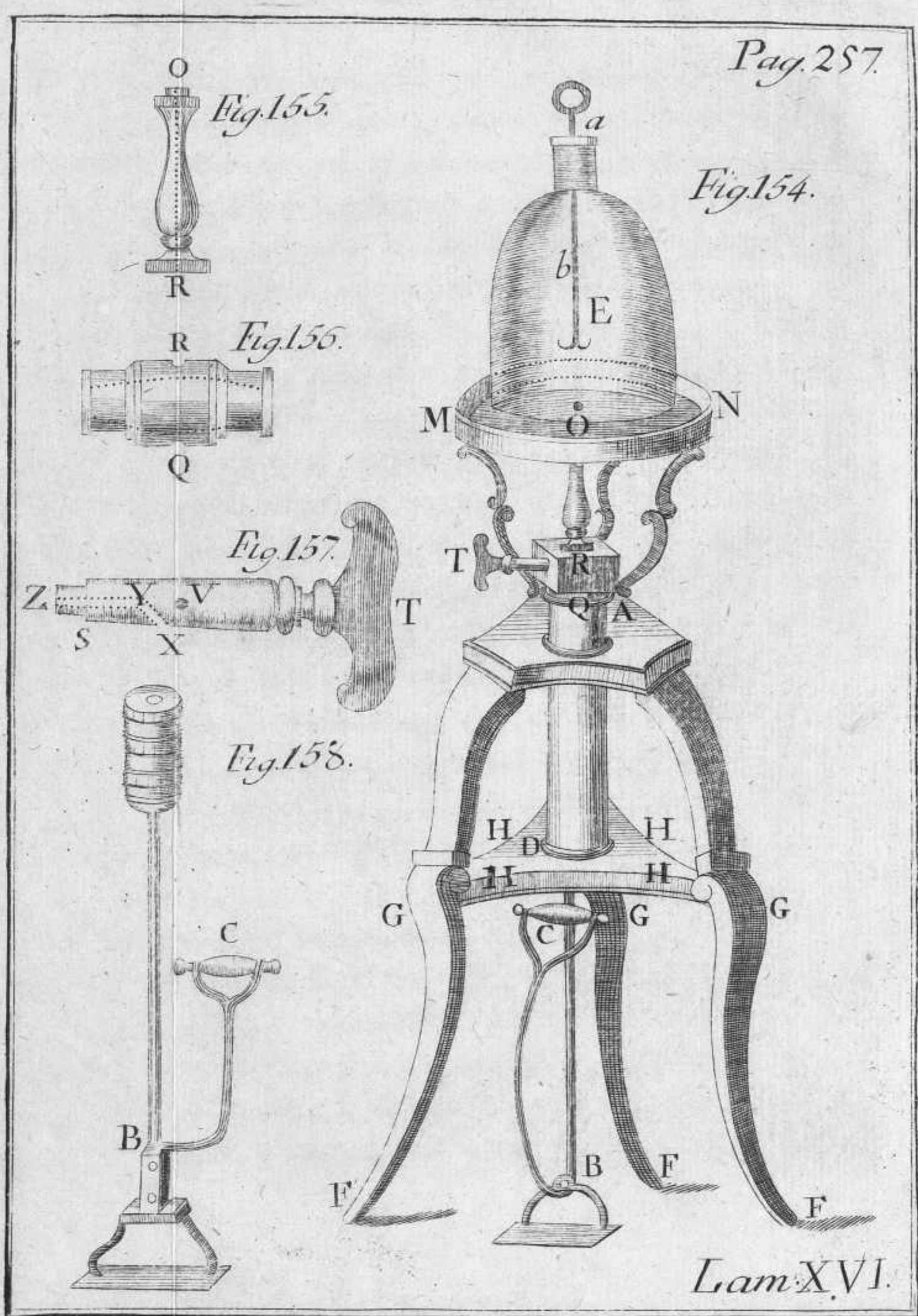

Pag. 257.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
a
b
E
M
N
O
T
R
Q
A
H
D
G
C
B
F
Z
Y
V
S
X
Lam. XVI.

madera ó metal, con cuya máquina se levanta fácilmente (191) el émbolo en cada una de las bombas con alternacion, de modo que el un émbolo sube al mismo tiempo que el otro baxa; algunos Físicos para dar salida al ayre interior de las bombas, colocan una válvula en el émbolo de ellas, que se abre quando el mismo émbolo se baxa; y otros Físicos usan de distintos artificios con el propio objeto: *DD* un tubo abierto en sus dos extremos para conducir el ayre del recipiente á la caxa *FF*; entra exâctamente dicho tubo por uno de sus extremos en la misma caxa, y por el otro en la parte inferior de la canilla *M* correspondiente á su agujero: *E* el recipiente ó campana de vidrio: *LL* la platina: *GG* un tubo de vidrio abierto por sus extremos, de los quales el uno pasa al otro lado de la platina, y el otro está sumergido en una taza *H* llena de mercurio; sobre la superficie de este mercurio nada un pedazo de corcho con un agujero de parte á parte en su centro, donde está puesta verticalmente una regla de madera, la qual está dividida en pulgadas, lineas y quartas de linea, de suerte que levantándose ó baxándose el mercurio en el tubo, el corcho y la regla se baxan ó levantan al mismo tiempo: *I*, *I*, *I*, *I*, son los apoyos y la tabla: y *K*, *K*, *K*, *K* son los apoyos de la platina *LL*. De lo que se ha dicho anteriormente respecto á la Máquina Pneumática simple, facilmente se evidencian la maniobra y los fundamentos, por los que se logra el vacío en el recipiente ó campana de vidrio colocada encima de la platina de la misma máquina compuesta.

ESCOLIO I.

307. Nótese que la referida campana ó recipiente *E* de vidrio (*Fig.* 154 y 159.) tiene en la parte superior una pequeña abertura circular guarnecida de cuero y fieltro untados, cuya abertura queda cerrada exâctamente con el grueso del cilindro *ab* de cobre, de modo que este cilindro se pueda levantar ó baxar libremente sin dar paso al ayre exterior. Al extremo de dicho cilindro está unido un garabatillo, á fin de que se puedan levantar ó baxar, unir ó desunir los cuerpos colocados en dicho recipiente; lo que tiene su uso para hacer en el vacío diferentes experimentos útiles: como por exemplo 1°. si se coloca el barómetro baxo del recipiente de la máquina pneumática; se observará que á proporcion que se extrae el ayre del recipiente, se va disminuyendo la altura del mercurio en dicho barómetro; lo qual confirma el principio establecido anteriormente (295): 2°. si se extrae el ayre del recipiente; á proporcion que este ayre se dilata, sube el mercurio en el tubo

GG referido (306) en la máquina pneumática compuesta: 3°. si se pone qualquier animal baxo del recipiente; extraido el ayre del mismo recipiente, perece dicho animal: dígase lo mismo respecto á los peces exîstentes en un vaso lleno de agua, que se coloque dentro del recipiente, con la diferencia que estos perecen con mayor lentitud que aquellos; de donde resulta que la accion del ayre es necesaria á la conservacion de la vida de los animales: 4°. si se pone una vela encendida baxo del recipiente; extraido el ayre del mismo recipiente, dicha vela se apaga, y el humo de ella baxa hácia la platina: tambien extraido el ayre del recipiente, la pólvora que entonces se encienda baxo del recipiente, se consume sin estrépito, y se exhala en un humo espeso en que apenas se percibe una pequeña luz azulada; de donde resulta que el ayre es necesario á la produccion y conservacion de la llama, y que el humo es tambien pesado: &c.

ESCOLIO II.

308. Tambien nótese que si se comprime el ayre en un vaso, y sucesivamente se hace un agujero en qualquiera parte del fondo, pared ó tapa del mismo vaso, saldrá cierta porcion de ayre por dichos agujeros. Por tanto la fuerza elástica del ayre tiene su

direccion hácia qualquiera parte, esto es, actúa de arriba abaxo, de abaxo arriba, y lateralmente; y además hace presion sobre qualquier punto de la capacidad del referido vaso.

PROPOSICION XX.

309. Determinar la gravedad específica del ayre relativamente á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad.

Tómese un vaso esférico de cobre que tenga un cuello, á quien esté aplicada una llave para cerrar y abrir la comunicacion del ayre exterior con el interior; pónganse algunos pedazos de plomo en dicho vaso, para que sea de gravedad específica mayor que el agua de lluvia, y de este modo sumergido en dicha agua pésese por medio de la balanza hidrostática. Ahora extraido el ayre (306) de dicho vaso, vuélvase á pesar de nuevo del mismo modo; y la diferencia de dichos dos pesos dará él del ayre que se contenia en el vaso. Hecho esto, llénese perfectamente dicho vaso del agua en que está sumergido, y ciérrese despues con la llave; de este modo vuélvase á pesar en la misma agua por medio de la balanza, y restando de este peso el segundo, se tendrá el peso del agua de lluvia en un volumen igual al del ayre sacado del vaso: luego dividiendo (234) el peso del ayre sacado del vaso por el peso del agua de lluvia en igual volumen, se tendrá en el quociente la gravedad específica del ayre relativamente á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad. Que es &c.

ESCOLIO I.

310. Con el referido método el Señor Hauksbee, ante la R. Sociedad de Londres, hizo ver que es la gravedad específica del ayre á la del agua de lluvia como 1 á 885: y las repetidas experiencias de otros hábiles Físicos demuestran claramente que siendo el ayre de una mediana densidad y á cortas alturas sobre el nivel del mar, puede fixarse su gravedad específica á $\frac{1}{850}$ respecto á la del agua de lluvia, supuesta igual á la unidad, de suerte que la gravedad específica del ayre respecto á la del mercurio será $\frac{1}{850 \times 14}$, por ser la gravedad específica del agua próxîmamente la parte $\frac{1}{14}$ de la del mercurio. Por tanto pesando un pie cúbico de agua de lluvia setenta libras de París, pesará $\frac{70}{850}$ un pie cúbico de ayre, esto es, una onza y $\frac{1}{3}$ de ella próxîmamente.

ESCOLIO II.

311. Nótese que por ser tan corta la gravedad específica del ayre, se podrá considerar sin error sensible que el cuerpo que se sostiene sobre un fluido no tiene sumergida en el ayre aquella parte del mismo cuerpo que queda fuera de dicho fluido: y asi podrá servir el teorema establecido antes (275) para determinar el volumen de la parte de dicho sólido sumergida en el fluido, sin hacer uso en la práctica del principio demostrado (294).

PROPOSICION XXI.

312. Determinar la presion del ayre sobre la base AB horizontal. *Fig.* 161.

Tírense las verticales AP y BQ; y considérese la coluna $ABQP$ del ayre dividida en las partes evanecentes $ACDB$, $CDFE$, &c. siendo CD, EF, &c. horizontales. Nómbrense, qualquiera altura $AL = x$, G la gravedad específica del ayre á dicha altura, y el elemento $LN = dx$; y se tendrá que el peso de qualquiera coluna evanecente $LNOM$ será igual á $LM \times LN \times G$ ó bien á $AB \times Gdx$; por consiguiente el peso de todas las colunas evanecentes $ACDB$, $CEFD$, &c. será igual á $AB \times S.Gdx$; pero la presion del ayre sobre la base horizontal AB es igual (250) al peso de dichas colunas: luego la presion del ayre sobre la base horizontal AB será igual á $AB \times S.Gdx$. Que es &c.

COROLARIO.

313. Si se nombran, X la altura de la coluna del mercurio equilibrado en el barómetro, a la base de dicha coluna, y se supone la densidad del mercurio igual á la unidad; será $a \times X = a \times S. - Gdx$, de donde $X = S. - Gdx$. Se usa del signo menos; porque creciendo la altura x del ayre, se disminuye la altura X del mercurio.

ESCOLIO.

314. Nótese que la enorme presion del ayre sobre el cuerpo humano no le violenta en virtud de la fuerza elástica del ayre cerrado en la sangre, en la carne, y en las cavidades del mismo cuerpo.

PROPOSICION XXII.

315. Dadas, la gravedad específica del ayre al nivel del mar, y la altura del mercurio en el barómetro colocado al mismo nivel; determinar la altura X del mercurio en el barómetro colocado á qualquiera distancia x de dicho nivel.

Llámense, g la gravedad específica del ayre al nivel del mar, b la altura del mercurio al mismo nivel, G la gravedad específica del ayre á qualquiera distancia x de dicho nivel; y expresando la densidad del mercurio por la unidad, se tendrá (313) $S.-Gdx = X$; pero siendo las densidades del ayre ó sus gravedades específicas proporcionales (297) con los pesos que le comprimen, será $X : b = G : g$, y $X = \frac{bG}{g}$: luego $S.-Gdx = \frac{bG}{g}$; y diferenciando esta equacion, en que b y g se consideran constantes, se tendrá $-Gdx = \frac{b \times dG}{g}$; por consiguiente $\frac{dG}{G} = -\frac{gdx}{b}$; é integrando será $L.G = -\frac{gx}{b} + L.A$. La cantidad constante $L.A$ añadida á la integral se determina, suponiendo $x = o$, y $G = g$; por consiguiente será $L.g = L.A$: luego se tendrá $L.G = -\frac{gx}{b} + L.g$, de donde $L.G - L.g = -\frac{gx}{b}$, ó bien $L.\frac{G}{g} = -\frac{gx}{b} \times L.e$, suponiendo $L.e = 1$ (II. 341.): luego será $G = g \times e^{-\frac{gx}{b}}$; pero $X = S.-Gdx$: luego se tendrá $X = S.-g \times e^{-\frac{gx}{b}} \times dx = b \times e^{-\frac{gx}{b}}$ (III. 108.); por consiguiente $L.X = L.b - \frac{gx}{b}$, y por medio de esta equa-

Fig. 160.

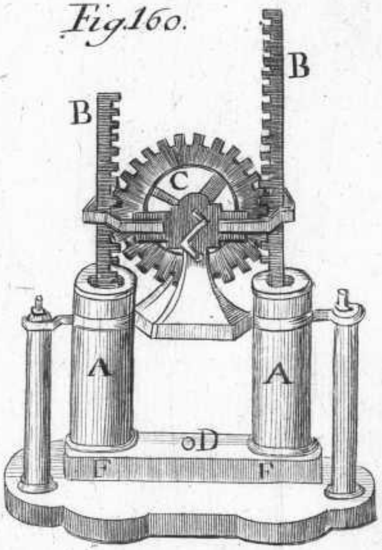


Fig. 159.

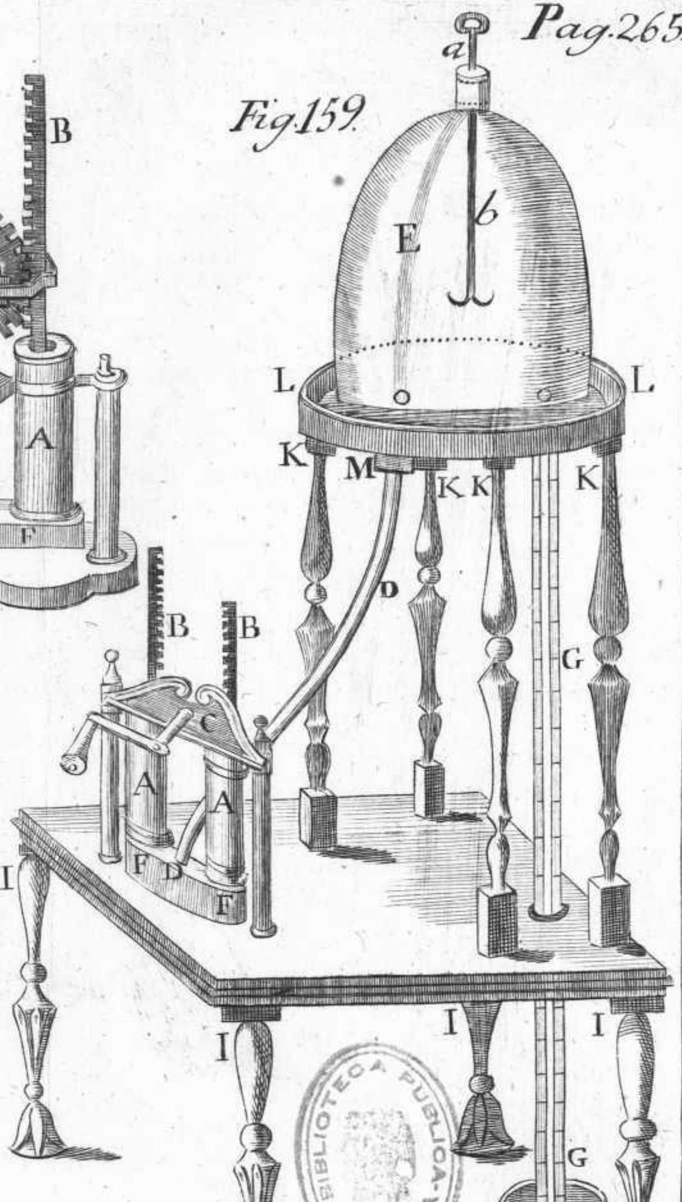
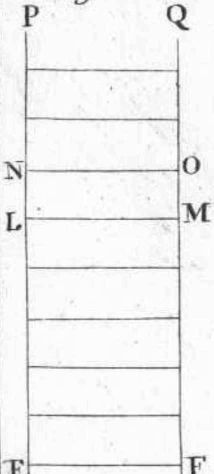


Fig. 161.



Lam. XVII.

cion se tendrá la altura X del mercurio respecto á qualquiera altura x dada sobre el nivel del mar. Para dar una expresion mas cómoda á dicha equacion, supóngase $\frac{gx}{b} = L.m$; y se tendrá $L.X = L.b - L.m = L.\frac{b}{m}$, en que se podrán considerar los logaritmos hiperbólicos como los ordinarios de las tablas. Que es &c.

COROLARIO I.

316. Por medio de la equacion $G = g \times e^{-\frac{gx}{b}}$ demostrada en la Proposicion antecedente, se determinará la gravedad específica del ayre á qualquiera altura x dada sobre el nivel del mar. Ahora si se nombra a la altura á que se elevaria la atmósfera, si su peso conservándose el mismo, tuviera siempre la misma gravedad específica g que tiene al nivel del mar, y si además se expresa la densidad del mercurio por la unidad, será $1 \times b = g \times a$: luego substituyendo el valor de b en la equacion antecedente, será tambien $G = g \times e^{-\frac{x}{a}}$.

COROLARIO II.

317. Si se supone la gravedad específica del ayre al nivel del mar, esto es, $g = \frac{1}{850}$ respecto á la del

agua de lluvia, supuesta igual á la unidad; la altura b del mercurio á dicho nivel corresponderá próxîmamente á la de 32 pies de agua, por ser la gravedad específica del mercurio casi catorce veces mas que la del agua; por consiguiente será $\frac{1}{850} \times a = 32$ pies, y $a = 850 \times 32 = 27200$ pies: luego la gravedad específica G del ayre á qualquiera altura x sobre el nivel del mar será igual á $g \times e^{-\frac{x}{27200 \text{ pies}}}$, y $L. \frac{G}{g} = -\frac{x}{27200 \text{ pies}}$.

ESCOLIO.

318. Adviértase que no se pueden considerar las determinaciones antecedentes como exâctas, y mucho mas quando se trata de alturas considerables sobre el nivel del mar: 1°. porque la gravedad específica g del ayre es variable; 2°. porque las variaciones que suceden en el mercurio, pueden depender en parte de la elasticidad del ayre condensado por el frio ó rarefacto por el calor: 3°. porque el ayre no se comprime exâctamente á qualquiera distancia en razon del peso: 4°. porque la gravedad disminuye á distancias considerables: 5°. y por los vapores y exhalaciones que se mezclan en el ayre. Véase la grande

obra de M. de Luc sobre los Barómetros y Termómetros.

EXEMPLO I.

319. Se pide hallar la altura del mercurio en el barómetro colocado en la cima del Pico de Tenerife.

Consta por las medidas tomadas y por las observaciones hechas que la altura de dicha montaña es 13158 pies ó bien 157896 pulgadas, y que la altura del mercurio al nivel del mar es 27 pulgadas y 10 lineas, esto es, $x = 157896$ pulgadas, y $b = 27\frac{5}{6}$ pulgadas: luego substituyendo estos valores en la fórmula $L.m = \frac{gx}{b}$, se tendrá $L.m = \frac{157896}{850 \times 14 \times 27\frac{5}{6}}$ $= 0,4767152$, por ser la gravedad específica del ayre $g = \frac{1}{850 \times 14}$ próximamente respecto á la del mercurio; y multiplicando dicho logaritmo hiperbólico por 0,4342945 (II. 335.), se tendrá 0,2070347 por el logaritmo ordinario de m; por consiguiente será $L.X = L.\frac{b}{m} = 1,2375306$, cuyo valor corresponde en las tablas ordinarias al número 17,28, esto es, la altura X del mercurio en la cima de dicha montaña debe ser igual por el cálculo á 17,28 pulgadas, ó bien á 17 pulgadas y $3\frac{1}{3}$ lineas, mientras por las observaciones hechas en la misma cima se halló ser 17 pulgadas y 5 lineas.

EXEMPLO II.

320. Se pide hallar la gravedad específica del ayre á la altura de 1000 pies sobre el nivel del mar.

Substitúyase en la fórmula (317) $L. \frac{G}{g} = -\frac{x}{27200 \text{ pies}}$ el valor dado de x; y se tendrá $L. \frac{G}{g} = -\frac{10}{272}$: luego multiplicando este logaritmo hiperbólico por 0,4342945, se tendrá el logaritmo ordinario $-0,0159667$ á quien corresponde próximamente el número 0,964 que será igual á $\frac{G}{g}$; por consiguiente será $g : G = 1 : 0,964 = 1000 : 964$, esto es, que á 1000 pies de altura sobre el nivel del mar la gravedad específica del ayre se halla disminuida en $\frac{1}{26}$ próximamente.

Del modo de elevar el agua con las Bombas atraente, impelente y compuesta, y de las potencias que se necesitan para sostenerla en equilibrio: de la Bomba á fuego, y de la Máquina de compresion.

PROPOSICION XXIII.

321. Manifestar el modo con que se eleva el agua por medio de la Bomba atraente representada en la Fig. 162, que consta; del tubo vertical *EFYX* que se llama Cuerpo de la bomba; del émbolo *ACDB* que llena exâctamente la concavidad de dicho tubo, estando unido á dicho émbolo la barra *IP* para subirle y baxarle; del tubo vertical *NKQO*, llamado tubo atraente, que está unido al cuerpo de la bomba, y que entra en el agua, cuya superficie se supone ser *RS*; y de las válvulas *L* y *M*, que tapan los diafragmas del émbolo y de la base del cuerpo de la bomba, y que se abren de abaxo arriba.

Sean; *CGHD* el espacio en que se mueve el émbolo de abaxo arriba, y de arriba abaxo, por medio de la potencia *P* aplicada á la referida barra *IP*; la distancia, que hay entre las superficies horizontales

GH y *RS*, igual á la altura de una coluna de agua equivalente al peso del ayre exterior; las válvulas *L* y *M* cerradas; y el ayre contenido en los espacios *RNOS* y *ECDF* de igual densidad con el exterior, cuya densidad se considera uniforme en toda la altura de la bomba. Esto supuesto, si con la potencia *P* se sube el émbolo *ACDB* desde *CD* á *GH*; el ayre contenido en *ECDF* se dilatará, ocupando el espacio *EGHF*: luego el ayre exterior, que insiste sobre *AB* por ser mas denso tendrá cerrada la válvula *L*; además el ayre que se contiene en la parte *NRSO* del tubo atraente, por su mayor densidad abrirá la válvula *M*; y por igual razon el ayre exterior, que actúa sobre la superficie *RS* del fluido, hará subir el agua en el tubo atraente *RNOS* hasta cierta altura *rs* durante la referida subida del émbolo á *GH*, en cuya posicion la válvula *L* se cerrará por sí, puesque cesa la dilatacion del ayre interior de la bomba. Ahora si se baxa el émbolo desde *GH* á *CD*, se comprimirá el ayre contenido en *GEFH*: luego este tendrá cerrada la válvula *M*, y abrirá la válvula *L* hasta equilibrarse con el ayre exterior, en cuyo estado la misma válvula se cerrará por sí, hallándose en el espacio *CEFD* el ayre de igual densidad con el exterior. Y repitiendo las citadas operaciones de subir y baxar el émbolo, ascenderá cada vez el agua en el tubo *NRSO* á mayor altura, entrará en el cuerpo de la bomba, y últimamente llegará á tocar la válvula *L* en la suposicion de no quedar ayre entre la superficie *CD* y la del agua, de modo que la fuerza elástica del mismo ayre, y el peso del agua introducida en el tubo atraente, ó en este y en el cuerpo de la bomba, no hagan equilibrio con la presion del ayre exterior sobre la superficie *RS* del agua. Y en dicha suposicion, á cada subida del émbolo desde *CD* á *GH* se formará un perfecto vacío en el espacio *CGHD*; y la presion del ayre exterior hará subir el agua hasta *GH*: y entonces á cada baxada del émbolo se abrirá la válvula *L*, por el diafragma (mientras que la superficie *GH* vuelve á *CD*) saldrá toda el agua que se contenia en *CGHD*; y cerrándose la válvula *L*, insistirá dicha agua sobre *AB*: en esta disposicion, subiendo el émbolo, éste acompañará la misma agua en su salida por la canal *V*. Pero en el caso del citado equilibrio supóngase que el agua queda á la altura *TZ*, y que se sube el émbolo desde *CD* á *GH*. Nómbrense, a la altura *NR* del tubo atraente sobre la superficie *RS* del agua, b el radio del mismo tubo, c el radio del cuerpo de la bomba, $EC = d$, $CG = e$, $RT = x$, $\frac{p}{2r}$ la razon de la periferia del círculo al diámetro, y f la altura de una coluna de agua equivalente á la presion del ayre exterior, ó á la fuerza elástica de él que se contiene en *TNECDFOZ*, estando el émbolo en *CD*: y serán, el cilindro *TO* $= \frac{pb^2}{2r} \times (a - x)$, el cilindro $ED = \frac{p}{2r} \times c^2 d$, el cilindro $EH = \frac{pc^2}{2r} \times (d + e)$, el sólido *TNECDFOZ* $= \frac{pl^2}{2r} \times (a - x) + \frac{pc^2 d}{2r}$, y el sólido *TNEGHFOZ* $= \frac{pb^2}{2r} \times (a - x) + \frac{pc^2}{2r} \times (d + e)$. Ahora siendo las fuerzas que comprimen el ayre en la razon inversa de los volúmenes (297) en que el mismo ayre queda cerrado, será la fuerza elástica del ayre en el espacio *TNEGHFOZ* igual al peso de una coluna de agua con la altura igual á $f \times \frac{TNECDFOZ}{TNEGHFOZ}$; y añadiendo á dicha altura la altura *RT* del agua contenida en el tubo atraente sobre la superficie *RS*, se tendrá en el referido caso del equilibrio $f = RT + f \times \frac{TNECDFOZ}{TNEGHFOZ}$; y substituyendo los valores de estas cantidades, se tendrá $f = x + f \times \frac{b^2 \times (a - x) + c^2 d}{b^2 \times (a - x) + c^2 \times (d + e)}$, de donde $x = \frac{a + m \times (e + d) \pm \sqrt{[(a + m \times (e + d))^2 - 4mef]}}{2}$, haciendo $\frac{c^2}{b^2} = m$. Con el mismo método se hallará que el agua quedará equilibrada en el cuerpo de la bomba, entre EF y CD, siendo $x = \frac{a+e+d \pm \sqrt{[(a+e+d)^2 - 4ef]}}{2}$. Por tanto si el valor de x es real en uno ú otro caso, el agua se equilibrará en el tubo atraente ó en el cuerpo de la bomba entre los puntos E y C: luego para que dicha agua no se equilibre, y por consiguiente pueda subir á la altura GH, será necesario que dichos valores sean imaginarios, esto es, $(a + m \times (e+d))^2 < 4mef$, y $(a+e+d)^2 < 4ef$. Que es &c.

ESCOLIO.

322. En la Proposicion antecedente se ha supuesto ser la distancia que hay entre las superficies GH y RS igual á la altura de una coluna de agua equivalente al peso del ayre exterior; por consiguiente dicha distancia será próximamente de 32 pies, si la altura del mercurio en el barómetro colocado en el mismo sitio de la bomba tiene $27\frac{1}{2}$ pulgadas: pero afin de que pueda llegar el agua á GH aun en las mínimas presiones del ayre exterior, se disminuirá la dicha distancia de 32 pies en 14, 28, 42, &c. lineas, si la dicha altura del mercurio baxa de 1, 2, 3, &c. lineas. Dígase lo mismo pa-

ra el aumento de los referidos 32 pies, si la altura fuese mayor de $27\frac{1}{2}$ pulgadas en el mismo sitio de la bomba. Adviértase que en la práctica la referida distancia se hace menor que la que corresponde á la expresada altura, porque no es posible evacuar totalmente el ayre interior de la bomba, y que por otra parte el peso de la válvula M es un obstáculo para la expulsion del ayre y la subida del agua, cuyo obstáculo no puede vencerse sino por la presion del ayre exterior.

PROPOSICION XXIV.

323. Determinar la potencia P, que tiene en equilibrio el émbolo sumergido en el agua introducida en el cuerpo de la bomba atraente. *Fig.* 162.

Supóngase; que la densidad del ayre es la misma respecto á toda la altura de la bomba; que estando el agua en su mayor altura XY, queda el émbolo en su menor altura CD; y que la altura ab corresponde á la altura vertical de una coluna de agua equivalente á la presion del ayre sobre las superficies RS ó XY del agua, siendo db la distancia de las CD y RS. Por tanto en virtud de la presion del ayre sobre la superficie RS del agua actua el agua $RNECDFOS$ sobre CD con una fuerza igual (295) á $CD \times ab$; pero por la gravedad de dicha agua se disminuye la misma fuerza en la cantidad $CD \times db$: luego $CD \times ad$ será la presion que actua de abaxo arriba sobre la superficie CD. Ahora en virtud de la presion del ayre sobre la superficie XY del agua actua sobre CD de arriba abaxo una fuerza igual á $CD \times ab$, á la que añadiendo $CD \times BY$ en virtud de la gravedad del agua, se tendrá que la fuerza total que actua de arriba abaxo sobre CD será igual á $CD \times (BY + ab)$; pero la presion que actua de abaxo arriba sobre CD es igual por lo demostrado á $CD \times ad$: luego la fuerza que actua sobre CD de arriba abaxo será igual á $CD \times (BY + db)$, esto es, igual al peso de una coluna de agua, que tiene su base igual á la del émbolo, y la altura igual á la distancia de las superficies horizontales XY y RS del agua, disminuida dicha distancia en la altura del émbolo; por consiguiente la potencia equilibrante P será igual á dicho peso sumado con el correspondiente peso del émbolo. Dígase lo mismo respecto á qualquiera otra posicion del mismo émbolo sumergido en el agua. Que es &c.

COROLARIO.

324. Si el émbolo $CABD$ no se halla sumergido en el agua, de suerte que ésta quede en el tubo atraente ó en el cuerpo de la bomba hasta CD; con el mismo método se demostrará que, mientras el ém-

bolo pasa de *CD* á *GH*, la potencia equilibrante *P* será proporcional con el peso del émbolo aumentado en el peso de una coluna de agua, que tiene *CD* por base, y por altura la del agua introducida entonces en la bomba sobre la superficie *RS*.

ESCOLIO.

325. Nótese que ordinariamente se aumenta la potencia *P* hallada antes en la tercera parte de su valor para poner la máquina en movimiento, y superar la resistencia del rozamiento y las demas imperfecciones que pueda tener la misma máquina.

PROPOSICION XXV.

326. Manifestar el modo, con que se eleva el agua á qualquiera altura por medio de la bomba impelente representada en la Fig. 163, que se compone; del tubo vertical *XEFY*, que se llama Cuerpo de la bomba, y que entra en el agua, cuyo nivel se supone ser *RS*; del émbolo *ACDB*, que llena exâctamente la concavidad de dicho tubo, estando unida á dicho émbolo la armazon *IfbaP* para subirle y baxarle con la potencia *P*; del tubo *NOQK* llamado tubo ascendente, que está unido al cuerpo de la bomba; y de las válvulas *L* y *M*, que tapan los diafragmas del émbolo y de la base del cuerpo de la

bomba, y que se abren de abaxo arriba.

Supóngase ser; *AGHB* el espacio en que se mueve el émbolo de arriba abaxo y de abaxo arriba en virtud de la potencia *P*; *GH* la primera posicion del mismo émbolo baxo del nivel *RS* del agua; las válvulas *L* y *M* cerradas en dicha posicion; y el ayre contenido en *GEFH* de igual densidad con el exterior, cuya densidad se supone ser la misma en toda la altura de la bomba. Esto supuesto, si por medio de la potencia *P* se baxa el émbolo desde *GH* á *CD*, se dilatará el ayre contenido en *EGHF*: luego por la presion del ayre exterior *NOQK* mas denso, quedará cerrada la válvula *M*; por el peso del agua, y la presion del ayre exterior sobre el nivel *RS* del agua, se abrirá la válvula *L*; pasará el agua en el cuerpo de la bomba hasta *GH*; y entonces se cerrará por sí la válvula *L* por tener el ayre contenido en *GEFH* su primitiva densidad. Ahora si se sube el émbolo desde *CD* á *GH*, este émbolo hará subir el agua que habia entrado en el cuerpo de la bomba; el ayre oprimido por dicha agua abrirá la válvula *M*; y pasará agua en el tubo *NOQK*, hasta que el émbolo haya llegado á *GH*. En este estado si se baxa el émbolo; la válvula *M* se cerrará por sí en virtud del peso del agua y del ayre exterior; con lo que se detendrá en el tubo *NOQK* el agua que en él se habia introducido, hasta que por otra operacion semejante á la anterior se introduzca agua en el mismo tubo; y así continuando, se elevará el agua hasta qualquiera altura *KQ* donde se necesite. Que es &c.

PROPOSICION XXVI.

327. Determinar la potencia *P* que tiene equilibrado el émbolo *ACDB* sumergido en el agua introducida en el tubo ascendente *NOQK* hasta qualquiera altura *KQ*. *Fig.* 163.

Supóngase que la densidad del ayre es la misma en toda la altura de la bomba, y que el émbolo *ACDB* es inferior al nivel *RS* del agua. Es evidente que en dichas suposiciones la potencia *P* no sostiene la presion del agua comprehendida entre la base *CD* del émbolo y el nivel *RS*, puesque dicha presion está equilibrada por la del agua, que rodea la bomba y pasa por la abertura *L* del émbolo: luego la potencia *P* sostiene solamente la presion que exerce el agua contenida entre las superficies *RS* y *QK* sobre la base *CD* del émbolo, cuya presion es igual al peso de una coluna de agua, que tiene *CD* por base, y por altura la distancia entre dichas dos superficies; por consiguiente la potencia equilibrante *P* será igual á dicho peso aumentado en el correspondiente peso de la armazon *IfbaP*. Si la bomba tiene su émbolo *CABD* superior al nivel del agua, que sea por exemplo *R' S'*, se demostrará con el mismo método expuesto antes (323) que la potencia equilibrante *P* es próximamente igual al peso de una coluna de agua, que tiene *CD* por base, y por altura la distancia entre las superficies *KQ* y *R' S'* del agua y además al referido peso de la armazon. Que es &c.

PROPOSICION XXVII.

328. Manifestar el modo con que se eleva el agua hasta qualquiera altura *XY* por medio de la Bomba atraente é impelente representada en la Fig. 164.

Por medio de la potencia *P* aplicada al émbolo *ACDB* se introduce el agua en el espacio *RNOSEF HGefdc* con el mismo método que se ha manifestado (321) en la bomba atraente. En esta disposicion, si en virtud de la potencia *P* se baxa el émbolo *ACDB* desde *GH* á *CD*; el agua no pudiendo pasar por la válvula *M* que queda cerrada por sí, abre la válvula *L*, y se introduce en el tubo *TJYX*; y asi continuando, se elevará el agua á qualquiera altura *XY*, y por la canal *V* se conducirá adonde se necesite. Que es &c.

PROPOSICION XXVIII.

329. Determinar la potencia *P* que tiene equili-

brado el émbolo en la bomba atraente é impelente *Fig.* 164.

Si se supone que, levantado el émbolo *ACDB*, el agua ha subido á *GH* en la bomba atraente; la potencia equilibrante *P* será igual (323) al peso de una coluna de agua, que tiene *AB* por base, y por altura la distancia entre las superficies *GH* y *RS* del agua, disminuida la misma distancia en la altura del émbolo, y además al correspondiente peso del émbolo. Y si se supone que, baxado el émbolo de *GH* á *CD*, el agua ha subido á *XY* en el tubo ascendente de la bomba impelente; la potencia equilibrante *P* será igual al peso de una coluna de agua, que tiene *CD* por base, y por altura la distancia vertical entre la misma base y la superficie *XY* del agua, disminuido dicho peso en él del émbolo. Dígase lo mismo respecto á qualquiera otra posicion del émbolo, así mientras sube el émbolo de *CD* á *GH*, como tambien mientras baxa de *GH* á *CD*. Que es &c.

ESCOLIO.

330. Las tres especies de bombas descritas anteriormente (321, 326, 328.) son las fundamentales; porque aunque se pueda variar la disposicion de sus partes, no formarán éstas sino combinaciones mas ó menos sencillas que aquellas, y se fundarán sus efec-

tos sobre los mismos principios; y así la perfeccion de estas máquinas consistirá en la diminucion del rozamiento, empleando buenos émbolos y válvulas fieles. El detalle de la construccion y eleccion de las materias propias para formar las piezas de una bomba se puede ver en la Arquitectura hidráulica de M. Belidor. Nótese que en las Figuras 162 y 164 viene representada una misma especie de válvulas, y otra en la Figura 163, por ser las que generalmente se usan.

PROPOSICION XXIX.

331. Manifestar el modo, con que se eleva el agua por medio de la Bomba á fuego representada en la Fig. 165, que se compone; de una caldera *AB* que, está cerrada en forma de alambique con el fondo convexô, tiene las tres quartas partes llenas de agua, é insiste sobre el hornillo *C*; del vaso *EF* con su llave *H*, de modo que se abra la comunicacion del mismo vaso con dicha caldera por medio del tubo *AD*, y al propio tiempo quede cerrada dicha comunicacion con el tubo *G*, ó al contrario; y de la bomba *OTYZ* que comunica con el vaso *EF* por medio del tubo *FQ*, y que tiene, los dos émbolos *LN* y *PR* firmes en la misma bomba con las válvulas *J* y *K* que se abren de abaxo arriba, el tubo atraente *TO*, y el tubo ascendente *YZ*.

Ciérrese con la llave *H* la comunicacion de la caldera *AB* con el vaso *EF*; enciéndase el fuego en el hornillo *C*; y quando se hayan producido muchos vapores en la caldera *AB*, ábrase con la llave *H* la comunicacion de dicha caldera con el vaso *EF* por el tubo *AD*: con lo qual dichos vapores por su grande elasticidad se introducirán en el expresado vaso, y de éste al cuerpo de la bomba por el tubo *FQ*, de modo que tendrán cerrada la válvula *K*, y abrirán la válvula *J*, por donde saldrá el ayre contenido en *EFQJK*. En esta disposicion ábrase con la llave *H* la comunicacion del tubo *G* con el vaso *EF*, y fórmese en él una copiosa aspersion de agua fria que para este fin se hace pasar por una especie de rallo: con lo qual los referidos vapores se condensarán; y suprimiendo su elasticidad, se formará un vacío, de suerte que se cerrará la válvula *J* por la presion del ayre exterior, y se abrirá la válvula *K*, por donde se introducirá el agua que pasa por el tubo atraente en el cuerpo de la bomba y en el vaso *EF* mediante la presion del ayre exterior sobre la superficie *VX* del agua. Y repitiendo la citada operacion de abrir con la llave la comunicacion de la caldera con el vaso *EF*, se abrirá la válvula *J*, por donde pasará el agua al tubo ascendente *YZ*, y descargará en el vaso *M*: y en-

Fig. 162.

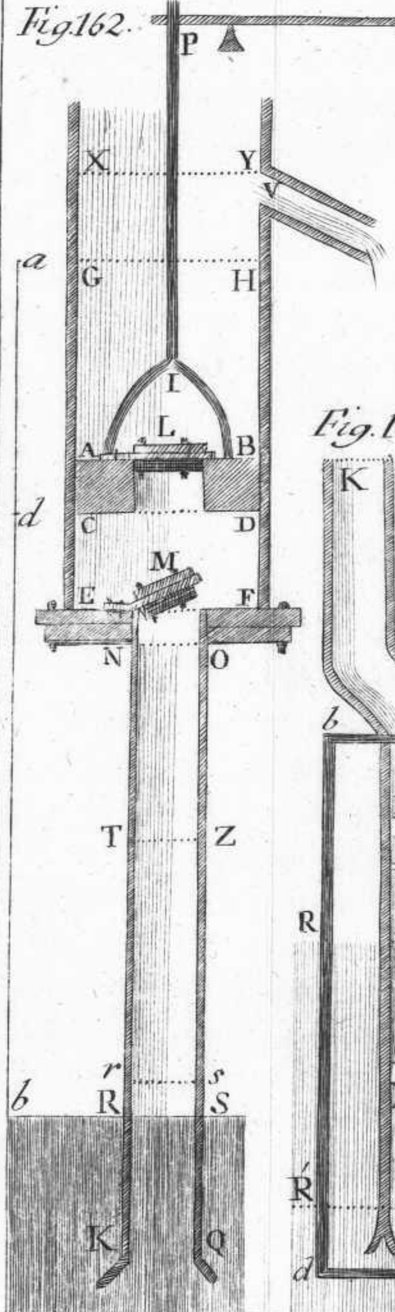


Fig. 163.

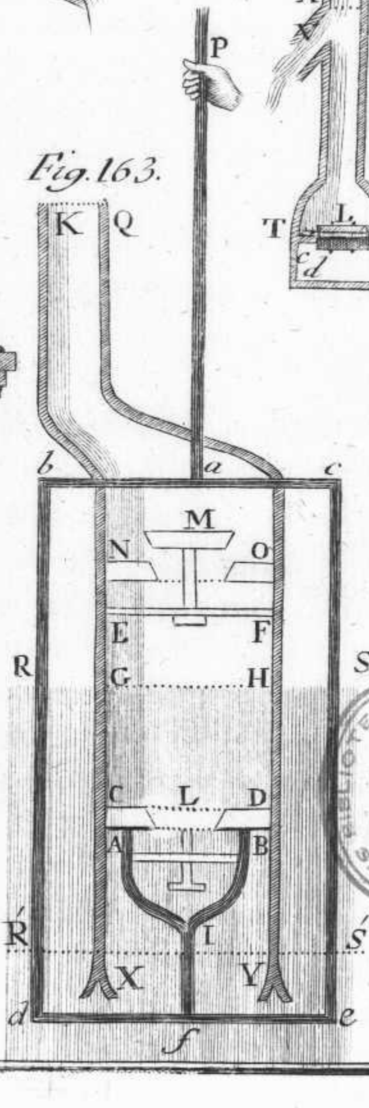
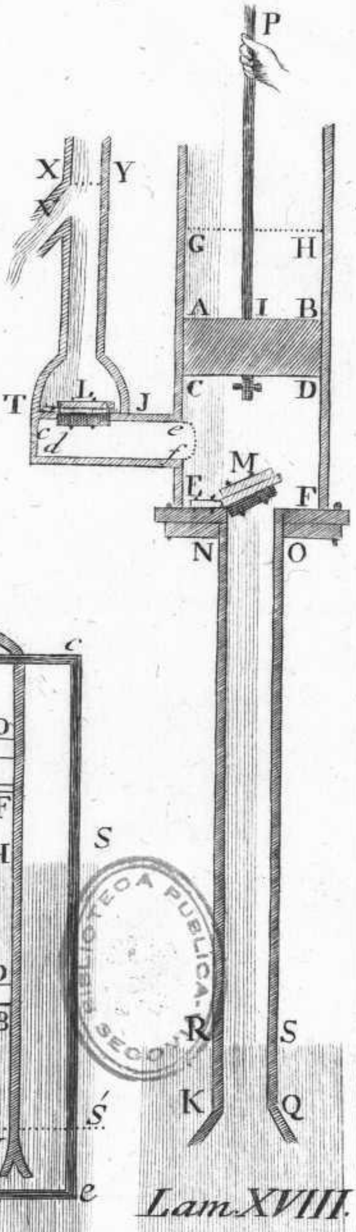


Fig. 164.



Lam. XVIII.

tonces repitiendo la otra operacion con la llave para abrir la comunicacion del tubo *G* con el vaso *EF*, y formar la aspersion del agua fria en el mismo vaso, se introducirá de nuevo el agua en la bomba, y descargará en el vaso *M* con el método expresado antes: y así continuando con el vapor del agua hirviente alternativamente dilatado y condensado en el vaso *EF*, se elevará el agua desde *VX* á la altura *M*. Que es &c.

ESCOLIO.

332. La accion del fuego sobre el agua hace elevar del cuerpo de la misma agua un fluido muy sutil y elástico, como consta por la experiencia, haciendo hervir agua en una olla sin cobertera, sin embargo de que el agua esté compuesta de partes sensiblemente incomprimibles; por consiguiente la fuerza de dicho fluido es mayor que la de la coluna del ayre que insiste sobre la superficie de dicha agua. El Señor Desaguliers por un gran número de observaciones hechas en las máquinas á fuego halló que dicho vapor en el estado de poder equilibrar la presion del ayre es 14000 veces menos denso que el agua, y 16 ó 17 veces menos denso que el ayre, y que es próxîmamente la fuerza del vapor del agua á la presion del ayre como 39 á 32. Por tanto en las bombas á fuego, que tienen los émbolos movibles, la

fuerza del vapor los hará elevar; y condensando el mismo vapor con la aspersion del agua fria, se formará un vacío en el espacio que ocupaba dicho vapor, y el émbolo baxará en virtud de la presion del ayre exterior. Las construcciones de diferentes bombas á fuego fundadas en los principios expuestos y combinadas de distintos modos para conseguir el mismo efecto, se podrán ver en el Tratado de Física de M. Desaguliers, en la Arquitectura hidráulica de M. Belidor, y en la Hidrodinámica de M. Bossut, que describe la bomba á fuego construida en Fresne para sacar el agua de las minas de carbon de aquel país.

PROPOSICION XXX.

333. Manifestar el modo con que se comprime el ayre por medio de la *Máquina de compresion* representada en la Figura 166, que se compone; de una especie de cilindro vacío *ABCD* hecho de un cristal muy fuerte, que está cerrado herméticamente en la parte superior; de la bomba atraente *VZ*, que entra exâctamente en el vaso *KM* de cobre perfectamente cerrado, y que tiene, la válvula en *Z* apoyada al resorte *HY* para dar paso al ayre de la bomba en lo interior del vaso, el émbolo *NO*, y un agujero *Q* para dar paso al ayre exterior en el cuerpo de la bomba; y del pequeño tubo *EFG*

de cobre, que está fixado en el mismo grueso de la tabla *RX* cubierta de cuero mojado, sobre que insisten exâcta y sólidamente el referido cilindro de cristal, y el vaso *KM*.

Báxese el émbolo de *O* á *Z*; y el ayre comprimido en la bomba abrirá la válvula *Z*, baxando el resorte á que está apoyada, y se introducirá en el vaso *KM* y en el cilindro *ABCD* por el tubo *EFG*; con lo qual el ayre de dicho cilindro quedará mas denso, y hallándose el émbolo en *Z*, cerrará el resorte la válvula en *Z*. Ahora súbase el émbolo de *Z* á *O*, y el ayre exterior se introducirá en la bomba *OZ* por el agujero *Q*: y repitiendo entonces la operacion anterior de baxar el émbolo de *O* á *Z*, se condensará mas el ayre en el cilindro *ABCD*; y así sucesivamente se irá acumulando en lo interior de dicho cilindro una gran cantidad de ayre condensado que no pueda comunicarse con el exterior. Que es &c.

ESCOLIO.

334. Adviértase que el referido cilindro *ABCD* de cristal se guarnece con planchas de metal, segun va representado en la citada figura, para evitar los funestos efectos que podian originarse por la rotura del cristal mediante la excesiva condensacion del ayre en la capacidad de dicho cilindro. Adviértase tam-

bien que á continuacion se añade el modo de determinar el espesor que se debe dar á los tubos para que puedan sostener las presiones del agua ó de qualquiera otro fluido incomprimible.

PROPOSICION XXXI.

335. Si los tubos cilíndricos *AD* y *ad* con bases horizontales contienen fluidos de distintas gravedades específicas, y si se supone que las resistencias que oponen dichos tubos á su rotura en virtud de sus espesores *AB* y *ab* son entre sí en la razon compuesta de dichos espesores, y de las tenacidades de las materias de que se componen; determinar la razon de dichos espesores para equilibrar las presiones que sobre ellos exercen los expresados fluidos. *Fig.* 167.

Nómbrense, G y g las gravedades específicas de los fluidos contenidos en *AD* y *ad*, A y a las alturas *AE* y *ae* de los mismos fluidos sobre sus bases horizontales, E y e los espesores *AB* y *ab* de los referidos tubos, T y t sus tenacidades, D y d los diámetros *BG* y *bg*, y finalmente R y r las referidas resistencias de los tubos. Considérese que el espacio *ABMLCGNK* se divide en elementos, y que uno de ellos se representa por la circunferencia *BMGN*. Consta (249) que la presion del fluido sobre todos los elementos de la circunferencia *BMGN* es igual á $BMGN \times A \times G$; por consiguiente será $BMGN \times A \times G = R$, y por igual razon $bmgn \times a \times g = r$: luego se tendrá $R:r = BMGN \times A \times G : bmgn \times a \times g = D \times A \times G : d \times a \times g$; pero es $R:r = E \times T : e \times t$ (sup.): luego será $E \times T : e \times t = D \times A \times G : d \times a \times g$, y por consiguiente será $E:e = \frac{D \times A \times G}{T} : \frac{d \times a \times g}{t}$, esto es, los espesores de dichos tubos en razon compuesta de la directa de los diámetros, de las alturas de los mismos tubos, de las gravedades específicas de los fluidos, y de la inversa de las tenacidades de las materias de que se componen los tubos. Que es &c.

COROLARIO.

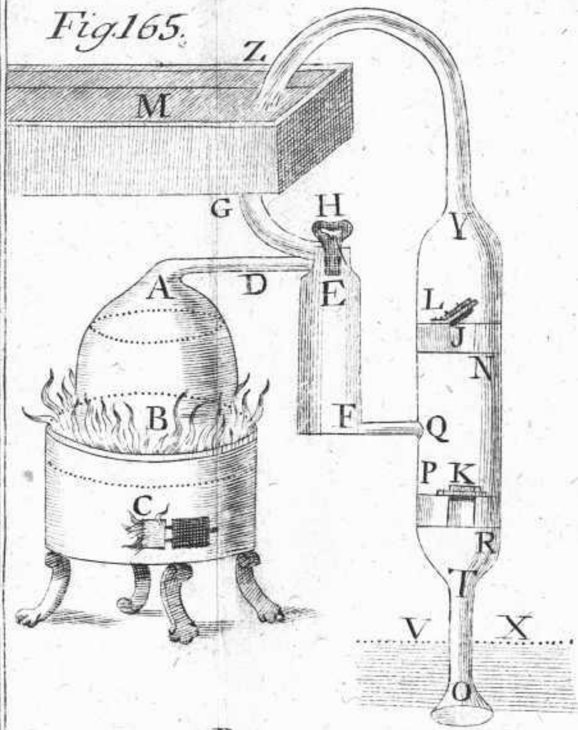
336. Si son $G = g$, y $T = t$, esto es, si los fluidos contenidos en los dos tubos son homogéneos, como igualmente las materias de que se componen los mismos tubos; será $E:e = D \times A : d \times a$.

ESCOLIO.

337. Es evidente que si por la experiencia se conocen las tenacidades de las materias de que están hechos los tubos, y el espesor que debe tener cierto tubo para resistir al peso de un fluido dado; se determinará por la Proposicion antecedente el espesor

que ha de tener qualquier otro tubo, cuyas dimensiones están dadas. Los Señores Parente, Mariotte, Nollet y otros Físicos, han hecho diferentes experimentos para probar las tenacidades de las materias: consta, por exemplo, que un tubo de plomo de 12 pulgadas de diámetro y de 60 pies de altura estando lleno de agua, debe tener seis lineas de espesor; y que es próximamente la tenacidad del plomo á la del cobre como 1 á 28; &c: luego un tubo de plomo de 8 pulgadas de diámetro deberá tener (336) 8 lineas de espesor para sostener la presion de una coluna de agua de 120 pies de altura, mediante que dicho espesor es el quarto término proporcional á 12×60, 8×120, y 6 lineas; y un tubo de cobre de 10 pulgada da de diámetro deberá tener (335) $2\frac{1}{3}$ lineas de espesor para sostener la presion de una coluna de mercurio de 56 pies de altura, por ser dicho espesor el quarto término proporcional á $\frac{12 \times 60 \times 1}{1}$, $\frac{10 \times 56 \times 14}{28}$, y 6 lineas.

Fig.165.



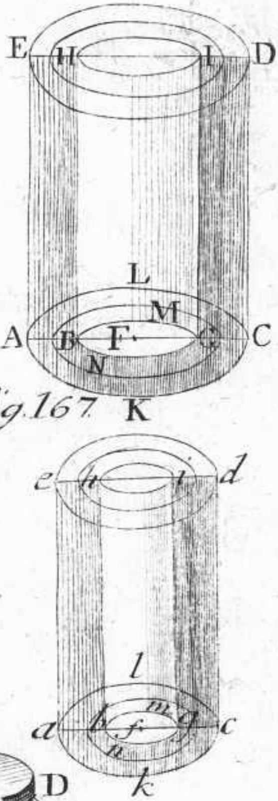
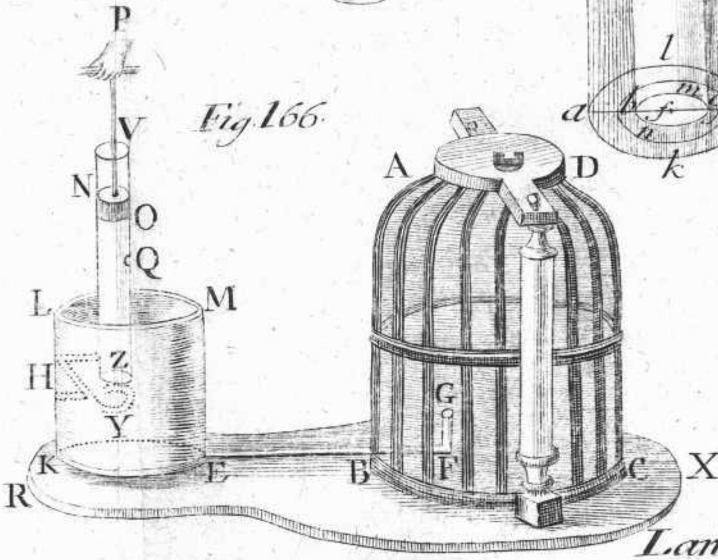


Fig.167.

Fig.166.



Lam.XIX.

LIBRO TERCERO.

NOCIONES GENERALES.

338. Espacio corrido es la linea que describe un cuerpo con su movimiento, considerando que el mismo cuerpo es infinitésimo, ó que tiene reunida la masa en su centro de gravedad.

339. El movimiento de un cuerpo que siempre anda espacios iguales en qualesquiera tiempos iguales, se dice Movimiento uniforme.

COROLARIO.

340. Luego en el movimiento uniforme de un cuerpo se multiplican igualmente los espacios corridos como los tiempos; por consiguiente serán los espacios corridos proporcionales con los tiempos que se han gastado para correr dichos espacios.

341. Si dos cuerpos andan con movimiento uniforme, y uno de ellos corre un espacio mayor que el corrido por el otro cuerpo en igual tiempo, la velocidad del primero se dirá mayor que la del segundo.

342. Las velocidades son aquellas cantidades que son proporcionales con los espacios corridos con movimiento uniforme en igual tiempo.

343. La cantidad del movimiento de un cuerpo es proporcional con el producto de la masa del mismo cuerpo por su velocidad.

COROLARIO I.

344. Por tanto si se nombran Q y q las respectivas cantidades del movimiento de dos cuerpos, U y v sus velocidades, y M y m las masas de dichos cuerpos, será $Q : q = U \times M : v \times m$: luego siendo $Q = q$, se tendrá $U \times M = v \times m$; de donde resulta ser $U : v = m : M$, esto es, las velocidades en la razon inversa de las masas.

COROLARIO II.

345. Siendo $Q : q = U \times M : v \times m$, será $Q \times v \times m = q \times U \times M$; de donde resulta ser $U : v = Q \times m : q \times M = \frac{Q}{M} : \frac{q}{m}$, y $M : m = Q \times v : q \times U = \frac{Q}{U} : \frac{q}{v}$.

346. El movimiento de un cuerpo que anda espacios desiguales en tiempos iguales, se dice Movimiento variable.

347. El movimiento variable de un cuerpo que anda sucesivamente espacios mayores en tiempos iguales, se dice Movimiento acelerado; y se llama Movimiento retardado, quando anda sucesivamente espacios menores en tiempos iguales.

348. El movimiento acelerado de un cuerpo se dice Movimiento uniformemente acelerado, si se aumenta la velocidad del cuerpo á proporcion del tiempo.

COROLARIO.

349. Luego en el movimiento uniformemente acelerado serán las velocidades proporcionales con los tiempos en que se adquieren.

350. El movimiento retardado se dice Movimiento uniformemente retardado, si se disminuye continuamente la velocidad del cuerpo á proporcion del tiempo.

COROLARIO.

351. Luego en el movimiento uniformemente retardado serán las velocidades proporcionales con los tiempos que ha de gastar el cuerpo para correr los espacios residuos hasta la extincion de la velocidad del mismo cuerpo.

352. Todo cuerpo, que por un solo impulso de una potencia pasa desde el estado de quietud á él del movimiento, se mueve con movimiento uniforme segun la direccion de dicha potencia con una velocidad proporcional con la misma potencia, y persevera en el estado de movimiento uniforme con la misma direccion, á no ser que le saque de él alguna causa exterior.

ESCOLIO.

353. Entiéndase lo mismo respecto á las potencias resultantes de las potencias conspirantes, opuestas, ó de mediana conspiracion y oposicion, que actuan sobre un mismo cuerpo á un mismo tiempo (47, 48, 103).

354. El movimiento producido en un cuerpo por una ó mas potencias que actuan sobre él por una misma direccion, se dice Movimiento simple.

355. El movimiento producido en un cuerpo por dos ó mas potencias, que actuan sobre él á un mismo tiempo por direcciones obliqüas entre sí, se dice Movimiento compuesto.

356. Si el espacio corrido por un cuerpo es una linea recta con qualquiera direccion, el movimiento del cuerpo se dirá Movimiento rectilineo.

ESCOLIO.

357. Adviértase que dicho movimiento rectilineo puede ser simple ó compuesto. Es evidente que el movimiento simple es siempre rectilineo. Y en quanto al compuesto, se ha demostrado (102) que si las potencias *Q* y *R* (*Fig.* 168.) expresadas por las respectivas rectas *AB* y *AD* impelen á un mismo tiempo con un solo impulso al cuerpo *A*, que está en

quietud, segun las direcciones AB y AD; completo el paralelógramo BD y tirada su diagonal AC, dicho cuerpo estará movido por una potencia expresada por AC segun la direccion de la misma AC; por consiguiente el movimiento del cuerpo A se hará por la direccion AC, y será rectilineo aunque compuesto. Discúrrase del mismo modo en los demas casos.

358. Si el espacio corrido por un cuerpo es una linea curva, el movimiento del cuerpo se dirá Movimiento curvilineo, y dicha curva se llamará Trayectoria.

ESCOLIO.

359. Adviértase que el movimiento curvilineo es siempre compuesto: como por exemplo, si el cuerpo A (*Fig.* 169.) viene arrojado segun la direccion AF, y la potencia P actua sobre el mismo cuerpo segun la direccion AP; expresadas las cantidades de dichas fuerzas por las respectivas rectas AF y AE, completo el paralelógramo EF, y tirada su diagonal AD, se moverá el cuerpo por la direccion de dicha diagonal, de modo que en un tiempo infinitésimo andará una parte infinitésima AG de la AD. Ahora si en el punto G viene solicitado el cuerpo por la potencia P con la direccion GP paralela á la AP; en virtud de esta potencia, y de la que mue-

ve el cuerpo segun la direccion *GD*, seguirá dicho cuerpo la diagonal *GI* del paralelógramo, cuyos lados tomados en las direcciones *GP* y *GD* expresen las cantidades de dichas potencias, y en un tiempo infinitésimo andará una parte infinitésima *GH* de dicha diagonal. Asimismo si en el punto *H* viene solicitado el cuerpo por la potencia *P* con la direccion *HP* paralela á las anteriores, en un tiempo infinitésimo describirá una parte infinitésima *HK* de la diagonal del paralelógramo, cuyos lados tomados en las direcciones *HI* y *HP* expresen las respectivas cantidades de las dos potencias que actuan sobre el cuerpo en H: y así sucesivamente describirá el cuerpo las partes evanecentes *KM*, *MN*, &c. de las diagonales de los paralelógramos correspondientes: luego el cuerpo *A* en virtud del movimiento compuesto describirá la curva *AKO*. Si se suponen las direcciones de la potencia *P* verticales; esta potencia será la gravedad del cuerpo arrojado. De lo dicho se evidencia que un cuerpo describirá una curva en virtud del movimiento compuesto, aunque la potencia que le solicita se dirija siempre á un punto fixo.

360. Si los impulsos de una potencia ó fuerza, que actua sobre un cuerpo en cada instante del tiempo de su movimiento, son iguales, se llamará dicha Potencia constante: y si dichos impulsos son desigua-

les, se llamará Potencia variable la que los produce.

361. Percusion ó Choque se dice el impulso que exerce un cuerpo con el movimiento que tiene sobre otro cuerpo que encuentra: se supone que dichos cuerpos son esféricos y homogéneos, á menos que no se exprese lo contrario.

362. El choque de dos cuerpos se dice Choque directo, quando la recta *AB* que junta los centros de gravedad de los mismos cuerpos, es perpendicular al plano *DE* que les es tangente en el punto *C* donde se encuentran. *Fig.* 170. Y si la referida recta no es perpendicular á dicho plano, se dirá Choque obliqüo. *Fig.* 171.

263. Cuerpos perfectamente elásticos son aquellos, cuyas partes se allegan en el choque, y despues del choque vuelven á tomar su estado natural: Cuerpos imperfectamente elásticos son aquellos, cuyas partes se allegan en el choque, y despues del choque no vuelven enteramente á tomar su estado natural.

364. Cuerpos perfectamente duros son aquellos, cuyas partes no se allegan en el choque: Cuerpos perfectamente blandos son aquellos, cuyas partes se allegan solamente en el choque: Y por cuerpos imperfectamente duros ó blandos se entienden los que no se allegan sensiblemente, á no ser que reciban un fuerte choque.

365. Péndulo simple es una pequeña esfera de un metal pesado (como plomo, cobre, laton, &c.) que está sostenida por un hilo muy sutil, y que puede moverse libremente al rededor del otro extremo del hilo, como centro. Se considera dicho hilo como una recta inflexíble, y la masa del cuerpo reunida en su centro de gravedad. *Fig.* 172.

366. Longitud del péndulo simple es la distancia *BC*, que hay del punto *B* de la suspension al centro *C* de la gravedad de la esfera *A*. *Fig.* 172.

367. Óscilacion ó Vibracion del péndulo es cada arco *DD* descrito por el centro de gravedad de la referida esfera. *Fig.* 172.

368. Se llaman Péndulos isócronos los que hacen sus vibraciones en un mismo tiempo.

369. Péndulo compuesto se dice la referida esfera, que está sostenida por varillas de distintos metales (como de hierro y de cobre) unidas sólidamente entre sí, de modo que pueda oscilar libremente al rededor de un punto ó de un exe fixo.

ESCOLIO.

370. Todos los cuerpos se dilatan por el calor, y se condensan por el frio: y así un péndulo, que tiene una sola varilla de hierro, se alarga cerca de $\frac{1}{5}$ de linea á los 30 grados del termómetro, de modo

que estando arreglado dicho péndulo en verano, puede adelantar en el invierno 20 segundos por dia. Pero dicha dilatacion, y por lo mismo la condensacion, son distintas en las diferentes especies de los cuerpos, como por exemplo la dilatacion del cobre es casi dupla de la del hierro; y sobre dicha diferencia de dilatacion se fundan las ingeniosas invenciones de los péndulos compuestos, para que no varíen sensiblemente sus longitudes, y denoten el tiempo con toda la exáctitud posible.

371. Centro de oscilacion es aquel punto en donde se reune la gravedad del péndulo compuesto, de modo que las oscilaciones de dicho centro sean iguaes á las de un péndulo simple que tenga su longitud igual á la distancia del mismo centro al punto de la suspension.

372. Fuerza de Proyeccion ó de Impulsion es aquella con que viene arrojado un cuerpo *A* por una direccion *AB* inclinada á la direccion *AP* de la potencia *P* que anima siempre al mismo cuerpo en su movimiento curvilineo: dicho cuerpo se llama Proyectil: el punto *A*, de donde viene arrojado, se dice Punto de Proyeccion: el ángulo *BAP*, que forma la direccion de dicha fuerza con la direccion de la potencia *P*, se dice Ángulo de proyeccion: la velocidad que el cuerpo adquiere en el mismo momen-

to de la impulsion, se dice Velocidad de proyeccion ó inicial: Linea de la velocidad se dice la vertical, por la qual deberia baxar el cuerpo para tener la velocidad de proyeccion: el ángulo *BAD*, que forma la direccion de la fuerza de proyeccion con la horizontal *ED* tirada por el punto *A* de proyeccion, se dice Ángulo de elevacion ó de depresion, segun dicha direccion *AB* se halla encima (*Fig.* 173.) ó baxo la horizontal *ED* (*Fig.* 174.): y si se prolonga la horizontal *AD* hasta encontrar en *F* la curva *AGF* (*Fig.* 173.) descrita por el proyectil *A*, se dice *AF* Amplitud de la proyeccion. *Fig.* 173 y 174.

373. Potencia ó Fuerza centrípeta es la potencia *P* constante ó variable, que aníma siempre á un cuerpo *A* en su movimiento curvilineo con direccion á un punto fixo *C*: y por Fuerza centrífuga se entiende la potencia con que el mismo cuerpo se alejaria de dicho punto *C*, si cesara la fuerza centripeta en qualquier punto *F* de la curva ó espacio corrido *AFK*, segun la direccion de la tangente *FG* tirada al mismo punto de la curva. *Fig.* 175 y 176.

374. Las potencias centrípeta y centrífuga se llaman Potencias ó Fuerzas centrales: el referido punto *C* se llama Centro de la potencia: la recta *CF*, que junta dicho centro *C* con qualquier punto donde se halla el cuerpo, se llama Radio vector: y si la

potencia centrípeta tiene siempre cierta razon con el radio vector, se dice que el centro atrae al cuerpo, ó le repele en la misma razon dada, segun dicha potencia actuare desde *F* hácia *C* (*Fig.* 175.), ó desde *F* hácia la parte opuesta *L*, *Fig.* 176. Las mismas denominaciones valen en el movimiento rectilineo de un cuerpo *A* animado por una potencia *P* constante ó variable dirigida siempre á un punto fixo *C*, *Fig.* 177 y 178.

375. Si las abscisas *AB* expresan los espacios corridos por un cuerpo, y las correspondientes ordenadas *BC* expresan los referidos tiempos; ó al contrario: la linea *CC*, que pasa por los extremos de dichas ordenadas, se dice Escala de los tiempos ó de los espacios: *Fig.* 179. Entiéndase lo mismo respecto á las Escalas de las velocidades y de las potencias.

376. Por resistencia del medio se entiende la resistencia del fluido en que el sólido se mueve.

377. Dinámica es la ciencia que trata del movimiento de los sólidos.

De los Movimientos de los cuerpos, uniforme, acelerado y retardado; y del Movimiento compuesto, uniforme y rectilineo.

PROPOSICION I.

378. Si dos cuerpos A y D andan con movimiento uniforme los espacios iguales AB y DC en tiempos desiguales; determinar la razon de sus velocidades. *Fig.* 180.

Llámense, V la velocidad del cuerpo A, T el tiempo en que el mismo cuerpo anda el espacio AB, v la velocidad del cuerpo D, y t el tiempo en que éste anda el espacio DC. Supóngase que el cuerpo D anda el espacio DE en el mismo tiempo en que el cuerpo A anda el espacio AB; y será (342) la velocidad del cuerpo A á la del cuerpo D, esto es V á v como AB á DE; pero es (340) AB ó bien DC á DE como el tiempo en que el cuerpo D ha corrido el espacio DC al tiempo en que el mismo cuerpo ha corrido el espacio DE, esto es, como t á T: luego será $V : v = t : T$. Que es &c.

COROLARIO.

379. Se infiere que si dos cuerpos andan con mo-

vimiento uniforme espacios iguales en tiempos desiguales, estarán sus velocidades en razon recíproca de los tiempos.

PROPOSICION II.

380. Si dos cuerpos *A* y *C* andan con movimiento uniforme los espacios desiguales *AB* y *CD* en tiempos desiguales; determinar la razon de sus velocidades. *Fig.* 181.

Llámense, el espacio corrido $AB = S$, V la velocidad del cuerpo *A*, T el tiempo en que dicho cuerpo anda el espacio *AB*, el espacio corrido $CD = s$, v la velocidad del cuerpo *C*, y t el tiempo en que dicho cuerpo anda el espacio *CD*. Supóngase que el cuerpo *E* anda con movimiento uniforme el espacio $EF = AB = S$ en el tiempo t, y llámese W la velocidad del cuerpo *E*. Andando, pues, los cuerpos *A* y *E* los espacios *AB* y *EF* iguales, será (379) $V : W := t : T$; pero (342) $W : v = S : s$ por andar los cuerpos *E* y *C* con movimiento uniforme los espacios *EF* y *CD* en tiempos iguales: luego será V á v en razon compuesta de las razones de S á s y de t á T. Que es &c.

COROLARIO I.

381. Se infiere que si dos cuerpos *A* y *C* andan con movimiento uniforme espacios desiguales en tiem-

pos desiguales, será la velocidad del cuerpo A á la del cuerpo C en razon compuesta de la directa de los espacios corridos, y de la inversa de los tiempos en que se han andado con movimiento uniforme: luego será $V : v = S \times t : s \times T = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$.

COROLARIO II.

382. Por ser $V : v = S \times t : s \times T$ (381) será $V \times s \times T = v \times S \times t$, de donde resulta ser $S : s = V \times T : v \times t$, y $T : t = S \times v : s \times V = \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$; esto es, serán los espacios corridos con movimiento uniforme en razon compuesta de las razones de los tiempos y de las velocidades, y serán los tiempos en la razon compuesta de la directa de los espacios corridos, y de la inversa de las velocidades.

PROPOSICION III.

383. Si dos cuerpos andan con movimiento uniforme; serán las cantidades de dicho movimiento en la razon compuesta de la directa de los espacios corridos, de la directa de las masas de dichos cuerpos, y de la inversa de los tiempos en que han corrido los referidos espacios.

Llámense, Q y q las respectivas cantidades del

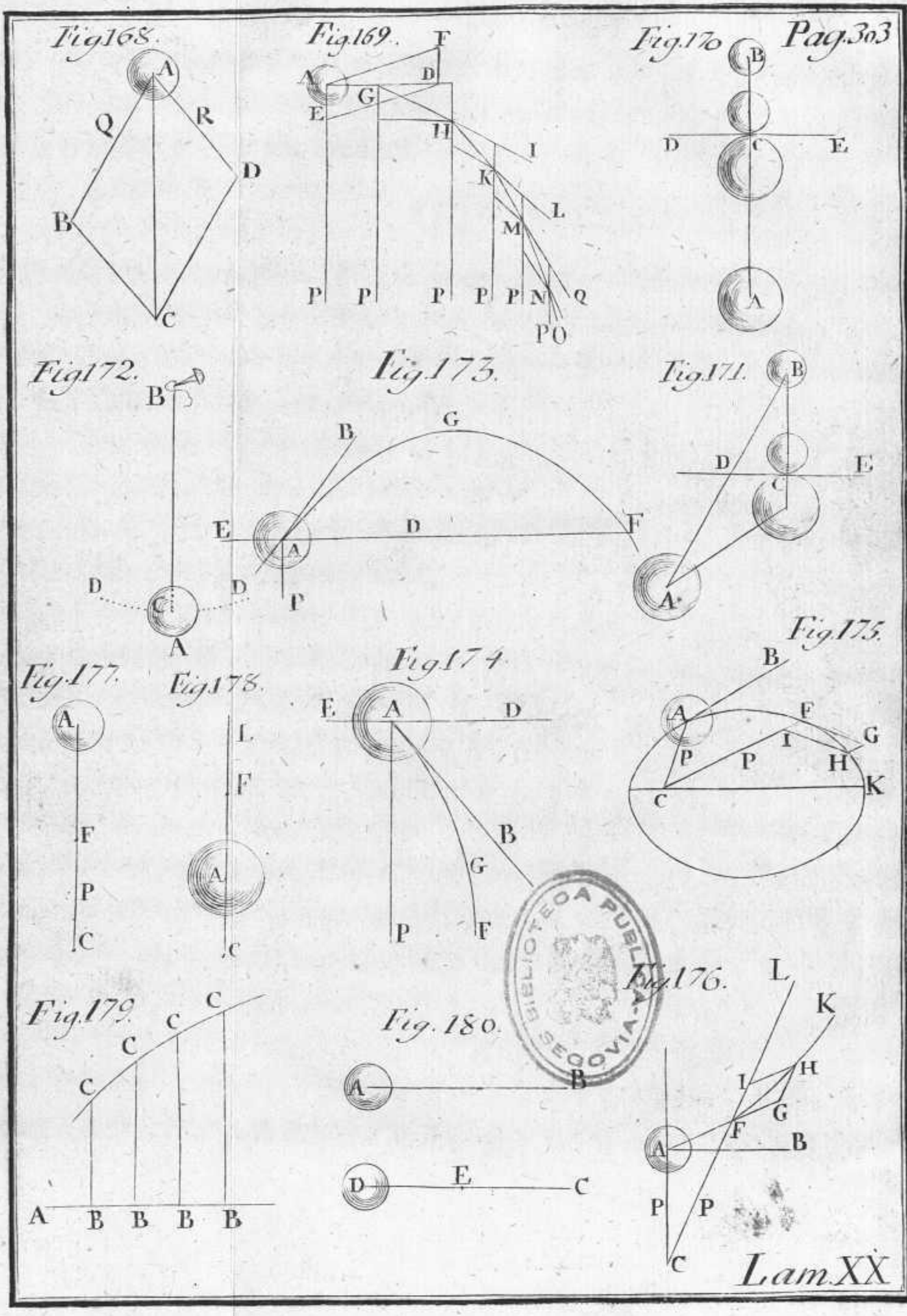


Fig.168.
A
Q
R
D
B
C
Fig.169.
F
A
D
G
E
H
I
K
L
M
P P P P P N Q
P O
Fig.170
B
D
C
E
A
Fig.172.
B
D
D
C
A
Fig.173.
B
G
E
D
F
A
P
Fig.171.
B
D
E
C
A
Fig.175.
B
A
F
G
I
P
P
H
C
K
Fig.177.
A
F
P
C
Fig.178.
L
F
A
C
Fig.174
E
A
D
B
G
P
F
Fig.176.
L
K
H
I
G
F
A
B
P
P
C
Fig.179.
C
C
C
C
C
A B B B B
Fig. 180.
A
B
D
E
C

movimiento de dichos dos cuerpos, V y v sus velocidades, y M y m las masas de los propios cuerpos; y será (344) $Q:q = V \times M : v \times m$; pero (381) $V : v = S \times t : s \times T$: luego será $Q : q = S \times t \times M : s \times T \times m$, esto es, como la compuesta de las razones &c. Que es &c.

COROLARIO I.

384. Si es $Q = q$, se tendrá $S \times t \times M = s \times T \times m$; de donde resulta ser $S : s = T \times m : t \times M$, $T : t = S \times M : s \times m$, y $M : m = s \times T : S \times t$.

COROLARIO II.

385. Siendo $Q : q = S \times t \times M : s \times T \times m$, será tambien $Q \times s \times T \times m = q \times S \times t \times M$; de donde resulta ser $S : s = Q \times T \times m : q \times t \times M$, $T : t = S \times M \times q : s \times m \times Q$, y $M : m = Q \times T \times s : q \times t \times S$.

PROPOSICION IV.

386. Si el cuerpo A movido con un solo impulso por la potencia P anda con movimiento uniforme el espacio AB en el tiempo t, y si el mismo cuerpo movido del mismo modo por la potencia Q anda el espacio AC en el mismo tiempo, y se completa el paralelógramo BC: digo que actuando á un mismo tiempo las potencias P y Q sobre el cuerpo A, éste

andará la diagonal AD con movimiento uniforme en el referido tiempo t. *Fig.* 182.

Exprésense las cantidades de las potencias P y Q por las respectivas rectas AP y AQ; complétese el paralelógramo QP; y tírese la diagonal AR, que será (102) la potencia que impelerá al cuerpo A segun la direccion AR, mientras las potencias P y Q actuan á un mismo tiempo sobre dicho cuerpo. Actuando las potencias AP y AQ separadamente con un solo impulso sobre el cuerpo A, y corriendo éste los espacios AB y AC con movimiento uniforme en un mismo tiempo, será (342) la velocidad del cuerpo A segun la direccion AB á la velocidad del cuerpo A segun la direccion AQ como AB á AC; pero (352) dichas velocidades tienen la razon de las potencias AP y AQ por actuar éstas con un solo impulso sobre el cuerpo A segun las direcciones expresadas: luego será $AP : AQ = AB : AC$; por consiguiente la diagonal AR estará directamente con la diagonal AD: luego el cuerpo A impelido á un tiempo por las potencias AP y AQ con un solo impulso seguirá la direccion ADE con movimiento uniforme. Nómbrese x el espacio corrido en el referido tiempo t por el cuerpo A segun la direccion AE; y será la velocidad (342) del cuerpo A segun la direccion AB á la velocidad del mismo cuerpo segun la direccion AE como AB á x; pero dichas velocidades (352) están en la razon de las potencias AP y AR: luego será $AP:AR = AB:x$, y alternando $AP:AB = AR:x$: y por la misma razon AQ: $AC = AR:x$; pero es $AP:AB = AR:AD = AQ:AC$: luego será $AR:AD = AR:x$, y por consiguiente $AD = x$: luego el cuerpo A impelido con un solo impulso á un mismo tiempo por las potencias AP y AQ andará con movimiento uniforme la diagonal AD del paralelógramo BC en el mismo tiempo en que dicho cuerpo andaria los lados AB y AC, actuando separadamente dichas potencias segun las direcciones AB y AC. Que es &c.

COROLARIO I.

387. Siendo la velocidad del cuerpo A segun la direccion AD á la del mismo cuerpo segun la direccion AB ó AC como la diagonal AD al lado AB ó AC, será la velocidad del cuerpo A segun la direccion AD á la suma de las velocidades del mismo cuerpo segun las direcciones AB y AC como la diagonal AD á la suma de los lados AB y AC; y por ser AD menor que la suma de los lados AB y BD ó su igual AC, será la velocidad del cuerpo A segun la direccion AD menor que la suma de las velocidades del mismo cuerpo segun las direcciones AB

y *AC*, si dichas velocidades se toman separadamente.

COROLARIO II.

388. Y por ser la diagonal *AD* tanto menor que la suma de los lados *AB* y *AC*, quanto mayor es el ángulo *BAC*, y de consiguiente menor el ángulo *ABD*, será la velocidad del cuerpo *A* segun la direccion *AD* tanto menor, quanto mayor es el ángulo *BAC*, ó bien quanto menor es el ángulo *ABD*.

COROLARIO III.

389. Asimismo siendo la potencia que impele al cuerpo *A* segun la direccion *AD* á la potencia que le impele segun la direccion *AB* ó *AC* como *AD* á *AB* ó *AC*, será la potencia segun la direccion *AD* á la suma de las potencias segun las direcciones *AB* y *AC* como *AD* á $AB + AC$; de donde se infiere con el mismo raciocinio expuesto anteriormente (387, 388) que la potencia del cuerpo *A* segun la direccion de la diagonal *AD* del paralelógramo *BC* es menor que la suma de las potencias del mismo cuerpo *A* segun las direcciones de los lados *AB* y *AC* de dicho paralelógramo, si se toman separadamente, y que dicha potencia es tanto menor que la suma de las otras dos, quanto mayor es el ángulo *BAC*.

PROPOSICION V.

390. Si los cuerpos A y D han andado los espacios $AB = S$, y $DC = s$ con movimiento acelerado ó retardado en los respectivos tiempos T y t; serán las velocidades V y v adquiridas al fin de dichos espacios en la razon compuesta de la directa de las diferenciales de los mismos espacios corridos, y de la inversa de las diferenciales de los tiempos en que se han corrido dichos espacios, esto es, $V : v = dS \times dt : ds \times dT$. *Fig.* 183.

Prolónguense las rectas AB y DC. Considérese que los cuerpos A y D andan los espacios Bb y Cc con movimiento uniforme en los tiempos T' y t', y con las respectivas velocidades V y v; y será (381) $V : v = Bb \times t' : Cc \times T'$; pero suponiendo los espacios Bb y Cc infinitésimos, esto es, $Bb = dS$ y $Cc = ds$, dichos cuerpos andan estos elementos con movimiento uniforme en los tiempos dT y dt, y con las respectivas velocidades V y v: luego será $V : v = dS \times dt : ds \times dT$. Que es &c.

COROLARIO.

391. Siendo $V : v = dS \times dt : ds \times dT$, será tambien $V : v = \frac{dS}{dT} : \frac{ds}{dt}$, y $V \times dT : v \times dt = dS : ds$;

luego si un cuerpo se mueve con movimiento acelerado ó retardado, la velocidad V adquirida al fin del espacio S corrido en el tiempo T será proporcional con $\frac{dS}{dT}$, como tambien será $V \times dT$ proporcional con dS. En lo sucesivo se hará $V = \frac{dS}{dT}$ para la comodidad del cálculo.

ESCOLIO.

392. Si se quiere determinar la razon de V con $\frac{dS}{dT}$ se tendrá presente que en el movimiento uniforme es (381) V proporcional con $\frac{S}{T}$. Supóngase ahora $V = \frac{n \times S}{T}$: luego haciendo $T = n$, será $V = S$; por consiguiente V expresará el espacio corrido con movimiento uniforme en el tiempo constante n que se establece igual á un segundo, sin embargo de que sea arbitrario el tomar qualquiera otra parte del tiempo; pero qualquiera movimiento acelerado ó retardado se puede considerar uniforme por el espacio dS corrido en el tiempo dT: luego se tendrá $V = \frac{n \times dS}{dT}$, en cuya expresion es V aquel espacio que andaria el cuerpo en el tiempo n, si cesára su aceleracion ó retardacion.

PROPOSICION VI.

393. Si un cuerpo se mueve con movimiento uniformemente acelerado, serán los espacios corridos desde el principio del movimiento proporcionales con los quadrados de los tiempos en que se han corrido dichos espacios, como tambien proporcionales con los quadrados de las velocidades adquiridas al fin de los mismos espacios.

1°. Supuesta V la velocidad del cuerpo al fin del espacio S corrido en el tiempo T, será (391) $V = \frac{dS}{dT}$ y por consiguiente $V \times dT = dS$; pero en la hipótesis del movimiento uniformemente acelerado es V proporcional con T (349): luego será TdT proporcional con dS; é integrando esta expresion, se tendrá S proporcional con $\frac{1}{2}T^2$: asimismo qualquiera otro espacio s corrido en el tiempo t por dicho cuerpo será proporcional con $\frac{1}{2}t^2$. Por tanto se tendrá $S : s = \frac{1}{2}T^2 : \frac{1}{2}t^2 = T^2 : t^2$, esto es, los espacios corridos serán proporcionales con los quadrados de los tiempos en que se han corrido los mismos espacios. Que es lo primero.

2°. Siendo en el movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo $V : v = T : t$, será $V^2 : v^2 = T^2 : t^2$; pero por lo demostrado en el caso anterior es $S:s=T^2:t^2$: luego será $S:s=V^2:v^2$, esto es, los espacios corridos serán proporcionales con los quadrados de las velocidades adquiridas al fin de los mismos espacios. Que es &c.

De otro modo.

Expresen las abscisas AB (*Fig.* 184.) los tiempos, y las ordenadas BC perpendiculares á las AB expresen las correspondientes velocidades del cuerpo A al fin de los respectivos espacios corridos con dicho movimiento uniformemente acelerado; y la escala AC de las velocidades será recta por ser (349) las velocidades proporcionales con los tiempos. Ahora considerando ser Bb los elementos de los respectivos tiempos, serán (391) $BC \times Bb$ proporcionales con los espacios infinitésimos corridos en los tiempos infinitésimos Bb; por consiguiente los espacios corridos en los tiempos AB serán proporcionales con las areas triangulares ABC; pero estas areas son como los quadrados de las rectas AB ó BC: luego en dicho movimiento uniformemente acelerado los espacios corridos serán proporcionales con los quadrados de las velocidades, ó de los tiempos en que los mismos espacios se han corrido. Que es &c.

COROLARIO I.

394. Siendo en el movimiento uniformemente acelerado los espacios proporcionales con los quadrados de los respectivos tiempos, serán los tiempos en la razon subduplicada de los espacios corridos: por igual razon serán las velocidades en la razon subduplicada de los espacios corridos: esto es, $T:t=\sqrt{S}:\sqrt{s}$, y $V:v=\sqrt{S}:\sqrt{s}$.

COROLARIO II.

395. Prolongadas las rectas *CB* hasta *E*, de suerte que las *BE* sean proporcionales con los respectivos espacios *ABC*, serán las ordenadas *BE* proporcionales con los quadrados de las respectivas abscisas *AB*; por consiguiente la escala de los espacios, que pasa por los puntos *E*, será una Parábola, en quien las abscisas se toman en la tangente *AF*.

COROLARIO III.

396. Si las abscisas *AD*, tomadas en la recta *AG* perpendicular á la *AF* expresan los espacios corridos, y las ordinadas *DE* las correspondientes velocidades adquiridas al fin de dichos espacios, serán los espacios corridos *AD* proporcionales con los quadrados de las respectivas velocidades *DE*; por consi-

guiente la escala de las velocidades, que pasa por los puntos E, será una Parábola referida al exe AD. Por la misma razon la escala AE de los tiempos será una Parábola, si las coordenadas AD y DE expresan los espacios corridos y sus correspondientes tiempos.

PROPOSICION VII.

397. Si un cuerpo se mueve con movimiento acelerado, de suerte que los espacios corridos sean siempre como los quadrados de los respectivos tiempos; serán las velocidades proporcionales con los correspondientes tiempos, esto es, el movimiento de dicho cuerpo será uniformemente acelerado.

Llámese V la velocidad que tiene el cuerpo al fin del espacio S corrido en el tiempo T; y será (391) $V = \frac{dS}{dT}$; pero por ser S proporcional con T^2, es dS proporcional con $2TdT$: luego será V proporcional con $\frac{2TdT}{dT}$ ó bien con $2T$: asimismo la velocidad v adquirida al fin de otro espacio s corrido en el tiempo t por dicho cuerpo será proporcional con $2t$. Portanto será $V : v = 2T : 2t = T : t$; por consiguiente (349) el movimiento de dicho cuerpo será uniformemente acelerado. Que es &c.

De otro modo.

Por ser los espacios proporcionales con los quadrados de los respectivos tiempos, se podrán expresar aquellos (*Fig.* 184.) por los triángulos semejantes *ABC*, y dichos tiempos por las correspondientes rectas *AB*: y considerando *Bb* infinitésima y la recta *bc* paralela á la *BC*, será el elemento *BbcC* proporcional con el espacio corrido en el tiempo infinitésimo *Bb*; pero por ser el movimiento uniforme en dicho tiempo infinitésimo, es (382) el espacio proporcional con el producto de la velocidad por el tiempo: luego la recta *BC* expresará la velocidad, y por consiguiente ésta será proporcional con el tiempo. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

398. Si un cuerpo se mueve con movimiento uniformemente acelerado; serán los espacios corridos desde el principio del movimiento en los tiempos iguales expresados por *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. como la serie de los números naturales impares 1, 3, 5, 7, &c. *Fig.* 185.

Siendo (sup.) el movimiento del cuerpo acelerado, de suerte que las velocidades sean proporcionales con los tiempos, serán (393) los espacios corridos por dicho cuerpo como los quadrados de los respectivos tiempos; por consiguiente será el espacio corrido en el tiempo AC al espacio corrido en el tiempo AB como $(AC)^2$ á $(AB)^2$; pero el quadrado de AC es quádruplo del quadrado de AB, por ser AC duplo de AB: luego el espacio corrido en el tiempo AC será quádruplo del espacio corrido en el tiempo AB; por consiguiente el espacio corrido en el tiempo CB será triplo del corrido en el tiempo AB. Con semejante raciocinio se demostrará que el espacio corrido en el tiempo CD es quíntuplo del corrido en el tiempo AB; y así siguiendo, se determinará que los espacios corridos en los tiempos iguales 1°. 2°. 3°. 4°. &c. están en la razon de los números naturales impares 1, 3, 5, 7, &c. Que es &c.

PROPOSICION IX.

399. Si un cuerpo anda en el primer tiempo infinitésimo un espacio tambien infinitésimo, y en el segundo tiempo infinitésimo anda un espacio duplo, y en el tercero un espacio triplo del primero, y así los espacios infinitésimos corridos sucesivamente en iguales tiempos infinitésimos son como la serie de los números naturales; determinar la razon de los espacios corridos sucesivamente en tiempos finitos é iguales.

Siendo (sup.) los espacios infinitésimos corridos sucesivamente en tiempos infinitésimos é iguales como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, &c. tomados de dos en dos dichos tiempos serán los espacios corridos como 3, 7, 11, 15, 19, 23, &c. y tomados de tres en tres, serán los espacios corridos como 6, 15, 24, 33, &c. tomados de quatro en quatro serán los espacios corridos como 10, 26, 42, 58, 74, &c. y así siguiendo se observará que siempre las series resultantes son aritméticas cuyas diferencias son como 1, 4, 9, 16, &c. esto es, como los quadrados de los números de la serie primera. Ahora redúzganse dichas series de tal suerte que su primer término en todas sea la unidad; por lo que se tendrán las series:

series:		diferencias.
$1, 2\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 5, 6\frac{1}{3}$, &c.	....	$1\frac{1}{3}$
$1, 2\frac{3}{6}, 4, 5\frac{3}{6}, 7$,	....	$1\frac{3}{6}$
$1, 2\frac{6}{10}, 4\frac{2}{10}, 5\frac{8}{10}, 7\frac{4}{10}$,	....	$1\frac{6}{10}$
$1, 2\frac{10}{15}, 4\frac{5}{15}, 6, 7\frac{10}{15}$,	....	$1\frac{10}{15}$
$1, 2\frac{15}{21}, 3\frac{9}{21}, 5\frac{3}{21}, 6\frac{18}{21}$,	....	$1\frac{15}{21}$
&c.		&c.

Es evidente que la serie de las diferencias halladas $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{6}{10}, \frac{10}{15}, \frac{15}{21}$, &c. se reduce á la serie $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$, &c. cuyo término general es $\frac{n}{n+2}$, en quien supuesta $n=\infty$, será $\frac{n}{n}=1$. Por tanto será á la diferencia de la serie aritmética que resultaria juntando infinitos tiempos infinitésimos: y siendo 1 el primer término de la misma serie, será 3 el segundo, 5 el tercero, 7 el quarto, &c. luego los espacios corridos en iguales tiempos finitos serán como 1, 3, 5, 7, 9, &c. segun la progresion de los números naturales impares. Que es &c.

PROPOSICION X.

400. Si los espacios corridos sucesivamente por un cuerpo en iguales tiempos son como la serie de los números naturales impares; serán las velocidades proporcionales con los correspondientes tiempos, esto es, el movimiento de dicho cuerpo será uniformemente acelerado.

Por ser los espacios corridos por el cuerpo en tiempos iguales como los números naturales impares 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. serán los espacios corridos sucesivamente en 1, 2, 3, 4, &c. tiempos iguales juntos como 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. pero estos números son los quadrados de los respectivos tiempos: luego los espacios corridos por el cuerpo desde el principio de su movimiento serán como los quadrados de los respectivos tiempos; por consiguiente (397) las velocidades serán proporcionales con los correspondientes tiempos. Que es &c.

PROPOSICION XI.

401. El espacio corrido por un cuerpo en el tiempo *AB* con movimiento uniformemente acelerado es mitad del que hubiera corrido el mismo cuerpo con movimiento uniforme, y con la velocidad *BC* adquirida al fin del espacio corrido con dicho movimiento uniformemente acelerado. *Fig.* 186.

Consta que el espacio corrido por el cuerpo con movimiento uniformemente acelerado está representado (393) por el triángulo rectángulo *ABC*; y que el espacio corrido con movimiento uniforme está representado (382) por el rectángulo *BD*; pero el triángulo *ABC* es mitad del rectángulo *BD*: luego &c. Que es &c.

PROPOSICION XII.

402. Si un cuerpo se mueve con movimiento uniformemente retardado; serán los espacios corridos en razon compuesta de los tiempos en que se corren los mismos espacios, y de los tiempos que resultan, restando aquellos del duplo del tiempo total que gasta el cuerpo hasta la extincion de su movimiento: como tambien serán los espacios corridos proporcionales con las diferencias de los quadrados de la velocidad con que empieza á moverse el cuerpo, y de la

que tiene al fin del espacio corrido.

1°. Llámese V la velocidad que tiene el cuerpo al fin del espacio S corrido en el tiempo T; y será $V = \frac{dS}{dT}$ (391). Ahora si se nombra T' el tiempo total del movimiento del cuerpo hasta que se extinga su velocidad, será (351) V proporcional con $T' - T$: luego será $T' - T$ proporcional con $\frac{dS}{dT}$; por consiguiente $T'dT - TdT$ proporcional con dS; é integrando será $T' \times T - \frac{T^2}{2}$ proporcional con S, ó bien $2T' \times T - T^2$ proporcional con $2S$: asimismo nombrando s el espacio corrido en el tiempo t, será $2s$ proporcional con $2T' \times t - t^2$. Por tanto se tendrá $2S : 2s = 2T' \times T - T^2 : 2T' \times t - t^2$, ó bien $S : s = T \times (2T' - T) : t \times (2T' - t)$. Que es lo primero.

2°. Nombradas, V' la velocidad con que empieza á moverse el cuerpo con movimiento uniformemente retardado, V la que tiene al fin del espacio S, y v al fin del espacio s, se tendrán V' proporcional con T' (351), $V' - V$ proporcional con T (350), y $V' - v$ proporcional con t; pero por lo demostrado en el caso anterior es $S : s = T \times (2T' - T) : t \times (2T' - t)$: luego será $S : s = (V' - V) \times (V' + V) : (V' - v) \times (V' + v) = V'V' - V^2 : V'V' - v^2$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

403. Los espacios corridos con movimiento uniformemente retardado en tiempos iguales son como la serie decrecente de los números naturales impares $2m-1$, $2m-3$, $2m-5$, $2m-7$, $2m-9$, &c. en cuya expresion es m el número de los tiempos iguales, en que se supone dividido el tiempo total del movimiento del cuerpo.

Siendo el movimiento uniformemente acelerado, será (402) $S:s=T\times(2T'-T):t\times(2T'-t)$; y suponiendo el tiempo total T' dividido en qualquier número m de partes iguales, y además el primer tiempo T de dichas partes igual á la unidad, se tendrá $S:s=2m-1:t\times(2m-t)$. En esta expresion si es $t=2$, será $S:s=2m-1:4m-4$; por consiguiente si $2m-1$ representa el espacio S corrido en el primer tiempo, será $4m-4$ el espacio corrido en los tiempos primero y segundo: luego el espacio corrido en el segundo tiempo será $2m-3$. Asimismo si se hace $t=3$, será $S:s=2m-1:6m-9$; por consiguiente el espacio corrido en los tres tiempos primeros será $6m-9$; pero el corrido en los tiempos primero y segundo es $4m-4$: luego el espacio corrido en el tercer tiempo será $2m-5$. Con el mismo raciocinio se demostrará que los espacios corridos sucesivamente en los tiempos 4^o. 5^o. 6^o. &c. son como $2m - 7$, $2m - 9$, $2m - 11$, &c. Por tanto los espacios corridos con movimiento uniformemente acelerado en los tiempos iguales 1^o. 2^o. 3^o. 4^o. 5^o. 6^o. &c. hasta el número m son como $2m - 1$, $2m - 3$, $2m - 5$, $2m - 7$, $2m - 9$, $2m - 11$, &c. que es la serie decrecente de los números naturales impares. Que es &c.

EXPERIENCIA I.

404. Si de lo alto de una torre se dexa caer un cuerpo, y se notan los espacios corridos sucesivamente por el mismo cuerpo en tiempos iguales; se observará que son como la serie de los números naturales impares.

De otro modo.

Para observar el referido fenómeno debe tener la torre una altura moderada, y el cuerpo debe ser de mucho peso y corto volumen, á fin de que la resistencia del ayre no produzga efecto sensible en el libre descenso del mismo cuerpo. Pero siendo mucha la velocidad de un cuerpo que se mueve en direccion vertical, y por consiguiente dificultoso de notar los referidos tiempos, se suele hacer el experimento sobre un plano inclinado, en donde el cuerpo está movido tambien por una potencia constante. Consta pues por la teoría del plano inclinado (132) que es la longitud del plano á su altura como la potencia que actúa sobre el cuerpo con direccion vertical, ó bien la gravedad del mismo cuerpo, á la potencia que actúa segun la direccion de dicho plano inclinado; y siendo constantes los tres primeros términos de esta proporcion, será tambien constante el quarto, esto es la potencia que anima al cuerpo segun la direccion del referido plano; y respecto de que la longitud de éste es mayor que su altura, será la gravedad del cuerpo mayor que la potencia que hará mover el cuerpo sobre dicho plano. Supuesto un plano inclinado *AO* (*Fig.* 187.) y en él una canal *DE*, en que estén señalados sucesivamente desde el punto *D* los espacios 1, 3, 5, &c. de la referida serie, se observará que dexando caer el cuerpo desde el punto *D* por dicha canal, correrá los mismos espacios 1, 3, 5, &c. en tiempos iguales.

COROLARIO.

405. Luego las leyes de los movimientos de los cuerpos deducidas en la hipótesis, que los espacios corridos sucesivamente en iguales tiempos son como la serie de los números naturales impares, pertenecen á una potencia constante; por consiguiente sien-

do la potencia constante, serán las velocidades (400) como los tiempos, y los espacios corridos (393) como los quadrados de los tiempos.

EXPERIENCIA II.

406. El espacio corrido por un cuerpo desde el principio de su movimiento en las proxîmidades de la Tierra segun la direccion vertical es próxîmamente de 16 pies ingleses en un segundo, ó bien 15 pies y una pulgada de París, ó con mas exâctitud 15, 0515 baxo el Equador.

COROLARIO I.

407. Se infiere que la velocidad adquirida por dicho cuerpo al fin del referido segundo quedará expresada por 32 pies ingleses, ó bien por 30 pies y dos pulgadas de París, porque el cuerpo andaria este espacio con movimiento uniforme en un segundo (401) en virtud de dicha velocidad adquirida.

COROLARIO II.

408. Y siendo (405) las velocidades proporcionales con los tiempos, los espacios que andaria un cuerpo con movimiento uniforme en un segundo en virtud de las velocidades adquiridas en su descenso por la vertical en dos, tres, &c. segundos, serán duplos,

triplos, &c. de 30 pies y dos pulgadas de París.

PROPOSICION XIV.

409. En la suposicion del movimiento uniformemente acelerado de un cuerpo determinar el espacio que correrá el mismo cuerpo al fin de qualquier tiempo dado desde el principio de su movimiento, como tambien la velocidad que tendrá al fin de dicho espacio.

1°. Nómbrense, S el espacio corrido por dicho cuerpo, V la velocidad que tiene al fin del mismo espacio, y T el tiempo que gasta para andarlo. Siendo por la suposicion del movimiento uniformemente acelerado V proporcional con T, se supondrá $V = \frac{lT}{n}$; y hecha $T = n$, será $V = l$: luego l será aquella velocidad que tiene el cuerpo adquirida al fin del tiempo n en dicha suposicion; pero en qualquiera movimiento acelerado es (392) $V = \frac{n \times dS}{dT}$: luego será en el movimiento propuesto $\frac{lT}{n} = \frac{n \times dS}{dT}$; por consiguiente $TdT = \frac{n^2 \times dS}{l}$, é integrando será $T^2 = \frac{2n^2}{l} \times S$, de donde $S = \frac{l \times T^2}{2n^2}$. Que es lo primero.

2°. Si en la fórmula $V = \frac{n \times dS}{dT}$ se substituye el valor de dT dado por la equacion $V = \frac{l \times T}{n}$ diferenciada, se hallará ser $V^2 = 2lS$, de donde resulta $V = \sqrt{2lS}$. Que es &c.

COROLARIO I.

410. Si se supone n igual á un segundo, se tendrán las equaciones $V = \sqrt{2lS}$, y $S = \frac{1}{2} lT^2$, de donde $S = \frac{V^2}{2l}$, y $T = \frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{l}}$, en cuyas expresiones es l igual á 32 pies (407).

COROLARIO II.

411. Siendo por lo demostrado (409) V^2 igual á $2lS$, y $S = \frac{lT^2}{2n^2}$ de donde $T^2 = \frac{2n^2}{l} \times S$, la escala de las velocidades será una Parábola Apoloniana que tiene su parámetro $= 2l$, y la escala de los tiempos será una Parábola que tiene su parámetro $= \frac{2n^2}{l}$.

EXEMPLO I.

412. Si se dexa caer libremente un cuerpo que está en quietud; se pide determinar el espacio que andará en seis segundos.

En la fórmula $S = \frac{1}{2} lT^2$ (410), háganse las substituciones $l=32$ pies, y $T=6$ (sup.); y resultará que el espacio que se busca, esto es, $S=576$ pies.

EXEMPLO II.

413. En la referida suposicion, se pide determinar el tiempo que gastará un cuerpo para andar 400 pies.

En la fórmula (410) $T=\frac{\surd 2S}{\surd l}$ háganse las substituciones $l=32$ pies, y $S=400$; y resultará que el tiempo que se busca, esto es, $T=5$ segundos.

EXEMPLO III.

414. En la referida suposicion, se pide determinar el espacio que deberá correr un cuerpo, para que tenga la velocidad dada de 96 pies, correspondiendo este espacio al que correria el cuerpo con movimiento uniforme en un segundo con dicha velocidad dada.

En la fórmula $S=\frac{V^2}{2l}$ (410) háganse las substituciones $V=96$, $l=32$; y resultará que el espacio que se busca, esto es, $S=144$ pies.

415. Se añaden las dos tablas siguientes fundadas en los principios expuestos (406. 405. 407.), por ser útiles en la práctica.

TABLA I.

Tiempos de los descensos.	Espacios corridos.		Tiempos de los descensos.	Espacios corridos.		Tiempos de los descensos.	Espacios corridos.	
segundos.	pies.	pulg.	segundos.	pies.	pulg.	segundos.	pies.	pulg.
1	15	1	21	6651	9	41	25355	1
2	60	4	22	7300	4	42	26607	0
3	135	9	23	7979	1	43	27889	1
4	241	4	24	8688	0	44	29201	4
5	377	1	25	9427	1	45	30543	9
6	543	0	26	10196	4	46	31916	4
7	739	1	27	10995	9	47	33319	1
8	965	4	28	11825	4	48	34752	0
9	1221	9	29	12685	1	49	36215	1
10	1508	4	30	13575	0	50	37708	4
11	1825	1	31	14495	1	51	39231	9
12	2172	0	32	15445	4	52	40785	4
13	2549	1	33	16425	9	53	42369	1
14	2956	4	34	17436	4	54	43983	0
15	3393	9	35	18477	1	55	45626	1
16	3861	4	36	19548	0	56	47301	4
17	4359	1	37	20649	1	57	49005	9
18	4887	0	38	21780	4	58	50740	4
19	5445	1	39	22941	9	59	52505	1
20	6033	4	40	24133	4	60	54300	0

TABLA II.

Tiempos que gasta un cuerpo para adquirir cada velocidad.	Espacios corridos uniformemente en un segundo en virtud de la velocidad adquirida.		Tiempos que gasta un cuerpo para adquirir cada velocidad.	Espacios corridos uniformemente en un segundo en virtud de la velocidad adquirida.		Tiempos que gasta un cuerpo para adquirir cada velocidad.	Espacios corridos uniformemente en un segundo en virtud de la velocidad adquirida.	
segundos	pies.	pulg.	segundos	pies.	pulg.	segundos	pies.	pulg.
1	30	2	21	633	6	41	1236	10
2	60	4	22	663	8	42	1267	0
3	90	6	23	693	10	43	1297	2
4	120	8	24	724	0	44	1327	4
5	150	10	25	754	2	45	1357	6
6	181	0	26	784	4	46	1387	8
7	211	2	27	814	6	47	1417	10
8	241	4	28	844	8	48	1448	0
9	271	6	29	874	10	49	1478	2
10	301	8	30	905	0	50	1508	4
11	331	10	31	935	2	51	1538	6
12	362	0	32	965	4	52	1568	8
13	392	2	33	995	6	53	1598	10
14	422	4	34	1025	8	54	1629	0
15	452	6	35	1055	10	55	1659	2
16	482	8	36	1086	0	56	1689	4
17	512	10	37	1116	2	57	1719	6
18	543	0	38	1146	4	58	1749	8
19	573	2	39	1176	6	59	1779	10
20	603	4	40	1206	8	60	1810	0

Del Movimiento rectilineo de los cuerpos, á quienes están aplicadas potencias constantes.

PROPOSICION XV.

416. Si las velocidades adquiridas por los cuerpos B y A en iguales tiempos son entre sí como $\frac{p}{m}$ á $\frac{P}{M}$, esto es, en razon compuesta de la directa de las potencias constantes p y P aplicadas á los mismos cuerpos, y de la inversa de sus masas m y M; serán los espacios s y S corridos desde el principio del movimiento en los tiempos t y T en razon compuesta de la directa de las potencias, de la directa de los quadrados de los tiempos, y de la inversa de las masas, y además serán las velocidades v y V adquiridas al fin de dichos espacios en razon compuesta de la directa de las potencias, de la directa de los tiempos, y de la inversa de las masas; esto es, $s : S = \frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M}$, y $v : V = \frac{pt}{m} : \frac{PT}{M}$. *Fig.* 188.

1°. Supóngase que los cuerpos B y A han corrido los espacios Bv y AW en un mismo tiempo t; y será (sup.) la velocidad del cuerpo B en v á la del cuerpo A en W como $\frac{p}{m}$ á $\frac{P}{M}$; pero por ser constante la potencia P aplicada al cuerpo A, es (405) la velocidad de él en W á la velocidad en V como t á T: luego será la velocidad del cuerpo B en v á la del cuerpo A en V en la razon compuesta de la directa de las potencias, de la directa de los tiempos, y de la inversa de las masas, esto es, $v : V = \frac{pt}{m} : \frac{PT}{M}$. Que es lo segundo.

2°. Se ha dicho antes que es la velocidad del cuerpo B en v á la del cuerpo A en W como $\frac{p}{m}$ á $\frac{P}{M}$; pero llamado el espacio corrido $AW = S'$, son (391) dichas velocidades como $\frac{ds}{dt}$ á $\frac{dS'}{dt}$ ó como ds á dS': luego será $ds : dS' = \frac{p}{m} : \frac{P}{M}$; por consiguiente $s : S' = \frac{p}{m} : \frac{P}{M}$; pero (405) $S' : S = t^2 : T^2$: luego será s á S en razon compuesta de la directa de las potencias, de la directa de los quadrados de los tiempos, y de la inversa de las masas; esto es, $s : S = \frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M}$. Que es &c.

COROLARIO I.

417. Se infiere que si dos cuerpos son animados por potencias constantes proporcionales con las ma-

sas de los mismos cuerpos; estos correrán espacios iguales en tiempos iguales: y al contrario.

COROLARIO II.

418. Tambien se infiere que si dos cuerpos son animados por potencias constantes, y tienen las masas iguales; dichos cuerpos correrán espacios proporcionales con las mismas potencias en tiempos iguales: y al contrario.

EXPERIENCIA I.

419. Si en el Recipiente de la Máquina pneumática extraido el ayre se dexan caer desde una misma altura qualesquiera cuerpos que tienen masas desiguales; se observará que llegan á la platina en un mismo tiempo.

COROLARIO.

420. Se infiere que en todos los cuerpos serán las gravedades proporcionales con las masas: luego siendo las potencias constantes como las masas de los cuerpos, éstos correrán espacios iguales en tiempos iguales.

EXPERIENCIA II.

421. Si en los planos inclinados *AB* y *DF* (*Fig.* 189) se toman los espacios *AN* y *DM* proporcio-

nales con las potencias constantes que animan á los cuerpos iguales A y D segun las direcciones de dichos planos, y se dexan caer libremente dichos cuerpos desde los puntos A y D; se observará que corren los espacios AN y DM en iguales tiempos.

COROLARIO.

422. Se infiere que si dos cuerpos tienen masas iguales, y están animados por potencias constantes; los espacios corridos por dichos cuerpos en tiempos iguales serán proporcionales con las mismas potencias.

PROPOSICION XVI.

423. Si las masas m y M de dos cuerpos son animadas por las potencias constantes p y P; serán los espacios CD y AH corridos por los mismos cuerpos en los tiempos desiguales t y T como $\frac{pt^2}{m}$ á $\frac{PT^2}{M}$, y además serán las velocidades v y V adquiridas al fin de dichos tiempos como $\frac{pt}{m}$ á $\frac{PT}{M}$. *Fig.* 190. 191.

1°. Nómbrense los espacios $CD = s$, y $AH = S$. Supóngase que los cuerpos m y M han andado (*Fig.* 190.) los espacios CD y AB en un mismo tiempo t, y que el cuerpo $m' = m$ corre el espacio EF en el tiempo t, y está animado con una potencia P', de suerte que sea $P' : P = m' : M$, ó bien $P' = \frac{Pm}{M}$; por consiguiente (420) será $AB = EF$. Y porque los cuerpos iguales m y m' corren en tiempos iguales los espacios CD y EF, será (422) $p : P' = CD : EF$ ó bien AB; y substituyendo el valor de P', se tendrá $p : \frac{Pm}{M} = CD : AB$, ó bien $\frac{p}{m} : \frac{P}{M} = s : AB$; pero (405) $t^2 : T^2 = AB : S$: luego será (A) $\frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M} = s : S$. Que es lo primero.

2°. Descríbanse las Parábolas CN y AF (*Fig.* 191) cerca de los exes CD y AH; y representando CD y AH los espacios corridos por los cuerpos m y M con potencias constantes, expresarán (396) las ordenadas DN y HF los tiempos en que dichos espacios se corrieron. Considérense las ordenadas dn y hf infinitamente próxîmas á las DN y HF, y Nr y Fo paralelas á los respectivos exes de dichas Parábolas; y será (391) la velocidad del cuerpo m en D á la del cuerpo M en H como $\frac{Nr}{nr}$ á $\frac{Fo}{fo}$; pero (III. 257) la subtangente DK es igual á $\frac{Nr \times DN}{nr}$, y $DK = 2CD$ (III. 264.), de donde $\frac{Nr}{nr} = \frac{2CD}{DN}$, y por la misma razon $\frac{Fo}{fo} = \frac{2AH}{FH}$: luego será la velocidad del cuerpo m en D á la del cuerpo M en H como $\frac{2CD}{DN} : \frac{2AH}{FH}$; pero se ha demostrado en el caso anterior $CD : AH = \frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M}$, y son $DN = t$, $HF = T$: luego será la velocidad del cuerpo m en D á la del cuerpo M en H, ó bien (B) $v : V = \frac{pt}{m} : \frac{PT}{M}$. Que es &c.

COROLARIO I.

424. Siendo $v : V = \frac{pt}{m} : \frac{PT}{M}$, será $\frac{mv^2}{p} : \frac{MV^2}{P} = \frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M}$; pero (423) $s : S = \frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M}$: luego será (C) $s : S = \frac{mv^2}{p} : \frac{MV^2}{P}$.

COROLARIO II.

425. Asimismo siendo $v : V = \frac{pt}{m} : \frac{PT}{M}$, será (D) $t : T = \frac{mv}{p} : \frac{MV}{P}$.

COROLARIO III.

426. Tambien por ser (423) $s : S = \frac{pt^2}{m} : \frac{PT^2}{M}$, se-

rá $p:P = \frac{ms}{t^2}:\frac{MS}{T^2}$, de donde resulta la razon que han de tener entre sí las potencias constantes aplicadas á las masas de los cuerpos, para que anden espacios dados en tiempos dados.

COROLARIO IV.

427. Si el cuerpo *A* movido por su gravedad *g* (*Fig.* 192.) corre el espacio vertical $CD = s$, y el cuerpo *B* en virtud de su gravedad *G* corre la longitud $EI = s$ de un plano inclinado cuya altura $EF = H$; en las fórmulas anteriores *A*, *B*, *C*, *D* serán, la potencia $p = g$, la potencia *P* (con que el cuerpo *B* anda segun la direccion del plano inclinado *EI*) quarta proporcional de *S*, *H* y *G*, esto es, $P = \frac{H \times G}{S}$, y finalmente $m:M = g:G$: luego se tendrán las proporciones, $s:S = t^2:\frac{T^2 \times H}{S}$, $v:V = t:\frac{H \times T}{S}$, $s:S = v^2:\frac{V^2 \times S}{H}$, y $t:T = v:\frac{V \times S}{H}$, de donde resulta ser $t^2:T^2 = s:\frac{S^2}{H}$, y $v^2:V^2 = s:H$.

COROLARIO V.

428. Y si los cuerpos *A* y *B* animados por sus respectivas gravedades *g* y *G* corren las longitudes

(*Fig.* 193.) $CD = s$, y $EI = S$ de los planos inclinados que tienen las alturas $CK = h$, y $EF = H$; hechas las substituciones $p = \frac{g \times h}{s}$, $P = \frac{H \times G}{S}$ y $m : M = g : G$ en las referidas fórmulas A, B, C, D, se tendrán las proporciones $s : S = \frac{h \times t^2}{s} : \frac{H \times T^2}{S}$, $v : V = \frac{t \times h}{s} : \frac{T \times H}{S}$, $s : S = \frac{v^2 \times s}{h} : \frac{V^2 \times S}{H}$, y $t : T = \frac{v \times s}{h} : \frac{V \times S}{H}$, de donde resulta ser $s^2 : S^2 = ht^2 : HT^2$, y $v^2 : V^2 = h : H$.

COROLARIO VI.

429. Luego si dos qualesquiera planos inclinados tienen iguales alturas, las velocidades finales de los cuerpos A y B en los puntos D y I serán iguales. Siendo, pues, $v^2 : V^2 = h : H$, y $h = H$ (sup.), será $v^2 = V^2$, y por consiguiente se tendrá $v = V$.

EXEMPLO I.

430. Supónganse, la altura vertical $CD = 300$ pies, y la longitud EI del plano inclinado igual á 500 pies, y su altura $EF = 250$ pies; se pide determinar la razon del tiempo t que gasta un cuerpo para correr dicha altura CD al tiempo T que gasta para correr la longitud EI de dicho plano inclinado. *Fig.* 192.

Siendo por lo demostrado (427) $t^2 : T^2 = s : \frac{S^2}{H}$, substituyendo será $t^2 : T^2 = 300 : \frac{250000}{250} = 3 : 10$; por consiguiente se tendrá $t : T = \sqrt{3} : \sqrt{10}$.

EXEMPLO II.

431. Supónganse, la altura vertical $CD = 250$ pies, y la longitud EI del plano inclinado igual á 500 pies; se pide determinar la altura EF de dicho plano, para que un cuerpo corra en igual tiempo la referida altura, y la longitud de dicho plano. *Fig.* 192.

En la proporcion demostrada (427) $t^2 : T^2 = s : \frac{S^2}{H}$, háganse $t = T$, $s = 250$, $S = 500$; y se tendrá $250 = \frac{250000}{H}$; por consiguiente será $H = 1000$ pies.

EXEMPLO III.

432. Supóngase que dos planos inclinados tienen iguales los ángulos de inclinacion CDK y EIF; se pide determinar la razon de los tiempos que gastan los cuerpos A y B para correr las longitudes CD y EI de dichos planos. *Fig.* 193.

Siendo pues el ángulo $CDK = EIF$, y el ángulo $K = F$ por rectos, se tendrá $CK : CD = EF : EI$, esto es, $h : s = H : S$; pero $s : S = \frac{ht^2}{s} : \frac{HT^2}{S}$ (428): luego será $s : S = t^2 : T^2$; por consiguiente $t : T = \sqrt{s} : \sqrt{S}$

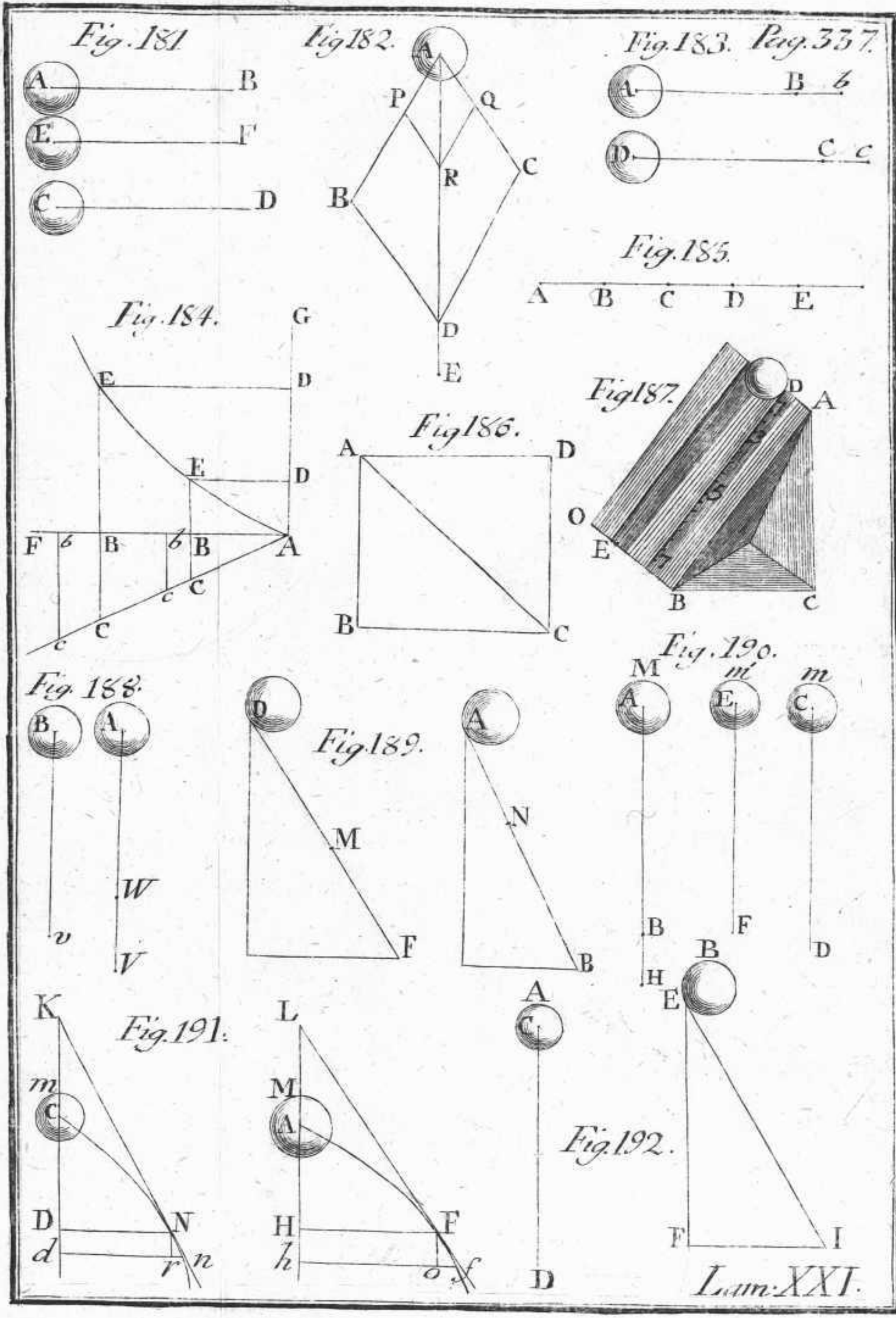


Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Pag. 337.
Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Lam: XXI.

EXEMPLO IV.

433. Se pide hallar la razon de los tiempos que gastará un cuerpo para correr qualesquiera cuerdas AC y AD tiradas por el extremo A del diámetro vertical AB de un círculo. *Fig.* 194.

Tírense las perpendiculares DF y CE al diámetro AB del círculo propuesto; y serán AF y AE las alturas de dos planos inclinados que tienen las longitudes AD y AC. Nómbrense $AD=s$, $AC=S$, $AF=h$, y $AE=H$. Siendo pues $AD^2=BA\times AF$, y $AC^2=BA\times AE$, será $AD^2:AC^2=BA\times AF:BA\times AE=AF:AE$, esto es, $s^2:S^2=h:H$; pero es (428) $s^2:S^2=ht^2:HT^2$: luego será $h:H=ht^2:HT^2$; por consiguiente $t=T$. La misma propiedad se demostrará respecto á qualesquiera cuerdas BI y BK tiradas desde el otro extremo B del referido diámetro vertical; de donde resulta que todas las cuerdas de un círculo tiradas desde los extremos de su diámetro vertical se correrán en tiempos iguales. Es evidente que el diámetro vertical AB debe contarse en el número de dichas cuerdas.

PROPOSICION XVII.

434. Si los cuerpos M y m corren los espacios $AB=S$ y $ab=s$ en los respectivos tiempos T y t, y con-

tinuando su movimiento corren los espacios $BR = S'$ y $br = s'$ en los tiempos T' y t' proporcionales con los primeros; hallar la razon de los tiempos T' y t' á las velocidades V' y v' adquiridas al fin de los espacios BR y br, y la razon de estos espacios á las velocidades V' y v'. *Fig.* 195.

1°. Llámense V y v las respectivas velocidades de las masas M y m en los puntos B y b. Consta (425) ser $t + t' : T + T' = \frac{m \times (v + v')}{p} : \frac{M \times (V + V')}{P}$, y $t : T = \frac{mv}{p} : \frac{MV}{P}$; pero (sup.) $T : t = T' : t'$, é invirtiendo $t : T = t' : T'$: luego será $t' : T' = \frac{mv'}{p} : \frac{MV'}{P}$. Que es lo primero.

2°. Siendo (sup.) $T' : t' = T : t$, será tambien $t + t' : t = T + T' : T$, y $(t + t')^2 : t^2 = (T + T')^2 : T^2$; pero (405) $ar : ab = (t + t')^2 : t^2$, y $AR : AB = (T + T')^2 : T^2$: luego se tendrá $ar : ab = AR : AB$, y $ab : AB = br : BR$, esto es, $s : S = s' : S'$; pero (424) $s + s' : S + S' = \frac{m \times (v + v')^2}{p} : \frac{M \times (V + V')^2}{P}$, y tambien $s : S = \frac{mv^2}{p} : \frac{MV^2}{P}$: luego será $s' : S' = \frac{m \times (2vv' + v'v')}{p} : \frac{M \times (2VV' + V'V')}{P}$. Que es &c.

COROLARIO.

435. Luego en el movimiento de un cuerpo ani-

mado por una potencia constante se tendrán, t' proporcional con $\frac{mv'}{P}$, y s' proporcional con $\frac{m\times(2vv'+v'v')}{P}$: y suponiendo s' infinitésimo, esto es $s'=ds$, serán dt proporcional con $\frac{mdv}{P}$, y ds proporcional con $\frac{2mvdv}{P}$, en cuyas expresiones se dará el signo positivo ó negativo á la dv, segun sea el movimiento acelerado ó retardado.

Del Movimiento de los cuerpos, á quienes están aplicadas potencias variables.

PROPOSICION XVIII.

436. Si el cuerpo M animado por una potencia variable P corre el espacio AB; determinar en qualquiera punto Q de dicho espacio las razones, del espacio AQ á la velocidad que tiene el cuerpo al fin del mismo espacio, y del tiempo en que lo corre á la velocidad. *Fig.* 196.

Nómbrense, el espacio $AQ=S$, T el tiempo en que el cuerpo M corre dicho espacio, y V la velocidad adquirida al fin del mismo espacio. Considerando Qq infinitésimo, será constante la potencia P por dicho espacio; por consiguiente serán (435) dS proporcional con $\pm\frac{2MVdV}{P}$, y dT proporcional con

$\pm\frac{MdV}{P}$: luego serán, $\pm\frac{S.PdS}{M}$ proporcional con V^2, y $\pm\frac{S.PdT}{M}$ proporcional con V. Que es &c.

COROLARIO.

437. Se infiere que dado el valor de la potencia variable P por el espacio corrido S, la integral de la expresion $PdS : 2MVdV$ dará una ley del movimiento en el caso propuesto, y de ella se podrán determinar geométricamente todas las demas. Dígase lo mismo respecto á la expresion $PdT : MdV$ en el caso de estar dada la potencia P por el tiempo T, cuyo caso rara vez acontece. En lo sucesivo se escribirán las referidas fórmulas con el signo de igualdad para comodidad del cálculo, esto es, $2MVdV = PdS$, $MdV = PdT$, $V^2 = \frac{S.PdS}{M}$, $V = \frac{S.PdT}{M}$, como tambien $V^2 = \frac{PS}{M}$, $V = \frac{PT}{M}$, $P = \frac{MS}{T^2}$, si se trata de potencias constantes. En el caso del movimiento retardado se dará el signo negativo á la dV en dichas fórmulas.

ESCOLIO I.

438. Si se quiere determinar la razon de Pds á $2MVdV$, se usará del método siguiente. Supóngase $lPdS = MVdV$: luego en qualquiera otro sistema de

potencias será tambien $lpds = mvdv$. Asimismo supóngase que el sistema $lPdS = MVdV$ es el en que las potencias son proporcionales con las masas; por consiguiente será $ldS = VdV$; pero (392) $V = \frac{ndS}{dT}$: luego será $ldT = ndV$, é integrando se tendrá $lT = nV = \frac{n^2 dS}{dT}$; por consiguiente $lTdT = n^2 dS$; é integrando será $lT^2 = 2n^2 S$: luego supuesto $T = n$ se tendrá $l = 2S$. Hágase $l = 2k$, y será k el espacio (401) que corre un cuerpo terrestre en el tiempo n que se establece ser un segundo. Por tanto en qualquiera sistema de potencias será $2kpds = mvdv$, si el movimiento del cuerpo es acelerado, y si es retardado, se tendrá $2kpds = -mvdv$. Ahora si se substituye el valor de $v = \frac{nds}{dt}$ en las fórmulas anteriores, se tendrán las $2kpdt = mndv$, y $2kpdt = -mndv$. En dichas fórmulas $2kpds = \pm mvdv$, y $2kpdt = \pm mndv$ expresan, m el peso del cuerpo terrestre que contiene la misma cantidad de materia que se halla en el cuerpo movido, p el peso de un cuerpo terrestre que hace equilibrio con la potencia, k el espacio que qualquiera peso p anda en el tiempo n que se establece ser un segundo. Finalmente si se pide determinar la fórmula que compara el tiempo con el espacio, intégrese la fórmula $2kpds = mvdv$; y se tendrá $\frac{4k}{m} \times S.pds = v^2$: luego $v = \frac{2\sqrt{(k \times S.pds)}}{\sqrt{n}}$, pero $v = \frac{nds}{dt}$: luego será $\frac{nds}{dt} = \frac{2\sqrt{(k \times Spds)}}{\sqrt{m}}$; de donde resulta ser $dt = \frac{n\sqrt{m} \times ds}{2\sqrt{(k \times S.pds)}}$. Si la potencia p es constante, se tendrá $dt = \frac{n\sqrt{m} \times ds}{2\sqrt{(kp)} \times s^{\frac{1}{2}}}$; y suponiendo la integral de esta expresion igual á cero, mientras que sea $s = o$, se tendrá $t = \frac{n\sqrt{m} \times \sqrt{s}}{\sqrt{kp}}$, de donde resulta ser $\frac{t^2}{n^2} = \frac{ms}{kp}$.

ESCOLIO II.

439. Adviértase que las referidas fórmulas $2kpds = mvdv$, $2kpdt = mndv$ no tienen lugar, siempre que se trata del movimiento inicial del cuerpo. En este caso se podrá considerar constante la potencia finita por el espacio ds en el tiempo infinitésimo dt: luego valdrán las fórmulas pertenecientes á la potencia constante, esto es, $2kps = \frac{1}{2}mv^2$, $2kpt = mnv$, con tal que en ellas se substituyan, ds en lugar de s, dv en lugar de v, y dt en lugar de t; por consiguiente en el referido caso del movimiento inicial serán $2kpds = \frac{1}{2}mdv^2$, y $2kpdt = mndv$.

PROPOSICION XIX.

440. Si el centro C de la potencia atrae al cuerpo M en la razon de su distancia á dicho centro; determinar la razon del espacio corrido AQ á la velocidad que el cuerpo tiene al fin del mismo espacio, como tambien la razon de dicho espacio al tiempo que gasta el cuerpo para andarlo. *Fig.* 197.

1°. Llámense, m la masa del cuerpo M, $AQ = s$, t el tiempo en que el cuerpo corre el espacio AQ, v la velocidad del cuerpo en Q, y $CA = a$; y será CQ ó bien $a - s$ como la potencia p por ser ésta proporcional con la distancia del centro C al cuerpo; pero (437) $v^2 = \frac{S.pds}{m}$: luego substituyendo el valor de p, será $v^2 = \frac{S.(ads - sds)}{m}$; é integrando se tendrá $v^2 = \frac{2as - s^2}{2m}$, de donde $v = \frac{\sqrt{(2as - s^2)}}{\sqrt{2m}}$. Ahora haciendo centro en C con el intervalo CA descríbase el semicírculo ANB, y en el punto Q levántese la perpendicular QN sobre el diámetro AB, la que será proporcional con la velocidad del cuerpo en el punto Q, mientras el mismo cuerpo ha corrido el espacio AQ. Que es lo primero.

2°. Siendo $v = \frac{ds}{dt}$ (391), será $dt = \frac{ds}{v}$; pero

$v = \frac{\sqrt{(2as - s^2)}}{\sqrt{2m}}$ por lo demostrado en el caso anterior: luego será $dt = \sqrt{2m} \times \frac{ds}{\sqrt{(2as - s^2)}}$; é integrando se tendrá $t = \sqrt{2m} \times S. \frac{ds}{\sqrt{(2as - s^2)}}$, de donde resulta que el tiempo gastado por el cuerpo en correr el espacio AQ será proporcional con el ángulo ACN. Que es &c.

COROLARIO I.

441. Si el cuerpo M empieza su movimiento desde el punto a, y la potencia que le anima es tambien proporcional con la distancia del cuerpo al centro C; descrito con el radio aC el semicírculo anb, será la velocidad adquirida por el mismo cuerpo en el punto Q proporcional con la ordenada Qn, y además será el tiempo que gasta el cuerpo M en correr el espacio aQ proporcional con el ángulo QCn: luego será la velocidad adquirida al fin del espacio AQ á la adquirida al fin del espacio aQ como QN á Qn, y además será el tiempo que gasta el cuerpo M en correr el espacio AQ al tiempo que gasta en correr el espacio aQ como el ángulo QCN al ángulo QCn.

COROLARIO II.

442. Luego el cuerpo M llegará al centro C en

igual tiempo, ya sea que empiece su movimiento desde el punto A, ó ya desde el punto a.

ESCOLIO.

443. Si se quiere hacer uso de la fórmula $2kpds = mvdv$ (438); se procederá del modo siguiente. Nómbrense, $CA = a$, y P la potencia que atrae al cuerpo á la distancia dada $CE = b$; y será $P:p = b:a - s$, y por consiguiente $p = \frac{P \times (a-s)}{b}$: luego substituyendo el valor de p en la referida fórmula, se tendrá $\frac{2kP \times (ads - sds)}{b} = mvdv$; é integrando en la suposicion de ser $s = o$ quando $v = o$, será (A) $2kP \times (2as - s^2) = bmv^2$: luego será $v = \frac{\sqrt{2kP}}{\sqrt{bm}} \times \sqrt{(2as - s^2)}$. Por tanto si es $\sqrt{2kP} = \sqrt{bm}$, la circunferencia ANB será la escala de las velocidades; y si dichas cantidades son desiguales, se tendrá que la dicha escala será la curvatura de una Elipse que tiene sus semiexes en la razon de $\sqrt{bm}$ á $\sqrt{2kP}$. Si se tiene otro cuerpo con su masa $= M$, que se mueva con la dicha ley de las potencias, pero que á la distancia $CE = b$ la potencia P' sea distinta de la referida potencia P; se tendrá $2kP' \times (2as' - s's') = bMv'v'$, cuya fórmula comparada con la A da-

rá la razon del movimiento del cuerpo m á el del cuerpo M. Si es $s = s'$, será $\frac{P}{P'} = \frac{mv^2}{Mv'v'}$, de donde resulta ser $v : v' = \frac{\surd P}{\surd m} : \frac{\surd P'}{\surd M}$. Y si $v = v'$, se tendrá $2as - s^2 : 2as' - s's' = \frac{m}{P} : \frac{M}{P'}$.

Para la determinacion de los tiempos consta (392) ser $dt = \frac{nds}{v}$; pero $v = \frac{\surd 2kP}{\surd bm} \times \sqrt{(2as - s^2)}$: luego será $dt = \frac{n\surd bm \times ds}{\surd 2kP \times \surd(2as - s^2)}$; é integrando será (III. 118) $t = \frac{n\surd bm}{a\surd 2kP} \times u$, nombrando u el arco AM cuyo seno verso $= s$. En el movimiento de otro cuerpo M, será $t' = \frac{n\surd bM}{a\surd 2kP'}, \times u'$: luego será $t : t' = \frac{\surd m}{\surd P} \times u : \frac{\surd M}{\surd P'} \times u'$. Si es $t = t'$, será $\frac{\surd m}{\surd P} \times u = \frac{\surd M}{\surd P'} \times u'$, de donde resulta ser $u : u' = \frac{\surd P}{\surd m} : \frac{\surd P'}{\surd M}$. Y si se supone $u = u'$, será $t : t' = \frac{\surd m}{\surd P} : \frac{\surd M}{\surd P'}$. Siendo por lo demostrado $t = \frac{n\surd bm}{a\surd 2kP} \times u$, será n á t como $a\sqrt{2kP}$ á $u\sqrt{bm}$, ó bien en razon compuesta de

$\sqrt{2kP}$ á $\sqrt{bm}$ y de a á u. Ahora si se supone que el cuerpo m haya llegado al centro C, es evidente que la razon de a al quadrante será la misma, qualquiera que sea el radio CA, esto es, el espacio que ha corrido el cuerpo m desde el principio del movimiento: y en dicha suposicion si es $2k:b = m:P$, ó bien $2kP = bm$, será n á t como el radio al quadrante; por consiguiente suponiendo un mismo cuerpo y una misma escala de las potencias, dicho cuerpo llegará al centro C en igual tiempo, qualquiera que sea el punto A, de donde empieza su movimiento.

Del Movimiento de los cuerpos, en los que actúa la potencia de los elastros ó muelles, que median entre los mismos cuerpos.

444. Se supone que en qualquiera serie A de elastros son los mismos elastros RS, SD, DE, &c. iguales entre sí, é inmateriales, y que abriéndose ó cerrándose los mismos elastros, los ángulos RSD, DEF, &c. que resultan, son tambien iguales, aunque se coloque un apoyo en uno de los extremos R de dicha serie. *Fig.* 198.

COROLARIO.

445. Luego si se dán dos series de elastros A y B

perfectamente iguales, pero compuestos de un número desigual de elastros, y si en el un extremo de dichas series se colocan los apoyos *T* y *t*; abriéndose ó cerrándose dichos elastros, será el espacio *RK* al espacio *rn* como el número de los elastros de la serie *A* á él de la serie *B*, y la potencia de los elastros en el extremo *K* será igual á la potencia de los elastros en el extremo *n*, de suerte que las masas *M* y *m* aplicadas en dichos extremos serán impelidas por iguales potencias, sucediendo lo mismo con las potencias, que impelen las masas *M* y *m* aplicadas en los extremos *K* y *R* de qualquiera serie *C* de los referidos elastros.

PROPOSICION XX.

446. Si se dan dos series de elastros *A* y *B* perfectamente iguales, pero compuestos de un número desigual de elastros, y si en el un extremo de dichas series se colocan los apoyos *T* y *t*, y en el otro extremo las masas *M* y *m*; abiertos los elastros *A* y *B*, determinar la razon de las velocidades de los cuer- *M* y *m*, como tambien la de los tiempos en que dichos cuerpos corren los espacios *LG* y *lg* proporcionales con los números *N* y *n* de los elastros *A* y *B*. *Fig.* 199.

1°. Nómbrense, *V* la velocidad del cuerpo *M*,

v la del cuerpo m, $LG = S$, y $lg = s$. Siendo (445) la potencia aplicada á la masa M igual á la potencia aplicada á la masa m, será $P = p$ en las fórmulas (437) $S.PdS = MV^2$, y $S.pds = mv^2$; pero siendo (sup.) $S:s = N:n$, es $dS = \frac{N \times ds}{n}$: luego se tendrán las equaciones $\frac{N}{n} \times S.pds = M \times V^2$, y $S.pds = mv^2$; por consiguiente será $MV^2 : mv^2 = \frac{N}{n} \times S.pds : S.pds$, de donde resulta ser $V^2 : v^2 = \frac{N}{M} : \frac{n}{m}$, y $V : v = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$. Que es lo primero.

2°. Consta que es (391) $V \times dT : v \times dt = dS : ds$, y por consiguiente $dT : dt = \frac{dS}{V} : \frac{ds}{v}$; pero por lo demostrado en el caso anterior es $V : v = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, y $dS = \frac{N \times ds}{n}$: luego será $dT : dt = \sqrt{NM} : \sqrt{nm}$; por consiguiente será $T : t = \sqrt{NM} : \sqrt{nm}$. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

447. Si se dan dos series de elastros A y B perfectamente iguales, pero es la fuerza de los elastros

A á la de B como R á r, y si en el un extremo de dichas series se colocan los apoyos T y t, y en el otro extremo las masas M y m; abiertos los elastros A y B, determinar la razon de las velocidades, y la de los tiempos, en que las masas M y m corren los espacios LG y lg en cuya posicion queden dichos elastros igualmente abiertos. *Fig.* 200.

1°. Nómbrense, V la velocidad del cuerpo M, v la del cuerpo m, $LG = S$, y $lg = s$. Siendo pues la fuerza de los elastros A á la de los elastros B como R á r, serán Rp y rp las respectivas potencias aplicadas á las masas M y m: luego se tendrán las equaciones (437) $R \times S.pdS = MV^2$, $r \times S.pds = mv^2$. Y por ser los elastros A y B perfectamente iguales en los puntos G y g, como tambien en los puntos L y l, son $CG = cg$, y $CL = cl$, y de consiguiente $LG = lg$, ó bien $S = s$: luego será $MV^2 = R \times S.pds$, y $mv^2 = r \times S.pds$; por consiguiente $MV^2 : mv^2 = R \times S.pds : r \times S.pds = R : r$, de donde resulta ser $V : v = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{m}}$. Que es lo primero.

2°. Consta que es (391) $V \times dT : v \times dt = dS : ds$; pero $S = s$ por lo demostrado en el caso anterior: luego será $V \times dT = v \times dt$, y por consiguiente $dT : dt = \frac{1}{V} : \frac{1}{v}$; pero $V : v = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{m}}$ por lo demostrado en dicho caso: luego será $dT:dt = \frac{\surd M}{\surd R}:\frac{\surd n}{\surd r}$; por consiguiente $T:t = \frac{\surd M}{\surd R}:\frac{\surd n}{\surd r}$. Que es &c.

PROPOSICION XXII

448. Si es el número de los elastros A á el de B como N á n, y si además es la fuerza de los elastros A á la de los elastros B como R á r; abiertos los elastros A y B que tienen los apoyos en T y t, determinar la razon de las velocidades, y la de los tiempos, en que los cuerpos M y m corren los espacios LG y lg, en cuya posicion queden dichos elastros igualmente abiertos. *Fig.* 199.

1°. Nómbrense, V la velocidad del cuerpo M, y v la del cuerpo m. Siendo pues la fuerza de los elastros A á la de B como R á r, serán Rp y rp las respectivas potencias aplicadas á las masas M y m: y por ser el número de los elastros A á él de los elastros B como N á n, llamado $N\times s$ el espacio LG será ns el espacio lg: luego se tendrán las equaciones (437) $RN\times S.pds = MV^2$, y $rn\times S.pds = mv^2$; por consiguiente $MV^2 : mv^2 = NR\times S.pds : rn\times S.pds = RN : rn$, de donde resulta ser $V^2 : v^2 = \frac{RN}{M} : \frac{rn}{m}$, y $V : v = \frac{\surd RN}{\surd M} : \frac{\surd rn}{\surd m}$. Que es lo primero.

2°. Consta que es (391) $V\times dT : v\times dt = N\times ds : n\times ds = N : n$, y por consiguiente será $dT : dt = \frac{N}{V} : \frac{n}{v}$; pero por lo demostrado en el caso anterior es $V : v = \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}}$: luego será $dT : dt = \frac{\sqrt{NM}}{\sqrt{R}} : \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{r}}$, y por consiguiente $T : t = \frac{\sqrt{NM}}{\sqrt{R}} : \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{r}}$. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

449. Si al un extremo de una serie A de elastros se aplica la masa M, y al otro extremo la masa m; abiertos los elastros, determinar la razon de las velocidades de los cuerpos M y m al fin de los espacios LG y lg corridos en tiempos iguales, y la razon de los mismos espacios. *Fig.* 201.

1°. Consta que es (437) $MdV = PdT$, y $mdv = pdt$; pero (sup.) $T = t$, y la potencia P aplicada á la masa M igual (445) á la potencia p aplicada á la masa m: luego será $MdV = pdt$, y $mdu = pdt$; por consiguiente se tendrá $MdV = mdu$, y $MV = mv$, de donde resulta ser $V : v = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$. Que es lo primero.

2°. Siendo por lo demostrado (437) $PdS = 2M\times VdV$, y $pds = 2mvdv$, y además $p = P$ por lo dicho en el caso anterior, será $dS : ds = MVdV : mvdv$; pero $MdV = mdv$, y $V : v = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$, por lo demostrado en el caso anterior: luego será $dS : ds = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$; por consiguiente $S : s = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$. Que es &c.

COROLARIO.

450. Se infiere que, dividido el espacio Ll en la razon inversa de las masas M y m, ó bien hallado el punto K centro de la gravedad de las mismas masas, quedará dicho punto K en equilibrio, mientras los elastros se mueven de una y otra parte.

PROPOSICION XXIV.

451. Si las masas M y m van á cerrar la serie de los elastros B á un mismo tiempo con las velocidades recíprocamente proporcionales con dichas masas; determinar la razon de las velocidades, con que se moverán dichos cuerpos mientras cierran los mismos elastros, y tambien la razon de los espacios corridos en tiempos iguales. *Fig.* 202.

1°. Supóngase que los spacios infinitésimos LA y la se corren en igual tiempo. Llámense, $LA = dS$, $la = ds$, V la velocidad del cuerpo M, y v la de m. Consta ser (437) $MdV = PdT$, y $mdv = pdt$; pero (sup.) $dT = dt$, y (445) la potencia P aplicada á la masa M igual á la potencia p aplicada á la masa m: luego será $MdV = mdv$; por consiguiente $dV : dv = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$, esto es, las velocidades, que pierden los cuerpos M y m en iguales tiempos infinitésimos, serán en la razon inversa de las masas de los mismos cuerpos: luego las velocidades residuas tendrán entre sí la misma razon. Con el mismo raciocinio se demostrará que, corriendo los cuerpos M y m otros espacios en iguales tiempos infinitésimos, estarán sus velocidades residuas en la misma razon inversa de las masas: luego las velocidades, con que se moverán los cuerpos M y m para cerrar los elastros, tendrán la razon inversa de las masas de los mismos cuerpos. Que es lo primero.

2°. Consta ser (437) $PdS = 2MVdV$, y $pds = 2mvdv$: y siendo $P = p$, se tendrá $dS : ds = MVdV : mvdv$; pero $V : v = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$ por lo demostrado en el caso anterior: luego será $dS : ds = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$; por consiguiente $S : s = \frac{1}{M} : \frac{1}{m}$ Que es &c.

COROLARIO.

452. Si se divide el espacio Ll en K en la razon recíproca de las masas M y m; el punto K quedará en equilibrio.

PROPOSICION XXV.

453. Si los cuerpos A y B que tienen el centro de la gravedad en C, cierran las series de los elastros colocados en AF y BF con velocidades proporcionales á las mismas rectas AF y BF, y si son las fuerzas de los elastros como los lados FD y FE del paralelógramo DE; digo que colocada una serie de elastros en FC con la fuerza FC, y cerrada dicha serie por una masa $C = A + B$ con velocidad proporcional con FC, perderán los cuerpos A, C, B en el mismo tiempo velocidades proporcionales con AF, CF, BF, mientras corren espacios proporcionales con las mismas rectas AF, CF, BF. *Fig.* 203.

1°. Supóngase que los elementos Aa, Cc, Bb son proporcionales con las respectivas rectas AF, CF, BF. Nómbrense, V la velocidad de la masa A, v la de la masa B, y W la de la masa C; y se tendrá (437) $\frac{DF \times Aa}{2A} = -VdV$; pero A como CB, Aa

proporcional con V, y $\frac{DF}{CB} = \frac{AF}{AB}$: luego será $\frac{AF}{2AB}$ proporcional con $-dV$. Con el mismo raciocinio se demostrará ser $\frac{FB}{2AB}$ proporcional con $-dv$, y $\frac{CF}{2AB}$ proporcional con $-dW$; por consiguiente serán, AF como $-dV$, BF como $-dv$, y CF como $-dW$: luego las velocidades perdidas en los primeros elementos Aa, Bb, Cc serán como las totales, y por consiguiente las residuas tendrán la misma razon. Asimismo se demostrará que las velocidades perdidas en los segundos, terceros, &c. elementos son como las totales velocidades: luego las velocidades perdidas por los cuerpos A, B, $A+B$ en qualesquiera espacios proporcionales con AF, BF, CF serán como las velocidades totales, ó bien como las mismas rectas AF, BF, CF.

2°. Nómbrense T, t, T' los tiempos en que los cuerpos A, B, C corren los respectivos elementos Aa, Bb, Cc: luego será (391) $V = \frac{Aa}{dT}$, y por consiguiente $dT = \frac{Aa}{V}$; pero es Aa como AF ó bien como V: luego será dT como $\frac{V}{V}$. Con el mismo raciocinio se demostrará ser dt como $\frac{v}{v}$, y dT' como $\frac{W}{W}$: luego será $dT = dt = dT'$; y lo mismo se

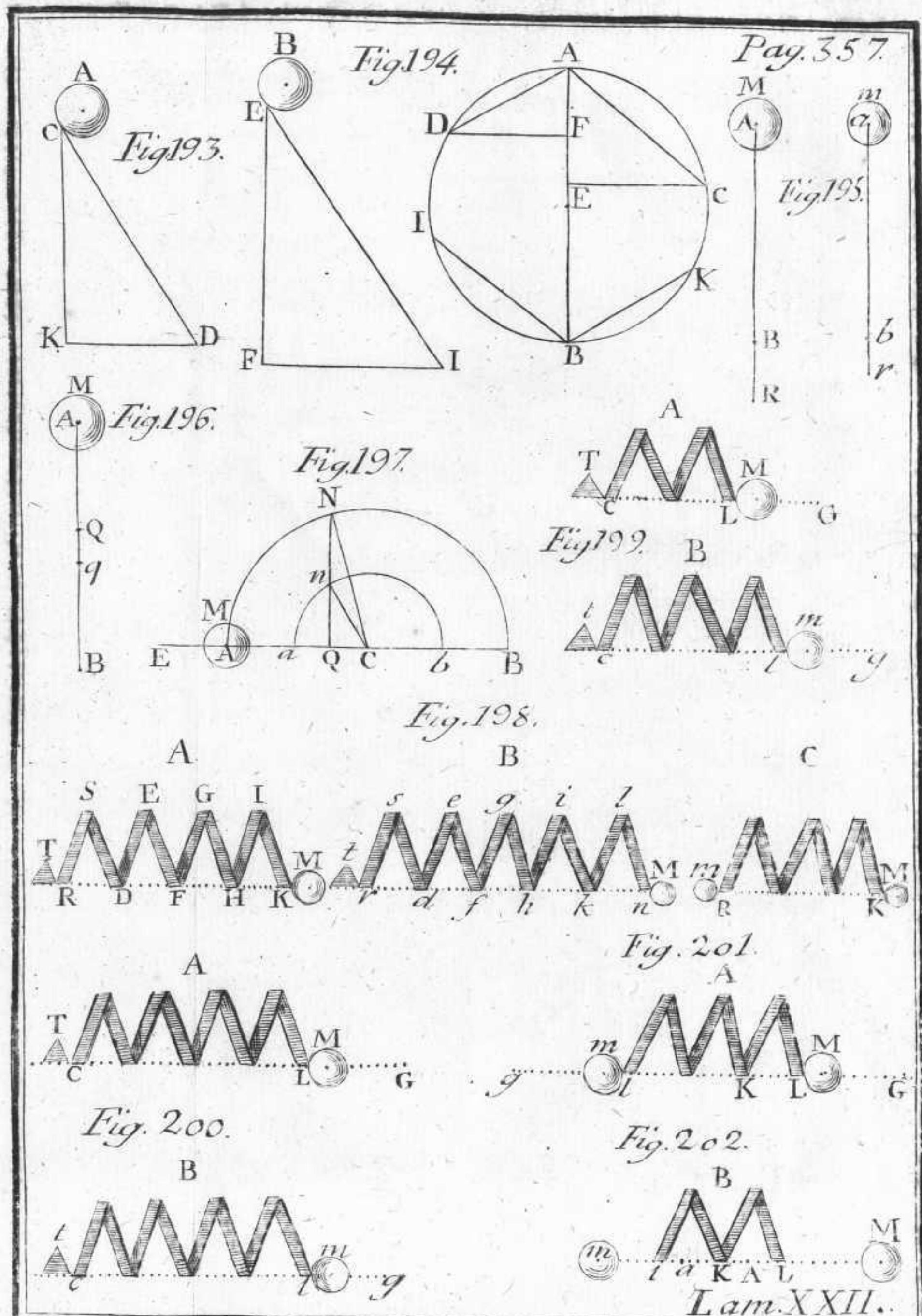
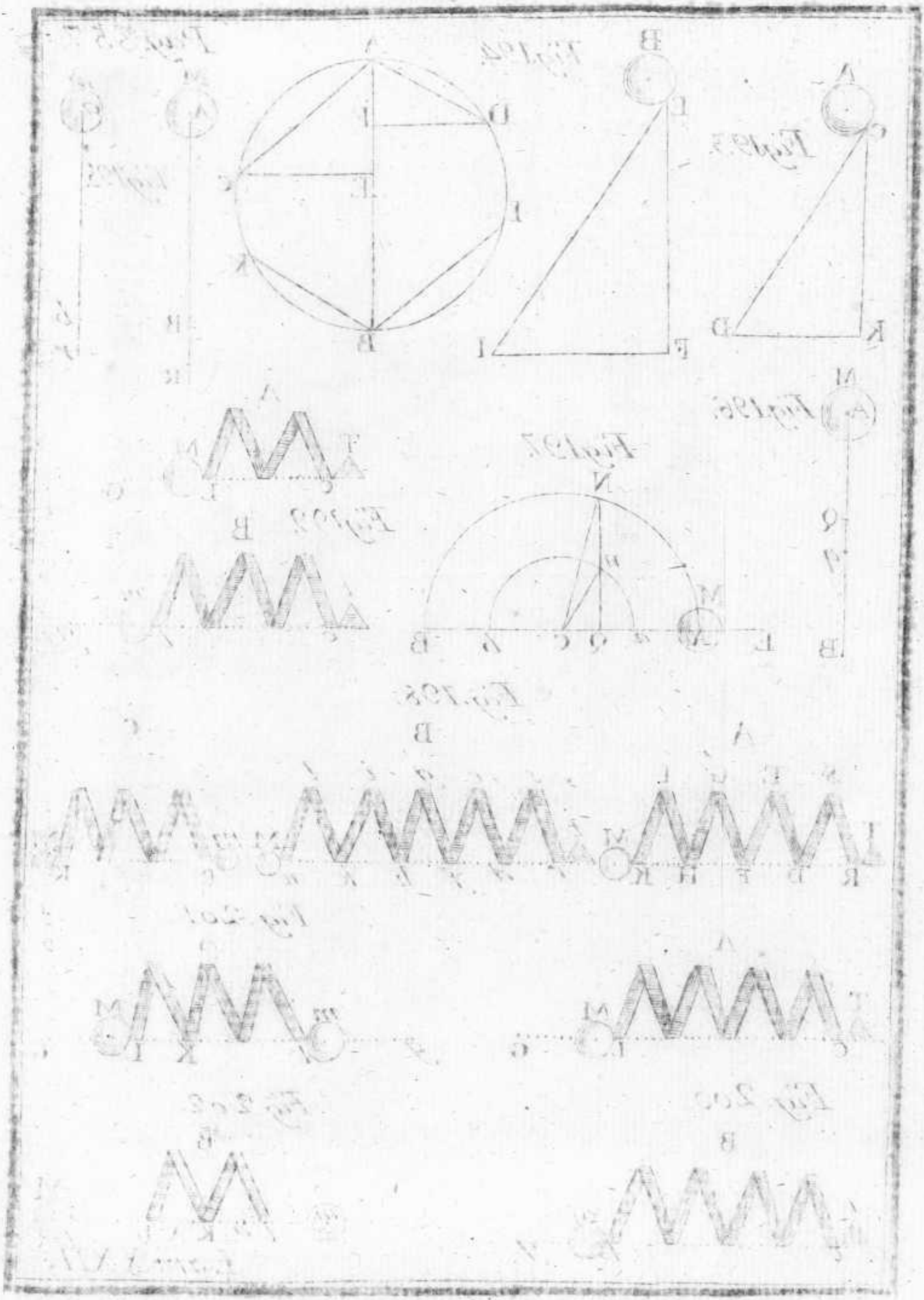


Fig. 193.
Fig. 194.
Fig. 195.
Fig. 196.
Fig. 197.
Fig. 198.
Fig. 199.
Fig. 200.
Fig. 201.
Fig. 202.

Lam. XXII.



demostrará ser en los segundos, terceros, &c. elementos. Por tanto son iguales los tiempos, que los cuerpos *A*, *B*, *C* gastan para correr espacios proporcionales con *AF*, *BF*, *CF*. Que es &c.

COROLARIO.

454. Luego las velocidades de los cuerpos *A*, *B*, *C* se extinguen en *F* á un mismo tiempo, y á las potencias de los elastros, que cierran los cuerpos *A* y *B*, equivale la potencia del elastro cerrado por el cuerpo $C = A + B$.

PROPOSICION XXVI.

455. Si se consideran en *AF*, *BF*, *GF* tres series de elastros, y prolongada la recta *GF* hasta encontrar la *AB* en *C*, y formado el paralelógramo *DE* cerca de la diagonal *FC*, son las fuerzas de dichos elastros como *DF*, *EF*, *CF*, y si las masas *G*, *A*, *B*, que tienen el centro de la gravedad en *F*, se mueven con las respectivas velocidades *GF*, *AF*, *BF*: digo que el punto *F* estará en equilibrio. *Fig.* 204.

Siendo el punto *F* centro de la gravedad de las masas *G*, *A*, *B*, será el punto *C* centro de la gravedad de las masas *A*, *B*. Considérese colocada en *CF* una serie de elastros, que tenga la fuerza *CF*, y esté cerrada por la masa $C = A + B$ con velocidad proporcional con CF, y dicha fuerza será equivalente á las fuerzas de los elastros cerrados por las masas A y B; pero la serie de los elastros colocada en GF está cerrada por la masa G con velocidad proporcional con GF, siendo FC la fuerza de los mismos elastros (sup.), y ademas $CF : GF = G : C$: luego (450) el punto F centro de gravedad de las masas G y C estará en equilibrio; por consiguiente siendo el punto F centro de la gravedad de las masas G, A, B, y moviéndose éstas con las respectivas velocidades GF, AF, BF, estará el punto F en equilibrio. Que es &c.

ESCOLIO.

456. La teórica de los elastros expuesta anteriormente suministra los principios aptos para determinar las leyes de la comunicacion del movimiento en el choque de los cuerpos. Pues, si dos cuerpos ván á cerrar una serie de elastros con velocidades recíprocamente proporcionales con las masas de los mismos cuerpos; el centro de la gravedad de ellas quedará en equilibrio (452), y los cuerpos en tiempos iguales perderán sus velocidades en la misma razon (451). Por tanto si los elastros no se restituyen á su primer estado, quedarán equilibrados dichos cuerpos

en el referido centro; lo qual conviene á los cuerpos duros, y á los blandos, cuyas partes se allegan en el choque sin volver á su primitivo estado. Y si los referidos elastros se restituyen á su primer estado, volverán igualmente á adquirir los cuerpos sus correspondientes velocidades (449) en direcciones contrarias; lo qual conviene á los cuerpos perfectamente elásticos, cuyas partes se allegan en el choque, y despues del choque vuelven á tomar su primitivo estado.

Del Movimiento de los cuerpos que se chocan.

PROPOSICION XXVII.

457. Si los cuerpos A y B blandos ó duros se mueven con movimiento uniforme segun la misma direccion AD, siendo la velocidad del primer cuerpo mayor que la del segundo, y si se dan las masas y las velocidades de dichos cuerpos antes del choque directo; determinar la velocidad con que se moverán despues del choque. *Fig.* 205.

Supóngase que los cuerpos A y B se encuentran en D; y serán, AD la velocidad del cuerpo A, y BD la del cuerpo D. Exprésense las masas de los cuerpos A y B por A y B; divídase la recta AB, de modo que sea $A:B=BC:CA$; y considérese que los cuerpos A y B andan sobre un plano con direcciones opuestas, y con velocidades recíprocamente proporcionales con sus masas, ó bien con las velocidades AC y CB, mientras que dicho plano anda desde A á D con la velocidad CD. Es evidente que los cuerpos A y B adquirirán las velocidades AD y BD, y que se chocarán luego que hayan llegado en D; pero moviéndose los dichos cuerpos A y B sobre el referido plano con velocidades recíprocamente proporcionales con las masas de los propios cuerpos, en el choque quedan equilibrados (456): luego dichos cuerpos se moverán despues del choque con la velocidad CD del referido plano. Nómbrense, V la velocidad AD del cuerpo A, v la velocidad BD del cuerpo B, $AC = x$, y $CB = y$; y será $x:y = B:A$: de donde $x+y:y = B+A:A$, y $x:x+y = B:B+A$: luego serán $y = \frac{(V-v)\times A}{A+B}$, $x = \frac{(V-v)\times B}{A+B}$; por consiguiente se tendrá $CD = AD - AC = V - \frac{B\times(V-v)}{A+B} = \frac{AV+Bv}{A+B}$. Que es &c.

COROLARIO I.

458. Siendo $CD = \frac{AV+Bv}{A+B}$, será $AV+Bv = (A+B)\times CD$; por consiguiente la suma de las can-

tidades del movimiento de los cuerpos A y B antes del choque directo será igual á la cantidad del movimiento despues del choque.

COROLARIO II.

459. Se infiere que el centro C de la gravedad de las masas A y B se mueve con la misma velocidad antes y despues del choque de dichas masas.

COROLARIO III.

460. Si los cuerpos A y B blandos ó duros se mueven en direcciones contrarias con dichas velocidades V y v; se demostrará con el mismo raciocinio de la Proposicion antecedente que la velocidad despues del choquè es igual á $\frac{AV-Bv}{A+B}$, de modo que en dicho caso tienen tambien lugar los dos corolarios anteriores, tomando en el primero de ellos la diferencia de las cantidades del movimiento de los cuerpos A y B, segun corresponde á las direcciones contrarias que tienen.

PROPOSICION XXVIII.

461. Si los cuerpos A y B perfectamente elásticos se mueven con movimiento uniforme segun la misma direccion AD, siendo la velocidad del primer cuerpo mayor que la del segundo, y si se dan las masas

y velocidades de dichos cuerpos antes del choque directo; determinar la velocidad con que se moverán despues del choque. *Fig.* 205.

Supóngase que los cuerpos A y B perfectamente elásticos se encuentran en D; y supuestas tambien las denominaciones y preparacion de la Proposicion anterior, andarán los mismos cuerpos sobre el citado plano despues del choque (456) en direcciones contrarias con las velocidades CA y CB; por consiguiente será $CD - CA$ la velocidad del cuerpo A despues del choque, y $CD + CB$ será la velocidad del cuerpo B despues del mismo choque; pero son por lo demostrado (457) $CD = \frac{AV + Bv}{A+B}$, $AC = \frac{B \times (V-v)}{A+B}$, y $CB = \frac{A \times (V-v)}{A+B}$: luego será $CD - CA = \frac{(A-B) \times V + 2Bv}{A+B}$, $CD + CB = \frac{(B-A) \times v + 2AV}{A+B}$. Que es &c.

COROLARIO I.

462. Se infiere que la cantidad del movimiento del cuerpo A es $\frac{A^2 V - ABV + 2ABv}{A+B}$, y que la del cuerpo B es $\frac{B^2 v - ABv + 2ABV}{A+B}$: luego la suma de las cantidades del movimiento de los cuerpos A y B será

igual á $AV + Bv$; por consiguiente la cantidad del movimiento de los cuerpos A y B antes y despues del choque será la misma.

COROLARIO II.

463. Siendo por lo demostrado (461) $\frac{(A-B)\times V + 2Bv}{A+B}$ la velocidad del cuerpo A, y $\frac{(B-A)\times v + 2AV}{A+B}$ la del cuerpo B, la diferencia de las velocidades de los cuerpos A y B despues del choque será $v - V$: luego la diferencia de dichas velocidades antes y despues del choque se conservará la misma.

COROLARIO III.

464. Tambien se infiere de la Proposicion antecedente que el centro de la gravedad de las masas A y B se mueve con la misma velocidad antes y despues del choque.

COROLARIO IV.

465. Asimismo la suma de los productos de cada masa multiplicada por el quadrado de su velocidad antes del choque es igual á una semejante suma despues del mismo choque, esto es, $AV^2 + Bv^2 = A \times (CD - CA)^2 + B \times (CD + CB)^2$.

COROLARIO V.

466. Si los cuerpos *A* y *B* perfectamente elásticos se mueven en direcciones opuestas con las velocidades *V* y *v*; se demostrará con el mismo raciocinio de la Proposicion antecedente que la velocidad del cuerpo *A* es $\frac{(A-B)\times V-2Bv}{A+B}$, y que la del cuerpo *B* es $\frac{(A-B)\times v+2AV}{A+B}$.

PROPOSICION XXIX.

467. Si los cuerpos *A* y *B* imperfectamente elásticos se mueven con movimiento uniforme segun la misma direccion *AD*, siendo la velocidad del primero mayor que la del segundo, y si se dan las masas y velocidades de dichos cuerpos antes del choque directo, y la razon de las mismas velocidades con las que tienen despues del choque; determinar las velocidades con que se moverán despues del choque. *Fig.* 205.

Supóngase que en los cuerpos *A* y *B* imperfectamente elásticos es la velocidad de cada uno de ellos despues del choque en *D* á la antes del choque como *m* á *n*; y supuestas tambien las denominaciones y preparacion de la Proposicion XXVII, andarán los mismos cuerpos sobre el citado plano en direcciones contrarias con las velocidades $\frac{m\times CA}{n}$, y $\frac{m\times CB}{n}$ despues del choque; por consiguiente atendiendo al movimiento de dicho plano, la velocidad total del cuerpo A será $CD - \frac{m\times CA}{n}$, y la del cuerpo B será $CD + \frac{m\times CB}{n}$; pero por lo demostrado (457) $CD = \frac{AV+Bv}{A+B}$, $AC = \frac{B\times(V-v)}{A+B}$, y $BC = \frac{A\times(V-v)}{A+B}$: luego la velocidad total del cuerpo A despues del choque será igual á $\frac{(nA-mB)\times V+(m+n)\times Bv}{n\times(A+B)}$, y la velocidad del cuerpo B despues del mismo choque será $\frac{(m+n)\times AV+(nB-mA)\times v}{n\times(A+B)}$. Que es &c.

COROLARIO.

468. Se infiere que la cantidad del movimiento del cuerpo A es $\frac{(nA^2-mAB)\times V+(m+n)\times ABv}{n\times(A+B)}$, y que la cantidad del movimiento del cuerpo B es igual á $\frac{(m+n)\times ABV+nB^2v-mABv}{n\times(A+B)}$; por consiguiente la cantidad del movimiento de los cuerpos A y B antes y despues del choque será $AV+Bv$.

PROPOSICION XXX.

469. Si los cuerpos *L*, *A*, *B* ya sean blandos ó duros, ó ya perfectamente elásticos, que tienen su centro de gravedad en *F*, se mueven segun las respectivas direcciones *LH*, *AH*, *BH*, con movimiento uniforme, y con las velocidades proporcionales con *LH*, *AH*, *BH*; determinar las velocidades, con que se moverán dichos cuerpos despues del choque obliqüo. *Fig.* 206.

Tírense las rectas *LF*, *AF*, *BF*, y *HF*; complétense los paralelógramos *HFLG*, *HFBK* y *HFAI*; y tírense las diagonales *FG*, *FK* y *FI*. Supóngase que los cuerpos *L*, *A*, *B* se hallan colocados encima de un plano, y que andan sobre el mismo plano con velocidades proporcionales con *LF*, *AF*, *BF*, mientras que el plano anda con la velocidad *FH*; por consiguiente (386) dichos cuerpos *L*, *A*, *B* andarán con las velocidades *LH*, *AH*, *BH*; pero siendo los cuerpos *L*, *A*, *B* blandos ó duros, se equilibran despues del choque en el punto *F* de dicho plano (456): luego se moverán despues del choque con la velocidad *FH* del plano. Pero si los cuerpos *L*, *A*, *B* son perfectamente elásticos, andarán despues del choque (456) con las mismas velocidades *LF*, *AF*, *BF*, respecto al mismo plano: luego considerado el movimiento de este plano, andarán con las velocidades FG, FI, FK. Que es &c.

COROLARIO I.

470. Se infiere que si los cuerpos L, A, B son blandos ó duros, su centro F de gravedad antes y despues del choque andará con la misma velocidad FH del plano. Tambien se ha demostrado antes que los cuerpos L, A, B perfectamente elásticos andan despues del choque con las velocidades FG, FI, FK: luego el centro de la gravedad F de dichos cuerpos andará despues del choque con la misma velocidad FH, con que caminaba antes.

COROLARIO II.

471. Y si los referidos cuerpos son dos, como A y B que tienen (*Fig.* 207.) su centro de gravedad en F; completos los paralelógramos $AFHI$, $HFBK$, y tiradas las diagonales FI y FK, se demostrará con el mismo raciocinio que en el caso de ser dichos cuerpos blandos ó duros se moverán despues del choque con la velocidad FH, que siendo los cuerpos A y B perfectamente elásticos, se moverán despues del choque con las respectivas velocidades FI y FK, y que en uno y otro caso el centro F de gravedad antes y despues del choque andará con la misma velocidad FH.

PROPOSICION XXXI.

472. Si los cuerpos A, B, K imperfectamente elásticos que tienen su centro de gravedad en E, se mueven con movimiento uniforme segun las direcciones AD, BD, KD, y con las velocidades AD, BD, KD, y se da la razon de dichas velocidades antes del choque con las que tienen los cuerpos despues del choque; determinar las velocidades con que dichos cuerpos se moverán despues del choque. *Fig.* 208.

Tírense las rectas AE, BE, KE y DE; compléteuse los paralelógramos $ALDE$, $BNDE$, y $KMDE$; y tírense las diagonales EL, EN, y EM. Ahora considérese que los cuerpos A, B, K están colocados sobre un plano, y que se mueven sobre el mismo plano con las velocidades AE, BE, KE; mientras que el plano se mueve con la velocidad ED; por consiguiente dichos cuerpos en virtud del movimiento del plano andarán (386) con las velocidades AD, BD, KD. Suponiendo ahora que son las velocidades de los cuerpos A, B, K imperfectamente elásticos despues del choque á las velocidades antes del choque como m á n, y haciendo $DO:DL=m:n$, $DO':DN=m:n$, y $Do:DM=m:n$, serán las velocidades de los mismos cuerpos despues del choque respecto al citado plano proporcionales con DO, DO', *Do*: luego en virtud de la velocidad *ED* del plano andarán los cuerpos *A*, *B*, *K* con las respectivas velocidades *EO*, *EO'*, *Eo*. Que es &c.

COROLARIO.

473. Por ser iguales las razones *DL* á *DO*, *DN* á *DO'*, y *DM* á *Do*, y las rectas *AL*, *BN*, *KM*, *ED* iguales y paralelas, será el punto *D* centro de la gravedad de las masas *A*, *B*, *K* colocadas en *O*, *O'*, *o*. Por tanto si dichas masas pasan desde los puntos *O*, *O'*, *o* á los *P*, *P'*, *p* con las velocidades *OE*, *O'E*, *oE*, el centro de dichas masas se moverá con la velocidad *DE*: luego si dichas masas tienen las mismas velocidades en direcciones contrarias, su centro de gravedad se moverá tambien con la velocidad *ED* en direccion contraria; pero se ha demostrado que despues del choque se mueven las masas *A*, *B*, *K* con las velocidades *EO*, *EO'*, *Eo*: luego el centro *E* de gravedad de los cuerpos *A*, *B*, *K* se moverá despues del choque con la misma velocidad con que andaba antes.

PROPOSICION XXXII. *Lema.*

474. Si el punto *C* es centro de la gravedad de las masas *A*, *B*, y se toma qualquiera punto *D*; tirada la recta *DC*, será $A \times (AD^2 - AC^2 - DC^2)$

$+B\times(BD^2-CD^2-BC^2)=o$. *Fig.* 209.

Tírense las rectas AF y BG perpendiculares á la recta DC prolongada. Siendo pues el punto C centro de la gravedad de las masas A y B, será (59) $A:B=BC:CA$; pero por la semejanza de los triángulos BCG y ACF es $BC:CA=CG:CF$: luego será $A:B=CG:CF$; por consiguiente $A\times CF=B\times CG$, y $A\times CF\times 2DC=B\times CG\times 2DC$; pero $CF\times 2DC=AC^2+CD^2-AD^2$, y $CG\times 2DC=BD^2-DC^2-BC^2$: luego será $A\times(AC^2+CD^2-AD^2)=B\times(BD^2-DC^2-BC^2)$; por consiguiente $A\times(AD^2-AC^2-CD^2)+B\times(BD^2-DC^2-BC^2)=o$. Que es &c.

PROPOSICION XXXIII. *Lema.*

475. Si el punto C es centro de la gravedad de las masas A y B, y se toman dos qualesquiera puntos D y E; tiradas las rectas CD, CE, DE, BE, BD, AE y AD, será $(A+B)\times(DC^2-CE^2-ED^2)=A\times(AD^2-AE^2-DE^2)+B\times(BD^2-DE^2-BE^2)$. *Fig.* 210.

Tírense las rectas AG, CF, BI perpendiculares á la recta DE prolongada. Siendo pues el punto C centro de la gravedad de las masas A y B, será (59) $A:B=BC:CA$; pero $BC:CA=IF:FG$: luego será $A:B=IF:FG$; por consiguiente $A\times$

$FG = B \times IF$, ó bien $A \times (EF - EG) = B \times (EI - EF)$, y $(A+B) \times EF = A \times EG + B \times EI$, de donde $(A+B) \times EF \times 2DE = A \times EG \times 2DE + B \times EI \times 2DE$; pero $EF \times 2DE = DC^2 - CE^2 - DE^2$; $EG \times 2DE = AD^2 - AE^2 - ED^2$, y $EI \times 2DE = BD^2 - DE^2 - EB^2$: luego será $(A+B) \times (DC^2 - CE^2 - ED^2) = A \times (AD^2 - AE^2 - DE^2) + B \times (BD^2 - DE^2 - BE^2)$. Que es &c.

PROPOSICION XXXIV. *Lema.*

476. Si el punto E es centro de gravedad de las masas A, K, B, y se toma qualquiera punto D; tiradas las rectas AE, BE, KE, AD, BD, KD y DE, será $A \times (AD^2 - AE^2 - ED^2) + B \times (BD^2 - DE^2 - BE^2) + K \times (DK^2 - DE^2 - EK^2) = 0$. *Fig.* 211.

Prolónguese la recta KE hasta encontrar la AB en C, y será el punto C centro de la gravedad de las masas A y B; por consiguiente será (475) $(A+B) \times (CD^2 - CE^2 - DE^2) = A \times (AD^2 - AE^2 - ED^2) + B \times (BD^2 - DE^2 - BE^2)$; pero siendo el punto E centro de la gravedad de las masas $C = A + B$, y K, es (474) $(A+B) \times (CD^2 - CE^2 - DE^2) + K \times (DK^2 - DE^2 - EK^2) = 0$: luego será $A \times (AD^2 - AE^2 - ED^2) + B \times (BD^2 - DE^2 - BE^2) + K \times (DK^2 - DE^2 - EK^2) = 0$. Que es &c.

COROLARIO.

477. Se infiere que siendo el punto E centro de las masas A, K, B, será tambien $A \times AD^2 + B \times BD^2 + K \times KD^2 = (A+B+K) \times DE^2 + A \times AE^2 + B \times BE^2 + K \times KE^2$.

PROPOSICION XXXV.

478. En los cuerpos blandos ó duros la suma de los productos de cada masa por el quadrado de su velocidad antes del choque es igual á la suma de las masas multiplicadas por el quadrado de la comun velocidad que tienen despues del choque, y á la suma de los productos de cada masa por el quadrado de su velocidad en el mismo momento del choque. *Fig.* 208.

Sean los tres cuerpos A, B, K, que andan segun las direcciones AD, BD, KD con las velocidades proporcionales con dichas rectas. Consta (470) que siendo E el centro de la gravedad de los referidos cuerpos, será ED la comun velocidad que tienen despues del choque, y que en el mismo momento del choque tendrán las velocidades proporcionales con las respectivas rectas AE, BE, KE: luego será (477) $A \times AD^2 + B \times BD^2 + K \times DK^2 = (A+B+K) \times DE^2 + A \times AE^2 + B \times BE^2 + K \times KE^2$. Que es &c.

PROPOSICION XXXVI.

479. En los cuerpos perfectamente elásticos la suma de los productos de cada masa por el quadrado de la velocidad que tiene antes del choque es igual á la suma de los productos de cada masa por el quadrado de la velocidad que tiene despues del choque. *Fig.* 208.

Sean los tres cuerpos A, B, K, perfectamente elásticos, y anden estos segun las direcciones AD, BD, KD con las velocidades proporcionales con dichas rectas; supóngase que el punto E es el centro de gravedad de los mismos cuerpos; constrúyanse los paralelógramos $AEDL$, $BEDN$, $EKMD$; y considerando los cuerpos A, B, K en los puntos L, N, M, estará su centro de gravedad en D. Por tanto se tendrá (477) $A \times AD^2 + B \times BD^2 + K \times KD^2 = (A+B+K) \times ED^2 + A \times AE^2 + B \times BE^2 + K \times KE^2$; pero por ser el punto D centro de gravedad de los mismos cuerpos colocados en L, N, M es (477) $A \times LE^2 + B \times NE^2 + K \times ME^2 = (A+B+K) \times ED^2 + A \times LD^2 + B \times ND^2 + K \times MD^2$: luego será $A \times AD^2 + B \times BD^2 + K \times DK^2 = A \times LE^2 + B \times NE^2 + K \times ME^2$; pero AD, DB, DK son las velocidades de los cuerpos A, B K antes del choque, y (469) LE, NE, ME son las velocidades que tienen los mismos cuerpos despues del choque: luego &c. Que es &c.

PROPOSICION XXXVII.

480. Si los cuerpos A, B, K imperfectamente elásticos, que tienen su centro de gravedad en E, corren los espacios AD, BD, KD con las velocidades proporcionales con dichas rectas, y si construidos los paralelógramos $AEDL$, $EBND$, $EKMD$, los mismos cuerpos despues del choque andan con las velocidades proporcionales con DO, DO', Do; será $A \times AD^2 - A \times OE^2 + B \times BD^2 - B \times O'E^2 + K \times KD^2 - K \times oE^2 = A \times AE^2 - A \times OL^2 + B \times BE^2 - B \times O'D^2 + K \times KE^2 - K \times oD^2$. *Fig.* 208.

Consta (477) que es $A \times AD^2 + B \times BD^2 + K \times KD^2 = (A+B+K) \times ED^2 + A \times AE^2 + B \times BE^2 + K \times KE^2$, y que por la misma razon es $A \times OE^2 + B \times O'E^2 + K \times oE^2 = (A+B+K) \times ED^2 + A \times OD^2 + B \times O'D^2 + K \times oD^2$: luego restando esta segunda equacion de la primera, se tendrá $A \times AD^2 - A \times OE^2 + B \times BD^2 - B \times O'E^2 + K \times KD^2 - K \times oE^2 = A \times AE^2 - A \times OD^2 + B \times BE^2 - B \times O'D^2 + K \times KE^2 - K \times oD^2$, esto es, que dirigiéndose los cuerpos A, B, K al punto D con las expresadas direcciones y velocidades, la diferencia que pasa entre la suma de los productos de cada masa por el quadrado de su velocidad antes del choque, y la suma de los productos de cada masa por el quadrado de su velocidad despues del choque, será igual á la diferencia que pasa entre unos productos hechos del mismo modo, con tal que se considere que los mismos cuerpos A, B, K se dirigen al punto E centro de gravedad de ellos con las velocidades proporcionales con las AE, BE, KE antes del choque, y despues del choque con las velocidades proporcionales con las OD, $O'D$, oD. Que es &c.

Del Movimiento de los Péndulos.

PROPOSICION XXXVIII.

481. Si el cuerpo m animado por una potencia constante g, que actua en direccion vertical, describe qualquiera curba AB; determinar la velocidad que tendrá en qualquier punto del espacio corrido. *Fig.* 212.

Tírese la horizontal AG, y báxese á ella la perpendicular BC que se prolongará hasta que sea $BD = g$. Considérese que la recta BE es tangente á la curva en el punto B, y por éste tírese la perpendicular DE á la recta BE, que será la potencia con que el cuerpo anda el elemento Bb. Llámense, $BC = x$, y u la velocidad del cuerpo en el punto B, y se tendrá (437) $BE \times Bb = 2mvdv$. Tírense las rectas bc y Bd respectivamente paralelas á las BC y AC; y por la semejanza de los triángulos BED, Bbd, será $BD : BE = Bb : bd$, y por consiguiente $BE \times Bb = BD \times bd = gdx$: luego será $gdx = 2mvdv$; é integrando se tendrá $gx = mv^2$, de donde resulta ser $v = \frac{\sqrt{gx}}{\sqrt{m}}$. Que es &c.

COROLARIO.

482. Si se supone g igual á m como sucede en los cuerpos terrestres (420) será dicha velocidad igual á $\sqrt{x}$, y por consiguiente (394) igual á la velocidad que dicho cuerpo adquiriria en B, si corriera el espacio CB. Baxada la perpendicular $HG = a$ á la horizontal AG, la velocidad del cuerpo en el punto H será igual á $\sqrt{a}$.

PROPOSICION XXXIX.

483. Si los péndulos AK y AL hacen sus oscilaciones por arcos semejantes; determinar la razon de los tiempos de dichas oscilaciones. *Fig.* 213.

Supóngase que dichos péndulos han llegado á AB y AC, ó bien que los cuerpos m y M han corrido los arcos KB y LC semejantes; y exprésense las potencias constantes, que actuan sobre dichos cuerpos, por las respectivas verticales BD y CQ. Tírense las rectas DE y QH perpendiculares á las tangentes BE y CH; y llámense dT y dt los tiempos en que los cuerpos M y m han corrido los arcos infinitésimos Cc y Bb, V y v las velocidades que dichos cuerpos tienen en los puntos C y B, $CQ = G$, $BD = g$, $AC = R$, y $AB = r$. Consta ser (436) $dT : dt = \frac{MdV}{CH} : \frac{mdv}{BE}$; pero por la semejanza de los triángulos CHQ y BED es $CH : BE = G : g$: luego será $dT : dt = \frac{MdV}{G} : \frac{mdv}{g}$. Ahora si se prolongan las verticales QC y DB hasta encontrar las horizontales LI y KF en O y N; será (481) $V : v = \frac{\sqrt{(G \times CO)}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{(g \times BN)}}{\sqrt{m}}$; pero por la semejanza de los triángulos LOC y KNB es $CO : BN = LC : KB = R : r$: luego será $V : v = \frac{\sqrt{(G \times R)}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{(g \times r)}}{\sqrt{m}}$; por consiguiente $dV : dv = \frac{\sqrt{(G \times R)}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{(g \times r)}}{\sqrt{m}}$; pero se ha demostrado ser $dT : dt = \frac{MdV}{G} : \frac{mdv}{g}$: luego será $dT : dt = \frac{\sqrt{(M \times R)}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{(m \times r)}}{\sqrt{g}}$, y por consiguiente $T : t = \frac{\sqrt{(M \times R)}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{(m \times r)}}{\sqrt{g}}$. Que es &c.

COROLARIO.

484. Infiérese que siendo $M=m$, y $G=g$, ó bien $M:m=G:g$, será $T:t=\sqrt{R}:\sqrt{r}$: luego conociendo el tiempo de una oscilacion de un péndulo simple de una longitud dada, se conocerá el tiempo de una oscilacion de otro péndulo cuya longitud sea dada, ó la longitud de este péndulo, quando sea dado el tiempo de una de sus oscilaciones. Consta por las experiencias de M. Bouguer en París (hechas las correcciones correspondientes relativamente al calor, á la resistencia del ayre, y á la altura sobre el nivel del mar) que un péndulo simple, que tiene la longitud igual á 3 pies y 8,67 lineas, hace una oscilacion en un segundo.

PROPOSICION XL.

485. Si se suponen los péndulos AL y AK iguales, como tambien los arcos $LI=KF$, y $LC=KB$, que andan los cuerpos M y m, y son desiguales las potencias constantes que actuan sobre dichos cuerpos; determinar la razon de los tiempos, en que correrán dichos arcos iguales. *Fig.* 214.

Suponiendo la misma preparacion en la Figura que se ha expresado en la Proposicion antecedente, y las mismas denominaciones dadas á las cantidades, será

(436) $dT : dt = \frac{MdV}{CH} : \frac{mdv}{BE}$; pero por la semejanza de los triángulos CHQ y BED es $CH : BE = G : g$: luego será $dT : dt = \frac{MdV}{G} : \frac{mdv}{g}$. Consta ser (481) $V : v = \frac{\sqrt{(G \times CO)}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{(g \times BN)}}{\sqrt{m}}$; pero las perpendiculares $CO = BN$: luego será $V : v = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{m}}$, y por consiguiente $dV : dv = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{m}}$: y habiéndose demostrado antes $dT : dt = \frac{MdV}{G} : \frac{mdv}{g}$, se tendrá $dT : dt = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g}}$, de donde resulta ser $T : t = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{g}}$. Que es &c.

COROLARIO I.

486. Infiérese que si es $M = m$, será $T : t = \frac{1}{\sqrt{G}} : \frac{1}{\sqrt{g}}$.

COROLARIO II.

487. En la hipótesis de la Proposicion antecedente, serán los números de las oscilaciones, que hagan dichos dos péndulos en un tiempo dado, en la razon inversa de los tiempos en que hagan dichas oscilaciones: pues siendo N y n los números de las oscilaciones que hagan los péndulos AL y AK en un

tiempo dado T', serán $T = \frac{T'}{N}$, y $t = \frac{T'}{n}$; por consiguiente $T:t = \frac{T'}{N}:\frac{T'}{n}$, de donde $T:t = n:N$, é invirtiendo $N:n = t:T$.

COROLARIO III.

488. Por tanto siendo (486) los tiempos en la razon inversa subduplicada de las potencias, esto es, $T:t = \frac{1}{\surd G}:\frac{1}{\surd g}$, serán (487) los números de las oscilaciones en un tiempo dado de dos péndulos perfectamente iguales que corren arcos iguales en la razon directa subduplicada de dichas potencias, esto es, $n:N = \sqrt{g}:\sqrt{G}$; por consiguiente $g:G = n^2:N^2$.

PROPOSICION XLI.

489. Si los péndulos *AB* y *CD* de una misma longitud *R* hacen sus oscilaciones por los arcos iguales *BE* y *DG* en los tiempos desiguales *T* y *t*, cuya razon es dada; determinar la longitud del péndulo *AF*, que teniendo la masa y la potencia respectivamente iguales á las del péndulo *AB*, haga las oscilaciones isócronas al péndulo *CD* por un arco *FL* semejante al arco *DG* ó *BE*. *Fig.* 215.

Porque los péndulos *AB* y *AF* corren arcos se-

Fig. 203.

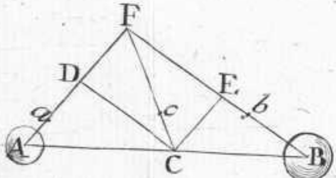


Fig. 204.

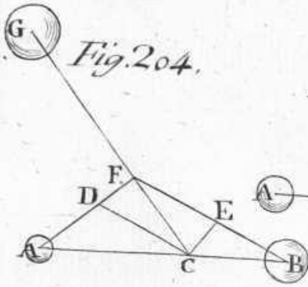


Fig. 205.

Fig. 206.

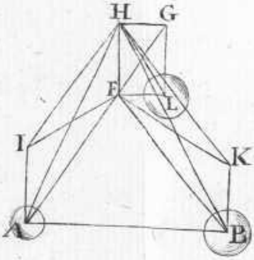


Fig. 207.

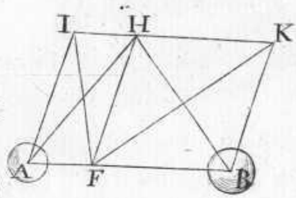


Fig. 208.

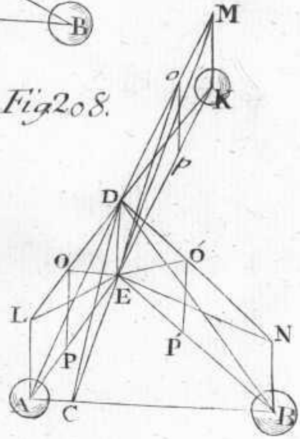


Fig. 209.

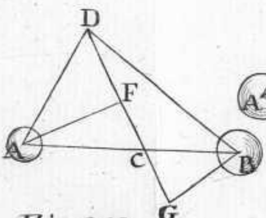


Fig. 210.

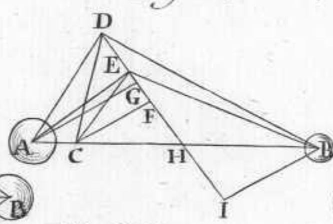


Fig. 211.

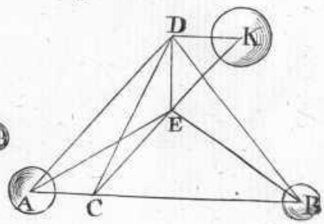


Fig. 212.

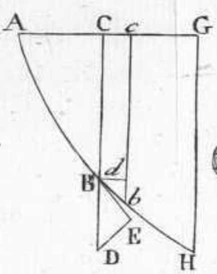
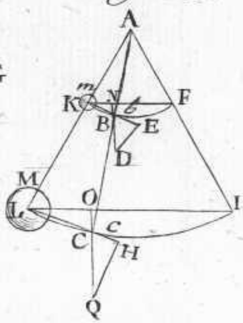


Fig. 213.



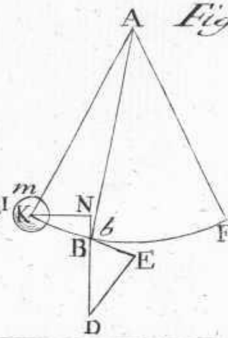
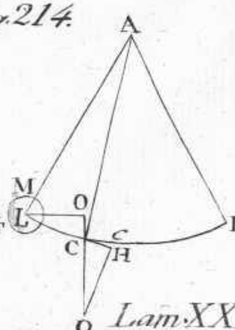
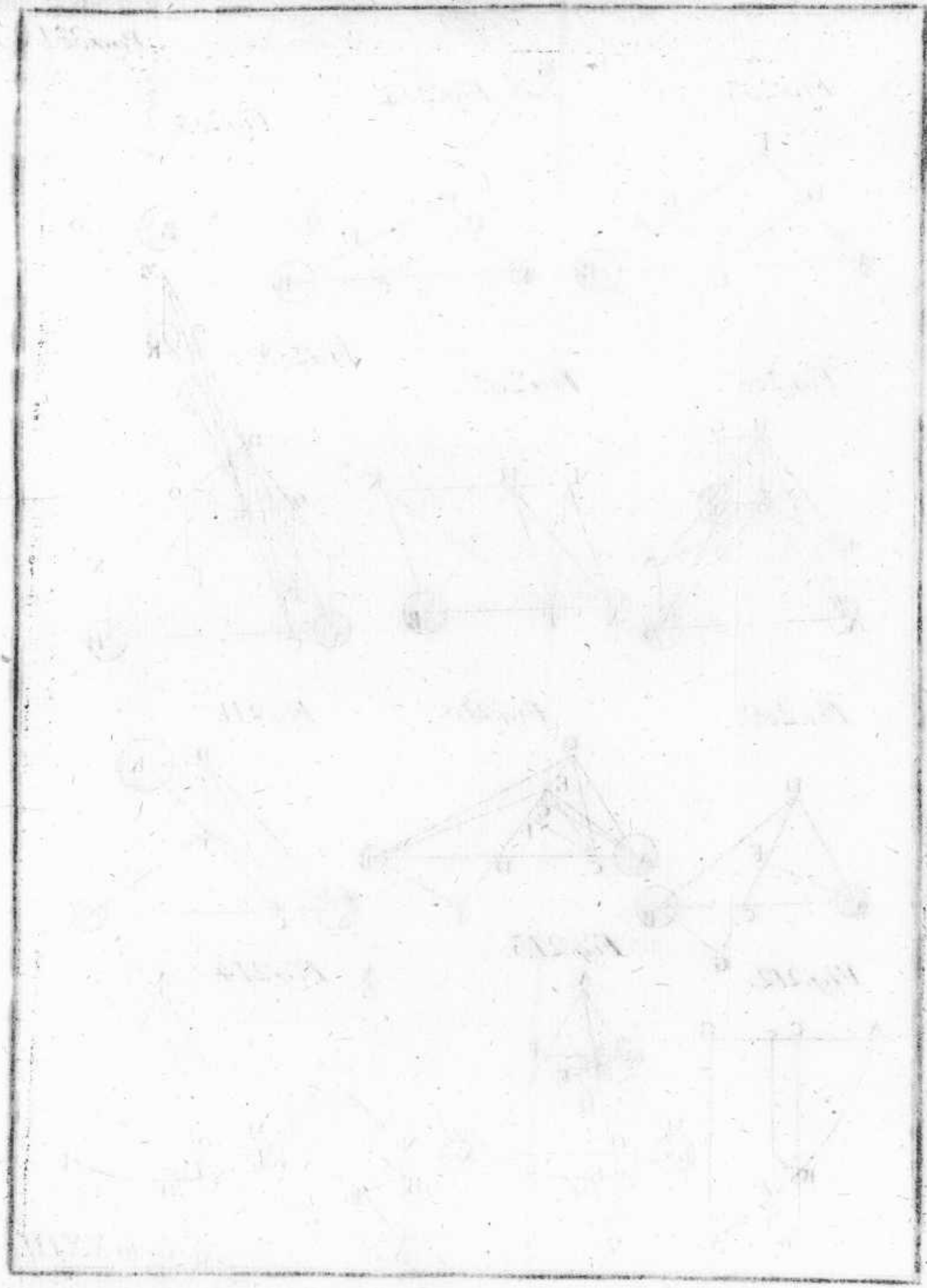


Fig. 214.





mejantes, y tienen las masas y las potencias iguales, será (484) $T:t=\sqrt{R}:\sqrt{AF}$; pero la razon de los tiempos T á t, y R son dados por la suposicion: luego se tendrá la longitud del péndulo AF que se busca. Que es &c.

COROLARIO.

490. Si á los péndulos AB y CD iguales están aplicadas masas iguales animadas por las respectivas potencias G y g; será (486) $T:t=\frac{1}{\sqrt{G}}:\frac{1}{\sqrt{g}}$; pero es (489) $T:t=\sqrt{AB}:\sqrt{AF}$: luego será $\sqrt{AB}:\sqrt{AF}=\frac{1}{\sqrt{G}}:\frac{1}{\sqrt{g}}$, y por consiguiente $AB=CD$: $AF=g:G$: luego si dos péndulos desiguales AF y CD que tienen masas iguales animadas por las potencias constantes G y g hacen sus oscilaciones isócronas por arcos semejantes, serán las longitudes de dichos péndulos como las potencias aplicadas á sus masas.

ESCOLIO.

491. De lo expuesto resultan dos métodos para determinar la razon de la gravedad en distantes Regiones A y B de la Tierra.

1°. Los Observadores en las regiones A y B proveidos de péndulos perfectamente iguales en el tiempo de una revolucion de una Estrella fixa hagan oscilar sus péndulos en arcos iguales, y noten el número de las oscilaciones; y será (488) la gravedad en *A* á la en *B* en la razon duplicada del número de las oscilaciones notadas en *A* á él de las oscilaciones en *B*.

2°. El Observador situado en *A* note el número de las oscilaciones de su péndulo hechas en el tiempo de la revolucion de una Estrella fixa; y el otro observador en *B* varíe la longitud de su péndulo, á quien está aplicada una masa igual á la del primero, hasta que en el tiempo de dicha revolucion complete el número de las oscilaciones que notó el Observador en *A*; y será (490) la gravedad en *A* á la en *B* en la razon de las longitudes de los péndulos que tienen los Observadores en *A* y *B*.

PROPOSICION XLII.

492. Si el péndulo *CD* compuesto de las dos masas *M* y *m* proporcionales con sus gravedades oscila por arcos semejantes *FB* y *DA*; determinar la longitud del péndulo simple *KE* movido por la masa *M'* proporcional con su gravedad, de modo que oscile en el mismo tiempo por un arco *EH* semejante á dichos arcos. *Fig.* 216.

Considérese que *Aa*, *Bb*, *Hh* son los respectivos elementos de los arcos *DA*, *FB*, *EH*; sean *Af*,

Be, Hg las verticales que pasan por los puntos A, B, H, y desde estos puntos báxense á ellas las perpendiculares af, be, bg; y nómbrense V, v, W las respectivas velocidades de las masas A, B, H, en los mismos puntos A, B, H. Expresando la gravedad de la masa M por la recta BO, y baxando desde el punto O la perpendicular ON á la tangente BN, será (437) $BN \times Bb = 2M \times vdv$; pero por la semejanza de los triángulos Beb y BNO es $BN : BO = Be : Bb$, de donde $BN \times Bb = BO \times Be = M \times Be$: luego será $M \times Be = 2M \times vdv$. Con el mismo raciocinio se demostrará ser $m \times Af = 2m \times VdV$, y (C) $M' \times Hg = 2M' \times WdW$; por consiguiente será (D) $M \times Be + m \times Af = 2M \times vdv + 2m \times VdV$. Por la semejanza de los triángulos Afa y Hgb es Af á Hg como Aa á Hb ó bien como AC á HK por la semejanza de los sectores ACa y HKb, y por consiguiente $Af = \frac{AC}{HK} \times Hg$: y con el mismo raciocinio se demostrará ser $Be = \frac{CB}{HK} \times Hg$. Y substituyendo los valores hallados de Af y Be en la equacion anterior D se tendrá (E) $\frac{M \times BC + m \times AC}{HK} \times Hg = 2M \times vdv + 2m \times VdV$: y por estar corridos los elementos Aa y Hb con movimiento uniforme en un mismo tiempo con las velocidades V y W, será $V:W = Aa:Hb = AC:KH$, y $dV:dW = AC:KH$, de donde $VdV:WdV = AC^2:KH^2$, y $VdV = \frac{AC^2}{KH^2} \times WdW$: y con el mismo raciocinio se demostrará ser $vdv = \frac{BC^2}{HK^2} \times WdW$: luego substituyendo los valores hallados de VdV y vdv en la equacion E se tendrá $\frac{M \times CB + m \times CA}{KH} \times Hg = \frac{2M \times BC^2 + 2m \times CA^2}{KH^2} \times WdW$; pero por la equacion C es $Hg = 2WdW$: luego será $KH = \frac{M \times CB^2 + m \times CA^2}{M \times CB + m \times CA}$. Que es &c.

COROLARIO I.

493. Si en el péndulo compuesto CA (*Fig.* 216.) hay tres masas B, I, A, se hallará con el mismo método la longitud del péndulo simple KH igual á $\frac{B \times BC^2 + I \times CI^2 + A \times CA^2}{B \times BC + I \times CI + A \times CA}$; y asi sucesivamente con el mismo órden, de donde resulta que la longitud del péndulo simple KH es igual á la suma de los productos de cada masa multiplicada por el quadrado de su distancia al centro C, partida dicha suma por la suma de los productos de cada masa multiplicada

por su distancia al mismo centro C.

COROLARIO II.

494. Por tanto si es AB una barra inflexible (*Fig.* 217.) colocada en la direccion del péndulo CB; se podrá determinar por lo demostrado en el Corolario antecedente la longitud del péndulo simple KH: pues haciendo $CI = z$, y el elemento $Ii = dz$, se tendrá $KH = \frac{S.dz \times z^2 + M}{S.dz \times z + N} = \frac{\frac{1}{3}z^3 + M}{\frac{1}{2}z^2 + N}$. Para la determinacion de las constantes adviértase que las integrales $S.dz \times z^2$ y $S.dz \times z$ son cero, quando sea $z = CB$ que nombro c; por consiguiente serán, $M = -\frac{1}{3}c^3$, y $N = -\frac{1}{2}c^2$: luego será $KH = \frac{2}{3} \times \frac{z^3 - c^3}{z^2 - c^2} = \frac{2}{3} \times \frac{z^2 + cz + c^2}{z + c}$: y siendo $z = CA = a$, se tendrá $KH = \frac{2}{3} \times \frac{a^2 + ac + c^2}{a + c}$; y tomada $CP = KH$, será (371) el punto P centro de oscilacion del péndulo propuesto.

PROPOSICION XLIII.

495. Si las masas A y B del péndulo compuesto ACB se hallan en el mismo plano en que oscila dicho péndulo, pero no directamente con el punto C, y si son dichas masas proporcionales con sus

gravedades; determinar la longitud del péndulo simple *CD* que haga sus oscilaciones en el mismo tiempo que el compuesto. *Fig.* 218, 219.

Es evidente que el péndulo compuesto *ACB* habrá hecho una semioscilacion, hallándose en la posicion *aCb* en que la linea vertical *Cd* pasa por el punto *e* centro de la gravedad de dichas masas: de donde resulta que siendo *ACB* la primera posicion del péndulo compuesto, la posicion del péndulo simple que se busca se hallará en la direccion *CD* que pasa por el centro de gravedad de las masas *A* y *B*, ó bien en una linea paralela á dicha *CD*. Ahora supóngase que el péndulo compuesto *ACB* ha baxado á la posicion *FCG*, y el simple *CD* á la *CH* que pasa por el centro *K* de las masas *A* y *B* existentes en los puntos *F* y *G*. Por los puntos *F*, *H*, *G* háganse pasar las verticales *Mm*, *Pp*, *Nn*, que encuentran la horizontal *CX* en los puntos *M*, *P*, *N*; y desde los extremos de los arcos evanecentes y semejantes *Fa*, *Hb*, *Gb* báxense las perpendiculares *am*, *bp*, *bn* á dichas verticales: luego (492) se tendrán las equaciones (*C*) $H \times Hp = 2H \times WdW$, (*D*) $A \times Fm + B \times Gn = 2A \times VdV + 2B \times vdv$, llamadas *W*, *V*, *v* las velocidades de las masas *H*, *A*, *B* en los puntos *H*, *F*, *G*. Y siendo *Fm* á *Hp* como la compuesta de las razones *Fm* á *Fa*, *Fa* á *Hb*, y Hb á Hp, ó bien de las razones CM á CF por la semejanza de los triángulos Fma y FMC, CF á CH por la semejanza de los sectores CFa y CHb, y CH á CP por la semejanza de los triángulos Hpb y HPC, será Fm á Hp como CM á CP; por consiguiente $Fm = \frac{CM}{CP} \times Hp$: con el mismo raciocinio se demostrará ser $Gn = \frac{CN}{CP} \times Hp$: luego substituyendo los valores hallados de Fm y Gn en la equacion D, se tendrá $\frac{A \times CM}{CP} \times Hp + \frac{B \times CN}{CP} \times Hp = 2A \times VdV + 2B \times vdv$; pero son, $V:W = CF:CH$, $dV:dW = CF:CH$, $VdV:WdW = CF^2:CH^2$, de donde $VdV = \frac{CA^2}{CH^2} \times WdW$, y por igual razon $vdv = \frac{CB^2}{CH^2} \times WdW$: luego será $\frac{A \times CM}{CP} \times Hp + \frac{B \times CN}{CP} \times Hp = \frac{2A \times CA^2}{CH^2} \times WdW + \frac{2B \times BC^2}{CH^2} \times WdW$; pero por la equacion C es $Hp = 2WdW$: luego será $\frac{A \times CM + B \times CN}{CP} = \frac{A \times CA^2 + B \times BC^2}{CH^2}$. Desde el centro de gravedad K báxese la perpendicular KO á la horizontal CX; y por la semejanza de los triángulos CHP y CKO será $CP:CH = CO:CK$, y por consiguiente $CP = \frac{CH \times CO}{CK}$: luego será $\frac{A \times CM + B \times CN}{CH \times CO} \times KC = \frac{A \times CA^2 + B \times BC^2}{CH^2}$, ó bien $\frac{A \times CM + B \times CN}{CO} \times CK = \frac{A \times CA^2 + B \times BC^2}{CH}$; pero es (63, 54) $A \times CM + B \times CN = (A + B) \times CO$: luego será $\frac{(A+B) \times CO \times CK}{CO} = \frac{A \times CA^2 + B \times BC^2}{CH}$; y por consiguiente $CH = \frac{A \times CA^2 + B \times BC^2}{(A+B) \times CK}$. Que es &c.

COROLARIO I.

496. Se infiere que siendo FG perpendicular á CH, y las masas A y B iguales, será $CH = \frac{2B \times CF^2}{2B \times CK} = \frac{B \times CF^2}{B \times CK}$.

COROLARIO II.

497. Luego si en el péndulo compuesto la barra FG queda dividida por medio en su centro K de gravedad, y es perpendicular á CH, y se nombran $KR = x$, el elemento $Rr = dx$, y $CK = a$; será (496) la longitud del referido péndulo simple $CH = \frac{S.(a^2 + x^2) \times dx}{S.adx} = \frac{3a^2 + x^2}{3a}$; y suponiendo $x = KG = b$, se tendrá $CH = \frac{3a^2 + b^2}{3a}$.

PROPOSICION XLIV.

498. Si las masas A y B del péndulo compuesto ACB no se hallan en el plano vertical que pasa por el punto C; determinar la longitud del péndulo simple CH, que haga sus oscilaciones al mismo tiempo que el compuesto. *Fig.* 220.

Supóngase que el péndulo compuesto ha baxado á ACB, y el simple á CH: es evidente que la posicion de dicho péndulo simple debe quedar en la recta CH que pasa por el punto K centro de la gravedad de las masas A y B. Tírese ECF perpendicular al plano vertical que pasa por CH; por la recta ECF hágase pasar el plano horizontal $DEFG$; por los puntos A y B báxense las perpendiculares AR y BS á la recta RS; por los puntos A, H, B háganse pasar las verticales Am, Hp, Bn, que se prolongarán hasta encontrar el referido plano horizontal en los puntos M, P, N; tírense las rectas RM, CP, SN; y finalmente sobre dichas verticales báxense las perpendiculares am, bp, bn, desde los extremos de los arcos infinitésimos semejantes Aa, Hb, Bb descritos por los radios RA, CH, SB: luego se tendrán (492) las equaciones (C) $H \times Hp = 2H \times WdW$, (D) $A \times Am + B \times Bn = 2A \times VdV + 2B \times vdv$. Y siendo Am á Hp como la compuesta de las razones Am á Aa, Aa á Hh, Hb á Hp, que son respectivamente iguales á las RM á RA, RA á CH, CH á CP, por la semejanza de los triángulos Ama y RAM, RAa y CHb, HpH y HPC, se tendrá $Am : Hp = RM : CP$, de donde $Am = \frac{RM}{CP} \times Hp$: y por igual razon será $Bn = \frac{SN}{CP} \times Hp$: luego substituyendo los valores hallados de Am y Bn en la equacion D se tendrá $\frac{A \times RM}{CP} \times Hp + \frac{B \times SN}{CP} \times Hp = 2A \times VdV + 2B \times vdv$; pero son $V : W = RA : CH$, $dV : dW = RA : CH$, $VdV : WdW = RA^2 : CH^2$, de donde $VdV = \frac{RA^2}{CH^2} \times WdW$, y por igual razon $vdv = \frac{SB^2}{CH^2} \times WdW$: luego será $\frac{A \times RM}{CP} \times Hp + \frac{B \times SN}{CP} \times Hp = \frac{2A \times RA^2}{CH^2} \times WdW + \frac{2B \times SB^2}{CH^2} \times WdW$; pero por la equacion C es $Hp = 2WdW$; luego será $\frac{A \times RM + B \times SN}{CP} = \frac{A \times RA^2 + B \times BS^2}{CH^2}$; pero tirada la perpendicular KO á la recta CP, es $CP : CH = CO : CK$, y $CP = \frac{CH \times CO}{CK}$: luego será $\frac{A \times RM + B \times SN}{CH \times CO} \times CK = \frac{A \times RA^2 + B \times SB^2}{CH^2}$; por consiguiente $\frac{A \times RM + B \times SN}{CO} \times$

$CK = \frac{A \times RA^2 + B \times BS^2}{CH}$: y por ser el punto K centro de las masas A y B es (63, 54) $A \times RM + B \times SN = (A+B) \times CO$; luego será $(A+B) \times CK =$ $\frac{A \times RA^2 + B \times BS^2}{CH}$, y por consiguiente CH igual á $\frac{A \times RA^2 + B \times BS^2}{CK \times (A+B)}$. Que es &c.

COROLARIO.

499. Se infiere que siendo $A = B$, y AB perpendicular á CK, será $AK = BK$, y $RA = CK = BS$; por consiguiente $CH = \frac{2A \times CK^2}{2A \times CK} = CK$, esto es, será el péndulo simple CK isócrono al compuesto ACB en dichas suposiciones.

PROPOSICION XLV.

500. Si el arco circular AD es mayor que el arco BD del mismo círculo; será el tiempo de la oscilacion por dicho primer arco mayor que el tiempo de la oscilacion por el segundo. *Fig.* 221.

Supóngase que el péndulo ha baxado de CA á CB; y por los puntos A y G tírense las perpendiculares AE y GF al rádio CD. Nómbrense, $DE = b$, r la longitud del péndulo CD, el arco AG

$= s$, g la gravedad del cuerpo aplicado al péndulo, v la velocidad del cuerpo en G, dt el tiempo infinitésimo que gasta el péndulo para correr el elemento ds del arco AG, y finalmente $DF = x$. Consta ser (391) $v = \frac{ds}{dt}$, y por consiguiente $dt = \frac{ds}{v}$; pero $ds = -\frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$: luego será $dt = -\frac{rdx}{v \times \sqrt{(2rx - x^2)}}$; y por ser $v = \frac{\sqrt{g} \times \sqrt{(b-x)}}{\sqrt{m}}$ (481), se tendrá $dt = -\frac{r\sqrt{m}}{\sqrt{g}} \times \frac{dx}{\sqrt{(b-x)} \times \sqrt{(2rx - x^2)}}$. Ahora desde el punto B báxese la perpendicular BJ al rádio CD; hágase $JK : JD = EF : ED$; en el punto K levántese sobre CD la perpendicular KH; y nómbrense, $JD = c$, $DK = x'$, dt' el tiempo infinitésimo que el péndulo CB gasta para correr el elemento del arco BH: y con el mismo raciocinio expuesto anteriormente se tendrá $dt' = -\frac{r\sqrt{m}}{\sqrt{g}} \times \frac{dx'}{\sqrt{(c-x')} \times \sqrt{(2rx' - x'x')}}$; pero es $x : x' = b : c$, de donde $x' = \frac{cx}{b}$: luego será $dt' = -\frac{r\sqrt{m}}{\sqrt{g}} \times$

$$\frac{dx}{\sqrt{(b-x)} \times \sqrt{\left(2rx - \frac{cx^2}{b}\right)}}$$; pero es $\frac{dx}{\sqrt{(b-x)} \times \sqrt{(2rx - x^2)}}$

$$> \frac{dx}{\sqrt{(b-x)} \times \sqrt{\left(2rx - \frac{cx^2}{b}\right)}}$$, por ser $b > c$: luego

será $dt > dt'$, y así siempre: luego en los péndulos iguales CA y CB, que hacen sus semioscilaciones por los arcos AD y DB, será el tiempo de la semioscilacion por el mayor arco AD mayor que el tiempo de la semioscilacion por el menor arco BD. Que es &c.

ESCOLIO.

501. La integral de la fórmula $-\frac{dx}{\sqrt{(b-x)}\times\sqrt{(2rx-x^2)}}$ depende de los arcos elípticos é hiperbólicos: pues haciendo $x=\frac{z^2}{2r}$, se transforma dicha fórmula en la $(M)\ \sqrt{8r}\times-\frac{dz}{\sqrt{(2br-z^2)}\times\sqrt{(4r^2-z^2)}}$, que se reduce á la $\frac{\sqrt{8r}}{4r^2-2br}\times\left(\frac{-dz\sqrt{(4r^2-z^2)}}{\sqrt{(2br-z^2)}}+\frac{dz\sqrt{(-2br+z^2)}}{\sqrt{(-4r^2+z^2)}}\right)$, cuyas integrales se tienen por lo demostrado (III. 369). Adviértase que siendo los arcos AD y BD muy pequeños en comparacion de la circunferencia del círculo, las semioscilaciones en dichos arcos se podrán tomar por isócronas.

PROPOSICION XLVI.

502. Determinar la curva ABC, en que el cuerpo, que se dexe caer desde qualquiera punto B de ella, llegue en igual tiempo á su punto inferior C. *Fig.* 222.

Tírese por el punto B la recta BG perpendicular á la vertical CF; sea BE tangente á dicha curva en el punto B; exprésese la gravedad del cuerpo por la vertical BD; y tirada la recta DE perpendicular á la BE, será BE la potencia con que se moverá el cuerpo por el elemento Bb de la referida curva. Además tírese be perpendicular á la ordenada BG; y nómbrense, $CG = x$, $BG = y$, $BC = s$, $BD = g$. Supóngase la potencia proporcional con el espacio que ha de correr el cuerpo, esto es $BE = n \times BC$, para que el mismo cuerpo ande el espacio BC en igual tiempo, qualquiera que sea el punto B de la curva de donde empieza á moverse. Ahora por la semejanza de los triángulos BED y Beb es $Bb : be = BD : BE$, esto es, $ds : dx = g : BE$, y por consiguiente será $BE = \frac{gdx}{ds}$; pero $BE = n \times BC$: luego será $\frac{gdx}{ds} = n \times s$, de donde resulta ser $gdx = n \times sds$, $gx = n \times \frac{1}{2}s^2$, $s = \frac{\sqrt{2gx}}{\sqrt{n}}$, y $ds = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2n}} \times \frac{dx}{\sqrt{x}}$; pero (III. 219.) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: luego será $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2n}} \times \frac{dx}{\sqrt{x}}$, de donde resulta ser $dy = \frac{\sqrt{(\frac{g}{2n} - x)}}{\sqrt{x}} \times dx$ equacion á la Cicloide, cuyo exe

$CF = \frac{g}{2n}$ (III. 308.); y respecto de que n puede ser qualquiera número, tambien qualquiera Cicloide gozará de la propiedad que se pedia. Que es &c.

COROLARIO.

503. Por tanto si se describen (*Fig.* 223.) las semicicloides iguales BQA y Bqa cerca del exe comun BH, y si se hace oscilar el péndulo BG entre dichas dos semicicloides; las oscilaciones de él serán isócronas, ya describa el cuerpo mayores, ya menores arcos de la curva AGa, por ser (III. 319) las curvas de evolucion AG y aG otras semicicloides iguales á las BQA y Bqa, pero colocadas inversamente.

PROPOSICION XLVII.

504. Determinar la razon del tiempo que gasta un cuerpo para correr la semicicloide AC, al tiempo que gastaría el mismo cuerpo para andar el exe FC de la misma curva. *Fig.* 222.

Supóngase que el cuerpo empezando su movimiento desde A ha corrido el espacio AB. Tírese la ordenada BG al exe CF; por el punto b infinitamente próximo al punto B báxese la perpendicular be á dicha ordenada; sobre CF como diámetro descríbase el semicírculo CHF; y finalmente tírense las cuerdas CH y HF. Nómbrense, $AB = s$, $CG = x$, $CF = 2r$, t el tiempo que emplea el cuerpo para correr el arco AB, y v su velocidad en el punto B. Consta ser $ds = -\frac{dx\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}$ (III. 308); pero (391) $v = \frac{ds}{dt}$ ó bien $dt = \frac{ds}{v}$, y $v = \sqrt{2l} \times \sqrt{(2r - x)}$ (410, 482): luego será $dt = -\frac{dx\sqrt{2r}}{\sqrt{2l} \times \sqrt{(2rx - x^2)}}$; é integrando se tendrá $t = \frac{\text{arco } HF}{\sqrt{rl}}$; por consiguiente el tiempo de la caida del cuerpo por la semicicloide AC será igual á la semicircunferencia FHC partida por $\sqrt{rl}$; pero (410) el tiempo de la caida del mismo cuerpo por el diámetro $FC = \sqrt{(4r)} : \sqrt{l}$: luego será el tiempo de la caida por la semicicloide AC, ó bien por qualquier arco BC (502), al tiempo de la caida por FC como la semicircunferencia $\frac{FHC}{\sqrt{r}}$ á $\sqrt{4r}$, ó bien como la semicircunferencia FHC á $2r$. Que es &c.

PROPOSICION XLVIII.

505. Determinar la Curva Isócrona BMN, en la que ande un cuerpo B movido por la fuerza de la gravedad, de modo que en tiempos iguales se acer-

Fig. 215.

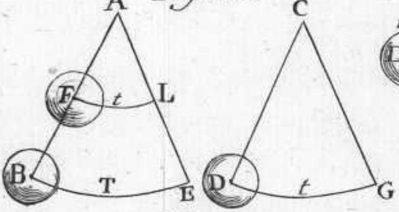


Fig. 216.

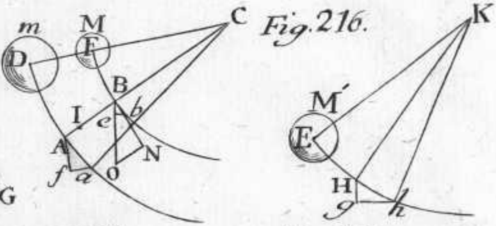


Fig. 217.

Fig. 218.

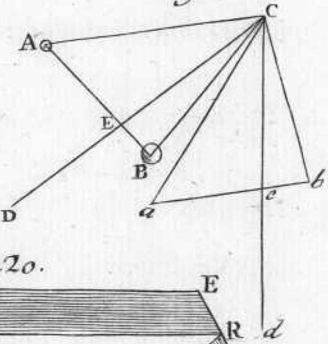


Fig. 219.

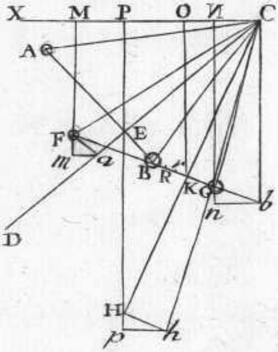


Fig. 220.

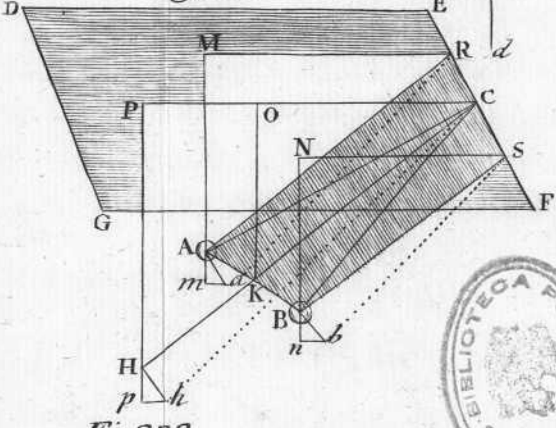


Fig. 221.

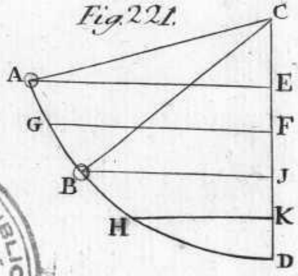


Fig. 222.

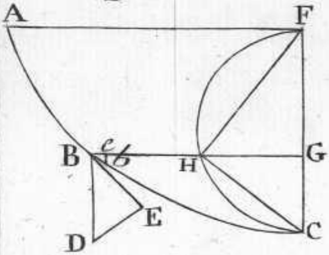
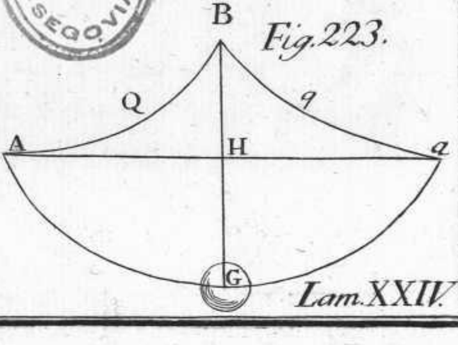


Fig. 223.



que igualmente á la horizontal *FN. Fig.* 224.

Supóngase ser *AF* la altura, por la qual desciende el cuerpo á la horizontal *FN*. Llámense, $AP = x$, $PM = y$, v la velocidad del cuerpo en *M*, $Mm = ds$, y dt el tiempo en que anda el elemento *Mm*; y se tendrá (391) $v = \frac{ds}{dt}$, de donde $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{v}$ (III. 219.); pero (482) $v = \sqrt{x}$, y $dt = dx$ porque las alturas verticales *Pp* son como los tiempos por los arcos *Mm*: luego será $dx = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{x}}$: de donde resulta ser, $dx\sqrt{x} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; quadrando y trasponiendo, $dy^2 = xdx^2 - dx^2$; extrayendo la raiz quadrada, $dy = dx\sqrt{(x - 1)}$; integrando, $y = \frac{2}{3} \times (x - 1)^{\frac{3}{2}}$; quadrando $y^2 = \frac{4}{9} \times (x - 1)^3 = \frac{4}{9} \times z^3$, hecha $x - 1 = z$; y finalmente $z^3 = \frac{9}{4} \times y^2$ equacion á la Parábola cúbica, que tiene la abscisa $= z$, la ordenada $= y$, y el parámetro $= \frac{9}{4}$. Siendo x la altura que anda el cuerpo, y $x - 1 = z$, la parábola cúbica *BMN* empezará desde el punto *B*, tomada $AB = 1$; y si se llama p el parámetro de la dicha curva, será $p = \frac{9}{4} AB$, de donde $AB = \frac{4}{9} p$: luego el cuerpo deberá correr la altura *AB* igual á $\frac{4}{9}$ del parámetro de la referida Parábola, antes que empiece su movimiento en la misma curva. Que es &c.

PROPOSICION XLIX.

506. Determinar la Curva Brachîstócrona AB, por la qual un cuerpo A movido por la gravedad descende desde un punto dado A á otro dado B en el mínimo tiempo. *Fig.* 225.

Tírense las ordenadas PM, pm, Qn á la vertical AZ, y considérense infinitamente próxímas, de modo que sea $Pp = pQ$; y báxense las perpendiculares MR, mO, nS á dichas ordenadas; y serán, $MR = mO = nS$, y RS constante respecto al arco Mn. Llámense, $AP = x$, $PM = y$, $RS = dz$, C y c las respectivas velocidades constantes, con las que el cuerpo anda los arcos evanecentes Mm y mn, y finalmente dt el tiempo del descenso por el arco Mn; y serán $Pp = pQ = MR = nS = dx$, $mR = dy$, y $mS = On = dz - dy$; por consiguiente $mn = \sqrt{(dx^2 + (dz - dy)^2)}$, y $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Siendo (391) la velocidad C igual al espacio Mm partido por el tiempo en que el cuerpo anda el mismo espacio, será dicho tiempo igual á $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2)}}{C}$; y por la misma razon el tiempo en que el cuerpo anda el elemento mn será igual á $\frac{\sqrt{(dx^2 + (dz - dy)^2)}}{c}$: luego será el tiempo del descenso por Mn, esto es, $dt =$

$\frac{\surd(dx^2+dy^2)}{C}+\frac{\surd(dx^2+(dz-dy)^2)}{c}$; pero dt debe ser mínimo, dx y dz son constantes, y dy variable: luego diferenciando se tendrá $\frac{dyd^2y}{C\surd(dx^2+dy^2)}+\frac{dyd^2y-dzd^2y}{c\surd(dx^2+(dz-dy)^2)}=d^2t=o$ (III. 281); de donde resulta ser $\frac{dy}{C\surd(dx^2+dy^2)}=\frac{dz-dy}{c\times\surd(dx^2+(dz-dy)^2)}$, ó bien $\frac{mR}{C\times Mm}=\frac{mS}{c\times mn}=\frac{On}{c\times mn}$; pero (482) $C=\surd AP$, $c=\surd Ap$: luego será $\frac{mR}{\surd AP\times Mm}=\frac{On}{\surd Ap\times mn}$, ó bien $\frac{\surd AP\times mM}{mR}=\frac{\surd Ap\times mn}{On}$; por consiguiente el producto de la raiz de la abscisa por el elemento del arco correspondiente partido por la diferencial de la ordenada, será siempre igual á una cantidad constante que se supondrá igual á $\surd a$, de donde $\surd a=\frac{\surd AP\times Mm}{mR}=\frac{\surd x\times\surd(dx^2+dy^2)}{dy}$, $dy\surd a=\surd x\times\surd(dx^2+dy^2)$, $ady^2=xdx^2+xdy^2$, $dy^2=\frac{xdx^2}{a-x}$, y $dy=\frac{dx\surd x}{\surd(a-x)}$ equacion á la Cicloide (III. 308) que tiene el diámetro del círculo generador igual á a. Por tanto la Cicloide es la curva de la caida mas veloz. Que es &c.

ESCOLIO.

507. Para determinar con método mecánico el diámetro $LY = a$ del círculo generador de la semicicloide ABY (*Fig.* 226.) que pasa por los puntos dados A y B, báxese la perpendicular Bl á la horizontal AL, sobre Al descríbase la semicicloide Aby, que quedará cortada por la recta AB en un punto b, tírese la recta bl, por el punto B hágase pasar la recta BL paralela á dicha bl, y prolónguese hasta encontrar la horizontal AL en L, y finalmente tírese la vertical LY igual á la quarta proporcional de las rectas Al, AL y ly; con lo qual se tendrá el diámetro del círculo generador de la semicicloide ABY. Fúndase esta construccion en la semejanza de las Cicloides Aby, ABY, como fácilmente se puede probar.

PROPOSICION L.

508. Si el péndulo AD describe la superficie del cono recto ABE; determinar la velocidad que tiene en qualquier punto B del espacio corrido, y el tiempo que emplea para andar el mismo espacio. *Fig.* 227.

Tírense las rectas AC y BC al centro C de la base de dicho cono; exprésese la gravedad del cuerpo

D con la recta vertical BK; y tirada la recta KN paralela á la BA, será BN la potencia del cuerpo dirigida al centro C del círculo BDE. Nómbrense, $BK = g$, $BC = r$, $AC = b$, v la velocidad del cuerpo en B, $DB = s$, y t el tiempo que gasta el cuerpo para correr el arco s. Y por la semejanza de los triángulos BKN y BAC es $AC : BC = BK : BN$, esto es, $b : r = g : BN$; por consiguiente será $BN = \frac{rg}{b}$; pero la potencia BN constante dirigida al centro C del círculo y capaz de detenerle en la circunferencia del mismo círculo, es igual á $\frac{mv^2}{2kr}$ por lo que se demostrará á continuacion: luego será $\frac{rg}{b} = \frac{mv^2}{2kr}$, de donde resulta ser $v = \frac{r\sqrt{2kg}}{\sqrt{bm}}$. Y por ser (391) $v = \frac{ds}{dt}$ ó bien $dt = \frac{ds}{v}$, será $dt = \frac{\sqrt{bm} \times ds}{r\sqrt{2kg}}$; é integrando se tendrá $t = \frac{\sqrt{bm} \times s}{r\sqrt{2kg}}$. Que es &c.

Del Movimiento libre curvilineo de los cuerpos.

PROPOSICION LI.

509. Si el cuerpo m corre con movimiento uni-

forme la circunferencia del círculo ARA; determinar la potencia con que se mueve en dicha circunferencia. *Fig.* 228.

Supóngase que el cuerpo m se halla en el punto A del espacio corrido, y que tiene la velocidad dada v. Tírense, el diámetro ACE, la tangente AT en el punto A, y las rectas RT y RB perpendiculares á las respectivas rectas AT y AC: y considérese el arco AR evanecente. Si dicho cuerpo no estuviera animado por una potencia, seguiria su movimiento uniforme (352) segun la direccion de la tangente AT, y en un tiempo infinitésimo dt andaria el elemento AT: y considerando que la potencia, que actua en A sobre el cuerpo, le haria andar el espacio AB con movimiento uniforme en el tiempo dt; dicho cuerpo andaria (386) el arco evanecente AR con movimiento uniforme en el mismo tiempo: y respecto de que el cuerpo corre uniformemente la circunferencia del círculo, y la variacion de su direccion es siempre la misma, es evidente que en qualquiera punto A del espacio corrido estará animado el cuerpo por una potencia centrípeta constante dirigida hácia el centro C del círculo. Llámense, m la masa del cuerpo m, el radio $AC = r$, y f dicha potencia centrípeta. Consta ser (438) $\frac{t^2}{v^2} = \frac{ms}{kf}$, de donde $\frac{kf}{m} \times \frac{t^2}{v^2}$

$= s$: luego en el caso presente será $\frac{kf}{m} \times \frac{dt^2}{n^2} = AB$; pero $AB = \frac{AR^2}{2r} = \frac{AT^2}{2r}$: luego será $\frac{kf}{m} \times \frac{dt^2}{n^2} = \frac{AT^2}{2r}$; pero siendo la velocidad v constante es (392) $n : dt = v : AT$, y $n^2 : dt^2 = v^2 : AT^2$: luego será $\frac{kf}{m} \times \frac{AT^2}{v^2} = \frac{AT^2}{2r}$; por consiguiente se tendrá $f = \frac{mv^2}{2kr}$. Que es &c.

COROLARIO.

510. Si el cuerpo m, que anda (*Fig.* 229.) por la curva AD, ha llegado á un punto B de ella, y continua su movimiento en el elemento Bb; la potencia aplicada al cuerpo en la direccion BC perpendicular á la curva en B será igual á $\frac{mv^2}{2kR}$, ó bien nombrada f dicha potencia como antes deberá valer la equacion $2kRf = mv^2$, en cuya expresion es R el radio BC del ósculo.

PROPOSICION LII.

511. Si el cuerpo m animado por una potencia constante igual á la centrípeta, que le detiene en la circunferencia ARA, anda el espacio rectilineo AC;

determinar el punto D, en donde tenga su velocidad igual á la de rotacion, esto es, igual á la velocidad con que se mueve el cuerpo m en dicha circunferencia. *Fig.* 228.

Llámese x el espacio corrido AD que se busca, y supónganse las denominaciones antecedentes. Siendo pues la potencia f constante, será (438) $4kfx = mv^2$; pero (509) $f = \frac{mv^2}{2kr}$, ó bien $2krf = mv^2$: luego será $4kfx = 2krf$; por consiguiente se tendrá $x = \frac{1}{2}r$. Por tanto el cuerpo m animado por la potencia constante, que le detiene en la circunferencia del círculo, debe correr la mitad del radio del mismo círculo, para que tenga una velocidad igual á la de rotacion. Que es &c.

PROPOSICION LIII.

512. Si dos cuerpos que tienen las masas respectivamente iguales á M y m, y éstas animadas por las respectivas potencias centrípetas F y f dadas, andan las circunferencias circulares C y c, cuyos radios son R y r; determinar las velocidades V y v, con que se moverán en dichas circunferencias, y los tiempos periódicos T y t que emplearán para correrlas: y al contrario.

1°. Se ha demostrado (509) ser $F = \frac{MV^2}{2kR}$, $f=$

$\frac{mv^2}{2kr}$: luego será $F:f = \frac{MV^2}{R} : \frac{mv^2}{r}$, de donde resulta ser $V^2 : v^2 = \frac{FR}{M} : \frac{fr}{m}$, y por consiguiente $V:v = \frac{\sqrt{F}\times\sqrt{R}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{f}\times\sqrt{r}}{\sqrt{m}}$, esto es, serán las velocidades que se buscan en razon compuesta de la subduplicada de las potencias, de la subduplicada de los radios, y de la inversa subduplicada de las masas. Que es lo primero.

2°. Siendo uniforme el movimiento de los cuerpos M y m, será (382) $T:t = \frac{C}{V} : \frac{c}{v}$; pero es $C:c = R:r$: luego será $T:t = \frac{R}{V} : \frac{r}{v}$; pero se ha demostrado en el caso anterior ser $V:v = \frac{\sqrt{F}\times\sqrt{R}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{f}\times\sqrt{r}}{\sqrt{m}}$: luego será $T:t = \frac{\sqrt{RM}}{\sqrt{F}} : \frac{\sqrt{rm}}{\sqrt{f}}$, esto es, los tiempos que emplean los cuerpos M y m para correr las circunferencias C y c estarán entre sí en la razon compuesta de la directa subduplicada de los radios, de la directa subduplicada de las masas, y de la inversa subduplicada de las potencias. Que es lo segundo.

3°. Consta por lo demostrado anteriormente (2°.) ser $T:t = \frac{\sqrt{RM}}{\sqrt{F}} : \frac{\sqrt{rm}}{\sqrt{f}}$: luego será $T^2:t^2 = \frac{RM}{F} : \frac{rm}{f}$;

por consiguiente $F:f = \frac{RM}{T^2}:\frac{rm}{t^2}$. Asimismo consta (1°.) ser $F:f = \frac{MV^2}{R}:\frac{mv^2}{r}$: luego será $V^2:v^2 = \frac{FR}{M}:\frac{fr}{m}$; por consiguiente $V:v = \frac{\sqrt{FR}}{\sqrt{M}}:\frac{\sqrt{fr}}{\sqrt{m}}$. Que es &c.

COROLARIO.

513. Se infiere que si es $F=f$, será $T:t = \sqrt{RM}:\sqrt{rm}$. Tambien si es $F:f=R:r$, será $T:t=\sqrt{M}:\sqrt{m}$. Asimismo si es $F:f=\frac{1}{R^2}:\frac{1}{r^2}$, será $T^2:t^2=R^3M:r^3m$.

PROPOSICION LIV.

514. Si el cuerpo m sale desde el punto A segun la direccion AZ con la velocidad dada V, y estando animado por potencias perpendiculares al plano BL describe la curva dada AD; determinar la velocidad que tendrá dicho cuerpo en qualquiera punto C del espacio corrido, las potencias de que estará animado, y el tiempo que empleará para andar el arco AC. *Fig.* 230.

Tírense las rectas AB, CL, DR perpendiculares al exe BR, como tambien las AI y CQ perpendiculares á las respectivas tangentes AZ y CY. Córtense las rectas $AH = CK = b$, y tírense las perpendiculares HI y KM á las AI y CQ. Finalmente llámense, $AI = Q$, $AB = a$, F la fuerza que anima al cuerpo en el punto A, $CM = q$, v la velocidad del mismo cuerpo en C, f la potencia que actúa en C segun la direccion CL, y que se expresa por CN, $BL = x$, $CL = y$, y el radio del osculo $CQ = R$; y se tendrán (III. 305) $R = \frac{bdy}{dq}$, y $\frac{bdx}{ds} = q$.

1°. Tírense las rectas NS y NY perpendiculares á las respectivas rectas CQ y CY. Consta (438) ser (I.) $2kfdy = -mvdv$: pues siendo dy positiva, el aumento de la velocidad será negativo, porque la potencia CY equivalente á la CN segun la direccion de la tangente actúa sobre el cuerpo en parte contraria á la direccion que sigue, y de consiguiente disminuye su velocidad; y lo contrario sucede, si dy es negativa. Por la semejanza de los triángulos CKM y CNS es $CK : CM = CN : CS$, ó bien $b : q = f : CS = \frac{fq}{b}$; pero es (510) $CS = \frac{mv^2}{2kR}$: luego valdrá la equacion (II) $\frac{qf}{b} = \frac{mv^2}{2kR} = \frac{mv^2 dq}{2kbdy}$. Por tanto dividiendo la equacion primera por la segunda, se tendrá la (III) $\frac{dq}{q} = -\frac{dv}{v}$; é integrando de modo que siendo $v = V$, sea $Q = q$, se $q = \frac{QV}{v}$, de donde resulta la equacion (IV) $v = \frac{QV}{q}$, ó bien $V : v = q : Q$. Por tanto se determinará por medio de esta equacion la velocidad del cuerpo en una curva dada.

2°. En la equacion (II) $\frac{qf}{b} = \frac{mv^2 dq}{2kbdy}$ substitúyase el valor hallado de v, y se tendrá la equacion (V) $2kfdy = \frac{mV^2 Q^2 dq}{q^3}$, que se podrá expresar muchas veces con utilidad de este modo $fdy = \frac{2GLQ^2 dq}{q^3}$, supuesto L aquel espacio, al fin del qual el cuerpo m animado por la potencia constante G adquiere la velocidad V, de modo que es (438) $4kGL = mV^2$: y si no es $F = o$, se supondrá $G = F$. Por tanto se determinará por medio de la referida equacion la potencia que anima al cuerpo en una curva dada.

3°. Siendo (392) $v = \frac{nxds}{dt}$, ó bien $dt = \frac{nxds}{v}$, y por lo demostrado en la equacion (IV) $v = \frac{QV}{q}$, será $dt = \frac{nqds}{QV}$; pero $q = \frac{bdx}{ds}$: luego será $dt = \frac{nbdx}{QV}$, de donde resulta la equacion (VI) $\frac{t}{n} = \frac{hx}{QV}$. Por tanto los tiempos, en que el cuerpo m corre los arcos de qualquiera curva, están entre sí como las abscisas correspondientes á los mismos arcos. Ahora si se supone $V = \frac{n \times S}{T}$, siendo S el espacio AZ, que es tangente á la curva en A, y T el tiempo que emplea para correr el mismo espacio, se tendrá $t = \frac{hTx}{QS}$; pero por la semejanza de los triángulos AHI y AVZ es $AH : AI = AZ : AV$, ó bien $b : Q = S : AV = \frac{QS}{b} = X$: luego será $t = \frac{Tx}{X}$; y por consiguiente $T : t = X : x$. Que es &c.

COROLARIO I.

515. Siendo por la equacion (IV) $v = \frac{VQ}{q}$, y $q = \frac{bdx}{ds}$, se tendrá $\frac{VQ}{v} = \frac{bdx}{ds}$, de donde resulta $\frac{VQ}{v} = \frac{bdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, $Q^2V^2 \times (dx^2+dy^2) = b^2v^2dx^2$, y $Q^2V^2dy^2 = b^2v^2dx^2 - V^2Q^2dx^2$: luego será $\frac{VQdy}{\sqrt{(b^2v^2-V^2Q^2)}} = dx$; y por medio de esta equacion se hallará la curva descrita por el cuerpo, si

está dada su velocidad v por y.

COROLARIO II.

516. Y siendo $2kfdy = \frac{mV^2Q^2dq}{q^3}$ por la equacion (V), se tendrá $S.2kfdy = -\frac{mV^2Q^2}{2q^2} + \frac{mV^2}{2}$. Esta integral es igual á cero, quando sea $Q = q$; y por ser $q = \frac{bdx}{ds}$, será tambien $S.2kfdy = -mV^2Q^2 \times \frac{dx^2+dy^2}{2b^2dx^2} + \frac{mV^2}{2}$, de donde resulta ser $2b^2dx^2 \times S.2kfdy = -mV^2Q^2dx^2 - mV^2Q^2dy^2 + mV^2b^2dx^2$: por consiguiente $dx = \frac{QV\sqrt{m} \times dy}{\sqrt{(mV^2P^2 - 2b^2S.2kfdy)}}$, la qual se puede expresar de este modo $dx = \frac{\sqrt{GL} \times Qdy}{\sqrt{(P^2GL - b^2 \times S.fdy)}}$ suponiendo $4kGL = mV^2$ (514. 2°), y $P^2 = b^2 - Q^2$, y si no es $F = o$, se supondrá $G = F$. Luego por medio de la equacion hallada se determinará la curva descrita por el cuerpo, si está dada la potencia f, que le anima, por y.

ESCOLIO.

517. Las fórmulas halladas antes valen igualmente en el caso de ser las potencias repelentes, con tal

que en las mismas fórmulas se mude el signo á las cantidades F y f. Se añaden los exemplos siguientes para exercicio de las fórmulas dadas anteriormente; y se aplican las mismas fórmulas al movimiento de los Proyectiles, ó cuerpos arrojados por morteros, cañones, &c. en las Proposiciones siguientes, con tal que se prescinda de la resistencia del medio.

EXEMPLO I.

518. Supóngase que la Trayectoria, que describe el cuerpo m, es la Elipse dada ACE con la velocidad inicial V en el punto A de proyeccion, y que las direcciones de la potencia, que anima al mismo cuerpo, son perpendiculares al exe PE de dicha curva; se pide determinar la velocidad que tendrá dicho cuerpo en qualquiera punto C del espacio corrido, y las potencias con que estará animado en su movimiento. *Fig.* 231.

Nómbrense, el semiexe $FP = c$, el parámetro $= r$, la abscisa $FL = z$, la ordenada $CL = y$; y supónganse las denominaciones y la construccion de la figura expresadas antes (514).

1°. Por la propiedad de la Elipse es $2c : r = c^2 - z^2 : y^2$: luego diferenciando será $2c : r = -zdz : ydy$, de donde resulta ser $-\frac{ydy}{dz} = \frac{rz}{2c} = \sqrt{(r \times \frac{rc - 2y^2}{4c})}$.

pero es la subnormal (III. 270) $LW = -\frac{ydy}{dz}$: luego será $LW = \sqrt{(r \times \frac{rc - 2y^2}{4c})}$; y por ser $LW^2 + LC^2 = CW^2$, se tendrá $CW = \sqrt{\frac{(4c-2r)\times y^2 + r^2c}{4c}}$; pero es $CW : CL = CK : CM$, ó bien $\sqrt{\frac{(4c-2r)\times y^2 + r^2c}{4c}}$: $y = b : CM$: luego será $CM = \frac{by}{\sqrt{\frac{(4c-2r)\times y^2 + r^2c}{4c}}}$. Con semejante raciocinio se demostrará ser $AI = \frac{ab}{\sqrt{\frac{(4c-2r)\times a^2 + r^2c}{4c}}}$: luego será CM á AI, ó bien $q : Q = \frac{v}{\sqrt{\frac{(4c-2r)\times x^2 + r^2c}{4c}}} : \frac{a}{\sqrt{\frac{(4c-2r)\times a^2 + r^2c}{4c}}}$; pero (514. 1°.) $q : Q = V : v$: luego serán las velocidades en razon compuesta de la directa de las normales, y de la inversa de las ordenadas.

2.° Por medio de los valores hallados de las cantidades Q y q se hallará ser $\frac{1}{Q^2} = \frac{(4c-2r)\times a^2 + r^2c}{4c\times a^2b^2}$ y $\frac{1}{q^2} = \frac{(4c-2r)\times y^2 + r^2c}{4c\times b^2y^2}$, cuya expresion diferenciada dá la equacion $\frac{2dq}{q^3} = \frac{r^2dy}{2b^2y^3}$; pero (514. 2.°) $fdy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$:

luego será $fdy = FLQ^2 \times \frac{r^2 dy}{2b^2y^3}$; y por consiguiente $f = \frac{FLQ^2r^2}{2b^2y^3}$; pero siendo $f = F$, es $y = AB = a$: luego será $LQ^2r^2 = 2b^2a^3$; por consiguiente $f = \frac{Fa^3}{y^3}$. Y por ser $LQ^2r^2 = 2a^3b^2$, será $\frac{1}{Q^2} = \frac{Lr^2}{2a^3b^2}$; pero $\frac{1}{Q^2} = \frac{(4c-2r) \times a^2 + r^2c}{4c \times a^4b^2}$: luego se tendrá $\frac{Lr^2}{2b^2a^3} = \frac{(4c-2r) \times a^2 + r^2c}{4c \times a^2b^2}$, de donde resulta ser $L = \frac{(4c-2r) \times a^3 + r^2ac}{2r^2c}$.

EXEMPLO II.

519. Si las direcciones de las potencias que actuan sobre un cuerpo son perpendiculares al exe de la Trayectoria que describe, y si las velocidades del mismo cuerpo están como la inversa de las ordenadas al mismo exe; se pide determinar la naturaleza de dicha Trayectoria, y las potencias de que estará animado el cuerpo en su movimiento.

1°. Sea $V : v = \frac{1}{a} : \frac{1}{y}$, y por consiguiente será $v = \frac{aV}{y}$; pero (515) $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(b^2v^2 - V^2Q^2)}}$: luego será $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(\frac{a^2V^2b^2}{y^2} - V^2Q^2)}} = \frac{Qydy}{\sqrt{(b^2a^2 - Q^2y^2)}}$; é integrando se tendrá $x = A + \sqrt{(\frac{a^2b^2}{Q^2} - y^2)}$, y $(x - A)^2 = \frac{a^2b^2}{Q^2} - y^2$, equacion al círculo.

2°. Siendo (sup.) $V : v = \frac{1}{a} : \frac{1}{y}$, y $V : v = q : Q$ (514. 1°.) será $q : Q = \frac{1}{a} : \frac{1}{y}$; por consiguiente se tendrán, $q = \frac{Qy}{a}$, $\frac{1}{q^2} = \frac{a^2}{Q^2y^2}$, $\frac{dq}{q^3} = \frac{a^2dy}{Q^2y^3}$; pero (514. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$: luego será $fdy = 2FLQ^2 \times \frac{a^2dy}{Q^2y^3}$; por consiguiente $f = \frac{2FLa^2}{y^3}$; pero siendo $f = F$, es $y = a$: luego será $L = \frac{a}{2}$; por consiguiente se tendrá $f = \frac{Fa^3}{y^3}$.

EXEMPLO III.

520. Siendo las direcciones de las potencias que actuan sobre el cuerpo m perpendiculares al exe de la Trayectoria AEG que describe, y las velocidades del mismo cuerpo como la inversa subduplica-

da de las ordenadas al mismo exe, se pide determinar la equacion á dicha curva, y las potencias de las que estará animado el cuerpo en su movimiento. *Fig.* 232.

1°. Sea $V : v = \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{y}}$: luego será $\frac{aV^2}{y} = v^2$; pero (515) $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(b^2v^2 - V^2Q^2)}}$: luego será $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(\frac{aV^2b^2}{y} - V^2Q^2)}}$; por consiguiente $dx = \frac{\sqrt{y} \times dy}{\sqrt{(\frac{ab^2}{Q^2} - y)}}$ equacion (III. 308) á la Cicloide ordinaria OEG que tiene el exe $EF = \frac{ab^2}{Q^2}$, $FX = AB = a$, $BL = x$, $CL = y$.

2°. Siendo $V : v = \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{y}}$ (sup.), y $V : v = q : Q$ (514. 1°.), será $q : Q = \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{y}}$; por consiguiente $q = \frac{Q\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, $\frac{1}{q^2} = \frac{a}{Q^2y}$, $\frac{2dq}{q^3} = \frac{ady}{Q^2y^2}$; pero (514. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$: luego será $fdy = \frac{FLQ^2ady}{Q^2y^2}$, y por consiguiente $f = \frac{FLa}{y^2}$; pero siendo $f = F$, es $y = a$: luego será $L = a$; por consiguiente $f = \frac{Fa^2}{y^2}$.

EXEMPLO IV.

521. Siendo las direcciones de las potencias que actuan sobre un cuerpo perpendiculares al exe de la Trayectoria que describe, y las velocidades del mismo cuerpo como las ordenadas al mismo exe, se pide determinar la equacion á dicha curva, y las potencias de que estará animado el cuerpo en su movimiento.

1°. Sea $V : v = a : y$, y por consiguiente $v = \frac{Vy}{a}$; pero (515) $dx = \frac{VQ \times dy}{\sqrt{(b^2 v^2 - V^2 Q^2)}}$: luego será $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(\frac{V^2 b^2 y^2}{a^2} - V^2 Q^2)}}$, de donde $dx = \frac{aQ}{b} \times \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - \frac{a^2 Q^2}{b^2})}}$ equacion á la curva de los cosenos hiperbólicos.

2°. Siendo $V : v = a : y$ (sup.), y $V : v = q : Q$ (514. 1°), será $q : Q = a : y$; por consiguiente $q = \frac{aQ}{y}$, $\frac{1}{q^2} = \frac{y^2}{a^2 Q^2}$, $-\frac{2dq}{q^3} = \frac{2ydy}{a^2 Q^2}$; pero (514. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2 dq}{q^3}$: luego será $fdy = FLQ^2 \times -\frac{2ydy}{a^2 Q^2}$; por consiguiente $f = -\frac{2FLy}{a^2}$, en cuya expresion

Fig. 224.

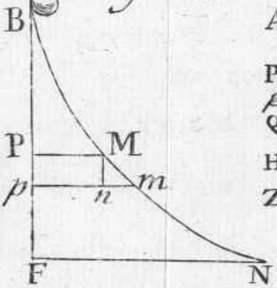


Fig. 225.

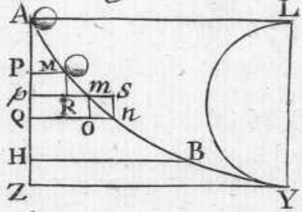


Fig. 226.

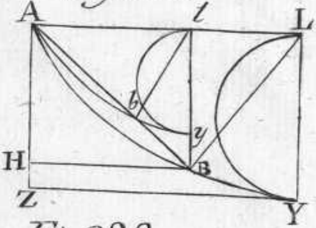


Fig. 229.

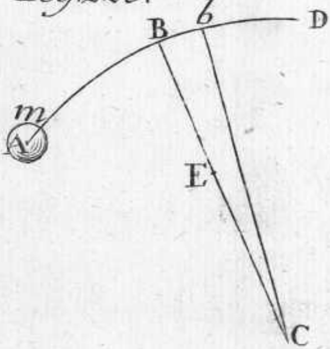


Fig. 228.

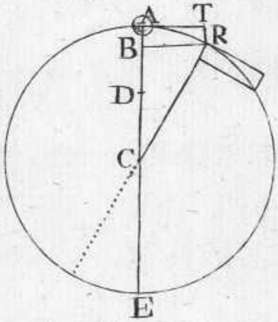
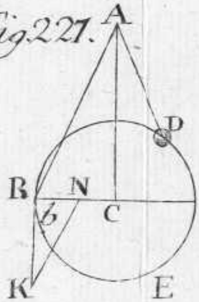


Fig. 221.



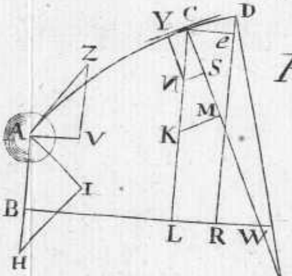


Fig. 230.

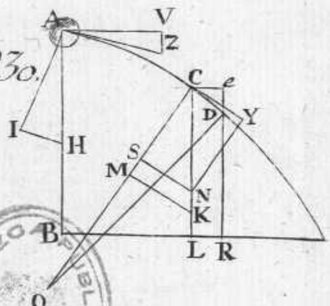
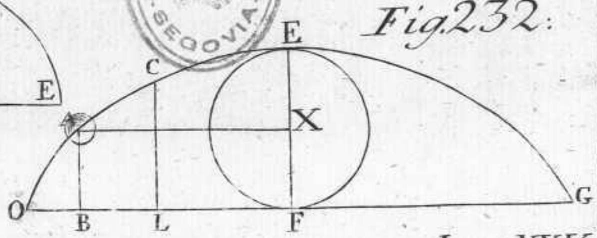


Fig. 231.

Fig. 232.



el signo negativo indica ser la potencia f repelente, y el espacio L es igual á $-\frac{1}{2}a$, porque siendo $f = F$, es $y = a$.

EXEMPLO V.

522. Siendo las direcciones de las potencias que actuan sobre un cuerpo perpendiculares al exe de la Trayectoria que describe, y las velocidades del mismo cuerpo como la subduplicada de las ordenadas al mismo exe, se pide determinar la equacion á dicha curva, y las potencias de las que estará animado el cuerpo en su movimiento.

1°. Sea $V : v = \sqrt{a} : \sqrt{y}$; y será $v = \frac{V \times \sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, y $v^2 = \frac{V^2 y}{a}$; pero (515) es $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(b^2v^2 - V^2Q^2)}}$: luego será $dx = \frac{VQdy}{\sqrt{(\frac{V^2b^2y}{a} - V^2Q^2)}} = \frac{Q\sqrt{a}}{b} \times \frac{dy}{\sqrt{(y - \frac{aQ^2}{b^2})}}$; é integrando se tendrá $x = A + \frac{2Q\sqrt{a}}{b} \times \sqrt{(y - \frac{aQ^2}{b^2})}$, de donde resulta ser $x - A = \frac{2Q\sqrt{a}}{b} \times \sqrt{(y - \frac{aQ^2}{b^2})}$, y $(x - A)^2 = \frac{4Q^2a}{b^2} \times (y - \frac{aQ^2}{b^2})$ equacion á la Parábola.

2°. Siendo $V:v = \sqrt{a}:\sqrt{y}$ (sup.) y $V:v = q:Q$ (514. 1°.) será $q:Q = \sqrt{a}:\sqrt{y}$; por consiguiente $q = \frac{\sqrt{a} \times Q}{\sqrt{y}}$, $\frac{1}{q^2} = \frac{y}{aQ^2}$, $\frac{2dq}{q^3} = -\frac{dy}{aQ^2}$; pero $fdy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$

(514.2°): luego será $fdy = -\frac{FLQ^2dy}{aQ^2}$, de donde $f = -\frac{FL}{a}$, esto es, la fuerza en dicha suposicion será repelente y constante.

EXEMPLO VI.

523. Sean las potencias en la razon directa de las ordenadas de la Trayectoria descrita por un cuerpo: se pide determinar la equacion de dicha curva. *Fig.* 233, 234.

Supóngase $F:f = a:y$: luego se tendrán, $f = \frac{Fy}{a}$, $fdy = \frac{Fydy}{a}$, $S.fdy = \frac{Fy^2}{2a} - \frac{Fa}{2}$, en cuya expresion es $-\frac{1}{2}Fa$ el valor de la cantidad constante que se deve añadir á la integral, porque siendo $y = a$, será $S.fdy = o$. Ahora si en la equacion (516) $dx = \frac{\sqrt{FL} \times Qdy}{\sqrt{(P^2FL - b^2 \times S.fdy)}}$ se substituye el valor hallado de $S.fdy$, se tendrá $dx = \frac{Q\sqrt{2aL} \times dy}{b \times \sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2} + a^2 - y^2)}}$

$$=\frac{Q\sqrt{2aL}}{b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}+a^2)}}\times\frac{\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}+a^2)}\times dy}{\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}+a^2-y^2)}}.$$

1°. Sea $Q\sqrt{2aL}=b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}+a^2)}$: y en esta suposicion (*Fig.* 233.) la equacion hallada anteriormente corresponderá á la curva ACP de los senos circulares, en quien las abscisas OL son iguales á los respectivos arcos circulares, y las ordenadas $LC=y$ á los correspondientes senos de los mismos arços. Y siendo $Q\sqrt{2aL}=b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}+a^2)}$, se hallará ser el espacio $L=\frac{ab^2}{2\times(Q^2-P^2)}$. Adviértase que siendo $a=o$, será $F=o$: en este caso hágase G: $f=c:y$; por consiguiente serán, $f=\frac{Gy}{c}$, $fdy=\frac{Gydy}{c}$, $S.fdy=\frac{Gy^2}{2c}$, á quien no se añade constante, porque siendo $S.fdy=o$, será $y=o$: luego en la equacion (516) $dx=\frac{Q\sqrt{GL}\times dy}{\sqrt{(P^2GL-b^2S.fdy)}}$ se substituirá el valor hallado de $S.fdy$, y se tendrá $dx=$

$$\frac{Q\sqrt{GL}\times dy}{\sqrt{(P^2GL-\frac{b^2Gy^2}{2c})}}=\frac{Q\sqrt{2cL}\times dy}{b\sqrt{(\frac{2cP^2L}{b^2}-y^2)}}.$$

2°. Si es $Q\sqrt{2aL}$ á $b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}+a^2)}$ en una razon dada, se hallará la quarta proporcional á dichos dos términos, y al valor de la referida integral, con lo que se podrá trazar la curva que se busca.

3°. Si la cantidad L es negativa, y por consiguiente son las fuerzas repelentes; la equacion á la curva será $dx = \frac{Q\sqrt{2aL}\times dy}{b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}-a^2+y^2)}}$, donde conviene distinguir los tres casos que son $\frac{2P^2L}{b^2}=a$, $\frac{2P^2L}{b^2}>a$, y $\frac{2P^2L}{b^2}<a$. Y siendo $\frac{2P^2L}{b^2}=a$, dicha equacion vendrá á ser $dx=\frac{Q\sqrt{2aL}}{b}\times\frac{dy}{y}$, que corresponde (*Fig.* 234.) á la Logarítmica AE, siendo la velocidad, con que viene arrojado el cuerpo por la tangente tirada al punto A, igual á la que tendria al fin del espacio $L=\frac{ab^2}{2P^2}$ animado el mismo cuerpo con la fuerza F. Y en el segundo caso de ser $\frac{2P^2L}{b^2}>a$, se dispondrá la equacion hallada de este modo $dx=\frac{Q\sqrt{2aL}\times\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}-a^2)}\times dy}{b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}-a^2)}\times\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2}-a^2+y^2)}}$, equacion que pertenece á la curva de los senos hiperbólicos siendo $Q\sqrt{2aL} = b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2} - a^2)}$, en cuyo caso es $L = \frac{ab^2}{2\times(P^2 - Q^2)}$, con la advertencia que siendo $a = o$, para tener la equacion á la curva que se busca se deverá seguir el método indicado en el caso 1°. de esta Proposicion: pero si es $Q\sqrt{2aL}$ á $b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2} - a^2)}$ en una razon dada, se describirá la curva por medio de la de los senos hiperbólicos con el método señalado en el caso 2°. Y finalmente si es $\frac{2P^2L}{b^2} < a$, la equacion á la curva que se busca corresponderá á la de los cosenos hiperbólicos, siendo $Q\sqrt{2aL} = b\times\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2} - a^2)}$: y si es $Q\sqrt{2aL}$ á $b\sqrt{(\frac{2aP^2L}{b^2} - a^2)}$ en una razon dada, por medio de la curva de dichos cosenos se describirá la que se busca, conforme se ha dicho en el referido caso 2°.

EXEMPLO VII.

524. Sean las potencias en la razon inversa duplicada de las ordenadas de la curva descrita por un cuerpo: se pide determinar la equacion de dicha curva.

Sea $F:f = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{y^2}$; por consiguiente se tendrán,

$$f = \frac{Fa^2}{y^2},\ fdy = \frac{Fa^2 dy}{y^2},\ \text{y}\ S.fdy = -\frac{Fa^2}{y} + Fa,$$

en cuya expresion es Fa el valor de la constante que se deve añadir á la integral, porque siendo $S.fdy = o$, es $y = a$. Ahora si en la equacion (516) $dx = \frac{\sqrt{FL} \times Q dy}{\sqrt{(P^2 FL - b^2 S.fdy)}}$ se substituye el valor hallado de $S.fdy$, se tendrá $dx = \frac{\sqrt{FL} \times Q dy}{\sqrt{(P^2 FL + \frac{b^2 Fa^2}{y} - b^2 Fa)}}$, ó bien $dx = \frac{Q\sqrt{L} \times y^{\frac{1}{2}} dy}{\sqrt{((P^2 L - b^2 a) \times y + b^2 a^2)}}$ equacion á la curva que se busca.

1°. Sea $P^2 L = b^2 a$: y en esta suposicion se tendrá $dx = \frac{Q\sqrt{L} \times y^{\frac{1}{2}} dy}{ab}$; por consiguiente $x = \frac{2}{3} Q\sqrt{L} \times \frac{y^{\frac{3}{2}}}{ab} + A$. La constante A se debe determinar de modo que supuesta $y = a$ sea $x = o$; por consiguiente se tendrá $A = -\frac{2}{3} Q\sqrt{L} \times \frac{a^{\frac{3}{2}}}{ab}$: luego será $x = \frac{2}{3} \frac{Q\sqrt{L}}{ab} \times (y^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$, de donde resulta ser $y^{\frac{3}{2}} = \frac{3ab}{2Q\sqrt{L}} \times (x + \frac{2Q\sqrt{aL}}{3b})$, equacion á la segunda

Parábola cúbica.

2°. Sea $P^2L<b^2a$; y en esta suposicion dispóngase la equacion hallada de este modo $dx = \frac{Q\surd L}{\surd(b^2a-P^2L)} \times \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\surd(\frac{b^2a^2}{b^2a-P^2L}-y)}$. Y siendo $Q\surd L = \surd(b^2a-P^2L)$, se tendrá $dx = \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\surd(\frac{b^2a^2}{b^2a-P^2L}-y)}$ equacion á la Cicloide ordinaria ACP (*Fig.* 235.) siendo la velocidad, con que viene arrojado el cuerpo por la tangente tirada al punto A, igual á la que tendria al fin del espacio $L=a$, animado el mismo cuerpo con la fuerza F. Y si es $Q\surd L$ á $\surd(b^2a-P^2L)$ en una razon dada, la equacion á la curva que se busca, corresponderá á las Cicloides prolongadas ó acortadas.

3°. Sea $P^2L>b^2a$; y en esta suposicion dispóngase la equacion hallada de este modo, $dx = \frac{Q\surd L}{\surd(P^2L-b^2a)} \times \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\surd(\frac{b^2a^2}{P^2L-b^2a}+y)} = \frac{Q\surd cL}{ab} \times \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\surd(c+y)}$, haciendo $\frac{b^2a^2}{P^2L-b^2a}=c$ para facilitar el cálculo. Ahora supóngase $\frac{\surd y}{\surd(c+y)} = \frac{z}{c}$, de donde $y = \frac{cz^2}{c^2-z^2}$; y diferenciando se tendrá $dy = \frac{2c^3zdz}{(c^2-z^2)^2}$: luego será $dx = \frac{Q\sqrt{cL}}{ab} \times \frac{2c^2z^2dz}{(c^2-z^2)^2}$; é integrando se tendrá $x = \frac{cQ\sqrt{cL}}{2ab} \times (\frac{2cz}{c^2-z^2} - S.\frac{dz}{c+z} - S.\frac{dz}{c-z})$. Si las fuerzas son repelentes, convendrá mudar el signo á la L; y en este caso la equacion á la curva, supuesta $c = \frac{b^2a^2}{P^2L+b^2a}$ será $dx = \frac{Q\sqrt{cL}}{ab} \times \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{(y-c)}}$, que se transformará por medio de la substitucion $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y-c)}} = \frac{z}{c}$ en la $dx = \frac{Q\sqrt{cL}}{ab} \times - \frac{2c^2z^2dz}{(c^2-z^2)^2}$, que difiere solo de la anterior en el signo.

PROPOSICION LII.

525. Si el cuerpo m viene arrojado desde A con la velocidad dada V, y estando animado por potencias que actuan en direcciones perpendiculares á la horizontal BL describe la curva parabólica AC, cuyo exe TF; determinar la velocidad que tendrá dicho cuerpo en qualquiera punto C del espacio corrido, y las potencias con que estará animado en su movimiento. *Fig*, 236.

Sean, F el focus, y VQ la directrix de dicha parábola. Desde el punto C tírense las perpendiculares, CE al exe VF, CW á la tangente YD en el punto C, FG á CW, y KCP y HAQ á la directrix QV. Supónganse las denominaciones y la construccion como en la Proposicion antecedente.

1°. Por la propiedad de la Parábola es (I. 545.) el ángulo $KCY = FCD$; por consiguiente el ángulo $MCK = GCF$; pero $MCK = CWF$, por ser las rectas CK y EW paralelas: luego será el ángulo $CWF = WCF$; por consiguiente se tendrá $CF = FW$, y $CG = GW$. Ahora por la semejanza de los triángulos CWE y GWF es $CW:WE = WF:WG$, y $CW:2WE = WF:CW$, de donde $CW^2 = 2EW \times WF$: luego será $\sqrt{WE}:\sqrt{2WF} = WE:CW = CM:CK$; y supuesto el parámetro de la Parábola igual á $2a$, será (I. 549) $\sqrt{a}:\sqrt{2WF} = q:b$, ó bien $\sqrt{a}:\sqrt{2CP} = q:b$, por ser $WF = FC = CP$. Con el mismo raciocinio se demostrará ser $\sqrt{a}:\sqrt{2AQ} = Q:b$: luego será $Q:q = \sqrt{CP}:\sqrt{AQ}$; pero (514. 1°.) es $V:v = q:Q$: luego será $V:v = \sqrt{AQ}:\sqrt{CP}$. Que es lo primero.

2°. Llámense, $CP = z$, y $AQ = Z$. Consta por lo demostrado anteriormente que son, $\sqrt{a}:\sqrt{2AQ} = Q:b$, y $\sqrt{a}:\sqrt{2CP} = q:b$: luego se tendrán las equaciones $\frac{1}{Q^2} = \frac{2Z}{ab^2}$, y $\frac{1}{q^2} = \frac{2z}{ab^2}$; y diferenciando esta segunda equacion, se tendrá $-\frac{dq}{q^3} = \frac{dz}{ab^2}$, ó bien $\frac{dq}{q^3} = \frac{dy}{ab^2}$, por ser $dz = -dy$; pero se ha demostrado (514. 2°.) ser $fdy = \frac{2FLQ^2 dq}{q^3}$: luego será $fdy = \frac{2FLQ^2 \times dy}{ab^2}$; y por consiguiente $f = \frac{2FLQ^2}{ab^2}$: y por ser $\frac{1}{Q^2} = \frac{2Z}{ab^2}$, será tambien $f = \frac{FL}{Z}$, esto es, la potencia f que se busca será constante, y el parámetro $2a = \frac{4Q^2Z}{b^2}$: y siendo en el movimiento de los proyectiles ó cuerpos arrojados $f = F$, será $L = Z = AQ$. Que es &c.

PROPOSICION LVI.

526. Si en el movimiento de un proyectil ó cuerpo arrojado A segun la direccion AZ inclinada á la horizontal AX, la potencia F que anima al cuerpo en A es igual á la potencia f que le anima en qualquiera punto C del espacio corrido, y si además son las direcciones de dicha potencia perpendiculares á la misma horizontal AX; determinar la Trayectoria ATX. *Fig.* 237.

Tírense las verticales HAQ, LP, y OTV por el punto O que divide por medio á la horizontal AX; córtense $AH=b$, y $AQ=L$; tírese la recta QPV paralela á la AX; considérense AI perpendicular á AZ, y HI perpendicular á AI; y nómbrense $AL=x$, $LC=y$, $AI=Q$, y $HI=P$ segun las denominaciones dadas (514). Si se substituye F en lugar de f en la fórmula (516) $dx=\frac{\sqrt{FL}\times Qdy}{\sqrt{(P^2FL-b^2\times S.fdy)}}$ se tendrá $dx=\frac{Q\sqrt{L}\times dy}{b\sqrt{(\frac{P^2L}{b^2}-y)}}$; é integrando será $x=B-\frac{2Q\sqrt{L}}{b}\times\sqrt{(\frac{P^2L}{b^2}-y)}$, de donde resulta la equacion (E) $(B-x)^2=\frac{4Q^2L}{b^2}\times(\frac{P^2L}{b^2}-y)$, equacion á la Parábola Apoloniana ATX. La constante B se determina, suponiendo $x=o$ y $y=o$, de lo qual resulta $B=\frac{2Q\sqrt{L}}{b}\times\sqrt{\frac{P^2L}{b^2}}=\frac{2QLP}{b^2}$. Por tanto será $(\frac{2QLP}{b^2}-x)^2=\frac{4Q^2L}{b^2}\times(\frac{P^2L}{b^2}-y)$: de donde resulta ser $-\frac{4QPL}{b^2}\times x+x^2=-\frac{4Q^2L}{b^2}\times y$, y (F) $\frac{4Q^2L}{b^2}\times y=\frac{4QPL}{b^2}\times x-x^2$. Y si se llama el ángulo $QAZ=A$, será $Sc.QAZ=Sc.AHI=Sc.A$, y $Cc.ZAQ=Cc.AHI=Cc.A$; por consiguiente serán, $r:Sc.A$

$= b:Q = \frac{b \times Sc.A}{r}$, y $r:Cc.A = b:P = \frac{b \times Cc.A}{r}$: luego substituyendo los valores hallados de P y Q en la equacion F, se tendrá $(G)\ \frac{4L \times (Sc.A)^2}{r^4} \times y = \frac{4L \times Sc.A \times Cc.A}{r^2} \times x - x^2$. Si en esta equacion se supone $y = o$, será la amplitud AX de la proyeccion igual á $\frac{4L \times Sc.A \times Cc.A}{r^2}$. Y si se diferencia la dicha equacion, y se supone $dy = o$, se hallará $x = \frac{2L \times Cc.A \times Sc.A}{r^2}$; y substituyendo el valor de x en la equacion G, se tendrá $y = \frac{L \times (Cc.A)^2}{r^2} = OT$. Por tanto el parámetro de la Parábola ATX será igual á $\frac{AO^2}{OT} = \frac{4L \times (Sc.A)^2}{r^2}$; pero $VT = VO - OT = \frac{L \times (Sc.A)^2}{r^2}$: luego será VT la quarta parte de dicho parámetro, y por consiguiente QV la directrix de la misma Parábola. Que es &c.

COROLARIO I.

527. Se infiere que la linea L de la velocidad correspondiente al punto A de proyeccion es igual á la distancia (*Fig.* 237) AQ del mismo punto á la directrix QV de la parábola.

COROLARIO II.

528. Siendo (II. 588.) $r \times Sc.2A = 2Cc.A \times Sc.A$, será (*Fig.* 237.) la amplitud AX ó bien $2AO = \frac{4L \times r \times Sc.2A}{2r^2}$, de donde $AO = \frac{L \times Sc.2A}{r}$, y $Sc.2A : r = AO : L$. Por tanto en el movimiento de los proyectiles ó cuerpos arrojados se determinará por medio de la proporcion anterior la linea de la velocidad, ó la mitad AO de la amplitud de la proyeccion ó bien de la longitud horizontal del tiro, ó el ángulo QAZ, si se dan los demas términos de la misma proporcion.

COROLARIO III.

529. Si la longitud AX del tiro no es horizontal (*Fig.* 238.), tírense las rectas XV y XY respectivamente paralelas á la vertical QAY y á la tangente AZV. Nómbrense, $AX = b$, y los ángulos $QAV = A$, y $VAX = B$; y serán, $Sc.QAV = Sc.AVX = Sc.A$, $Sc.VAX = Sc.B$, y $Sc.VXA = Sc.(A+B)$. En el triángulo AVX es $Sc.A : Sc.(A+B) = b : AV$; por consiguiente $AV = XY = \frac{b \times Sc.(A+B)}{Sc.A}$: y en el mismo triángulo es $Sc.A : Sc.B = b : VX$; por consiguiente $VX = AY$

$= \frac{b \times Sc.B}{Sc.A}$; pero (I. 552.) $4AQ \times AY = YX^2$: luego será $\frac{4L \times b \times Sc.B}{Sc.A} = \frac{b^2 \times (Sc.(A+B))^2}{(Sc.A)^2}$; de donde resulta ser $4L \times Sc.A \times Sc.B = b \times (Sc.(A+B))^2$; y $Sc.A \times Sc.B : (Sc.(A+B))^2 = \frac{1}{4}AX : L$, ó bien (I. 506.) $\frac{1}{2}r \times Cc.(A-B) - \frac{1}{2}r \times Cc.(A+B)$: $(Sc.(A+B))^2 = \frac{1}{4}AX : L$. Por tanto se determinará por medio de una ú otra de las proporciones halladas la linea de la velocidad L, ó la longitud AX del tiro, ó el ángulo QAV, dadas las demas cantidades de la misma proporcion. Adviértase que en el tercer caso por medio de la segunda de dichas proporciones se determinará el ángulo $A - B$; y respecto á que se supone dado el ángulo $A+B$, se hallarán los ángulos A y B, esto es, QAV y VAX.

COROLARIO IV.

530. Si se diferencia la equacion (*Fig.* 237.) $AX = \frac{4L \times Sc.A \times Cc.A}{r^2}$ en la suposicion del ángulo A variable, y su diferencial se supone igual á cero, se tendrá $Sc.A \times D.Cc.A + Cc.A \times D.Sc.A = o$: y por ser (III. 114.) $D.Cc.A = -\frac{Sc.A \times dA}{r}$, y $D.Sc.A = \frac{Cc.A \times dA}{r}$, será $-(Sc.A)^2 + (Cc.A)^2 = o$, de

donde resulta ser $Sc.A = Cc.A$, y el ángulo $QAZ = ZAX$. Por tanto la máxima amplitud AX se verifica, quando el ángulo QAZ es semirecto: luego el valor de AX será igual á $\frac{4L\times\frac{1}{2}r^2}{r^2} = 2L$, esto es, la máxima amplitud será dupla de la linea de la velocidad. Asimismo si se diferencia (*Fig.* 238.) la equacion $AX = \frac{4L\times Sc.A\times Sc.B}{(Sc.(A+B))^2}$ en la suposicion de los ángulos A y B variables, y su diferencial se supone igual á cero, se tendrá $Sc.B\times D.Sc.A + Sc.A\times D.Sc.B = o$; pero $D.Sc.A = \frac{Cc.A\times dA}{r}$, y $D.Sc.B = \frac{Cc.B\times dA}{r}$: luego será $Sc.B\times Cc.A + Sc.A\times Cc.B = o$: de donde resulta ser $\frac{Sc.A}{Cc.A} = -\frac{Sc.B}{Cc.B}$ ó bien $Tc.A = -Tc.B$, y en consequiencia el ángulo $QAZ = ZAX$. Por tanto la máxima longitud AX del tiro se verifica, quando el ángulo QAZ es mitad del ángulo QAX.

COROLARIO V.

531. Si en el caso del tiro máximo AX horizontal ú obliqüo al horizonte (*Fig.* 237, 238.) con el radio AQ se describe el arco QO que corta á la recta AX en O; será el punto O focus de la pará-

bola ATX, porque son, el ángulo $QAZ = ZAX$, y $AQ = AO$: luego baxada la perpendicular XN á la directrix QN, será $XN = XO$. En general los focus de las infinitas Parábolas, que tienen la comun directrix QN, y que pasan por el punto A, deberán quedar en la circunferencia del círculo descrito con el referido radio.

COROLARIO VI.

532. Si la longitud AR del tiro (*Fig.* 239.) horizontal ú obliqüo al horizonte es menor que el tiro máxîmo AX; el proyectil con la misma linea AQ de la velocidad podrá llegar desde A á R por dos distintas Parábolas AKR y $AK'R$, con tal que los dos ángulos QAZ y QAZ', que forma la vertical AQ con las direcciones AZ y AZ' de la fuerza de proyeccion correspondientes al tiro AR, tengan iguales diferencias con el ángulo QAL que forma la vertical AQ con la direccion AL de la fuerza de proyeccion correspondiente al tiro máxîmo AX. Tírense las rectas XN y RS perpendiculares á la directrix QN; y haciendo centro en A con el intervalo AQ descríbase el semicírculo QOT. Siendo pues $NX = XO$ (531), será $RS > RO$; por consiguiente la circunferencia del círculo descrito con el radio RS cortará el arco QFF' en dos puntos F y F',

que serán los focus de dichas Parábolas. Ahora tírense los radios AF y AF': y por ser los ángulos $FAO = F'AO$, serán iguales las diferencias, que pasan entre los ángulos QAF, QAF', y el angulo QAO, y por consiguiente iguales las diferencias entre sus mitades, esto es, entre los ángulos QAZ, QAZ', y el ángulo QAL mitad del ángulo QAX.

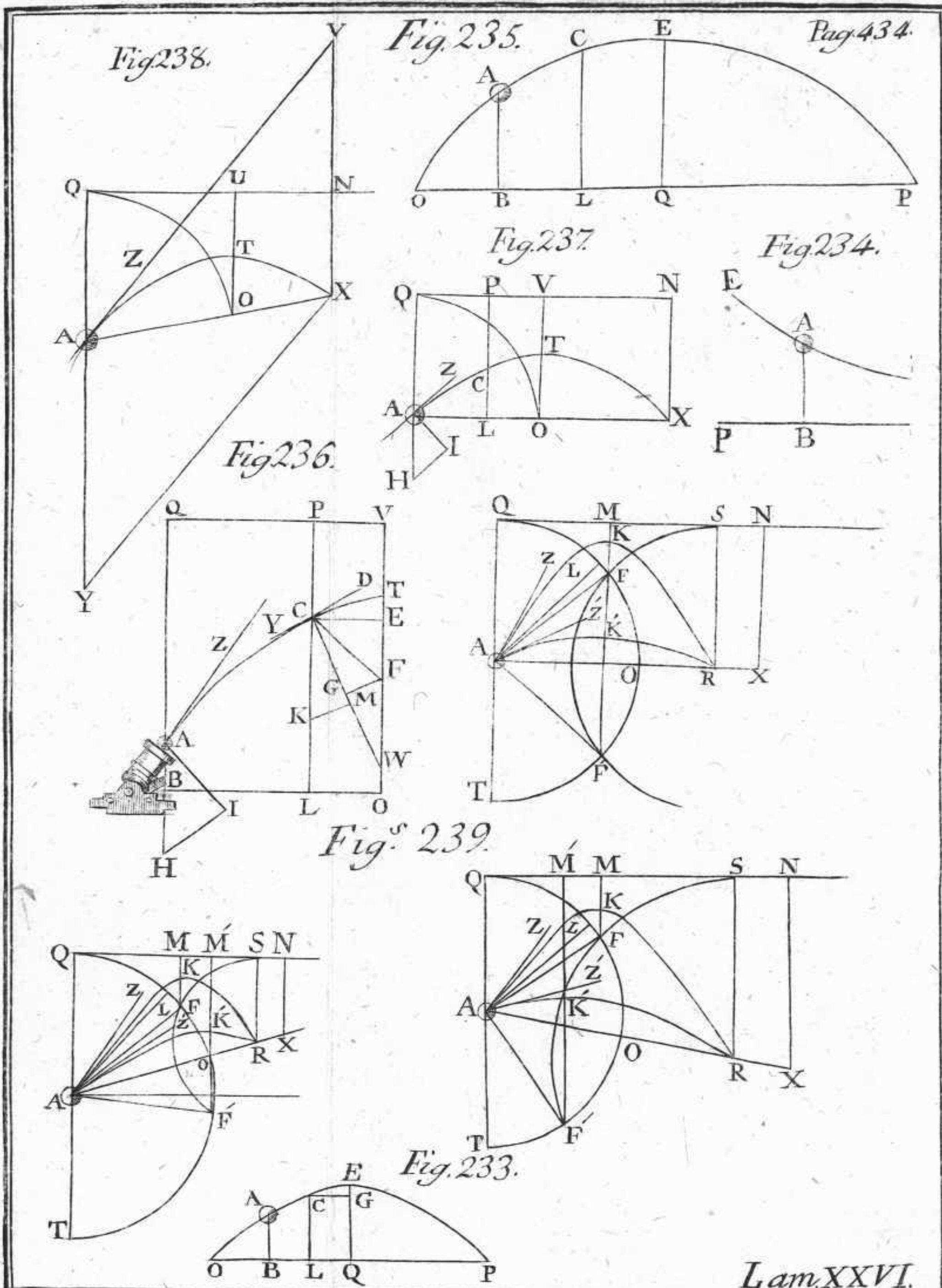
PROPOSICION LVII.

533. Si el cuerpo m sale del punto A segun la direccion AZ, y atraido del centro F de la potencia describe la Trayectoria dada AB; determinar la velocidad que tendrá dicho cuerpo en qualquiera punto C del espacio corrido, las potencias de que estará animado, y el tiempo que empleará para andar el arco AC. *Fig.* 240, 241.

Sean, la ordenada FD infinitamente próxima á la FC, el arco CE evanecente descrito con el radio FC, CG el radio R del ósculo correspondiente al punto C, CN la potencia en C dirigida al centro F, NS y FO perpendiculares á CG, AI perpendicular á la curva en el punto A, y FI perpendicular á AI. Nómbrense, $CF = y$, $CO = q$, $CN = f$, $AI = Q$, $FI = P$, $CD = ds$ elemento del arco AC, $CE = dx$, y t el tiempo en que el cuerpo corre el espacio AC; y será $CG = R = \frac{ydy}{dq}$, siendo $q = \frac{ydx}{ds}$ (III. 309).

1°. Por la semejanza de los triángulos CFO y CNS es $CF:CO = CN:CS$, esto es, $y:q = f:CS = \frac{fq}{y}$; pero (510) $CS = \frac{mv^2}{2kR} = \frac{mv^2dq}{2kydy}$: luego será $\frac{fq}{y} = \frac{mv^2dq}{2kydy}$, y por consiguiente $fdy = \frac{mv^2dq}{2kq}$; pero (438) $2kfdy = -mvdv$: luego será $-mvdv = \frac{mv^2dq}{q}$, de donde resulta ser $-\frac{dv}{v} = \frac{dq}{q}$, é integrando se tendrá $\frac{QV}{v} = q$, y por consiguiente la equacion $v = \frac{QV}{q}$ ó bien $V:v = q:Q$. Por tanto se determinará por medio de dicha equacion la velocidad del cuerpo en una curva dada. Dicha integral se hace de modo que supuesta $v = V$, sea $q = Q$.

2°. En la equacion hallada antes $fdy = \frac{mv^2dq}{2kq}$ substitúyase $\frac{QV}{q}$ en lugar de v; y se tendrá la equacion $fdy = \frac{mQ^2V^2dq}{2kq^3}$, que se podrá expresar muchas veces con utilidad de este modo $fdy = \frac{2GLQ^2dq}{q^3}$, su-


Pag.434.
Fig.238.
Fig. 235.
Fig.237.
Fig.234.
Fig.236.
Fig.^s 239.
Fig. 233.
Lam.XXVI.

puesto L aquel espacio, al fin del qual el cuerpo m animado por la potencia constante G adquiere la velocidad V, de modo que es (438) $4kGL = mV^2$; y si no es $F = o$, se supondrá $G = F$. Por tanto se determinará por medio de dicha equacion la potencia que anima al cuerpo en una curva dada.

3°. Siendo (392) $v = \frac{n \times ds}{dt}$, ó bien $dt = \frac{n \times ds}{v}$, y por lo demostrado (1°.) $v = \frac{QV}{q} = \frac{QVds}{ydx}$, se tendrá $dt = \frac{n \times ydx}{QV}$; por consiguiente $t = \frac{n \times S.ydx}{QV}$; pero (III. 215.) $\frac{1}{2} \times S.ydx = AFC$: luego el tiempo que emplea el cuerpo para correr el arco AC será proporcional con el area AFC, de suerte que los tiempos para andar los espacios AC y AB tendrán la razon de las areas AFC y AFB descritas por el radio vector, esto es, por la recta que junta el centro de las fuerzas con el punto que describe dichos espacios. Y suponiendo $V = \frac{n \times S}{T}$, será $t = \frac{T \times S.ydx}{QS}$; por consiguiente $t : T = S.ydx : QS$. Que es &c.

COROLARIO I.

534. Por ser $\frac{QV}{v} = q$ (533. 1°.) y $q = \frac{ydx}{ds}$, se

tendrá $\frac{QV}{v} = \frac{ydx}{ds}$, de donde resulta ser $Q^2V^2 \times (dx^2 + dy^2) = v^2y^2dx^2$, y $dx = \frac{VQdy}{\surd(v^2y^2 - V^2Q^2)}$: y descrito el arco circular HQq con el radio $FH = a$, y llamado el elemento $Qq = du$, se tendrá (III. 217) $dx = \frac{ydu}{a}$: luego será $\frac{ydu}{a} = \frac{VQdy}{\surd(v^2y^2 - V^2Q^2)}$; por consiguiente $\frac{du}{a} = \frac{VQdy}{y\surd(v^2y^2 - V^2Q^2)}$, y por medio de esta equacion se determinará la naturaleza de la Trayectoria que describe un cuerpo, si está dada su velocidad.

COROLARIO II.

535. Si la equacion hallada (533. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$ se integra, será $S.fdy = -\frac{FLQ^2}{q^2} + FL$. El valor FL de la constante añadida á la integral resulta de que siendo $Q = q$, será $S.fdy = o$. Ahora si en la referida equacion $S.fdy = -\frac{FLQ^2}{q^2} + FL$ se substituye $\frac{ydx}{ds}$ en lugar de q, se tendrá $S.fdy = -\frac{FLQ^2ds^2}{y^2dx^2} + FL$, de donde resulta ser $dx = \frac{Q\surd FL \times dy}{\surd(y^2 \times FL - FLQ^2 - y^2S.fdy)}$; pero $dx = \frac{ydu}{a}$: luego se-

rá $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{FL}\times dy}{y\sqrt{(y^2FL - FLQ^2 - y^2 S.fdy)}}$, y por medio de esta equacion se determinará la curva que describe un cuerpo atraido de un centro con una potencia dada.

ESCOLIO.

536. Adviértase que (533. 1°.) la equacion $2k \times fdy = -mvdv$ es la misma, asi respecto á la Figura 240, donde aumentándose la y, se disminuye la velocidad del cuerpo por ser la direccion de la potencia $C\Upsilon$ contraria á dicha velocidad, como tambien respecto á la Figura 241, donde disminuyéndose la ordenada y, se aumenta la velocidad del cuerpo por ser la direccion de la potencia $C\Upsilon$ conspirante con la velocidad del propio cuerpo, y por consiguiente $-2kfdy = mvdv$. Se añaden los exemplos siguientes para exercicio de las fórmulas dadas anteriormente, y en las Proposiciones siguientes se aplican las mismas fórmulas al movimiento de los cuerpos en las curvas cónicas.

EXEMPLO I.

537. Supóngase que el espacio corrido por el cuerpo m sea la circunferencia circular ACD, y que el centro de la potencia que atrae al mismo cuerpo sea el punto F colocado en dicha circunferen-

cia; se pide determinar la velocidad que tendrá dicho cuerpo en qualquier punto C del espacio corrido, y las potencias de que estará animado. *Fig.* 242.

1°. Tírese el radio CG, que será el radio del ósculo en el punto C; y á dicho radio báxese la perpendicular FO prolongada hasta encontrar la circunferencia en P; y finalmente tírense el diámetro FGW y la cuerda CW. Nómbrense, $CG = c$, $AF = b$. Por la semejanza de los triángulos rectángulos FOC y FCW son proporcionales $FW : FC = FC : CO$ ó bien $2c : y = y : CO$, y por consiguiente $CO = \frac{y^2}{2c}$: luego será $q = \frac{y^2}{2c}$, y $Q = \frac{b^2}{2c}$, de donde resulta ser $Q : q = b^2 : y^2$; pero (533. 1°.) $Q : q = v : V$: luego será $v : V = b^2 : y^2$, ó bien $V : v = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{y^2}$.

2°. Siendo por lo demostrado en el caso anterior $q = \frac{y^2}{2c}$, será $\frac{dq}{q^3} = \frac{8c^2 dy}{y^5}$; pero (533. 2.°) $fdy = \frac{2FLQ^2 dq}{q^3}$: luego será $fdy = 2FLQ^2 \times \frac{8c^2 dy}{y^5}$, y por consiguiente $f = \frac{16FLQ^2c^2}{y^5}$; pero $Q = \frac{b^2}{2c}$: luego será $f = \frac{4b^4FL}{y^5}$; pero siendo $F = f$, es $y = b$: luego será $L=\frac{b}{4}$; por consiguiente se tendrá $f=\frac{Fb^5}{y^5}$.

EXEMPLO II.

538. Sean, el espacio corrido por el cuerpo m la curva elíptica APT, y el centro F de la misma Elipse el centro de las potencias que atraen á dicho cuerpo: se pide determinar la velocidad que tendrá el propio cuerpo en qualquiera punto C del espacio corrido, y las potencias de que estará animado. *Fig.* 243.

1°. Supóngase que FV es el semidiámetro conjugado á AF, y que FT lo es de FC; tírense las perpendiculares AI á FV, y CO á FT; y serán $AI = Q$, $CO=q$. Nómbrense, $AF=b$, $FV=c$. Consta ser (I. 611) $AF^2+FV^2=CF^2+FT^2$; por consiguiente será $FT^2=AF^2+FV^2-CF^2$, y $FT=\sqrt{(AF^2+FV^2-CF^2)}=\sqrt{(b^2+c^2-y^2)}$; pero (I. 608) $FT\times CO=FV\times AI$ ó bien $\sqrt{(b^2+c^2-y^2)}\times q=c\times Q$: luego será $Q:q=\sqrt{(b^2+c^2-y^2}:c$; pero (533. 1°.) $Q:q=v:V$: luego será $V:v=c:\sqrt{(b^2+c^2-y^2)}$.

2°. Siendo por demostrado en el caso anterior $Q:q=\sqrt{(b^2+c^2-y^2)}:c$, será $q=\frac{cQ}{\sqrt{(b^2+c^2-y^2)}}$, de donde resulta ser $\frac{1}{q^2}=\frac{b^2+c^2-y^2}{c^2Q^2}$, $\frac{dq}{q^3}=\frac{ydy}{c^2Q^2}$; pero

(533. 2°.) $f\,dy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$: luego será $f\,dy =$ $2FLQ^2 \times \frac{ydy}{c^2Q^2}$, y por consiguiente $f = \frac{2FLy}{c^2}$; pero siendo $f = F$, es $y = b$: luego será $L = \frac{c^2}{2b}$; por consiguiente se tendrá $f = \frac{Fy}{b}$. Adviértase que se hallan las mismas propiedades en la Hipérbola con la diferencia que su centro no atrae al cuerpo, sino le repele.

EXEMPLO III.

539. Sean las velocidades en la razon inversa de las distancias del cuerpo al centro de la potencia; se pide determinar la equacion á la Trayectoria que describe, y las potencias que detienen en ella á dicho cuerpo.

1°. Supóngase ser $V : v = \frac{1}{b} : \frac{1}{y}$; y por ser (533. 1°.) $V : v = q : Q$, será $q : Q = \frac{1}{b} : \frac{1}{y}$; por consiguiente $\frac{Q}{b} = \frac{q}{y}$; pero es $q = \frac{ydx}{ds}$: luego será $\frac{Q}{b} = \frac{dx}{ds}$ equacion á la Espiral logarítmica. Si es recto el ángulo de proyeccion, será $Q = b$; por consiguiente $ds = dx$, esto es, la curva que se busca será la circunferencia del círculo cuyo radio es b.

2°. Siendo por lo demostrado en el caso anterior $q : Q = \frac{1}{b} : \frac{1}{y}$, será $q = \frac{Qy}{b}$, $\frac{1}{q^2} = \frac{b^2}{Q^2y^2}$, $\frac{dq}{q^3} = \frac{b^2dy}{Q^2y^3}$;

pero es (533. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2dq}{q^3}$: luego será $fdy = 2FLQ^2 \times \frac{b^2dy}{Q^2y^3}$, y por consiguiente $f = \frac{2FLb^2}{y^3}$; pero siendo $f = F$, es $y = b$: luego será $L = \frac{1}{2}b$, y por consiguiente $f = \frac{Fb^3}{y^3}$.

EXEMPLO IV.

540. Supónganse las velocidades en la razon inversa de las distancias, elevadas á la potestad n, del cuerpo al centro F de la potencia; se pide determinar la equacion á la Trayectoria, y la potencia que detiene en ella á dicho cuerpo. *Fig.* 244, 245, 246.

1°. Sea $V : v = \frac{1}{b^n} : \frac{1}{y^n}$; y por ser (533. 1°.) $V : v = q : Q$, será $q : Q = \frac{1}{b^n} : \frac{1}{y^n}$; por consiguiente $\frac{Q}{b^n} = \frac{q}{y^n}$; pero $q = \frac{ydx}{ds}$: luego será $\frac{Q}{b^n} = \frac{ydx}{y^nds}$, de donde resulta ser $Q^2y^{2n-2} \times (dx^2 + dy^2) =$

$b^{2n}dx^2$, $Q^2y^{2n-2}dy^2 = b^{2n}dx^2 - Q^2y^{2n-2}dx^2$, y $dx = \pm \frac{Qy^{n-1}dy}{(b^{2n}-Q^2y^{2n-2})}$; pero $dx = \frac{ydu}{a}$: luego será $\pm \frac{Qy^{n-1}dy}{\sqrt{(b^{2n}-Q^2y^{2n-2})}} = \frac{ydu}{a}$, y (A) $\frac{du}{a} = \pm \frac{Qy^{n-2}dy}{\sqrt{(b^{2n}-Q^2y^{2n-2})}}$. Ahora en la equacion hallada supóngase $dy = o$; y se tendrá $b^{2n} - Q^2y^{2n-2} = o$, de donde resulta ser $y = \frac{b^{\frac{n}{n-1}}}{Q^{\frac{1}{n-1}}}$: luego la máxîma ó mínima ordenada de la curva expresada por dicha equacion será (III. 281.) igual á $\frac{b^{\frac{n}{n-1}}}{Q^{\frac{1}{n-1}}}$, cuya cantidad se supone igual al radio a, y por consiguiente será $b^{2n} = a^{2n-2}Q^2$; y substituyendo el valor b^{2n} en la equacion A, se tendrá $\frac{du}{a} = \pm \frac{y^{n-2}dy}{\sqrt{(a^{2n-2}-y^{2n-2})}}$. Hágase la substitucion $t = \frac{y^{n-1}}{a^{n-2}}$, con lo que resultarán las equaciones $\frac{-adt}{(n-1)\times\sqrt{(a^2-t^2)}} = du$, y $\frac{-adt}{(1-n)\times\sqrt{(a^2-t^2)}} = du$: luego integrando la primera de dichas dos equaciones en el caso de ser $n > 1$ (*Fig.* 244.), se tendrá que $(n-1)\times(u+A)$, ó bien $(n-1)\times s$, es igual al arco que tiene el radio a y el coseno t, esto es, $Cc.(n-1)\times s = t$, en cuya expresion es por la substitucion $t = \frac{y^{n-1}}{a^{n-2}}$, de donde resulta ser $y = t^{\frac{1}{n-1}} \times a^{\frac{n-2}{n-1}}$. Para determinar la constante A adviértase que siendo $u = o$, será $y = b$, y por consiguiente $t = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$. Con el radio $FS = a$ descríbase el círculo $PS2Y$; córtese en qualquiera radio FB la parte $FN = \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$; levántese la perpendicular NM sobre dicho radio FB; y haciendo $MB : MK = n-1 : 1$, se tendrá $MK = A$. Supóngase que el cuerpo m viene arrojado desde A segun la direccion AZ, y que es $n > 2$: y tomado el arco $SP = MK$, será el arco $PY = u + A = s$: luego tomado el arco $PT = (n-1)\times PY = (n-1)\times s$, y tirada la perpendicular TV al radio FP, será $FV = t$; por consiguiente en el punto P será $t = a$, de donde resulta ser $y = t^{\frac{1}{n-1}} \times a^{\frac{n-2}{n-1}} = a$, de modo que por el punto P pasará la Trayectoria que tendrá la ordenada máxima PF por ser en los demas puntos el coseno $t < a$:

y si en el radio FY se corta la parte $FC = FV^{n-1} \times a^{\frac{n-2}{n-1}}$, estará el punto C en la curva. Adviértase que siendo $(n-1) \times P2Y = P2T$ quadrante, será $t = o$, y por consiguiente $y = o$; y que siendo $dx = -\frac{Qy^{n-1}dy}{\sqrt{(b^{2n} - Q^2y^{2n-2})}}$, en la suposicion de $y = o$ será $dx : dy = o : b^n$, y por consiguiente la recta $2YFk$ será tangente á la curva en F, de modo que llegando el cuerpo al punto F seguirá la direccion Fk por estar su velocidad y la potencia en la misma recta; y finalmente que si se arroja el cuerpo por la direccion contraria Az, describirá la curva APF, y el ramo PcF será igual y semejante al ramo PCF. Y en la suposicion que sea n menor que 2, y mayor que 1, se tendrá la equacion $(n-1) \times (u + A)$ igual al arco que tiene el radio a, y el coseno $t = a^{2-n} \times y^{n-1}$, de donde $y = \frac{t^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{2-n}{n-1}}}$. Por tanto la construccion del presente caso difiere de la anterior, en que el arco PT (*Fig.* 245.) que se hace igual á $(n-1) \times PY$, es menor que PY: luego la tangente $F2Y$ á la curva en F cortará el arco $P2Y$ mayor que el quadrante

$P2T$, de modo que el ramo ACF antes de llegar al centro F da mas vuelta al rededor de él á proporcion que se disminuye el número $n-1$. Y finalmente en la suposicion que sea $n<1$, se tendrá la equacion $(1-n)\times(u+A)$ igual al arco que tiene el radio a, y el coseno $t=\frac{a^{2-n}}{y^{1-n}}$, de donde $y=\frac{a^{\frac{2-n}{1-n}}}{t^{\frac{1}{1-n}}}$: y en este caso se hallará con el raciocinio expuesto en los dos casos anteriores, que la curva PAC (*Fig.* 246.) tiene la mínima ordenada $FP=a$, de modo que queda toda fuera del círculo. Por lo demas, si es $n-1$ número entero y positivo, se determinará la equacion á la curva PCF (*Fig.* 244.) del modo siguiente. Nómbrense, $FV=x$, $VC=z$, el arco $PY=s$, $FC=y=\sqrt{(x^2+z^2)}$, y tírese la perpendicular YR al radio PF. Consta (II. 584.) que es $Cc.(n-1)\times s=\frac{(Cc.s+\sqrt{-1}\times Sc.s)^{n-1}+(Cc.s-\sqrt{-1}\times Sc.s)^{n-1}}{2a^{n-2}}$; pero es $y:x=a:FR$, de donde $FR=Cc.s=\frac{ax}{y}$, y $YR=Sc.s=\sqrt{(a^2-\frac{a^2x^2}{y^2})}=\frac{az}{y}$: luego $Cc.(n-1)\times s=\frac{a}{2y^{n-1}}\times((x+z\sqrt{-1})^{n-1}+(x-z\sqrt{-1})^{n-1})$;

pero $Cc.(n-1)\times s = t = \frac{y^{n-1}}{a^{n-2}}$: luego $(D)\, y^{2n-2}$ $= \frac{1}{2}a^{n-1}\times((x+\sqrt{-1}\times z)^{n-1}+(x-\sqrt{-1}\times z)^{n-1})$ equacion á la curva. Si es $n=2$, será y^2 ó bien x^2+z^2 $= ax$ equacion al círculo, en cuya periferia se halla el centro F de la potencia. Y si n es número entero y negativo, se dispondrá la equacion D del modo siguiente, $\frac{1}{y^{2+2n}} = \frac{1}{2\times a^{1+n}}\times\left(\frac{1}{(x+\sqrt{-1}\times z)^{n+1}}+\frac{1}{(x-\sqrt{-1}\times z)^{n+1}}\right)$, de donde resulta ser $\frac{1}{y^{2+2n}} = \frac{1}{2\times a^{1+n}}\times$ $\frac{(x-\sqrt{-1}\times z)^{n+1}+(x+\sqrt{-1}\times z)^{n+1}}{(x^2+z^2)^{n+1}}$; pero $x^2+z^2=y^2$, y $y^{2n+2}=(x^2+z^2)^{n+1}$: luego será $2\times a^{n+1}$ $=(x-\sqrt{-1}\times z)^{n+1}+(x+\sqrt{-1}\times z)^{n+1}$. Además, si n es una fraccion positiva, se substituirá $\frac{n}{m}$ en lugar de n; y se tendrán, el arco $PT = \frac{n-m}{m}\times P\Upsilon$,

$m\times PT = (n-m)\times P\Upsilon$, $Cc.PT = \frac{y^{\frac{n-m}{m}}}{a^{\frac{n-2m}{m}}}$, $Sc.PT$ $= \frac{\sqrt{\left(a^{\frac{2n-2m}{m}} - y^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}}{a^{\frac{n-2m}{m}}}$: luego será $Cc.m\times PT =$

$$\frac{1}{2a^{n-m-1}}\times\left(\left(y^{\frac{n-m}{m}}+\sqrt{-1}\times\sqrt{\left(a^{\frac{2n-2m}{m}}-y^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}\right)^m\right.$$

$$\left.+\left(y^{\frac{n-m}{m}}-\sqrt{-1}\times\sqrt{\left(a^{\frac{2n-2m}{m}}-y^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}\right)^m\right),$$

$Cc.(n-m)\times PY=\frac{a}{2y^{n-m}}\times\left((x+z\sqrt{-1})^{n-m}\right.$ $\left.+(x-z\sqrt{-1})^{n-m}\right)$; pero $Cc.m\times PT=Cc.(n-m)\times PY$: luego será $(E)\,y^{n-m}\times\left(\left(y^{\frac{n-m}{m}}+\sqrt{-1}\times\sqrt{\left(a^{\frac{2n-2m}{m}}-y^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}\right)^m+\left(y^{\frac{n-m}{m}}-\sqrt{-1}\times\sqrt{\left(a^{\frac{2n-2m}{m}}-y^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}\right)^m\right)=a^{n-m}\times\left((x+z\sqrt{-1})^{n-m}+(x-z\sqrt{-1})^{n-m}\right)$. Y si n es menor que m, la equacion E se dispondrá de este modo, $\frac{1}{y^{m-n}}\times$

$$\left(\left(\frac{1}{y^{\frac{m-n}{m}}}+\sqrt{-1}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a^{\frac{2m-2n}{m}}}-\frac{1}{y^{\frac{2m-2n}{m}}}\right)}\right)^m+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{y^{\frac{m-n}{m}}}-\sqrt{-1}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a^{\frac{2m-2n}{m}}}-\frac{1}{y^{\frac{2m-2n}{m}}}\right)}\right)^m\right)$$

$= \frac{1}{a^{m-n}} \times \left(\frac{1}{(x + z\sqrt{-1})^{m-n}} + \frac{1}{(x - z\sqrt{-1})^{m-n}} \right)$, donde

$$\frac{1}{y^{2m-2n}} \times \left(\left(a^{\frac{m-n}{m}} + \sqrt{-1} \times \sqrt{\left(y^{\frac{2m-2n}{m}} - a^{\frac{2m-2n}{m}}\right)}\right)^m \right.$$

$$\left. + \left(a^{\frac{m-n}{m}} - \sqrt{-1} \times \sqrt{\left(y^{\frac{2m-2n}{m}} - a^{\frac{2m-2n}{m}}\right)}\right)^m \right) =$$

$\frac{(x - z\sqrt{-1})^{m-n} + (x + z\sqrt{-1})^{m-n}}{(x^2 + z^2)^{m-n}}$; pero es $x^2 + z^2 = y^2$:

luego será $\left(a^{\frac{m-n}{m}} + \sqrt{-1} \times \sqrt{\left(y^{\frac{2m-2n}{m}} - a^{\frac{2m-2n}{m}}\right)}\right)^m$

$$+ \left(a^{\frac{m-n}{m}} - \sqrt{-1} \times \sqrt{\left(y^{\frac{2m-2n}{m}} - a^{\frac{2m-2n}{m}}\right)}\right)^m =$$

$(x - z\sqrt{-1})^{m-n} + (x + z\sqrt{-1})^{m-n}$. Con el mismo método se hallará la equacion á la curva, si se supone que el número n es fraccion negativa.

2°. Siendo (sup.) $V : v = \frac{1}{b^n} : \frac{1}{y^n}$, y (533. 1°.) $V : v = q : Q$, se tendrá $q : Q = \frac{1}{b^n} : \frac{1}{y^n}$; por consiguiente $q = \frac{Qy^n}{b^n}$, y $\frac{dq}{q^3} = \frac{nl^{2n}dy}{Q^2 \times y^{2n+1}}$; pero (533. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2 dq}{q^3}$: luego será $fdy = 2FLQ^2 \times \frac{nl^{2n}dy}{Q^2 \times y^{2n+1}}$, y por consiguiente $f = \frac{2nb^{2n}FL}{y^{2n+1}}$; pero siendo $f = F$, es $y = b$: luego será $L = \frac{b}{2n}$; por consiguiente $f = \frac{F \times b^{2n+1}}{y^{2n+1}}$.

EXEMPLO V.

541. Si el centro C atrae á un cuerpo en razon directa de las distancias, y dicho cuerpo sale desde A por qualquier direccion AZ obliqüa al radio vector AC con una velocidad dada; se pide determinar la Trayectoria $ALGE$ que describe dicho cuerpo. *Fig.* 247.

Sea $F : f = b : y$, y por consiguiente $f = \frac{Fy}{b}$, $fdy = \frac{Fydy}{b}$; é integrando será $S.fdy = \frac{Fy^2}{2b} - \frac{Fb}{2}$. La cantidad $-\frac{1}{2}Fb$ es el valor de la constante que se debe añadir á la integral, para que ésta se desvanezca siendo $y = b$. Ahora substitúyase el valor de dicha integral en la fórmula general (535) $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{FL} \times dy}{y\sqrt{(FLy^2 - FLQ^2 - y^2 \times S.fdy)}}$; y se tendrá la equacion $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{(2bL)} \times dy}{y\sqrt{(b \times (2L \times b) \times y^2 - 2bLQ^2 - y^4)}}$. Hágase la substitucion

$\sqrt{(A+By^2)}=yz$, en quien A y B son cantidades arbitrarias y constantes, y se transformará en $\frac{du}{a}=$

$\frac{Q\sqrt{(2bL)}\times -zdz}{\sqrt{(bA\times(2L+b)\times(z^2-B)-2bLQ^2\times(z^2-B)^2-A^2)}}$. Siendo A cantidad arbitraria supóngase igual á $2bLQ^2$, y partiendo los dos términos del segundo miembro de la equacion antecedente por $Q\sqrt{(2bL)}$ será $\frac{du}{a}=$

$\frac{-zdz}{\sqrt{(b\times(2L+b)\times(z^2-B)-(z^2-B)^2-2bLQ^2)}}=$

$\frac{-zdz}{\sqrt{(b\times(2L+b)\times z^2+2Bz^2-z^4-bB\times(2L+b)-B^2-2bLQ^2)}}$.

Tambien por ser B cantidad arbitraria, supóngase $-bB\times(2L+b)-B^2-2bLQ^2=o$, y resuelta esta equacion será $B=\frac{-b\times(2L+b)+\sqrt{(bb\times(2L+b)^2-8bLQ^2)}}{2}$ cuyo valor siempre es real, porque el seno Q no puede ser mayor que el radio b. Luego supuesta B igual al valor hallado, será $\frac{du}{a}=\frac{-zdz}{\sqrt{(b\times(2L+b)\times z^2+2Bz^2-z^4)}}$

$=\frac{-dz}{\sqrt{(b\times(2L+b)+2B-z^2)}}$; por consiguiente $du=$

$\frac{-adz}{\sqrt{(b\times(2L+b)+2B-z^2)}}$. Como a es un radio qualquiera, hágase $a=\sqrt{(b\times(2L+b)+2B)}=\sqrt[4]{(bb\times}$

$(2L+b)^2 - 8bLQ^2)$, y será $du = \frac{-adz}{\sqrt{(aa-zz)}}$; por consiguiente $z = Cc.(u+C)$, siendo C la constante que se debe añadir á la integral. Por ser $zy = \sqrt{(A+By^2)}$, será $z = \frac{\sqrt{(A+By^2)}}{y}$ igual á la expresion $\frac{\sqrt{(2bLQ^2-(2bL+b^2-a^2)\times\frac{1}{2}y^2)}}{y}$: luego se tendrá la equacion $\frac{\sqrt{(2bLQ^2-(2bL+b^2-a^2)\times\frac{1}{2}y^2)}}{y} = Cc.(u+C)$. La constante C se determinará suponiendo $u = o$, quando $y = b$; por consiguiente $Cc.C = \sqrt{(\frac{2LQ^2}{b} - \frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2))}$. Esto supuesto, hágase centro en C y con el intervalo $CM = a$ descríbase el semicírculo MQN; tómese $CB = \sqrt{(\frac{2LQ^2}{b} - \frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2))}$; y tirada la perpendicular BH, será el arco $MH = C$. Tomando ahora qualquier otro arco $QH = u$, y baxando la perpendicular QK sobre CM, será $CK = Cc.(u+C) = z$. Siendo $z = \frac{1}{y}\sqrt{(2bLQ^2 - \frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2)\times y^2)}$, será $y = \frac{Q\sqrt{(2bL)}}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2))}}$; por consiguiente prolongada CQ de suerte que $CL = \frac{Q\sqrt{2bL}}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2))}}$ estará el punto L en la curva. Báxese la perpendicular LT al radio CM prolongado por ambas partes; y llámense la abscisa $CT = p$, la ordenada $TL = q$. Por la semejanza de los triángulos CKQ, CTL son proporcionales las cantidades $CQ : CK = CL : CT$, esto es a: $\frac{\sqrt{(2bLQ^2 - \frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2)\times y^2)}}{y} = y : p$; de donde $ap = \sqrt{(2bLQ^2 - \frac{1}{2}(2bL+b^2-a^2)\times y^2)}$; pero es $y^2 = p^2 + q^2$: luego se tendrá $q^2 = \frac{2bL+b^2+a^2}{2bL+b^2-a^2} \times \left(\frac{4bLQ^2}{2bL+b^2+a^2} - p^2\right)$ que pertenece á la Elipse, cuyos semiexes $CD = \frac{2Q\sqrt{(bL)}}{\sqrt{(2bL+b^2+a^2)}}$, $CG = \frac{2Q\sqrt{(bL)}}{\sqrt{(2bL+b^2-a^2)}}$: luego la curva descrita por el cuerpo es una Elipse Apoloniana, qualquiera que sea el ángulo CAZ.

EXEMPLO VI.

542. Sea la potencia en la razon inversa triplicada de las distancias del cuerpo al centro de la misma potencia; se pide determinar la Trayectoria que describirá dicho cuerpo. *Fig.* 248 ... 251.

Supóngase $F : f = \frac{1}{b^3} : \frac{1}{y^3}$: luego se tendrán las equaciones $f = \frac{Fb^3}{y^3}$, $fdy = \frac{Fb^3dy}{y^3}$, y $S.fdy = -\frac{Fb^3}{2y^2}$

$+\frac{Fb}{2}$: esta integral se toma de modo que desvanezca mientras sea $y = b$. Ahora substitúyase en la fórmula $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{FL} \times dy}{y\sqrt{(y^2 FL - FLQ^2 - y^2 \times S.fdy)}}$ (535) el valor hallado de la $S.fdy$; y se tendrá que la equacion á la curva que se busca es $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(2L-b)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{(y^2 + \frac{b^3 - 2Q^2L}{2L-b})}}$.

Hágase $dy = o$ para determinar la máxima ó mínima ordenada y de dicha curva; con lo que se tendrá $y^2 + \frac{b^3 - 2Q^2L}{2L-b} = o$, de donde $y = \sqrt{\frac{2Q^2L - b^3}{2L-b}}$; y substituyendo este valor en lugar de a, se tendrá que la equacion á dicha curva es $du = \frac{Q\sqrt{2L}}{a\sqrt{(2L-b)}} \times \frac{a^2 dy}{y\sqrt{(y^2 - a^2)}}$. Si las potencias son repelentes en la misma razon, se tendrá la equacion á la curva mudando el signo á la cantidad L en la expresion anterior, de modo que será $du = \frac{Q\sqrt{2L}}{a\sqrt{(2L+b)}} \times \frac{a^2 dy}{y\sqrt{(y^2 - a^2)}}$: luego para el uno y el otro caso de las referidas potencias valdrá la equacion (A) $du = \frac{Q\sqrt{2L}}{a \times \sqrt{(2L \mp b)}} \times \frac{a^2 dy}{y\sqrt{(y^2 - a^2)}}$, siendo $a = \sqrt{\frac{2Q^2L \mp b^3}{2L \mp b}}$.

1°. Sea $b^3 < 2Q^2L$, y $b < 2L$ en el caso de las potencias atraentes: y por ser $a = \sqrt{\frac{2Q^2L \mp b^3}{2L \mp b}}$, se tendrá que respecto á las potencias atraentes es $a \times \sqrt{(2L - b)} < Q\sqrt{2L}$, y que respecto á las potencias repelentes es $a \times \sqrt{(2L + b)} > Q\sqrt{2L}$. Consta que (III. 141.) la integral de $\frac{a^2 dy}{y\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ es un arco de círculo, que tiene la secante y, y el radio a: luego será $u + C = \frac{Q\sqrt{2L}}{a\sqrt{(2L \mp b)}} \times s$, siendo $Sec. s = y$, y el radio $= a$. Por tanto si con el radio $FQ = a$ se describe (*Fig.* 248.) el círculo $LPHR$, y tomada la secante $FB = b$ se tira la tangente BH á dicho círculo, y si se forma la proporcion $a\sqrt{(2L \mp b)}$: $Q\sqrt{2L} = Hm : HM$; será el arco HM igual á la constante C que se debe añadir á la integral de la equacion A; advirtiendo que será $Hm < HM$ en el caso de las potencias atraentes, y que en él de las repelentes se tendrá $Hm > HM$. Ahora si el cuerpo viene arrojado desde A á la distancia $AF = b$ del centro F de la potencia, se tomarán los arcos $KL = HM$, se tirarán las rectas Pr y Lc perpendiculares al radio LF, se tomará qualquier arco $LQ = u + C$, y se formará la proporcion $HM : Hm = LQ : Lq$ que será menor que LQ en el caso de las potencias atraentes, se tirará la secante Fqc del arco Lq; y tirada entonces por los puntos F y Q la recta $FC = Fc$, estará el punto C en la curva que se busca. Es evidente que el punto A se halla en la misma curva, porque son, $LK = HM$, y $FA = b = FB$. Adviértase que si es $HM : Hm = LR : Lr$ quadrante; la recta Fr irá al infinito por ser infinita la secante de dicho quadrante; y tiradas las rectas, FT perpendicular á FR é igual á $\frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(2L-b)}}$, y TS paralela á FR, será (III. 296) TS la asíntota de dicha curva.

2°. En la suposicion de las potencias atraentes sea $b^3 = 2Q^2L$ (*Fig.* 249.); y por ser $Q^2 < b^2$, será $2L > b$: luego la equacion general á la curva $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(2L-b)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{\left(y^2 + \frac{b^3 - 2Q^2L}{2L-b}\right)}}$ se convertirá en la $\frac{du}{b} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(2L-b)}} \times \frac{dy}{y^2}$ tomado el radio $a = b$; é integrando se tendrá $u = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(2L-b)}} - \frac{bb\sqrt{b}}{\sqrt{(2L-b)}} \times \frac{1}{y}$, de donde resulta ser $bb\sqrt{b} = (b\sqrt{b} - u\sqrt{(2L-b)}) \times y$; y haciendo $b\sqrt{b} - u\sqrt{(2L-b)} = \sqrt{(2L-b)} \times x$, se tendrá que la equacion á la curva que se busca en la referida suposicion $xy = \frac{bb\sqrt{b}}{\sqrt{(2L-b)}}$ que corresponde á la Espiral Hiperbólica. Con el radio $FA = b$ descríbase el círculo RQA; tómese el arco $AR = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{(2L-b)}}$; y siendo $AQ = u$, será $RQ = x$. Prolónguese el radio FQ hasta C, de modo que sea $FC \times RQ = FR \times RA$; y el punto C así determinado estará en dicha curva, como tambien el punto A de proyeccion. Y levantada la perpendicular FH sobre el radio FR en el punto F, cortada $FH = AR$, y tirada HK paralela á FR, será HK asíntota de la misma curva (III. 296).

3°. En la referida suposicion de las potencias atraentes sea $b^3 > 2Q^2L$; lo qual puede suceder, ya sea $b = 2L$, ya sea $b > 2L$, ó ya $b < 2L$.

Si es $b = 2L$, la equacion general á la curva $\frac{du}{a}$

$$= \frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(2L-b)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{(y^2 + \frac{b^3-2Q^2L}{2L-b})}}$$ se convertirá en la

$\frac{du}{a} = \frac{Qdy}{y\sqrt{(b^2-Q^2)}}$; pero es $du = \frac{adx}{y}$: luego será dx

$= \frac{Qdy}{\sqrt{(b^2-Q^2)}}$ equacion á la Espiral logarítmica.

Si es $b > 2L$, la equacion general á la curva se dispondrá de este modo $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(b-2L)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{(\frac{b^3-2Q^2L}{b-2L}-y^2)}}$; y haciendo $\frac{b^3-2Q^2L}{b-2L} = n^2$, $\frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(b-2L)}} = m$, se tendrá $\frac{du}{a} = \frac{mdy}{y\sqrt{(n^2-y^2)}}$. Ahora hágase la substitucion $t = \frac{n\sqrt{(n^2-y^2)}}{y}$, de donde resulta ser $y = \frac{n^2}{\sqrt{(n^2+t^2)}}$, $dy = -\frac{n^2tdt}{(t^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$, y $y\sqrt{(n^2-y^2)} = \frac{n^3t}{n^2+t^2}$; y por medio de estas expresiones se transformará la equacion á la curva en la $\frac{du}{a} = -\frac{mdt}{n\times\sqrt{(n^2+t^2)}}$, ó bien $du = -\frac{mdt}{\sqrt{(n^2+t^2)}}$ supuesto $a = n$; é integrando se tendrá $A-u = \frac{m}{n^2} \times S.\frac{n^2dt}{\sqrt{(n^2+t^2)}}$; por consiguiente será $\frac{n}{2}\times(A-u)$: $S.\frac{n^2dt}{2\sqrt{(n^2+t^2)}} = m:n$. Con el radio $FB = n$ (*Fig.* 250.) descríbanse el círculo BQB y la hipérbola equilátera BM; báxese la recta HM perpendicular al exe de dicha hipérbola; y nombrada $HM = t$, será el sector $BFM = S.\frac{n^2dt}{2\sqrt{(n^2+t^2)}}$ (III. 209. 2.°): luego

mmm

si se forma la proporcion $n : m = BFM : BFQ$, será $BFQ = \frac{n}{2} \times (A - u)$; y tirada la tangente ML al punto M de dicha hipérbola, será $FL = \frac{n^2}{\sqrt{(n^2 + t^2)}}$, y cortada $FC = FL$, será $FC = y$, esto es, el punto C estará en la curva que se busca. Es evidente que el radio FB es la máxima ordenada de la misma curva, y que ésta da infinitas vueltas al rededor del centro F. Téngase presente que la determinacion de la constante A añadida á la integral debe hacerse de modo que siendo $u = o$, sea $y = b$, y por consiguiente $t = \frac{n\sqrt{(n^2 - b^2)}}{b}$. Si es $b < 2L$, en la equacion á la curva $\frac{du}{a} = \frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(2L - b)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{(y^2 + \frac{b^3 - 2Q^2 L}{2L - b})}}$ háganse las substituciones $\frac{b^3 - 2Q^2 L}{2L - b} = n^2$, $\frac{Q\sqrt{2L}}{\sqrt{(2L - b)}} = m$, y $t = \frac{n\sqrt{(n^2 + y^2)}}{y}$, de donde resulta ser $y = \frac{n^2}{\sqrt{(t^2 - n^2)}}$; y por medio de dichas substituciones se logrará tener la equacion á la curva, cuya equacion reducida á proporcion dará $\frac{n}{2} \times (A - u) : S. \frac{n^2 dt}{2\sqrt{(t^2 - n^2)}} = m : n$. Por tanto con el semidiámetro $FB = n$ (*Fig.* 251.)

descríbanse el círculo BQB y la hipérbola equilátera BM; tírese la ordenada MH al exe FH de dicha hipérbola; y nombrada $FH = t$, será (III. 209. 1°.) el sector hiperbólico $BFM = S. \frac{n^2 dt}{2\sqrt{(t^4 - n^4)}}$: luego haciendo $n : m = BFM : BFQ$, será $BFQ = \frac{n}{2} \times (A - u)$; y tirada la tangente MT al punto M de dicha hipérbola, la recta FT perpendicular á FH será igual á $\frac{n^2}{\sqrt{(t^4 - n^2)}}$; por consiguiente cortada $FC = FT$, estará el punto C en la curva, que tiene por asíntota la recta HK paralela al exe FH con la distancia $FH = m$, y que da infinitas vueltas al rededor del centro F de la potencia.

PROPOSICION LVIII.

543. Supóngase que la seccion cónica AC, que tiene el vértice V y el focus F, es el espacio corrido por el cuerpo m, y que dicho focus F es el centro de la potencia que atrae al mismo cuerpo; se pide determinar la velocidad que tendrá en qualquier punto C del espacio corrido, y la potencia de que estará animado. *Fig.* 252.

1°. Sean, XW la directrix (548) de la referida seccion cónica, CX tangente á ella en el punto C,

CO perpendicular á CX, CZ perpendicular al exe FP, FVP y CW perpendiculares á XW, FO perpendicular á CO; y tírense las rectas FX y FW. Nómbrense, $FV = g$, y $VP = e$. Por la propiedad de dicha directrix es $FV : VP = FC : CW$, ó bien

$g : e = y : CW$, de donde resulta ser $CW = \frac{ey}{g} = hy$,

haciendo $\frac{e}{g} = h$ para facilitar el cálculo, $FZ = g + e - hy$, $FZ^2 = h^2y^2 - 2h \times (g+e) \times y + (g+e)^2$, ZC^2 ó bien $PW^2 = y^2 - h^2y^2 + 2h \times (g+e) \times y - (g+e)^2$, y $FW = \sqrt{(y^2 - h^2y^2 + 2h \times (g+e) \times y)}$. Asimismo por otra propiedad de la referida directrix será el ángulo $XWF = XCF$; pero el ángulo $XCF = CFO$: luego se tendrá $XWF = CFO$, y por consiguiente los triángulos rectángulos FPW y FOC serán semejantes, y en ellos será $FW : FP = FC : CO$, ó bien $\sqrt{(y^2 - h^2y^2 + 2h \times (g+e) \times y)} : g + e = y : q$, de donde resultan las equaciones $q = \frac{g \times \sqrt{(g+e)} \times \sqrt{y}}{\sqrt{(g-e)} \times \sqrt{(y + \frac{2eg}{g-e})}}$, $Q =$

$\frac{g \times \sqrt{(g+e)} \times \sqrt{b}}{\sqrt{(g-e)} \times \sqrt{(b + \frac{2eg}{g-e})}}$, y $Q : q = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(b + \frac{2eg}{g-e})}}$:

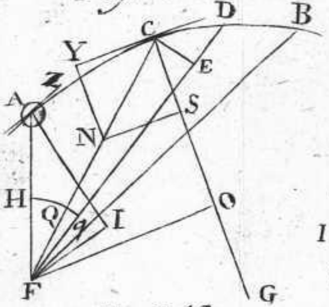


Fig. 240.

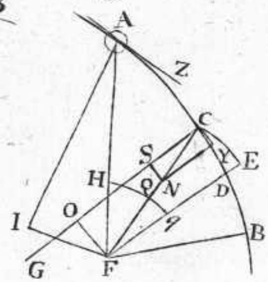


Fig. 241.

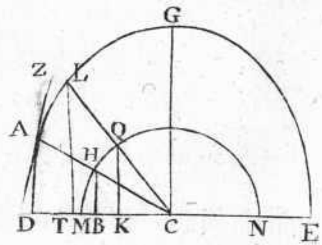


Fig. 247.

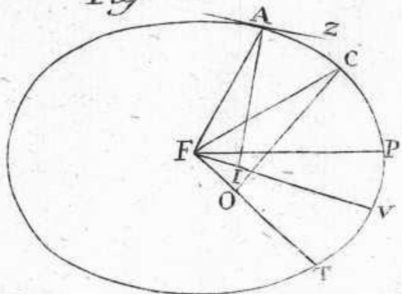


Fig. 243.

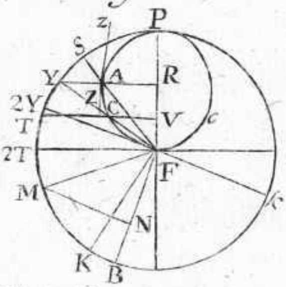


Fig. 244.

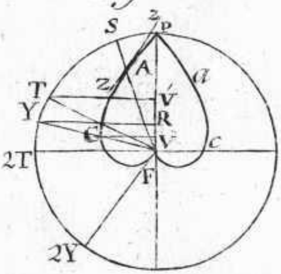


Fig. 245.

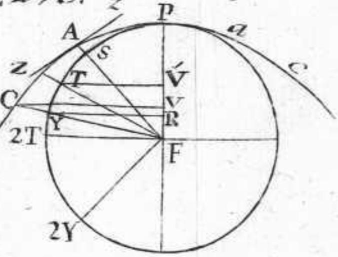


Fig. 246.

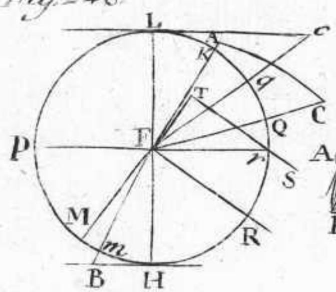


Fig. 248.

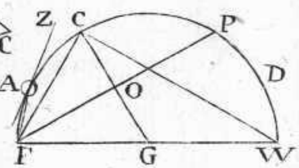


Fig. 242.

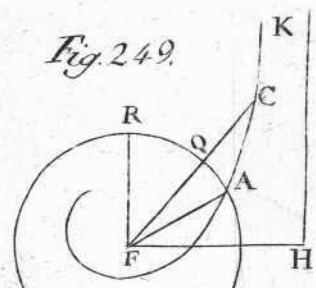


Fig. 249.

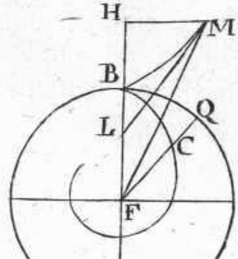


Fig. 250.

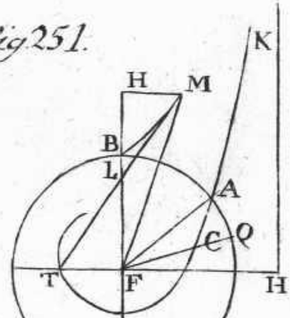


Fig. 251.

$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y+\frac{2eg}{g-e})}}$; pero (533. 1°.) es $Q:q = v:V$: luego será $V:v = \frac{\sqrt{(b+\frac{2eg}{g-e})}}{\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{(y+\frac{2eg}{g-e})}}{\sqrt{y}}$. Si es $g = e$, en cuyo caso la seccion cónica es una Parábola, será $V:v = \frac{1}{\sqrt{b}} : \frac{1}{\sqrt{y}}$, pues que las cantidades b, y se desvanecen respecto á la cantidad $\frac{2eg}{g-e}$ infinita. Si es $g > e$, la seccion cónica AC será una Hipérbola, cuyo exe igual á $\frac{2eg}{g-e}$; por consiguiente la recta tirada desde el otro focus al punto C será (I. 626) igual á $y + \frac{2eg}{g-e}$: luego en la hipérbola serán las velocidades en razon compuesta de la directa subduplicada de las ordenadas tiradas desde el otro focus de la misma curva, y de la inversa subduplicada de las ordenadas tiradas desde el focus que es el centro de la potencia. Y finalmente si es $g < e$, será $V:v = \frac{\sqrt{(\frac{2eg}{e-g}-b)}}{\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{(\frac{2eg}{e-g}-y)}}{\sqrt{y}}$; y por ser $\frac{2eg}{e-g}$ el exe de la Elipse, será (I. 568) $\frac{2eg}{e-g} - y$ la ordenada tirada al punto C desde el otro focus de la misma curva: luego en la Elipse serán las velocidades en razon compuesta de la directa subduplicada de las ordenadas tiradas desde el otro focus, y de la inversa subduplicada de las ordenadas tiradas desde el focus, que es el centro de la potencia.

2°. Siendo por lo demostrado en el caso antecedente $q = \frac{g\sqrt{(g+e)} \times \sqrt{y}}{\sqrt{((g-e)\times y + 2eg)}}$, será $\frac{1}{q^2} = \frac{g-e}{g^2 \times (g+e)} + \frac{2e}{gy \times (g+e)}$, $\frac{dq}{q^3} = \frac{edy}{gy^2 \times (g+e)}$; pero (533. 2°.) $fdy = \frac{2FLQ^2 dq}{q^3}$: luego será $fdy = 2FLQ^2 \times \frac{edy}{gy^2 \times (g+e)}$, y por consiguiente $f = \frac{2eFLQ^2}{gy^2 \times (g+e)}$; pero siendo $f = F$, es $y = b$: luego será $L = \frac{gb^2 \times (g+e)}{2eQ^2}$; por consiguiente será $f = \frac{b^2 F}{y^2}$. Y por ser en la Elipse $Q = \frac{g\sqrt{b} \times \sqrt{(g+e)}}{\sqrt{(e-g)} \times \sqrt{(\frac{2eg}{e-g} - b)}}$ será $Q^2 = \frac{bg^2 \times (g+e)}{2eg - b \times (e-g)}$; pero $L = \frac{gb^2 \times (g+e)}{2eQ^2}$: luego será $L = b - b^2 \times \frac{e-g}{2eg}$. Con el mismo método se hallará que en la Hipérbola es $L = b + b^2 \times \frac{g-e}{2eg}$. Que es &c.

COROLARIO I.

544. Por tanto será en la Elipse $b^2 \times \frac{e-g}{2eg} = b - L$, de donde resulta ser el exe de la misma curva $\frac{2eg}{e-g} = \frac{b^2}{b-L}$: y del mismo modo se hallará ser el exe de la Hipérbola $\frac{2eg}{g-e} = \frac{b^2}{L-b}$: luego dadas las cantidades b y L se determinará el exe de la Elipse ó él de la Hipérbola. Ahora si el cuerpo sale desde el punto C (*Fig.* 253.) vértice del semiexe segundo CZ de la Elipse, por ser FC igual al semiexe primero se tendrá $b = \frac{eg}{e-g}$: luego $\frac{bb}{b-L} - b = \frac{eg}{e-g}$, $\frac{bL}{b-L}$, $= b$, de donde resulta ser $L = \frac{1}{2}b$. Pero si el cuerpo sale desde el punto $2C$ que queda en la semielipse donde se halla el referido focus F, por ser $F2C < FC$ se tendrá $b < \frac{bL}{b-L}$, y por consiguiente $\frac{1}{2}b < L$. Y finalmente si el cuerpo sale desde el punto $3C$, que queda en la otra semielipse donde no se halla el citado focus F, será $\frac{1}{2}b > L$.

COROLARIO II.

545. Dadas, la direccion CX (*Fig.* 254.) por la

qual se arroja el cuerpo, y la distancia al centro F de la potencia, esto es $CF = b$, y supuesta la velocidad de la proyeccion igual á la que en virtud de la fuerza F adquiriria al fin del espacio CF; se determinará la curva parabólica que describe el cuerpo del modo siguiente. Sobre CF en el punto F levántese la perpendicular FX; sobre CX como diámetro descríbase el semicírculo XWC; y en éste acomodada la cuerda $CW = CF$, tírese la recta XW que será la directrix de la parábola. Ahora tírese FP perpendicular á XW prolongada; divídase FP por medio en V que será el vertice primario de la Parábola, de suerte que descrita ésta pasará por el punto C, y la recta XCE le será tangente en el mismo punto. Adviértase que si el ángulo FCX es recto, en este caso el punto C será el vértice primario de la Parábola que fácilmente se describe.

COROLARIO III.

546. En las mismas suposiciones del Corolario antecedente se determinará tambien (*Fig.* 255.) la curva hiperbólica que describe el cuerpo del modo siguiente. Se ha demostrado (543) que en la Hipérbola es $Q = \frac{g\sqrt{b} \times \sqrt{(g+e)}}{\sqrt{(g-e)} \times \sqrt{(b + \frac{2eg}{g-e})}}$, y por consi-

guiente $Q = \frac{g\sqrt{b} \times \sqrt{(g^2 - e^2)}}{(g-e) \times \sqrt{(b + \frac{2eg}{g-e})}}$; pero (544) $\frac{2eg}{g-e}$

$= \frac{b^2}{L-b}, \frac{eg}{g-e} = \frac{b^2}{2\times(L-b)}$: luego se tendrá $Q =$

$\frac{\sqrt{b} \times b^2 \times \sqrt{(g^2 - e^2)}}{2e \times (L-b) \times \sqrt{(b + \frac{b^2}{L-b})}}$, de donde resulta ser

$Q = \frac{bb\sqrt{(g^2 - e^2)}}{2e\sqrt{(L-b)}\times\sqrt{L}}, Q^2 = \frac{b^4 \times (g^2 - e^2)}{4e^2 L \times (L-b)}, Q^2 : \frac{b^4}{4L\times(L-b)}$

$= g^2 - e^2 : e^2, Q^2 + \frac{b^4}{4L\times(L-b)} : \frac{b^4}{4L\times(L-b)} = g^2 : e^2,$

$g : e = b : \frac{b^2}{\sqrt{(\frac{4LQ^2 \times (L-b)}{b^2} + b^2)}}$. Sobre CF en el focus F levántese la perpendicular FX; sobre CX como diámetro constrúyase el semicírculo CWX; tómese la cuerda $CW = \frac{b^2}{\sqrt{(\frac{4LQ^2 \times (L-b)}{b^2} + b^2)}}$; y tirada la recta WXP, será ésta la directrix de la Hipérbola. Ahora tírese la recta FP perpendicular á la WXP, y divídase en V de modo que sea $FV : VP = g : e$; y el punto V será vértice de la Hipérbola que pasa por el punto C, y tiene la tangente CX en el mismo punto. Si en el otro semicírculo CFX se toma $Cw = CW$, será $Cw < CF$ por ser $e < g$, y además será wX la directrix de otra hipérbola, que tiene en su segundo ramo el punto C. Adviértase que esta determinacion tiene su uso en el caso de las potencias repelentes.

COROLARIO IV.

547. En las mismas suposiciones del Corolario II. se determinará igualmente la Elipse descrita por el cuerpo del modo siguiente. Consta (543) que en dicha curva es $Q = \frac{g\sqrt{b}\times\sqrt{(g+e)}}{\sqrt{(e-g)}\times\sqrt{(\frac{2eg}{e-g}-b)}}$; y con el método expuesto anteriormente (546) se hallará ser $g : e = b : \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 - \frac{Q^2\times(b-L)\times 4L}{b^2})}}$. Sobre CF en el punto F levántese la perpendicular FX (*Fig.*256); sobre CX como diámetro descríbase el círculo CWX; tómese la cuerda $CW = \frac{bb}{\sqrt{(b^2 - \frac{Q^2\times(b-L)\times 4L}{b^2})}}$; y tirada la recta WXP, será ésta la directrix de la Elipse. Ahora tírese la recta FP perpendicular á la WX; y divídase FP en V de modo que sea $FV : VP =$

$g:e$; y será el punto V vértice de la Elipse que pasa por el punto C, y tiene la tangente CX en el mismo punto. Y si en el otro semicírculo se toma $Cw = CW$, y se tira la recta Xwp; será ésta la directrix de otra Elipse. Es evidente que por quedar la tangente CX entre las ordenadas CW y FP á la directrix WP, el punto C del contacto se hallará en aquella parte de la semielipse que tiene el focus F; pero en este caso (544) es $2L$ mayor que el semiexe de la misma curva: luego la directrix WP servirá para describir la elipse que anda el cuerpo, quando sea $2L$ mayor que el semiexe de la misma Elipse. Asimismo por quedar la tangente CX superior á las ordenadas Cw y Fp á la directrix Xp, el punto C del contacto se hallará en aquella parte de la semielipse que no tiene el focus ó centro atraente F: luego (544) la directrix Xwp servirá para describir la elipse que anda el cuerpo, quando sea $2L$ menor que el semiexe de la misma Elipse. Adviértase que si el ángulo de proyeccion FCX es recto (*Fig.* 257.), en este caso el punto C será el vértice de la Elipse, y por consiguiente $g = b$, $Q = b$; pero es $g:e = b:\frac{b^2}{\sqrt{\left(b^2 - \frac{Q^2 \times 4L \times (b-L)}{b^2}\right)}}$: luego será $e = \frac{r^2}{2L-b}$. Por tanto dados, el focus F, el vértice C, y la posicion de la directrix se podrá describir la Elipse en la suposicion del referido ángulo recto. Dígase lo mismo respecto á la Hipérbola.

ESCOLIO.

548. Adviértase que en la Elipse y en la Hipérbola la distancia FP del focus F (*Fig.* 252.) á la directrix PW es la tercera proporcional á la distancia del mismo focus al centro de la curva, y al semiexe transverso de la misma curva: como si el punto E es el centro de la Elipse VC, y se nombran sus semiexes a y c, será $EF:EV = EV:EP$, de donde $VF:VP = EF:EV = \sqrt{(a^2 - c^2)}:a$. Esto supuesto se van á demostrar las dos propiedades de la dicha directrix, que se han señalado en la Proposicion antecedente.

1.° Siendo, pues, $FZ = EZ - EF$, se tendrá $FZ = x - \sqrt{(a^2 - c^2)}$, y por consiguiente $FZ^2 = x^2 - 2x\sqrt{(a^2 - c^2)} + a^2 - c^2$: y por ser $CZ^2 = \frac{c^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, será $CF^2 = FZ^2 + CZ^2 = \frac{a^4 - 2a^2x\sqrt{(a^2-c^2)} + (a^2-c^2)\times x^2}{a^2}$, y por consiguiente $CF = \frac{a^2 - x\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$; pero $CW = PE - EZ = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-c^2)}} - x = \frac{a^2 - x\sqrt{(a^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2-c^2)}}$: luego será $CF:CW = \sqrt{(a^2 - c^2)}:a$; pero se ha demostrado anteriormente ser $FV:VP$

$=\sqrt{(a^2-c^2)}:a$: luego será $FV:VP=FC:CW$. Discúrrase del mismo modo respecto á la directrix de la Hipérbola.

2°. Siendo por la propiedad de la subtangente (III. 257.) la diferencial de la ordenada ZC á la de la abscisa FZ como CZ á ZM, se hallará ser $ZM=\frac{h\times CZ^2}{(1-h^2)\times y+h\times(g+e)}$; pero $FM=FZ+ZM$: luego substituyendo los valores de estas cantidades, se tendrá $FM=\frac{(g+e)\times y}{(1-h^2)\times y+h\times(g+e)}$: y por ser $MC=\sqrt{(MZ^2+ZC^2)}$ será $MC=\frac{CZ\times\sqrt{((1-h^2)\times y^2+2h\times(g+e)\times y)}}{(1-h^2)\times y+h\times(g+e)}$; por consiguiente $CZ^2-MZ\times ZF=\frac{y\times CZ^2}{(1-h^2)\times y+h\times(g+e)}$. Consta (II. 734.) que es $Cc.FCM=r\times\frac{MC^2-MF^2+CF^2}{2MC\times CF}=r\times\frac{CZ^2-MZ\times ZF}{MC\times CF}$: luego substituyendo los valores de estas cantidades, se hallará ser $Cc.FCM=\frac{r\times CZ}{\sqrt{((1-h^2)\times y^2+2h\times(g+e)\times y)}}=\frac{r\times PW}{FW}$; pero $Cc.FWP=\frac{r\times PW}{FW}$: luego será el ángulo $FCM=FWP$, ó bien el ángulo $FCX=FWX$. Se infiere que circunscrito al triángulo XWF un círculo, su circunferencia pasará por el punto C; y por ser el ángulo XWC recto, será tambien recto el ángulo XFC.

PROPOSICION LIX.

549. Sea la potencia en la razon inversa duplicada de la distancia de su centro atraente; se pide determinar la Trayectoria que describirá el cuerpo animado de dicha potencia. *Fig.* 258.

Supóngase $F:f=\frac{1}{b^2}:\frac{1}{y^2}$; por consiguiente será

$$f=\frac{Fb^2}{y^2},\ fdy=\frac{Fb^2dy}{y^2},\ \text{y}\ S.fdy=-\frac{Fb^2}{y}+Fb,$$

cuya integral se hace de modo que desvanezca, mientras sea $y=b$: luego si en la equacion (535) $\frac{du}{a}=$ $\frac{Q\sqrt{FL}\times dy}{y\sqrt{(FLy^2-FLQ^2-y^2\times S.fdy)}}$ se substituye el valor hallado de $S.fdy$, se tendrá que la equacion que se busca es $\frac{du}{a}=\frac{dy}{y\sqrt{(\frac{L-b}{LQ^2}\times y^2+\frac{b^2y}{LQ^2}-1)}}$. Ahora hágan-

se las substituciones $\frac{LQ^2}{L-b}=\frac{n^2\times(n+m)}{n-m}$, $\frac{LQ^2}{b^2}=\frac{r\times(n+m)}{2m}$,

y dicha equacion se reducirá á la expresion $\frac{du}{a}=$

$$\frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{n-m}{n^2\times(n+m)}\times y^2+\frac{2my}{n\times(n+m)}-1\right)}}$$, que por medio de la substitucion $y=\frac{n\times(n+m)}{m+t}$ se transformará en la $du=-\frac{ndt}{\sqrt{(n^2-t^2)}}$ hecha $a=n$. Con el radio $FV=n$ descríbase el quadrante VB; tómese qualquiera abscisa $FT=t$; y tirada la ordenada TQ, será (III.117) $VQ=u$. Prolónguese ahora la recta FQ, hasta que sea $FC=\frac{n\times(n+m)}{m+t}=y$; desde el punto C báxese la perpendicular CZ al radio FV, y nómbrese $FZ=x$. Por la semejanza de los triángulos FCZ y FQT es $FC:FQ=FZ:FT$, ó bien $y:n=x:t$; pero por ser $y=\frac{n\times(n+m)}{m+t}$, es $t=\frac{(n+m)\times n}{y}-m$: luego será $y:n=x:\frac{(n+m)\times n}{y}-m$, de donde resulta ser $nx=n^2+nm-my$, y $my=n\times(n+m-x)$; por consiguiente $n:m=y:n+m-x$. Prolónguese el radio FV, hasta que sea $VP=m$; y completo el rectángulo ZW, será $CW=n+m-x$: luego se tendrá $FV:VP=FC:CW$, cuya propiedad pertenece (548) á las secciones cónicas. Que es &c.

Del Movimiento de los cuerpos en un medio resistente.

PROPOSICION LX.

550. Si un cuerpo tiene una velocidad dada en el principio de su movimiento rectilíneo en un medio resistente, y esta resistencia es la única fuerza que actua en el mismo cuerpo; siendo la resistencia del medio proporcional con la velocidad del cuerpo, determinar las razones, de la velocidad al espacio corrido, y del tiempo á la velocidad. *Fig.* 259, 260.

Siendo la resistencia una potencia que hace disminuir la velocidad del cuerpo, valdrán las fórmulas (437) $rds = -2mvdv$, y $rdt = -mdv$, con tal que expresen, r la resistencia, s el espacio corrido en el medio resistente, t el tiempo en que se corre, y v la velocidad adquirida por el cuerpo al fin del mismo espacio. Y en la suposicion de la Proposicion hágase $r = n \times v$, llamada n la razon de la resistencia á la velocidad. Finalmente llámese V la velocidad con que empieza el cuerpo su movimiento en el medio resistente.

1°. En la fórmula $rds = -2mvdv$ substitúyase dicho valor de r; y se tendrá $nvds = -2mvdv$, de donde $nds = -2mdv$, é integrando se tendrá $ns =$

$-2mv+A$. La constante A se determina, suponiendo $s=o$, mientras que sea $v=V$; por consiguiente será $A=2mV$. Por tanto se tendrá $ns=-2mv+2mV=2m\times(V-v)$. En la recta AD (*Fig.* 259.) córtese $AB=2m$; sobre la misma AB en el punto B levántese la perpendicular $BC=n$; tírese la recta AC que se prolongará indefinidamente; sobre la recta AB en el punto A levántese la perpendicular $AE=V$; y á la recta AD tírese la paralela EF, que encontrará la AC prolongada en F. Nómbrese $EG=s$, y tírese la recta GD perpendicular á la AD. Y por la semejanza de los triángulos ABC y ADH será $AB:BC=AD:DH$, ó bien $2m:n=s:DH$, y por consiguiente $ns=2m\times(DG-GH)=2m\times(V-GH)$; pero $ns=2m\times(V-v)$: luego será $GH=v$: de donde resulta que en el punto F del espacio corrido EF habrá perdido el cuerpo toda su velocidad.

2°. En la fórmula $rdt=-mdv$, substitúyase $n\times v$ en lugar de r; y se tendrá $nvdt=-mdv$, y por consiguiente será $dt=-\frac{m}{n}\times\frac{dv}{v}$; é integrando se tendrá $t=L.\frac{A}{v}$ supuesta la subtangente de la logarítmica igual á $\frac{m}{n}$. La constante A se determina suponiendo $t = o$, mientras que sea $V = v$; por consiguiente será $o = L. \frac{A}{V}$, de donde resulta ser $A = V$. Por tanto se tendrá $t = L. V - L. v$. Sobre la recta ED (*Fig.* 260.) en el punto C levántese la perpendicular $CA = V$; y con la subtangente $= \frac{m}{n}$ descríbase la logarítmica AB, que pase por el punto A, y tenga CD por asíntota: luego nombrada la ordenada $BD = v$, será la abscisa $CD = t$, de donde resulta que siendo $v = o$, será $t = \infty$. Que es &c.

COROLARIO.

551. Se infiere que en la referida hipótesis de las resistencias necesita el cuerpo un tiempo infinito para correr un espacio finito: pues que se ha demostrado que siendo $v = o$, el espacio corrido por el cuerpo será finito, y el tiempo será infinito.

PROPOSICION LXI.

552. Si en las referidas suposiciones (550) la resistencia del medio, en que se mueve el cuerpo, es proporcional con el quadrado de la velocidad del mismo cuerpo; determinar las razones, de la velocidad al espacio corrido, y del tiempo á la velocidad. *Fig.* 260, 261.

1°. Supónganse las denominaciones dadas (550), y $r = nv^2$, expresando n la razon de la resistencia al quadrado de la velocidad: luego la fórmula $rds = -2mvdv$ (437) se convertirá en la $nv^2ds = -2mvdv$; por consiguiente se tendrá $ds = -\frac{2m}{n} \times \frac{dv}{v}$, é integrando será $s = L.A - L.v$. Para determinar la constante A se debe suponer $s = o$, mientras que sea $v = V$, de donde resulta $A = V$. Por tanto será $s = L.V - L.v$. Descrita como antes (550. 2.°) (*Fig.* 260.) la logarítmica AB; y llamada $CD = s$, será la ordenada $DB = v$: de donde resulta que en la referida hipótesis de las resistencias perderá el cuerpo toda su velocidad al fin de un espacio infinito que haya corrido.

2°. En la fórmula $rdt = -mdv$ (437) substitúyanse nv^2 en lugar de r; y se tendrá $nv^2dt = -mdv$; por consiguiente $dt = -\frac{m}{n} \times \frac{dv}{v^2}$, é integrando se tendrá $t = A + \frac{m}{n \times v}$. Para determinar la constante A se debe suponer $t = o$, mientras que sea $v = V$: de donde resulta ser $A = -\frac{m}{n \times V}$. Por tanto se tendrá $t = -\frac{m}{n \times V} + \frac{m}{n \times v}$, y $t + \frac{m}{n \times V} = \frac{m}{n \times v}$:

luego haciendo $t+\frac{m}{n\times V}=x$, será $xv=\frac{m}{n}$ equacion á la Hipérbola entre las asíntotas. Ahora si con la potencia $=\frac{m}{n}$ se describe (*Fig.* 261.) la hipérbola AB entre sus asíntotas, y se nombra la ordenada $DB=v$, será $ED=x$; y tomada la ordenada $CA=V$, será $CE=\frac{m}{n\times V}$, y por consiguiente $CD=t$, de donde resulta que siendo $v=o$, será $t=\infty$. Que es &c.

PROPOSICION LXII.

553. Si en las referidas suposiciones (550) la resistencia del medio, en que se mueve el cuerpo, es proporcional con su velocidad elevada á la potestad q; determinar las razones, de la velocidad al espacio, y del tiempo á la velocidad. *Fig.* 261, 262.

1°. Supónganse las denominaciones dadas antes (550), y $r=nv^q$, en quien n expresa la razon de la resistencia á la velocidad elevada á la potestad q; y substituyendo el valor de r en la fórmula $rds=-2mvdv$ (437) se tendrá $nv^q ds=-2mvdv$; por consiguiente $ds=-\frac{2m}{n}\times\frac{dv}{v^{q-1}}$; é integrando será $s=C+\frac{2m}{n\times(q-2)\times v^{q-2}}$. La constante C se determina, suponiendo $s=o$, mientras que sea $v=V$; por consiguiente será $C = -\frac{2m}{n\times(q-2)\times V^{q-2}}$: luego será $(A)\ s = -\frac{2m}{n\times(q-2)\times V^{q-2}} + \frac{2m}{n\times(q-2)\times v^{q-2}}$. Ahora si es $q > 2$, hágase $s + \frac{2m}{n\times(q-2)\times V^{q-2}} = x$: luego la equacion A se transformará en la $xv^{q-2} = \frac{2m}{n\times(q-2)}$. Por tanto si se describe la Hipérbola FAB (*Fig.* 261.) entre las asíntotas correspondiente á la equacion $xv^{q-2} = \frac{2m}{n\times(q-2)}$, serán la ordenada $DB = v$, y la abscisa $ED = x$; y siendo la ordenada $CA = V$, será $EC = \frac{2m}{n\times(q-2)\times V^{q-2}}$; por consiguiente se tendrá $CD = s$. Y si es $q < 2$, en dicha equacion A hágase $-s + \frac{2mV^{2-q}}{n\times(2-q)} = x$: luego la misma equacion se transformará en la $x = \frac{2m}{n\times(2-q)} \times v^{2-q}$. Por tanto si se describe la parábola EDA (*Fig.* 262.) correspondiente á dicha equacion transformada, y se toma en el exe de la misma curva la abscisa $EF = x$, será la ordenada $DF = v$; y tomada la abscisa $EG = \frac{2mV^{2-q}}{n\times(2-q)}$, será $GF = s$. Finalmente el caso de ser $q = 2$ se ha exâminado antes (552).

2°. En la fórmula $rdt = -mdv$ (437) substitúyase el referido valor de r; y se tendrá la equacion $nv^q dt = -mdv$; por consiguiente $dt = -\frac{m}{n} \times \frac{dv}{v^q}$, é integrando se tendrá $t = A + \frac{m}{n \times (q-1) \times v^{q-1}}$. La constante A se determina, suponiendo $t = o$, mientras que sea $v = V$: luego se tendrá $A = -\frac{m}{n \times (q-1) \times V^{q-1}}$; por consiguiente será $t = -\frac{m}{n \times (q-1) \times V^{q-1}} + \frac{m}{n \times (q-1) \times v^{q-1}}$ equacion á las Hipérbolas referidas á sus asíntotas, siendo $q > 1$, y si es $q < 1$, la dicha equacion corresponderá á las Parábolas. El caso de ser $q = 1$, se ha tratado antes (550). Que es &c.

PROPOSICION LXIII.

454. Si el cuerpo m atraido de un centro con potencia constante anda en un medio, cuya resistencia es proporcional con la velocidad de dicho cuerpo; en la suposicion del movimiento rectilineo determinar las razones de la velocidad al espacio, y del tiempo á la velocidad. *Fig.* 263, 264.

Sean, la resistencia $r = n \times v$, y p la referida potencia constante: luego valdrán (437) las fórmulas $(p - r) \times ds = -2mvdv$, $(p - r) \times dt = -mdv$.

1°. En la fórmula $(p-r)\times ds=-2mvdv$ substitúyase $n\times v$ en lugar de r; y se tendrá la equacion $(p-nv)\times ds=-2mvdv$, de donde resulta ser $ds=-\frac{2mvdv}{p-nv}=\frac{2mdv}{n}-\frac{2mp}{n^2}\times\frac{ndv}{p-nv}$. Hágase $s-\frac{2mv}{n}=z$; y será $(A)\ dz=-\frac{2mp}{n^2}\times\frac{ndv}{p-nv}=\frac{2mp}{n^2}\times\frac{-dv}{\frac{p}{n}-v}$, é integrando se tendrá $z=A+L.(\frac{p}{n}-v)$. La constante A se debe determinar, de modo, que hecha $s=o$, sea $v=V$; por consiguiente se tendrán $z=\frac{-2mV}{n}$, $L.(\frac{p}{n}-v)=L.(\frac{p}{n}-V)$, y $A=\frac{-2mV}{n}-L.(\frac{p}{n}-V)$. Luego será $(A)\ z=\frac{-2mV}{n}+L.(\frac{p}{n}-v)$ tomado el protonúmero $=\frac{p}{n}-V$. Para construir la equacion A en la suposicion de ser $\frac{p}{n}>v$, sobre la recta indefinida BC (*Fig.* 263.) en el punto I levántese la perpendicular $IK=\frac{p}{n}$; córtese en ésta la recta $KH=V$, y será el protonúmero $IH=\frac{p}{n}-V$;

con la subtangente $\frac{2mp}{n^2}$ descríbase la logarítmica RHT, que pase por el punto H, y tenga la asíntota CB; á ésta tírense las paralelas, KDM y $EH = \frac{2mV}{n}$; por el punto E hágase pasar la recta DEA paralela á la KI. Y siendo $NM = v$, serán $BN = \frac{p}{n} - v$, $IB = L.(\frac{p}{n} - v)$, $AB = \frac{-2mV}{n} + L.(\frac{p}{n} - v) = z$, y la $PON = z + \frac{2mv}{n} = s$: y desvaneciéndose PN, se tendrá $v = V$. Pero en la suposicion de ser $\frac{p}{n} < v$, la equacion A se dispondrá de este modo $dz = \frac{2mp}{n^2} \times \frac{dv}{v - \frac{p}{n}}$, que tratada con el método anterior suministra la construccion expresada por la Figura 264, donde las rectas tienen las denominaciones que antes se les han dado. Y finalmente si es $\frac{p}{n} = v$, los puntos H y N coincidirán con los respectivos puntos I y B, y por consiguiente la logarítmica pasará á ser la recta IAB en dicha suposicion: luego las velocidades serán constantes é iguales á V, como debe ser evidentemente

Fig. 252.

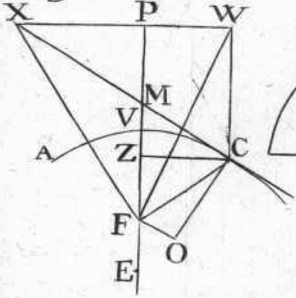


Fig. 253.

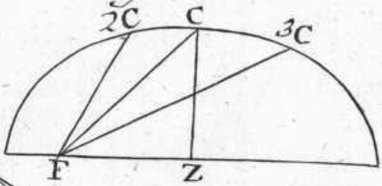


Fig. 254.

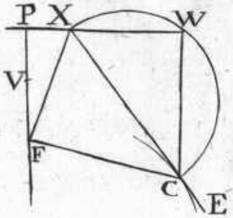


Fig. 255.

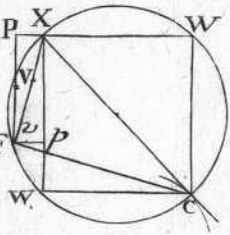


Fig. 256.

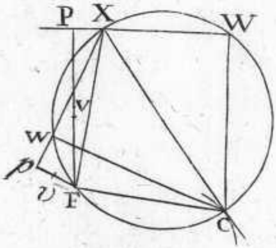


Fig. 257.

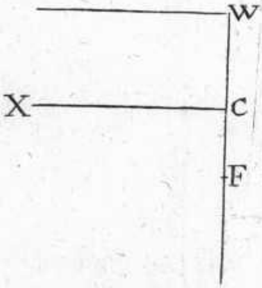


Fig. 258.

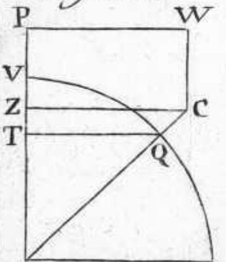


Fig. 259.

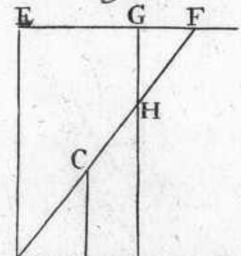


Fig. 260.

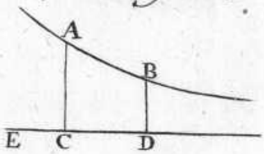


Fig. 261.

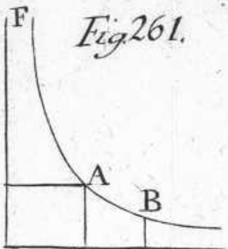


Fig. 262.

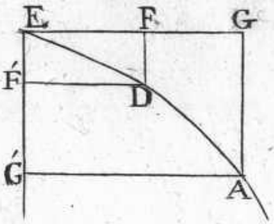
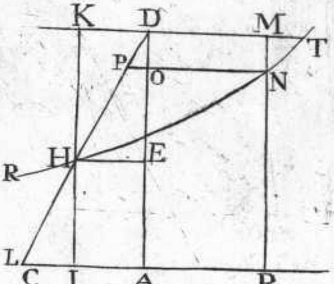
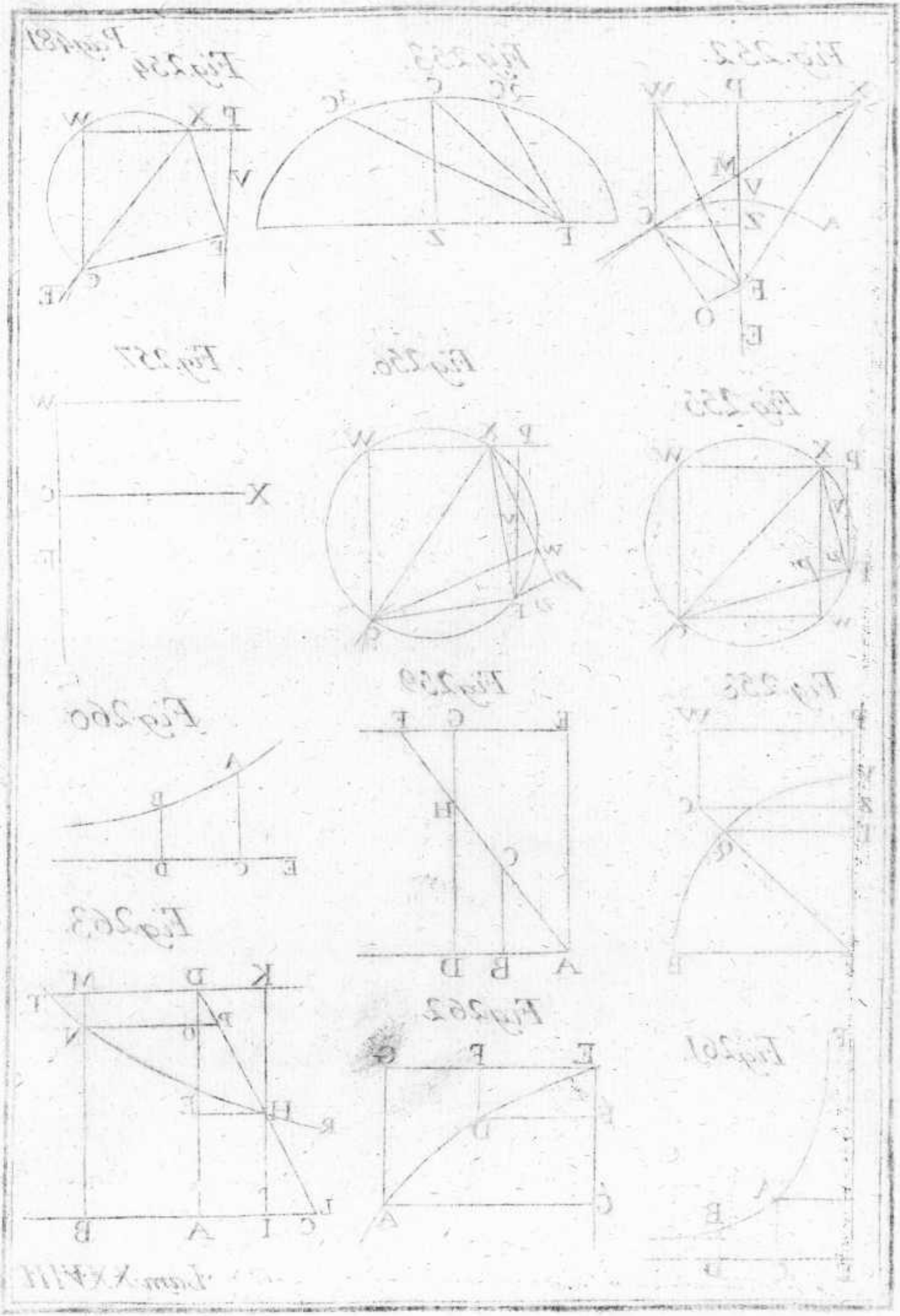


Fig. 263.





en la hipótesis de la resistencia igual á la potencia.

2°. Para determinar los tiempos en la fórmula $(p - r) \times dt = - mdv$ substitúyase el referido valor de r; y se tendrá $(p - nv) \times dt = - mdv$, y por consiguiente $dt = \frac{m}{n} \times \frac{-dv}{\frac{p}{n} - v}$. Sobre la recta indefinida CB en un punto I (*Fig.* 263, 264.) levántese la perpendicular $IK = \frac{p}{n}$; tómese $KH = V$; con la subtangente $= \frac{m}{n}$ descríbase la logarítmica RHT, que pase por el punto H, y tenga la asíntota CB; tírese la ordenada BN que se prolongará hasta encontrar en M á la recta KM paralela á la AB; y llamada $NM = v$, será $KM = t$, de modo que siendo $t = o$, resulta ser $v = V$. Es evidente que la primera de dichas figuras tiene su uso en el caso de ser $\frac{p}{n} > v$, y la segunda quando sea $\frac{p}{n} < v$. Que es &c.

PROPOSICION LXIV.

555. Si un cuerpo m atraido de un centro con potencia constante anda en un medio, cuya resistencia es proporcional con el quadrado de la velocidad de dicho cuerpo; en la suposicion del movimiento rec-

tilineo determinar las razones, de la velocidad al espacio, y del tiempo á la velocidad. *Fig.* 265...267.

Supóngase la resistencia $r = nv^2$, expresando n la razon de la resistencia al quadrado de la velocidad.

1°. En la fórmula (437) $(p-r) \times ds = -2mvdv$ substitúyase dicho valor de r; y se tendrá $(p-nv^2) \times ds = -2mvdv$, y por consiguiente será $ds = -\frac{2mvdv}{p-nv^2}$. Hágase ahora la substitucion $\frac{v^2}{n} = z$; y se transformará la equacion hallada en la $ds = \frac{m}{n} \times \frac{-dz}{\frac{p}{n^2}-z}$, é integrando se tendrá $s = L.(\frac{p}{n^2}-z)+A$ supuesta la subtangente de la logarítmica igual á $\frac{m}{n}$. La constante A se debe determinar, de modo, que hecha $s = o$, sea $v = V$; por consiguiente será $z = \frac{V^2}{n}$, y $A = -L.(\frac{p}{n^2}-\frac{V^2}{n})$. Luego se tendrá $s = -L.(\frac{p}{n^2}-\frac{V^2}{n})+L.(\frac{p}{n^2}-z)$, y tomado $\frac{p}{n^2}-\frac{V^2}{n}$ por protonúmero de la logarítmica, será $s = L.(\frac{p}{n^2}-z)$. Sobre la recta indefinida AB en el punto A (*Fig.*265.) levántese la perpendicular $AG = \frac{p}{n^2}$; tómese $GF =$

$\frac{V^2}{n}$, y será $AF = \frac{p}{n^2} - \frac{V^2}{n}$; con la subtangente $= \frac{m}{n}$ descríbase la logarítmica FC, que pase por el punto F, y tenga la asíntota AB; tírese la ordenada CB que se prolongará hasta encontrar la recta GD paralela á AB en D; por el punto C hágase pasar la recta CEI paralela á la AB; y siendo $CD = z$, será $BC = \frac{p}{n^2} - z$, y por consiguiente AB ó bien $CE = L. (\frac{p}{n^2} - z) = s$. Ahora con el parámetro $= n$ cerca del exe GA descríbase la parábola Apoloniana GIK; y siendo $GE = z$, será $EI = v$. Por tanto si es EC el espacio corrido por el cuerpo m, expresará la recta EI la velocidad que tiene al fin de dicho espacio. Quando sea el espacio $EC = o$ en el punto F, la velocidad HF del cuerpo será igual á V por ser $GF = \frac{V^2}{n}$ por la propiedad de la Parábola Apoloniana. Adviértase que si es $\frac{p}{n^2} < z$, con el mismo método se hallará ser $CE = s$, y $EI = v$ en la figura 266, donde las rectas tienen las denominaciones que antes se les han dado.

2°. Para determinar los tiempos en la equacion $(p - r) \times dt = -m dv$ substitúyase el referido valor de r; y se tendrá $(p - nv^2) \times dt = - m dv$, de donde resulta ser $(A)\ dt = \frac{m}{p} \times \frac{\frac{p}{n} \times dv}{-\frac{p}{n} + v^2}$. En la suposicion de ser $\frac{p}{n} < v^2$ (*Fig.* 267.) será $S. \frac{\frac{p}{n} \times dv}{-\frac{p}{n} + v^2}$ $= \frac{FCH}{\frac{1}{2}CF}$ (III. 209. 4°.) siendo FCH sector de la Hipérbola equilátera GFH, que tiene los semiexes CF y CB iguales á $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n}}$, las asíntotas CR y CI, y la cotangente $BE = v$. Ahora tírese la recta FA perpendicular á la CI; con la subtangente $= CF$ descríbase la logarítmica AD que pase por el punto A y tenga la asíntota CR; tírese la recta HID perpendicular á la CI; y se tendrá tambien $ID = \frac{FCH}{\frac{1}{2}CF}$ (III. 208. 3°.) en la suposicion de dicha logarítmica descrita con la subtangente igual á CF, y con el protonúmero CA: luego será $t = A + \frac{m}{p} \times ID$. La constante A se determina de modo que suponiendo $v = V$, sea $t = o$: luego siendo la cotangente $Be = V$, y tirando la recta Che, y la hid perpendicular á CI, será $A = -\frac{m}{p} \times id$. Por tanto se tendrá $t = \frac{m}{p} \times (ID - id) = \frac{m}{p} \times DL$, tirada dL paralela á CI. Y en la suposicion de ser $\frac{p}{n} > v^2$, se dispondrá la equacion A de esta forma $dt = -\frac{m}{p} \times \frac{\frac{p}{n} \times dv}{\frac{p}{n} - v^2}$, cuya integral (III. 209. 3°.) es igual á $-\frac{m}{p} \times \frac{FCh}{\frac{1}{2}CF}$, supuesta la tangente hiperbólica $Fk = v$: y siendo la tangente $FK = V$, el valor de la constante, que se debe añadir á dicha integral, será igual á $\frac{m}{p} \times FCH$. Por tanto se tendrá $t = \frac{m}{p} \times \frac{FCH - FCh}{\frac{1}{2}CF} = \frac{m}{p} \times DL$.

PROPOSICION LXV.

556. Si la potencia, con que el centro atrae al cuerpo m, tiene la razon de la distancia de éste al mismo centro, y si la resistencia del medio es proporcional con la velocidad con que anda el cuerpo; determinar las leyes del movimiento rectilineo de dicho cuerpo. *Fig.* 268. . . . 273.

Sean, s la distancia del cuerpo al centro, y la resistencia r á la velocidad v como $2b$ á 1, y por consiguiente $r = 2bv$: luego considerando el movimiento de un mismo cuerpo, valdrá (437) la equacion

$(s-2bv)\times ds = -vdv$, de donde resulta ser (A) $-vdv+2bvds-sds=o$.

1°. Sea $1<b$. En la referida equacion A hágase $v=ns-z$, en la que n es una cantidad que se determina sucesivamente; y se tendrá la equacion siguiente (E):

$$\left.\begin{array}{ll} -sds & +nsdz-zdz \\ +2bnsds & -2bzds \\ -n^2sds & +nzds \end{array}\right\} = o$$

Ahora para que desvanezca la primera coluna de la equacion transformada, supóngase $-1+2bn-n^2 = o$, y por consiguiente será $2b=n+\frac{1}{n}$, y el valor de n será real en la suposicion de $1<b$, y además será $n^2<1$. Por tanto la equacion E se reduce á la (F) $-n^2sdz+zds=-nzdz$; y multiplicada ésta por $\frac{z^{nn-1}}{z^{2nn}}$, se tendrá $\frac{-n^2sz^{nn-1}dz+z^{nn}ds}{z^{2nn}} = -\frac{nz^{nn}dz}{z^{2nn}}$, cuya integral es (G) $Az^{nn}+s=\frac{nz}{nn-1}$. Para la determinacion de la constante A supóngase $v=o$, mientras que sea $s=a$; y por la substitucion $v=ns-z$ será $z=na$: luego será $A=\frac{1}{a^{nn-1}\times(n^{nn+1}-n^{nn})}$; y substituyendo el valor de A en la equacion G, se tendrá la (H) $s=-\frac{nz}{1-nn}+\frac{a^{1-nn}\times z^{nn}}{n^{nn}-n^{nn+1}}$; pero por la substitucion es $v = ns - z$: luego será $(I)\, v =$ $-\frac{z}{1-nn} + \frac{na^{2-nn} \times z^{nn}}{n^{nn} - n^{nn+2}}$. Ahora háganse las substituciones $\frac{nz}{1-nn} = x$, y $\frac{a^{2-nn} \times z^{nn}}{n^{nn} - n^{nn+2}} = y$ en la equacion H, y en la $I\, \frac{z}{1-nn} = x'$, y $\frac{na^{2-nn} \times z^{nn}}{n^{nn} - n^{nn+2}} = y'$; y se tendrán las equaciones $s = y - x$, $v = y' - x'$. La equacion $y = \frac{a^{2-nn} \times z^{nn}}{n^{nn} - n^{nn+2}}$ pertenece (*Fig.* 270.) á las Parábolas CB referidas al exe CD, siendo $CD = z$ y $DF = y$. Tírese la recta CM de modo que sea $CN : NM = 1 - nn : n$; y por ser $CD = z$, será $DE = x$: luego será $EF = y - x = s$. Si con el mismo método se construye la equacion $v = y' - x'$ por medio de las Parábolas Cmb, y de la recta Cm, se tendrá $ef = y' - x' = v$. Adviértase que si desde el punto m, en que la recta Ce corta la curva Cmb se tira la ordenada mN, y se prolonga hasta encontrar la curva CFB en L, será $ML = a$, pues que siendo $v = o$, debe ser $s = a$. Se infiere que en el centro de la potencia se extingue la velocidad del cuerpo: pues que siendo $EF = s = o$, será $ef = v = o$. Para la determinacion de los tiempos substitúyanse en la fórmula $dt = \frac{ds}{v}$ los valores de ds y v; y se hallará ser dt

$= \frac{ndz}{z}$: luego integrando se tendrá $t = L.z + A$, supuesta la subtangente de la Logarítmica igual á n. La constante A se determina suponiendo $t = o$, mientras que sean $s = a$, $v = o$, y de consiguiente $z = na$ por ser $v = ns - z$: luego será $o = L.\ na + A$, y $A = -L.na = o$, supuesto el protonúmero de dicha logarítmica igual á na; por consiguiente será $t = L.\ z$. Se infiere que el cuerpo gastará un tiempo infinito para llegar al centro C de la potencia.

2°. Supóngase $1 = b$. En la referida equacion A hágase $v = s - z$, con lo que se transformará en la $-zds + sdz - zdz = o$, ó bien $zds - sdz = -zdz$; y partiendo por z^2, se tendrá $\frac{zds - sdz}{z^2} = -\frac{dz}{z}$: luego integrando será $A + \frac{s}{z} = -L.\ z$. La constante A se determina suponiendo $s = a$, mientras que sea $v = o$, de donde resulta $z = a$: luego será $A = -1 - L.a$; por consiguiente se tendrá $\frac{s}{z} = 1 + L.\ a - L.\ z = 1 - L.\ z$ suponiendo a el protonúmero de la logarítmica, y $s = z - z \times L.\ z$; pero $s - z = v$ por la substitucion: luego será $v = -z \times L.\ z$, siendo el espacio $s = z - z \times L.\ z$. Descríbase (*Fig.* 269.) la logarítmica DB, que tiene la subtangente $= 1$, el protonúmero $CD = a$, y la asíntota CA; tírese la ordenada BA á dicha asíntota, á quien se tirará la paralela BE; prolónguese ésta, hasta que sea $EG = BE \times EC$; sobre la recta DC en el punto D levántese la perpendicular $DF = DC$; tírese CF; y nombrada $AB = z$, serán $EG = v$, $GH = s$. Siendo pues $AB = z$, será $CA = - L. z$; por consiguiente $EG = CE \times EB = - z \times Lz = v$; pero $s = z - zL. z$: luego será $s = CE + EG = EH + EG = GH$. Adviértase que en el caso de la máxîma ordenada de la Escala CGD de las velocidades es CA igual á la subtangente de la logarítmica, y que la velocidad del cuerpo se extingue en el centro C, porque siendo $s = o$, es $v = o$. Para la determinacion de los tiempos substitúyanse en la fórmula $dt = - \frac{ds}{v}$ los valores hallados de ds y v; y se tendrá $dt = - \frac{dz}{z}$: luego integrando será $t = A - L. z$. La constante A se determina suponiendo $t = o$, mientras que sean $s = a$, $v = o$, y de consiguiente $z = s - v = a$: luego será $o = A - L. a$, y $A = L. a = o$, supuesto el protonúmero $= a$; por consiguiente será $t = - L. z$. Se infiere que el cuerpo gastará un tiempo infinito para llegar al centro C de la potencia.

3°. Finalmente supóngase $1 > b$. En la equacion A hágase la substitucion $v = \frac{sz}{1}$, con la qual se transformará en la $-\frac{ds}{s}=\frac{zdz}{z^2-2bz+1}$, que por la substitucion $z-b=y$ se reduce á $-\frac{ds}{s}=\frac{ydy}{y^2+1-b^2}$ $+\frac{bdy}{y^2+1-b^2}$, ó bien á la $(B)-\frac{ds}{s}=\frac{ydy}{y^2+a^2}+\frac{bdy}{y^2+a^2}$ hecha $a^2=1-b^2$; por consiguiente se tendrá $-\frac{a^2dy}{y^2+a^2}$ $=\frac{a^2}{b}\times\frac{ds}{s}+\frac{a^2}{b}\times\frac{ydy}{y^2+a^2}$: luego integrando en la suposicion, que los logaritmos se toman en la logarítmica, que tiene la subtangente $=\frac{a^2}{b}$, y el protonúmero $=a$, y que G expresa el arco de círculo que tiene la tangente $=y$, y el radio $=a$, se tendrá la equacion $(C)\ A-G=L.s+L.\sqrt{}(y^2+a^2)$. Supóngase ahora que siendo $s=a$, sea $v=o$ para la determinacion de la constante A; y en virtud de las referidas substituciones se tendrá $y=-b$, y el arco G el que tiene su tangente $=-b$, cuyo arco nombro $-B$: luego será $A+B=L.\sqrt{}(b^2+a^2)$, de donde resulta ser la constante $A=-B+L.\sqrt{}(b^2+a^2)$; y substituyendo el valor de A en la equacion C, se tendrá $-B-G+L.\sqrt{}(b^2+a^2)=L.s+L.\sqrt{}(y^2+a^2)$, ó bien $-G-B=L.s+L.\sqrt{}(y^2+a^2)-L.\sqrt{}(b^2+a^2)$: luego haciendo $G+B=u$, y $s\times\frac{\sqrt{}(y^2+a^2)}{\sqrt{}(b^2+a^2)}=x$, será $u = -L.x$ equacion á la espiral logarítmica. Con el radio $CB = a$ (*Fig.* 270.) descríbase el círculo BEK; tírese la tangente indefinida ABD al punto B; córtese $BA = b$; tírese CA que será igual á $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; tómese $BD = y$; tírese CD que será igual á $\sqrt{(y^2 + a^2)}$; por consiguiente serán los arcos $BE = B$, $BF = G$, y $EF = B + G = u$. Ahora descríbase la espiral logarítmica EHO con el ángulo constante igual al complemento del arco BE al quadrante; y será la ordenada $CH = x$, tomando las ordenadas decrecientes por ser negativo el $L.x$: luego tirada la recta HG paralela á la DA, será $CD : CA = CH : CG$, esto es $\sqrt{(a^2+y^2)} : \sqrt{(a^2+b^2)} = x : CG$, y por consiguiente $CG = \frac{x \times \sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+y^2)}} = s$; pero v es igual al producto de s por z partido por la unidad lineal que se toma igual á $\sqrt{(a^2+b^2)}$ por ser $1 - b^2 = a^2$: luego será $v = \frac{sx(y+b)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, y por consiguiente $\sqrt{(a^2+b^2)} : s = y + b : v$, ó bien $CA : CG = AD : v$; pero por ser las rectas AD y GH paralelas es $CA : CG = AD : GH$: luego será $GH = v$; por consiguiente á los espacios corridos EG corresponden las velocidades GH paralelas á la tangente AD. Se infiere que en el centro C de la potencia no se extingue la velocidad del cuerpo: y si el ángulo CHN formado por la ordenada CH y la tangente HN en el punto N de la curva es igual al ángulo ECF, la ordenada HG al diámetro $E2E$ será máxîma, y por consiguiente la velocidad del cuerpo desde E á G se va aumentando de modo que en el punto G es la máxîma, y se va disminuyendo desde G á $2E$, de modo que en $2E$ se extingue. Discúrrase del mismo modo respecto á la velocidad del cuerpo que sucesivamente corre el espacio $2E3E$; y así con el mismo órden sucesivo en los espacios $3E4E$, &c.

Considérese ahora lo que resulta de la distinta magnitud del ángulo ECI complemento del ángulo ECB al recto, ó bien igual al ángulo constante que forma la tangente tirada á qualquiera punto de la logarítmica con la correspondiente ordenada, para exâminar la relacion que tienen entre sí los movimientos de un cuerpo en distintos medios resistentes. Llámese dicho ángulo $ECI = C$, y considérese que el mismo ángulo se aumenta. En esta suposicion teniendo el punto E fixo, y variable el punto B, pasará el radio CB (*Fig.* 271.) á la posicion Cb, y la logarítmica $EH2EO$ será interior á la logarítmica $Eb2eo$; por consiguiente las ordenadas Gb en esta serán mayores que las ordenadas GH en aquella, con tal que correspondan á una comun abscisa: luego aumentándose el ángulo C se aumentan las velocidades del cuerpo; y siendo el ángulo C recto, y de consiguiente $Cc.C = o$, la logarítmica EHO se convertirá en la circunferencia EFI, y en este caso las ordenadas tiradas al diámetro ECR del mismo círculo expresarán las velocidades del cuerpo. Y al contrario, si el referido ángulo C se disminuye, las velocidades del cuerpo (*Fig.* 272.) se disminuirán; y siendo $Cc.C = a$, esto es el ángulo $C = o$, la logarítmica se convertirá en una linea recta.

Para la determinacion de los tiempos llámense, t el tiempo del descenso del cuerpo por el espacio EG, v su velocidad en G (*Fig.* 273.) y $CG = s$; y en la fórmula (391) $dt = \frac{-ds}{v}$ substitúyase el valor hallado de v. Por tanto se tendrá $dt = -\frac{ds \times \sqrt{(a^2+b^2)}}{s \times (y+b)}$; pero por la equacion B es $-\frac{ds}{s} = \frac{(y+b) \times dy}{y^2+a^2}$: luego será $dt = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2} \times \frac{a^2 dy}{y^2+a^2}$; é integrando será $t = A + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2} \times BF$ (III. 137) supuesta la tangente BD del arco BF igual á y: y para que sea $t = o$, quando es $s = a$ y de consiguiente $y = -b = BA$ tangente del arco BE, será $o = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2} \times -BE$

$+A$, de donde resulta ser $A = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2} \times BE$: luego será $t = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} \times \frac{EF}{a}$; por consiguiente siendo la recta CI perpendicular á la CB, el tiempo t será igual al producto de la cosecante del ángulo ICE por el ángulo ECF partido por el radio $CE = a$. Y respecto á los tiempos del descenso del cuerpo por el espacio EC en distintos medios resistentes, se ha dicho antes que si el ángulo ECI se aumenta, los radios CB y CF pasan á las respectivas posiciones Cb y Cf, y la tangente BA en el punto B de la circunferencia circular á la tangente Ba de la misma circunferencia en el punto b; por consiguiente en la suposicion de que el ángulo ECI se aumenta, la cosecante CA y el ángulo ECF disminuyen, pues vienen á ser Ca y ECf; pero el tiempo del descenso del cuerpo por el espacio EG es igual al producto de la cosecante CA por el ángulo ECF partido por el radio $BC = a$ en la suposicion del ángulo ECI ó bien de la logarítmica $EH2E$: luego aumentándose dicho ángulo ECI ó bien en la suposicion de la logarítmica $Eh2e$, el tiempo del descenso del cuerpo por el espacio EG se disminuirá, y por consiguiente el tiempo de la caida del cuerpo por el espacio EC en la primera suposicion será mayor que el tiempo de la caida del mismo cuerpo por dicho espacio EC en la segunda suposicion. Es evidente que sucederá lo contrario en la suposicion de que el ángulo ECI se disminuye.

ESCOLIO.

557. Adviértase que si en las referidas suposiciones de la Proposicion antecedente se pide determinar la velocidad del cuerpo m en un punto del espacio corrido, se deberá suponer que en el mismo punto la resistencia es igual á la potencia. Llámese V la velocidad del cuerpo en dicho punto. Consta (409) que para tener un cuerpo terrestre la velocidad V al fin del espacio corrido S, será $V = \sqrt{2lS}$; pero (sup.) es la resistencia á la velocidad como $2b$ á 1: luego será la resistencia igual á $2b\sqrt{2lS}$; por consiguiente la potencia p en el referido punto será igual á $2b\sqrt{2lS}$; de donde resulta la equacion (A) $S = \frac{p^2}{8lb^2}$, en cuya expresion debe ser $b < 1$, pues que se ha demostrado en dicha Proposicion que si no es $b < 1$, la velocidad del cuerpo se extingue en el centro de la potencia, lo que es contrario á la experiencia de los péndulos que reciprocan sus oscilaciones en un medio resistente. Por tanto determinado el valor de la magnitud b segun corresponde,

se hallará por la equacion A el espacio que debe andar un cuerpo terrestre para adquirir la velocidad V. Asimismo adviértase en el movimiento de los cuerpos animados por potencias en un medio resistente, que la velocidad de ellos se aumenta, si la potencia es mayor que la resistencia; y que siendo la potencia menor que la resistencia, dicha velocidad se disminuye. Por tanto en el primer caso valdrán las fórmulas $P \times ds = 2mvdv$, y $P \times dt = mdv$, y en el segundo caso dichas fórmulas serán $P \times ds = -2mvdv$, y $P \times dt = -mdv$: y en los casos particulares se substituirá en ellas en lugar de P la diferencia que pasa entre los valores dados de la potencia y de la resistencia. Y respecto de que en las Proposiciones anteriores LXIII y LXIV, se ha considerado que el cuerpo movido por potencia constante empezaba su movimiento en el medio resistente con una velocidad dada, ésta debia disminuirse en dicho movimiento; por consiguiente debian valer las referidas segundas fórmulas: pero en la Proposicion LXV con respecto á la suposicion de que el cuerpo empezaba su movimiento desde el punto E sin ninguna velocidad, y en virtud de la potencia (*Fig.* 270.) andaba el espacio EG, siendo $CG = s$, debia valer la fórmula $P \times - ds = 2mvdv$, ó bien $P \times ds = -vdv$, considerando el movimiento de un mismo cuerpo.

Fig. 264.

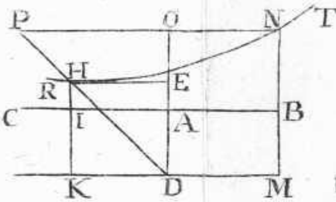


Fig. 265.

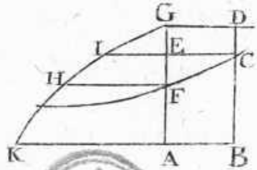


Fig. 266.

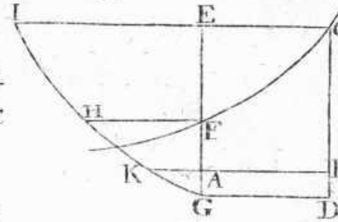


Fig. 267.

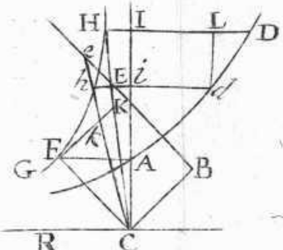


Fig. 268.

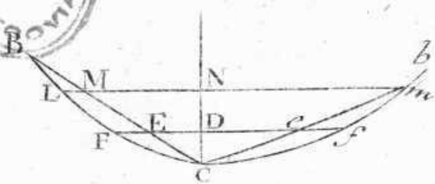


Fig. 270.

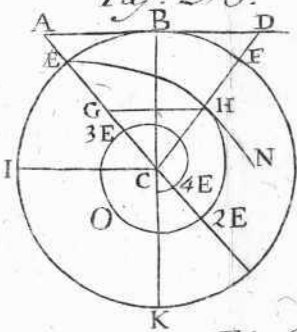


Fig. 271.

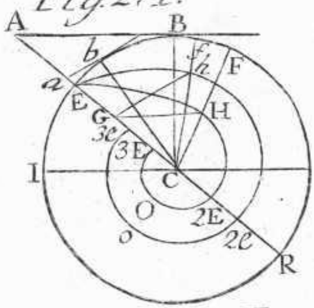


Fig. 272.

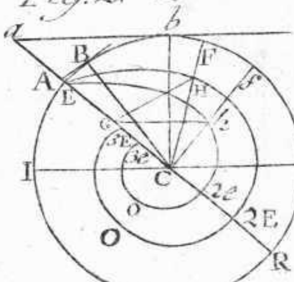


Fig. 269.

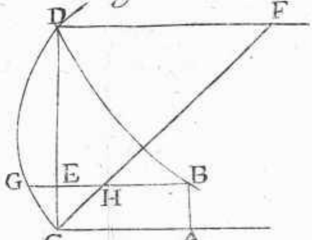
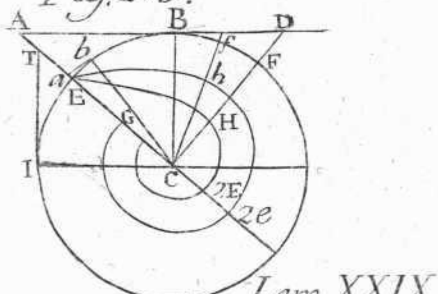


Fig. 273.



GIANNINI

Curso

Matemat.

4.