recta EI igual á la quarta proporcional de las magnitudes EF, AB, AC, y complétese el rectángulo $EILF$; sobre EF como diámetro descríbase el semicírculo EKF; al punto K, donde el lado IL corta la circunferencia de dicho semicírculo, tírense las rectas EK, FK, y serán éstas las que se piden. Siendo pues $EF:AB=AC:EI$, será $EF\times EI=AB\times AC$; pero es $EF\times EI=EK\times KF$: luego se tendrá $EK\times KF=AB\times AC$; y por ser el triángulo EKF rectángulo en K,

Fig. 48.

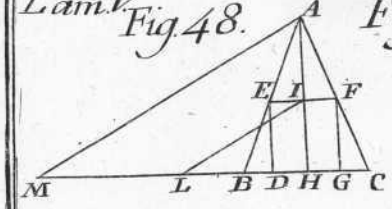


Fig. 49.

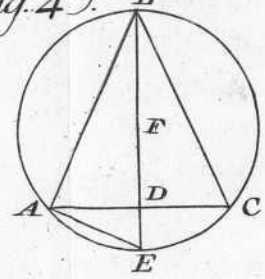


Fig. 50.

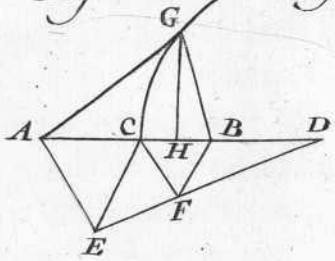


Fig. 51.

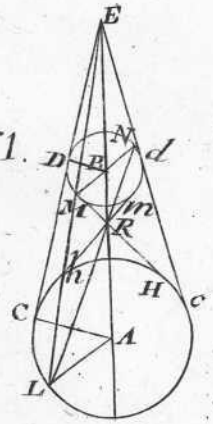


Fig. 52.

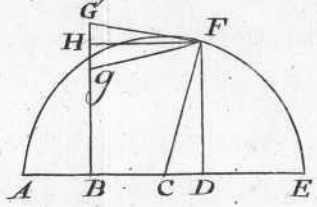


Fig. 53.

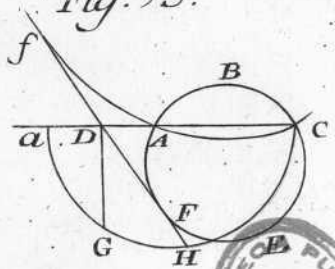


Fig. 54.

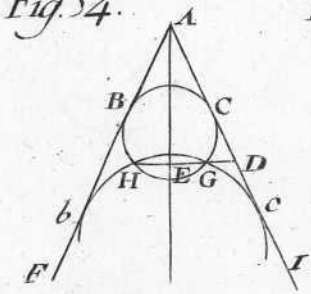


Fig. 55.

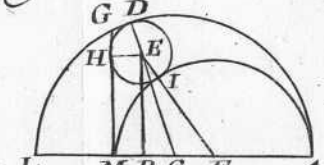


Fig. 56.

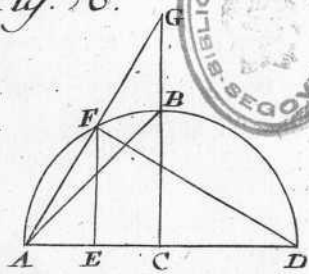


Fig. 57.

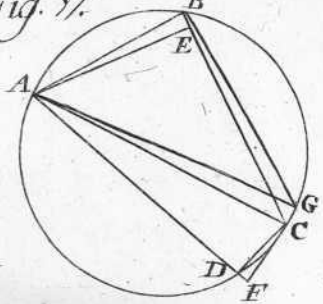


Fig. 58.

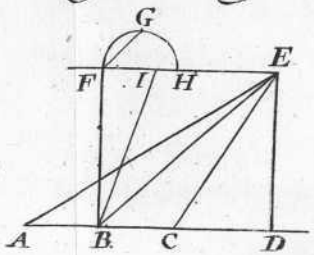


Fig. 59.

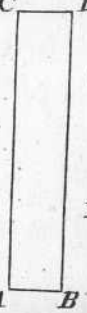
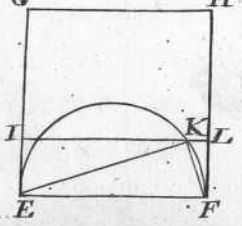
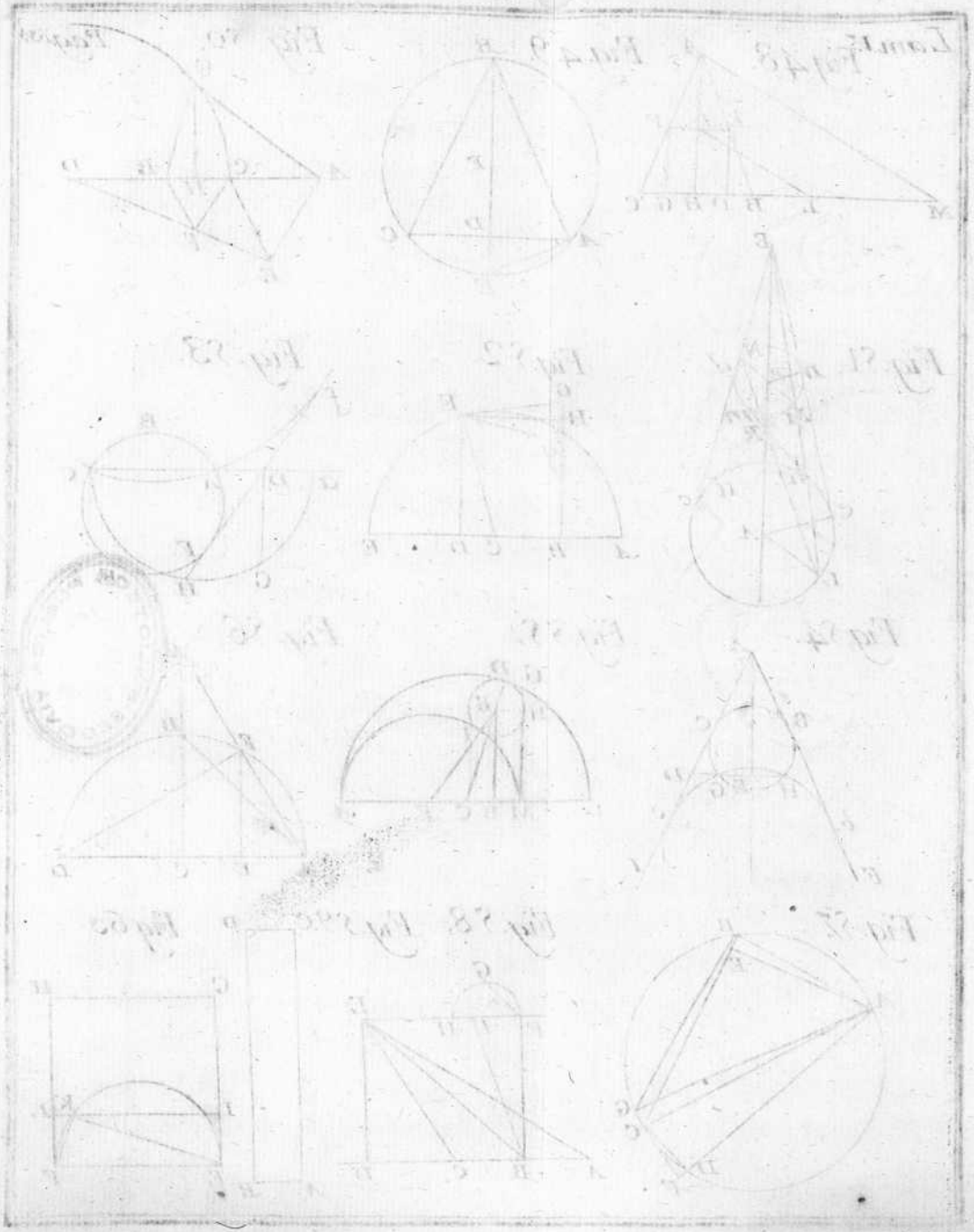


Fig 60



BIBLIOTECA PUBLICA SEGOVIA



será $(EK)^2 + (KF)^2 = (EF)^2$.

PROBLEMA LXXVI.

721. Construir un triángulo equilátero BAC igual al quadrado de la recta dada CH. *Fig.* 61.

Báxese la perpendicular AD á la base BC. Llámense, $CH=a$, $CD=x$; por consiguiente serán las rectas $BC=2x$, $AD=\sqrt{(4x^2-x^2)}=x\sqrt{3}$, y el triángulo $BAC=x\times x\sqrt{3}=x^2\sqrt{3}$: luego por la condicion del Problema se tendrá $x^2\sqrt{3}=a^2$, de donde resulta ser $x=\sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3a^2}}}$. Prolónguese la recta CH, hasta que sea $HG=3a$; sobre CG como diámetro descríbase el semicírculo GKC, y tírese la ordenada HK que será igual á $\sqrt{3a^2}$; córtese $HI=HK$, y sobre CI como diámetro descríbase el semicírculo CFI; finalmente tírese la cuerda CF, y levántese la perpendicular $DE=a$, y se tendrá $DC=x$: porque siendo $IH:HF=HF:HC$, será tambien $IH:HC=(HF)^2:(HC)^2$; pero $HF:HC=DE:DC$, y $(HF)^2:(HC)^2=(DE)^2:(DC)^2$: luego será $IH:HC=(DE)^2:(DC)^2$, esto es, $\sqrt{3a^2}:a=a^2:(DC)^2=\frac{a^3}{\sqrt{3a^2}}$, y $DC=\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3a^2}}}$. Por tanto tomada $DB=DC$, será BC la base del triángulo equilátero igual al quadrado de la recta CH.

PROBLEMA LXXVII.

722. Dado el quadrado $ABCD$, y prolongado uno de sus lados DC, tirar la recta AFE de suerte que la parte EF sea igual á la recta dada M. *Fig.* 62.

Supuesta la recta AFE la que se busca, báxese EH perpendicular al lado AB prolongado, y tírese EG perpendicular á AE. Llámense, $AB=a$, $M=FE=b$, $BG=x$, $AF=z$; y serán las rectas $AG=a+x$, $AE=z+b$. Siendo pues la recta BF paralela á la HE, será $AB:BF=AH:HE$; pero es $AH:HE=HE:HG$, por ser el ángulo AEG recto, y la recta EH perpendicular á la AG: luego será $AB:BF=HE:HG$: y como es $AB=EH$, será $BF=HG$, y los triángulos rectángulos ABF y EHG serán totalmente iguales; por consiguiente $AF=EG=z$. En el triángulo AEG es $(AE)^2+(EG)^2=(AG)^2$, esto es $(b+z)^2+z^2=(a+x)^2$, ó bien $(A)\ b^2+2bz+2z^2=a^2+2ax+x^2$: tambien por la semejanza de los triángulos ABF y AEG es $AB:AF=AE:AG$, esto es, $a:z=b+z:a+x$, de donde $ax+a^2=z^2+bz$: luego substituyendo en la equacion (A) en lugar de $2z^2+2bz$ su valor $2a^2+2ax$, se tendrá $2a^2+2ax+b^2=a^2+2ax+x^2$, de donde

resulta ser $x^2 = a^2 + b^2$, y $x = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Prolónguese la recta DC, hasta que sea $CL = b$; tírese BL que será igual á $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; córtense las rectas BG y Bg iguales á BL, y se tendrán determinados los dos valores de x: ahora descríbanse los semicírculos AEG y AIg; y si la recta DC prolongada corta la circunferencia de éstos en los puntos I, i, e, E, las quatro rectas IK, ik, ef, EF serán iguales á b. Por ser el diámetro $AG = a + \sqrt{(a^2+b^2)}$, será el rádio $\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}$ $> a$; por consiguiente la recta DC prolongada cortará siempre el semicírculo AEG en los dos puntos E, e. Pero siendo el diámetro $Ag = \sqrt{(a^2+b^2)} - a$, el rádio $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2}$ del semicírculo AIg podrá ser mayor, igual ó menor que a: si es $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}-a}{2} = a$, será tambien $\sqrt{(a^2 + b^2)} = 3a$, $a^2 + b^2 = 9a^2$, y $b = 2\sqrt{2a^2} = 2AC$: luego siendo $b = 2\sqrt{2a^2}$, la recta CD prolongada tocará el semicírculo AIg en un solo punto; y si es $b > 2\sqrt{2a^2}$, dicha recta cortará la circunferencia AIg en dos puntos; y finalmente si es $b < 2\sqrt{2a^2}$, la recta CD prolongada no cortará dicha circunferencia. Por tanto en el primer caso el Problema propuesto tendrá tres soluciones, en el segundo quatro, y en el tercero dos.

PROBLEMA LXXVIII.

723. Dado el semicírculo BED, y el punto A en la prolongacion del diámetro BD, tirar de A una secante AE, de suerte que la cuerda EG sea igual al rádio CB. *Fig.* 63.

Llámense, $CB=r$, $AB=a$, $AD=b$, $AG=x$; y por la condicion del Problema será $AE=r+x$; pero es $AE \times AG = AD \times AB$: luego se tendrá $(r+x) \times x = ab$, ó bien $x^2+rx=ab$; extrayendo la raíz quadrada, resultará $x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4}+ab)}$. Sobre la recta $CB=r$ levántense las perpendiculares $BF=a$, $CK=b$; tírese la recta FK, y sobre ésta como diámetro descríbase el círculo $FHKh$, cuya circunferencia cortará la recta CB prolongada en los puntos H, h; y será BH el valor de la x positiva, y Bh él de la negativa. Por tanto haciendo céntro en A con el intervalo igual á BH descríbase un círculo, cuya circunferencia cortará la BED en G; y tirada la secante AGE, será $GE=r$. Tambien tomadas las rectas Ab y Ad respectivamente iguales á las AB y AD, descríbase sobre db como diámetro el semicírculo dgb; y haciendo centro en A con el intervalo igual á Bh descríbase otro semicírculo, cuya circunferencia

cortará la *dgb* en *g*; y tirada la secante *Ag*, será la cuerda *ge* igual al rádio *r*.

PROBLEMA LXXIX.

724. Dadas las rectas *CD* y *G*, y además dada la razon de *M* á *N*, determinar el punto *F* en la recta *CD*, de suerte que sea $CF \times G : (DF)^2 = M : N$. *Fig.* 64.

Llámense las rectas, $CD = a$, $M = m$, $N = n$, $G = b$, $DF = x$; y será $CF = a - x$: luego por la condicion del Problema se tendrá $(a-x) \times b : x^2 = m : n$, de donde resulta la equacion $anb - nbx = mx^2$, ó bien $x^2 + \frac{nb}{m} \times x = \frac{anb}{m}$, que resuelta dá $x = -\frac{nb}{2m} \pm \sqrt{(\frac{n^2b^2}{4m^2} + \frac{anb}{m})}$. La raíz positiva determina el valor de la recta *DF*, y la raíz negativa tomada en la recta *CD* prolongada, esto es $Df = \frac{nb}{2m} + \sqrt{(\frac{n^2b^2}{4m^2} + \frac{anb}{m})}$ determina el punto *f*, de modo que sea $Cf \times G : (Df)^2 = M : N$.

DE OTRO MODO.

Hágase $M : N = G : DP$: luego será $CF \times G : (DF)^2 = G : DP$; pero es $G : DP = CF \times G : CF \times DP$: luego se tendrá $CF \times G : (DF)^2 = CF \times G : CF \times DP$; por consiguiente $CF \times DP =$

$(DF)^2$. Por tanto será $CF : DF = DF : DP$, y componiendo $CD : DF = FP : DP$, de donde resulta ser $CD \times DP = DF \times FP$; pero el rectángulo formado de las rectas CD y DP es dado: luego tambien será dado el rectángulo de DF y PF. De esta Análisis Geométrica resulta la siguiente composicion del Problema propuesto. Hágase $M : N = G : DP$, y sobre la recta DP aplíquese un rectángulo igual al rectángulo dado $CD \times DP$, excedente en un quadrado, como el rectángulo $PF \times FD$, y se tendrá el punto F que resuelve el Problema, esto es, será $CF \times G : (DF)^2 = M : N$.

PROBLEMA LXXX.

725. Dividir el ángulo BAC del triángulo dado BAC por medio de la recta AD, de suerte que sea $Sc.\ BAD : Sc.\ DAC = BD : DC$. *Fig.* 65.

Llámense, $AB = a$, $AC = b$, el ángulo $BAD = z$, y $DAC = y$. En el triángulo BAD es $BA : BD = Sc.\ BDA : Sc.\ BAD$, ó bien $a : BD = Sc.\ BDA : Sc.\ z$, de donde resulta ser $Sc.\ BDA = \frac{a \times Sc.\ z}{BD}$: igualmente se demostrará que en el triángulo ADC es $Sc.\ CDA = \frac{b \times Sc.\ y}{CD}$; pero $Sc.\ BDA = Sc.\ CDA$: luego será $\frac{a \times Sc.\ z}{BD} = \frac{b \times Sc.\ y}{CD}$; pero

por la condicion del Problema es $Sc.z : Sc.y = BD : CD$, ó bien $\frac{Sc.z}{BD} = \frac{Sc.y}{CD}$: luego será $a=b$.

PROBLEMA LXXXI.

726. Dado el triángulo ABC, dividirlo por medio con la recta FG, de manera que sean los senos de los ángulos AKI, AIK en la razon dada de n á m. *Fig.* 66.

Llámense, $AB=a$, $AC=b$, $AK=x$, $AKI=z$, $AIK=y$. Báxense las perpendiculares CE y IH al lado AB. En el triángulo KAI es $AK : AI = Sc.AIK : Sc.AKI$, esto es, $x : AI = Sc.y : Sc.z = m:n$, de donde $AI = \frac{nx}{m}$: tambien en el triángulo HAI es el rádio constante $r : Sc.A = \frac{nx}{m} : IH$, y por consiguiente $IH = \frac{nx \times Sc.A}{mr}$: luego será el triángulo KIA igual á $\frac{nx^2 \times Sc.A}{2mn}$: y como el triángulo BCA es igual á $\frac{AB \times CE}{2}$ ó bien á $\frac{ab\,Sc.A}{2r}$, se tendrá por la condicion del Problema la equacion $\frac{nx^2 \times Sc.A}{2mr} = \frac{ab \times Sc.A}{4r}$; de donde resulta ser $x^2 = \frac{mab}{2n}$, y $x = \pm\sqrt{\frac{mab}{2n}}$. Hállese la quarta proporcional á las cantidades n, m, b, y córtese la recta

AD igual á dicha quarta; despues búsquese la media proporcional entre $\frac{a}{2}$ y AD, y córtese la recta AK igual á dicha media; y tirada por el punto K la recta FG paralela á la DC, se tendrá resuelto el Problema.

PROBLEMA LXXXII.

727. Dada el área y el lado AC, hallar el triángulo BAC, en quien el ángulo BAC sea dúplo del ángulo C. *Fig.* 65.

Tírese la perpendicular BE al lado AC. Llámense, $AC = a$, $BE = b$, el ángulo $BAC = 2z$; y será el ángulo $C = z$, y el tercero $ABC = 2q - 3z$, supuesto q el ángulo recto. En el triángulo rectángulo AEB es $b : AB = Sc.\ 2z : r$, y en el triángulo BAC es $AB : a = Sc.\ z : Sc.\ (2q - 3z)$ ó bien $Sc.\ 3z$: luego será $b : a = Sc.\ 2z \times Sc.\ z : r \times Sc.\ (2q - 3z)$; pero $Sc.\ 2z = \frac{2\ Sc.\ z \times Cc.\ z}{r}$, y $Sc.\ 3z = \frac{3\ Sc.\ z \times (Cc.\ z)^2 - (Sc.\ z)^3}{r^3}$: luego $b : a = \frac{2 \times (Sc.\ z)^2 \times Cc.\ z}{r} : \frac{3 \times Sc.\ z \times (Cc.\ z)^2 - (Sc.\ z)^3}{r}$ $= 2\ (Sc.\ z)^2 \times Cc.\ z : 3\ Sc.\ z \times (Cc.\ z)^2 - (Sc.\ z)^3$; por consiguiente será $3b \times (Cc.\ z)^2 - b \times (Sc.\ z)^2 = 2a \times Cc.\ z \times Sc.\ z$, ó bien $3b \times [r^2 - (Sc.\ z)^2] - b$

$\times (Sc.\,z)^2 = 2\,a \times Sc.\,z \times \sqrt{[r^2 - (Sc.\,z)^2]}$, que reducida es $3\,br^2 - 4b \times (Sc.\,z)^2 = 2a \times Sc.\,z \times \sqrt{[r^2 - (Sc.\,z)^2]}$: elevando ambos miembros al quadrado, se tendrá $9\,b^2\,r^4 - 24\,b^2\,r^2 \times (Sc.\,z)^2 + 16\,b^2 \times (Sc.\,z)^4 = 4\,a^2 \times (Sc.\,z)^2 \times r^2 - 4\,a^2 \times (Sc.\,z)^4$, ó bien $(16\,b^2 + 4\,a^2) \times (Sc.\,z)^4 - (24\,b^2\,r^2 + 4\,a^2\,r^2) \times (Sc.\,z)^2 + 9\,b^2\,r^4 = o$; y partiendo por $16\,b^2 + 4\,a^2$, será $(Sc.\,z)^4 - \frac{24\,b^2\,r^2 + 4\,a^2\,r^2}{16b^2+4a^2} \times (Sc.z)^2 = -\frac{9b^2r^4}{16b^2+4a^2}$, de cuya equacion resulta ser $Sc.\,z = \pm$

$$\sqrt{\left[\frac{12b^2r^2+2a^2r^2}{16\,b^2+4\,a^2} \pm \sqrt{\frac{(12b^2r^2+2a^2r^2)^2}{(16b^2+4a^2)^2} - \frac{9b^2r^4}{16b^2+4a^2}}\right]}.$$

PROBLEMA LXXXIII.

728. En el arco dado ACB determinar el punto C, de suerte que tiradas las cuerdas AC, CB sea su diferencia igual á la perpendicular BD baxada desde uno de los extremos B de dicho arco á la mayor cuerda AC. *Fig.* 67.

Llámense, $AB = a$, el ángulo dado $ACB = C$, el ángulo $CAB = z$, el ángulo recto $= q$; y será $ABC = 2\,q - C - z$. En el triángulo BAD es el rádio constante $r : Sc.\,z = a : BD = \frac{a \times Sc.\,z}{r}$: tambien en el triángulo BCA es $Sc.\,C : Sc.\,(2\,q - C$

$-z) = a : AC = \frac{a \times Sc.(z-C-z)}{Sc.C} = \frac{a \times Sc.(C+z)}{Sc.C}$; y además $Sc.C : Sc.z = a : EC = \frac{a \times Sc.z}{Sc.C}$; pero por la condicion del Problema debe ser $AC - CB = BD$: luego se tendrá $\frac{a \times Sc.(C+z)}{Sc.C} - \frac{a \times Sc.z}{Sc.C} = \frac{a \times Sc.z}{r}$; partiendo por a, y quitando quebrados, resultará $r \times Sc.(C+z) - r \times Sc.z = Sc.z \times Sc.C$: y como es $Sc.(C+z) = \frac{Sc.C \times Cc.z + Sc.z \times Cc.C}{r}$, será tambien $Sc.C \times Cc.z + Sc.z \times Cc.C - r \times Sc.z = Sc.z \times Sc.C$; de donde resulta ser $\frac{Cc.z}{Sc.z} = \frac{r - Cc.C}{Sc.C} + 1$, ó bien $\frac{r}{Tc.z} = \frac{Tc.\frac{C}{2}}{r} + 1$, por consiguiente $Tc.\frac{C}{2} + r : r = r : Tc.z$. Divídase la cuerda AB por medio en E, y sobre ella levántese la perpendicular EF; y tirada la cuerda AF, será el ángulo $AFE = \frac{C}{2}$: luego supuesta $FE = r$, se tendrá $AE = Tc.\frac{C}{2}$; Tómese $EG = r$, y tírese la perpendicular $GD = r$; júntese la recta AD, y sobre ella levántese la perpendicular DB; y será $GB = Tc.z$, porque es $AG : GD = GD$:

GB, ó bien $Tc.\ \frac{C}{2}+r : r = r : GB = Tc.\ z$, y por consiguiente el ángulo $GDB = BAD = z$.

PROBLEMA LXXXIV.

729. Dado el ángulo BAC, y dada la razon de los lados AB y AC, hallar los demás ángulos del triángulo BAC. *Fig.* 65.

Llámense, el ángulo $BAC = A$, el ángulo $C = z$, y sea $AB : AC = n : m$, ó bien exprésense los lados AB y AC por nb y mb. Báxese la perpendicular BE al lado AC. En el triángulo BAE es el rádio constante $r : Cc.\ A = nb : AE = \frac{nb \times Cc.\ A}{r}$, y por consiguiente será $CE = mb - \frac{nb \times Cc.\ A}{r}$. Tambien en dicho triángulo es $r : Sc.\ A = nb : BE = \frac{nb \times Sc.\ A}{r}$; pero en el triángulo rectángulo BEC es $BE : EC = Sc.\ z : Cc.\ z = Tc.\ z : r$: luego será $\frac{nb \times Sc.\ A}{r} : mb - \frac{nb \times Cc.\ A}{r} = Tc.\ z : r$; de donde resulta ser $Tc.\ z = \frac{nr \times Sc.\ A}{mr - nCc.\ A}$. Con el mismo método se determinará el ángulo ABC.

PROBLEMA LXXXV.

730. En el triángulo ABC dados los dos lados

AB, AC, y el ángulo comprehendido BAC, determinar el tercer lado BC, los demás ángulos, el área BAC, y las perpendiculares AD, BE tiradas á los respectivos lados BC, AC. *Fig.* 65.

Llámense, $AB=a$, $AC=b$, el ángulo $BAE = A$. En el triángulo rectángulo BAE es el rádio constante r: $Sc.A = a$: $BE = \frac{a \times Sc.A}{r}$, y por consiguiente será el triángulo $BAC = \frac{ab \times Sc.A}{2r}$. Tambien en el mismo triángulo es r: $Cc.A = a$: $AE = \frac{a \times Cc.A}{r}$; pero $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AC \times AE$: luego será $(BC)^2 = a^2 + b^2 - 2b \times \frac{a\,Cc.A}{r}$, y $BC = \sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2abCc.A}{r})}$. En el triángulo BAC es BC: $AC = Sc.A$: $Sc.ABC$, ó bien $\sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2baCc.A}{r})}$: $b = Sc.A$: $Sc.ABC$: luego será $Sc.ABC = \frac{b \times Sc.A}{\sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2\,b\,a\,Cc.A}{r})}}$. Con el mismo método se hallará ser $Sc.ACB = \frac{a \times Sc.A}{\sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2\,a\,b\,Cc.A}{r})}}$. Finalmente por ser $AD \times BC = AC \times BE$, esto es, $AD \times \sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2ab\,Cc.A}{r})} = \frac{b\,a\,Sc.A}{r}$, será $AD = \frac{ab \times Sc.A}{r\sqrt{(a^2 + b^2 - \frac{2abCc.A}{r})}}$.

PROBLEMA LXXXVI.

731. Dados los dos lados AB, AC del triángulo BAC, y el ángulo ABC no comprehendido, hallar el tercer lado BC, y los demás ángulos. *Fig.* 65.

Báxese la perpendicular AD á la base BC. Llámense, $AB = a$, $AC = b$, el ángulo $ABC = B$. En el triangulo BAC es $AC : AB = Sc.B : Sc.C$, ó bien $b : a = Sc.B : Sc.C$, por consiguiente será $Sc.C = \frac{a \times Sc.B}{b}$. En el triángulo rectángulo ADC es $r : Cc.C = AC : CD$, ó bien $r : Cc.C = b : CD$; pero $Cc.C = \sqrt{[r^2 - (Sc.C)^2]} = \sqrt{[r^2 - \frac{a^2(Sc.B)^2}{b^2}]}$: luego será $CD = \frac{b}{r} \times \pm \sqrt{[r^2 - \frac{a^2(Sc.B)^2}{b^2}]}$: tambien en el triángulo BDA es $r : Cc.B = AB : BD$, ó bien $r : Cc.B = a : BD = \frac{a \times Cc.B}{r}$: luego será $BC = \frac{a \times Cc.B}{r} \mp \frac{b}{r} \times \sqrt{[r^2 - \frac{a^2(Sc.B)^2}{b^2}]}$ en cuya expresion se tomará la raíz positiva ó negativa, segun cayga el punto D en la base BC ó en su prolongacion. Finalmente en el triángulo BAC es $AC : BC = Sc.B : Sc.A$, ó bien $b : \frac{a\,Cc.B}{r} \pm \frac{b}{r} \times \sqrt{[r^2 - \frac{a^2(Sc.B)^2}{b^2}]} = Sc.B : Sc.A$; por consiguiente será $Sc.A =$

$$\frac{Sc.\ B}{br} \times \left[a\,Cc.\ B \pm b\sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2(Sc.B)^2}{b^2}\right)}\right].$$

PROBLEMA LXXXVII.

732. Dado el ángulo BAC, la suma de los lados AB y AC, y el área del triángulo ABC, determinar sus lados, y los demás ángulos. *Fig.* 65.

Llámense, el ángulo $BAC = A$, $AB + AC = 2b$, el triángulo $BAC = a^2$, el lado $AC = x$; y baxada la perpendicular BE al mismo lado, será ésta igual á $\frac{2a^2}{x}$. En el triángulo BEA es $r : Sc. A = BA : \frac{2a^2}{x}$, de donde $AB = \frac{2a^2 r}{x \times Sc. A}$: y siendo $AB + AC = 2b$, será $\frac{2a^2 r}{x \times Sc. A} + x = 2b$, de donde resulta la equacion $x^2 - 2bx = -\frac{2a^2 r}{Sc. A}$, que resuelta dá $x = b \pm \sqrt{\left(b^2 - \frac{2a^2 r}{Sc. A}\right)}$. Por tanto los lados AC, AB son respectivamente iguales á $b + \sqrt{\left(b^2 - \frac{2a^2 r}{Sc. A}\right)}$, $b - \sqrt{\left(b^2 - \frac{2a^2 r}{Sc. A}\right)}$: y como el ángulo BAC comprehendido entre dichos lados es dado, se hallarán los ángulos ABC y ACB por el Problema LXXXV. Adviértase que si es $b^2 = \frac{2a^2 r}{Sc. A}$, el triángulo BAC será isósceles; y

si es $b^2 < \frac{2a^2r}{Sc.A}$, el Problema será imposible por ser la $\sqrt{(b^2 - \frac{2a^2r}{Sc.A})}$ imaginária.

PROBLEMA LXXXVIII.

733. Dado el rectángulo de AB por AC, y la diferencia de los ángulos BAC, ABC, como tambien la de los ángulos ABC, ACB, determinar el lado AB. *Fig.* 65.

Llámense, $AB \times AC = c^2$, $AB = x$, $BAC - ABC = D$, $ABC - ACB = E$, $BAC = z$, el ángulo recto $= q$; y se tendrá $z - D = ABC$, y $ACB = ABC - E = z - D - E$; pero es el ángulo $ACB = 2q - z - ABC = 2q - 2z + D$: luego será $z - D - E = 2q - 2z + D$; por consiguiente $3z = 2q + 2D + E$, y $z = \frac{2q+2D+E}{3}$: y siendo $ABC = z - D$, y $ACB = z - D - E$, será $ABC = \frac{2q+2D+E}{3} - D = \frac{2q-D+E}{3}$, y $ACB = \frac{2q+2D+E}{3} - D - E = \frac{2q-D-2E}{3}$; pero es $Sc.\ ABC : Sc.\ ACB = AC : AB$: luego será $Sc.\ \frac{2q-D+E}{3} : Sc.\ \frac{2q-D-2E}{3} = \frac{c^2}{x} : x = c^2 : x^2$; de donde resulta ser $x^2 = c^2 \times Sc.\ \frac{2q-D-2E}{3} : Sc.\ \frac{2q-D+E}{3}$, y $x = \sqrt{(c^2 \times Sc.\ \frac{2q-D-2E}{3} : Sc.\ \frac{2q-D+E}{3})}$.

PROBLEMA LXXXIX.

734. Dados los tres lados del triángulo BAC, determinar sus ángulos y su superficie. *Fig.* 65.

Tírese la perpendicular BE al lado AC; y llámense, $AC=a$, $AB=b$, $BC=c$, y el ángulo $CAB=z$. En el triángulo rectángulo BEA es $r : Cc.\ z = b : AE = \frac{b \times Cc.\ z}{r}$; pero $(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2AC \times AE$: luego será $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times \frac{b \times Cc.\ z}{r}$, de donde resulta ser $Cc.\ z = \frac{a^2 r + b^2 r - c^2 r}{2ab}$, y por consiguiente $AE = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$; pero es $CE = a - AE$ por ser $CE + AE = a$: luego será $CE = a - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$, y $BE = \sqrt{[(BC)^2 - (CE)^2]} = \sqrt{[c^2 - (\frac{a^2-b^2+c^2}{2a})^2]} = \sqrt{[\frac{(a+b+c) \times (a+b-c) \times (a-b+c) \times (-a+b+c)}{4a^2}]}$, y el área del triángulo $BAC = \sqrt{(\frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{-a+b+c}{2})}$. La determinacion del ángulo ACB es evidente: pues siendo $r : Cc.\ ACB = BC : CE$, será $r : Cc.\ ACB = c : \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$, y por consiguiente $Cc.\ ACB = r \times \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$. Con el mis-

mo método se hallará por medio del triángulo BAC que es $Cc.\,BAC = r \times \frac{a^2-b^2+c^2}{2ab}$.

PROBLEMA XC.

735. Dada la suma de los lados AB, AC del triángulo BAC, el ángulo ABC no comprehendido, y la recta CD intercepta entre el ángulo C y la perpendicular AD baxada desde A á la base BC, determinar los lados del triángulo y su superficie. *Fig.* 65.

Llámense, $AB + AC = a$, $CD = b$, el ángulo $ABC = A$, $BA = x$; y será $AC = a - x$. En el triángulo rectángulo ADB es $r : Sc.\,A = x : AD = \frac{x \times Sc.\,A}{r}$; pero $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$: luego será $(a-x)^2 = \frac{x^2 \times (Sc.\,A)^2}{r^2} + b^2$; de donde resulta ser $x^2 - \frac{2r^2 a}{r^2-(Sc.\,A)^2} \times x = \frac{r^2 \times (b^2-a^2)}{r^2-(Sc.\,A)^2}$, ó bien $x^2 - \frac{2r^2 ax}{(Cc.\,A)^2} = \frac{r^2 \times (b^2-a^2)}{(Cc.\,A)^2}$; pero $\frac{r^2}{(Cc.\,A)^2} = \frac{(Sec.\,A)^2}{r^2}$: luego será $x^2 - \frac{2(Sec.\,A)^2 \times a}{r^2} \times x = \frac{(Sec.\,A)^2}{r^2} \times (b^2 - a^2)$, donde se saca $x = \frac{(Sec.\,A)^2 \times a}{r^2} \pm \frac{Sec.\,A}{r^2} \times \sqrt{[(Sec.\,A)^2 \times a^2 + r^2 \times (b^2 - a^2)]}$; por consiguiente será $AC = a - \frac{(Sec.\,A)^2 \times a}{r^2} \frac{Sec.\,A}{r^2} \times \sqrt{[(Sec.\,A)^2 \times a^2 + r^2 \times (b^2 - a^2)]}$. En estas expresiones de los

lados AB, AC, es necesario tomar los signos inferiores de los radicales, para que la suma de dichos lados sea igual á a, y el valor de AC sea positivo. Ahora el tercer lado BC será $= BD + DC = \frac{Cc.A \times x}{r} + b = \frac{rx}{Sec.A} + b = \frac{Sec.A \times a}{r} - \frac{1}{r} \times \sqrt{[(Sec.A)^2 \times a^2 + r^2 \times (b^2 - a^2)]} + b$: y por ser $AD = \frac{Sc.A \times x}{r}$, y el triángulo $BAC = \frac{AD \times BC}{2}$, se tendrá el valor de dicho triángulo.

PROBLEMA XCI.

736. Dada la base BC, la suma de los lados AB y AC, y el ángulo BAC, determinar dichos lados, y el área del triángulo. *Fig.* 65.

Báxese la recta BE perpendicular al lado AC. Llámense, $AB + AC = a$, $BC = b$, el ángulo $BAC = A$, el lado $AB = x$; y será $AC = a - x$. En el triángulo rectángulo BEA es $r : Cc.A = x : AE = \frac{x \times Cc.A}{r}$; pero $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AC \times AE$: luego será $b^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - \frac{2Cc.A \times x}{r} \times (a - x)$, de donde resulta ser $x^2 - ax = r \times \frac{b^2 - a^2}{2r + 2Cc.A}$: resolviendo esta equacion quadrada, se hallará $x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \times \sqrt{[\frac{-a^2 \times (-Cc.A + r) + 2rb^2}{r + Cc.A}]}$; por consiguiente

será $AC = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \times \sqrt{\left[\frac{-a^2 \times (-Cc.A + r) + 2rb^2}{r + Cc.A} - \right]}$. En la expresion de los lados AB y AC, se deben tomar los signos contrarios de los radicales. Hallado el valor de x, se tendrá el de BE por ser $BE = \frac{Sc.A \times x}{r}$; y multiplicando BE por la mitad de AC, el producto dará el área del triángulo.

PROBLEMA XCII.

737. Dada la suma de los lados AB, AC, BC, el área del triángulo BAC, y el ángulo BAC, determinar dichos lados. *Fig.* 65.

Báxese la perpendicular BE al lado AC. Llámense, la semisuma de los tres lados igual á a, el ángulo dado $BAC = A$, el área del triángulo igual á ab, y el lado $AB = x$. En el triángulo rectángulo BEA es $r : Sc.A = x : BE = \frac{x \times Sc.A}{r}$; pero $\frac{AC \times BE}{2} = ab$: luego será $AC = \frac{2abr}{x \times Sc.A}$: y como es en dicho triángulo $r : Cc.A = x : AE = \frac{x \times Cc.A}{r}$, se tendrá $CE = \frac{2abr}{Sc.A \times x} - \frac{Cc.A \times x}{r}$; pero $BC = \sqrt{\left[(BE)^2 + (EC)^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{x^2 \times (Sc.A)^2}{r^2} + \frac{4a^2b^2r^2}{(Sc.A)^2 \times x^2} - \frac{4ab \times Cc.A}{Sc.A} + \frac{(Cc.A)^2 \times x^2}{r^2}\right]} = \sqrt{\left[x^2 + \frac{4a^2b^2r^2}{x^2 \times (Sc.A)^2} - \frac{4ab \times Cc.A}{Sc.A}\right]}$ por ser $(Sc.A)^2 + (Cc.A)^2 = r^2$: lue-

go por la condicion del Problema será $2a = x + \frac{2abr}{Sc.A \times x} + \sqrt{\left[x^2 + \frac{4a^2b^2r^2}{x^2 \times (Sc.A)^2} - \frac{4ab \times Cc.A}{Sc.A}\right]}$.

Hágase ahora $x + \frac{2abr}{x \times Sc.A} = z = AB + AC$: y hechas las oportunas substituciones en la equacion antecedente, resultará $z + \sqrt{(z^2 - 4ab \times \frac{r + Cc.A}{Sc.A})} = 2a$; pero es $\frac{r + Cc.A}{Sc.A} = \frac{r}{Tc.\frac{A}{2}}$: luego se tendrá $\sqrt{(z^2 - \frac{4abr}{Tc.\frac{A}{2}})} = 2a - z$, y quadrando $z^2 - \frac{4abr}{Tc.\frac{A}{2}} = 4a^2 - 4az + z^2$; de donde resulta $z = a + \frac{rb}{Tc.\frac{A}{2}}$, y $BC = a - \frac{rb}{Tc.\frac{A}{2}}$.

Por tanto el Problema se reduce al antecedente.

PROBLEMA XCIII.

738. Entre las dos rectas dadas M y N, hallar dos medias proporcionales. *Fig.* 71.

Llámense, $M = a$, $N = b$, x la primera de las medias proporcionales que se buscan; y será $\therefore a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$: luego por la condicion del Problema se tendrá $\frac{x^3}{a^2} = b$; de donde resulta $x^3 = a^2 b$, y

$x = \sqrt[3]{a^2 b}$. Para construir esta equacion, supóngase $x^2 = ay$; y por ser $x^3 = a^2 b$, será $axy = a^2 b$, ó bien $xy = ab$. Por tanto la equacion $x^3 = a^2 b$ queda dividida en las dos indeterminadas $x^2 = ay$, $xy = ab$, de las quales la primera pertenece á la Parábola, y la segunda á la Hipérbola referida á las Asíntotas. Entre las Asíntotas AC y AB, y con la potencia igual á ab, descríbase la Hipérbola DE; y tomada qualquier abscisa $AF = x$, será su correspondiente ordenada $FG = y$. Ahora con el parámetro $= a$ cerca del exe AC, descríbase la Parábola AGH; y tomada en la tangente AB qualquier abscisa $AF = x$, será su correspondiente ordenada $FG = y$. Por tanto siendo G el punto de interseccion de las dos curbas descritas, será AF la primera de las dos medias, y FG la segunda.

PROBLEMA XCIV.

739. Dado el semicírculo ADB, y el ángulo GBI que forma la recta BG con la tangente BI, tirar la recta ADI, de modo que sea la cuerda $AD = GI$. *Fig.* 68.

Báxense las perpendiculares DF y GE al diámetro AB, y la GH á BI. Llámense, $AF = x$, el rádio $AC = a$, el ángulo $GBI = A$; y será $BF = 2a - x$. Siendo los triángulos AFD y GHI se-

mejantes, será $AD : GI = AF : GH$ ó EB; pero $AD = GI$: luego $EB = AF = x$, y por consiguiente $AE = BF = 2a - x$. Tambien por ser las rectas FD y EG paralelas, será $AF : FD = AE : EG$, esto es, $x : \sqrt{(2ax - x^2)} = 2a - x : EG = \frac{(2a-x) \times \sqrt{(2ax-x^2)}}{x}$; pero en el triángulo rectángulo BGH es la recta $BH : HG = Cc. A : Sc. A$: luego se tendrá la equacion $(2a-x)^{\frac{3}{2}} \times Sc. A = x^{\frac{3}{2}} \times Cc. A$: elevando los dos miembros á la potestad $\frac{2}{3}$, resultará $(Sc. A)^{\frac{2}{3}} \times (2a - x) = x \times (Cc. A)^{\frac{2}{3}}$; de donde $2a-x : x = (Cc. A)^{\frac{2}{3}} : (Sc. A)^{\frac{2}{3}}$, y componiendo $2a : x = (Cc. A)^{\frac{2}{3}} + (Sc. A)^{\frac{2}{3}} : (Sc. A)^{\frac{2}{3}}$; por consiguiente $x = 2a \times (Sc. A)^{\frac{2}{3}} : [(Cc. A)^{\frac{2}{3}} + (Sc. A)^{\frac{2}{3}}]$, ó bien $x = 2a \times a^{\frac{1}{3}} \times (Sc. A)^{\frac{2}{3}} : [a^{\frac{1}{3}} \times (Cc. A)^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} \times (Sc. A)^{\frac{2}{3}}]$. Para construir esta equacion, es necesario determinar dos medias proporcionales entre $Sc. A$ y a, y la primera será igual á $a^{\frac{1}{3}} \times (Sc. A)^{\frac{2}{3}}$: igualmente se deben determinar otras dos medias entre

$Cc.A$ y a, y la primera será igual á $a^{\frac{1}{3}} \times (Cc.A)^{\frac{2}{3}}$: luego será AF quarta proporcional á $a^{\frac{1}{3}} \times (Cc.A)^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} \times (Sc.A)^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}} \times (Sc.A)^{\frac{2}{3}}$, y $2a$.

PROBLEMA XCV.

740. Dividir el arco circular dado ACB en tres partes iguales. *Fig.* 69.

Supónganse los arcos AC, CD, DB iguales; tírense las cuerdas AC, CD, DB; báxense las perpendiculares CE, DF á la cuerda AB, y divídase ésta por medio en G. Llámense, $AG = a$, $GE = x$, $CE = y$; y será $EF = CD = 2x$. En el triángulo rectángulo AEC es $(AC)^2 = (CE)^2 + (AE)^2$, esto es, $4x^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, de donde resulta ser $x^2 + \frac{2ax}{3} = \frac{a^2}{3} + \frac{y^2}{3}$. Hágase $x + \frac{a}{3} = z$, y quadrando será $x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{a^2}{9} = z^2$, ó bien $x^2 + \frac{2ax}{3} = z^2 - \frac{a^2}{9}$: luego se tendrá $z^2 - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} + \frac{y^2}{3}$, y $z^2 - \frac{4a^2}{9} = \frac{y^2}{3}$, equacion á la Hipérbola, cuyo semiexe primero $= \frac{2a}{3}$, y el segundo $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Con el exe primero $BI = \frac{4a}{3}$, y con el segundo $= \frac{4a}{\sqrt{3}}$, descríbase la Hipérbola ICH; y el punto

C dará el arco AC tercera parte del propuesto.

PROBLEMA XCVI.

741. Determinar el triángulo ACB, de quien es dado el lado AC, y los ángulos BAC, C, B deben estar como los números 4, 3, 2. *Fig.* 70.

Tírese la recta AD, de modo que sea el ángulo $DAC=C$: luego será el triángulo ADC equilátero; pero el lado AC es dado: luego será dado dicho triángulo: mas debiendo ser el ángulo BAD la tercera parte de DAC, se determinará dicho ángulo (740) y se tendrá el triángulo ABC que se pedía.

PROBLEMA XCVII.

742. Dado el punto A en el plano formado por las rectas FB y BC puestas en ángulo recto, tirar por él la recta FAC, desuerte que baxada á ella la perpendicular BD, sea $CD=AF$. *Fig.* 72.

Del punto A báxense las perpendiculares, AE á BF, y AG á BC. Llámense las rectas, $AE=a$, $AG=b$, $GC=x$. Por la semejanza de los triángulos AEF y BDC es $AE:AF=DC:CB$; pero $AF=CD$: luego será $AE:AF=AF:BC$, esto es, $a:AF=AF:x+a$; de donde resulta ser $(AF)^2=a^2+ax$, y $(AF)^2-(AE)^2=a^2+ax-a^2=ax$; por consiguiente $EF=\sqrt{ax}$. Ahora por la semejanza de los triángulos AEF y CGA es $AE:EF=CG:GA$, esto es, $a:\sqrt{ax}=x:b$: luego será $ab=x\times\sqrt{ax}$; de donde $ab^2=x^3$.

FIN.

Fig. 61.

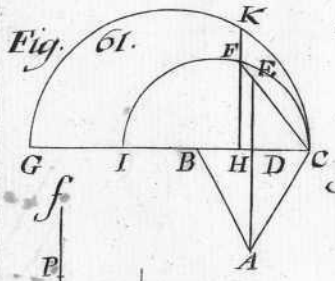


Fig. 62.

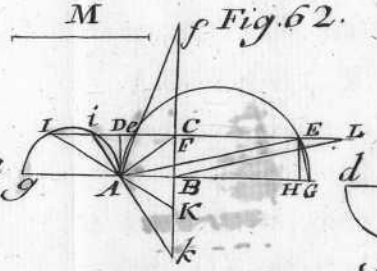
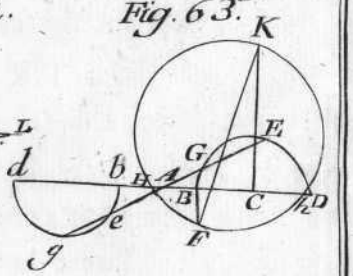


Fig. 63.



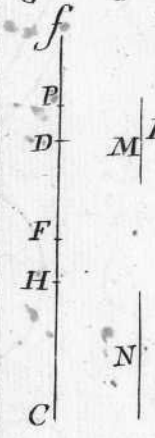


Fig. 64.

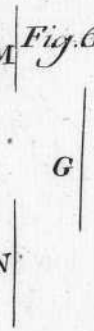


Fig. 65.

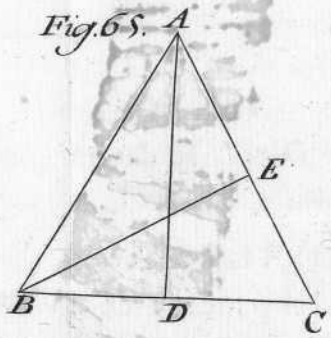


Fig. 66.

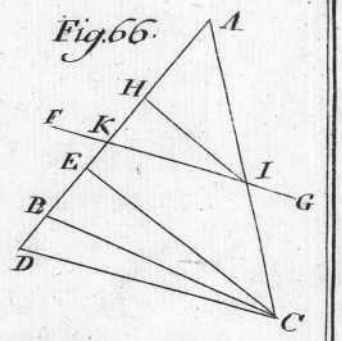


Fig. 67.

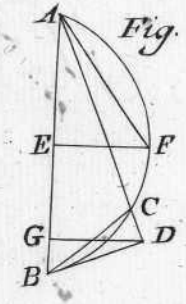


Fig. 68.

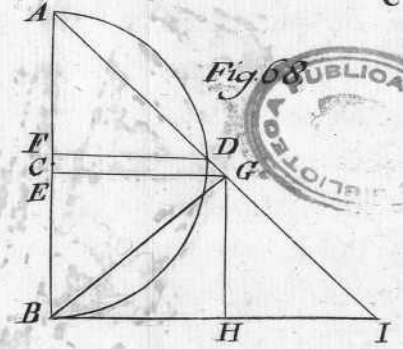


Fig. 69.

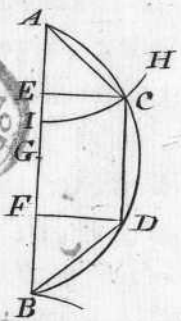


Fig. 70.

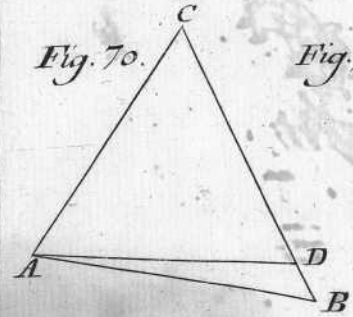


Fig. 71.

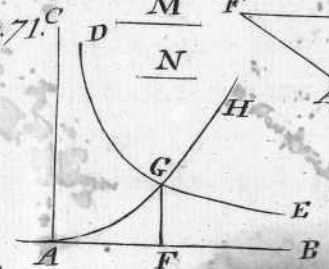
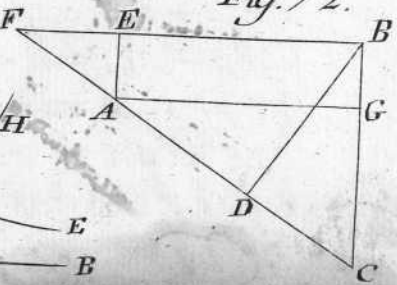
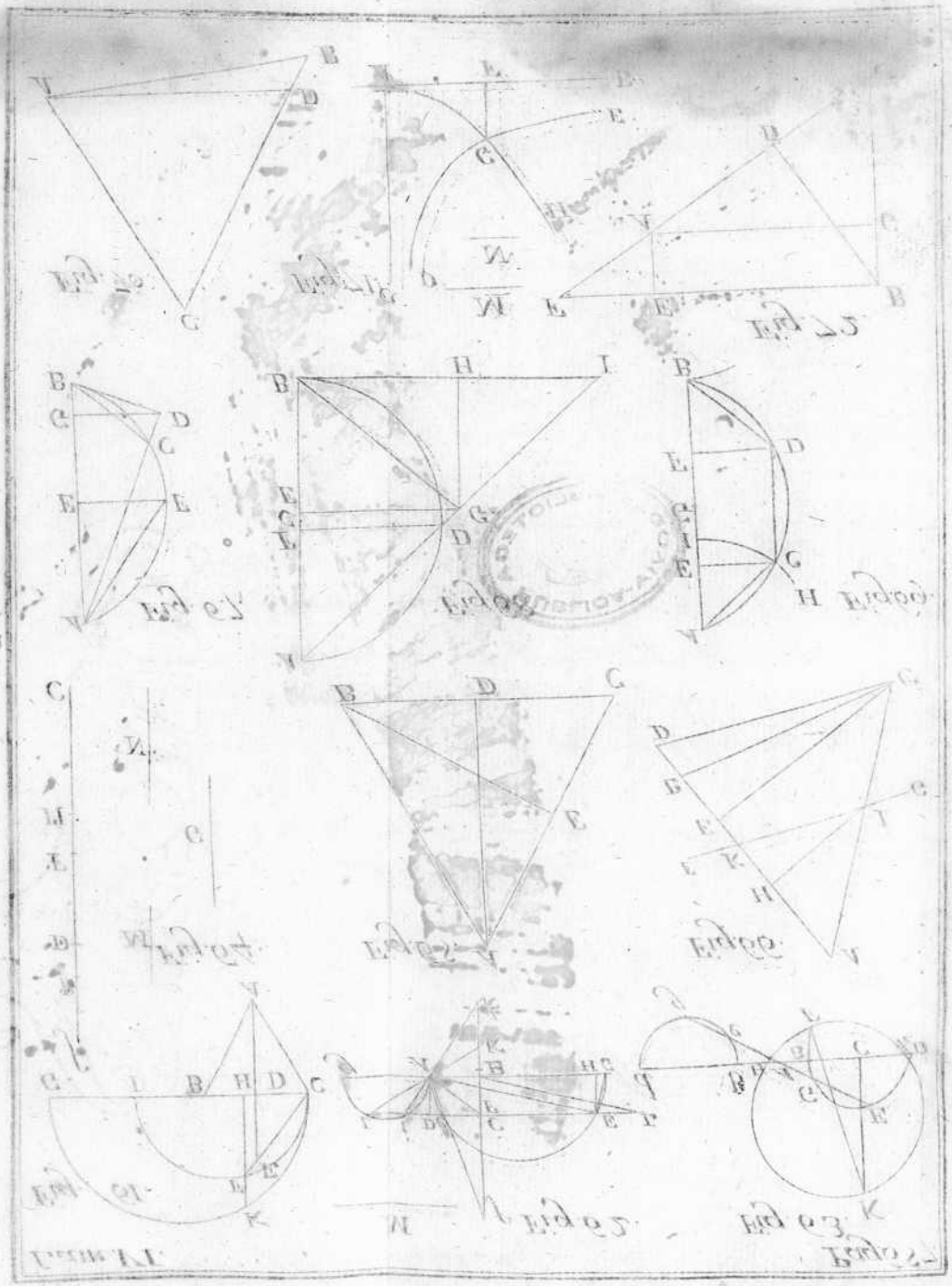


Fig. 72.



PUBLICA-VIGO BIBLIOTECA



71.444