

TRATADO DE BALÍSTICA  
DE LA  
ARTILLERÍA RAYADA,

POR

EL COMANDANTE CAPITAN

D. ANTONIO DE LA AZUELA Y GOBANTES

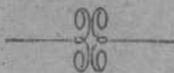
Y

EL COMANDANTE CAPITAN TENIENTE

D. JUAN LORIGA Y HERRERA-DAVILA,

PROFESOR Y AYUDANTE DE PROFESOR RESPECTIVAMENTE,

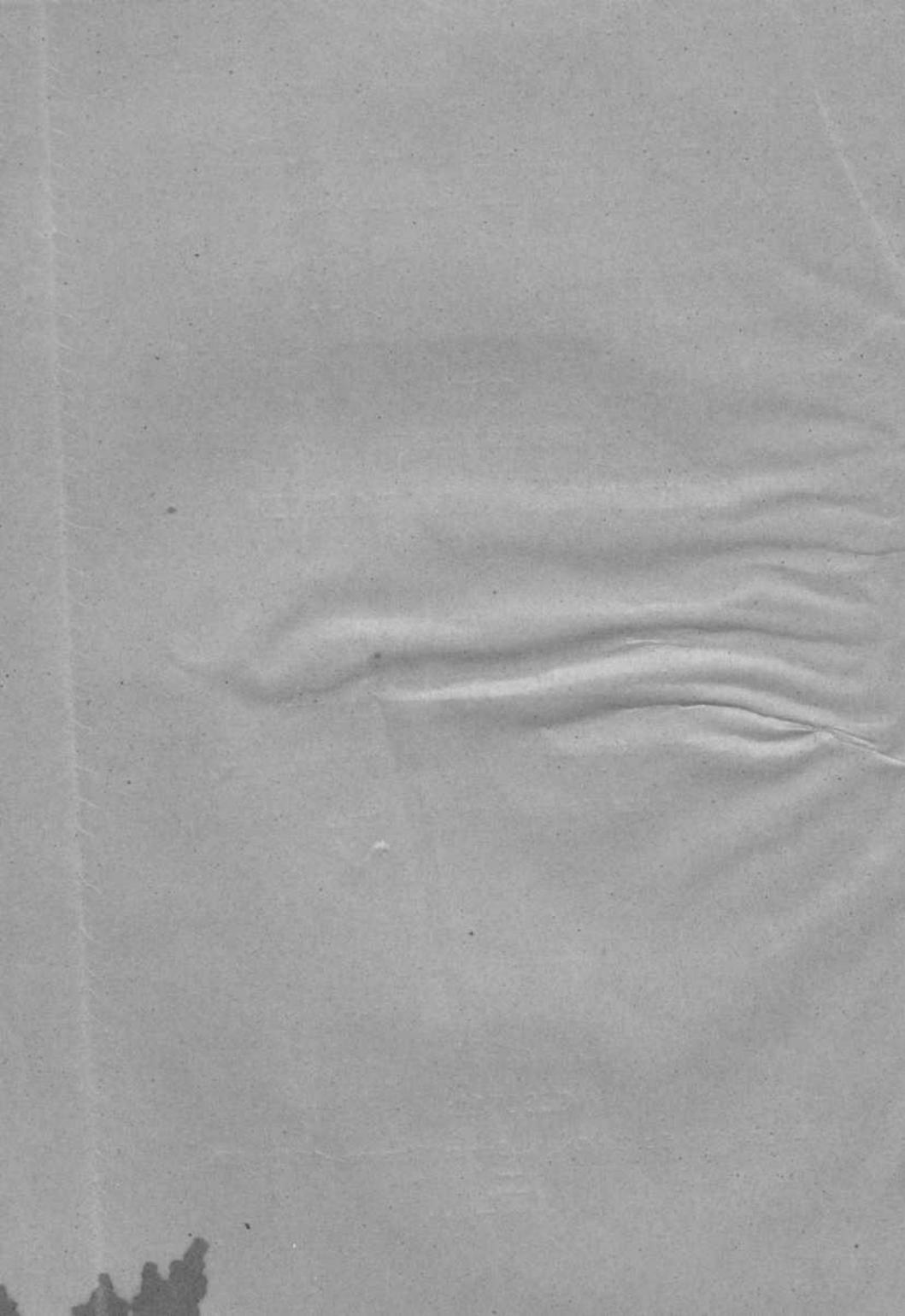
DE LA ACADEMIA DE ARTILLERIA.



SEGOVIA:

Imprenta de Ondero, Juan Bravo, 40 y 42.

1881.



TRATADO DE BALÍSTICA  
DE LA  
ARTILLERÍA RAYADA,

POR

EL COMANDANTE CAPITAN

D. ANTONIO DE LA AZUELA Y GOBANTES

Y

EL COMANDANTE CAPITAN TENIENTE

D. JUAN LORIGA Y HERRERA-DÁVILA,

PROFESOR Y AYUDANTE DE PROFESOR RESPECTIVAMENTE,

DE LA ACADEMIA DE ARTILLERIA.



SEGOVIA:

Imprenta de Oñero, Juan Bravo, 40 y 42.

1881.

T. 132612  
C. 120960



R. 128509

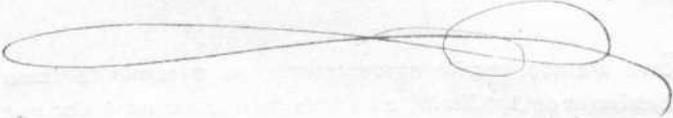
ESTE tratado, escrito expresamente, para servir de texto en la Academia de Artillería, consta de los mismos capítulos que el ya adoptado de **Balística, Artillería lisa**, con el objeto de que á la vez se pueda hacer el estudio de ambos.

Hemos procurado seguir en todo, las teorías mas modernas, quedando nuestra aspiracion cumplida, si las hemos interpretado fielmente y si, prescindiendo de la belleza de estilo, hemos sabido exponerlas con la claridad necesaria.

LOS AUTORES.

Al Sr Comte Du Marmel, Cabanyes sup  
affinas A. L. y subord.

Los Autores



# CAPÍTULO 1.º

---

## PÓLVORA Y BALÍSTICA INTERIOR.

---

**1. Componentes de la pólvora.**—La mezcla íntima de salitre, azufre y carbon, constituye este agente poderoso para las armas de fuego. Sus proporciones han variado en distintas épocas, empleándose primitivamente partes iguales de los tres, pero pronto se reconoció que el aumento del salitre aumentaba también la potencia de la pólvora, por lo que se adoptaron las proporciones de 6 de salitre, uno de azufre y otro de carbon, fórmula vulgarmente conocida por la de seis, as y as.

La viveza de la pólvora crece aumentando las proporciones del salitre y carbon, pero la circunstancia de que el aumento de azufre es conveniente para su conservacion, hace que segun el uso á qué se destine la pólvora y dimensiones de sus granos, varien las proporciones de sus componentes, siempre sin embargo separándose poco de la fórmula anteriormente citada.

La siguiente tabla indica las proporciones adoptadas en diferentes Naciones.

NACIONES.	Salitre.	Azufre.	Carbon
España.. { Pólvoras de 4 <sup>mm</sup> , de 2 <sup>mm</sup> , 50, de laminador de 2 á 5 <sup>mm</sup> , de 4 á 9 <sup>mm</sup> , de 10 á 15 <sup>mm</sup> y prismática.....	75	12,50	12,50
{ Pólvara de 9 á 14 <sup>mm</sup> cúbica.	75	10	45
Francia. { Pólvara de cañon.....	75	12,50	12,50
{ » de granos gruesos.	75	40	45
{ » de fusil.....	77	8	45
Prusia.....	74	40	46
Sajonia.....	74	40	46
Inglaterra.....	75	40	45
Rusia.....	75	40	45
Suecia.....	75	40	45
Austria.....	75,5	40	44,5
Bélgica.....	75	12,5	42,5
Holanda.....	70	44	46
Suiza.....	76	40	44
Portugal.....	75,7	10,7	43,6
Italia.....	75	40	45
Turquía.....	75	40	45
Estados Unidos.....	76	40	44
Persia.....	75	12,5	12,5
China.....	61,5	15,5	23

**2. Deflagracion de la pólvora.**—Aun cuando este fenómeno parece efectuarse instantáneamente, es un hecho comprobado que se verifica de una manera progresiva y empleándose un tiempo mas ó menos largo, que es el necesario, no tan solo para que la inflamacion se propague á toda la masa de

pólvora que constituye una carga, sino tambien para la combustion total de cada grano.

Para calcular la cantidad de pólvora quemada en un tiempo dado, deduciendo de ella la de los gases producidos se hace preciso tener en cuenta la mayor ó menor rapidez, ó sea la velocidad de cada uno de los dos fenómenos que constituyen el de la deflagracion, que son; la inflamacion y la combustion, entendiéndose por inflamacion la propagacion del calor á toda la carga, por efecto de la fuerza expansiva de los gases á la alta temperatura con que se producen desde el primer instante, y por combustion las combinaciones que tienen lugar entre los elementos de cada grano ó de todos los que forman la carga.

3. Segun las experiencias de Aubert, Luigke y Lampadius, la inflamacion puede producirse por el choque de hierro sobre hierro, hierro sobre laton y laton sobre laton: menos fácilmente chocando hierro sobre cobre y cobre sobre cobre: se produce además, por el de bronce sobre cobre, hierro sobre mármol, cuarzo sobre cuarzo, plomo sobre plomo, plomo sobre madera, muy raramente por el de cobre sobre madera y nunca por el de madera sobre madera, observándose que la interposicion de una hoja de papel entre los cuerpos que chocan, hace que la inflamacion se favorezca.

Se produce tambien la inflamacion de la pólvora por la elevacion de temperatura. Segun las experiencias de Piobert comprobadas por Horsley es preciso para esto, que la temperatura llegue á ser de  $300^{\circ}$  á  $315^{\circ}$  y segun Leygue y Champion basta sea  $288^{\circ}$  para la pólvora de caza y  $295^{\circ}$  para la de guerra.

Cuando la temperatura se eleva de una manera gradual, se funde el azufre antes de llegar á los  $300^{\circ}$ , lo que hace que se unan los granos formando una pasta: si continúa elevándose la temperatura, puede, vaporizándose el azufre, arrastrar en parte al carbon, llegando á descomponerse la pólvora sin deflagrar, siempre que no se llegue á la temperatura de ebullicion del primero.

Para la determinacion de la temperatura de inflamacion de la pólvora, emplearon Leygue y Champion una barra de cobre

que calentaban por una de sus extremidades, aislando el foco de calor por medio de una pantalla para impedir la radiacion: observaban la temperatura en diferentes puntos de la barra que distaban entre si una magnitud fija, para lo que se valian de termómetros colocados en unas cavidades abiertas en ella y llenas de aceite. Cuando permanecia constante la temperatura marcada en los termómetros, colocaban en la extremidad mas fria de la barra la pólvora sometida á la experiencia, aproximándola al otro extremo hasta tanto que se verificaba la inflamacion ó descomposicion.

Las cifras expresadas no deben sin embargo considerarse como indicando invariablemente la temperatura de inflamacion de la pólvora; sirven tan solo, para marcar un punto alrededor del cual oscila la de las diversas clases de pólvora. La divergencia que se nota en ellas debe principalmente atribuirse, al estado de trituracion de los ingredientes, siendo tanto mayor la temperatura necesaria para la inflamacion cuanto mas perfecta sea aquella.

El contacto de cuerpos inflamados es tambien causa de que la pólvora deflagre, siendo en este caso necesario que la temperatura sea muy elevada, habiéndose observado que una llama puede estar algunos segundos tocando á la pólvora sin que tal fenómeno se produzca.

El medio mejor y mas seguro para producir la inflamacion de la pólvora es por el contacto de cuerpos en ignicion.

Diversas son las causas que pueden favorecer ó retardar la inflamacion. Estando húmeda la pólvora, se retarda, lo que es debido á la pérdida de calórico para evaporar el agua, pudiendo suceder que si la humedad es grande, no deflagre y solo se produzca una combustion lenta: las pólvoras angulosas son mas facilmente inflamables que las redondas y mas tambien las no pavonadas que las que lo están.

**4. Pólvoras progresivas.**—La artilleria rayada desde su adopcion, impuso á las pólvoras condiciones que si bien eran ya de reconocida utilidad, no se presentaban antes como indispensables por ser mucho menor el trabajo que de

las piezas se exigía. El aumento de peso en los proyectiles, que desde el principio de la artillería rayada fué de dos ó dos y media veces el que tenían los de igual calibre en la lisa, el movimiento de rotacion que se les obliga á adquirir y el mayor rozamiento en el ánima, debido á los tetones ó envuelta, son causas todas que aumentan considerablemente la inercia del proyectil. En las pólvoras que entonces se usaban, se verificaba muy rápidamente la inflamacion de toda la carga, siendo por consiguiente muy considerable la cantidad de gases producidos en los primeros momentos y cuando el proyectil aun no ha iniciado su movimiento, es decir, cuando es mayor el efecto nocivo sobre las paredes del ánima. La consecuencia natural de la mayor potencia de la artillería fué un aumento en las defensas que tiene que batir y proporcionalmente á él, crecieron tambien las condiciones de potencia exigidas á las piezas, llegando hoy á usarse proyectiles cuatro ó cinco veces mas pesados que los esféricos de igual calibre y si al principio de la artillería rayada se usaban solo cargas de  $\frac{1}{8}$  ó  $\frac{1}{12}$  del peso del proyectil, hoy se emplean hasta las de  $\frac{1}{3}$  ó  $\frac{1}{2}$  del actual, que es la mayor proporcion á que se llegó en la lisa.

Estas consideraciones prueban la necesidad imperiosa que hay de adoptar nuevas pólvoras, en las que por el sistema de fabricacion empleado y forma del grano, permitan obtener las velocidades iniciales á que se aspira sin efecto nocivo sobre la pieza, es decir; pólvoras en las que sea un minimo la emision de gases al principio de su combustion y tan solo la necesaria para vencer la inercia del proyectil, aumentando despues rápidamente á medida que este adquiera mayor velocidad.

Las pólvoras que cumplen con estas condiciones son las que toman el nombre de progresivas, y actualmente pueden comprenderse en cuatro grupos.

- 1.º *Pólvoras de granos gruesos.*
- 2.º *Pólvoras de granos acanalados.*
- 3.º *Pólvoras de capas concéntricas cuya combustibilidad aumenta de la superficie al centro.*
- 4.º *Pólvoras comprimidas.*

**5. Pólvoras de granos gruesos.**—En realidad, toda pólvora homogénea, dura y de grano grueso, es progresiva. En efecto, admitiendo que la combustion se verifica por capas concéntricas, y que como muy luego veremos, crece la velocidad de combustion muy rápidamente con la presión, resulta, que si bien desde un principio la superficie de inflamación disminuye constantemente, esta disminución puede ser mas que compensada con el crecimiento de la velocidad, y aumentar por lo tanto tambien la emision de gases hasta que el proyectil adquiera su máxima velocidad.

**6.** Para comprobar que la velocidad de combustion crece con la presión, puede hacerse la experiencia siguiente: en un tubo de acero A (fig. 1.<sup>a</sup>) se introduce polvorin, cerrando la extremidad abierta con un tapon roscado que tiene en su centro un pequeño orificio, por el que se inflama la pólvora y salen los gases, con tanta mayor dificultad, cuanto menor sea aquel. De esta manera se comprueba, repitiendo la experiencia con diferentes tapones, que la pólvora se quema mas rápidamente que al aire libre, y tanto mas á medida que crezca la presión.

Este mismo hecho queda demostrado en el tiro de las piezas que emplean grandes cargas, pues si en ellas se quemase la pólvora con una velocidad de combustion igual á la que tiene al aire libre, en el tiempo tan pequeño que el proyectil tarda en abandonar el ánima no podría quemarse mas que una pequeña porcion de la carga saliendo el resto sin arder, lo que no sucede en el tiro, pues tan solo alguna vez se observa algun grano en la proximidad de la pieza sin haberse quemado. Conocido que sea el peso de la carga y el tiempo que el proyectil emplea en recorrer el ánima, puede deducirse el valor medio de la velocidad de combustion que ha sido precisa para que aquella se queme completamente. Suponiendo que la inicial sea de 10<sup>mm</sup> como al aire libre, Castan deduce, que la máxima velocidad que dentro del ánima alcanza la combustion, es 100 veces mayor que aquella.

**7.** La densidad del grano influye de un modo notable en la regularidad de su combustion. Empleando pólvora de granos

gruesos se observan en la proximidad de la pieza algunos que son de menor tamaño que el que tenían primitivamente, presentando en su superficie huellas de combustion, lo que prueba que iniciada que fué esta en el interior del ánima, al salir al aire libre cesó, hecho que atribuye Castan al notable descenso de temperatura que experimentan pasando de estar bajo la enorme presion que en el ánima existe á la atmosférica; en estos granos tambien ha aumentado su dureza, merced sin duda alguna á esa misma considerable presion.

Observando estos granos medio quemados se vé presentan una forma derivada de la que en un principio tenían, notándose en ellos cuando su densidad es solo 4,700 algunas cavidades, y claro es que propagándose la combustion á través de estas con mayor viveza, no se verificará uniformemente este fenómeno: á medida que la densidad aumenta, las cavidades disminuyen, la combustion se verificará por lo tanto con mas regularidad aproximándose á efectuarse por capas concéntricas y tanto es así, que cuando la densidad es de 4,850 presentan los granos una forma en todo semejante á la primitiva, es decir, que tan solo en pólvoras de gran densidad la combustion se verifica por capas concéntricas.

Este hecho es de fácil explicacion: las pólvoras poco densas son muy porosas lo que hace posible que la combustion propagándose con mas facilidad por los poros, llegue al centro de los granos antes de haberse inflamado las otras partes, pudiendo suceder que habiendo llegado al centro, se propague despues la combustion del centro al exterior.

Esto mismo puede verificarse por efecto de la dureza del carbon empleado en la fabricacion de la pólvora: en efecto, la dureza del carbon puede hacer que en la inmediacion de sus partículas queden sin comprimir algunas partes de la pasta, resultando mas blanda en estos puntos y por consiguiente mas inflamable que en el resto del grano, pero este defecto que produce el mismo resultado que la mayor porosidad, debe presentarse naturalmente con mas frecuencia en las pólvoras poco densas, explicándose de este modo las cavidades que se obser-

van en granos de esta clase de pólvoras despues de un principio de combustion.

8. Se comprende tambien la mayor regularidad de combustion en las pólvoras muy densas, por cuanto el crecimiento de la densidad que experimentan los granos por efecto de la presion interior desarrollada, es relativamente menor cuanto mayor sea la primitiva, y como la presion es variable y con ella la velocidad de combustion, claro es que estas alteraciones serán mas pequeñas en las pólvoras densas, pudiendo en cambio suceder en las ligeras que lleguen á conducirse en la combustion como si no lo fuesen, por el aumento de su densidad debida á la presion.

9. Otra de las causas que influyen en la combustion de la pólvora es la forma de sus granos.

Si consideramos un grano cúbico de una pólvora densa cuya arista sea  $a$  y que esta, por efecto de la combustion se reduzca al cabo de un cierto tiempo á  $a-x$ , para que los pesos de gases emitidos sean iguales en un mismo tiempo en ambos estados del grano, siendo asi que su superficie es distinta, es preciso que las velocidades de combustion sean inversamente proporcionales á dichas superficies, es decir, que se verifique .

$$\frac{v}{v'} = \frac{(a-x)^2}{a^2}$$

y si admitimos que la velocidad inicial de combustion sea la misma que al aire libre,  $v=10^m$  próximamente

$$v' = \frac{10 \cdot a^2}{(a-x)^2}$$

y suponiendo

$$a-x = \frac{1}{10} a,$$

considerando el instante en que la arista se haya reducido á  $\frac{1}{10}$  de su primitiva longitud, se tiene

$$v' = 1^m$$

es decir, que á partir del valor  $x=0$ , ó sea al empezar la

combustion del grano, hasta el valor de  $x$  que verifica la condicion

$$a - x = \frac{4}{10} a,$$

en que puede considerarse aniquilado por completo aquel, la velocidad de combustion debe crecer proporcionalmente á la relacion

$$\frac{a^3}{(a-x)^3} \quad \text{entre los limites, } v' = 10^{mm} \quad \text{y} \quad v' = 1^m$$

puediendo por lo tanto admitirse sea constante la emision de gases en el grano cúbico, pues como hemos dicho, la velocidad de combustion en la pieza crece entre los limites anteriores.

**10.** Si ahora consideramos un grano aplastado (que son los imaginados por el ilustrado Capitan Castan de la Artillería Francesa) que tenga por ejemplo 4 de altura y 2 para el lado de la base, la superficie inicial de inflamacion será 46, y cuando por efecto de la combustion haya disminuido en altura hasta quedar reducido á una sola capa de pequenísimos espesor, aquella superficie será 4, prescindiendo de la lateral, y se tendrá

$$\frac{v}{v'} = \frac{4}{46}$$

de donde

$$v' = 4v = 40^{mm}.$$

Si el grano fuese aun mas rebajado, teniendo 4 de altura y 3 para lado de la base, se verificaria

$$v' = 3,3v = 33^{mm}.$$

De lo dicho resulta, que para la forma cúbica la emision de gases puede considerarse como constante y creciente para la forma aplastada, pues que las velocidades de combustion aumentan mas rápidamente de lo que seria preciso para una emision constante.

**11.** Para que los granos se quemén en el mismo tiempo, basta que el radio de la esfera inscrita sea igual en todos ellos,

ó lo que es lo mismo que la dimension mínima que tengan sea igual, lo que segun propone Castan puede fácilmente obtenerse, graneando galletas duras de un espesor constante, de manera que este espesor resulte ser la minima dimension de los granos.

De aquí se deduce, que una pólvora en que sea igual el número de granos que contenga cada kilógramo, si es constante en todos ellos la dimension mínima, se conducirá para el fenómeno de la combustion como si todos fuesen exactamente iguales, circunstancia importante cuya aplicacion muy pronto veremos.

**12. Pólvoras de granos acanalados.**—A esta clase pertenece la pólvora prismática rusa que afecta la forma de un prisma exagonal (fig. 2.<sup>a</sup>) con siete canales que son algun tanto cónicas para facilitar la fabricacion; constituyen una pólvora progresiva por que á medida que el grano se quema y la superficie exterior disminuye, aumenta notablemente la interior, creciendo por lo tanto la emision de los gases; presentan el grave inconveniente de estar muy expuestos á romperse los granos por efecto de la presion, en cuyo caso darán una gran cantidad de gases que causarán mucho efecto nocivo sobre las paredes del ánima, dejando así de ser progresiva.

**13. Pólvoras de capas concéntricas.**—Cualquiera que sea la figura de los granos y las condiciones de la combustion, esta clase de pólvoras siempre son progresivas, por estar formadas por un núcleo de pólvora viva al que se sobrepone varias capas de otras que van siendo cada vez mas densas, por lo que avivándose la combustion del exterior al interior, la emision de los gases es creciente: fácilmente se concibe la dificultad de su fabricacion, así como la de conseguir homogeneidad en las diversas capas.

**14. Pólvoras comprimidas.**—Su objeto es presentar una superficie inicial de inflamacion muy pequeña. Están formadas por la aglomeracion de granos de pólvora ordinaria, llevada á cabo por medio de una presion; de este modo, cuando los gases penetran entre ellos se disgregan y continúa la

combustion como se verificaria en la pólvora que ha servido para formarlos.

Desde luego se concibe, que si como es lógico suponer, la rotura de los granos se verifica con mucha rapidez, habrá en un momento una considerable emision de gases que causarán gran efecto nocivo sobre la pieza. Esta pólvora es, por otra parte, muy fácil de deteriorarse en los trasportes, y si así sucede, desde un principio se conducirá como la ordinaria.

**15. Velocidad de inflamacion.**—Las numerosas experiencias llevadas á cabo por Piobert demuestran la influencia que sobre la velocidad de inflamacion ejercen, la forma, dimensiones y distiata naturaleza de los granos, ya sea verificándose aquella al aire libre ó en tubos mas ó menos resistentes. La forma y dimensiones de los granos influyen por el número y magnitud de los intersticios que entre ellos quedan, siendo el aumento de estos, circunstancia que favorece la propagacion de los gases en todos sentidos. De las expresadas experiencias, resulta que al aire libre:

1.° *La pólvora en polvo se inflama mucho mas lentamente que la graneada.*

2.° *Las pólvoras de carbon negro son menos inflamables que las de carbon rojo.*

3.° *La velocidad de inflamacion está en razon inversa de las raices cuartas de los diámetros de los granos.*

4.° *Las pólvoras pavonadas y densas, tienen menor velocidad de inflamacion que las que no lo están y son ligeras.*

En tubos resistentes sucede lo contrario, crece la velocidad de inflamacion con el tamaño del grano, siendo tambien mayor en las de carbon negro.

**16. Velocidad de combustion bajo presion constante.**—Tambien Piobert en sus experiencias dedujo que la velocidad de combustion de la pólvora depende muy especialmente de la presion bajo la cual se verifica, de tal modo, que siendo esta constante aquella lo es tambien: que la combustion se propaga normalmente á la superficie inflamada cualquiera que sea la forma del grano, deduciendo además:

que su velocidad está en razón inversa de la densidad de la pólvora, por lo que, si la representamos por  $V_0$ , y por  $\delta$  la densidad, puede establecerse

$$V_0 \delta = c \quad (1)$$

siendo  $c$  una constante que caracteriza la velocidad de combustión de las diversas pólvoras; sus valores para la francesa de guerra, compuesta de 75 partes de salitre, 12,50 de azufre y 12,50 de carbon se insertan en la siguiente tabla:

Procedimiento de fabricación.	Tiempo empleado en la trituration.	Sistema de secado.	Valor de $c$ .
Pilonos.....	24 horas...	Sol.....	0,4947
		Estufa....	0,4870
	44 horas...	Sol.....	0,4965
		Estufa....	0,4864
Muelas.....	4 horas....	»	0,2459
Muelas y prensas..	4 »	»	0,2038
Toncles y prensas	3,50 »	»	0,1860
	6 »	»	0,1826
	8 »	»	0,1778

Los valores que admite Sarrau en sus notables trabajos sobre el estudio de las sustancias explosivas y que seguiremos para la determinación de las fórmulas de velocidades y presiones, son; 0,200 para las pólvoras de guerra y 0,130 para las de caza, tomando por unidades el decímetro y el segundo (\*)

17. En cuanto á la naturaleza y dosis de los componentes de la pólvora, el mismo Piobert ha deducido la influencia que ejercen, estableciendo las siguientes consecuencias:

(\*) Recherches théoriques sur les effets de la poudre et des substances explosives—Sarrau—Año 1874 y siguientes.

1.º *El exceso de salitre, así como las impurezas que puede contener, retardan la combustión de la pólvora, aumentándola en cambio el exceso de carbon y de azufre hasta cierto límite.*

2.º *La velocidad de combustión varía en sentido contrario de la humedad y de la densidad.*

La siguiente tabla dá á conocer para distintos grados de humedad, el valor de la constante *c* para la pólvora de guerra.

Procedimiento de fabricacion.	Tiempo empleado en la trituracion.	Proporcion por 100 de humedad.	Valor de <i>c</i> .
Pilonos.....	11 horas.....	0,75	0,184
		1,50	0,168
		2,50	0,145

3.º *El secado al sol aumenta notablemente la velocidad de combustión.*

4.º *La energía en la trituración aumenta la velocidad de combustión, por lo que es mayor en las fabricadas con muelas que en las de pilonos y mayor en estas que en las de prensas.*

5.º *No parece ejercer influencia en la velocidad de combustión el tiempo empleado en la trituración.*

**18. Velocidad de combustión bajo presión variable.**—Las varias experiencias verificadas por Papacino d'Antoni, Munke, Hearder, Bianchi, Heeren y Abel nos conducen á establecer reasumiéndolas, que la pólvora se quema tanto mas difícilmente cuanto menor sea la presión, y que en el vacío, tan solo á temperaturas muy elevadas llega á arder pero sin explosión, produciéndose esta en el instante en que se permite la entrada del aire.

Las experiencias de Heeren demuestran que en el vacío, introduciendo en una masa de pólvora un hilo de platino puesto incandescente por la acción de una corriente eléctrica,

si permanece poco tiempo en ignición, los granos que están próximos á él empiezan á fundirse sin quemarse, y que prolongando la acción de la corriente se queman, no comunicando el fuego al resto de la pólvora. El mismo experimentador, explica este fenómeno, por la gran dilatación que tienen los gases formados, lo que originando un descenso grande de temperatura hace sea insuficiente la que les queda para producir la inflamación de los demás granos.

Siendo por lo dicho la velocidad de combustión nula con la presión y creciente con ella, admite Sarrau que varía proporcionalmente á una potencia suya, pudiendo establecerse

$$v = v_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (2)$$

siendo  $v$  y  $v_0$  las velocidades de combustión correspondientes á las presiones  $p$  y  $p_0$ .

El valor de  $\alpha$  es igual á 0,66 para presiones menores que una atmósfera, y para las superiores, muy particularmente para las que se desarrollan en el interior de las armas de fuego, 0,50.

**19.** Saint Robert verificó experiencias sobre la combustión bajo presiones débiles en distintas alturas de los Alpes, empleando unas mechas de gran homogeneidad que se obtenían haciendo pasar por una hilera tubos de plomo llenos de pólvora. La tabla siguiente resume los resultados.

Presión.	Duración de la combustión.
740, <sup>mm</sup> 0	35, 0
726, 0	35, 1
724, 3	35, 2
694, 1	36, 1
648, 7	38, 8
610, 4	39, 0
559, 4	44, 5
529, 4	44, 0

Siendo la fórmula que mas aproximadamente los comprende

$$v = A \cdot p^{\frac{2}{3}}$$

en la que A representa un coeficiente constante. El exponente  $\frac{2}{3}$  corrobora lo anteriormente dicho sobre el valor de  $\alpha$ .

**20. Velocidad media de combustion.**—Es á veces útil en las aplicaciones sustituir á la presion variable de los gases de la pólvora en el interior de las armas, otra presion media constante, que sea la necesaria para producir la velocidad inicial del proyectil. Si representamos esta por  $v$  y por  $m$  su masa, el trabajo desarrollado por la fuerza necesaria para producir la expresada velocidad será  $\frac{1}{2} m v^2$ , siendo tambien su expresion  $p_m \omega n$  si  $p_m$  representa la presion media constante por unidad de superficie,  $\omega$  la seccion del proyectil y  $n$  el espacio por este recorrido; de la igualdad de estas dos expresiones se deduce

$$p_m = \frac{1}{2} \frac{m \cdot v^2}{\omega \cdot n}$$

valor que en las armas es próximamente  $\frac{1}{3}$ , de la presion máxima.

Si representamos por  $v_m$  la velocidad media de combustion, llamando así á la correspondiente á la presion media y siendo tal, que en el tiempo en que el proyectil tarde en recorrer el ánima se verifique la combustion total de la carga, puede admitirse

$$v_m = A p_m^{\frac{1}{3}}$$

**21. Cantidad de pólvora quemada en un tiempo cualquiera.**—En todo cuanto sigue supondremos que el tiempo empleado en la inflamacion es despreciable con relacion al necesario para la combustion; en ello no hay error sensible tratándose de pólvoras progresivas, que son las hoy generalmente usadas en todas las piezas de grueso calibre.

Bajo este supuesto, sea  $\pi$  el peso de la carga empleada

compuesta de granos iguales,  $\Psi(t)$  la fracción del peso de uno de ellos que se quema durante el tiempo  $t$ , contado desde el momento que empieza su inflamación; la cantidad  $y$  de pólvora quemada durante el mismo tiempo será

$$y = \omega \cdot \Psi(t) \tag{3}$$

**22. Combustion bajo presión constante.**—Admitiendo que la función  $\Psi(t)$  es analítica, cumpliendo con la condición de ser nula con el tiempo, desarrollada por la fórmula de Maclaurin se reducirá á la forma

$$\Psi(t) = \Psi'(0) t + \Psi''(0) \frac{t^2}{1.2} + \dots$$

y llamando  $\tau$  al tiempo empleado en la combustión completa de un grano, siempre puede suponerse á  $\Psi(t)$  expresada por

$$\Psi(t) = -\frac{\alpha \cdot t}{\tau} \left( 1 - \lambda \frac{t}{\tau} + \mu \frac{t^2}{\tau^2} + \dots \right) \tag{4}$$

fórmula en la que se pone signo negativo al segundo término, porque es el que se obtiene en la práctica en la generalidad de los casos como muy pronto veremos: la cantidad  $\tau$  es la que directamente depende de la naturaleza de la pólvora, forma y dimensiones del grano, siendo  $\alpha, \lambda, \mu$ , coeficientes numéricos que se conservan invariables para granos semejantes y cuyos valores se determinan igualando los de las diversas potencias de  $t$  de la fórmula (4) á los correspondientes del desarrollo en serie de  $\Psi(t)$  supuesta conocida.

**23. Granos esféricos.**—Llamando  $v$  la velocidad constante de combustión y  $r$  el radio del grano, claro es que en el tiempo  $t$  quedará este reducido á

$$r - vt$$

y el volúmen del grano á

$$\frac{4}{3} \pi (r - vt)^3$$

habiéndose quemado por lo tanto un volúmen de pólvora en el tiempo  $t$

$$\frac{4}{3} \left\{ \pi r^3 - \pi (r - vt)^3 \right\}$$

por lo que, siendo  $\Psi(t)$  la fracción de grano quemada en el tiempo  $t$ , su valor se obtendrá dividiendo esta expresión por el volumen primitivo y será

$$\Psi(t) = 1 - \left( 1 - \frac{vt}{r} \right)^3$$

y como  $r = 7v$  se tendrá, desarrollando  $\Psi(t)$  y sustituyendo por  $\frac{v}{r}$  su valor  $\frac{1}{7}$

$$\Psi(t) = \frac{3t}{7} - \frac{3t^2}{7^2} + \frac{t^3}{7^3}$$

valor que comparado con la fórmula general (4) da

$$a=3, \quad \lambda=1, \quad \mu=\frac{1}{3} \quad (5)$$

**24. Granos cilíndricos acanalados.**—Siendo  $r$  y  $r'$  los radios exterior e interior y  $v$  la velocidad de combustión, al cabo de un cierto tiempo  $t$ , tendrán respectivamente por valores  $(r - vt)$  y  $(r' + vt)$ , así como, si es  $h$  la altura primitiva del cilindro, se habrá reducido en el mismo tiempo á  $h - 2vt$  y por consiguiente el volumen del grano será

$$\pi \left\{ (r - vt)^2 - (r' + vt)^2 \right\} (h - 2vt)$$

y siendo el primitivo

$$\pi (r^2 - r'^2) h$$

el de pólvora quemada será

$$\pi (r^2 - r'^2) h - \pi \left\{ (r - vt)^2 - (r' + vt)^2 \right\} (h - 2vt.)$$

expresión que desarrollada y dividida por el volumen primitivo, da

$$\Psi(t) = 2v \left( \frac{1}{r - r'} + \frac{1}{h} \right) t - \frac{4v^2}{(r - r')h} t^2$$

La duración  $\tau$  se obtendrá dividiendo por  $v$  la mitad de

la menor dimension del grano, es decir  $h$  ó  $r-r'$  y llamando  $x$  la relacion de la menor á la mayor de estas cantidades, se tiene

$$\Psi(t) = \frac{(1+x)t}{\tau} \left( 1 - \frac{t}{\tau} \cdot \frac{x}{1+x} \right)$$

y por lo tanto

$$a = 1+x, \quad \lambda = \frac{x}{1+x}, \quad \mu = 0 \quad (6)$$

**25. Granos paralelepípedicos.**—Llamando  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , las dimensiones del grano, bajo la hipótesis de combustion uniforme con la velocidad constante  $v$ , al cabo del tiempo  $t$  su volúmen será

$$(\alpha - 2vt) (\beta - 2vt) (\gamma - 2vt)$$

y por consiguiente,

$$\Psi(t) = 1 - \left( 1 - \frac{2vt}{\alpha} \right) \left( 1 - \frac{2vt}{\beta} \right) \left( 1 - \frac{2vt}{\gamma} \right)$$

y de aquí,

$$\Psi(t) = 2v \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) t - 4v^2 \left( \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} \right) t^2 + 8v^3 \frac{1}{\alpha\beta\gamma} t^3$$

Si por otra parte, suponemos que  $\alpha$  es la menor dimension del grano, se tiene

$$\tau = \frac{\alpha}{2v}$$

y si hacemos

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{é} \quad y = \frac{\alpha}{\gamma}$$

la expresion de  $\Psi(t)$  se reducirá á

$$\Psi(t) = (1+x+y) \frac{t}{\tau} - (x+y+xy) \frac{t^2}{\tau^2} + xy \frac{t^3}{\tau^3}$$

y por lo tanto,

$$a = 1 + x + y, \quad \lambda = \frac{x + y + xy}{1 + x + y}, \quad \mu = \frac{xy}{1 + x + y} \quad (7)$$

Si fuese cúbico el grano,  $\alpha = \beta = \gamma$ , por lo que,  $x = y = 1$  y

$$\Psi(t) = \frac{3t}{7} - \frac{3t^2}{7^2} + \frac{t^3}{7^3}$$

es decir,

$$a = 3, \quad \lambda = 1, \quad \mu = \frac{1}{3}$$

valores iguales á los obtenidos para los granos esféricos.

**26. Combustion bajo presion variable.**—Cuando es variable la presion, sabemos que la velocidad de combustion se anula con ella y crece rápidamente si ella aumenta, por lo tanto, en el interior de una arma de fuego crecerá hasta que la presion adquiera su valor máximo, que será en general cuando el proyectil haya recorrido una pequeña parte del ánima, decreciendo despues, aun cuando lentamente. Llamando  $v$  á esta velocidad variable, la longitud recorrida por la combustion normalmente á la superficie de ignicion durante el

tiempo  $t$  será  $\int_0^t v dt$ , por lo que los cálculos que en las formas de granos considerados nos han conducido á la determinacion de  $\Psi(t)$ , serán los mismos para el caso actual, sin otra variacion que la de sustituir la cantidad  $vt$  recorrida por la combustion en el caso de ser uniforme, por la que ahora recorre

$$\int_0^t v dt = v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt.$$

es decir, que el desarrollo de  $\Psi(t)$  cuando es variable la presion, se obtiene substituyendo en la fórmula (4),  $\int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt$  en lugar de  $t$ , conservando todas las otras cantidades el mismo valor, por lo que

:

$$\Psi(t) = \frac{a}{\tau} \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt \left(1 - \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt + \dots\right) \quad (8)$$

Haciendo aplicacion á un grano cilindrico acanalado, conservando las mismas notaciones que las empleadas cuando la combustion era uniforme, su volúmen al cabo del tiempo  $t$  contado desde que aquella empieza, quedará reducido á

$$\pi \left\{ (r - v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt)^2 - (r' + v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt)^2 \right\} (h - 2v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt)$$

y

$$\Psi(t) = \frac{\pi (r^2 - r'^2) h - \pi \left( r - v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt \right)^2 (h - 2v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt)}{\pi (r^2 - r'^2) h} +$$

$$+ \frac{\pi \left( r' + v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt \right)^2 (h - 2v_0 \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt)}{\pi (r^2 - r'^2) h}$$

que desarrollada, se convierte en

$$\Psi(t) = 2v_0 \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{r - r'} \right) \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt - \frac{4v_0^2}{h(r - r')} \left( \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt \right)^2$$

y llamando  $\alpha$  la relacion de la menor á la mayor de las cantidades  $h$  y  $(r - r')$ , y  $\tau$  la duracion de la combustion total del grano bajo la presion constante  $p_0$ , se tiene

$$\Psi(t) = (1 + \alpha) \frac{\int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt}{\tau} - \alpha \frac{\left( \int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt \right)^2}{\tau^2}$$

que es la misma fórmula hallada para esta clase de granos cuando la presion es constante, sin mas que sustituir  $\int_0^t \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha dt$  en lugar de  $t$ .

**27. Duracion de la combustion total de un grano.**—El valor de  $\tau$  que entra en las fórmulas (4) y (8), se obtiene segun hemos dicho dividiendo por el doble de la velocidad de combustion, la menor de las dimensiones del grano que esta tenga que recorrer para quemarlo por completo.

Conocida la velocidad  $v_0$  para las diferentes pólvoras por medio de la fórmula (1), queda tan solo determinar la dimension mínima de los granos; esta puede, en general, obtenerse en funcion de la densidad  $\delta$  de la pólvora y del número  $N$  de granos que entran en un kilogramo.

En la pólvora de grano esférico, la dimension mínima será el radio, y como

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \delta N = 1$$

se deduce

$$r = \left( \frac{3}{4\pi\delta N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

Si la pólvora fuese de granos irregulares, el valor de  $r$  así obtenido será el radio de los de una pólvora que teniéndolos iguales, su densidad y número en kilogramo fuese igual á los de la dada, y á la que por lo tanto podría sustituir.

Siendo paralelepípedo se tiene

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot N = 1$$

y suponiendo que  $\alpha$  es menor que  $\beta$  y  $\gamma$ , y llamando  $\alpha$  é  $\gamma$  las

relaciones  $\frac{\alpha}{\beta}$  y  $\frac{\alpha}{\gamma}$ , se deduce

$$\alpha = \left( \frac{\alpha \gamma}{\delta N} \right)^{\frac{1}{3}} \dots \dots \quad (10)$$

que se convierte, para la pólvora cúbica, en

$$\alpha = \left( \frac{1}{\delta N} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Así pues, en esta clase de pólvora, suponiendo que los granos

son semejantes,  $x$  ó  $y$  tendrán para todos unos mismos valores, que se determinarán, sea por la inspeccion de un grano, sea por los datos de fabricacion; el de  $\alpha$  dado por las fórmulas, seria la tercera dimension de un grano medio con el que se formase una carga que sustituya á la dada.

**28 Naturaleza y estado de los productos de la combustion.**—Las delicadas experiencias llevadas á cabo por Noble y Abel con objeto de determinar la naturaleza de los productos de la combustion, merecen una atencion especial, por las importantes conclusiones que de ellas se deducen.

Para ejecutar estas experiencias, hicieron uso de un vaso de acero templado A (fig. a), en cuya capacidad interior B se producía la explosion de la pólvora objeto de sus investigaciones. Un tapon roscado C, llamado tapon de inflamacion, cierra el orificio tronco-cónico hecho en la pared del vaso, dándole aquella figura geométrica para facilitar su extraccion despues de inflamada la carga, porque en los cilindricos se observó que al dilatarse el vaso se interponian residuos entre los filetes, de tal modo, que hacian imposible el destornillar aquel.

El tapon de inflamacion presenta en su eje un hueco tronco-cónico que se cierra con otro tapon de la misma forma D, cuya base mayor está hácia el interior del vaso y se aprieta por medio de una tuerca S, interponiendo entre esta y la cabeza del tapon de inflamacion una redondela de caoutchouc W para evitar los escapés de gas.

En K se coloca el aparato para medir la tension interior. El orificio F, que por medio de la canal H sirve para dar salida á los gases y recibirlos en el gasómetro, se cierra por medio del obturador G que entra á rosca y puede abrirse mas ó menos.

El tapon D se recubre con un papel muy fino de seda que sirve de aislador, y los dos hilos metálicos SS colocados uno en el cono aislado y otro en el tapon de inflamacion, están unidos por un hilo de platino que atraviesa un tubo de vidrio lleno de polvorin; poniendo estos hilos en comunicacion con una pila eléctrica, se produce la inflamacion de la carga.

Para medir el volúmen de los gases permanentes, se coloca el cilindro C (fig. b) que los contiene, sobre la parte superior D del vaso A; este está lleno de agua en su hueco anular B, dentro del cual entra el cilindro E, que lleva una escala J. Se observa la graduacion de la escala antes de dar salida á los gases y despues de abrir por medio de la manivela M, el orificio del vaso C, y así se deduce el volúmen de aquellos á la temperatura marcada por el termómetro H y la altura barométrica del lugar de la experiencia, pudiendo reducir aquel volúmen á 0° y 0<sup>m</sup>,76 de presion.

Para analizar los gases producidos en la explosion, se atornilla al orificio H (fig. a) un tubo terminado en otro de caoutchouc y sobre la cubeta de mercurio se recogen aquellos en tubos de vidrio que se cierran á la lámpara.

En cuanto á los residuos sólidos, quedan en su mayor parte reunidos en el fondo, y solamente una delgada capa cubre las paredes del vaso; estos residuos presentan una superficie perfectamente lisa, de un color casi negro en el exterior y verdoso hácia el interior; son de una dureza considerable, hasta el punto de ser preciso para arrancarlos el uso de cinceles de acero, con lo que unas veces salen en pedazos y otras reducidos á polvo fino; la parte que no puede desprenderse en el estado seco se disuelve en agua, conservando la disolucion en frascos bien tapados para someterla al análisis.

Del resúmen de las citadas experiencias dedujeron Noble y Abel, que en el instante de la combustion se produce un 43 por 100 en peso de gases permanentes y un 57 por 100 de residuos que afectan en el primer instante el estado líquido, pasando pocos segundos despues de la explosion al estado sólido.

**29.** El análisis cualitativo de estos productos ha hecho ver, que los gases permanentes están formados; de ácido carbónico, hidrógeno sulfurado, oxígeno, óxido de carbono, gas de los pantanos, hidrógeno y ázoe; y los residuos, de monosulfuro de potasio, sulfato de potasa, hiposulfito de potasa, sulfocyanato de potasio, carbonato de potasa, sulfuro de potasio, sexquicarbonato de amoniaco y nitrato de potasa.

En fin, ocupando los primeros un volúmen de  $0\text{cm}^3,4$  y los residuos  $0\text{cm}^3,6$ , deducen Noble y Abel la consecuencia de que tienen la misma densidad unos y otros.

En el análisis efectuado por Bunsen y Schischkoff, obtuvieron estos  $0,44$  de residuos sólidos.

Tomando en consideracion ambos resultados y siendo  $0,55$  el volúmen de un kilógramo de pólvora de densidad  $1,8$ , volúmen comprendido entre  $0,68$  y  $0,44$ , que son los encontrados para los residuos sólidos, admite Sarrau que el volúmen de estos es igual al de la pólvora que los produce.

**30. Calor de combustion.**—Se llama así á la cantidad de calor que un peso cualquiera de pólvora desprendería bajo volúmen constante, si la temperatura final de los productos de la combustion fuese igual al cero absoluto. Representaremos por  $Q$  el correspondiente á la unidad del peso.

La siguiente tabla expresa los valores de  $Q$  encontrados por Sarrau y Roux en sus investigaciones experimentales:

Clase de pólvora.	Valor de $Q$ .
Pólvora fina de caza....	849 calorías.
» de cañon ...	795 »
» de fusil.....	773 »
» del comercio	736 »
» de mina.....	612 »

Por medio del calorímetro se obtiene la cantidad de calor  $q$  que desprenden los productos de la combustion, desde la temperatura que realmente tienen á la  $t$  del calorímetro, y suponiendo que  $c$  sea el calórico específico de estos productos bajo volúmen constante, entre  $t$  y el cero absoluto, se calcula  $Q$  por la fórmula

$$Q = q + ct$$

en la que habiendo sido  $47^{\circ}$  la temperatura media de las experiencias

$$t = 273^{\circ} + 47^{\circ} = 290^{\circ}.$$

El valor de  $c$  ya diremos como se determinó.

**31. Temperatura absoluta de combustion.**— Toma este nombre la temperatura  $T$ , que á partir del cero absoluto, (\*) alcanzarían los productos de la combustion, si bajo volúmen constante, el calor de esta fuese totalmente empleado en calentarlos.

Llamando  $c$  al calórico específico bajo volúmen constante de los productos de la combustion, suponiendo que no varia durante la série de trasformaciones que aquellos experimentan, cuando la temperatura descende desde  $T$ , al cero absoluto ó sube desde cero á  $T$ , se tiene

$$T = \frac{Q}{c} \quad (11)$$

Este valor, es en realidad diferente de la temperatura máxima  $T_0$  que adquieren los productos de la combustion, puesto que el calor  $Q$ , se emplea no tan solo en elevar la temperatura, sino en producir los cambios químicos y físicos de dichos productos: el valor  $T$ , es pues un límite superior de  $T_0$ , admitiéndose sin embargo que son iguales, por lo que

$$T_0 = \frac{Q}{c}.$$

Por medio de esta fórmula, puede determinarse teóricamente el valor de  $T_0$  cuando se conozca el de  $Q$ , sirviendo tambien para determinarlo, la cantidad de calor  $Q'$  desprendida para descender de la temperatura absoluta  $T_0$  á otra dada, por ejemplo al cero centigrado, así se tiene

$$Q' = c (T_0 - 273^{\circ})$$

de donde

$$T_0 = 273^{\circ} + \frac{Q'}{c} \quad (12)$$

---

(\*) Se llama cero absoluto la temperatura  $-273^{\circ}$  centigrados.

**32.** El calórico específico bajo volúmen constante, de las diversas clases de pólvora ensayadas por Roux y Sarrau, se expresa en la siguiente tabla:

Clase de pólvora.	Calórico específico
Pólvora de caza (78.s) (40.a) (42.c)... .	0,4452
» de guerradecañon (75) (42,50) (42,50)	0,4437
» de fusil (74) (40,5) (45,5)...	0,4468
» del comercio (72) (43) (45)...	0,4448
» de mina (62) (20) (48)...	0,4420

Para la determinacion de los calóricos específicos, Sarrau considera á los productos como totalmente gasificados y que en esta hipótesis, les sea aplicable el principio de Clasius, de la media compuesta que él aplica á los elementos constitutivos del estado inicial, como si permaneciesen totalmente disociados.

Bunsen y Schischkoff, aplican por el contrario la hipótesis de Clasius, á los productos en el estado final, obteniendo así un valor 0,4857, mientras que aplicado el mismo principio á los análisis de Noble y Abel, deducen 0,48494 y tomando el término medio de ambas determinaciones se tendrá para  $c$  el valor 0,485.

Ahora bien, el calórico específico de un compuesto seria siempre constante, si los elementos estuviesen mezclados, pero no siendo así, crece al pasar de un estado de combinacion á otro menos simple y al pasar del estado gaseoso al líquido y de este al sólido; por esta razon, el valor  $c=0,444$  encontrado por Sarrau, partiendo del estado inicial, debe ser menor que el que en realidad tengan por término medio los productos, en la serie de trasformaciones que efectúan durante la explosion, mientras que el  $c=0,485$  será por idénticas razones un máximo.

Los valores de  $T_0$  determinados por Sarrau admitiendo el expresado valor de  $c$ , serán un máximo, y se indican en la tabla siguiente:

Clase de pólvora.	Valor de $T_0$ .
Pólvora de caza.....	5870°
» de cañon .....	5500
» de fusil.....	5350
» del comercio...	5090
» de mina.....	4240

Admitiremos el valor  $c=0,485$  determinado por Bunsen y Schischkoff, sobre el estado final de los productos de la combustión, pues como hemos dicho, el valor de  $T_0$  dado por la fórmula (41) es mayor que el verdadero, por ser el de  $Q$  también mayor que el que realmente corresponde al estado de los gases.

**33.** Con el valor  $c=0,485$  y  $Q=705$  calorías, encontrado por Noble y Abel en la pólvora que experimentaron, análoga á la Francesa de caza, aplicando la fórmula (42), resulta en decenas exactas

$$T_0=4080^\circ$$

valor, que comparado con el que mas adelante encontraremos por la medida de las presiones, permite deducir útiles consecuencias.

**34. Fuerza de la pólvora** —Desde La Hire, que en el año 1702 escribió sobre la fuerza de la pólvora, hasta Roux y Sarrau, muy variadas son las opiniones sobre las causas que la originan y su intensidad.

La Hire suponía que la pólvora, debía solo considerarse

como un agente calorífico, siendo la fuerza desarrollada, debida á la considerable dilatacion del aire contenido entre los intersticios y en sus granos.

Robins, fué el primero que admitió la formacion de gases permanentes al inflamarse la pólvora, atribuyendo á ellos la fuerza de esta, que él evaluó en 1000 atmósferas.

Hutton, atribuyendo tambien la fuerza de la pólvora á la tension de los gases permanentes que se producen en la combustion, la fijó en 2000 atmósferas.

Rumford en el año 1797, emprendió una série de experiencias por consecuencia de las cuales dedujo, que la fuerza de la pólvora era 29.000 atmósferas, valor que él consideraba muy inferior al verdadero, por lo cual emprendió una segunda série, fijando como consecuencia de ellas, dicha fuerza en 101,021 atmósferas. Rumford supone la fuerza de la pólvora debida, no solo á los gases permanentes, sino muy principalmente, á la enorme tension del vapor que contienen, suponiendo que esta se duplica, por cada 17° centígrados de crecimiento en la temperatura.

Piobert admite el primero de los valores deducidos por Rumford, creyendo como este, que los residuos sólidos se encuentran en el estado de vapor en el momento de la explosion, cuyo fenómeno lo divide en dos periodos; 1.° aquel en que dichos residuos están en el estado de vapor, y 2.° el en que solo obran los gases permanentes.

Bunsen y Schischkoff, desechan la idea de Hutton y Saint-Robert, de que la totalidad de los productos sean gaseosos en el momento de la explosion; atribuyen la fuerza de la pólvora á los solos gases permanentes, no admitiendo tampoco que la tension del vapor de estos residuos, tenga influencia sensible sobre la total desarrollada.

Con este objeto hicieron experiencias, de las que dedujeron, que á la temperatura de la explosion, la tension de los vapores que en muy débil cantidad puedan producirse, no llega á una atmósfera, cantidad despreciable con relacion á la enorme tension de los gases permanentes, que evalúan sin pérdida ni

ganancia de calor en un vaso cerrado, en 4734 atmósferas como máximo.

Berthelot en 1872, admitió como exactas las tensiones fijadas por Rumford y Piobert, difiriendo de estos, en que no admite que á la alta temperatura de la combustion, puedan los gases de la pólvora conducirse como gases perfectos, suponiendo en consecuencia, que no se les puede aplicar las leyes de Mariotte y Gay-Lussac. Berthelot dá una gran importancia al fenómeno de la disociacion de los productos, atribuyéndole un crecimiento considerable de volúmen de gases y como consecuencia un aumento en la tension.

Noble y Abel, conformes con Bunsen y Schischkoff, creen la fuerza de la pólvora debida solo á los gases permanentes, habiendo comprobado por nuevas experiencias, que los residuos no pueden hallarse en el estado de vapor, mas que en débil cantidad, insuficiente, para que se deban tomar en consideracion al evaluar la tension de la pólvora.

Comparando los resultados de sus experiencias, determinando directamente la tension de la pólvora en el ánima de un cañon, con las que teóricamente se obtienen, en la hipótesis de Saint-Robert por un lado y de Bunsen y Schischkoff por otro, observan que, segun la primera, las tensiones son muy superiores á las verdaderas y por la segunda inferiores. Desechan por lo tanto la de que la totalidad de los productos, sean gaseosos y explican la diferencia entre lo obtenido en la hipótesis de Bunsen y Schischkoff y los resultados de las experiencias, por creer no es admisible que la expansion de los gases, se efectúe sin ganancia de calor, admitiendo Noble y Abel como consecuencia de esto, que los residuos, no solo no conservan invariable su temperatura, sino que se conservan en equilibrio constante con los gases, cediendo á estos en parte, la cantidad de calor perdida por el trabajo efectuado sobre el proyectil.

**35.** En cuanto al fenómeno de la disociacion, ha sido desde luego desechado por Noble y Abel, por creerlo imposible á la altísima presion que se desarrolla, y aun mas, hacen ver que, si bien al descomponerse, por ejemplo  $\text{CO}^2$  en  $\text{CO}$ , y  $\text{O}$ ,

hay un crecimiento de volúmen, en cambio de esto, desprendiéndose 611 calorías al combinarse el C con el O, para producir  $\text{CO}^2$  y solamente 187 para producir CO, se deduce, que al descomponerse el  $\text{CO}^2$  en CO y O, hay una pérdida de calor de 424 calorías, que compensa el crecimiento de volúmen.

Sarrau explica como veremos, por este fenómeno, la discontinuidad de los resultados de las experiencias de Rumford.

**36. Fuerza absoluta de la pólvora.**—Admitiendo la existencia de residuos sólidos, la definicion mas general que puede darse de la fuerza de la pólvora es, *la presion por unidad de superficie, de los gases permanentes producidos por la unidad de peso de la sustancia, ocupando á la temperatura de combustion, la unidad de volúmen.*

Consideremos la combustion de 1 kilogramo de pólvora, y sea  $v_0$  el volúmen ocupado por los gases que ha producido, despues de reducido á la temperatura de 0 grados centigrados y á la presion atmosférica, que hemos designado por  $p_0$ .

Llamando  $f$  la fuerza de la pólvora, esta será segun la definicion dada, la presion que los gases permanentes ejercen á la unidad de volúmen y á la temperatura T de la combustion, por lo que, suponiendo pueden aplicarse las leyes de Mariotte y Gay-Lusac

$$f = p_0 v_0 (1 + \delta t)$$

y si se admite con Regnault, que el coeficiente de dilatacion de los gases perfectos es

$$\delta = \frac{1}{273}$$

se tendrá

$$f = \frac{p_0 v_0}{273} (273 + t)$$

y como

$$T_0 = 273 + t$$

quedará finalmente

$$f = \frac{p_0 v_0 T_0}{273} \quad (13)$$

Si se hubiera supuesto que la totalidad de los productos estaban gasificados, sería aplicable esta misma fórmula, siendo entonces  $v_0$  el volumen específico de los gases permanentes.

Ahora bien, introduciendo en esta expresión el valor de  $T_0$  dado por la fórmula (11), se tiene

$$f = \frac{1}{273} \cdot \frac{p_0 v_0 Q}{c} \quad (14)$$

que nos dice, que la fuerza de la pólvora está en razón directa del calor de combustión y del volumen específico, é inversa del calórico específico de los productos bajo volumen constante.

**37.** Para calcular el valor de  $f$ , valiéndose de la anterior expresión (14), basta determinar el de  $v_0$  en la pólvora objeto de la investigación. Esto puede hacerse, sea por medio del gasómetro, aplicando el principio de la media compuesta al resultado del análisis de los productos de la combustión, ó bien por el procedimiento siguiente:

Sea  $C$  el volumen de la capacidad en que se verifica la combustión,  $\alpha$  el de los productos no gaseosos que resultan de la de 1 kilogramo de sustancia, medido á la temperatura  $T_0$  de aquella y  $\varpi$  el peso de la carga. El volumen ocupado por los gases permanentes á la misma temperatura será  $(C - \alpha \varpi)$ , y á la absoluta de  $273^\circ$  y presión  $p_0$  tendrá por valor  $\varpi v_0$ , por lo que, aplicando las leyes de Mariotte y Gay-Lusac, se tendrá

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varpi \cdot v_0}{C - \alpha \varpi} \cdot \frac{T_0}{273} \quad (15)$$

y suponiendo  $\alpha$  despreciable con relación á  $C$ , obtendremos,

$$v_0 = 273^\circ \cdot \frac{C}{p_0 \varpi} \cdot \frac{p}{T_0}$$

Haciendo por lo tanto detonar un peso  $\varpi$  de pólvora, en una capacidad  $C$ , bastante grande para poder despreciar  $\alpha$  y midiendo la presión  $p_1$  y temperatura  $T_1$  que se produzcan, bastará sustituir estos valores en la fórmula anterior para obtener el de

$$v_0 = 273 \frac{C}{p_0^{\alpha}} \cdot \frac{p_1}{T_1}$$

Y si este se sustituye en la (13), y por la (14) se encuentra el de  $T_0$ , quedará determinado el valor de  $f$ . La siguiente tabla comprende los obtenidos por Sarrau en distintas pólvoras.

CLASE DE PÓLVORA.	FUERZA ABSOLUTA	
	En atmósferas.	En kilóg. <sup>s</sup> por dm. <sup>2</sup>
Pólvora fina de caza.....	3989	412.000
» de cañon.....	4168	431.000
» de fusil.....	4339	448.000
» del comercio.....	4160	430.000
» de mina ordinaria...	3792	392.000

**38.** Para tener un conocimiento exacto de la manera de obrar la pólvora y sus efectos, no basta la determinacion de la fuerza absoluta, es preciso saber además, que relacion existe entre las presiones que se desarrollan y la densidad de los productos de la combustion.

Esta relacion puede llegar á conocerse, bien sea quemando diferentes pesos de pólvora en una capacidad constante ó bien una misma cantidad de pólvora en volúmenes variables; el primer caso corresponde á la inflamacion en vasos cerrados, y el segundo al de las armas de fuego.

**39. Tension de la pólvora en vasos cerrados.**

—*Determinacion experimental.*—El primero que se ocupó de la determinacion de la ley que liga á las presiones con las densidades, fué Rumford, en las experiencias que emprendió con objeto de determinar la fuerza absoluta de la pólvora.

El aparato que empleó para producir las explosiones, (fig. *c*) consta de un cañon *A* de hierro forjado, montado sobre un soporte *B* de bronce y este, colocado encima de un disco de hierro forjado *P*. En prolongacion del ánima del cañon, hay una estrecha canal cerrada por su parte inferior; por donde se comunica el calor á la carga, hasta producir la inflamacion; para ello, una bala *C* calentada al rojo y colocada al extremo de un mango *h*, presenta un hueco tronco-cónico y manejan-dola con ayuda de la palanca *K*, se consigue entre en aquel, la espiga saliente del cañon, que calentada por el contacto de la bala, inflama la carga.

Sobre la boca del cañon, se coloca un hemisferio *h* de acero, cuya posicion está marcada en el plano superior, por tres tornillos *f*; sobre este hemisferio, se coloca un peso destinado á oponerse á la salida de los gases, por ejemplo, un cañon, dispuesto de tal modo, que pueda correr de abajo á arriba, guiado por dos correderas aseguradas por su pié, en dos agujeros abiertos en un macizo de piedra, sobre el que se coloca el aparato que hemos descrito. Para evitar la salida de gases, cuando la fuerza elástica no sea suficiente para elevar el peso, es preciso que la union de la base del hemisferio con el plano de la boca sea perfecta, con cuyo objeto, se interpone entre las dos una rodaja de cuero.

De este modo, para una carga dada, aumentando el peso hasta que se obtenga el que haga equilibrio á la tension de los gases, su valor será el de la presion ejercida en toda la superficie de la boca del cañon y dividiéndolo por el área de esta, se tendrá la presion por unidad de superficie; mas, para que esto sea exacto, es necesario que no se produzcan degradaciones en la arista viva de la boca, que agrandándola, darian un valor mayor que la presion verdadera; con este objeto, colocó Rumford debajo de la rodaja de cuero otra de oro, con la cual no se produjo corrosion del metal por el paso de los gases entre la superficie del hemisferio y el plano de la boca; para evitar el aumento de diámetro de esta, tuvo necesidad de colocar un tapon fuerte *i* de cuero, sobre el que actúan los

gases. Se introdujo á golpe el tapon previamente encebado, quedando así el ánima completamente cerrada, de tal modo, que no podia escaparse en absoluto gas alguno, mientras la fuerza de la pólvora no elevase el peso lo bastante, para que saliese aquel fuera del ánima. Cuando el peso ascendia, los gases que se escapaban, no corroian mas que la arista viva de la boca y como aquellos actúan sobre la base del tapon, que no sufre alteracion ninguna, el valor obtenido para la presion, no era afectado por estas degradaciones.

Para efectuar la experiencia, Rumford colocaba una carga determinada en el cañon, y sobre el hemisferio, el peso que juzgaba necesario para hacer equilibrio á la tension de los gases; si este peso era elevado, le aumentaba progresivamente, hasta obtener uno suficiente para impedir la salida de los gases, y dividiendo este peso por la seccion del ánima, obtenia la presion de los gases por unidad de superficie.

Los pesos, eran expresados en granos de Alemania (0,0618 gramos) y para obtener la densidad media de los productos, basta multiplicar por 1,077 la relacion entre el volúmen de la carga y el total del ánima. En efecto, sea  $P$  el peso de pólvora que llena por completo el ánima y  $D$  su densidad gravimétrica, que es igual á 1,077 en la pólvora á que se refieren las experiencias; del mismo modo,  $p$  el peso de la carga empleada y  $d$  la densidad de los productos, es decir, la densidad bajo el volúmen total; se tendrá pues

$$d = \frac{p}{P} \cdot 1,077$$

y llamando  $v$  y  $V$  los volúmenes ocupados por la carga y el total

$$d = \frac{v}{V} \cdot 1,077.$$

Ahora bien,  $P=25'644$  granos, por lo tanto, un grano ocupará 0,039 del volúmen total y los  $p$  granos,  $0,039 \cdot p \cdot V$ , así

$$d = (p \times 0,039) \times 1,077$$

Operando de esta manera, variando el peso de las cargas en progresion aritmética cuya razon era 4, obtuvo Rumford los resultados que se expresan en el siguiente cuadro:

Carga de pólvora en granos	Densidad media de los productos.	Presiones en atmósferas.	Carga de pólvora en granos.	Densidad media de los productos.	Presiones en atmósferas.	Carga de pólvora en granos.	Densidad media de los productos.	Presiones en atmósferas.
4	0,042	78	6	0,252	686	11	0,462	2219
2	0,084	182	7	0,294	812	12	0,504	2574
3	0,126	228	8	0,336	1165	13	0,546	3283
4	0,168	382	9	0,378	1551	14	0,588	4008
5	0,210	561	10	0,420	1884	15	0,630	4722

40. Los resultados obtenidos, se ponen mas de manifiesto por medio de la curva (fig. e), en que las abscisas son los volúmenes, expresados en milésimas partes de la capacidad del ánima del cañon y las ordenadas, las presiones desarrolladas. Esta curva puede expresarse analíticamente por la fórmula empirica

$$y = 1,84 x^4 + 0,0004 x$$

en que  $y$  es la presion, y  $x$  el volumen dicho.

Esta fórmula, reproduce con mucha irregularidad los resultados de la experiencia; así, para la carga de 12 granos, en que  $x=468$ , la diferencia entre la presion calculada y la observada, llega á 150 atmósferas.

Estas diferencias, son muy considerables para ser atribuidas á errores de observacion, y desde luego se comprende que la fórmula establecida es errónea, porque encontrando su primera derivada, se observa que la funcion solo es creciente, para valores de  $x$  superiores á  $\frac{1}{e}$ , siendo así que, como la experiencia

enseña y Rumford admitia, la tension crece siempre con la densidad; esto condujo á Helie á establecer la fórmula

$$\frac{y}{\omega} = 101,8313 + 0,0380 \omega + 0,000445 \omega$$

en la que  $\omega$  expresa el peso de la carga en granos, es decir,

$$\omega = \frac{x}{39}.$$

41. Por último, observando la curva dada por Rumford, deduce Sarrau, que aquella se compone de cuatro arcos distintos, por lo que dividió los resultados de las experiencias en cuatro grupos, segun indica el siguiente cuadro:

Grupos.	Cargas de pólvora.	Presiones observadas.	Diferencias en las presiones.	Media de las diferencias.
1.º.....	1	78	404	75
	2	182		
	3	228		
2.º.....	4	382	179	143
	5	561		
	6	686		
3.º.....	7	812	126	354
	8	1165		
	9	1551		
4.º.....	10	1884	333	716
	11	2219		
	12	2574		
4.º.....	13	3283	709	716
	14	4008		
	15	4722		

En el se vé, que las tensiones varían relativamente poco, dentro de cada grupo, pero que presentan mucha diferencia, al pasar de uno de ellos al siguiente; por esta razón, Sarrau supone que pueden expresarse los resultados de la experiencia, por cuatro ecuaciones distintas, que corresponderán á cuatro fases diferentes del fenómeno de la combustion; suponiendo que en la discontinuidad que se observa, al pasar de un periodo á otro, juega un principal papel la disociación de los productos.

De este modo, encuentra Sarrau las cuatro ecuaciones que representan otras tantas rectas

$$y = 570,3 - 491x \quad y = 2881 - 3971x \quad y = 11761 - 21232x$$

$$y = 32513 - 68628x$$

El siguiente cuadro, pone de manifiesto los resultados de estas fórmulas y las presiones observadas por la experiencia:

Cargas de pólvora en granos.	Presiones		Variaciones		Variaciones medias	
	observadas	calculadas	absolutas.	relativas	absolutas	relativas.
1	78	79	-1	0,0128	1,3	0,0094
2	482	480	+2	0,0140		
3	228	229	-1	0,0044		
4	382	380	+2	0,0052		
5	561	559	+2	0,0036		

42. El Capitan Rodman, de la Artillería de los Estados Unidos, hizo experiencias con el mismo objeto, empleando una capacidad esférica de 427 milímetros de diámetro interior y cuyas paredes tenían 158'7<sup>mm</sup> de espesor; un agujero practicado en la pared, dirigido hácia el centro de la esfera, servía para introducir la carga y al mismo tiempo, para comunicar el

fuego, siendo su diámetro 2<sup>mm</sup>,5 en la parte mas estrecha, que era en su arranque de la cavidad interior. Otra canal perpendicular al fogon, sirve para colocar el aparato del mismo autor, propio para medir presiones; de esta manera, variando sucesivamente las cargas, obtuvo

Cargas. — Granos.	Relacion entre el vo- lumen de la carga y el de la capacidad interna.	Presiones en atmósferas	Cargas. — Granos.	Relacion entre el vo- lumen de la carga y el de la capacidad interna.	Presiones en atmósferas
700	0,050	73	4400	0,400	472
737	0,053	79	4535	0,411	490
778	0,056	90	4750	0,425	248
824	0,059	93	2000	0,443	295
875	0,063	99	2333	0,467	474
933	0,067	102	2800	0,200	554
1000	0,071	116	3500	0,250	597
1077	0,077	118	4667	0,333	924
1167	0,083	146	7000	0,500	2191
1273	0,091	155			

La curva de la (fig. e), es la representacion gráfica de los resultados contenidos en esta tabla.

**43.** En las primeras experiencias ejecutadas por Noble y Abel, para determinar la ley de variacion de las presiones con las densidades, encontraron estas, con relacion al peso total que llenaba la capacidad en que se efectuaba la inflamacion; pero como las densidades gravimétricas, varían de unas pólvoras á otras, en sus últimas experiencias, las refirieron á la del agua tomada como unidad y los resultados hallados, una vez corregidos, es decir, representándolos gráficamente por una curva continua (fig. e), son los siguientes;

Densidad media de los productos de la combustion.	<i>Presiones correspondientes á las pólvoras Pebble y R. L. G.</i>		
	Toneladas por pulgada cuadrada.	Atmósferas.	Kilogramos por centimetro cuadrado.
0,05	0,70	107	110,2
0,10	1,47	224	231,5
0,15	2,33	355	367,0
0,20	3,26	496	513,4
0,25	4,26	649	670,9
0,30	5,33	812	839,4
0,35	6,49	988	1028,1
0,40	7,75	1180	1220,5
0,45	9,14	1392	1439,5
0,50	10,69	1628	1683,6
0,55	12,43	1893	1957,6
0,60	14,39	2191	2266,3
0,65	16,60	2528	2614,3
0,70	19,09	2907	3006,5
0,75	21,89	3333	3447,5
0,80	25,03	3812	3942,0
0,85	28,54	4346	4495,0
0,90	32,46	4943	5112,1
0,95	36,83	5608	5800,4
1,00	41,70	6350	6567,3

De estas experiencias dedujeron, que á las presiones, no afecta en nada la pérdida de calor por las paredes, para grandes densidades, pero que estos resultados, deben ser algo modificados en el caso que aquellas sean débiles, porque entonces, la

capacidad es muy grande con relacion á la carga y porque es mayor el tiempo empleado en la combustion, por efectuarse bajo una presion menor.

44. De la comparacion de las tres curvas de la (fig. *e*) se deduce, que las presiones obtenidas por Rumford y Rodman, son muy elevadas: lo cual se explica para el primero, por la manera especial de hacer las experiencias; porque estando colocada la carga á un extremo y el peso al otro, antes de venir á chocar con este, los gases habrán adquirido una fuerza viva tal, que den mayores presiones que las verdaderas. En cuanto á las experiencias de Rodman, su resultado depende de los aparatos empleados para medirlas, y no las ha llevado bastante lejos, para compararlas, en la parte de curva mas importante.

45. **Determinacion teórica de la presion en vasos cerrados.**—Llamando  $\Delta$  la densidad de carga, ó sea la relacion de su peso al volúmen de la capacidad en que se inflama, es decir

$$\Delta = \frac{w}{C} \quad (17)$$

si introducimos este valor en la fórmula (15), recordando además el de  $f$  de la expresion (13) se tiene

$$f = p \left( \frac{1}{\Delta} - \alpha \right) \quad (18)$$

de donde,

$$p = \frac{\Delta f}{1 - \alpha \Delta} \quad (19)$$

en la que, conocidas las constantes  $\alpha$  y  $f$ , se determinan los valores de  $p$ , correspondientes á los diferentes de  $\Delta$ .

Pueden encontrarse estas constantes, sustituyendo en la fórmula (19) dos pares de valores de  $\Delta$  y  $p$ , determinados por la experiencia y se tiene un sistema de dos ecuaciones del que se sacan los valores de  $f$  y  $\alpha$ . Sarrau, haciendo uso del conjunto de

valores dados por las experiencias de Noble y Abel, encuentra,

$$\alpha = 0,6833$$

$$f = 249300$$

tomando como unidades el decímetro y kilogramo.

Conociendo ya estas cantidades, por la fórmula (19) se encuentran los valores de  $p$ , correspondientes á los de  $\Delta$ , variando estos entre 0,4 y 4, en progresion, cuya razon es 0,4; á continuacion se pone el resultado y su comparacion con los valores medidos directamente para la pólvora Pebble.

Densidad de carga.	Presion por centímetro cuadrado		Diferencias.	Densidad de carga.	Presion por centímetro cuadrado		Diferencias.
	Medida.	Calculada.			Medida.	Calculada.	
0,1	Kg. 231	Kg. 235	— 4	0,6	Kg. 2266	Kg. 2230	+ 36
0,2	543	508	+ 5	0,7	3006	2943	+ 63
0,3	839	828	+ 11	0,8	3942	3869	+ 73
0,4	1220	1207	+ 13	0,9	5112	5127	— 15
0,5	1684	1666	+ 18	1,0	6567	6926	— 359

**46. Efecto del enfriamiento por las paredes del vaso.**—Si en la fórmula (18), damos á  $\alpha$  el valor de 0,6 encontrado por Noble y Abel, y hacemos  $\Delta=0,9$ , así como  $p=511200$ , que ha sido obtenido experimentalmente, resulta

$$f = 261.000.$$

Este valor, notablemente inferior á los de la tabla del (§ 37) se explica, por que aumentando la intensidad de las radiaciones con una extremada rapidez. á medida que la temperatura es mas elevada, la pérdida de calor á través de las paredes del arma, produce una disminucion en el valor de la presion; causa, que tambien explica, las divergencias de diferentes autores en la medida de las presiones.

Por esta razon, tomando como datos

$$f=249300, \quad v_0=280, \quad \text{y} \quad p_0=403'33$$

se encuentra por la fórmula

$$T_0 = \frac{273 \cdot f}{p_0 v_0},$$

para la temperatura de combustion,

$$T_0=2070^\circ$$

que es solo, mitad próximamente de la hallada haciendo en la fórmula (12),

$$Q = 705 \quad \text{y} \quad c = 0,485,$$

datos que corresponden á la misma pólvora y que dán

$$T_0 = 4080^\circ$$

Diferencia que no puede atribuirse á error en los valores de  $c$ , porque seria preciso que este fuese doble del hallado.

De cálculos por él efectuados, aunque no completamente exactos, porque desconociendo el poder emisivo de los productos de la combustion, admite que es igual á la unidad, deduce Sarrau, no ser improbable un descenso de temperatura, hasta de  $2000^\circ$  y por consiguiente, que el valor teórico de  $T_0$  es muy próximo al verdadero, aunque no llegue á este, por la influencia que ejercen las paredes del depósito en que la combustion se verifica.

**47. Determinacion experimental de las presiones, en el interior del cañon.**—Pueden seguirse para esta determinacion, dos métodos distintos, el indirecto ó el directo: el primero, consiste en medir, bien sea el tiempo que tarda el proyectil en recorrer las diversas longitudes en que se divide el ánima, ó bien la velocidad del proyectil al final de cada uno de dichos intervalos, deducir de uno ú otra, el valor de la aceleracion y como consecuencia la presion; el segundo método es aquel en que, por medio de ciertos aparatos, se mide directamente la presion en el punto ó puntos que se desee del ánima.

**48. Determinacion indirecta.**—Para hacer esta determinacion, llamemos  $y$  los espacios recorridos por el proyectil, á partir de un punto cualquiera; la ecuacion que ligue á esta variable con el tiempo, ha de anularse con este, pero su primera y segunda derivada, que son respectivamente la velocidad y aceleracion, no deben ser nulas para  $t=0$ , pues que hemos tomado como origen de longitudes, otro distinto de el del movimiento; así pues, podria expresarse la ley de este, por la ecuacion

$$y = A t + B t^2 + C t^3 + D t^4 + \dots$$

y por lo tanto,

$$v = \frac{d y}{d t} = A + 2 B t + 3 C t^2 + \dots$$

de donde, el valor de la aceleracion será

$$j = \frac{d v}{d t} = 2 B + 6 C t + \dots$$

que para  $t=0$ , dan respectivamente

$$y = 0$$

$$v = A$$

$$j = 2 B.$$

Para determinar los coeficientes A, B, C, es preciso hallar los valores de  $y$ , correspondientes á otros tantos de  $t$  y aplicar el método de minimos cuadrados.

Ahora bien, la medida directa de las presiones hace ver, que la presion crece hasta llegar á un valor máximo, para luego decrecer, de tal modo, que por regla general, la curva que representa la ley de variacion de aquellas con el tiempo, presenta un punto de retroceso, que corresponde al máximo de la aceleracion. Variando así tan bruscamente las condiciones del movimiento, la experiencia confirma, que no puede expresarse por una sola ecuacion la ley que liga los valores de  $y$  con los de  $t$ . Así pues, Mayewsky, en las experiencias hechas con un cañon Krupp de 78,5 milímetros en 1867, se sirvió de

:

dos ecuaciones; una, desde el principio del movimiento, hasta el momento de la máxima presión y otra, desde este instante hasta la boca. La segunda dá resultados muy irregulares, así, que solo presentaremos la primera, que corresponde á la parte que tiene verdadera importancia.

Esta ecuacion es

$$y = 33 t + 5017 t^2 + 8044281 t^3 - 4112912100 t^4$$

tomando el origen de los valores de  $y$  á 6,54 milímetros de la posición inicial del proyectil. Mayewsky, para medir el tiempo correspondiente á los diversos valores que pueden atribuirse á  $y$ , empleó el cronógrafo Le Boulangé, abriendo un taladro en la cuña de cierre, para dar paso á una varilla de hierro  $ab$  (fig.  $d$ ) de 6 milímetros de diámetro, que atravesando la carga, va sujeta por un extremo al culote del proyectil, mientras que por el otro, termina en el platillo  $ii$ ; en el plano posterior de la culata, se fija un platillo  $dd$ , por medio de los tornillos  $vv$ , el cual lleva dos guías  $ef$ ,  $ef$ , en las que se sujetan unos dados  $nn$  á la distancia que se quiera de aquella, por medio de los tornillos de presión correspondientes. Colocado el proyectil en su posición de carga y todo dispuesto como acabamos de decir, se sitúan los dos dados posteriores  $nn$ , á una distancia igual á 6<sup>mm</sup>,54 del platillo  $ii$ , se hace pasar por el alambre  $h$ , una de las corrientes del cronógrafo y colocando el alambre  $k$  á una distancia igual al valor de  $y$  que se desea, se interrumpirá el primer circuito, en el momento que el platillo  $ii$  venga á romper el alambre  $h$ , ó sea, cuando el proyectil está á una distancia 6<sup>mm</sup>,54 de su posición inicial, es decir, cuando  $y=0$  y el segundo circuito, cuando el proyectil ha recorrido una longitud de ánima igual á la que media entre los dos alambres, dando el cronógrafo el valor del tiempo empleado en recorrer este trayecto. Cuando se trata de medir los tiempos á partir de la posición inicial, se suprime el alambre  $h$  y en su lugar se introduce un dado  $l$  (fig.  $f$ ) en el extremo tronco-cónico  $c$  en que termina la varilla y en cuanto el proyectil se pone en movimiento, cesa el contacto y queda cortado el primer cir-

cuito, que previamente se hace pasar por el dado. Si el límite del trayecto que recorre el proyectil, en el tiempo que se quiere medir, es el plano de la boca, se suprime el segundo hilo  $k$  y se coloca en el brocal un anillo SS, que lleva el alambre  $m m$ , el cual se rompe al paso de aquel.

Este aparato parece haber funcionado perfectamente, mientras la carga no ha excedido á la de  $0^{ks}, 491 \left( \frac{1}{10,5} \right)$  del peso del proyectil) pero para las cargas superiores, la varilla se alargaba, produciéndose su rotura cerca del culote del proyectil, por lo cual, se la reforzó en esta parte, formándola además de dos piezas, como representa la (fig.  $f$ ), pero á pesar de esto, se rompía también cuando la carga pasaba de  $4^{ks}, 08$ .

**49.** Otro método indirecto consiste en la medida de las velocidades en los diferentes puntos del ánima; para lo cual, se hacen cañones de longitudes iguales á los diferentes trozos que se consideren y cuyo peso, sea igual al del cañon entero. Midiendo la velocidad en cada uno de estos trozos, se tiene la correspondiente en el ánima y suponiendo ligada la velocidad con los espacios, por la relacion

$$v = as + bs^2 + cs^3 + \dots$$

se tiene

$$\frac{dv}{dt} = (a + 2bs + 3cs^2 + \dots) (as + bs^2 + \dots)$$

**50.** El método empleado por Noble y Abel, consiste en suponer, que para el principio del movimiento, la relacion entre los espacios y tiempos, puede expresarse por la ecuacion

$$x = at^{\alpha} + \beta t + \gamma t^2$$

calculando  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , por el método de mínimos cuadrados, valiéndose de los observados para  $x$  y  $t$ . Haciendo para simplificar,

$$y = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$

se tiene

$$x = a t^y$$

de donde

$$v = \frac{dx}{dt} = at^{y-1}y + at^y \text{Lg. } t \cdot y'$$

y haciendo

$$z = \alpha - \gamma t^2$$

se tiene

$$y' \cdot t = y - z$$

por lo tanto,

$$v = \frac{x}{t} (y(1 + \text{Lg. } t) - z \text{Lg. } t)$$

y haciendo

$$\Psi = y + (y - z) \text{Lg. } t$$

se tiene

$$v = \frac{x}{t} \cdot \Psi$$

de esta ecuacion se deduce,

$$t \frac{dv}{dt} + v = \frac{dx}{dt} \cdot \Psi + x \frac{d\Psi}{dt}$$

pero siendo

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dy}{dt} + \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) \text{Lg. } t + \frac{y-z}{t} = \Psi'$$

se deduce

$$t \frac{dv}{dt} + v = v\Psi + x\Psi'$$

ó bien

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{t} (\Psi - 1) + \frac{x}{t} \Psi'$$

y por lo tanto, llamando  $p$  el peso del proyectil, la presión será

$$P = \frac{p}{g} \left( \frac{v}{t} (\Psi - 1) + \frac{x}{t} \Psi' \right)$$

Los resultados dados por esta fórmula, parecen muy conformes con los obtenidos por la medida directa.

**51. Determinacion directa.**—La determinacion directa, es la efectuada por medio de manómetros y se ha observado, que cuando la pólvora es viva, los manómetros no solo dan presiones excesivas, sino que sus indicaciones son muy discordantes.

Esto se explica, porque por la viveza de la combustion, los productos se proyectan con una gran fuerza viva, que al menor obstáculo, se convierte en presion y por efecto de las fluctuaciones en el interior, no obra la pólvora sobre el proyectil por presion continua, sino por impulsiones sucesivas, que aunque duran poco, es lo suficiente para poder ser registradas por los manómetros.

De aquí se deduce, que las presiones dadas por los manómetros, son superiores á la media, mientras que la medida indirecta, dá solo el valor de esta.

**52. Potencial.**—El trabajo debido á la expansion de los gases de un kilogramo de pólvora, en la hipótesis de que estos efectúen una trasformacion adiabática indefinida, es decir, pasando de la temperatura de combustion, al cero absoluto, es un límite máximo del que en realidad producen y toma el nombre de *potencial*.

La relacion de termodinámica

$$EcdT + pdv = 0 \quad (20)$$

que liga la presion, volúmen y temperatura, en el caso de una trasformacion adiabática elemental, de una unidad de peso de gas, nos dá para valor del trabajo, pasando de la temperatura  $T_0$  de combustion, al cero absoluto

$$\tau = \int pdv = E \int_0^{T_0} cdT$$

en que  $c$ , representa el calórico específico de los productos de la combustion, bajo volumen constante. El calor  $Q$  de la misma, será

$$Q = \int_0^{T_0} cdT$$

y

$$\tau = EQ \quad (21)$$

que nos dice, que la potencial se obtiene, multiplicando el equivalente mecánico del calor  $E$ , por el calor de combustion.

Suponiendo  $E=436$ , Roux y Sarrau han encontrado, aplicando la fórmula (21) á diferentes pólvoras, el siguiente resultado

Clase de pólvora.	Potencial.
	Tonelámetros.
Pólvora fina de caza.....	370
» de cañon .....	347
» de fusil.....	337
» del comercio.....	324
» de mina .....	267

Aun cuando para obtener la anterior fórmula, no se han tomado en consideracion los productos de la combustion que no son gaseosos, es aplicable al caso en que se admita que estos últimos, están constantemente en equilibrio de temperatura con los otros.

En efecto, designando por  $\Sigma$  el peso de los productos gaseosos de una unidad de peso de pólvora,  $(1-\Sigma)$  será el de los no gaseosos.

Llamando  $c_2$  el calórico específico de los últimos, si su temperatura descende desde  $T_0$  á  $T$ , desprenderán una cantidad de calor

$$q = c_2 (1 - \Sigma) (T_0 - T)$$

que es empleada, en producir las transformaciones de los gases, que á su vez pasan de la temperatura  $T_0$  á la  $T$ : este calor será pues igual á  $\Sigma c_1 (T - T_0)$  absorbido por los gases, para producir

la variación de temperatura, mas el trabajo  $\frac{T}{E}$  realizado, es decir

$$(1 - \Sigma) c_2 (T_0 - T) = \Sigma c_1 (T - T_0) + \frac{T}{E}$$

Suponiendo que el calórico específico  $c$  de la mezcla, sea, la media compuesta de los productos gaseosos y no gaseosos, se tendrá

$$c = (1 - \Sigma) c_2 + \Sigma c_1$$

y por lo tanto,

$$T = E c (T_0 - T)$$

y admitiendo, que la relación de los calóricos específicos de los gases, á volúmen y presión constante, sea también constante durante la transformación; tendremos, según la termodinámica enseña

$$T_0 V_0^{n-1} = T V^{n-1}$$

y por ello,

$$T = E c T_0 \left( 1 - \left( \frac{V_0}{V} \right)^{n-1} \right)$$

ó bien, recordando la fórmula (11)

$$T = E Q \left( 1 - \left( \frac{V_0}{V} \right)^{n-1} \right)$$

Suponiendo la transformación indefinida, es decir,  $T = 0$  lo que equivale á suponer que  $v$  crece sin cesar, el límite del valor de  $T$  será,

$$T = E Q$$

igual al encontrado anteriormente.

Bunsen y Schischkoff, suponiendo que los residuos no gaseosos, permanecen á una temperatura invariable y atribuyendo el trabajo solo á la expansión de los gases, modifican el valor del potencial. Partiendo entonces de la ecuación

$$T = \Sigma E c_1 (T_0 - T)$$

por idénticos razonamientos, se llega á la

$$T = \Sigma E c_1 T_0$$

y poniendo por  $T_0$  su valor, en funcion del calor de combustion y del calórico específico de la totalidad de los productos, queda

$$T = \frac{\Sigma c_1}{c} E Q \quad (22)$$

### 53. Ecuacion del movimiento del proyectil en el interior del arma.—

Para la determinacion de las circunstancias del movimiento, y partiendo de la idea admitida, de no ser gaseosos todos los productos de la combustion, tomaremos en consideracion las dos hipótesis: de Noble y Abel una, de Bunsen y Schischkoff la otra; segun la primera, se considera, que los productos gaseosos están en equilibrio constante de temperatura con los residuos sólidos, convirtiéndose en trabajo el calórico que desprenden, y por la segunda, que el trabajo solo es debido á los gases.

No es fácil, en el estado actual de la cuestion, decidirse por una ú otra de estas dos hipótesis, pues las razones que en pró de ambas se aducen, hacen comprender en efecto, que son igualmente admisibles, y como veremos, conducen á la misma ecuacion diferencial, variando tan solo, en el valor de algunos coeficientes.

Prescindiendo de la influencia que puede ejercer el movimiento de las partículas sólidas en el interior de la masa gaseosa, por ser pequeña la variacion que las fórmulas deben sufrir, al tomar esta circunstancia en cuenta, estableceremos la ecuacion, despreciando tambien, las pérdidas de calor por las paredes del arma, dando á conocer mas adelante, la variacion que por ello deben experimentar las expresiones que se obtengan.

Las ecuaciones diferenciales que así resultan, presentan dificultad para su integracion, dificultad que se evita, encontrando una série de funciones numéricas que las sustituyan,

siendo estas funciones tales, que tengan propiedades á que sin duda deban satisfacer las verdaderas.

Bajo el primer supuesto, llamando  $T$ , al trabajo desarrollado cuando la temperatura desciende de  $T_0$  á  $T$  y  $c$  al calórico específico medio, de los productos de la combustion, representando además por  $y$  el peso de la pólvora inflamada en el mismo tiempo, puede establecerse entre el trabajo y el calor perdido, la ecuacion

$$\frac{T}{E} = c y (T_0 - T) \quad (23)$$

Si  $p$  y  $V$  expresan, la presión y volúmen de los productos de un kilogramo de pólvora á la temperatura  $T$ , y  $V_0, p_0$  los correspondientes á cero grados, se tendrá, admitiendo la ley de Mariotte y Gay-Lussac para el peso  $y$ , de pólvora quemada,

$$p = \frac{p_0 V_0 T}{273 \cdot V} y \quad (24)$$

despejando el valor de  $T$ , y sustituyéndole en la (23), resulta

$$p V + \frac{p_0 V_0 T}{E c \cdot 273} = \frac{p_0 V_0 T_0}{273} y$$

y haciendo

$$2\theta = \frac{1}{273} \cdot \frac{p_0 V_0}{E c}, \quad (25)$$

recordando además el valor de  $f$  resulta,

$$p V + 2\theta T = f y \quad (26)$$

Segun la segunda hipótesis, llamando  $\Sigma$  al peso de los gases producidos por un kilogramo de pólvora y  $c_1$  su calórico específico á volúmen constante, se tiene para el peso  $\Sigma \cdot y$  de gases,

$$\frac{T}{E} = c_1 \Sigma y (T_0 - T);$$

ecuacion que difiere de la (23), en haber sido reemplazado  $c$

;

por  $\Sigma c_1$ , por consiguiente, el mismo razonamiento nos conducirá á la ecuacion (26), siendo para el caso actual

$$2\theta = \frac{1}{273} \cdot \frac{p_0 V_0}{E c_1 \Sigma} \quad (27)$$

Llamando  $c'$  al calórico específico de los gases á presión constante, se tiene la relacion de termodinámica,

$$E = \frac{1}{273} \cdot \frac{p_0 V_0}{\Sigma(c' - c_1)}$$

y haciendo

$$\frac{c'}{c_1} = n$$

se obtiene, sustituyendo el valor de E en la ecuacion (27)

$$\theta = \frac{n-1}{2} \quad (28)$$

Es decir, que para ambas hipótesis, se llega á la misma ecuacion (26), determinándose  $\theta$  para la primera, por la expresion (25) y siendo para la segunda, igual á la mitad de la relacion de los dos calóricos específicos, disminuida en una unidad.

Poniendo en la ecuacion (26) los valores de V, T y p, en funcion del camino recorrido por el proyectil y tiempo empleado en recorrerlo, se obtiene la relacion definitiva que precisa las condiciones del movimiento.

Sea en efecto  $m$  la masa del proyectil,  $\omega$  su seccion transversal, y  $u$  el camino que recorre en el tiempo  $t$ ; se tendrá

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \quad (29)$$

y siendo  $p$  la presión por unidad de superficie y  $\frac{d^2 u}{dt^2}$  la aceleracion,

$$p \omega = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (30)$$

El valor de  $V$ , es evidentemente igual á la suma del volúmen inicial  $V_0$  que existe alrededor de la carga, del  $y_1$  que queda entre los granos á quienes haya llegado la inflamacion y del que vá dejando libre el proyectil en su movimiento, es decir,

$$V = V_0 + y_1 + \omega u$$

y si hacemos

$$z = \frac{1}{\omega} (V_0 + y_1)$$

quedará

$$V = \omega(u + z)$$

que multiplicado por el valor  $p\omega$  de la expresion (30), dará

$$p V = m(u + z) \frac{d^2 u}{d t^2} \quad (31)$$

y sustituyendo este valor y el de  $\tau$  (29) en la ecuacion (26), tendremos

$$(u + z) \frac{d^2 u}{d t^2} + \theta \left( \frac{d u}{d t} \right)^2 = \frac{f y}{m} \quad (32)$$

Para determinar la cantidad  $z$ , basta observar que  $\omega z = V_0 + y_1$ , es el volúmen inicial alrededor de la carga, aumentado con el de los intersticios que hay entre los granos á que llegó la inflamacion; que por otra parte, es tambien igual al volúmen inicial, contado desde el fondo del ánima al culote del proyectil, disminuido en el de la pólvora y aumentado del de la parte quemada, menos el de los residuos no gaseosos, y que admitiendo como se ha dicho, que estos dos últimos son iguales, quedará el volúmen reducido, á la diferencia de los dos primeros.

Llamando  $u_0$  la longitud reducida de la recámara, ó sea la altura de un cilindro, que teniendo por base la seccion del proyectil, tenga un volúmen  $\omega u_0$  igual al que existe desde el fondo del ánima al culote de aquel y siendo  $\alpha$  y  $\delta$  respecti-

vamente el peso y densidad de la pólvora, se tiene según lo dicho

$$\omega z = \omega u_0 - \frac{\pi}{\delta}$$

ó bien

$$z = u_0 - \frac{\pi}{\omega \delta} \quad (33)$$

y representando por  $\Delta$  la densidad de carga, cuyo valor es (§ 45)

$$\Delta = \frac{\pi}{\omega u_0}$$

quedará

$$z = u_0 \left( 1 - \frac{\Delta}{\delta} \right) \quad (34)$$

ó bien, poniendo por  $u_0$  su valor  $\frac{\pi}{\Delta \omega}$  deducido del de  $\Delta$ , tendremos

$$z = \frac{\pi}{\omega} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta} \right) \quad (35)$$

Tanto la expresión (34) como la (35), nos dan el valor de  $z$  en función de cantidades, dependientes únicamente del sistema de carga, siendo por lo tanto constante.

Sustituyendo por  $y$  su valor  $\pi \Psi(t)$  en la ecuación (32) y en vez de  $\Psi(t)$  el suyo dado por la (8), la ecuación del movimiento será

$$\begin{aligned} (u+z) \frac{d^2 u}{dt^2} + \rho \left( \frac{du}{dt} \right)^2 &= \frac{f a \pi}{m \gamma} \left( \frac{m}{\omega p_0} \right)^\alpha \int_0^t \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \right)^\alpha dt \\ \left\{ 1 - \frac{\lambda}{\gamma} \left( \frac{m}{\omega p_0} \right)^\alpha \int_0^t \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \right)^\alpha dt + \frac{\mu}{\gamma^2} \left( \frac{m}{\omega p_0} \right)^{2\alpha} \left( \int_0^t \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \right)^\alpha dt \right)^2 + \dots \right\} & (36) \end{aligned}$$

Para disponer convenientemente esta ecuación, hagamos

primero un cambio de la funcion  $u$ , por otra  $y$ , ligada á ella por la relacion

$$u = yz \quad (37)$$

para lo que, sustituiremos en la (36) los valores

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} z \quad \text{Y} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} z$$

y haciendo para abreviar

$$K = \frac{f a^{\alpha}}{m z^{\alpha} \omega p_0} \left( \frac{m z}{\omega p_0} \right)^{\alpha} \quad (38)$$

$$\text{é} \quad Y = \int_0^t \left( \frac{d^2 y}{dt^2} \right)^{\alpha} dt \quad (39)$$

tendremos,

$$(y+1) \frac{d^2 y}{dt^2} + \theta \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = KY \left( 1 - \frac{\lambda}{\tau} \left( \frac{m z}{\omega p_0} \right)^{\alpha} Y + \frac{\mu}{\tau^2} \left( \frac{m z}{\omega p_0} \right)^{2\alpha} Y^2 + \dots \right) \quad (40)$$

cambiando ahora la variable  $t$ , por otra  $x$ , ligada á ella por la relacion

$$x = K^{\beta} t \quad (41)$$

y por consiguiente

$$dt = K^{-\beta} dx; \quad \frac{dy}{dt} = K^{\beta} \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = K^{2\beta} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (42)$$

se tendrá

$$Y = \int_0^x \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^{\alpha} dx \cdot K^{(2\alpha-1)\beta} = K^{(2\alpha-1)\beta} X \quad (43)$$

siendo

$$X = \int_0^x \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^{\alpha} dx \quad (44)$$

Sustituyendo los valores (42) y (43) en la (40) y llamando

$$\gamma = 1 + (2\alpha - 3)\beta \quad (45)$$

$$\Sigma = \frac{1}{\tau} \left( \frac{m z}{\omega p_0} \right)^{\alpha} K^{(2\alpha-1)\beta} \quad (46)$$

se tiene

$$(y+1) \frac{d^2 y}{dx^2} + \theta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = K^\gamma X (1 - \lambda \Sigma X + \mu \Sigma^2 X^2 + \dots) \quad (47)$$

Disponiendo de la indeterminada  $\beta$ , puede asignársele el valor

$$\beta = \frac{1}{3 - 2\alpha} \quad (48)$$

con lo que  $\gamma = 0$  y por ello  $K^\gamma = 1$ , teniendo además

$$\Sigma = \frac{1}{\tau} \left( \frac{mz}{\omega p_0} \right)^\alpha K^{\frac{2\alpha - 1}{3 - 2\alpha}} \quad (49)$$

se reduce la ecuacion (47) á

$$(y+1) \frac{d^2 y}{dx^2} + \theta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = X - \lambda \Sigma X^2 + \mu \Sigma^2 X^3 + \dots \quad (50)$$

La cantidad  $\Sigma$  que entra en esta ecuacion, depende no solo del tiempo  $\tau$ , que se invierte en la combustion de un grano de pólvora y del exponente  $\alpha$  que liga las presiones con las velocidades de combustion, sino tambien de las cantidades  $m$  y  $\omega$ , que á su vez, son dependientes del proyectil: trataremos pues de sustituir esta ecuacion, por otras numéricas que sean aplicables á todas las pólvoras.

Supongamos para ello, que de la ecuacion (50) se despeja el valor de  $y$  en funcion de  $x$ ; desarrollándolo en série bajo la forma

$$y = y_0 + \Sigma y_1 + \Sigma^2 y_2 + \dots \quad (51)$$

en la que  $y_0, y_1, y_2, \dots$  son funciones de  $x$ . Si tomamos la primera y segunda derivada de  $y$  con relacion á  $x$  y sustituimos sus valores en la ecuacion (50) así como, en vez de  $X$  su valor deducido, poniendo por  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  el determinado por la (51)

y desarrollando  $\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^\alpha$  por la fórmula del binomio, quedará la (50) satisfecha por todos los valores de  $y_0, y_1, y_2, \dots$  que

verifiquen á la série de ecuaciones numéricas que se obtengan, igualando los coeficientes de las mismas potencias de  $\Sigma$  de ambos miembros.

Sin proceder á encontrar estas funciones numéricas, que sería una operacion complicada de puro análisis, puede determinarse la velocidad inicial del proyectil y presion de la pólvora sobre las paredes del ánima.

En efecto, llamando á estas  $v$  y  $p$  respectivamente, se tiene

$$v = \frac{du}{dt} = z K^\beta \frac{dy}{dx} \quad (52)$$

y si  $W$  es la aceleracion, la presion por unidad de superficie será

$$p = \frac{m W}{\omega}$$

y siendo

$$W = \frac{d^2 u}{dt^2} = z K^{2\beta} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

queda,

$$p = \frac{m z}{\omega} K^{2\beta} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (53)$$

Tomando la primera y segunda derivada de la ecuacion (51) y substituyéndolas respectivamente en las (52) y (53), resulta

$$v = z K^\beta \left( \frac{dy_0}{dx} + \Sigma \frac{dy_1}{dx} + \Sigma^2 \frac{dy_2}{dx} + \dots \right) \quad (54)$$

$$p = \frac{m z}{\omega} K^{2\beta} \left( \frac{d^2 y_0}{dx^2} + \Sigma \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \Sigma^2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \dots \right) \quad (55)$$

eliminando  $x$ , entre cada una de estas ecuaciones y la (54), quedarán los valores de  $v$  y  $p$  en funcion de  $y$  exclusivamente

ó sea de  $\frac{u}{z}$  segun expresa la (37), pudiendo ponerse

$$v = z K^\beta \left( F_0 \left( \frac{u}{z} \right) + \Sigma F_1 \left( \frac{u}{z} \right) + \Sigma^2 F_2 \left( \frac{u}{z} \right) + \dots \right) \quad (56)$$

$$p = \frac{m z}{\omega} K^{2\beta} \left( f_0 \left( \frac{u}{z} \right) + \Sigma f_1 \left( \frac{u}{z} \right) + \Sigma^2 f_2 \left( \frac{u}{z} \right) + \dots \right) \quad (57)$$

cuyas series son siempre muy convergentes, por lo que, con suficiente aproximacion para la práctica, pueden quedar reducidos los segundos miembros á dos términos solamente: por otra parte, si la velocidad de emision de los gases fuese uniforme, creceria tambien uniformemente la que adquiriese el proyectil, pero segun indica la ecuacion (8), la cantidad de gases producidos, no crece proporcionalmente al tiempo, sino que recibe incrementos que disminuyen proporcionalmente á  $\lambda$ , por lo que no será ilógico admitir, que tanto la velocidad del proyectil como la presion, reciban incrementos que disminuyan tambien proporcionalmente á  $\lambda$  ó sea

$$F_1 \left( \frac{u}{z} \right) = -\lambda \varphi_1 \left( \frac{u}{z} \right)$$

$$f_1 \left( \frac{u}{z} \right) = -\lambda \psi_1 \left( \frac{u}{z} \right)$$

y poniendo, por analogía de anotacion, en vez de los primeros términos,  $\varphi_0 \left( \frac{u}{z} \right)$  y  $\psi_0 \left( \frac{u}{z} \right)$ , quedará

$$v = z K^\beta \left( \varphi_0 \left( \frac{u}{z} \right) - \Sigma \lambda \varphi_1 \left( \frac{u}{z} \right) \right) \quad (58)$$

$$p = \frac{m z}{\omega} K^{2\beta} \left( \psi_0 \left( \frac{u}{z} \right) - \Sigma \lambda \psi_1 \left( \frac{u}{z} \right) \right) \quad (59)$$

en las que, las funciones  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi_0$  y  $\psi_1$  son crecientes.

**54. Velocidad inicial del proyectil, en la hipótesis de ser proporcional á la potencia  $\frac{6}{10}$  de la carga (\*).**—Si en la fórmula (58) sustituimos en lugar

---

(\*) Así se dedujo en las experiencias de Gävre.

de  $K$ ,  $\Sigma$  y  $\beta$ , sus valores dados por las expresiones (38), (49) y (48), despues de hacer  $\alpha = \frac{1}{2}$  resulta

$$v = \left(\frac{fa\omega}{\gamma m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mz}{\omega p_0}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) - \frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{mz}{\omega p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_1\left(\frac{u}{z}\right) \right\} \quad (60)$$

El valor de  $z$  dado por la relacion

$$z = \frac{\omega}{\omega} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta} \right)$$

puede hacerse muy pequeño, cuando la diferencia  $\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}$  lo sea, es decir, en el caso en que la carga, ocupando toda la recámara, deje intersticios pequeños entre los granos: en estas condiciones, realizables en muchos casos de la práctica, la velocidad  $v$  adquirida por el proyectil, debe siempre permanecer entre límites finitos y por consiguiente, las funciones

$$\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) \quad \text{y} \quad \varphi_1\left(\frac{u}{z}\right)$$

deben ser tales, que por pequeño que sea  $z$ , el valor de  $v$  dado por la fórmula (60) sea finito y diferente de cero, sin cuya condicion, la expresada fórmula, no sería la representacion analítica de los hechos de la práctica.

Ahora bien, prescindiendo de las funciones

$$\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) \quad \text{y} \quad \varphi_1\left(\frac{u}{z}\right),$$

el primer término de la ecuacion (60), es proporcional á  $z^{\frac{1}{4}}$  y el segundo á  $z^{\frac{3}{4}}$ , cantidades que tienen por limite cero, cuando  $z$  tiende hácia cero, siendo por lo tanto cero tambien el limite de  $v$ , si las funciones

$$\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) \quad \text{y} \quad \varphi_1\left(\frac{u}{z}\right)$$

no son tales, que al efectuar operaciones, hagan desaparecer la cantidad  $z$  de los numeradores; del mismo modo, si esta cantidad  $z$  quedase en algun denominador, resultaría para  $v$  el limite infinito, correspondiente al limite cero de  $z$  y como los valores de  $v$ , segun lo que acabamos de decir, no pueden nunca ser cero ni infinito, por solo el decrecimiento de  $z$ , se deduce que es preciso que las funciones

$$\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) \cdot \text{Y} \quad \varphi_1\left(\frac{u}{z}\right)$$

sean respectivamente proporcionales á

$$\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Y} \quad \left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{3}{4}},$$

para valores de  $z$  muy pequeños ó sea, para los de  $\frac{u}{z}$  muy grandes, único medio de que, destruyéndose las potencias de  $z$  en el numerador y denominador, ambos términos de la ecuacion (60) se conserven finitos: cuando sea  $z=0$ , podremos pues poner

$$\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) = A_0\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Y} \quad \varphi_1\left(\frac{u}{z}\right) = A_1\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (61)$$

La ecuacion que dá el valor de  $v$ , puede ponerse bajo la forma

$$v = \left(\frac{a\pi}{\gamma m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mz}{\omega p_0}\right)^{\frac{1}{4}} \varphi_0\left(\frac{u}{z}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{mz}{\omega p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1\left(\frac{u}{z}\right)}{\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right)}\right) \quad (62)$$

en la cual, siendo  $\frac{u}{z}$  en la práctica bastante grande, no se

comete mucho error, tomando para la relacion  $\frac{\varphi_1\left(\frac{u}{z}\right)}{\varphi_0\left(\frac{u}{z}\right)}$  el

valor  $\frac{A_1}{A_0}\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$  dado por las fórmulas (61), tanto mas, cuanto

que siendo muy pequeño con relacion á la unidad el factor

$\frac{\lambda}{\gamma} \left( \frac{mz}{\omega p_0} \right)^{\frac{1}{2}}$  que multiplica esta relacion, es despreciable la parte del error que influye en la fórmula, aun comparándolo con la misma unidad, así pues haremos

$$\frac{\varphi_1 \left( \frac{u}{z} \right)}{\varphi_0 \left( \frac{u}{z} \right)} = Q \left( \frac{u}{z} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (63)$$

Y como cualquiera que sea una funcion, puede siempre entre ciertos limites admitirse, que su valor es próximamente proporcional á una potencia determinada de la variable, supondremos tambien

$$\varphi_0 \left( \frac{u}{z} \right) = P \left( \frac{u}{z} \right)^{\gamma} \quad (64)$$

Sustituyendo los valores (63) y (64) en la ecuacion (62), tendremos

$$v = \left( \frac{f a \omega}{\gamma m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{mz}{\omega p_0} \right)^{\frac{1}{4}} P \left( \frac{u}{z} \right)^{\gamma} \left( 1 - Q \frac{\lambda}{\gamma} \left( \frac{mu}{\omega p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (65)$$

y poniendo por  $z$  su valor (35) resulta

$$v = P p_0^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{f a}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\omega}{m} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\omega}{\omega} \right)^{\frac{1}{2} - \gamma} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\varrho} \right)^{\frac{1}{4} - \gamma} u^{\gamma} \left( 1 - Q \frac{\lambda}{\gamma} \left( \frac{mu}{\omega p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Llamando  $p$  al peso del proyectil,  $c$  al calibre del ánima y  $g$  la aceleracion de la gravedad, tenemos

$$m = \frac{p}{g} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\pi c^2}{4}$$

que sustituidos en la anterior expresion y haciendo para abreviar

$$A = P \left( \frac{g}{p_0} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{\frac{1}{2} - \gamma} \quad \text{y} \quad B = Q \left( \frac{k}{\pi g p_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (66)$$

se obtiene

$$v = A \left( \frac{fa}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\omega}{p} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\omega}{c^2} \right)^{\frac{1}{2} - \gamma} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{4} - \gamma} u^{\gamma} \left( 1 - B \frac{\lambda}{\gamma} \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c} \right) \quad (67)$$

Segun las experiencias verificadas en Gávre, la velocidad inicial de los proyectiles, es directamente proporcional á la potencia  $\frac{6}{10}$  del peso de la carga, ó inversa á la potencia

$\frac{1}{4}$  de la capacidad C de la recámara, es decir, que es proporcional á

$$\frac{\omega^{\frac{6}{10}}}{C^{\frac{1}{4}}}$$

en cuya relacion poniendo por C su valor  $\frac{\omega}{\Delta}$  se tiene la velocidad inicial proporcional á

$$\omega^{\frac{6}{10} - \frac{1}{4}} \times \Delta^{\frac{1}{4}}$$

Ahora bien, segun expresa la fórmula (67), la velocidad teórica es proporcional á

$$\omega^{\frac{3}{4} - \gamma} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{4} - \gamma}$$

y para que el resultado teórico esté conforme con el obtenido en dichas experiencias, debe determinarse  $\gamma$  por la igualdad

$$\frac{3}{4} - \gamma = \frac{6}{10} - \frac{1}{4}$$

ó sea,

$$\gamma = \frac{1}{10} \text{ de donde } \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{4} - \gamma} = \left( \frac{\Delta \delta}{\Delta - \delta} \right)^{\frac{3}{20}}$$

que es sensiblemente proporcional á  $\Delta^{\frac{1}{4}}$  para los valores de la práctica, como realmente se verifica, así pues obtendremos

$$v = A \left( \frac{fa}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\varpi}{p} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\varpi}{c^2} \right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{10}} \left( 1 - B \frac{\lambda}{\gamma} \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c} \right) \quad (68)$$

**55. Determinacion de las constantes A y B.—**

Las cantidades  $\left( \frac{fa}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $\frac{\lambda}{\gamma}$  que entran en la anterior expresion,

son las únicas que dependen de las propiedades de la pólvora, y por esta razon toman el nombre de *característicos*, se representan por  $\alpha$  y  $\varepsilon$  obteniéndose sus valores teóricos por las expresiones  $\alpha = \left( \frac{fa}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $\varepsilon = \frac{\lambda}{\gamma}$ .

Si en la ecuacion (68), supuestas conocidas  $\alpha$  y  $\varepsilon$  se determinan dos valores de  $v$ , para condiciones de carga distintas, es decir, variando  $c$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\Delta$ ,  $\pi$ , ó por lo menos una de las dos primeras, ya sea por emplearse dos piezas distintas, ó una misma pieza, variando el proyectil, se obtendrán dos ecuaciones que darán los valores de A y B, que tambien pueden determinarse, aun con mayor aproximacion, empleando el método de mínimos cuadrados.

En la pólvora tipo que se elija, podrian determinarse  $\alpha$  y  $\varepsilon$  por el conocimiento de los elementos de que dependen ambos valores, pero puede evitarse esto, suponiéndolos iguales á la unidad: de este modo, los que se obtengan para A y B resultarán multiplicados por el verdadero valor de los característicos: determinados así para la pólvora de Wetteren de granos de 13 á 16 milímetros, han resultado los siguientes

$$A = 2088 \quad \text{y} \quad B = 0,01089,$$

de modo que la fórmula

$$v = 2088 \alpha \left( \frac{\varpi}{p} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\varpi}{c^2} \right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{10}} \left( 1 - 0,01089 \varepsilon \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c} \right) \quad (69)$$

nos dará el valor de la velocidad para una pólvora cualquiera, substituyendo por  $\alpha$  y  $\varepsilon$  los valores de sus característicos, referidos á los de la pólvora tipo, ó sea la relacion de ambos, pues

que como queda dicho, los encontrados para A y B, han resultado multiplicados respectivamente por aquellos.

Pueden sin embargo determinarse aproximadamente los valores de los característicos de la pólvora tipo, por las fórmulas

$$\alpha_0 = \left(\frac{fa}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} = 1331 \quad \text{y} \quad \varepsilon_0 = \frac{\lambda}{\tau} = 1,370,$$

en las que se ha sustituido por  $f$ ,  $a$ ,  $\tau$  y  $\lambda$ , los valores correspondientes á la pólvora citada, determinados por Sarrau como ya sabemos; y puesto que

$$A \alpha_0 = 2088 \quad \text{y} \quad B \varepsilon_0 = 0,01089$$

resultará

$$A = \frac{2088}{1331} = 1,569 \quad B = \frac{0,01089}{1,370} = 0,00795$$

quedando así

$$v = 1,569 \alpha \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{10}} \left(1 - 0,00795 \varepsilon \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c}\right) \quad (70)$$

fórmula en la que  $\alpha$  y  $\varepsilon$ , son los verdaderos valores de los característicos, siendo las unidades respectivas, el decímetro, kilogramo y segundo.

**56.** Determinación experimental de los característicos. — Si se hace para abreviar

$$\frac{1}{X} = 1,569 \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{10}}, \quad Y = 0,00795 \frac{(pu)^{\frac{1}{2}}}{c}$$

resulta

$$Xv = \alpha - \alpha \varepsilon Y$$

Si con dos condiciones de carga distinta, se miden los valores de las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  y son  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_2$  los correspondientes de  $X$  é  $Y$ , se tendrán las dos ecuaciones

$$X_1 v_1 = \alpha - \alpha \varepsilon Y_1$$

$$X_2 v_2 = \alpha - \alpha \varepsilon Y_2$$

de donde

$$\alpha = \frac{X_1 Y_2 v_1 - X_2 Y_1 v_2}{Y_2 - Y_1} \quad (71)$$

$$\alpha \epsilon = \frac{X_1 v_1 - X_2 v_2}{Y_2 - Y_1} \quad (72)$$

de las que se deducen los valores de  $\alpha$  y  $\epsilon$ , aplicando los mínimos cuadrados á la primera ecuacion, si se quisiera aun mayor exactitud.

Llamando  $\epsilon$  al máximo error que puede cometerse en la medida de las velocidades, los mayores  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  que se cometerán en  $\alpha$  y  $\alpha \epsilon$ , serán, cuando los de  $v_1$  y  $v_2$  sean de sentido contrario, y se tendrá

$$\epsilon_1 = \frac{(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) \epsilon}{Y_2 - Y_1} \quad (73)$$

$$\epsilon_2 = \frac{X_1 + X_2}{Y_2 - Y_1} \epsilon \quad (74)$$

expresiones que demuestran la ventaja de que la diferencia  $Y_2 - Y_1$ , sea lo mayor posible para que los errores sean en cambio los menores, y como las cantidades  $Y_2$  é  $Y_1$  dependen de  $e$ ,  $u$  y  $p$ , debe operarse de modo, que las condiciones de carga en los dos tiros, difieran por lo menos en el valor de una de estas cantidades.

**57. Máximo de velocidad.**—Si en la fórmula (68) se hace

$$\phi(\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}} - B \frac{\lambda (pu)^{\frac{1}{2}}}{c} \tau^{-\frac{3}{2}} \quad (75)$$

se tiene

$$v = A (fa)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{a}{c^2}\right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{10}} \phi(\tau) \quad (76)$$

Si consideramos  $\tau$  como variable, la funcion  $v$  se hará máximo, con los valores que hagan máximo á  $\phi(\tau)$ : determinemos pues estos valores en la expresion (75): su primera derivada es

$$\phi'(\tau) = -\frac{1}{2} \tau^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \frac{B \lambda (pu)^{\frac{1}{2}}}{c} \tau^{-\frac{5}{2}} = 0$$

ecuacion en la que, desechando el valor  $\tau = \infty$ , que no puede producir máximo, solo puede verificarse por un valor de  $\tau$  que representaremos por  $\tau_1$ , de lo que se deduce

$$\frac{B \lambda (p u)^{\frac{1}{2}}}{c \tau_1} = \frac{4}{3} \quad (77)$$

cuyo valor, sustituido en la segunda derivada, dá

$$\Phi''(\tau_1) = - \frac{4}{2 \tau_1^{\frac{5}{2}}}$$

y por lo tanto, el valor de  $v$  se hace máximo. Introduciendo la condicion (77), en la (75) y poniendo por  $\Phi(\tau)$  su valor en la (76), resulta,

$$v = \frac{2}{3} A \left(\frac{fa}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{x}{c^2}\right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{4}{10}} \quad (78)$$

y reemplazando  $\tau_1$  por su valor deducido de la ecuacion (77),

$$v = A_1 \left(\frac{fa}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{7}{20}} c^{\frac{3}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{3}{20}}}{p^{\frac{1}{2}}} \quad (79)$$

siendo

$$A_1 = \frac{2}{3} A (3B)^{-\frac{1}{2}} \quad (80)$$

**58. Máximo de fuerza viva.**—Si en la fórmula (79) suponemos que el peso  $p$  del proyectil aumenta, el valor de la velocidad disminuye, pero la fuerza viva  $\frac{p v^2}{g}$ , ó bien su

raiz cuadrada  $v \left(\frac{p}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ , crece hasta un cierto valor máximo.

En efecto, multiplicando por  $p^{\frac{1}{2}}$  ambos miembros de la ecuacion (68) y haciendo para abreviar

$$\Theta(p) = \left( p^{\frac{1}{2}} - B \frac{\lambda u^{\frac{1}{2}}}{\gamma c} p^{\frac{3}{4}} \right)$$

se tiene

$$v p^{\frac{1}{2}} = A \left( \frac{fa}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\alpha}{c^2} \right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{4}{10}} \Theta(p)$$

expresion que se hace máximo, con el valor de  $p$  que haga máximo á  $\Theta(p)$ : para determinarlo, haremos

$$\Theta'(p) = \frac{1}{4} p^{-\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} B \frac{\lambda u^{\frac{1}{2}}}{\gamma c} p^{-\frac{1}{4}} = 0$$

en donde, desechando el valor  $p = \infty$ , que no puede producir máximo, pues con él es  $v = 0$ , resulta

$$B \frac{\lambda (p u)^{\frac{1}{2}}}{\gamma c} = \frac{1}{3}$$

ÿ como la segunda derivada con esta condicion, se reduce á

$$\Theta''(p) = -\frac{1}{8 p^{\frac{5}{4}}}, \text{ el valor de } p, \text{ de ella deducido, produce un}$$

máximo;

$$v p^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} A \left( \frac{fa}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\alpha}{c^2} \right)^{\frac{1}{10}} \Delta^{\frac{1}{4}} u^{\frac{4}{10}} p^{\frac{1}{4}} \quad (81)$$

vemos por consiguiente, que cuando las condiciones de carga son tales, que se verifica la relacion (77), se obtiene; el máximo de velocidad, con relacion á la duracion de combustion del grano y el máximo de fuerza viva, con relacion al peso del proyectil.

**59. Presion máxima.**—Esta tendrá lugar, pocos momentos despues que el proyectil haya abandonado su posicion de carga, esto es, cuando aun el culote se halle muy próximo á

su posicion inicial, por lo que, el valor de  $\frac{u}{z}$ , será en general

muy pequeño; esto permite despreciar el segundo término de la ecuacion (59), aun cuando en algunos casos sea  $\Sigma$  algo

grande, pues la fórmula que así queda, dá suficiente exactitud en la práctica. En tal hipótesis, se tiene para la presión máxima

$$P = D \frac{m z}{\omega} K^{2\beta}$$

representando por  $D$ , el valor numérico de  $\psi_0 \left( \frac{u}{z} \right)$ , para el correspondiente de  $\frac{u}{z}$  que dá el máximo de presión  $P$ ; si en la anterior expresión, ponemos por  $K$  y  $\beta$  sus valores (38) y (48), después de suponer  $\alpha = \frac{4}{2}$ , obtendremos

$$P = D \left( \frac{fa}{\gamma \omega} \right) \frac{\pi}{z} \left( \frac{m z}{\omega p_0} \right)^{\frac{4}{2}}$$

y substituyendo por  $z$  su valor (35)

$$P = D \frac{fa}{\omega \gamma} \left( \frac{m \pi \Delta \delta}{p_0 (\delta - \Delta)} \right)^{\frac{4}{2}}$$

en la que, introduciendo los valores

$$m = \frac{p}{g} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\pi c^2}{k}$$

resulta

$$P = D \frac{k}{\pi g^{\frac{1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}}} \frac{fa}{\gamma} \frac{(p \pi)^{\frac{1}{2}}}{c^2} \left( \frac{\Delta \delta}{\delta - \Delta} \right)^{\frac{4}{2}}$$

poniendo por  $\frac{fa}{\gamma}$  su valor  $\alpha^2$  y admitiendo, según la experiencia confirma, que el valor de  $\left( \frac{\Delta \delta}{\delta - \Delta} \right)^{\frac{4}{2}}$  es proporcional á  $\Delta$  ó sea, igual á  $N \Delta$ , siendo  $N$  una constante, se tiene

$$P = H \alpha^2 \frac{(p \pi)^{\frac{1}{2}}}{c^2} \Delta \quad (82)$$

siendo

$$H = D \frac{k \cdot N}{\pi g^{\frac{1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}}}$$

un valor constante que es preciso determinar.

**60. Valor de H.**—Suponiendo  $\alpha$  conocido en la pólvora tipo empleada, así como, todas las circunstancias de la carga, bastará medir la presión máxima para poder deducir de la fórmula el valor de H.

De un modo análogo á lo hecho en las fórmulas de las velocidades, puede suponerse  $\alpha = 1$ , ó tomar para esto, el

valor aproximado deducido de la relación  $\alpha = \left(\frac{fa}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} = 1331$  obteniéndose respectivamente

$$H = 27060 \quad \text{y} \quad H = 0,0153$$

y por consiguiente, las fórmulas definitivas serán

$$P = 27060 \alpha^2 \Delta \frac{(p \cdot \alpha)^{\frac{1}{2}}}{c^2} \quad (83)$$

$$P = 0,0153 \alpha^2 \Delta \frac{p \cdot \alpha}{c^2} \quad (84)$$

**61. Velocidad máxima, correspondiente al máximo de presión.**—Si en la fórmula (76) se hace

$$R = A(fa)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\alpha}{c^2}\right)^{\frac{1}{10}} u^{\frac{1}{10}} \quad (85)$$

tendremos

$$v = R \Delta^{\frac{1}{4}} \Phi(\tau) \quad (86)$$

y suponiendo en el valor de la presión máxima

$$r = H f a \frac{(p \cdot \alpha)^{\frac{1}{2}}}{c^2} \quad (87)$$

se reducirá la (82) á

$$P = \frac{r \Delta}{\tau} \quad (88)$$

Siendo R y r cantidades independientes de  $\Delta$  y  $\tau$ , podremos determinar para un valor dado de la presión máxima, los valores de estas cantidades que hacen máximo el de  $v$ . En efecto, eliminando  $\Delta$  entre las ecuaciones (86) y (88) se tiene

$$v = R r^{-\frac{1}{4}} \tau^{\frac{1}{4}} \phi(\tau) P^{\frac{1}{4}} \quad (89)$$

Sustituyendo en la fórmula (75) en lugar de B  $\frac{\lambda (pu)^{\frac{1}{2}}}{c}$  su igual  $\frac{4}{3} \tau_1$ , dado por la (77), es decir en función del valor  $\tau$ , que hace máxima la velocidad, quedando iguales las demás cantidades, resulta

$$\phi(\tau) = \frac{4}{3} \tau^{-\frac{3}{2}} (3\tau - \tau_1) \quad (90)$$

que sustituido en la (89) dará

$$v = \frac{4}{3} R r^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{5}{4}} (3\tau - \tau_1) P^{\frac{1}{4}} \quad (91)$$

que se hace máxima con el valor de  $\tau$

$$\tau_0 = \frac{5}{3} \tau_1 \quad (92)$$

el cual sustituido en las fórmulas (88) y (91) dá los siguientes valores

$$\Delta_0 = \frac{5}{3} \frac{\tau_1 P}{r} \quad (93)$$

$$v_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{5}{4}} R (r \tau_1)^{-\frac{1}{4}} P^{\frac{1}{4}} \quad (94)$$

en las que, despues de reemplazar por  $\tau_1$ , R y  $r$  sus valores (77), (85) y (87) y poniendo  $A=1,569$ ,  $B=0,00795$  § (55) y  $H=0,0453$ , se tiene

$$\tau_0 = 0,03975 \frac{\lambda (p u)^{\frac{1}{2}}}{c} \quad (95)$$

$$\Delta_0 = 2,598 \frac{\lambda c u^{\frac{1}{2}} P}{f a \pi^{\frac{1}{2}}} \quad (96)$$

$$v_0 = 7,993 \left( \frac{f a}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\pi^{\frac{9}{40}} u^{\frac{11}{40}} c^{\frac{11}{20}}}{p^{\frac{1}{2}}} P^{\frac{1}{4}} \quad (97)$$

En el caso de resultar para  $\Delta$  un valor mayor del que puede ser realizado en la práctica, se supondrá igual á su valor límite, la unidad, lo que dará otro máximo para  $v$ , obteniéndose así de la ecuacion (88), despues de reemplazar por  $r$  su igual (87)

$$\tau_1 = H \frac{f a (p \pi)^{\frac{1}{2}}}{c^2} \cdot \frac{1}{P} \quad (98)$$

que sustituido en la (68) resulta

$$v = \frac{A}{H^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^{\frac{1}{40}} u^{\frac{1}{40}} c^{\frac{8}{40}}}{p^{\frac{1}{2}}} \left( 1 - \frac{B}{H} \frac{\lambda c u^{\frac{1}{2}} P}{f a \pi^{\frac{1}{2}}} \right) P^{\frac{1}{2}} \quad (99)$$

Ahora bien, de la ecuacion (93) se deduce, poniendo por  $\tau_1$  su valor (77) y por  $r$  el (87)

$$\frac{A}{5} \Delta_0 = \frac{B}{H} \frac{\lambda c u^{\frac{1}{2}}}{f a \pi^{\frac{1}{2}}} P$$

que sustituido en la (99) dará, despues de poner por A y H sus valores,

$$v = 12,7 \frac{\pi^{\frac{1}{10}} c^{\frac{8}{10}} u^{\frac{4}{10}}}{p^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{5} \Delta_0\right) P^{\frac{1}{2}} \quad (100)$$

De esta manera, asignando á P el máximo valor que se puede realizar en la práctica, se emplearán las fórmulas (95), (96) y (97), en el caso de resultar para  $\Delta$  un valor menor que la unidad y las (95) y (100) con el valor  $\Delta=1$ .

**62. Influencia de los elementos del tiro sobre los valores de las presiones y velocidades.**—Las cantidades de que dependen los valores encontrados de las velocidades y presiones ó sean

$$c, u, p, f, a, \lambda, \tau, \pi, \Delta$$

pueden ser clasificadas en tres grupos, el primero constituido por las  $c, u,$  y  $p,$  calibre, longitud del ánima y peso del proyectil, son determinadas de antemano; el calibre, según el efecto que trate de obtenerse; la longitud del ánima, fijada en 19 á 21 veces el calibre y el peso del proyectil, tres veces el correspondiente al esférico. El segundo grupo,  $f, a, \lambda, \tau,$  lo forman las que dependen de la naturaleza de la pólvora, mientras que el tercero  $\pi$  y  $\Delta,$  varían con el sistema de carga.

**63. Bocas de fuego semejantes.**—Se llaman así, aquellas cuyas longitudes son proporcionales á los respectivos calibres y sus pesos, volúmenes y superficies á los cubos y cuadrados de los mismos: siendo además la duración  $\tau$  de la combustión, proporcional á ellos.

De esto se deduce, teniendo presente el valor de K (38), así como los de  $\alpha$  y  $\beta,$  que los que tome  $K^\beta$  son inversamente proporcionales á los del calibre y que la variación de este no influye de ningún modo en el valor de  $\Sigma$  (49); por consiguiente, en dos piezas semejantes, para valores iguales de  $\frac{u}{z},$  los de  $v$  y  $p$  (58) y (59) son constantes, pudiendo establecerse que

en bocas de fuego semejantes y semejantemente cargadas, son iguales las velocidades y presiones correspondientes á espacios recorridos, proporcionales al calibre.

#### 64. Influencia de la naturaleza de la pólvora.

—El valor (84) de la presión máxima, demuestra que, permaneciendo constantes todos los elementos á escepcion de  $f$ ,  $a$ ,  $\gamma$  y  $\lambda$ , que son los dependientes, de la naturaleza de la pólvora, la presión máxima crece con  $\alpha^2$  ó sea  $\frac{fa}{\gamma}$  y por lo tanto, que para pólvoras diferentes, no varia la presión máxima, si  $\alpha$  conserva el mismo valor.

La expresion (70), constando de dos términos, de los cuales el segundo es sustractivo, nos hace ver, que el medio de obtener la máxima velocidad, es procurar el crecimiento del término aditivo y el decrecimiento del sustractivo. Los elementos dependientes de la naturaleza de la pólvora, entran en estos términos en la forma siguiente;  $\alpha = \left(\frac{fa}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$

como factor de los dos y  $\varepsilon = \frac{\lambda}{\gamma}$ , multiplicando al sustractivo, de lo que podemos ya deducir, que para un valor determinado de la presión máxima, es decir, siendo  $\alpha$  constante, se obtendrá la máxima velocidad, dando á  $\frac{\lambda}{\gamma}$  el menor valor posible.

Así pues, en dos pólvoras en que se verifique

$$\frac{fa}{\gamma} = \frac{f'a'}{\gamma'} \quad (101)$$

la presión máxima será la misma, y de los dos términos sustractivos del valor de  $v$ , siendo proporcionales á  $\frac{\lambda}{\gamma}$  y  $\frac{\lambda'}{\gamma'}$  cuya relacion es  $\frac{\lambda\gamma'}{\lambda'\gamma}$ ; será mayor el primero, cuando esta sea

mayor que la unidad, dando por lo tanto la pólvora á quien corresponda, menor velocidad.

Si se supone que ambas pólvoras tengan la misma forma, será  $a = a'$  y entonces

$$\frac{f}{\gamma} = \frac{f'}{\gamma'}$$

es la condicion para que den la misma presion y siendo  $\lambda = \lambda'$ , la relacion entre los términos sustractivos será

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{f'}{f}$$

y por consiguiente, la pólvora de mayor fuerza, dará la máxima velocidad.

Si por el contrario, las dos pólvoras son de la misma composicion y solo varian en la forma del grano, será  $f = f'$ ; la condicion de ser igual la máxima presion se reduce á

$$\frac{a}{\gamma} = \frac{a'}{\gamma'}$$

siendo la relacion de los términos sustractivos igual á

$$\frac{\lambda \gamma'}{\lambda' \gamma} = \frac{\lambda a'}{\lambda' a}$$

Aplicando esta expresion á la comparacion de las pólvoras de grano esférico, para las que obtuvimos

$$a' = 3 \quad \text{y} \quad \lambda' = 1$$

con las de grano cilíndrico acanalado, en las que

$$a = 1 + x \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{x}{1 + x},$$

se obtiene

$$\frac{a' \lambda}{\lambda' a} = \frac{3x}{(1+x)^2}$$

Esta relacion se hace máxima, con el valor de  $x$  que anula á

$$3(1+x)^2 - 6x(1+x)$$

ó sea  $x=1$ , con el que

$$\frac{a'\lambda}{a\lambda'} = \frac{3}{4}$$

relacion que hace ver, desde luego, la ventaja de las pólvoras cilíndricas acanaladas sobre las de grano esférico, pues sin aumento de presion máxima y con el valor de  $x=1$ , se consigue disminuir en  $\frac{1}{4}$  el término sustractivo del valor de la velocidad, lo que proporciona un notable aumento de esta, aumento que es aun mayor para otros valores de  $x$ , puesto que produciendo máximo en la relacion citada, el valor  $x=1$  y no habiendo ninguno otro que produzca mínimo, claro es que siempre será menor que  $\frac{3}{4}$  la expresada relacion: así, para

$$x = \frac{1}{2} \text{ se obtiene } \frac{a'\lambda}{a\lambda'} = \frac{2}{3}$$

es decir, que con este valor de  $x$ , la disminucion que en el término sustractivo se obtiene es de  $\frac{1}{3}$ , siendo por consiguiente mayor que para el valor  $x=1$ , el aumento en la velocidad inicial.

Comparando con el esférico, el grano paralelepédico, para el que se obtuvo

$$a = 1 + x + y \quad \dot{y} \quad \lambda = \frac{x + y + xy}{1 + x + y}$$

resulta;

$$\frac{a'\lambda}{a\lambda'} = \frac{3(x + y + xy)}{(1 + x + y)^2}$$

y suponiéndolo de base cuadrada ó sea  $x=y$ , quedará

$$\frac{a'\lambda}{a\lambda'} = \frac{3(2x + x^2)}{(1 + 2x)^2}$$

que con el valor  $x = \frac{1}{2}$ , se convertirá en

$$\frac{a'\lambda}{a\lambda'} = \frac{15}{16}$$

:

que dá solamente  $\frac{1}{46}$  de disminucion en el término sustractivo: esta relacion, es menor á medida que  $\alpha$  decrece de 4 á 0 y siendo  $\alpha$  la relacion de la altura al lado de la base, se vé, que la ventaja sobre el grano esférico es mayor á medida que el paralelepédico sea mas aplastado, pero vemos que siempre es preferible á él, el acanalado.

**65. Influencia de la variacion de  $\varpi$ ,  $\Delta$  y  $\gamma$ .**—Si en el valor (76) de la velocidad, sustituimos por  $\Phi$  ( $\gamma$ ) el suyo, dado por la expresion (90) y hacemos

$$U = \frac{4}{3} A (fa)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{p^{\frac{1}{4}}} \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}} u^{\frac{4}{10}}$$

se obtiene

$$v = U \varpi^{\frac{7}{20}} \Delta^{\frac{1}{4}} \gamma^{-\frac{3}{2}} (3\gamma - \gamma_1) \quad (102)$$

y substituyendo en la fórmula (82), por  $\alpha^2$  su valor  $\frac{fa}{\gamma}$  y haciendo

$$U' = H (fa)^{\frac{1}{2}} \frac{p^{\frac{1}{2}}}{c^2}$$

resulta

$$P = U' \frac{\varpi^{\frac{1}{2}} \Delta}{\gamma} \quad (103)$$

Suponiendo constantes todas las demas cantidades, las variaciones de  $v$  y de  $P$ , con relacion á  $\varpi$ ,  $\Delta$  y  $\gamma$ , pueden verse, por la relacion que con los valores de las fórmulas (102) y (103) tengan sus diferenciales, estas relaciones son;

$$\frac{dv}{v} = \frac{7}{20} \cdot \frac{d\varpi}{\varpi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{d\Delta}{\Delta} - \frac{3}{2} \frac{\gamma - \gamma_1}{3\gamma - \gamma_1} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varpi}{\varpi} + \frac{d\Delta}{\Delta} - \frac{d\gamma}{\gamma}$$

y la influencia de cada variable sobre la velocidad, está medida, por el coeficiente que en estas expresiones tienen, las fracciones  $\frac{d\pi}{\pi}$ ,  $\frac{d\Delta}{\Delta}$  y  $\frac{d\tau}{\tau}$ ; así, las variaciones debidas á  $\pi$ ,  $\Delta$  y  $\tau$  son proporcionales á

$$\frac{7}{20}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{3}{2} \cdot \frac{\tau - \tau_1}{3\tau - \tau_1}$$

y siendo  $\frac{3}{2} \cdot \frac{\tau - \tau_1}{3\tau - \tau_1}$  creciente con  $\tau$ , no llega al valor  $\frac{1}{4}$ , no

siendo  $\tau = \frac{5}{3} \tau_1$ , valor que no alcanza en la práctica, y por consiguiente la influencia que en orden creciente ejercen en la velocidad estas cantidades, es la de

$$\pi, \Delta \text{ y } \tau$$

mientras que en la presión, es menor la que ejerce  $\pi$  que las de  $\Delta$  y  $\tau$ .

Tales son las fórmulas prácticas de velocidades y presiones, así como las principales consecuencias que de ellas se deducen, obtenidas por Sarrau. Una serie de minuciosas experiencias, en las que variaban entre grandes límites las velocidades y calibres de las piezas, llevadas á cabo por el mismo autor, con objeto de comprobar su exactitud, han dado resultados verdaderamente notables, y mucho mas aun, si se considera lo complejo del fenómeno de la combustion de la pólvora, dentro de las bocas de fuego: la diferencia de las velocidades y presiones medidas, á las calculadas, han sido siempre muy pequeñas, muy principalmente en velocidades, y si fueron algo mayores en presiones, puede desde luego asegurarse ser debido, á que los procedimientos experimentales empleados para la medicion de estas, dejaban mucho que desear.

**66. Aparatos para medir los efectos balísticos de la pólvora.**—Una vez estudiados los procedimientos analíticos conducentes á este fin, pasemos á la descripción

de los aparatos que tienen el mismo objeto: estos pueden ser clasificados en dos grupos:

1.° *Los destinados á medir el movimiento impreso al proyectil, á la pieza ó á un apéndice unido á esta.*

2.° *Los que tienen por objeto medir las presiones dentro del ánima.*

Los del primer grupo se dividen en:

1.° *Probetas.*

2.° *Aparatos electro-balísticos.*

Pueden servir de probetas las mismas armas ordinarias, pero tambien se construyen aparatos para este solo uso y pueden ser *de resorte, de peso y de reaccion*: todos ellos tienen por objeto determinar las velocidades, alcances ó reacciones, pero no entramos en su descripción, para hacerlo mas extensamente de los aparatos electro-balísticos, por la gran importancia que en la actualidad han adquirido, fijándonos en la Clepsidra Le-Boulengé, y cronógrafos de Noble y Schultz. (\*)

Los aparatos del segundo grupo son de dos clases, unos fundados en el método llamado *estático* y los otros en el *dinámico*: los primeros miden la presión, oponiéndole una fuerza contraria de intensidad conocida, y los segundos, produciendo por la misma presión, un movimiento en un cuerpo pesado. (\*\*)

Del primer sistema, describiremos el aparato de medir presiones de Clavarino y las balanzas manométricas de Marcel-Deprez, y del segundo el acelerómetro y acelerógrafo del mismo.

**67. Clepsidra Le-Boulengé.**—Los cronógrafos eléctricos, tales como el del mismo autor de la clepsidra, no pueden ser empleados mas que para la medición de tiempos

---

(\*) *En el tratado de Balística—Artillería lisa* por D. Antonio de la Azuela y D. Guillermo Martínez, se describen los cronóscopos Navez y Navez-Leurs, y cronógrafos Le-Boulengé, Bashforth y Zapata.

(\*\*) En el mismo tratado á que se refiere la nota anterior, se describieron los aparatos Bodman, Noble y el indicador Rieq.

relativamente pequeños, pues creciendo proporcionalmente al cuadrado de los tiempos, las alturas de caída, pronto necesitarían ser estas muy considerables. Por esta razón, para la medida de tiempos largos, como por ejemplo la duración de las trayectorias, puede sustituirse á la caída de cuerpos pesados, la salida de un líquido por un orificio, calculando el tiempo transcurrido, por el peso del líquido que haya pasado, cantidad conocida, cuando se tengan como datos, el diámetro del orificio y altura del nivel que el líquido tenga sobre él: tal es el fundamento de la Clepsidra Le-Boulengé.

La primera idea que su autor tuvo, fué hacer salir por un orificio una vena líquida, que cortada bruscamente en el instante en que se empezaba á contar el tiempo, permitía recoger desde entonces el líquido en un recipiente, y cortada de nuevo al finalizar el fenómeno cuya duración se medía, pasaba el líquido á otro recipiente, deduciendo por la cantidad en peso recogida, el tiempo objeto de la investigación.

Las experiencias ejecutadas con este aparato, pusieron de relieve los inconvenientes que tenía, y demostraron, que la regularidad de salida de un líquido por un orificio, es muy grande, cuando se abre y cierra bruscamente una válvula, por sí sola.

La mucha fluidez, homogeneidad y gran peso específico del mercurio, así como, el ser á la temperatura ordinaria insensible su evaporación y el no mojar las superficies que con él estén en contacto, fueron circunstancias que indujeron á que Le-Boulengé le adoptara desde luego, considerándolo como el líquido más apropiado.

*Descripción del aparato.*—Consta (fig. 3.<sup>a</sup>), de un receptáculo cilíndrico A de 20 centímetros de diámetro y 3 de altura, terminado en su parte central por una columna hueca B, de 20 centímetros de altura, la cual en su extremo inferior, tiene un asiento de acero, para alojar una válvula cónica K del mismo metal; sobre dicho asiento está atornillada otra pieza, también de acero, con un pequeño orificio *r*, por donde sale el mercurio cuando la válvula esté levantada. Esta,

va unida á una varilla, que se articula en el brazo de la *palanca H de la válvula*, atravesando un orificio que hay en la cubierta E de fundicion, que cierra el vaso A.

Un electro-íman M, sostiene el brazo P de una palanca, mientras está en actividad, pero al cesar, cae y choca con la palanca de la válvula, obligando á abrirse esta, razon por la que, toma el nombre de *palanca de abertura*, así como bobina y circuito, tambien de abertura, los correspondientes á dicha palanca.

Un segundo electro-íman N, sostiene el brazo de otra palanca S, que tiene forma de horquilla, cuyos brazos están unidos por un travesaño, el que, al caer la palanca por la desimantacion del electro-íman, choca con la de abertura y cierra la válvula.

Para evitar la trepidacion de la primera palanca al caer, está el muelle T que la sujeta.

La columna B, tiene tres pies dotados de tornillos para nivelar, los que se apoyan en un platillo C de fundicion, rodeado de un resalte, para evitar la pérdida del mercurio que pudiera caer.

Con objeto de que al empezar las experiencias, el nivel del mercurio en el receptáculo sea siempre el mismo, tiene un orificio O que se abre y cierra con un tornillo; debajo de aquel, se suspende una pequeña cubeta para recoger el mercurio sobrante.

Por último, un orificio W situado en la parte superior, sirve para introducir un termómetro, que marca la temperatura del líquido.

*Disyuntor*.—Es idéntico al empleado por el mismo autor en su cronógrafo.

**68. Medida del tiempo**.—Para hacer uso del aparato en la medida del tiempo trascurrido, desde el instante en que se rompe el circuito de abertura, es preciso tener en cuenta, que desde que se verifica la rotura hasta el instante en que la válvula se abre, pasa un cierto tiempo que es el necesario para la desimantacion del núcleo imantado y caída de la palanca,

y que del mismo modo, se retrasa el momento del cierre de la válvula por la rotura del segundo circuito. Si estos dos tiempos fuesen exactamente iguales, ningun error habria en la medida del tiempo que se quisiera determinar, pero como no es posible que así suceda, está el aparato construido de tal modo, que el tiempo necesario para que se abra la válvula desde la rotura del primer circuito, es menor que el preciso para cerrarse desde el instante en que se rompe el segundo, razon por la que; en la cubeta se obtendrá un peso de mercurio, mayor que el correspondiente al tiempo trascurrido entre la rotura de ambos circuitos.

El disyuntor, tiene por objeto la determinacion de este peso de mercurio, porque cortando ambos circuitos á la vez, dejará salir una cierta cantidad  $p$ , correspondiente á la diferencia de los tiempos expresados, que es la que debe restarse de la cantidad total de mercurio que se obtenga al emplearse el aparato, rompiéndose sucesivamente los dos circuitos.

Suponiendo que la velocidad de salida del mercurio sea constante; llamando  $P$  al peso obtenido durante un segundo que permanezca abierto el orificio, y  $P'$  al que resulte de una experiencia, despues de restado el  $p$  de la disyuncion, es evidente, que  $t = \frac{P'}{P}$  será el tiempo correspondiente al peso  $P'$ .

Ahora bien, la cantidad de líquido que sale por el orificio durante un cierto tiempo, varia con la temperatura que aquel tenga, así como con su nivel sobre el orificio; por lo que es preciso referir los pesos á una temperatura constante, tomándose esta la de 0 grados: así, siendo  $P$  el peso obtenido á la temperatura  $t^{\circ}$ , durante el mismo tiempo, á  $0^{\circ}$  hubiera resultado

$$P_0 = P (1 + \alpha t),$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatacion del mercurio, cuyo valor es 0,00018 y  $t$  la temperatura marcada por el termómetro, colocado en el receptáculo del aparato.

Respecto á la altura del nivel sobre el orificio, puede admitirse, que la velocidad de salida es constante durante cada

segundo, en lo que no se comete error sensible, atendiendo al diámetro considerable que tiene el vaso A, con relacion al pequeño orificio de salida, por lo que la diferencia de nivel en tiempo tan corto será insignificante: además, demuestra la experiencia, que partiendo de un mismo nivel para el primer segundo, de uno á otro, son constantes las primeras diferencias, por ser las segundas á lo mas de 0,0000004 que corresponden á  $\frac{1''}{10000000}$ , tiempo como se vé, despreciable.

Para calcular segun estos principios, los pesos de mercurio  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  correspondientes al 1.º, 2.º, 3.º, 4.º..... segundo, sea H la altura del nivel sobre el orificio y A el área de este, por lo que

$$P_1 = m A \delta \sqrt{2gH}$$

siendo  $m$  el coeficiente de contraccion, que suponemos constante, y  $\delta$  la densidad del mercurio, que es 43'598.

El volúmen que habrá salido será  $\frac{P_1}{\delta}$ , por lo que, si se llama  $h$  al descenso del nivel durante este segundo y R al radio del vaso A, este volúmen será igual á  $\pi R^2 h$ , y de aquí

$$h = \frac{P_1}{\pi R^2 \delta}$$

Al principio del segundo siguiente, el nivel tendrá una altura  $H' = H - h$  ya conocida, y tendremos,

$$P_2 = m A \delta \sqrt{2gH'}$$

ó bien,

$$P_2 = P_1 \sqrt{\frac{H'}{H}}$$

continuándose de análoga manera calculando los pesos  $P_3, P_4, \dots$

Al hacer las experiencias, debe siempre empezarse con una misma altura de nivel: para conseguirlo, basta llenar el receptáculo hasta que rebase el orificio cerrado por el tornillo O, y abrir despues este, lo suficiente para que pueda salir el

sobrante: la altura que así resulta, es siempre igual y generalmente de 0,20, no debiendo preocupar haya diferencia de un milímetro, por corresponder á un tiempo despreciable.

**69.** *Cálculo experimental de la tabla de tiempos.*— Para calcular de este modo el peso  $P_1$ , se hace preciso cortar los dos circuitos, precisamente en el intervalo de 4". Con este objeto, Le-Boulengé ha ideado el aparato representado en la (fig. 4.<sup>a</sup>), que consta de dos áncoras  $abc$  y  $def$ , que giran alrededor de ejes perpendiculares á su plano: los extremos  $a$  y  $f$ , están en contacto con los tornillos de hierro dulce  $g$  y  $h$ . El soporte  $P$  del aparato, es aislador de la electricidad. Para hacer uso de él, siendo  $ts$  el hilo del circuito de abertura de la clepsidra, se establece una corriente derivada  $q l g a b H r$ , uniendo dos puntos cualquiera  $q$  y  $r$  con los  $l$  y  $H$ , que comunican con el tornillo  $g$  y extremo  $a$ , respectivamente. Del mismo modo, se establece otra corriente derivada  $v G e f h n x y$  en el circuito de cierre.

Sobre el sistema de las dos áncoras, está colocado un cronómetro, cuyo péndulo, que termina en una cuchilla  $o$ , marca segundos; esta cuchilla, chocando siempre con el brazo  $c$ , rompe la primera corriente derivada en  $a$ , y la segunda, en la otra semi-oscilacion por chocar con el  $d$ .

Establecido así el aparato resulta, que aun cuando se interrumpen las corrientes derivadas, las de abertura y cierre no quedarán rotas, mientras con anterioridad no se corten, 1.<sup>a</sup> primera, entre  $q$  y  $r$  y entre  $v$  y  $r$  la segunda; si esto sucediese, pasando la corriente de abertura por  $t q l g H r s$ , en el momento que la cuchilla choque con el brazo  $c$ , quedará interrumpida en  $a$ , abriéndose entonces la válvula, y cuando en su vuelta, choque el péndulo con  $f$ , interrumpirá el circuito de cierre  $y x n h f e G v$  y cerrará la válvula, y siendo 4" el tiempo empleado por el péndulo en estas oscilaciones, se tendrá determinado el peso  $P_1$ .

Para cortar los circuitos de abertura y cierre entre  $q$  y  $r$  y entre  $v$  y  $x$  respectivamente, se emplea un aparato (fig. 5.<sup>a</sup>) llamado rehótomo, que consta de dos láminas de metal  $C$  y  $D$ ,

:

permitiendo el paso de la corriente, cuando están unidos sus contactos *c* y *d* é interrumpiéndose cuando se separan, lo que se consigue, con solo apoyar el dedo en los extremos de las planchas. Uno de los hilos de la corriente de abertura, se une al botón *q* y al *r* el otro; del primero, parte un hilo que se une en *l* al sistema de áncoras, y del *r*, otro que marcha á *H*, estableciéndose así la derivacion: del mismo modo á *x* y *v*, vienen los dos hilos de la corriente de cierre, partiendo de estos mismos puntos, los que establecen la segunda derivacion.

Supongamos, para hacer la experiencia, dispuestos á funcionar de la manera indicada, todos los aparatos descritos; si en esta disposicion, cuando el péndulo está en *mn* se rompe la corriente de abertura por el rehótomo, cambiará su direccion pasando toda por la derivacion, y como por ello, no se ha interrumpido, la válvula de la clepsidra, permanecerá cerrada, pero en el instante que el péndulo venga á la posicion *zz*, cesando el contacto en *a*, se rompe la corriente y el mercurio empezará á salir. Siguiendo el operador el péndulo con la vista y rompiendo con el rehótomo la corriente de cierre cuando esté en *m'n'*, toda pasará por la segunda derivacion, rompiéndose, cuando en la otra semi-oscilacion pase la cuchilla por *z'z'*, en cuyo caso, cerrará la salida de mercurio. Si se llama  $\alpha$  la cantidad en peso de mercurio obtenida, y  $\beta$  la de la disyuncion,  $\alpha - \beta$  será el peso correspondiente al tiempo en que el péndulo ha recorrido el espacio  $zm' + z'm'$ .

Si las dos posiciones *zz* y *z'z'*, fuesen perfectamente simétricas con respecto á la vertical,  $zm' + z'm'$  seria igual á  $mm'$  y  $\alpha - \beta$ , corresponderia precisamente á  $1''$ ; pero como no es fácil conseguir esto en la práctica, despues de obtenido el peso  $\alpha - \beta$ , se vuelve á empezar la experiencia, poniendo nuevamente el mercurio al mismo nivel que en un principio.

Como anteriormente, se corta el circuito de abertura por el rehótomo y siguiendo el péndulo con la vista, se deja llegue á *m'n'*, vuelve á *mn* y al llegar nuevamente á *m'n'* se corta el circuito de cierre, tambien por el rehótomo, por lo que, al pasar por *z'z'* el péndulo, cesará la salida de mercurio, obte-

niéndose así un peso  $\gamma$  del que se deduce, el  $\gamma - \beta$  correspondiente al tiempo durante el cual ha oscilado el péndulo,  $z m' + 2 m' m + m' z'$ .

Restando los pesos así obtenidos, se elimina  $\beta$ , no siendo necesaria la disyunción, y  $\gamma - \alpha$ , corresponderá al tiempo de las oscilaciones  $(z m' + 2 m m' + m' z') - (z m' + m' z') = 2 m m'$  es decir á  $2''$ , por lo que, admitiendo sea constante la salida de mercurio,

$$\frac{\gamma - \alpha}{2}$$

será el peso  $P_1$  que pasa durante  $4''$ .

Conocido que sea  $P_1$  se calcula  $P_2$  como queda dicho y se conocerá su diferencia  $\omega$  constante y por ella, los pesos  $P_3 P_4 \dots$

La siguiente tabla, está calculada por Le-Boulengé, para un aparato de las dimensiones indicadas, al hacer su descripción,

Segundos.	Peso que pasa durante cada segundo.	Suma de los pesos parciales.
	Centigramos.	Centigramos.
1°	6200,5	6200,5
2°	6198,2	12398,7
3°	6196,0	18594,7
4°	6193,7	24788,4
5°	6191,5	30979,9
6°	6189,2	37169,1
7°	6187,0	43356,1
8°	6184,7	49540,8
9°	6182,5	55723,3
10°	6180,2	61903,5
11°	6178,0	68081,5
12°	6175,7	74257,2
13°	6173,5	80430,7
14°	6171,2	86601,9
15°	6169,0	92770,9
16°	6166,7	98937,6
17°	6164,5	105102,1
18°	6162,2	111264,3
19°	6160,0	117424,3
20°	6157,7	123582,0

Fácil es, por medio de esta tabla, determinar el tiempo correspondiente á un peso obtenido, admitiendo que en el intervalo de 1", las diferencias de tiempos, son proporcionales á las de los pesos de mercurio.

**70.** *Instalacion y uso de la clepsidra.*—Se la coloca horizontal, valiéndose para ello de los tres tornillos del pié y de un nivel, que en dos posiciones distintas, se pone sobre la cubierta del receptáculo; en la misma mesa (fig. 6.<sup>a</sup>), se coloca el disyuntor, estableciendo el primer circuito, desde una pila al primer marco, desde este al disyuntor y de aquí al electro-iman de abertura, volviendo á la pila: el segundo circuito, es análogo al anterior, pasando por el segundo marco y electro-iman de cierre. Si el terreno lo permite, puede suprimirse el hilo conductor, que desde el segundo marco marcha al disyuntor, pasando entonces la corriente por el depósito comun, para lo cual, como la figura indica, se colocan dos planchas metálicas de zinc ó cobre *a* y *b*, en la proximidad del segundo marco y del disyuntor respectivamente, introduciéndolas, bien sea en agua ó en el terreno previamente humedecido.

Las pilas generalmente empleadas, son las de Bunsen, cuyo número de pares varia con la longitud de los circuitos, debiendo siempre regularizarse de modo, que los electro-imanés no tengan mas fuerza que la necesaria para sostener las palancas.

Puede suceder, que el choque producido al caer la palanca de abertura, sea causa de que tambien lo haga la de cierre: si el tiempo que trata de medirse pasa de un segundo, debe darse poca intensidad á las corrientes, sosteniendo el operador la palanca de cierre ó con la mano, que separará rápidamente cuando la de abertura haya caido: pero si el tiempo es menor que 1", no lo habrá para esta operacion, por lo que es forzoso dar mas energia á la corriente.

El mercurio debe siempre estar perfectamente puro y como con facilidad se oxidará en su superficie, se debe filtrar con frecuencia, para separar el óxido formado.

La disyuncion, se hace exactamente lo mismo que en el cronógrafo, y para mayor exactitud, deben hacerse tres seguidas: pesando el total del mercurio que resulte y dividiendo por tres, se obtendrá el peso correspondiente al término medio de la disyuncion; no es necesario volver al receptáculo el mercurio, porque siendo en muy pequeña cantidad, la diferencia de nivel es despreciable.

Seguidamente de la disyuncion, se hace el disparo, pesando el mercurio, y volviéndolo al aparato, en union del obtenido en la disyuncion. Operando así, no es preciso por lo general, durante la experiencia, igualar el nivel del mercurio, y solamente se hará, cuando por una diferencia grande de temperatura, pueda suponerse se haya alterado sensiblemente.

Se facilitan las pesadas, procediendo al hacerlas del modo siguiente: como con anterioridad se conoce próximamente el peso que ha de resultar por el conocimiento del tiempo probable, se coloca en uno de los platillos de la balanza que lleva consigo el aparato y que aprecia medios centigramos, una cubeta con este peso probable y en el otro platillo, se pone el obtenido, bastando aumentar ó quitar pesos muy pequeños al probable, para igualarle con el verdadero; es preferible que aquel sea mas pequeño que este, para que siempre haya que aumentar.

Si se trata de medir la duracion de las trayectorias de las bombas, no es posible, por grande que sea el marco-blanco, dar en él, empleándose en este caso, una caja interruptora (fig. 7.<sup>a</sup>) que consta de un electro-iman de eje partido, que sostiene al estar en actividad, una palanca de bastante peso: el circuito de cierre entonces, es el indicado en la figura, bastando la conmocion producida por la caida de la bomba, para que, comunicándose á la caja interruptora, haga desprender la palanca: para garantizar mejor la trasmision del choque, pueden colocarse en el terreno, varias tablas cruzadas, hasta el punto en que se situe la caja, que se coloca sobre la última y siempre, como es natural, en la proximidad del punto de caida. La experiencia demuestra, que de esta manera, estando

colocada la caja en un círculo de 50<sup>m</sup> de radio, siempre queda roto el circuito.

Este aparato, puede emplearse para determinar la duración de combustión de las espoletas en reposo: basta para ello, comunicar el fuego á la espoleta, por medio de un estopin ordinario, y por debajo de su carga explosiva, colocar un alambre muy delgado por el que pasa la corriente de abertura: la de cierre pasa, análogamente á la anterior, por el extremo del petardo de la espoleta, consiguiéndose de este modo, que la abertura y cierre se verifiquen respectivamente, cuando empieza y termina la combustión de la espoleta.

También se aplica la clepsidra, para medir el tiempo que media, desde la salida de la boca de la pieza de un Shrapnell, hasta el momento de su explosión, haciendo pasar la corriente de abertura, por un alambre tendido en la boca y rompiendo la de cierre un observador por medio de un rehótomo, cuando vea la explosión.

En esta medida, se produce un error en el tiempo, que resultará aumentado, en el que tarda en herir los sentidos del observador, el fenómeno de la explosión, y para tomar en cuenta este error personal, colocados los circuitos como queda dicho y el observador á gran distancia de la pieza, observa el tiro, y actúa sobre el rehótomo, en el instante que vea el fuego; de este modo, rompiéndose el primer circuito por el proyectil, en el mismo instante en que se produce el fenómeno observado, y el segundo, ó sea el de cierre, cuando ha sido apreciado por el observador, el tiempo obtenido será el error personal.

Repetiendo varias veces la experiencia, las variaciones obtenidas en el tiempo, darán la medida de la exactitud del observador, que puede llegar, teniendo práctica y habilidad, á ser solo de  $\frac{1}{20}$  de segundo.

**71. Cronógrafo Noble.**—Tiene por objeto este aparato, medir tiempos muy pequeños, como son los que un proyectil tarda en pasar por diversos puntos del ánima. Consta

(fig. 8.<sup>a</sup>) de una serie de discos A A..... montados sobre un árbol S, que recibe un movimiento de rotacion uniforme, por medio de un sistema de engranajes movidos por la accion de un peso que, con objeto de que no sea grande la altura necesaria, obra segun el sistema Huygens. En el extremo del eje E, está colocado un contador, cuyo objeto, es verificar la uniformidad del movimiento de los discos y en el del árbol S hay otro disco graduado, con un nonio.

Enfrente de cada disco, hay colocada una prensa, á la que se une uno de los extremos del circuito inducido de una bobina, cuyo otro extremo, se pone en comunicacion con aquel, de modo que, al romperse la corriente inductora, saltará una chispa sobre su canto. De esta manera, si se hace pasar la corriente inductora por un punto B de la pieza, valiéndose de los aparatos descritos, (\*) en el momento del paso del proyectil por dicho punto, saltará la chispa y se marcará sobre el disco, si está préviamente ennegrecido con negro de humo.

Para operar, supongamos la pieza dispuesta como indica la figura, con objeto de medir el tiempo empleado por el proyectil, en pasar por los puntos A, B, C....., necesitándose para ello tantas pilas, bobinas y discos, como puntos de paso se quieran observar: estableciendo los circuitos como están representados, el proyectil á su paso, los romperá sucesivamente y saltando las chispas sobre los discos correspondientes, dejarán marcados en estos, los puntos que sirven para la expresada medida.

Se empieza por producir el movimiento de rotacion de los discos, dejando actuar la accion del peso, y antes de hacer el disparo, se observa con el contador, el tiempo empleado para dar cinco vueltas el árbol motor; se desembraga enseguida el contador, poniéndole en cero; se embraga nuevamente para contar otras cinco vueltas, y durante ellas, se hace el disparo, y repitiendo despues la operacion de contar otras cinco, despues de haberse verificado aquel, se obtiene así la velo-

---

(\*) Tratado de Balística.—Artillería Lisa.

cidad de rotacion en tres épocas distintas, antes del disparo, despues, y cuando este tuvo lugar, circunstancia que permite apreciar la exactitud de la experiencia, que será tanto mayor, cuanto menor sea la diferencia entre las velocidades de rotacion obtenidas.

Conocida la velocidad de los discos, fácilmente se calcula el tiempo, con cuyo dato y las distancias entre los diversos puntos del ánima, sometidos á la experiencia, se conocerá la velocidad que en ellos tiene el proyectil.

Los discos tienen 0,9144 de circunferencia, siendo su velocidad, de una vuelta por 0,036 de segundo, tiempo mayor que el necesario, para que el proyectil recorra toda el ánima.

Para hacer las lecturas, se obliga á girar á los discos, hasta que la señal hecha por la chispa en el primero, esté delante de la punta correspondiente, conseguido esto, se pone el nonio N en cero, haciendo girar nuevamente los discos, hasta que la señal hecha en el segundo, esté tambien delante de la segunda punta, en cuyo caso, el disco graduado y nonio, habrán dado la parte de revolucion efectuada, durante el paso del proyectil entre los dos puntos primeros que se hayan tomado en el ánima: la misma operacion se repite para todos los demás.

Si el aparato está bien establecido, y todos los circuitos inductores se rompen á la vez, las señales producidas por las chispas en los discos, deberán estar en línea recta, circunstancia que permite comprobar el aparato, ó determinar el error que puede haber, si así no se verifica. Para obtener esta disyuncion, se une á cada hilo, otro muy delgado, arrollando estos en un recipiente lleno de pólvora; si esta se inflama, aquel revienta y bien puede admitirse entonces, la simultaneidad en la rotura de todos los circuitos.

**72. Cronógrafo Shultz.**—Este aparato, determina la velocidad de los proyectiles, en distintos puntos de su trayectoria. Consta de un cilindro, que recibe un movimiento de rotacion por el descenso de un peso, al mismo tiempo que otro de traslacion. Delante de este cilindro, hay un diapason que

vibra, por la accion de unos electro-ímanes colocados en ambos lados y cuyos ejes son perpendiculares á sus brazos: en uno de estos, está fijo un estilete, que por su movimiento vibratorio, traza sobre el cilindro, cuando este gira una línea sinuosa.

Normalmente al cilindro, se presenta una punta metálica, fija al aparato sobre una columna, á la que se une uno de los hilos de la corriente inducida de una bobina de Ruhmkorff, mientras que el otro, se halla en comunicacion con el cilindro; de esta manera, si se hace pasar la corriente inductora por un primer marco-blanco, roto que sea por el paso del proyectil, saltará una chispa entre la punta y el cilindro, dejando en este una señal.

Dispuestos los marcos de modo que las corrientes, se restablezcan rápidamente despues de su rotura, las chispas que sucesivamente saltan y quedan señaladas en el cilindro, al paso del proyectil por diversos marcos, determinan el instante en que este paso se verifica, y si las vibraciones del diapason son isocronas, y se conoce la duracion de cada una, por el número de ondulaciones que medien entre las señales de las chispas, se deducirá el tiempo empleado por el proyectil, en recorrer la distancia entre los marcos.

Tal es en resúmen, el fundamento de este ingenioso aparato, el mas perfecto de los que hasta ahora se conocen y cuyos detalles explicamos á continuacion.

*Cronógrafo.*—El cilindro metálico (fig. 9 y 10), gira alrededor de un eje horizontal y está conducido por un carrillo, apoyado sobre la mesa del aparato, con facultad de trasladarse en ambos sentidos. El árbol, termina por uno de sus extremos, en un volante y por el otro, en una rueda dentada A, que por intermedio de la B, recibe el movimiento de rotacion de otra rueda, montada sobre un segundo árbol horizontal; en el extremo de este, están las  $d$ ,  $d'$  y  $d''$ ; la  $d$ , engranando con otra  $e$ , hace girar á un árbol roscado  $f$ , que produce la traslacion del carrillo, por engranar en una tuerca de dos quijadas, que este lleva y cuyo engrane, puede quitarse cuando sea necesario.

La rueda  $d'$ , recibe su movimiento por otra  $g$ , colocada sobre un árbol, que á su vez lo recibe de la rueda  $g'$ , en cuyo eje está fijo el tambor T, al que se arrolla una cuerda que soporta en su extremo, el peso motor. Soltando un fiador, queda loca la rueda  $g'$ , y haciendo girar á mano el árbol  $f$ , se produce el giro del tambor por un engranaje cónico, y por consiguiente, la elevacion del peso motor.

La rueda  $d''$ , comunica el movimiento de rotacion á un árbol horizontal, en el que están montadas cuatro aspas, con facultad de tomar distintas inclinaciones y por lo tanto, de aumentar ó disminuir la resistencia del aire á su movimiento, consiguiéndose así, el poder regularizarlo. Por último, un toro montado en el mismo eje, sirve de freno, comprimiéndolo mas ó menos por una pieza excéntrica de madera  $m$ , que se mueve por medio de una manivela. El árbol del volante, termina en su extremo en otra manivela, por medio de la que, puede comunicarse á mano un movimiento lento al cilindro.

El diapason, que es de acero dorado, está sujeto á la mesa del aparato y tiene en ambos brazos, dos armaduras de hierro dulce, colocadas á la altura de dos electro-imanés. En uno de sus brazos, está fijo el estilete metálico, que sirve para trazar sobre el cilindro la curva anteriormente dicha: una pequeña palanca, permite aproximar ó separar al cilindro, el referido estilete. Sobre la columna C, está fija una pieza de cautchouc, que sujeta un tubo pequeño de cristal, por dentro del cual y normalmente al cilindro, pasa un alambre de platino, al que vá á parar uno de los hilos de la corriente inducida.

Con objeto de hacer las lecturas, como mas adelante veremos, está el arco graduado P, que lleva una lente, que puede trasladarse á derecha é izquierda, además de resbalar sobre el expresado arco.

*Bobina.*—Es igual á la de Ruhmkorff, sin mas diferencia que carecer de interruptor, porque produciéndose la induccion por el paso del proyectil al través de los marcos blancos, aquel se hace innecesario. Consta por lo tanto de un núcleo de hierro, sobre el que se halla arrollado un alambre grueso,

sobre este, una capa de cautchouc ó materia aisladora y un alambre mas delgado sobre esta, en el que se forma la corriente inducida. Con objeto de hacer que sea mas rápida la apertura de la corriente inductora, la bobina tiene condensador, de este modo se consigue aumentar la intensidad de la chispa.

*Interruptor Foucault.*—A fin de producir la interrupcion de la corriente, que activa los electro-ímanes del diapason, se emplea un interruptor de mercurio (fig. 44), el cual consta de un vaso de vidrio atornillado en el zócalo: este vaso contiene mercurio, en el que penetra una punta de platino fija al extremo de una palanca, cuyo otro extremo, está encastrado en una pieza metálica sujeta en un apoyo; un electro-íman coloca lo sobre la palanca, cuando está en actividad, atrae la punta, haciéndola salir del mercurio, pero rota entonces la corriente que pasa á través de este, el electro-íman deja de obrar y por la flexibilidad y elasticidad de la palanca, penetra nuevamente la punta en el mercurio, restableciéndose asi la corriente que sucesivamente se rompe y restablece.

El circuito del interruptor, se forma de manera que uno de los hilos, vaya desde la pila al fondo del vaso, pasando por el mercurio á la punta metálica, cuando se halle introducida en él, y de aquí al electro-íman, volviendo á la pila.

*Péndulo eléctrico.*—Independiente del aparato, hay un péndulo cuya oscilacion es de un segundo y termina su varilla como indica la (fig. 42); si la corriente inductora se hace pasar por el interruptor A, cada dos segundos, quedará rota por la oscilacion del péndulo, puesto que cuando marcha de derecha á izquierda, la lengüeta *a* del péndulo, separa á la *b* del interruptor, y en su vuelta de izquierda á derecha, la lengüeta *a*, queda unida á su contacto, siendo la *b* la que se dobla para permitir el paso de la varilla: la interrupcion se verifica por lo tanto, en cada oscilacion completa, no siendo necesario colocar el interruptor precisamente en el punto medio de la oscilacion, para que cada dos segundos se interrumpa la corriente.

El aparato de suspencion del péndulo, está dispuesto de modo que su movimiento, sea alimentado eléctricamente. Una palanca unida á la suspension, se sostiene por la accion de un muelle á una cierta altura; dos gruesos electro-imanés la atraen si están en actividad: cuando no está atraida la palanca, sostiene un pequeño peso, el que es recogido por una varilla unida al eje del péndulo, al terminar este su oscilacion ascendente de derecha á izquierda, llevándole consigo en la oscilacion de izquierda á derecha, mientras pasa corriente por los electro-imanés. La corriente se establece por un contacto del péndulo, precisamente en el instante en que coge el peso, cuando dicho peso pasa nuevamente á la altura de la palanca, que en este momento está mas baja que en su primera posicion, por estar en actividad los electro-imanés. Rota la corriente, el peso vuelve á subir por la accion del muelle, de manera que, durante una pequeña parte de la semi-oscilacion de izquierda á derecha, este peso gravita sobre el péndulo, manteniendo su movimiento y siendo este muy uniforme, por ser debido á la caída de un peso constante, de una altura tambien constante.

*Reloj eléctrico.*—Una lengüeta que oscila con el péndulo, choca alternativamente en cada semi-oscilacion, en dos contactos, que dirigen la corriente de una pila, á un reloj eléctrico que marcará por lo tanto el número de semi-oscilaciones del péndulo: la duracion de la oscilacion, se mide comparando las marcadas por el reloj en un cierto tiempo, con los segundos dados en el mismo por un cronómetro, pudiendo arreglarse convenientemente la duración de las oscilaciones, variando la colocacion de la lenteja, ó de unas masas adicionales que tiene el péndulo.

*Marcos.*—Pertencen los empleados con este aparato á la clase de marcos de contacto, cuyo objeto es que se restablezca la corriente, despues de rota por el paso del proyectil. La (fig. 43) representa los usados en experiencias hechas con piezas de campaña; constan de dos travesaños, en los que están fijas las piezas metálicas *a a*, teniendo además el superior, dos

reglas también metálicas,  $b b, b' b'$ : en la última, hay fijos unos cilindros, en cuyo interior se alojan unos muelles espirales, obligando á salir á los vástagos  $c c$ ; estos terminan en su parte inferior en unos pequeños ganchos, á los que se unen los alambres del marco, por medio de hilos de seda. La corriente, llega al travesaño superior por el punto  $C$ , pasa por todos los alambres y sale por  $C'$ ; al mismo tiempo (según indica la figura 14), una corriente derivada, pasa por las dos reglas metálicas, y en el momento de romperse uno ó varios alambres por el paso del proyectil, la acción de los muelles, obliga á salir los vástagos, que chocando con la regla superior, cierran de nuevo el circuito.

Pueden sustituirse los muelles espirales, por pequeñas láminas de acero terminadas en ganchos, y fijas en la regla inferior; cuando se rompen los alambres, por la flexibilidad de las láminas, chocarán contra la regla superior, estableciéndose nuevamente el circuito como en los anteriores.

*Establecimiento de los circuitos.*—La (fig. 14) representa detalladamente la marcha de las corrientes. De la pila  $A$  parte la inductora, entra por las prensas  $1, 1$  y pasa por la bobina, saliendo por la  $3$ : de esta, se dirige á las prensas apareadas  $p$ , de una de las cuales va á los marcos, volviendo por la prensa  $5$  á un conjuntor  $C$ : de la otra prensa apareada, pasa al interruptor del péndulo, volviendo por la prensa  $p'$  al mismo conjuntor, de este, por la prensa  $4$ , á la  $2$  y finalmente, de aquí á la pila. Establecido así el circuito, según que el conjuntor se ponga en contacto con  $m$  ó  $n$ , pasará la corriente inductora por el interruptor del péndulo ó por los blancos.

La corriente inducida de la bobina, marcha por la prensa  $q$  á la punta de platino, colocada delante del cilindro, partiendo de la prensa  $q'$  otro hilo al eje del mismo, consiguiéndose por lo tanto, que siempre que se rompa la corriente inductora, salte una chispa.

Por último, la corriente destinada á mantener el movimiento vibratorio del diapason, parte de la pila  $B$  y pasando por la prensa  $C$ , llega al conjuntor  $p$  el que, cuando lo permi-

ta por su contacto, hará que vaya la corriente á los electroimanes del diapason, despues á la prensa 7, y de aquí al interruptor, de donde marcha nuevamente á la pila.

**73.** *Manera de funcionar el aparato.*—Antes de establecer las corrientes como queda dicho, se dá un movimiento lento al cilindro, valiéndose de la manivela, y colocando debajo de él una lámpara de aceite, se consigue cubrirlo de una capa delgada y uniforme de negro de humo: se vuelve á colocar el cilindro en su posición inicial y se eleva el peso, impidiendo el movimiento de las ruedas, por medio del freno. Observada que sea la regularidad en el establecimiento del aparato, se pone el cilindro en movimiento, trazando entonces el estilete del diapason, sobre el cilindro, una línea sinusoidal, cuyas ondulaciones corresponden á cada semi-oscilación. Si despues se hace marchar el cilindro, por la acción del peso, estando el diapason sin vibrar, trazará el estilete sobre él una hélice, que cortará á la línea antes trazada (fig. 15), en los puntos *a, b, c*, correspondiendo la amplitud *a c*, al tiempo de una oscilación del diapason. Conociendo el número que de estas hay, entre las señales de dos chispas, producidas por el paso del proyectil al través de dos marcos-blancos, así como, la velocidad de rotación del cilindro, se sabrá el tiempo empleado por aquél, en recorrer el trayecto que media entre los marcos.

*Arreglo del diapason.*—En primer lugar, con objeto de que la acción de los electroimanes sobre los dos brazos del diapason, sea lo mas igual posible, ambos electroimanes están colocados por derivación, en un mismo circuito; para lo cual basta, que el hilo que á ellos lleve la corriente, se bifurque para entrar en las bobinas superiores de cada electroiman.

Produciéndose las vibraciones del diapason, por las interrupciones del aparato Foucault, es necesario para su arreglo, tener presente la influencia que pueda ejercer, la mayor ó menor profundidad que la punta del platino se inmerja en el mercurio.

Si suponemos que en la posición de equilibrio de la lámina vibrante del interruptor, la punta de platino esté muy próxi-

ma á la superficie del mercurio, sin tocarla; bastará impulsarla ligeramente hácia abajo, para que, estableciéndose la corriente, el electro-iman atraiga la lámina, pero al salir del mercurio la punta, queda nuevamente rota la corriente, y cayendo la palanca ó lámina vibrante, pasará de su posición de equilibrio, por efecto de su elasticidad: desde el instante en que la punta vuelve á entrar en el mercurio, la acción del electro-iman se opone á la fuerza elástica de la palanca, por lo que la punta, descenderá algo menos que lo que hubiera descendido si estuviera libre: esta circunstancia haría, que fuese menor la fuerza de subida en la siguiente vibración, si no se compensara con la acción del electro-iman, que la favorece, resultando de aquí, que si se admite que la fuerza atractiva del electro-iman es constante, desde que se establece la corriente, la lámina vibrante, moviéndose como si estuviese libre, concluiría por quedar en reposo. La fuerza atractiva del electro-iman no es constante, sino que, siendo nula cuando empieza el paso de la corriente, crece sucesivamente, hasta que regularizándose aquella, permanece constante, habiendo un aumento de fuerza, para cesar bruscamente cuando cesa de pasar la corriente.

En el primer período, que es cuando el electro-iman se opone á que la lámina baje, la fuerza atractiva es menor que la que activa después la subida, y precisamente á esta diferencia de impulsión se debe, que se mantenga el movimiento del interruptor.

De aquí se deduce, que según la mayor ó menor profundidad de inmersión de la punta, ó lo que es igual, según la mayor ó menor altura del nivel de mercurio, variando la duración de los períodos descendente y ascendente, variará también la diferencia de las impulsiones, y por lo tanto, la regularidad del funcionamiento del aparato; y como las vibraciones del diapason, dependen de la regularidad en las interrupciones de la corriente, que pasa por los electro-imanés, claramente se ve la necesidad de que el nivel de mercurio permanezca constante.

Para conseguirlo, se hace preciso cubrir su superficie libre,

con un líquido que no sea conductor de la electricidad, tal como el alcohol, el que enfriando la punta de platino, impide la volatilización y oxidación del mercurio: no se consigue, sin embargo, evitar en absoluto este inconveniente, por descomponerse en parte el alcohol; así, se observa, que pasando algún tiempo, disminuye la velocidad de las vibraciones.

El nivel más conveniente del mercurio, se determina por la condición, de que la atracción de los brazos del diapason, se produzca en la semioscilação de ida de dichos brazos hacia los electro-ímanes, á fin de que, la fuerza atractiva sea siempre favorable al movimiento, lo que no sucedería si obrase la expresada fuerza, cuando los brazos en su vibración, se aproximan uno á otro.

Para conseguir esto, se empieza por hacer, que el número de vibraciones del diapason sea doble de las del interruptor, que es como está calculado el aparato: con este objeto, el interruptor tiene en la palanca dos pesos desiguales, que pueden moverse á uno y otro lado, y según la colocación que se les dé, varía el número de vibraciones: se llega á la verdadera posición de los pesos, cuando se oye un acorde de octava sostenido; si así no sucede, y se producen aumentos de sonido, basta variar convenientemente los pesos, para que desaparezcan los aumentos.

De este modo, puede servir el oído para un primer arreglo, siendo sin embargo más seguro, hacer uso del mismo aparato para conseguirlo: para ello, se hace girar lentamente el cilindro, y los trazos que marque el diapason, cubriéndose unos con otros, forman una faja; si las vibraciones no están arregladas, la faja es desigual en su anchura, teniendo entrantes y salientes, y en este caso, es preciso variar los pesos del interruptor, hasta conseguir una faja de espesor constante, como representa la (fig. 16).

Obtenido que sea el arreglo de las vibraciones, se dá un pequeño giro al vaso del interruptor, hasta apereibir un incremento notable de sonido, lo que indica, tiene el mercurio el nivel conveniente.

Si despues de estar algun tiempo funcionando el aparato, se observa disminucion en la amplitud de las vibraciones, debe atribuirse á haber descendido el nivel de mercurio, bastando elevar el vaso una pequeña cantidad, para obtener de nuevo la regularidad precisa.

**74.** *Medida de la duracion de un fenómeno.*—Supuesto el aparato en movimiento, pero sin vibrar el diapason, el estilete que este llevá (que debe estar perfectamente afilado, y ser normal al cilindro) trazará una hélice, que se llama *media*, y que será cortada, por la línea sinusoidal que describe el estilete, cuando vibra el diapason: la longitud *ac* (fig. 17) representa siempre una vibracion completa y las *ab* y *bc*, representarán semi-vibraciones, siempre que la hélice, diste igualmente de las paralelas trazadas por los extremos de la línea sinusoidal.

Si se conoce la duracion  $\theta$  de una vibracion, claro es, que  $\frac{ac}{\theta}$  será la velocidad media del cilindro, durante la misma vibracion.

Supongamos, que en una experiencia cualquiera, se han obtenido sobre el cilindro, las dos chispas A y B, y que en este intervalo, el diapason ha trazado la parte de línea sinusoidal *dc*: podrá obtenerse el tiempo de la duracion del fenómeno, por la proporcion

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{AB}{ac}$$

representando  $\theta$  y  $\theta'$  respectivamente, el tiempo de la vibracion completa y el tardado en trazar la parte AB.

Para determinar la duracion de una vibracion del diapason, basta contar el número de vibraciones comprendidas entre dos chispas A y A', marcadas en el tráscurso de dos segundos, siendo preciso, en primer lugar, arreglar el péndulo, comparándolo como se ha dicho, con un buen cronómetro, y bajar ó subir la lenteja ó los pesos adicionales que lleva, hasta conseguir que su oscilacion sea de un segundo. Seguidamente se arreglará tambien el interruptor del diapason, y dejando

∴

caer el peso motor, se pondrá en movimiento el cilindro, y cuando haya adquirido una velocidad conveniente, se establecerá la comunicacion, haciendo pasar la corriente inductora por el interruptor del péndulo.

Siendo A y A' las chispas obtenidas, se contarán las vibraciones totales que hay entre una y otra, cuyo número llamamos N: por otra parte,  $\frac{AM}{bd}$  y  $\frac{A'M'}{ml}$ , son las fracciones de vibracion correspondientes á los trascursos AM y A'M', por lo que, el número de vibraciones será

$$N + \frac{AM}{bd} - \frac{A'M'}{ml}$$

y siendo  $\theta$  la duracion de una vibracion, la siguiente igualdad

$$2'' = \left( N + \frac{AM}{bd} - \frac{A'M'}{ml} \right) \theta$$

nos permitirá determinar el valor de  $\theta$ .

En el aparato que hemos descrito, siguiendo para ello la memoria de M. Moisson, Capitan de Artillería de la Marina Francesa, (\*) el número de vibraciones es 500.

*Prevencciones.*—Es conveniente, sea grande la amplitud de las vibraciones, pues de este modo, la línea sinusoidal corta segun ángulos mayores, á la hélice media, determinándose mejor la interseccion de ambas líneas y por lo tanto, se hará mas fácilmente la lectura, valiéndose del antejo y será menor el error que se cometa al hacerla: la punta de platino, deberá colocarse normalmente á la superficie del cilindro, arreglando la corriente de manera, que pase por ella el polo positivo, en caso contrario, saltarian varias chispas sobre el cilindro: la capa de negro de humo, no debe ser ni muy delgada ni muy gruesa, en el primer caso, las chispas apenas son visibles y en el segundo saltan varias: la distancia mas conveniente que debe mediar entre el cilindro y la punta de platino, es de  $0^{\text{mm}},3$  á  $0^{\text{mm}},4$ .

(\*) Notice sur le chronographe á diapason.—(Paris 1875.)

Con este aparato, tomando todas las precauciones que su instalacion exige, suponiendo que se sumen todos los errores, debidos: á la lectura, á la medicion del tiempo de una vibracion, al defecto de isocronismo ó de uniformidad del movimiento de rotacion y al retardo y desviacion de las chispas, puede apreciarse el fenómeno que se investiga, con una aproximacion mayor que  $0'',0000\frac{1}{4}$ .

**35. Presiones.—Aparato Crusher, modificado por Clavarino** —En los aparatos Rodman y el crusher de Noble, empleados para medir la presion máxima de los gases de la pólvora, en un punto cualquiera del ánima de una pieza, se comete siempre un error, debido á la necesidad de tener que apreciar por medio de una máquina de probar metales, la fuerza capaz de producir, en el primero una incision, y en el segundo un aplastamiento, que son los efectos producidos en dichos aparatos, por la fuerza elástica de los gases de la pólvora: el error proviene, de no ejercerse de igual modo la presion de los gases y la que se efectúa con la máquina: los gases de la pólvora, tambien ejercen de distinto modo su accion en ambos aparatos, segun que se coloquen en la recámara ó en un punto distante de ella: en el primer caso, la presion empieza por ser nula y crece rápidamente, hasta alcanzar su máximo; en el segundo, obra desde luego sobre el aparato, la máxima presion.

Con objeto de evitar este error, conviene excluir el trabajo, del modo de funcionar el aparato, ó que por lo menos sea tan pequeño, que pueda ser despreciado; esto se conseguirá, haciendo que no haya espacio recorrido, es decir, que no se produzca deformacion en el cilindro, pues de este modo, habiendo equilibrio entre la presion máxima y la resistencia, determinada que esta sea por la máquina de prueba, lo será igualmente la presion.

Consta el aparato (fig. 48) de un grano G de acero fundido que puede atornillarse en el cierre de la pieza, siendo *ab* su cara anterior: un émbolo de acero S, provisto del vástago cilindrico A, tiene movimiento en la canal que le contiene, en

donde resbala, con un rozamiento muy suave: el fondo de la cavidad interior del grano sirve de yunque, sobre el que se apoya el cilindro C, que sufre directamente la acción del émbolo: una cápsula obturadora O, impide la fuga de gases, pero si apesar de ella, hubiera escape, tienen salida por las canales h: antes del disparo, se coloca el cilindro entre el yunque y el émbolo, introduciéndolo por la abertura B: el muelle en espiral M, establece el contacto entre el émbolo y el cilindro, sujetándole contra el yunque; la pequeña clavija p, tiene por objeto, hacer que el cilindro ocupe su posición central: la figura citada, representa el aparato colocado en el cierre de una pieza; sencillas modificaciones permitirían su empleo en otro punto cualquiera de ella.

Para su uso, se necesitan cilindros de diferentes diámetros, relacionados con la presión máxima presumible en la pieza que se experimente: la determinación del diámetro, necesario para que no haya deformación, fácilmente se consigue.

Llamando  $d$  al diámetro del vástago,  $D$  al del cilindro que se busca,  $p$  la presión de los gases sobre la base del vástago, y  $q$  la que el émbolo ejerce sobre el cilindro, (estando todas las presiones referidas al centímetro cuadrado), puede establecerse la proporción

$$\frac{p}{q} = \frac{D^2}{d^2}$$

y de aquí,

$$D = d \sqrt{\frac{p}{q}} \quad \text{ó} \quad D = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

si se hace  $d = 1$ .

Si las presiones no son muy considerables, pueden emplearse cilindros de cobre, pero cuando sean muy superiores ó inferiores, á las ordinarias, que en general se observan en las piezas, con objeto de no aumentar las dimensiones del aparato, ó para evitar el uso de cilindros demasiado pequeños, conviene sustituir el cobre por un metal mas ó menos resistente á la compresión ó hacer uso de distintas clases de cobre.

Se empieza por determinar, con la mayor exactitud posible, el esfuerzo á la compresion, en su límite de elasticidad, en el cobre que se emplee, ó lo que es igual, debe determinarse el esfuerzo por unidad de superficie, que sea capaz de producir en el cilindro una deformacion apenas apreciable, siendo el que resulte, el valor de  $q$ , que se sustituirá en la fórmula que dá el diámetro: dando despues valores á  $p$ , crecientes de 100 en 100 kilógramos, á partir del límite inferior de los que comprenden á la presion presumible, se obtendrán los correspondientes al diámetro.

Para cada valor de  $D$ , se prepara un cierto número de cilindros, señalando en ellos, la presion que pueden sufrir sin deformarse, construyendo tambien una plantilla ó compás, para comprobar si ha habido ó no deformacion y si el aplastamiento, caso de haberle, es ó no superior al correspondiente á una diferencia de presion de 100 kilógramos, medida con la máquina de pruebas.

Fácilmente se concibe el empleo del aparato; suponiendo que la presion presumible, haya de estar comprendida entre 2000 y 2200 kilógramos; se empezará por colocar el cilindro correspondiente á 2100 kilógramos, si resulta muy deformado en el disparo, se colocará el de 2200 kilógramos, observando, segun el resultado, si debe procederse á la prueba de nuevos cilindros ó si bastan, para dar el valor de la presion, con un error menor que 100 kilógramos.

Segun Clavarino, empleando el cobre que se usa en el crusher, resulta; que el esfuerzo que puede sufrir sin deformarse, es de 500 kilógramos por centímetro cuadrado, con cuyo valor ha calculado la siguiente tabla, que contiene los valores de los diámetros, para presiones  $p$ , comprendidas entre 1000 y 3000 kilógramos, creciendo de 100 en 100.

<i>p</i> Kg.	D Milim. <sup>2</sup>	<i>p</i> Kg.	D Milim. <sup>2</sup>	<i>p</i> Kg.	D Milim. <sup>3</sup>
1.000...	14,13	1.700...	18,44	2.400...	21,91
1.100...	14,83	1.800...	18,97	2.500...	22,36
1.200...	15,49	1.900...	19,49	2.600...	22,80
1.300...	16,12	2.000...	20,00	2.700...	23,24
1.400...	16,73	2.100...	20,49	2.800...	23,66
1.500...	17,32	2.200...	20,98	2.900...	24,08
1.600...	17,89	2.300...	21,45	3.000...	24,49

La altura de los cilindros ha sido de 42 milímetros, inferior al menor diámetro obtenido, circunstancia que es preciso tener en cuenta, para evitar la flexión: el diámetro mayor, 24,49, es un límite del que no debe pasarse, porque en tal caso, debería aumentar el del grano, no siendo entonces fácil su aplicación, y teniendo además peligrosas consecuencias.

Este aparato, dá con mas exactitud la medida de la presión máxima, pues con él hay mas igualdad, entre los efectos debidos á la carga y los producidos por la máquina de pruebas, evita además lo que sucede en el crusher, que algunas veces hay, no solo aplastamiento en los discos metálicos, sino flexión. Tiene además la ventaja, que por no producirse movimiento, ó ser este despreciable, no se comete el error debido al rozamiento, excluyéndose tambien el que pueda haber, tanto en la medida de la incisión en el Rodman, como en la del aplastamiento del crusher. Presenta en cambio el inconveniente, de que generalmente, hay que hacer mas de un disparo para la determinación de la presión.

**76. Balanzas manométricas de Marcel-Deprez.**—Las balanzas de Marcel-Deprez son de dos clases, unas, de un solo pistón y otras, de pistones múltiples: en las primeras, puede determinarse por tanteos, en repetidas experiencias, la presión máxima de los gases de la pólvora, ya sea

en el interior del ánima de las piezas ó en vasos cerrados: en las segundas, basta una sola experiencia para el conocimiento de la máxima presión, y si además se emplea un cronógrafo, puede determinarse la sucesión de presiones en varios instantes. En ambas, se eliminan por un procedimiento ingenioso, las causas de error, propias del procedimiento estático, debidas á la inercia de las masas de los distintos órganos de los aparatos. Se consigue esto, oponiendo una fuerza antagonista, de intensidad conocida, á la presión de los gases de la pólvora, marcándose el instante preciso en que ambas fuerzas se hagan equilibrio, pero sin prolongar este estado: de este modo, se conoce si la presión ha excedido ó no á la fuerza antagonista, y repitiendo la experiencia, haciendo variar la fuerza, pueden determinarse dos límites, tan próximos como se quiera, que comprendan á la presión que trate de hallarse.

**77.** *Balanza de un solo piston.*—Consta (fig. 19) de un piston diferencial P, cuya base menor, que es sobre la que actúan los gases de la pólvora, tiene medio centímetro cuadrado de sección; su base mayor B, está alojada en una cavidad, en la que, por medio de una bomba, puede introducirse agua ó aire comprimido; la sección de esta base, es cuatrocientas veces mayor que la anterior: un manómetro permite determinar en cada instante, la presión del agua ó del aire, ó lo que es igual, permite conocer el valor de la fuerza antagonista. Debajo de la base mayor, se colocan unas pequeñas láminas de acero, que permanecen sujetas, por la acción de aquella fuerza sobre la base mayor del piston, estas láminas están solicitadas por unos resortes de cautchouc r, y en el preciso instante en que haya equilibrio, entre la presión y fuerza que se le opone, ó bien, cuando aquella supere á esta, los resortes atraerán á las láminas de acero.

Fácilmente se comprende el uso del aparato; si hecho un disparo, las láminas se separan, se aumentará para el siguiente la presión antagonista, continuando de este modo, hasta tanto que permanezcan quietas las láminas, y bien se comprende que de esta manera, pueden aproximarse cuanto se quiera,

los límites que comprendan á la presión que se mide.

**78. Balanza de pistones múltiples.**—La (fig. 20) representa una balanza de este género: la base mayor del pistón diferencial, está colocada dentro de una cavidad que contiene mercurio y en cuyas paredes, están alojados diez vástagos de igual diámetro, correspondientes á otros tantos pistones; los otros extremos ó cabezas de estos, van á parar á una cavidad anular, en la que se ejerce la acción de la fuerza antagonista: sobre las bases menores de los diez pistones diferenciales, actúa la presión de los gases de la pólvora, transmitida por el mercurio y reducida á la centésima parte de su valor, por la relación que tienen entre sí, las bases del pistón central: las otras bases están dispuestas de manera, que en el primero sea igual á la menor, en el segundo dos veces mayor que ella, tres veces mayor la del tercero y así los demás, hasta ser diez veces mayor en el último. De este modo, el primero se pondrá en movimiento, cuando la presión transmitida al mercurio sea igual á la fuerza antagonista, el segundo cuando sea doble, y así sucesivamente los demás, por lo que, si de una manera análoga á la de la balanza de un solo pistón, existe un medio de conocer, cuando los pistones se han puesto en movimiento, se sabrá, que la presión máxima de los gases de la pólvora, está precisamente, comprendida entre las que representan el último pistón que se puso en movimiento y el siguiente que permanezca fijo.

Ahora bien, si por medio de un cronógrafo, pueden fijarse los instantes precisos en que los pistones se ponen en movimiento, se obtendrá la ley de presiones, tanto en su parte ascendente, como en la descendente, puesto que al disminuir las presiones, como continúa obrando la fuerza antagonista, volverán á introducirse los pistones, á medida que la presión de los gases, sea menor que la que dicha fuerza ejerce sobre ellos.

El cronógrafo Shultz, al ser aplicado para la determinación de los instantes en que un proyectil, pasa por diversos puntos del ánima de una pieza, no dá indicaciones tan precisas como

era de desear: esto consiste, en primer lugar, en que siendo los tiempos tan pequeños, no lo tiene la bobina para cargarse nuevamente, despues de rotos los circuitos, y por otra parte, siendo la chispa tanto mas enérgica, cuanto mas brusca es la rotura de la corriente inductora, serian aun mas inciertas las indicaciones, al aplicar este aparato á las balanzas de pistones múltiples, puesto que estos, se ponen en movimiento con alguna lentitud y no rompiéndose bruscamente las corrientes, los trazos producidos por las chispas, serian poco claros.

Marcel-Deprez despues de numerosas experiencias, modificó el cronógrafo Shultz, como indica la (fig. 24). Con el aparato así modificado, se marcan las roturas sucesivas de las corrientes por diez puntas metálicas, correspondientes á otros tantos electro-ímanes: estas puntas, están apoyadas sobre el cilindro, cuando los electro-ímanes se encuentran en actividad, trazando por lo tanto sobre él, una curva continua, pero en el momento en que se desimantan, trazan un rasgo, que indica el instante de la rotura de la corriente.

Los electro-ímanes que llevan las puntas metálicas, tienen su armadura colocada en la parte superior; en el centro hay una ranura triangular, en la que entra un prisma de hierro dulce, con facultad de girar alrededor de un eje colocado perpendicularmente al del cilindro; en el extremo del eje, está fijo un resorte de cautchouc, unido por su parte inferior al electro-íman.

Cuando pasa la corriente, el prisma triangular, atraido por el electro-íman, está colocado en su alojamiento á pesar de la tension del resorte, trazando entonces la punta metálica, la curva continua que anteriormente hemos dicho, pero en el momento que cesa la corriente, el resorte obliga á girar al eje y la punta se desvia, marcando un trazo

Con objeto de aténuar lo mas posible, los errores debidos al tiempo variable de la desimantacion, se arreglan los electro-ímanes de modo que, su fuerza atractiva, esceda en muy poco á la del resorte.

Los electro-ímanes, puestos en comunicacion con los pis-

:

tones de la balanza manométrica, indicarán la ley de sucesion de las presiones, llegándose á conseguir con tal exactitud, que el tiempo que media desde el momento en que la corriente se rompe y aquel en que la punta se pone en movimiento, para hacer el trazo, es de  $\frac{4}{8000}$  de segundo, no variando de un instante á otro en mas de  $\frac{4''}{400.000}$ , que es el error que puede cometerse, al determinar por diferencia un intervalo cualquiera de tiempo.

**29. Acelerómetro.**—Los anteriores aparatos, si bien es cierto que son de una notable exactitud, puesto que el de pistones múltiples en union del cronógrafo Shultz modificado, permite determinar hasta la sucesion de presiones desarrolladas por efecto del choque de un martillo, sobre la base menor del émbolo central, requieren sin embargo mucha precision en su manejo y habilidad por parte del operador, no siendo por lo tanto aplicables á todos aquellos usos prácticos, en los que no sea necesaria una gran exactitud: fundándose en estas razones, Marcel-Deprez propuso dos aparatos á los que dió los nombres de *acelerómetro* y *acelerógrafo*, cuyo uso es muy sencillo.

En el primero, se deja á un piston un curso exactamente conocido, al cabo del cual, se detiene bruscamente y se determina la velocidad adquirida en el momento de su detencion: el trayecto del piston, puede variarse á voluntad, utilizándose esta variacion, para determinar la sucesion de presiones en varias experiencias: toma el nombre de *acelerómetro*, porque mide directamente las aceleraciones impresas al piston, por los gases de la pólvora.

En el segundo, tiene el piston un curso bastante grande y traza en el momento del tiro, una curva que dá á conocer la ley de su movimiento; llamándose *acelerógrafo*, porque la curva así trazada, permite determinar las aceleraciones impresas al piston en cada instante.

Fueron experimentados por primera vez, estos dos aparatos,

el año 1874 en la fundicion de Nevers, siendo sus resultados completamente satisfactorios.

Consta el acelerómetro (fig. 22) de un piston A, que recibe por la parte inferior, la accion de los gases de la pólvora, adquiriendo un movimiento vertical; dentro de un tubo que se atornilla en el punto de la pieza, en que se desee medir la presion máxima; en la parte superior de este tubo, hay un tornillo micrométrico C, que sirve de tope á la virola D del vástago, pudiendo por lo tanto, arreglarse á voluntad el curso de este, haciendo entrar ó salir al tornillo y midiéndose dicho curso por una regla graduada en milímetros, apreciando las fracciones de milímetro, por la graduacion de la cabeza del tornillo.

Por el vástago, puede correr una masa adicional, que en el momento de la detencion de aquel, sigue elevándose, por efecto de la velocidad adquirida, hasta una altura dependiente de ella, quedando detenida la masa al final de su curso, por la accion de una escéntrica, que permite el movimiento de ascenso, pero no el de descenso, mientras no se oprima ligeramente el extremo de aquella. Del conocimiento de la altura á que se eleva la masa, puede deducirse el valor de la presion, haciendo el siguiente cálculo.

Sea  $e$  el curso del piston y  $f$  la fuerza en kilógramos de los gases de la pólvora, fuerza desarrollada durante el tiempo en que el vástago se mueve:  $p$  el peso de la masa adicional,  $h$  la altura á que se eleva sobre el vástago y  $v$  la velocidad que adquiere en el momento de la detencion de aquel; se tendrá, por la relacion mecánica que liga la fuerza con la aceleracion,

$$f = \frac{p}{g} \frac{dv}{dt}$$

ó bien

$$f = \frac{p}{g} v \frac{dv}{de}$$

y siendo

$$v^2 = 2gh$$

quedará

$$f = p \frac{dh}{de}$$

en la dificultad de dar en la práctica al vástago, un curso infinitamente pequeño  $de$ , puede con gran aproximacion sustituirse á la relacion  $\frac{dh}{de}$ , la de los incrementos finitos  $\frac{\Delta h}{\Delta e}$ , siendo en este caso

$$f = p \frac{\Delta h}{\Delta e}$$

Así pues, se empezará por dar al vástago un curso  $e$ , y en otra experiencia otro curso  $e + \Delta e$ , tan poco diferente del anterior como sea posible, y viéndose en el aparato la diferencia de alturas  $\Delta h$ , se tienen los datos para la determinacion de  $f$ , que en este caso, representará el valor de la presion desarrollada, durante el movimiento del piston en las dos experiencias.

Haciendo variar el curso  $e$  nuevamente y repitiendo el cálculo anterior, se llegará á medir el valor de la presion en diferentes instantes, hasta llegar á conseguir el de la máxima.

Cuando el aparato se emplea para medir la presion en las piezas de artilleria, se admite, que en el momento del paso del proyectil, se desarrolla en aquel punto la máxima presion, y que dando un pequeño curso al piston, la presion permanece constante durante su movimiento, por lo que se obtendrá

$$f = p \frac{h}{e}$$

como resultado de igualar el trabajo  $fe$ , efectuado por la fuerza de la pólvora, al  $ph$  desarrollado por la masa adicional.

En el caso actual, el vástago podria moverse antes del momento de la presion máxima, bien sea por efecto de los gases que escapan alrededor del proyectil, ó por el aire

impulsado por este; para evitar dicho movimiento, se coloca un pequeño muelle, de tension conveniente.

Si á la masa adicional se le dá un peso de 2<sup>ks</sup>.066 y 2 centímetros cuadrados de seccion, el valor de  $f$  será, en atmósferas

$$f = \frac{2,066}{2 \times 1,033} \times \frac{\Delta h}{\Delta e} = \frac{\Delta h}{\Delta e}$$

ó bien, cuando  $e$  sea muy pequeño, ó se experimente en una pieza,

$$p = \frac{h}{e};$$

si además se hace  $\Delta e = 1$

$$f = \Delta h.$$

El empleo de la masa adicional libre, se limita á las experiencias que se hagan, estando contenida la pólvora en vasos cerrados; cuando se aplica el acelerómetro á las piezas de artillería, se amortigua la velocidad de la masa por un muelle. En el primer caso, basta con hacer la lectura de las alturas á que se eleva la masa adicional; en el segundo, es preciso determinar una tabla, que dé la velocidad que corresponde á la masa, para las flexiones que en el muelle se produzcan, ó lo que es igual, las alturas que corresponden, á flexiones regularmente crecientes del muelle.

Empleando muelles convenientes, sin tension inicial, las flexiones en ciertos límites, son proporcionales á las alturas, por lo que, las presiones lo son á los crecimientos de flexion.

Puede tambien servir el acelerómetro, para medir los tiempos que el vástago emplee, en recorrer el curso que de antemano se le haya fijado, porque siendo

$$v = \frac{de}{dt}$$

se deduce

$$dt = \frac{1}{v} de$$

que nos dice, que si refiriéndose á un sistema coordinado rectangular, se toman por abcisas los valores de  $e$  y por ordenadas los  $\frac{1}{v}$ , inversos de la velocidad, el área comprendida entre la curva trazada, el eje de las  $x$  y las ordenadas extremas, representará el valor del tiempo trascurrido.

En esta fórmula, para cada trascurso de tiempo, correspondiente á la diferencia  $\Delta e$  entre dos experiencias, es preciso tomar por  $v$ , el valor medio aritmético, de los calculados para los extremos de los dos cursos del piston.

Para el primer trascurso, desde  $e = 0$  hasta  $\Delta e$ , no puede emplearse la fórmula anterior, puesto que para  $e = 0$ , es  $\frac{1}{v} = \infty$ ; pero admitiendo que en trascursos tan pequeños, las presiones son proporcionales á los tiempos, hipótesis que con mucha aproximacion confirma la experiencia, tendremos

$$\frac{dv}{dt} = K t$$

siendo  $K$  una constante; de aquí resulta por integracion

$$t^2 = \frac{2}{K} v \quad \text{y} \quad t^3 = \frac{6}{K} e$$

de donde, eliminando  $t$  se tiene

$$e = \frac{K}{6} \left( \frac{2}{K} \right)^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}}$$

y por lo tanto

$$\frac{v}{e^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left( \frac{K}{6} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{2}{K} \right)} = A$$

que dice, ser las velocidades proporcionales á las potencias  $\frac{2}{3}$  del espacio: de este modo, conocido el valor de  $v$  al cabo de

un trascurso  $e$ , se conocerá el valor de  $A$ , y para determinar el tiempo del primer trascurso, se empleará la fórmula

$$t = \frac{v}{A} e^{\frac{1}{3}}$$

que se deduce fácilmente de las anteriores.

Las siguientes tablas, (\*) indican el resultado de las experiencias verificadas con dos clases de pólvoras distintas.

*Pólvora fina de caza.*

Curso del aparato.	Desplazamiento de la masa adicional.		Velocidad adquirida	Presion media.	Inversa de la velocidad.	Duracion del trayecto.
	Observado.	Corregido				
milímetros	milímetros	milímetros	metros.	atmósferas	metros	segundos.
0,5	37	70	4,48	440	0,848	0,001263
1,0	191	490	4,93	240	0,520	0,001605
1,5	292	340	2,58	300	0,387	0,001882
2,0	443	520	3,49	360	0,344	0,002057
2,5	774	730	3,78	420	0,265	0,002202
3,0	1026	950	4,32	440	0,232	0,002326
3,5	1275	1180	4,82	460	0,208	0,002437
4,0	1486	1420	5,28	480	0,190	0,002536
4,5	1721	1670	5,73	500	0,175	0,002627
5,0	1891	1930	6,15	520	0,163	0,002711
5,5	2185	2210	6,58	560	0,152	0,002780
6,0	2579	2530	7,05	640	0,142	0,002853
6,5	2826	2880	7,52	700	0,133	0,002922
7,0	3246	3260	8,00	760	0,125	0,002986

(\*) Notice sur les appareils Marcel-Deprez, par M. Sebert.— Paris 1875.

*Pólvora de mina: granos de 3<sup>mm</sup> á 3<sup>mm</sup>,5.*

Curso del aparato	Desplazamiento de la masa adicional.		Velocidad adquirida.	Presion media.	Inversa de la velocidad.	Duracion del trayecto.
	Observado.	Corregido.				
milímetros	milímetros	milímetros	metros	atmósferas	metros	segundos.
2	45	40	0,89	20	4,125	0,008480
4	100	100	4,40	30	0,745	0,010180
6	248	200	4,98	50	0,506	0,012404
8	368	365	2,68	82	0,373	0,013280
10	699	700	3,71	167	0,270	0,043923
12	1473	1475	5,38	387	0,186	0,014379

En estas tablas, los valores corregidos han sido obtenidos, regularizando la curva que se ha construido, tomando por abcisas, longitudes proporcionales á los espacios y por ordenadas, las observadas de la masa adicional.

**80. Acelerógrafo.**—Consta (fig. 23) de un piston A, que recibe por su base inferior, la accion de los gases de la pólvora, haciéndole resbalar en un trayecto de 4 ó 5 centímetros, por una canal cilíndrica: en el otro extremo lleva un marco B, en el que se fija una chapa metálica delgada, previamente ennegrecida con negro de humo: próxima á ella, y en direccion perpendicular al eje del piston, un estilete de acero, colocado sobre un carrillo, que está guiado por dos correderas rectilíneas, se mueve, por la accion de un resorte de cautchouc fuertemente tendido. Lleva además una lámina vibrante F, cuyas vibraciones se inscriben en la chapa metálica.

En el aparato empleado en Nevers, daba la lámina mil vibraciones simples por segundo, por lo que, los intervalos comprendidos entre las intersecciones de la línea que describe cuando vibra, y la recta, descrita tambien, estando en reposo,

dán los espacios recorridos por el piston, en cada milésima de segundo. La lámina está sujeta por el marco, de tal modo, que cuando este inicia su movimiento, aquella empieza á vibrar.

Con objeto de que los movimientos del estilete y del marco sean simultáneos, el cautchouc está puesto en tension por una lámina metálica, sujeta entre la parte fija del aparato y el cuadro, y sostenida por la adherencia, cuando el piston está en su primitiva posicion: bastando el mas pequeño movimiento del cuadrò, para que el muelle de cautchouc quede en libertad.

Conocida que sea la ley del movimiento del estilete, se conocerán los espacios que recorre en distintos tiempos, pudiéndose hacer variar esta ley del movimiento, variando la tension inicial del cautchouc. Las lecturas, serán tanto mas exactas, quanto mas iguales sean las leyes del movimiento del estilete y del piston, convirtiéndose la curva trazada, cuando sean idénticas, en la diagonal del rectángulo construido sobre los dos trayectos: la disposicion del aparato, permite aproximarse á esta circunstancia.

Trazada que sea la curva como expresa la (fig. 24), y las ordenadas por los puntos 1, 2, 3....., que corresponden, á los espacios recorridos por el estilete, al cabo de 1, 2, 3..... milésimas de segundo, la longitud de estas ordenadas, son los recorridos por el piston. Para marcar las distintas abscisas y medir las ordenadas con la mayor precision posible, se hace uso de un microscopio que lleva el aparato, dispuesto de modo, que tenga dos movimientos, en sentido perpendicular uno de otro, valiéndose para ello de un tornillo micrométrico.

Sea  $F$ , la presion de los gases de la pólvora,  $p$  el peso total de la parte de aparato movido por este,  $e$  el espacio recorrido al cabo del tiempo,  $t$  y  $v$  la velocidad adquirida en el mismo tiempo, tendremos

$$v = \frac{de}{dt} \quad \text{y} \quad f = \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2e}{dt^2}$$

y sustituyendo en lugar de las cantidades diferenciales, las diferencias,

$$f = \frac{p}{g} \cdot \frac{\Delta^2 e}{\Delta t^2}$$

siendo

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

**Sl. Acelerómetro y acelerógrafo reunidos**—El primero de estos aparatos ha sido modificado por Sebert, haciendo que el piston se componga de dos piezas, la inferior que es cilíndrica, constituye el piston propiamente dicho, y la superior es cúbica, guiada por una caja rectangular: el peso del cubo puede variarse á voluntad, dando al piston la masa necesaria: aumentándose el peso, se retarda bastante el movimiento del piston, pudiendo por lo tanto estudiarse, una porcion notable, de la duracion total de la combustion de una carga de pólvora. Modificaciones análogas hechas en el acelerógrafo, le hicieron comprender á Sebert la posibilidad de unir ambos aparatos, para lo cual, una de las caras de la pieza cúbica del acelerómetro, sirve para fijar el marco destinado á recibir los trazos marcados por el estilete del acelerógrafo; en la parte superior de la caja está fija la lámina vibrante.

Con el nuevo aparato así formado, pueden hacerse funcionar á voluntad los dos á la par, ó uno cualquiera de ellos: puede tambien, en vez de un solo marco, colocarse dos, en dos caras de la pieza cúbica, sirviendo entonces ambos trazos, para comprobarse recíprocamente.

La distinta naturaleza de los aparatos descritos, hace que su aplicacion sea apropiada á distintos casos. Las balanzas manométricas, miden directamente la presión en kilogramos, con una precision muy superior á la obtenida con el acelerómetro y acelerógrafo: en cambio de esta ventaja, la balanza de un solo piston, exige diversas experiencias para obtener la máxima presión en un punto de la pieza, y la de diez pistones, si bien, mide la sucesion de presiones en vein-

te puntos de la curva que representa las presiones desarrolladas en funcion del tiempo, exige el concurso de un cronógrafo muy preciso y de las instalaciones consiguientes, circunstancias que no siempre se reunen, lo que hace, que sea propia, dicha balanza, para experiencias delicadas y no para el uso diario de las comisiones de pruebas de pólvora, para las que presentan ventajas, por su fácil empleo, el acelerómetro y el acelerógrafo.

El primero de estos aparatos, tiene indicado su uso, para determinar el máximo de presión desarrollada en un punto cualquiera, situado delante de la posición inicial del proyectil, puesto que, por una sola experiencia, puede ser determinada dicha presión máxima. Para obtener la sucesión de presiones, se hacen precisas varias experiencias; es por lo tanto su empleo, mas lento que el del acelerógrafo, pero de alguna mayor precisión, por bastar una sola diferenciación para conocer la velocidad adquirida por el piston.

El acelerógrafo, presenta la gran ventaja, de su empleo cómodo para el estudio de la combustion en la recámara de las piezas, bastando un solo disparo para conseguirlo, teniendo en cambio la desventaja, de necesitarse dos diferenciaciones para deducir las presiones desarrolladas, por no dar directamente mas que la ley del movimiento del piston.

---



## CAPÍTULO 2.º

---

### RESISTENCIA DEL AIRE.

---

**82. Consideraciones generales.**—Al tratar de la resistencia que el aire opone al movimiento de los proyectiles esféricos, se vieron (\*) las dificultades que se presentan para su determinación analítica, dificultades que, si no en tan grande escala, llevan también en sí los métodos experimentales. A pesar de ello, y si bien, prescindiendo de ciertas circunstancias, que hasta ahora no ha sido posible tomar en consideración en el cálculo, se determinó, por procedimientos puramente analíticos, el valor de aquella resistencia, en el caso en que el móvil es un cuerpo de revolución, cuyo eje coincide con la dirección del movimiento. Las fórmulas así obtenidas, no podían ser la representación exacta de la ley que rige á la resistencia del aire, y había necesidad por lo tanto, de dotarlas de un coeficiente de corrección que se determinaba experimentalmente; el objeto de este coeficiente era aproximar, en cuanto fuese posible, los resultados obtenidos, fundándose en hipótesis más ó menos ciertas, que facilitaban su determinación, á los que hubieran resultado si se hubiesen tomado en cuenta todas las causas que influyen en la resistencia del aire.

---

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa.

Las dificultades aumentan notablemente, cuando se trata de la resolución de tan importante problema balístico, refiriéndose á los proyectiles oblongos: mas adelante demostraremos, y la experiencia, por otra parte lo confirma, que en estos, aun cuando el eje de figura del proyectil, coincida en el principio de su movimiento, con la tangente á la trayectoria, á corta distancia de la pieza cesa la coincidencia; que el ángulo formado por ambas líneas, varía constantemente de magnitud, con los elementos del movimiento, velocidad y alcance, y que el eje se encuentra animado de un movimiento oscilatorio: estas particularidades nos hacen ver, que las leyes obtenidas para la resistencia del aire, experimentando á corta distancia de la boca de fuego, (circunstancia que facilita la experimentacion) no serian aplicables al resto de la trayectoria.

Desde el momento que el proyectil abandona la boca de la pieza, queda sometido á varias causas, que sin cesar modifican su movimiento: 1.<sup>a</sup> *la gravedad*, que podemos considerar constante, en direccion y magnitud, durante todo el trayecto, siéndolo tambien por lo tanto, la aceleracion debida á ella: y como, por otra parte, podemos prescindir del peso de la masa de aire desalojada por el proyectil, así como, del de este fluido que le acompaña en su movimiento, tomaremos como aceleracion de la gravedad, la correspondiente al vacío: 2.<sup>a</sup> *el rozamiento*, que no tomaremos en cuenta, por ser despreciable con relacion á las demás fuerzas que se consideran: 3.<sup>a</sup> *diferencia de presiones sobre la superficie del proyectil*, originadas por el movimiento de rotacion de que se halla animado y que se produce, siempre que se verifica aquella alrededor de un eje, que no se confunde con la tangente á la trayectoria. Esta diferencia de presiones, aumenta con la velocidad de rotacion, que á su vez lo hace con la de traslacion y con el ángulo que forma el eje con la tangente á la trayectoria. Ahora bien, cuando la velocidad de traslacion es grande, el eje y la tangente se confunden sensiblemente, y si es pequeña, tambien lo es la de rotacion, de modo, que en ambos casos, no

siendo grande la diferencia de presiones, podrá no tomarse en consideracion: 4.ª *la resistencia del aire*, de cuya determinacion vamos á ocuparnos, en los casos que en la práctica ocurren; es decir, cuando el eje se confunde sensiblemente con la direccion del movimiento, y cuando forme con ella un cierto ángulo. En ambos casos, tomaremos como punto de partida, la hipótesis, por todos admitida, de que la resistencia del aire es proporcional al elemento de superficie, que en el movimiento, choca normalmente; á la densidad del aire; á una cierta potencia de la componente normal de la velocidad total, y por último; á una constante.

**83. Resistencia del aire sobre un sólido de revolucion, cuando el eje de figura coincide sensiblemente con la direccion del movimiento.**

—La velocidad total, es resultante de las de traslacion y rotacion de que está animado el móvil, y en este caso, la componente normal de la segunda es casi nula, por lo que, la resistencia del aire, podrá considerarse, dependiente únicamente de la velocidad de traslacion: en este supuesto, cesan las dificultades señaladas anteriormente, para la determinacion experimental de la resistencia del aire. Mayewski, en los años 1868 y 69, verificó experiencias con este objeto, (\*) empleando cañones rayados de 4', 42' y 24', y otro de 203<sup>mm</sup>; los proyectiles eran de envuelta de plomo y sus velocidades variaban, desde 409<sup>m</sup> hasta 172<sup>m</sup>, haciendo por lo menos, con cada carga ocho disparos: el intervalo de los puntos en que midió las dos velocidades, necesarias para determinar la resistencia, variaba entre los límites de 150<sup>m</sup> á 234<sup>m</sup>, intervalo en el cual puede admitirse, que el eje de figura está confundido, en cada elemento, con la direccion de la trayectoria.

Las conclusiones que de estas experiencias se dedujeron, son las mismas que para los proyectiles esféricos: el valor de  $\delta K$  es funcion de la potencia 1,86 de la velocidad, cuando esta es menor de 420<sup>m</sup>. Sustituyendo este exponente

---

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa.

por 2, se ha encontrado el valor mas probable del coeficiente que debe afectar á la velocidad, resultando ser

$$\delta K = 0,000000270 v^2$$

Segun esto, siendo  $\Delta_1$  la densidad del aire; la resistencia que este opone á los proyectiles oblongos, cuando su eje de figura coincide con la direccion del movimiento, tiene por expresion

$$p = A \pi R^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} v^2$$

designando por  $\Delta$ , la densidad del aire en el momento de la experiencia y

$$A = 0,00000027$$

pudiendo, como sabemos, en determinaciones balísticas que no exijan una gran precision, suponer  $\Delta = \Delta_1$ , y por lo tanto

$$p = A \pi R^2 v^2$$

Para reunir los resultados de las experiencias rusas é inglesas, se construyó la curva que liga los valores de las velocidades y los de  $\delta K$ , tomando aquellas por abscisas, y estos por ordenadas, resultando; que desde la velocidad de 540<sup>m</sup> hasta 360<sup>m</sup>, podia substituirse por una línea recta, expresada por la ecuacion

$$\delta K = 0,044,$$

desde 360<sup>m</sup> hasta 280<sup>m</sup>, por la curva

$$\delta K = 0,000000000026 v^2,$$

y para velocidades menores que 280<sup>m</sup>, por

$$\delta K = 0,012 \left( 1 + \left( \frac{v}{488} \right)^2 \right)$$

por lo que, las fórmulas correspondientes de la resistencia del aire, serán:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= A \pi R^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} v^3 & A &= 0,044 \\ \rho &= A \pi R^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} v^6 & A &= 0,0000000000026 \\ \rho &= A \pi R^2 \frac{\Delta}{\Delta_1} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right) & A &= 0,042, r = 488 \end{aligned} \right\} (1)$$

siendo en todas, el metro y el kilogramo, las unidades de longitud y peso.

Pasemos al caso en que el eje de figura del proyectil, forme un ángulo con la dirección del movimiento, y conforme con lo dicho en un principio, el método que seguiremos para la determinación de la resistencia del aire, será puramente analítico. Atendiendo á la forma de nuestros proyectiles en uso, estudiaremos aisladamente dicha resistencia, sobre los cuerpos de figura regular en que aquellos pueden descomponerse, considerando antes, el caso general de un sólido de revolución.

**84. Resistencia del aire sobre un sólido de revolución, cuando su eje de figura no coincide con la dirección del movimiento.**—Sea, (fig. 25)

A B C el sólido que se considera, referido al sistema coordenado rectangular X Y Z, que tiene por origen, el centro de gravedad O, del cuerpo; el eje O X, confundido con el de figura; y el O Y, situado en un plano, que pasando por este, es paralelo á la dirección del movimiento. Representemos por  $ds$ , el elemento superficial  $abc$ , comprendido entre dos paralelos y dos meridianos, infinitamente próximos, y por  $\Sigma$ , el ángulo que forma la normal  $fN$  á este elemento, con la dirección  $fv$  del movimiento.

La resistencia que el aire ejerce sobre la superficie  $ds$ , que puede considerarse como plana, tiene por expresión (\*)

$$d\rho = K \frac{\rho}{g} v^2 \cos^2 \Sigma ds$$

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 12.

y si llamamos  $\sigma$ , al ángulo formado por la normal, con el plano  $YZ$ , y  $\omega$  al diedro que forma el  $XY$  con el que, pasando por el eje  $OX$ , contiene al punto  $b$ ; fácil es ver, que las expresiones siguientes, representan las componentes de la resistencia elemental  $d^2$ , dirigidas según los ejes del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2_x = K \frac{\partial}{g} v^3 \cos^2 \Sigma \sin \sigma ds \\ d^2_y = K \frac{\partial}{g} v^3 \cos^2 \Sigma \cos \sigma \cos \omega ds \\ d^2_z = K \frac{\partial}{g} v^3 \cos^2 \Sigma \cos \sigma \sin \omega ds \end{array} \right.$$

Por ser infinitamente pequeña la superficie  $abc$ , puede considerarse como rectangular, y su área tendrá por valor,

$$ds = ab \times bc;$$

y designando por  $y$  la ordenada  $oh'$  del punto  $p$ , perteneciente al meridiano principal y al paralelo que pasa por  $b$ ; y por  $r_1$ , el radio de curvatura en este último punto, la inspección de la figura dá

$$ab = y d\omega; \quad bc = d\sigma \times r_1$$

por lo que,

$$ds = y r_1, d\omega d\sigma$$

valor que, sustituido en las expresiones anteriores, las convierte en

$$d^2_x = K \frac{\partial}{g} v^2 r_1 y \cos^2 \Sigma \sin \sigma d\sigma d\omega$$

$$d^2_y = K \frac{\partial}{g} v^2 r_1 y \cos^2 \Sigma \cos \sigma \cos \omega d\sigma d\omega$$

$$d^2_z = K \frac{\partial}{g} v^2 r_1 y \cos^2 \Sigma \cos \sigma \sin \omega d\sigma d\omega$$

A cada elemento superficial que se considere, corresponderá otro, simétrico respecto al plano  $XY$ ; por lo que, las

componentes en direccion del eje de las Z, se destruirán dos á dos, pues que resultarán iguales y de signo contrario: no sucederá lo mismo con las componentes en direccion de los otros ejes, pues resultando dos á dos iguales y del mismo signo, podremos considerar su suma, cuyo valor es  $2 d e_x$  y  $2 d e_y$  respectivamente, obrando en el punto de interseccion con el plano X Y, de la perpendicular á él bajada, desde el elemento superficial: este punto tiene por coordenadas

$$x' = b h = x \quad \text{é} \quad y' = o t = y \cos \omega$$

Trasladadas las fuerzas al origen de coordenadas, ó sea, al centro de gravedad: el sistema que en definitiva hemos de considerar estará constituido, por dos fuerzas de la misma intensidad que las anteriores, aplicadas en dicho punto, y por dos pares,  $(2 d e_x - 2 d e_x)$  y  $(2 d e_y - 2 d e_y)$ , que respectivamente, tendrán por momentos

$$2 d e_x \times y' = 2 d e_x \times y \cos \omega \quad \text{y} \quad 2 d e_y \times x' = 2 d e_y \times x$$

Si pues, componemos todas las fuerzas, que análogas á las ya expresadas, corresponden á los diversos elementos en que puede considerarse dividida la superficie entera, y que obran en direccion de ambos ejes; así como, los pares resultantes, del traslado de las fuerzas al origen del sistema, y llamamos  $e_x$  y  $e_y$ , á las resultantes de las primeras, que serán á su vez las componentes de la resistencia total del aire, y E al eje de momentos del par resultante, tendremos,

$$e_x = 2 K \frac{\partial}{g} v^2 \int r_1 y \operatorname{sen} \sigma d \sigma \int \cos^2 \Sigma d \omega$$

$$e_y = 2 K \frac{\partial}{g} v^2 \int r_1 y \cos \sigma d \sigma \int \cos^2 \Sigma \cos \omega d \omega$$

$$E = 2 \int \int (d e_x y \cos \omega - d e_y x) =$$

$$= 2 K \frac{\partial}{g} v^2 \int r_1 y (y \operatorname{sen} \sigma - x \cos \sigma) d \sigma \int \cos^2 \Sigma \cos \omega d \omega$$

Representando, por X, Y y Q, los productos del factor  $2$ ,

por las integrales que les acompañan, los valores anteriores serán,

$$(2) \quad \begin{cases} p_x = K \frac{\partial}{g} v^2 X \\ p_y = K \frac{\partial}{g} v^2 Y \\ E = K \frac{\partial}{g} v^2 Q \end{cases}$$

debiéndose en todos los casos, determinar las expresiones de X, Y y Q, limitando las integrales que las constituyen, de la manera que vamos á ver.

Circunscribiendo al cuerpo un cilindro cuyas generatrices sean paralelas á la direccion del movimiento, quedará dividido en dos partes por la curva de contacto, de las que únicamente la anterior estará expuesta á la accion de la resistencia del aire. En todos los puntos de la curva de contacto, se verifica,

$\cos \Sigma = 0$ , por tener  $\Sigma$  el valor  $\frac{\pi}{2}$ , y fácil es deducir, la re-

lacion que liga á los ángulos  $\sigma$  y  $\omega$  en los mismos puntos: para ello, describiremos una esfera de radio unidad, que tenga por centro el punto  $f$ , y del triángulo esférico  $RDb$ , cuyos elementos son,

$$bR = \Sigma, DR = \alpha, Db = \frac{\pi}{2} - \sigma \quad \text{y} \quad RDb = \omega,$$

se deduce,

$$\cos \Sigma = \cos \alpha \sin \sigma + \sin \alpha \cos \sigma \cos \omega \quad (3)$$

é introduciendo la condicion  $\cos \Sigma = 0$ , resulta

$$\cos \omega = - \frac{\text{tang } \sigma}{\text{tang } \alpha} = - \cos \varphi,$$

que es la relacion buscada, y que puede escribirse,

$$(4) \quad \omega = \pi - \varphi$$

siendo  $\varphi$  un ángulo auxiliar, cuyo coseno es,  $\frac{\text{tang } \sigma}{\text{tang } \alpha}$ .

Los valores de  $\omega$ , en los puntos M y M' (fig. 26), en que la curva de contacto corta al meridiano principal, son respectivamente;  $\omega=0$  y  $\omega=\pi$ , por lo que

$$\text{tang } \sigma = \mp \text{tang } \alpha$$

y  $\sigma = \mp \alpha$ , lo que dice, que en estos puntos, las normales forman con el plano YZ, un ángulo igual en valor absoluto, al de la dirección del movimiento, propiedad que es fácil comprobar geométricamente.

Ahora bien, si se trazan los paralelos de los puntos M y M', queda dividido el cuerpo en tres partes; la superior que está por completo expuesta á la resistencia del aire, la intermedia, que solo lo está en la superficie anterior, á partir de la curva MM', y la inferior en la que ninguna influencia ejerce este fluido: en la primera, los ángulos  $\omega$  variarán, en sus distintos paralelos, desde  $\omega=0$  hasta  $\omega=\pi$ , y  $\sigma$  será mayor que  $\alpha$ ; y en la segunda,  $\omega$  cambia desde cero, hasta el valor variable, dado por la relación (4) ó sea,  $\omega=\pi-\varphi$ , en la que, varia el ángulo  $\varphi$  de un paralelo á otro, dependiendo siempre de  $\sigma$ , que en valor absoluto es menor que  $\alpha$ .

Después de lo dicho, fácilmente se deducen los límites, que en los distintos casos, corresponden á las integrales: si se considera, que la curva CD, generadora de la superficie, está en su totalidad por encima del paralelo M y llamamos  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ , á los ángulos que forman con el ecuador las normales de los extremos; será en este caso  $\alpha \geq \sigma_0 < \sigma_1$ , y quedarán las integrales, definidas del siguiente modo

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} X = 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} r_1 y \text{ sen } \sigma \, d\sigma \int_0^{\pi} \cos^2 \Sigma \, d\omega \\ Y = 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} r_1 \dot{y} \cos \sigma \, d\sigma \int_0^{\pi} \cos^2 \Sigma \cos \omega \, d\omega \\ Q = 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} r_1 y (y \text{ sen } \sigma - x \cos \sigma) \, d\sigma \int_0^{\pi} \cos^2 \Sigma \cos \omega \, d\omega \end{array} \right.$$

Si la curva generatriz, tiene sus extremos, en la parte

comprendida entre los dos paralelos, es decir, si  $\alpha > \sigma_1 > \sigma_0$ .

$$(6) \left\{ \begin{aligned} X &= 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} r_1 y \operatorname{sen} \sigma d\sigma \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \Sigma d\omega \\ Y &= 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} r_1 y \cos \sigma d\sigma \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \Sigma \cos \omega d\omega \\ Q &= 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} r_1 y (y \operatorname{sen} \sigma - x \cos \sigma) d\sigma \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \Sigma \cos \omega d\omega. \end{aligned} \right.$$

Y por último, si los extremos están, el superior sobre el paralelo M', y entre este y el M el inferior, será  $\sigma_1 > \alpha > \sigma_0$ ; consideraremos por separado los trozos de curva generadora, que se encuentran colocados, respectivamente, en la parte superior é intermedia del cuerpo, siendo los límites de las integrales, en cada uno de ellos, los mismos que en análogos casos acabamos de considerar, teniendo presente que en el punto M, en que la generatriz corta al paralelo, el valor de  $\sigma$  es igual á  $\alpha$ .

$$(7) \left\{ \begin{aligned} X &= 2 \int_{\alpha}^{\sigma_1} r_1 y \operatorname{sen} \sigma d\sigma \int_0^{\pi} \cos^2 \Sigma d\omega + \\ &\quad + 2 \int_{\sigma_0}^{\alpha} r_1 y \operatorname{sen} \sigma d\sigma \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \Sigma d\omega \\ Y &= 2 \int_{\alpha}^{\sigma_1} r_1 y \cos \sigma d\sigma \int_0^{\pi} \cos^2 \Sigma \cos \omega d\omega + \\ &\quad + 2 \int_{\sigma_0}^{\alpha} r_1 y \cos \sigma d\sigma \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \Sigma \cos \omega d\omega \\ Q &= 2 \int_{\alpha}^{\sigma_1} r_1 y (y \operatorname{sen} \sigma - x \cos \sigma) d\sigma \int_0^{\pi} \cos^2 \Sigma \cos \omega d\omega + \\ &\quad + 2 \int_{\sigma_0}^{\alpha} r_1 y (y \operatorname{sen} \sigma - x \cos \sigma) d\sigma \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \Sigma \cos \omega d\omega \end{aligned} \right.$$

En el caso en que la generatriz tenga un extremo debajo del paralelo M, se tomará solamente la parte que esté sobre dicho punto y el valor de  $\sigma_0$  será entonces  $\alpha$ .

**85. Resistencia del aire sobre un tronco de cono, que se mueve con su base menor hácia adelante, y cuyo eje, forma un ángulo  $\alpha$  con la direccion del movimiento.**—En este caso, el valor del ángulo  $\sigma$ , es constante para todos los puntos de la superficie cónica, é igual al semi-ángulo del cono, que llamaremos  $\beta$ : la determinacion de la resistencia quedará reducida, á sustituir en (las fórmulas generales, los valores particulares de  $\sigma$  y  $d\sigma$  en funcion de los datos, que se deducen de los de la superficie tronco-cónica, y que son; los rádios R y  $r$  de ambas bases, y su altura  $h$ .

Los elementos planos, en que consideramos dividida la superficie total, (fig. 27) serán los trapecios constituidos por cada dos generatrices infinitamente próximas, tales como, A A', B B' y por los elementos A B, A' B' de las bases, que aquellas comprenden, por lo que, su área tendrá por expresion

$$ds = \frac{(R+r) d\omega}{2} \sqrt{h^2 + (R-r)^2},$$

que habrá que sustituir, en la fórmula general hallada, en lugar de  $r_1$  y  $d\sigma d\omega$ .

El valor  $\text{tang } \beta = \frac{R-r}{h}$ , es tambien el de  $\text{tang } \sigma$ , y nos permite determinar los del seno y coseno del mismo ángulo, y estos el de  $\cos \Sigma$ , por la sustitucion en la fórmula (3); resultando,

$$\cos \Sigma = \frac{\cos \alpha (R-r) + h \cos \omega \text{ sen } \alpha}{\sqrt{h^2 + (R-r)^2}}$$

y sustituyendo los valores hallados, en las expresiones de X é Y, suponiendo además,  $\alpha < \sigma = \beta$  resulta (fórmula 5)

$$X = \left\{ (R-r)^2 \cos^2 \alpha \int_0^\pi d\omega + 2h(R-r) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \int_0^\pi \cos \omega d\omega + \right. \\ \left. + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \int_0^\pi \cos^2 \omega d\omega \right\} \frac{R^2 - r^2}{h^2 + (R-r)^2}$$

$$Y = \left\{ (R-r)^2 \cos^2 \alpha \int_0^\pi \cos \omega d\omega + 2h(R-r) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \int_0^\pi \cos^2 \omega d\omega + \right. \\ \left. + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \int_0^\pi \cos^3 \omega d\omega \right\} \frac{(R+r)h}{h^2 + (R-r)^2}$$

recordando las fórmulas

$$\int \cos^{2n} x dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2n} \left( \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n-2} \cos^{2n-3} x + \right. \\ \left. + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n-2)} \cos x \right) + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} x$$

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2n+1} \left( \cos^{2n} x + \frac{2n}{2n-1} \cos^{2n-2} x + \right. \\ \left. + \dots + \frac{2.4 \dots 2n}{1.3 \dots (2n-1)} \right)$$

haciendo en ellas  $n=1$ ,  $x=\omega$  y limitándolas entre 0 y  $\pi$ , resultará

$$\int_0^\pi \cos^2 \omega d\omega = \left( \frac{\operatorname{sen} \omega}{2} \cos \omega + \frac{1}{2} \omega \right)_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos^3 \omega d\omega = \left( \frac{\operatorname{sen} \omega}{3} (\cos^2 \omega + 2) \right)_0^\pi = 0$$

valores que, sustituidos en las fórmulas anteriores, en union de

$$\int_0^\pi \cos \omega d\omega = 0$$

darán

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\pi}{2} \frac{R^2 - r^2}{h^2 + (R-r)^2} (h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2(R-r)^2 \cos^2 \alpha) \\ Y = \pi \frac{h^2 (R^2 - r^2)}{h^2 + (R-r)^2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \end{array} \right.$$

Si  $\alpha > \sigma = \beta$ , solo variarán los límites de las integrales con respecto á  $\omega$ , que serán (fórmulas 6),  $\pi - \varphi$  y 0, estando dado el ángulo auxiliar  $\varphi$ , por la relacion

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tang} \sigma}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{R-r}{h \operatorname{tang} \alpha},$$

verificándose además,

$$\int_0^{\pi-\varphi} \cos^3 \omega d\omega = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{3} (\cos^2 \varphi + 2) = \left( \frac{(R-r)^2}{h^2 \times \operatorname{tang}^2 \alpha} + 2 \right) \frac{\operatorname{sen} \varphi}{3}$$

$$\int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \omega d\omega = \frac{-\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{\pi-\varphi}{2} = -\frac{R-r}{2h \operatorname{tang} \alpha} \operatorname{sen} \varphi + \frac{\pi-\varphi}{2}$$

$$\int_0^{\pi-\varphi} \cos \omega d\omega = \operatorname{sen} (\pi - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi$$

por lo que, los valores que en este caso resuelven la cuestion serán,

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{h^2 + (R-r)^2} \left\{ (\pi - \varphi) (h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2(R-r)^2 \cos^2 \alpha) + \right. \\ \quad \left. + 3h(R-r) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi \right\} \\ Y = \frac{1}{3} \frac{h(R+r)}{h^2 + (R-r)^2} \left\{ 3h(R-r) (\pi - \varphi) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \right. \\ \quad \left. + (2h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + (R-r)^2 \cos^2 \alpha) \operatorname{sen} \varphi \right\} \end{array} \right.$$

Falta determinar la distancia  $\omega_0$ , que media, desde la base mayor del tronco de cono, hasta el centro de resistencia; para

ello observaremos, que la resultante parcial, sobre el elemento de superficie  $p q p' q'$ , obrará en su centro de gravedad  $G$ , cuya distancia á la base mayor  $p q$ , está representada por

$$G m = \frac{(p q + 2 p' q') \frac{m m'}{3}}{p q + p' q'} = \frac{(R + 2r) h}{3(R + r) \cos \beta}$$

y si dicha resultante se prolonga hasta su encuentro en  $a$ , con el eje de figura, se forma el cuadrilátero  $mo a G$ , en el que, el lado  $m G$  es igual á la suma de las proyecciones de los otros tres sobre él, verificándose

$$m G = R \operatorname{sen} \beta + x_0 \cos \beta$$

y si sustituimos por  $m G$  su valor, poniendo además el seno y coseno de  $\beta$ , en funcion de la tangente, que tiene por expresion  $\frac{R-r}{h}$ , resulta

$$(10) \quad x_0 = \frac{h^2 (R + 2r) - 2(R^3 - r^3)}{3h(R + r)}$$

fórmula, que por ser independiente del elemento superficial que se considera, nos hace ver, que todas las resultantes parciales cortarán en el mismo punto al eje de figura, siendo este punto el llamado *centro de resistencia*.

**86. Resistencia del aire sobre un tronco de cono, cuando su eje de figura, coincide ó es perpendicular á la direccion del movimiento.**—

Si en las expresiones anteriormente obtenidas de  $X$  é  $Y$  ha-

cemos,  $\alpha = 0$  en el caso de ser  $\alpha < \beta$ , y  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  cuando  $\alpha > \beta$ ,

tendremos los valores correspondientes á los casos en que el eje de figura coincide con la direccion del movimiento y aquel en que sea perpendicular á ella, siendo respectivamente

$$(11) \quad \begin{cases} X = \pi \frac{(R^2 - r^2)(R - r)^2}{h^2 + (R - r)^2} \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} X = \frac{\pi}{4} \frac{h^2 (R^2 - r^2)}{h^2 + (R - r)^2} \\ Y = \frac{2}{3} \frac{h^3 (R + r)}{h^2 + (R - r)^2} \end{cases}$$

Si el cuerpo fuese un cono completo, bastaría hacer  $r=0$ .

**87. Resistencia del aire sobre un cilindro, cuyo eje de figura, forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección del movimiento.**—Bastará en este caso hacer

en las fórmulas halladas para una superficie cónica  $R=r, \beta=0$

y por consiguiente  $\sigma=0$  y  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , convirtiéndose las fórmulas (9) en

$$(13) \quad \begin{cases} X=0 \\ Y = \frac{4}{3} h R \operatorname{sen}^2 \alpha \\ x_0 = \frac{1}{2} h \end{cases}$$

Debemos observar la particularidad que ofrecen las dos superficies últimamente consideradas, de tener el centro de resistencia en un mismo punto, cualquiera que sea el valor de  $\alpha$ , por ser su expresión independiente de este ángulo.

**88. Resistencia del aire sobre un proyectil oblongo, cuyo eje de figura forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección del movimiento.**—Las anteriores

determinaciones nos permiten obtener la resistencia del aire sobre un proyectil oblongo, cuyo eje de figura forme un ángulo  $\alpha$  con la dirección del movimiento; para ello le descompondremos en superficies de revolución iguales á las consideradas, y calcularemos los valores de  $X$  é  $Y$  que á ellas corresponden para los diferentes del ángulo  $\alpha$ ; si despues se suman todos los resultados obtenidos para  $X$  é  $Y$  con un mismo valor de  $\alpha$ , obtendremos los correspondientes al proyectil entero para este ángulo, y las componentes de la resistencia total del aire en

sentido de los ejes coordenados serán respectivamente (fórmulas 2)

$$\rho_x = K \frac{\delta}{g} X v^2$$

$$\rho_y = K \frac{\delta}{g} Y v^2$$

en las que, si llamamos R al radio de la parte cilíndrica del proyectil,  $X_0$  al valor que toma X cuando  $\alpha=0$ , y C al coeficiente constante

$$K \frac{\delta}{g} \frac{X_0}{\pi R^2},$$

tendremos, después de multiplicar y dividir por  $\frac{X_0}{\pi R^2}$

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \rho_x = C \frac{X}{X_0} \pi R^2 v^2 \\ \rho_y = C \frac{Y}{X_0} \pi R^2 v^2 = \frac{Y}{X} \rho_x \end{array} \right.$$

Construyendo para la granada de 9°, la curva de los valores de  $\frac{X}{X_0}$  con diferentes ángulos  $\alpha$ , tomando aquellos por ordenadas y estos por abscisas, se encuentra (fig. 28), que hasta  $\alpha=42^\circ,50$  los de  $\frac{X}{X_0}$  son sensiblemente iguales á la unidad, y que aun para  $\alpha=90^\circ$ , dicha relacion tiene por valor, 0,745605, resultado que concuerda con el obtenido por Mayewsky con proyectiles semejantes al que consideramos, lo que desde luego nos permite admitir, que la componente  $\rho_x$ , con cualquier valor de  $\alpha$ , puede tomarse igual á la resistencia que experimenta el proyectil por parte del aire, cuando su eje de figura coincide con la direccion del movimiento.

La conformidad obtenida en el anterior resultado con Mayewsky, nos evita calcular los valores de la relacion  $\frac{Y}{X_0}$

para distintos ángulos  $\alpha$ , pudiendo decir con tan ilustre artillero, que por diferir mucho de la unidad, será preciso siempre para cada valor de  $\alpha$  determinar el correspondiente de  $\rho_r$ .

Una vez conocidas las componentes de la resistencia del aire que actúan sobre el proyectil, la resultante quedará determinada por la expresion

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2} = C \pi R^2 v^2 \sqrt{\frac{X^2}{X_0^2} + \frac{Y^2}{X_0^2}}$$

siendo fácil deducir, el ángulo que esta resultante forma con la prolongacion del eje de figura, cuyo valor será

$$\text{tang}(\rho, A) = \frac{Y}{X}$$

Segun se ha dicho, presenta dificultades insuperables la experimentacion con proyectiles oblongos, cuando su eje de figura no coincide con la direccion del movimiento, para determinar la ley de la resistencia del aire, no habiendo mas medio para conseguirlo, que fundarse en las relaciones acabadas de obtener: basta en efecto multiplicar por  $\frac{X}{X_0}$  é  $\frac{Y}{X_0}$

respectivamente las expresiones dadas por la experiencia, cuando aquellos coincidan, recordando siempre que la relacion  $\frac{X}{X_0}$  es sensiblemente igual á la unidad.

En cuanto al valor formular del par de la resistencia, estará representado por

$$E = d \times \rho_r = K \frac{\delta}{g} d Y v^2$$

designando  $d$ , la distancia que media desde el centro de gravedad al del sistema.

**89. Centro de resistencia de un proyectil oblongo.**—Finalmente, para la determinacion del centro de resistencia del proyectil, seguiremos un método análogo al empleado anteriormente, descomponiéndole en las mismas

superficies, y calculando para cada una su centro de resistencia, lo que nos permitirá conocer las distancias que median desde ellos al centro de gravedad del proyectil. Si después se multiplican estas distancias, por los valores de  $Y$  correspondientes á cada superficie y á un cierto valor de  $\alpha$ , el cociente de la suma de los productos así obtenidos, por el valor que toma  $Y$  para el proyectil entero con el mismo ángulo  $\alpha$ , nos dará el valor de  $d$ .

Calculando los valores de  $d$  para la misma granada de  $9^c$ , hemos obtenido para  $\alpha=90^\circ$ ,  $d=41^{mm},41997$ , observando además, que á medida que el ángulo  $\alpha$  disminuye, el centro de resistencia se aleja del de gravedad, aproximándose constantemente al de resistencia de la parte ojival, circunstancia que puede comprobarse analíticamente. En efecto, partiendo de un valor de  $\alpha$  pequeño, resulta de las fórmulas (8) y (13) que la relacion de las componentes  $F$  y  $F'$  de la resistencia del aire, en direccion del eje de las  $Y$  en la parte ojival y cilindrica del proyectil, es proporcional á

$$\frac{\text{sen } \alpha \cos \alpha}{\text{sen}^3 \alpha} = \text{cotg } \alpha$$

valor, que aumentando cuando  $\alpha$  decrece, nos dice, que  $\frac{F}{F'}$  aumenta tambien: por consiguiente, llamando  $z$  y  $z'$  las distancias de los centros de resistencia respectivos al de gravedad del proyectil, se verificará

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{F}{F'}$$

que evidentemente disminuye con  $\alpha$ .

### 90. Determinacion del centro de gravedad.—

El conocimiento de la situacion del centro de gravedad se hace necesario segun acabamos de ver, y puede conseguirse, bien sea por los medios que la Mecánica enseña, ó bien haciendo uso de un excentrímetro análogo al empleado para igual objeto en los proyectiles esféricos, sin mas diferencia, que la vitola

colocada al extremo del brazo menor, tiene en este caso, la forma apropiada para abrazar al proyectil oblongo: por medio de este sencillo aparato, puede determinarse la distancia del centro de gravedad al eje ó sea, su excentricidad, así como la que media desde dicho punto á la base mayor.

Para lo primero, se coloca la vitola, de modo que su eje mayor (con el que ha de coincidir el del proyectil) sea perpendicular á los brazos de la balanza; llamando  $M$  y  $m$  los pesos, máximo y mínimo, que ha sido necesario colocar en el platillo, para mantener el equilibrio en las diversas posiciones que toma el proyectil cuando se le hace girar alrededor de su eje y que corresponderán respectivamente, á la situación del centro de gravedad á la mayor y menor distancia del de suspension;  $e$  la excentricidad,  $B$  y  $b$  las distancias desde este último eje al platillo y al eje de la vitola y  $P$  el peso del proyectil; las ecuaciones de momentos en ambas posiciones serán:

$$P(b + e) = MB$$

$$P(b - e) = mB$$

de donde

$$\frac{b + e}{b - e} = \frac{M}{m}$$

y de aquí, por último

$$e = \frac{b(M - m)}{M + m}$$

Para la segunda determinacion, la vitola se coloca de modo que su eje mayor sea prolongacion de los brazos de la balanza, y llamando  $b$  al menor, que en este caso es la distancia desde el culote ó base del proyectil al eje de suspension;  $M$  al peso colocado en el platillo, necesario para que se establezca el equilibrio;  $P$  al peso de aquel y  $x$  la distancia objeto de esta determinacion, despues de establecer la ecuacion de momentos, resulta:

$$x = \frac{MB - Pb}{P}$$

**91. Fórmulas prácticas.**—Segun queda dicho anteriormente, si se supone que la resistencia del aire obra en direccion del eje de figura, dicha fuerza es proporcional á la seccion del cuerpo, perpendicular á la direccion del movimiento, ó bien al cuadrado  $d^2$  del diámetro del proyectil; lo es tambien, á la masa  $\frac{\Delta}{g}$  de aire, contenida en un metro cúbico, (siendo  $\Delta$  su peso) y por último, á una cierta funcion  $F(v)$  de la velocidad, por lo que puede establecerse,

$$e = \frac{\Delta}{g} d^2 F(v)$$

y haciendo

$$F(v) = v^2 f(v)$$

resulta

$$e = \frac{\Delta}{g} d^2 v^2 f(v)$$

Para determinar el valor de  $e$ , supongamos sea  $p$  el peso del proyectil, y  $e'$  la aceleracion debida á la resistencia del aire; con lo que se tendrá

$$e' = \frac{\Delta}{p} d^2 v^2 f(v)$$

ó bien

$$e' = A v^2$$

si se hace

$$A = \frac{\Delta}{p} d^2 f(v)$$

Si se considera un trayecto del proyectil que sea próximamente horizontal, puede prescindirse de la accion de la gravedad, en cuyo caso, la aceleracion será tan solo debida á la resistencia del aire, verificándose por lo tanto

$$\frac{dv}{dt} = - A v^2$$

y llamando  $x$  dicho trayecto horizontal, recorrido por el proyectil en un instante cualquiera, se verificará

$$\frac{dx}{dt} = v$$

asi como,

$$\frac{dv}{v} = -A dx$$

Suponiendo que se miden las velocidades  $v'$  y  $v''$  en dos puntos de la trayectoria, que estén próximamente á la misma altura, y distantes entre sí la longitud  $x$ , bastante pequeña para considerar el valor de  $A$  constante, integrando la última expresion, entre los limites  $v'$  y  $v''$  su primer miembro, y  $0$  y  $x$  el segundo, se tiene

$$l. v' - l. v'' = Ax$$

de donde

$$A = \frac{l. v' - l. v''}{x}$$

pudiendo admitirse tambien, por la circunstancia dicha de ser pequeña la longitud  $x$ , que el valor de  $A$  corresponde á una velocidad, media entre las dos halladas, es decir á

$$v = \frac{v' + v''}{2}$$

conociéndose de esta manera los valores de  $A$  para distintos del de la velocidad, y en consecuencia los de  $f(v)$ , por la fórmula

$$f(v) = \frac{p}{\Delta d^2} A.$$

Las experiencias verificadas en Gávre siguiendo este procedimiento, han demostrado que se obtienen valores muy análogos de esta funcion, haciendo uso de la fórmula

:

$$f(v) = B - \frac{B - \lambda}{40^h \left(\frac{v}{100}\right)^n}$$

sien lo, para proyectiles que no difieran mucho en su forma, de la que tiene la granada oficial francesa de 24<sup>cm</sup>.

$$B = 0,27$$

$$B - \lambda = 0,18$$

$$h = 0,00000021$$

$$n = 2$$

con cuyos datos se obtiene la siguiente tabla, para proyectiles ojivales

Velo- cidad.	$f(v)$	Dif.	Velo- cidad.	$f(v)$	Dif.	Velo- cidad.	$f(v)$	Dif
metros.			metros.			metros.		
100	0,0900		300	0,131	7	370	0,263	5
200	0,0904	4	305	0,138	9	380	0,268	4
240	0,0906	2	340	0,147	40	390	0,269	4
220	0,0910	4	345	0,157	40	400	0,270	
230	0,0919	9	320	0,167	11			
240	0,0929	10	325	0,178	12			
250	0,0947	18	330	0,190	12			
260	0,0981	34	335	0,202	11			
270	0,1028	47	340	0,213	11			
280	0,1092	68	345	0,224	14			
290	0,1183	91	350	0,235	9			
300	0,1308	121	355	0,244	8			
			360	0,252	6			
			365	0,258	5			
			370	0,263				

En ella se observa, que hasta la velocidad de 200<sup>m</sup> y desde 390<sup>m</sup> en adelante,  $f(v)$  es sensiblemente constante y por lo tanto, la resistencia del aire, proporcional al cuadrado de la velocidad, siendo

$f(v)=0,09$  desde las mas pequeñas velocidades hasta la de  $200^m$  y  $f(v)=0,27$  para valores de  $v$  superiores á  $390^m$ .

Las dimensiones de la referida granada de  $24^{cm}$  son

Relacion	}	de la longitud de la ojiva al diámetro....	1,479
		de la longitud total al diámetro.....	2,253
		del radio del arco ojival al diámetro.....	1,644

En el caso que el aire no esté en calma y suponiendo horizontal la accion del viento, el valor que se obtendria para A corresponderia á aquel estado del aire, siendo preciso hacer una correccion para conocer el que tendria si estuviera en calma. Siendo horizontal la velocidad del viento y W su componente en direccion del movimiento, las velocidades  $v'$  y  $v''$  medidas, tendrian por valores  $v' - W$  y  $v'' - W$  si el aire estuviese inmóvil, prescindiendo de la influencia que pueda ejercer la componente normal de la velocidad del viento: W será negativo si el viento viene de adelante y positivo en el caso contrario.

Por la misma razon, si T es la duracion del trayecto entre los dos puntos en que se miden las velocidades, estando inmóvil el aire en dicho tiempo, no recorreria el proyectil el espacio  $x$ , sinó el  $x - W t$ , conservando W los signos que hemos dicho anteriormente; y por lo tanto, se tendrá

$$A = \frac{l(v' - W) - l(v'' - W)}{x - W}$$

siendo el valor de T, dado por la fórmula

$$T = \frac{x}{\frac{v' + v''}{2}}$$





## CAPÍTULO 3.º

### MOVIMIENTO DE LOS PROYECTILES EN LA ATMÓSFERA Y PROBLEMAS SOBRE EL TIRO.

**92. Consideraciones generales.**—Impulsado un proyectil por la acción de los gases de la pólvora, queda sujeto, hemos dicho, durante su movimiento en el aire, á la resistencia que este fluido le opone y á la gravedad, supuesta constante en dirección y magnitud. También sabemos, que sea cualquiera el movimiento que se considere, puede suponerse debido á la coexistencia de otros dos, uno de traslación del centro de gravedad y otro de rotación alrededor de un eje instantáneo, que pase por aquel.

Empezando por el segundo de los movimientos enunciados, emplearemos para su determinación, las fórmulas conocidas de Mecánica

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (B - C) qr &= L \\ B \frac{dq}{dt} + (C - A) pr &= M \\ C \frac{dr}{dt} + (A - D) pq &= N \end{aligned} \right\} (1)$$

que ligan las velocidades angulares de rotación, alrededor de

tres ejes principales del sólido, con los momentos de las fuerzas exteriores, tomados con relacion á los mismos ejes. En ellas,  $p$ ,  $q$  y  $r$ , representan las velocidades angulares de las mencionadas rotaciones componentes;  $A$ ,  $B$  y  $C$ , los momentos de inercia tomados con respecto á los mismos, y  $L$ ,  $M$  y  $N$ , los momentos de las fuerzas exteriores, tambien con relacion á dichos ejes.

Si suponemos que en cada instante, es conocido el movimiento de traslacion del centro de gravedad, refiriéndonos á un proyectil ojival, la direccion de la tangente á la trayectoria que describe, quedará determinada por esta circunstancia; y entonces, la posicion del eje de figura del proyectil, que nos determinará la del proyectil mismo, quedaria conocida, si pudiésemos obtener, en funcion del tiempo, el ángulo  $\gamma$ , que forma el plano vertical que pasa por la tangente, con el que contiene á esta y al eje de figura, y el que ambas rectas forman una con otra que llamaremos  $\delta$ .

Para determinar el movimiento de rotacion del proyectil, lo referiremos á un sistema coordinado, cuya posicion, nos sea conocida en cada instante: determinaremos primeramente el movimiento relativo de rotacion, respecto al sistema coordinado rectangular  $o x_1 y_1 z_1$ , (fig. 29) en el cual, el plano  $z_1 o x_1$  sea constantemente vertical y el eje  $o x_1$ , la direccion variable de la tangente á la trayectoria: mas para establecer las ecuaciones diferenciales del movimiento, no tenemos mas punto de partida, que las ecuaciones (1) obtenidas, en Mecánica y referidas á tres ejes principales del sólido, para encontrar pues las que descamos, se hace preciso, sustituir en las anteriores, los valores de las cantidades que entran en ellas, en funcion de los datos, referidos al sistema  $x_1 y_1 z_1$ , que supondremos fijo.

Empezaremos por tomar como ejes principales del proyectil, los  $o x$ ,  $o y$  y  $o z$ , de los que  $o x$ , es el de figura y los dos restantes, perpendiculares á él, siendo el plano  $z o x$  vertical; determinaremos los valores  $p$ ,  $q$  y  $r$ , de la velocidad angular segun dichos ejes principales, en funcion de los án-

gulos  $\gamma$ ,  $\delta$  y el  $\lambda$ , que forma el eje  $oy$ , con la interseccion  $ON$ , de los planos  $yoz$ ,  $y_1oz_1$  y que fijan completamente la posicion del sistema  $y_1x_1z_1$ , con respecto al  $yxz$ ; para poder determinar los valores de estas componentes, será preciso valernos de un sistema auxiliar  $ox_1N$ , en el que es fácil encontrar, las velocidades de rotacion, alrededor de cada uno de sus ejes, en funcion de los ángulos expresados, y haciendo despues uso de la teoría de proyecciones, determinaremos los valores que se buscan de  $p$ ,  $q$  y  $r$ , que sustituidos en las ecuaciones generales del movimiento de un sólido enteramente libre, nos darán las ecuaciones diferenciales del movimiento de rotacion del proyectil, suponiendo fija la tangente á la trayectoria.

De estas ecuaciones, deduciremos los valores de los ángulos  $\delta$  y  $\gamma$ , en funcion del tiempo, así como las circunstancias del movimiento; combinando despues el estudiado, con el que tiene el sistema coordinado, se obtendrá finalmente el absoluto de rotacion.

### 93. Componentes de la velocidad angular.—

El conocimiento de las velocidades  $p$ ,  $q$  y  $r$ , en funcion de los ángulos  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ , exige la descomposicion de la velocidad angular, alrededor del eje instantáneo, en otras tres según los ejes  $ox_1$ ,  $ox$  y  $oN$ , cuyas componentes, si convenimos en considerar como positivas las rotaciones que un observador colocado sobre los ejes, vea desde el origen del sistema, de izquierda á derecha, tendrán respectivamente por valor

$$\frac{d\gamma}{dt}, -\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\delta}{dt}$$

lo que fácilmente se deduce de la figura, describiendo una esfera de radio unidad desde el origen como centro, y afectando á la segunda del signo negativo, por tener el incremento del ángulo  $\lambda$ , en todos los casos, signo contrario á la rotacion de que se supone animado el proyectil alrededor del eje  $ox$ .

Las componentes  $p$ ,  $q$  y  $r$ , de la velocidad angular total del proyectil, se obtendrán, sumando las proyecciones sobre

cada uno de los ejes  $ox$ ,  $oy$  y  $oz$ , de las velocidades segun los  $ox_1$ ,  $ox$  y  $oN$ , siendo por tanto sus valores

$$p = \frac{d\delta}{dt} \cos(oN, x) - \frac{d\lambda}{dt} \cos(x, x) + \frac{d\gamma}{dt} \cos(x_1, x)$$

$$q = \frac{d\delta}{dt} \cos(oN, y) - \frac{d\lambda}{dt} \cos(x, y) + \frac{d\gamma}{dt} \cos(x_1, y)$$

$$r = \frac{d\delta}{dt} \cos(oN, z) - \frac{d\lambda}{dt} \cos(x, z) + \frac{d\gamma}{dt} \cos(x_1, z)$$

La interseccion de la esfera anteriormente descrita, con los planos de ambos sistemas coordenados, dá lugar á los triángulos esféricos  $xx_1y$  y  $xzx_1$ , de los que se deduce

$$\begin{aligned} \cos(x_1y) &= \cos(xy) \cos(x_1x) + \operatorname{sen}(xy) \operatorname{sen}(x_1x) \cos(yxx_1) = \\ &= \operatorname{sen}\delta \cos(yxx_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x_1z) &= \cos(xz) \cos(xx_1) + \operatorname{sen}(xz) \operatorname{sen}(xx_1) \cos(zxx_1) = \\ &= \operatorname{sen}\delta \cos(zxx_1) \end{aligned}$$

y por ser el plano  $zox$ , perpendicular al  $yox$ , el ángulo  $(yxx_1)$ , tendrá por complemento negativo el  $(z'xx_1)$  que á su vez, es suplemento del  $(zxx_1)$ : además, el citado ángulo  $(z'xx_1)$ , tiene por medida  $\lambda$ , pues que las rectas  $oy$  y  $oN$ , son respectivamente perpendiculares á los planos  $zox$  y  $zox_1$ , por consiguiente se verifica:

$$\cos(yxx_1) = -\operatorname{sen}\lambda$$

$$\cos(zxx_1) = -\cos\lambda$$

de donde

$$\cos(x_1y) = -\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\lambda$$

$$\cos(x_1z) = -\operatorname{sen}\delta \cos\lambda$$

Teniendo además presentes, los valores de los demás ángulos, que fácilmente se desprenden de la figura, resulta:

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \cos \delta \\ q &= \frac{d\delta}{dt} \cos \lambda - \frac{d\gamma}{dt} \sin \delta \sin \lambda \\ r &= -\frac{d\delta}{dt} \sin \lambda - \frac{d\gamma}{dt} \sin \delta \cos \lambda \end{aligned} \right\} (2)$$

de cuyas ecuaciones, empleando cualquiera de los métodos de eliminacion, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= q \cos \lambda - r \sin \lambda \\ \frac{d\gamma}{dt} \sin \delta &= -(q \sin \lambda + r \cos \lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} \sin \delta &= -(p \sin \delta + (q \sin \lambda + r \cos \lambda) \cos \delta) \end{aligned} \right\} (3)$$

**94. Par de la resistencia del aire.**—Suponiendo que el centro de resistencia esté situado delante del de gravedad, como sucede en los proyectiles generalmente en uso, el par de la resistencia, tiende á alejar el eje de figura de la direccion de la tangente, por lo que, la rotacion alrededor de su eje  $oN$ , será positiva, en la direccion marcada por el órden de las letras; siendo así, sus proyecciones sobre los ejes  $ox$ ,  $oy$  y  $oz$ , serán:

$$\begin{aligned} E_x &= E \cos (oN\alpha) = o \\ E_y &= E \cos (oNy) = E \cos \lambda \\ E_z &= -E \sin (oNy) = -E \sin \lambda \end{aligned}$$

siendo (párrafo 88),

$$E = d r_y = d \frac{Y}{X} r_x .$$

Construidos los valores de  $\frac{Y}{X} d$ , para varios del ángulo  $\delta$ ,

en el proyectil de 9<sup>cm</sup>, resulta; que mientras estos no sean grandes, puede establecerse la relacion

$$\frac{Y}{X} d = h \operatorname{sen} \delta$$

siendo  $h = 4,85$ ; valor que está conforme con el obtenido por Mayewsky, resultando ser

$$E = h e_x \operatorname{sen} \delta.$$

**95. Expresiones de las velocidades angulares en funcion del ángulo  $\delta$ .**—Las ecuaciones (1), despues de hacer  $B = C$ , por ser el proyectil un sólido de revolucion, quedan

$$\left. \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (B - A) p r = h e_x \operatorname{sen} \delta \cos \lambda \\ B \frac{dr}{dt} - (B - A) p q = -h e_x \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \lambda \end{array} \right\} (4)$$

cuya ecuacion primera nos dice, que la velocidad angular de rotacion alrededor del eje de figura, es constante durante todo el trayecto, por lo que, si llamamos  $p_0$  á la velocidad inicial angular, se verificará

$$p = p_0.$$

Multiplicando la segunda de las ecuaciones (4) por  $\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \lambda$  y por  $\operatorname{sen} \delta \cos \lambda$  la tercera; sumando ambos resultados, se obtiene;

$$A p \operatorname{sen} \delta (q \cos \lambda - r \operatorname{sen} \lambda) + B \left( \operatorname{sen} \delta \cos \lambda \frac{dr}{dt} + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \lambda \frac{dq}{dt} - \right. \\ \left. - p \operatorname{sen} \delta (q \cos \lambda - r \operatorname{sen} \lambda) \right) = 0$$

y como

$$p = p_0 \quad \text{y} \quad q \cos \lambda - r \operatorname{sen} \lambda = \frac{d\delta}{dt} \quad (\text{ecuacion 3})$$

será:

$$B \left( \text{sen } \delta \cos \lambda \frac{dr}{dt} + \text{sen } \delta \text{sen } \lambda \frac{dq}{dt} - p_0 \text{sen } \delta \frac{d\delta}{dt} \right) = A p_0 \frac{d(\cos \delta)}{dt} \quad (5)$$

ahora bien,

$$\frac{d(r \text{sen } \delta \cos \lambda + q \text{sen } \delta \text{sen } \lambda)}{dt} = \text{sen } \delta \cos \lambda \frac{dr}{dt} + \text{sen } \delta \text{sen } \lambda \frac{dq}{dt} +$$

$$+ (q \cos \lambda - r \text{sen } \lambda) \text{sen } \delta \frac{d\lambda}{dt} + (q \text{sen } \lambda + r \cos \lambda) \cos \delta \frac{d\delta}{dt}$$

y teniendo presentes las ecuaciones (3), resulta:

$$\frac{d(r \text{sen } \delta \cos \lambda + q \text{sen } \delta \text{sen } \lambda)}{dt} = \text{sen } \delta \cos \lambda \frac{dr}{dt} + \text{sen } \delta \text{sen } \lambda \frac{dq}{dt} -$$

$$- \text{sen } \delta \frac{d\delta}{dt} \left( -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \cos \delta \right) = \text{sen } \delta \cos \lambda \frac{dr}{dt} + \text{sen } \delta \text{sen } \lambda \frac{dq}{dt} - p_0 \text{sen } \delta \frac{d\delta}{dt}$$

pór ser igual á  $p_0$ , la cantidad que en el segundo miembro está dentro del paréntesis, (ecuacion 2) y siendo (ecuacion 5), el factor que multiplica á B, igual á la última expresion hallada, se convertirá aquella en

$$B \frac{d(r \text{sen } \delta \cos \lambda + q \text{sen } \delta \text{sen } \lambda)}{dt} = A p_0 \frac{d(\cos \delta)}{dt}$$

y teniendo presente la segunda de las ecuaciones (3) se tendrá por último;

$$B d(\text{sen}^2 \delta \frac{d\gamma}{dt}) = -A p_0 d(\cos \delta)$$

Admitiendo que se empiezan á contar los tiempos, desde el instante en que el eje de figura, formando un ángulo  $\delta_0$  con la tangente, se separa del plano vertical que contiene á esta, es decir, desde el momento en que obra sobre el proyectil el par de la resistencia del aire, se tendrá para  $t=0$ ,

$$\delta = \delta_0 \text{ y } \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

Integrando la última expresión hallada, entre los límites  $t=0$  y  $t=t$ , se tendrá por consiguiente

$$B \operatorname{sen}^2 \delta \frac{d\gamma}{dt} = A p_0 (\cos \delta_0 - \cos \delta)$$

y de aquí

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{A p_0}{B} \times \frac{\cos \delta_0 - \cos \delta}{\operatorname{sen}^2 \delta}, \quad (6)$$

valor del que mas adelante haremos uso.

Propongámonos ahora determinar la velocidad angular  $\frac{d\delta}{dt}$ , en función del ángulo  $\delta$ , para lo que, por el método de reducción, eliminaremos  $p$  entre la segunda y tercera de las ecuaciones (4), sustituyendo despues en el resultado por  $q dq$ ,  $r dr$  y  $\operatorname{sen} \delta d\delta$ , sus iguales  $\frac{1}{2} dq^2$ ,  $\frac{1}{2} dr^2$  y  $d(\cos \delta)$ , tendremos,

$$\frac{1}{2} B d(q^2 + r^2) = -h r_x d(\cos \delta)$$

mas como las ecuaciones (3) dan

$$q^2 + r^2 = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \delta \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2$$

resultará, por la combinacion de ambas

$$\frac{1}{2} B d \left( \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \delta \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \right) = -h r_x d(\cos \delta)$$

expresión que, integrada entre los límites que anteriormente hemos empleado y teniendo presente que para  $t=0$ ,  $\frac{d\delta}{dt} = 0$

y  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$  será

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \delta \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{2 h r_x}{B} (\cos \delta_0 - \cos \delta)$$

en donde, poniendo por  $\frac{d\gamma}{dt}$ , su valor dado por ecuacion (6) y multiplicando además por  $\text{sen}^2 \delta$ , ambos miembros obtendremos;

$$\left(\text{sen} \delta \frac{d\delta}{dt}\right)^2 = \frac{2h^2 \rho_x}{B} \text{sen}^2 \delta (\cos \delta_0 - \cos \delta) - \frac{A^2 p_0^2}{B^2} (\cos \delta_0 - \cos \delta)^2$$

Si extrae la raíz cuadrada y se sustituye por  $\text{sen}^2 \delta$ , su igual  $1 - \cos^2 \delta$ , se convierte en

$$\frac{d(\cos \delta)}{dt} = \sqrt{\frac{2h^2 \rho_x}{B}} \sqrt{(\cos \delta_0 - \cos \delta) \left(1 - \cos^2 \delta - \frac{A^2 p_0^2}{2h^2 \rho_x B} (\cos \delta_0 - \cos \delta)\right)} \quad (7)$$

de la que se deducirá el valor que nos proponiamos.

**96. Expresiones del ángulo  $\delta$  y de las velocidades angulares en funcion del tiempo.**—El valor de  $dt$  deducido de la ecuacion (7) é integrado entre los límites  $0$  y  $t$ , dará

$$t = \sqrt{\frac{B}{2h^2 \rho_x}} \int_{\cos \delta_0}^{\cos \delta} \frac{d(\cos \delta)}{\sqrt{(\cos \delta_0 - \cos \delta) \left(1 - \cos^2 \delta - \frac{A^2 p_0^2}{2h^2 \rho_x B} (\cos \delta_0 - \cos \delta)\right)}}$$

integral que con aproximacion suficiente, puede obtenerse del siguiente modo. Resolviendo la ecuacion que se deduce, igualando á cero el segundo factor de la cantidad subradical, se tiene,

$$\cos \delta = \frac{A^2 p_0^2}{4h^2 \rho_x B} \left( 4 \pm \sqrt{4 - \frac{8h^2 \rho_x B}{A^2 p_0^2} \cos \delta_0 + \frac{16 h^2 \rho_x^2 B^2}{A^4 p_0^4}} \right)$$

y considerando el caso de estar el proyectil animado de gran velocidad inicial de rotacion,  $p_0$  será tambien grande con relacion á las demás cantidades, por lo que podremos, despues de desarrollar por la fórmula del binomio de Newton el radical, despreciar los términos que contengan á la fraccion

$\frac{4 h \rho_x B}{A^2 p_0^2}$  con potencias superiores á la primera. El valor de la radical es

$$\left(1 + \frac{8 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \left(\frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} - \cos \delta_0\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{4 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \left(\frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} - \cos \delta_0\right) - \frac{8 h^2 \rho_x^2 B^2}{A^4 p_0^4} \left(\frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} - \cos \delta_0\right)^2 + \dots$$

que sustituido en los de  $\cos \delta$ , despreciando los términos indicados, quedará

$$\cos \delta = \frac{A^2 p_0^2}{2 h \rho_x B} \left(1 - \frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \cos \delta_0\right)$$

$$\cos \delta = \cos \delta_0 - \frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen}^2 \delta_0$$

por lo que, descomponiendo el primer miembro de la ecuacion, cuyas raices son las dos anteriores, en sus factores de primer grado, resulta;

$$1 - \cos^2 \delta - \frac{A^2 p_0^2}{2 h \rho_x B} (\cos \delta_0 - \cos \delta) = \frac{A^2 p_0^2}{2 h \rho_x B} \left\{ \left(1 - \frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} (\cos \delta_0 + \cos \delta)\right) (\cos \delta - \cos \delta_0 + \frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen}^2 \delta_0) \right\}$$

expresion que, sustituida en la fórmula que dá el valor del tiempo, la convierte en

$$t = \frac{B}{A p_0} \int_{\cos \delta_0}^{\cos \delta} \frac{1}{\sqrt{(\cos \delta_0 - \cos \delta) \left(\cos \delta - \cos \delta_0 + \frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen}^2 \delta_0\right)}} \times \frac{d(\cos \delta)}{\sqrt{\left(1 - \frac{2 h \rho_x B}{A^2 p_0^2} (\cos \delta_0 + \cos \delta)\right)}}$$

en la que puede despreciarse la cantidad  $\frac{2h \rho_x B}{A^2 p_0^2} (\cos \delta_0 + \cos \delta)$ , por ser muy pequeña con relacion á la unidad y si se efectúan las operaciones indicadas en el denominador, se añade y quita la cantidad  $\frac{h^2 \rho_x^2 B^2}{A^4 p_0^4} \text{sen}^4 \delta_0$  y se dividen ambos términos de la fracción, por la raíz de este valor que añadimos y quitamos, obtendremos;

$$t = \frac{B}{A p_0} \int_{\cos \delta_0}^{\cos \delta} \frac{\frac{d(\cos \delta)}{h \rho_x B}}{\frac{A^2 p_0^2}{\text{sen}^2 \delta_0} \sqrt{1 - \left( \frac{\cos \delta_0 - \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0 - \cos \delta}{\frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0} \right)^2}} =$$

$$= \frac{B}{A p_0} \left\{ \text{arc cos} \left( \frac{\cos \delta_0 - \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0 - \cos \delta}{\frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0} \right) - \pi \right\}$$

y de aquí,

$$\frac{\cos \delta_0 - \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0 - \cos \delta}{\frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0} = \cos \left( \frac{A p_0 t}{B} + \pi \right) = -\cos \frac{A p_0 t}{B}$$

que á su vez dá,

$$\cos \delta = \cos \delta_0 - \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen}^2 \delta_0 \left( 1 - \cos \frac{A p_0 t}{B} \right)$$

y siendo muy pequeño

$$\frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \text{sen} \delta_0 \left( 1 - \cos \frac{A p_0 t}{B} \right)$$

podemos suponer, que su coseno es igual á la unidad, representando él mismo, el valor de su seno: de este modo, el de

cos  $\delta$ , queda reducido al desarrollo del coseno de una suma, pudiendo admitirse que

$$\cos \delta = \cos \left( \delta_0 + \frac{h \varepsilon_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen} \delta_0 \left( 1 - \cos \frac{A p_0 t}{B} \right) \right)$$

de donde, finalmente obtendremos;

$$\delta = \delta_0 + \frac{h \varepsilon_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen} \delta_0 \left( 1 - \cos \frac{A p_0 t}{B} \right) \quad (8)$$

El valor de  $\delta$  que viene dado por una expresion trigonométrica, funcion del tiempo, tomará valores comprendidos entre ciertos límites que se repetirán periódicamente. Este periodo quedará determinado, por los intervalos de tiempo en que el factor

$$1 - \cos \frac{A p_0 t}{B},$$

se iguale á cero, ó sea

$$\cos \frac{A p_0 t}{B} = 1$$

condicion que será satisfecha, cuando

$$\frac{A p_0 t}{B} = 2 \pi$$

y por lo mismo,

$$t = \frac{B}{A p_0} 2 \pi = t_1$$

lo que nos dice, que si dividimos el tiempo total durante el cual se mueve el proyectil, en intervalos iguales á  $t_1$ , en cada uno de ellos, volverá  $\delta$  á tomar los mismos valores que entre  $t=0$  y  $t=t_1$ , suponiendo que  $\varepsilon_x$  sea constante.

En cada uno de estos intervalos,  $\delta$  será primero creciente, desde

$$\delta = \delta_0 \text{ para } t=0$$

hasta

$$\delta = \delta_0 + \frac{2 h \varepsilon_x B}{A^2 p_0^2} \sin \delta_0, \text{ para } t = \frac{B}{A p_0} \pi$$

y decreciente, desde el último valor hasta  $t=t_1$ ; por lo que el eje de figura, se aleja y aproxima, durante el movimiento del proyectil, á la tangente á la trayectoria.

Si derivamos la ecuacion (8) con relacion al tiempo, se obtiene

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{h \varepsilon_x}{A p_0} \sin \delta_0 \sin \frac{A p_0 t}{B} \quad (9)$$

valor de la velocidad angular, alrededor del eje del par, que es tambien una funcion periódica del tiempo, marcándose cada período, por intervalos de este iguales á  $\frac{B}{A p_0} 2\pi$ .

En cada intervalo,  $\frac{d\delta}{dt}$  es primero creciente desde 0 hasta  $\frac{h \varepsilon_x}{A p_0} \sin \delta_0$ , límites que corresponden respectivamente á  $t=0$  y  $t = \frac{B}{A p_0} \cdot \frac{\pi}{2}$ ; decrece desde aquí, hasta  $\frac{d\delta}{dt} = 0$ , con el valor de  $t = \frac{B}{A p_0} \pi$ ; continuando despues el decrecimiento hasta ser  $\frac{d\delta}{dt} = -\frac{h \varepsilon_x}{B} \sin \delta_0$ , para el valor  $t = \frac{B}{A p_0} \frac{3\pi}{2}$ , pasando á ser creciente hasta el valor  $\frac{d\delta}{dt} = 0$  con  $t = \frac{B}{A p_0} 2\pi$ , y volviendo á reproducirse los mismos períodos, si el tiempo continúa aumentando.

Si para simplificar, hacemos en la ecuacion (8)

$$\frac{h \varepsilon_x B}{A^2 p_0^2} \sin \delta_0 \left(1 - \cos \frac{A p_0 t}{B}\right) = H,$$

se reducirá á

:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 + H \\ \text{y} \quad \cos \delta &= \cos (\delta_0 + H) \\ \text{sen } \delta &= \text{sen } (\delta_0 + H) \end{aligned}$$

el valor de  $H$  es muy pequeño, lo que permite admitir que su coseno es igual á la unidad y que él mismo representa el valor del seno, por lo que

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos \delta_0 - \text{sen } \delta_0 H \\ \text{sen } \delta &= \text{sen } \delta_0 + \cos \delta_0 H \end{aligned}$$

valores que, sustituidos en la ecuacion (6) y despreciando los términos que en el numerador y denominador, contengan potencias de  $H$  superiores á la unidad, la convierten en

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{A p_0}{B} \cdot \frac{H \text{sen } \delta_0}{\text{sen}^2 \delta_0 \left( 1 + 2H \frac{\cos \delta_0}{\text{sen } \delta_0} \right)}$$

Si multiplicamos ambos términos de la fraccion, por

$$1 - 2H \frac{\cos \delta_0}{\text{sen } \delta_0}$$

resulta:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{A p_0}{B} \frac{H \text{sen } \delta_0 \left( 1 - 2H \frac{\cos \delta_0}{\text{sen } \delta_0} \right)}{\text{sen}^2 \delta_0 \left( 1 - 4H^2 \frac{\cos^2 \delta_0}{\text{sen}^2 \delta_0} \right)}$$

y despreciando las cantidades del orden indicado con respecto á  $H$ , se reduce á

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{A p_0}{B} \frac{H}{\text{sen } \delta_0}$$

que por la sustitucion del valor de  $H$ , dá;

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{h r_x}{A p_0} \left( 1 - \cos \frac{A p_0 t}{B} \right) \quad (10)$$

El signo de  $\frac{d\gamma}{dt}$  depende del de  $p_0$ : en la hipótesis de

que las estrias, impriman una rotacion positiva al eje del proyectil, girará este alrededor de la tangente, de derecha á izquierda, para un observador que lo mire desde la cúspide á la base.

Esta velocidad, lo mismo que la anterior, es una funcion periódica del tiempo, correspondiendo el período á un intervalo de éste, igual á  $\frac{B}{Ap_0} 2\pi$ , siendo el valor máximo,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2h\rho_x}{Ap_0}$$

correspondiente á  $t = \frac{B}{Ap_0} \pi$ , y el minimo  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$  para  $t = 0$ , que son los mismos valores, que anulando á  $\frac{d\delta}{dt}$ , producen respectivamente el máximo y mínimo de los de  $\delta$ .

Finalmente, la integracion de la ecuacion (10), entre los límites 0 y  $t$ , dará el valor del ángulo  $\gamma$ , que será;

$$\gamma = \frac{h\rho_x}{Ap_0} \left( t - \frac{B}{Ap_0} \operatorname{sen} \frac{Ap_0 t}{B} \right)$$

que puede escribirse,

$$\gamma = \frac{h\rho_x B}{A^2 p_0^2} \left( \frac{Ap_0 t}{B} - \operatorname{sen} \frac{Ap_0 t}{B} \right) \quad (11)$$

Si imaginamos un plano perpendicular á la tangente á la trayectoria, y determinásemos el movimiento del punto en que, la prolongacion del eje de figura, encuentra á dicho plano, referido este movimiento á un sistema polar, cuyo polo sea el punto en que el plano corta á la tangente, y el eje polar, la interseccion del referido plano con el vertical que pasa por ella, las ecuaciones que se obtendrian, serian las de una epicycloide ordinaria, deduciéndose de aquí, que el eje del proyectil, describe una superficie cónica alrededor de la tangente, cuya base la forman las epicycloides dichas, en el supuesto de que aquella permaneciese inmóvil.

En cuanto llevamos expuesto, ha sido preciso suponer la resistencia del aire  $\rho_x$  constante, para la posibilidad de verificar las integraciones hechas. Los límites entre los cuales varia el ángulo  $\delta$ , son como anteriormente hemos visto:

$$\delta_0 \quad \text{y} \quad \delta_0 + \frac{2 h \rho_x B \operatorname{sen} \delta_0}{A^2 p_0^2},$$

siendo el segundo término de esta última expresion, el límite del crecimiento del ángulo  $\delta$ . Haciendo aplicacion á un proyectil, se encuentra que el valor de esta cantidad, solo es una pequeña parte del de  $\delta_0$ , por lo que, para el empleo sucesivo del valor de  $\delta$ , no se cometerá gran error admitiendo que el eje del proyectil, describa una superficie cónica de base circular, cuyas generatrices, formen con el eje, un ángulo igual á la media aritmética de los anteriores límites, ó sea

$$\delta = \delta_0 + \frac{h \rho_x B \operatorname{sen} \delta_0}{A^2 p_0^2}$$

Resultando para  $\cos \delta$  y  $\operatorname{sen} \delta$ , despues de admitir que el coseno del segundo sumando, es igual á la unidad y que él mismo representa el valor de su seno,

$$\cos \delta = \cos \delta_0 - \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen}^2 \delta_0$$

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \delta_0 + \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \operatorname{sen} \delta_0 \cos \delta_0$$

valores que, sustituidos en la fórmula (6), despues de multiplicar los dos términos de la fraccion que resulta, por

$$4 - 2 \frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2} \cos \delta_0$$

y despreciar en cada uno de ellos, la potencia superior á la primera, de la cantidad  $\frac{h \rho_x B}{A^2 p_0^2}$ , nos dará:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{h \rho_x}{A p_0} = \frac{E}{A p_0 \operatorname{sen} \delta} \quad (12)$$

En el caso en que  $\delta$  varíe entre límites más extensos, no puede admitirse la relación § (94)

$$\frac{Y_1}{X} d = h \operatorname{sen} \delta;$$

pero construida la curva de los valores del primer miembro, para ángulos  $\delta$ , desde 0 hasta  $20^\circ$ , que puede considerarse como un límite del cual no se pasa, tendremos por ecuación de ella

$$\frac{Y}{X} d = l \operatorname{sen} \delta \cos \delta,$$

bastando en este caso, para obtener el valor de  $\frac{d\gamma}{dt}$ , sustituir por E su valor actual,  $l \bar{e}_x \operatorname{sen} \delta \cos \delta$ .

Si hacemos  $A = \bar{c} \frac{P}{g} R$ , siendo  $\bar{c}$  un coeficiente dependiente de la forma del proyectil, y cuyo valor fácilmente se determina, conocido que sea su momento de inercia A, y llamamos  $\bar{p} R$  al paso de las rayas de la pieza, se verificará;

$$p_0 = \frac{2 \pi V}{\bar{p} R}$$

y recordando además que  $\frac{p_x}{P} = f(v)$ , se tendrá, sustituyendo en la ecuación (42), para el caso de pequeños ángulos  $\delta$ ,

$$d\gamma = \frac{h \bar{p} g}{2 \pi \bar{c} V} f(v) dt \quad (13)$$

y para cuando aquellos sean grandes,

$$d\gamma = \frac{l \bar{p} g}{2 \pi \bar{c} V} f(v) \cos \delta dt \quad (14)$$

fórmulas que nos dán el crecimiento del ángulo  $\gamma$ , en la hipótesis hecha de que la tangente permanezca inmóvil.

**97. Ecuaciones del movimiento de rotación del proyectil.**—Las investigaciones anteriores, nos per-

miten ya determinar las ecuaciones del movimiento de rotación del proyectil. Admitamos para ello, que la trayectoria se encuentra situada en el plano vertical de tiro, y sean (fig. 30)  $OT$  y  $OT'$ , dos posiciones consecutivas de la tangente, así como,  $OA$  y  $OA'$  las correspondientes del eje de figura del proyectil; describiendo una esfera de radio unidad, se verifica

$$TT' = NT' - NT = -d\varphi$$

representando por  $\varphi$ , el ángulo que la tangente forma con la horizontal, y

$$A'T'T = \gamma + d\gamma$$

por ser  $\gamma = ATN$  y haber recibido al pasar la tangente de la posición  $OT$  á la  $OT'$ , un incremento  $d\gamma$ .

Del triángulo esférico  $A'T'T$  se obtiene,

$$\cos A'T' = \cos A'T \cos TT' + \sin A'T \sin TT' \cos A'TT'$$

$$y \quad \frac{\sin A'TT'}{\sin A'TT'} = \frac{\sin A'T}{\sin A'T'}$$

y conservando las notaciones que hasta aquí hemos empleado, se verifica;

$$A'T = \delta, A'T' = \delta + d\delta, TT' = -d\varphi \quad y \quad A'TT' = \pi - \gamma - d\gamma'$$

siendo  $d\gamma'$ , el incremento  $A'TA$  que recibiría el ángulo  $\gamma$ , si tangente permaneciese inmóvil; valores, que sustituidos en las últimas relaciones, darán

$$\cos(\delta + d\delta) = \cos \delta \cos(d\varphi) + \sin \delta \sin(d\varphi) \cos(\gamma + d\gamma')$$

Desarrollando el primer miembro, y siendo realmente muy pequeño el crecimiento del ángulo  $\delta$  en el instante que se considera, podremos admitir,  $\cos(d\delta) = 1$  y  $\sin(d\delta) = d\delta$ , lo que también se puede hacer con respecto á  $d\varphi$ , porque siendo la trayectoria esencialmente continua, en un tiempo infinitamente pequeño, será despreciable el incremento que  $\varphi$  reciba: por estas razones, después de despreciar los infinitamente pequeños de segundo orden tendremos

$$d\delta = -\cos \gamma d\varphi \quad (15)$$

Haciendo las mismas sustituciones, en la segunda de las relaciones deducidas de los triángulos esféricos se obtiene;

$$\frac{\text{sen } (\gamma + d\gamma)}{\text{sen } (\gamma + d\gamma')} = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } (\delta + d\delta)}$$

Admitiendo que

$$\begin{aligned} \cos(d\gamma) &= 1, \quad \text{sen}(d\gamma) = d\gamma, \quad \cos(d\gamma') = 1, \quad \text{sen}(d\gamma') = d\gamma', \\ \cos(d\delta) &= 1 \quad \text{y} \quad \text{sen}(d\delta) = d\delta \end{aligned}$$

se tendrá;

$$\text{sen } \gamma + \cos \gamma d\gamma = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \delta + \cos \delta d\delta} (\text{sen } \gamma + \cos \gamma d\gamma')$$

y multiplicando ambos términos de la fracción del segundo miembro, por  $(\text{sen } \delta - \cos \delta d\delta)$  y despreciando en el denominador, el término infinitamente pequeño de segundo orden, se tiene;

$$\text{sen } \gamma + \cos \gamma d\gamma = \left(1 - \frac{d\delta}{\text{tang } \delta}\right) (\text{sen } \gamma + \cos \gamma d\gamma')$$

de donde podemos despejar  $d\gamma$ . Despues de despreciar, como anteriormente hemos hecho, los infinitamente pequeños de segundo orden, resultará;

$$d\gamma = d\gamma' - \frac{\text{tang } \gamma}{\text{tang } \delta} d\delta \quad (16)$$

En la suposicion hecha, de considerar á la trayectoria situada en el plano vertical de tiro,

$$\frac{v^2}{r_1} = g \cos \varphi,$$

será la proyeccion de la aceleracion segun la normal (\*), y como

$$r_1 = -\frac{v dt}{d\varphi}, \quad \text{será} \quad \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = -\frac{g}{v} dt$$

y admitiendo, como al tratar del movimiento de los proyec-

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 92.

tiles esféricos, que se verifica la relacion  $\alpha \cos \varphi = 1$ , en toda la extension del arco que se considere,

$$d\varphi = -\frac{g}{\alpha v} dt$$

por lo que la fórmula (15), se convierte en

$$d\delta = \frac{g}{\alpha v} \cos \gamma dt$$

valor que, sustituido en la ecuacion (16) y poniendo en ella por  $d\gamma'$  sus dos valores (ecuaciones 13 y 14) tendremos, para el caso de pequeños ángulos  $\delta$ ;

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \frac{1}{\cos \gamma} \left( \frac{h \bar{p} \alpha}{2 \pi c V} v f(v) - \frac{\sin \gamma}{\tan \delta} \right) d\delta \\ \frac{d\delta}{\cos \gamma} &= \frac{g}{\alpha v} dt \end{aligned} \right\} (17)$$

y para grandes ángulos;

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \frac{1}{\cos \gamma} \left( \frac{l \bar{p} \alpha}{2 \pi c V} v f(v) \cos \delta - \frac{\sin \gamma}{\tan \delta} \right) d\delta \\ \frac{d\delta}{\cos \gamma} &= \frac{g}{\alpha v} dt \end{aligned} \right\} (18)$$

Empezando por las ecuaciones (17), correspondientes al caso de pequeños ángulos  $\delta$ , ó sea en el tiro directo, en el que la velocidad durante toda la trayectoria no llega á su valor mínimo, haremos uso para su integracion, del método empleado en las ecuaciones diferenciales de primer orden y lineales con dos variables, cuya forma es

$$\frac{dy}{dx} = Xy + X_1$$

que dá

$$y = e^{\int X dx} \left( \int (e^{-\int X dx} \times X_1 dx) + C \right) \quad (19)$$

Si hacemos

$$q = \frac{h \bar{p} \alpha}{2 \pi c V} (v f(v))_m \quad (20)$$

representando el valor medio que tome  $\frac{h \bar{p} \alpha}{2 \pi c V} v f(v)$ , para los diferentes de  $v$  y  $f(v)$ , correspondientes al intervalo que se considera. Este intervalo debe ser tal, que  $\cos \gamma$ , conserve constantemente el mismo signo, sin cuya condicion no serian integrables las ecuaciones. La primera de las ecuaciones (17), quedará preparada para la integracion, bajo la forma

$$\frac{d(\operatorname{sen} \gamma)}{d \delta} = q - \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{tang} \delta}$$

Si en la ecuacion (19) hacemos

$$y = \operatorname{sen} \gamma, \quad x = \delta, \quad X = -\frac{1}{\operatorname{tang} \delta} \quad \text{y} \quad X_1 = q,$$

se tendrá:

$$\int X dx = -\int \frac{d \delta}{\operatorname{tang} \delta} = -\operatorname{Lg}(\operatorname{sen} \delta)$$

$$e^{\int X dx} = \frac{1}{e^{-\int X dx}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \delta}$$

$$\int e^{-\int X dx} \times X_1 dx = q \int \operatorname{sen} \delta d \delta = -q \cos \delta$$

y por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} (-q \cos \delta + C).$$

Teniendo presente que

$$\operatorname{sen} \delta = \delta - \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - \dots$$

y despreciando en ambos desarrollos, los términos que contienen potencias de  $\delta$  superiores á la segunda, se reducen á

$$\text{sen } \delta = \delta$$

$$\text{cos } \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

valores que substituidos en el de  $\text{sen } \gamma$ , nos conducen á

$$\text{sen } \gamma = \frac{1}{\delta} \left( -q + \frac{q}{2} \delta^2 + C \right)$$

en donde, si llamamos  $\delta_1$  y  $\gamma_1$  los valores iniciales, correspondientes al tiempo  $t_1$ , á partir del que se cuenta el intervalo considerado, tendremos;

$$C = \delta_1 \text{ sen } \gamma_1 - \left( \frac{q \delta_1^2}{2} - q \right)$$

cuyo valor substituido en la penúltima ecuacion, y pasando todos los términos al primer miembro, nos dá

$$q \delta^2 - 2 \text{ sen } \gamma \delta + 2 \delta_1 \left( \text{sen } \gamma_1 - \frac{q}{2} \delta_1 \right) = 0$$

y de aquí,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{q} \left( \text{sen } \gamma \pm \sqrt{\text{sen}^2 \gamma - 2q \delta_1 \left( \text{sen } \gamma_1 - \frac{q}{2} \delta_1 \right)} \right) = \\ &= \frac{1}{q} \left( \text{sen } \gamma \pm \sqrt{1 - q \delta_1 (2 \text{ sen } \gamma_1 - q \delta_1) - \text{cos}^2 \gamma} \right) \quad (21) \end{aligned}$$

expresion que, diferenciada con respecto á  $\gamma$ , será

$$d\delta = \frac{1}{q} \left( \text{cos } \gamma d\gamma \pm \frac{\text{sen } \gamma \text{ cos } \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - q \delta_1 (2 \text{ sen } \gamma_1 - q \delta_1) - \text{cos}^2 \gamma}} \right) \quad (22)$$

resultando, si substituímos por  $\frac{d\delta}{\text{cos } \gamma}$ , su valor deducido de la segunda ecuacion de las (17), poniendo en ella en vez de la variable  $v$ , su valor medio  $(v)_m$

$$d\gamma \pm \frac{\operatorname{sen} \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\operatorname{sen} \gamma_1 - q\delta_1) - \cos^2 \gamma}} = \frac{gq}{\alpha(v)_m} dt$$

ó bien

$$d\gamma \mp \frac{d(\cos \gamma)}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\operatorname{sen} \gamma_1 - q\delta_1) - \cos^2 \gamma}} = \frac{h\bar{p}g(vf(v))_m dt}{2\pi\bar{c}V(v)_m} \quad (23)$$

despues de haber puesto por  $q$  su valor, (ecuacion 20).

Suponiendo que la resistencia del aire, sea proporcional á la potencia  $n$  de la velocidad,

$$f(v) = \frac{A\pi R^2 v^n}{P} = \frac{v^n}{2g c^{n-1}} \quad (24)$$

en donde

$$c^{n-1} = \frac{P}{2A\pi R^2 g}$$

En la hipótesis establecida, de estar la trayectoria situada en el plano vertical de tiro, llamando  $v_1$  la velocidad del movimiento proyectado, segun el eje de las  $x$ , se verifica

$$\frac{dv_1}{dt} = -gf(v) \cos \varphi$$

y recordando que  $f(v)$  puede sustituirse por  $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha \cos \varphi}$ , tendremos;

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{g}{\alpha} f(\alpha v_1) = -\frac{\alpha^{(n-1)}}{2c^{(n-1)}} v_1^n$$

y de aquí,

$$\frac{dv_1}{v_1^n} = -\frac{\alpha^{(n-1)}}{2c^{(n-1)}} dt$$

expresion que integrada, dá

$$-\frac{1}{n-1} v_1^{-n+1} = -\frac{\alpha^{(n-1)}}{2c^{(n-1)}} t + C$$

A los tiempos  $t=0$  y  $t=t$ , corresponden  $v_1=V_1$  y  $v_1=v_1$ , por lo que,

$$C = -\frac{1}{n-1} V_1^{-n+1}$$

y por consiguiente,

$$-\frac{1}{n-1} v_1^{-(n-1)} = -\frac{\alpha^{(n-1)}}{2c^{(n-1)}} t - \frac{1}{n-1} V_1^{-(n-1)}$$

que puede escribirse,

$$1 = \left( \frac{\alpha^{(n-1)}}{2c^{(n-1)}} (n-1)t + \frac{1}{V_1^{(n-1)}} \right) v_1^{(n-1)}$$

y multiplicando ambos miembros por  $V_1^{(n-1)}$ , resulta;

$$V_1^{(n-1)} = \left( \frac{n-1}{2} \left( \frac{\alpha V_1}{c} \right)^{(n-1)} t + 1 \right) v_1^{(n-1)}$$

de donde,

$$\alpha v_1 = \frac{\alpha V_1}{\left( 1 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{\alpha V_1}{c} \right)^{(n-1)} t \right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

y en esta, puede substituirse por  $v$ , el producto  $\alpha v_1$ , (\*) por lo que, (ecuacion 24)

$$f(v) = f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha V_1)^n}{2g c^{(n-1)}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{\alpha V_1}{c} \right)^{(n-1)} t \right)^{\frac{n}{n-1}}} \quad (25)$$

y

$$vf(v) = \alpha v_1 \cdot f(\alpha v_1) = \frac{(\alpha V_1)^{(n+1)}}{2g c^{(n-1)}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{\alpha V_1}{c} \right)^{(n-1)} t \right)^{\frac{n+1}{n-1}}} \quad (26)$$

puediendo substituir á los valores medios  $(v)_m$ ,  $(vf(v))_m$  y  $(f(v))_m$ ,

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa.

los  $(\alpha v_1)$ ,  $\alpha v_1 f(\alpha v_1)$  y  $f(\alpha v_1)$ , correspondientes al tiempo  $\frac{t+t_1}{2}$ , medio aritmético de los límites  $t_1$  y  $t$ .

De la ecuacion (23) se deduce;

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\frac{h\bar{p}g}{2\pi cV} (f(v))_m}{1 \pm \frac{\text{sen } \gamma}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1) - \cos^2 \gamma}}}$$

en la que el radical debe tener el mismo signo, que el que se asigne al que entra en la expresion de  $\delta$ .

Integrando la última expresion, entre los límites  $t$  y  $t_1$ , y sus correspondientes  $\gamma$  y  $\gamma_1$ , se tiene para el signo positivo del radical,

$$\gamma - \gamma_1 - \arccos \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1)}} - \arccos \frac{\cos \gamma_1}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1)}} = \frac{h\bar{p}g}{2\pi cV} f(v)_m (t - t_1) \quad (27)$$

y para el negativo,

$$\gamma - \gamma_1 + \arcsen \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1)}} - \arcsen \frac{\cos \gamma_1}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1)}} = \frac{h\bar{p}g}{2\pi cV} f(v)_m (t - t_1) \quad (28)$$

**98.** La fórmula (ecuaciones 47 y 48)

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{g}{\alpha v} \cos \gamma,$$

hace ver, que el ángulo  $\delta$ , es creciente en todo el intervalo de tiempo en que  $\cos \gamma$  permanezca positivo, siendo por el contrario decreciente, mientras sea negativo, por lo que en el periodo desde  $t_1=0$ , hasta el tiempo en que se verifique  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , el eje de figura se aleja constantemente de la tangente á la

trayectoria, obtendremos su valor, tomando el signo positivo de la fórmula (21), porque solo de este modo, resulta ser  $\delta$  creciente con  $\gamma$  en todo el intervalo considerado. Para el valor  $t=t_1$ , correspondientes á  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta$  tomará otro expresado en general por

$$\delta = \delta \left( \frac{\pi}{2}, 1 \right)$$

que se obtendria haciendo  $t=t_1$  en dicha fórmula.

A partir de este instante, en otro intervalo desde  $t_1$  á  $t_2$ , durante el cual sea  $\gamma$  menor que  $\pi$ , pero mayor que  $\frac{\pi}{2}$ , su coseno será constantemente negativo y  $\delta$  disminuirá. El signo que corresponde al radical, seguirá sin embargo siendo el positivo, porque de lo contrario, no se verificaria que  $\frac{d\delta}{dt}$  fuese negativo: en efecto, siendo

$$\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1) - \cos^2\gamma} < \text{sen}\gamma$$

resulta que

$$\frac{\text{sen}\gamma \cos\gamma}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1) - \cos^2\gamma}} > \cos\gamma$$

y por lo tanto, la expresion (22) de  $d\delta$ , no seria negativa mientras no se tome el signo + para el radical; esta circunstancia, tambien nos indica el signo que debe asignarse al

radical que entra en  $\frac{d\gamma}{dt}$ ; teniendo por consiguiente,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\frac{h\bar{p}g}{2\pi cV} (f(v))_m}{1 + \frac{\text{sen}\gamma}{\sqrt{1 - q\delta_1(2\text{sen}\gamma_1 - q\delta_1) - \cos^2\gamma}}}$$

en cuya expresion es preciso sustituir por  $\delta_1$  y  $\gamma_1$ , los valores

iniciales de este intervalo,  $\delta_1 = \delta\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  y  $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ , así como por  $(f(v))_m$ , el valor medio correspondiente al intervalo total en que,  $\cos \gamma$  no cambie de signo.

Mientras el radical del denominador sea real, siendo positiva la anterior expresión, indica que  $\gamma$  es creciente, y su valor límite

$$\gamma = \gamma_2 < \pi,$$

se obtendría, igualando á cero la cantidad sub-radical.

A partir de  $\gamma_2$ , vuelve el eje hácia atrás, creciendo de nuevo el ángulo  $\delta$ , hasta un valor  $\delta = \delta\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$  correspondiente á  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , decreciendo desde aquí, hasta otro nuevo  $\gamma_3$ , y reproduciéndose el mismo fenómeno estudiado.

99. De las anteriores consideraciones resulta; que el eje de figura, efectúa alrededor de la tangente una serie de oscilaciones, cuya amplitud es variable de una á otra y siempre menor que la semi-revolucion, presentando para  $\delta$  un valor máximo, cada vez que  $\gamma$  pasa por  $90^\circ$ .

Con objeto de simplificar los cálculos que siguen, sustituiremos cada una de estas oscilaciones, por otra que llamaremos media y cuya amplitud, sea constantemente igual á  $\pi - 2\gamma_1$ , es decir, que al principio de cada oscilacion, sea  $\gamma = \gamma_1$ , y  $\gamma = \pi - \gamma_1$  al final.

El ángulo  $\gamma_1$ , lo determina Mayewsky siguiendo detalladamente la discusion de los valores de  $\gamma$ , segun la marcha que hemos indicado, encontrando aproximadamente que

$$\text{sen } \gamma_1 = \sqrt{\frac{8(n+1)\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi}} \quad (29)$$

de modo, que en cada semi-oscilacion media, variando  $\gamma$  entre  $\gamma_1$  y  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\text{sen } \gamma$  variará entre el último valor hallado y la unidad.

De la misma discusion deduce, que el valor de  $\delta$  en el origen de cada oscilacion ascendente ó descendente, tiene por expresion

$$\delta_i = \frac{1}{q} \operatorname{sen} \gamma_i$$

y como ya hemos dicho, que en todo el movimiento descendente del eje de figura, debe afectarse al radical del signo positivo; el valor de  $\delta$  se obtendrá, sustituyendo en la fórmula (21) por  $\delta_i$ ,  $\frac{1}{q} \operatorname{sen} \gamma_i$  y por  $\operatorname{sen} \gamma_i$ ,  $\operatorname{sen} \gamma_i$  deduciéndose asi, para el movimiento descendente,

$$\delta = \frac{1}{q} \left( \operatorname{sen} \gamma + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \gamma_i} \right) \quad (30)$$

y para el ascendente,

$$\delta = \frac{1}{q} \left( \operatorname{sen} \gamma - \sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \gamma_i} \right) \quad (31)$$

en las que, sustituyendo el valor de  $\operatorname{sen} \gamma_i$  (fórmula 29) resulta;

$$\delta = \frac{1}{q} \left( \operatorname{sen} \gamma + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma - 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi}} \right) \quad (32)$$

$$\delta = \frac{1}{q} \left( \operatorname{sen} \gamma - \sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma - 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi}} \right) \quad (33)$$

teniendo en ellas  $q$ , el valor dado por la expresion (20), despues de sustituir por  $(vf(v))_m$ , el que esta última cantidad toma en toda la extension de la trayectoria, y que ahora nos proponemos determinar.

Para los diferentes valores de  $v$ , el producto  $vf(v)$  toma el expresado por la fórmula (26), dando á  $t$ , todos los comprendidos entre 0 y el tiempo total del movimiento del proyectil; siendo  $(vf(v))_m$  el medio de todos los que  $vf(v)$  tiene en el mismo intervalo, quedará determinado, integrando entre

los límites 0 y  $t$  la expresión indicada, y dividiendo el resultado por  $t$ , por lo que,

$$(vf(v))_m = \frac{(zV_1)^{n+1}}{2gc^{n-1}} \times \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt}{\left(1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{zV_1}{c}\right)^{n-1} t\right)^{\frac{n+1}{n-1}}} =$$

$$\frac{(zV_1)^{n+1}}{2gc^{n-1}} \times \frac{1}{t} \times \left(\frac{c}{zV_1}\right)^{n-1} \int_0^t \frac{2}{n-1} \times \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{zV_1}{c}\right)^{n-1} dt}{\left(1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{zV_1}{c}\right)^{n-1} t\right)^{\frac{n+1}{n-1}}} =$$

$$\frac{(zV_1)^2}{2gt} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{zV_1}{c}\right)^{n-1} t\right)^{\frac{2}{n-1}}}\right) \quad (34)$$

Los valores máximos de  $\delta$ , correspondientes al paso de  $\gamma$  por el valor de  $90^\circ$ , tienen por expresión, según lo deduce Mayewsky, para el movimiento descendente,

$$\delta = \frac{1}{q} (1 + \cos \gamma_t)$$

y para el ascendente,

$$\delta = \frac{1}{q} (1 - \cos \gamma_t)$$

en donde, sustituyendo por  $\cos \gamma_t$  su valor en función del seno, dado por la fórmula (29), resulta;

$$\delta = \frac{1}{q} \left(2 - \frac{1}{2}(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi}\right) \quad (35)$$

$$\delta = \frac{1}{q} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \quad (36)$$

y la duración media, correspondiente á dos valores sucesivos

de  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , es

$$T = \frac{2\pi^2 \bar{c} V}{h \bar{p} g(f(v))_m}$$

en la que el valor de  $(f(v))_m$ , se deduce como anteriormente, integrando la expresion (25) entre los límites 0 y  $t$ , y dividiendo por  $t$ , con lo que se obtiene

$$(f(v))_m = \frac{\alpha V_1}{gt} \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{\alpha V_1}{c} t \right)^{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}}} \right) \quad (37)$$

En el caso que  $\delta$  pueda recibir valores comprendidos entre límites muy estensos, necesitamos hacer uso de las ecuaciones (48), para lo que, análogamente á lo ya hecho, dividiremos el tiempo total, en intervalos tales que  $\cos \gamma$ ,  $\sin \gamma$  y  $\tan \delta$ , no cambien de signo. La primera de dichas ecuaciones se convierte en

$$\frac{d(\sin \gamma)}{d\delta} = q \cos \delta - \frac{\sin \gamma}{\tan \delta}$$

despues de hacer

$$q = \frac{l \bar{p} \alpha}{2\pi \bar{c} V} (v f(v))_m \quad (38)$$

è integrando aquella expresion, del mismo modo que se hizo cuando  $\delta$  era pequeño, resulta;

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sin \delta} \left( \frac{q}{2} \sin^2 \delta + C \right)$$

y limitada,

$$\sin \delta \sin \gamma = \frac{q}{2} \sin^2 \delta + \sin \delta_1 \left( \sin \gamma_1 - \frac{q}{2} \sin \delta_1 \right)$$

ó bien,

$$\sin \delta = \frac{1}{q} \left( \sin \gamma \pm \sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1) - \cos^2 \gamma} \right) \quad (39)$$

ecuacion que no difiere de la (24), mas que en estar  $\delta$  y  $\delta_1$  reemplazadas respectivamente por  $\sin \delta$  y  $\sin \delta_1$ .

Correspondiendo el caso que consideramos á un tiro curvo,

pueden las cargas ser grandes ó pequeñas, por lo que  $\frac{q}{2}$  será  $\geq 1$ : si es mayor, diferenciando la ecuacion (39), se obtiene

$$\cos \delta d\delta = \frac{1}{q} \left( \cos \gamma d\gamma \pm \frac{\sin \gamma \cos \gamma d\gamma}{\sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1) - \cos^2 \gamma}} \right)$$

cuyo valor, substituido en la ecuacion

$$\frac{d\delta}{\cos \gamma} = \frac{g}{(\alpha v)_m} dt,$$

dará,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \delta} \left( d\gamma \mp \frac{d(\cos \gamma)}{\sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1) - \cos^2 \gamma}} \right) &= \\ &= \frac{l \bar{p} g}{2 \pi \bar{c} V} (f(v))_m dt \end{aligned}$$

Para integrar esta expresion, asignaremos á  $\cos \delta$  un valor  $(\cos \delta)_m$ , medio de los que recibe en todo el intervalo de  $t_1$  á  $t$ , correspondiente á  $\gamma_1$ ,  $\gamma$  y  $\delta_1$ ,  $\delta$ , obteniendo así,

$$\begin{aligned} &(\gamma - \gamma_1) + \arccos \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1)}} - \\ - \arccos \frac{\cos \gamma_1}{\sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1)}} &= \frac{l \bar{p} g f(v)_m (\cos \delta)_m}{2 \pi \bar{c} V} \times (t - t_1) \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\gamma - \gamma_1) + \arcsen \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1)}} - \\ - \arcsen \frac{\cos \gamma_1}{\sqrt{1 - q \sin \delta_1 (2 \sin \gamma_1 - q \sin \delta_1)}} &= \frac{l \bar{p} g f(v)_m (\cos \delta)_m}{2 \pi \bar{c} V} \times (t - t_1) \quad (41) \end{aligned}$$

Una discusion análoga á la del caso anterior haria ver, que el eje de figura hace una serie de oscilaciones, que pueden substituirse por una media, siendo las fórmulas que la caracterizan,

$$\operatorname{sen} \gamma_l = \sqrt{\frac{8(n+1)\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi}} \quad (42)$$

$$\cos \gamma_l = 1 - \frac{4}{q} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi} \quad (43)$$

y que los ángulos  $\delta$ , tienen por valor respectivamente en el movimiento ascendente y descendente,

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{4}{q} \left( \operatorname{sen} \gamma - \sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \gamma_l} \right) \quad (44)$$

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{4}{q} \left( \operatorname{sen} \gamma + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \gamma_l} \right) \quad (45)$$

conservando  $(vf(v))_m$  y  $f(v)_m$ , los mismos de las expresiones (34) y (37).

Los valores de  $\operatorname{sen} \delta_l$  y  $\cos \delta_l$ , correspondientes á los ángulos límites  $\gamma = \gamma_l$ , se obtendrán introduciendo esta condición en las últimas fórmulas, lo que produce,

$$\operatorname{sen} \delta_l = \frac{4}{q} \sqrt{\frac{8(n+1)\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi}} \quad (46)$$

$$\cos \delta_l = 1 - \frac{4}{q^2} \frac{(n+1)\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi} \quad (47)$$

y los valores máximos correspondientes á  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  serán para el movimiento ascendente y descendente, respectivamente

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \frac{4}{q} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi} \\ \cos \delta &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \frac{4}{q} \left( 2 - \frac{4}{q} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \\ \cos \delta &= \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + \frac{8}{q^2} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l\bar{p} \alpha \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Cuando  $\frac{g}{2} \leq 1$ , la fórmula (39) dá para un intervalo contado á partir de  $t=0$ , en el que  $\delta$  y  $\gamma$  pueden recibir valores comprendidos entre 0 y  $\delta$  y entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$  respectivamente,

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{2}{g} \operatorname{sen} \gamma$$

y de aquí

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \delta}$$

para  $\frac{g}{2} = 1$  resulta  $\delta = \gamma$  y para  $\frac{g}{2} < 1$ ,  $\delta < \gamma$ .

Sustituyendo el valor obtenido, en la segunda de las ecuaciones (18), resulta;

$$\int_0^\delta \frac{d\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \delta}} = \frac{g}{(\alpha v)_m} t$$

integral elíptica cuya amplitud es  $\delta$  y su módulo  $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{g}{2}$ ; su valor se determina por la tabla núm. (4) conociendo el de  $\frac{g}{(\alpha v)_m} t$  y el de  $\theta$ .

En este caso, los valores de  $\delta$  y  $\gamma$  son siempre menores que  $\frac{\pi}{2}$ , no habiendo por consiguiente oscilacion.

**100. Movimiento de traslacion** — Suponiendo concentrada toda la masa del proyectil en su centro de gravedad y actuando en él todas las fuerzas ya indicadas, investiguemos su movimiento: para ello, lo referiremos á un sistema coordenado rectangular cuyo origen esté en dicho punto, siendo el eje de las  $x$ , la horizontal que pasando por él, esté contenida en el plano vertical de la tangente, en su posición primitiva, el de las  $y$  vertical, y perpendicular al

plano  $xy$  el de las  $z$ : sea  $O$  (fig. 31), la posición que al cabo de un cierto tiempo, ocupa el centro de gravedad y  $xyz$ , un sistema coordenado cuyos ejes, sean paralelos á los anteriores;  $OT$  la dirección de la tangente, que forma con el plano horizontal el ángulo  $\varphi$ ;  $OA$  la posición del eje de figura en el instante que se considera, y  $\delta$  el ángulo formado por ambas líneas.

Describiendo una esfera de radio unidad, con su centro en el origen del sistema, y recordando que las únicas fuerzas que se toman en consideración son, la resistencia normal del aire y la gravedad, las descompondremos en otras tres, dirigidas según los ejes coordenados; llamando  $\rho_t$  y  $\rho_n$  á las componentes tangencial y normal de la resistencia del aire, se tiene;

$$P_x \rho_t = -\rho_t \cos T x \qquad P_x \rho_n = \rho_n \cos N x$$

$$P_y \rho_t = -\rho_t \cos T y \qquad P_y \rho_n = \rho_n \cos N y$$

$$P_z \rho_t = -\rho_t \cos T z \qquad P_z \rho_n = \rho_n \cos N z$$

De los triángulos  $aTx$  y  $aTz$ , se deduce

$$\cos T x = \cos a T \cos a x$$

$$\cos T z = \cos a T \cos a z$$

siendo  $aT$ , la medida del ángulo  $\varphi$ . Designando  $\omega$  el ángulo  $a$  y  $x$ , cuya medida es el arco  $ax$ , resulta  $az = \frac{\pi}{2} - \omega$  y por ello

$$\cos T x = \cos \varphi \cos \omega$$

$$\cos T z = \cos \varphi \sin \omega$$

y puesto que  $Ty = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , tendremos  $\cos Ty = \sin \varphi$  y por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} P_x \rho_t &= -\rho_t \cos \varphi \cos \omega \\ P_y \rho_t &= -\rho_t \sin \varphi \\ P_z \rho_t &= -\rho_t \cos \varphi \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

El triángulo,  $NTx$  dá á su vez la relacion

$$\cos Nx = \operatorname{sen} Tx \cos NTx$$

y representando por  $\gamma$ , el ángulo formado con el plano vertical de la tangente, por el que conteniendo á esta línea pasa además por el eje de figura, se tiene;

$$NTx = \gamma + yTx$$

de donde,

$$\cos Nx = \operatorname{sen} Tx \cos(\gamma + yTx) = \operatorname{sen} Tx (\cos \gamma \cos yTx - \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} yTx)$$

Del triángulo  $yTx$  se deduce,

$$\cos yx = 0 = \cos yT \cos Tx + \operatorname{sen} yT \operatorname{sen} Tx \cos yTx$$

y como  $yT = \frac{\pi}{2} - \varphi$  y  $\cos Tx = \cos \varphi \cos \omega$ , substituyendo estos valores en la última expresion, se convierte en

$$\cos yTx = - \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \omega}{\operatorname{sen} Tx}$$

El mismo triángulo dá tambien,

$$\frac{\operatorname{sen} Tx}{\operatorname{sen} yx} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} yTx}$$

y siendo  $yx = \frac{\pi}{2}$ , se tiene;

$$\operatorname{sen} Tx \operatorname{sen} yTx = \operatorname{sen} \omega$$

expresion que, substituida en union del valor de  $\cos yTx$ , en el ya hallado de  $\cos Nx$ , dará

$$\cos Nx = - (\cos \gamma \operatorname{sen} \varphi \cos \omega + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \omega)$$

Del mismo modo y teniendo presente que por ser  $ON$  normal á  $OT$ , el arco  $NT$  tiene por valor  $\frac{\pi}{2}$ , resulta del triángulo  $NyT$ ,

$$\cos Ny = \operatorname{sen} yT \cos NTy = \cos \varphi \cos \gamma$$

y del  $NTz$

$$\cos Nz = \cos NT \cos zT + \sin NT \sin zT \cos NTz = \sin Tz \cos NTz = \sin Tz \cos (yTz - \gamma) = \sin Tz (\cos yTz \cos \gamma + \sin yTz \sin \gamma)$$

asimismo, del  $yzT$  se obtiene

$$\cos yz = 0 = \cos yT \cos Tz + \sin yT \sin Tz \cos yTz$$

y siendo  $\cos Tz = \cos \varphi \sin \omega$ , se deduce de esta expresion

$$\cos yTz = - \frac{\sin \varphi \sin \omega}{\sin Tz}$$

obteniéndose además del triángulo  $zTa$

$$\sin za = \cos \omega = \sin Tz \sin yTz$$

cuyos valores sustituidos en el de  $\cos Nz$ , dan

$$\cos Nz = - (\cos \gamma \sin \varphi \sin \omega - \sin \gamma \cos \omega)$$

y por último, las expresiones de las componentes de  $\rho_n$ , por la sustitucion de los valores de  $\cos Nx$ ,  $\cos Ny$  y  $\cos Nz$ , se convertirán en

$$\left. \begin{aligned} P_x \rho_n &= - \rho_n \cos \gamma \sin \varphi \cos \omega - \rho_n \sin \gamma \sin \omega \\ P_y \rho_n &= \rho_n \cos \varphi \cos \gamma \\ P_z \rho_n &= - \rho_n \cos \gamma \sin \varphi \sin \omega + \rho_n \sin \gamma \cos \omega \end{aligned} \right\} (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2), obtendremos las componentes de la resistencia del aire segun los ejes coordenados, sumando las de  $\rho_t$  y  $\rho_n$ , sobre cada uno de ellos, siendo así

$$\rho_x = -\rho_t \cos \varphi \cos \omega - \rho_n \cos \gamma \cos \omega \sin \varphi - \rho_n \sin \gamma \sin \omega$$

$$\rho_y = -\rho_t \sin \varphi + \rho_n \cos \varphi \cos \gamma$$

$$\rho_z = -\rho_t \cos \varphi \sin \omega - \rho_n \cos \gamma \sin \varphi \sin \omega + \rho_n \sin \gamma \cos \omega$$

cuyas fuerzas, divididas por la masa  $\frac{P}{g}$ , darán las aceleraciones que á ellas se deben segun los mismos ejes y si agre-

gamos la de la gravedad, y representamos por  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$ , las tres componentes de la velocidad, las ecuaciones

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{g \rho_t \cos \varphi \cos \omega}{P} - \frac{g \rho_n \cos \gamma \sin \varphi \cos \omega}{P} - \frac{g \rho_n \sin \gamma \sin \omega}{P}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{g \rho_t \sin \varphi}{P} + \frac{g \rho_n \cos \varphi \cos \gamma}{P}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{g \rho_t \cos \varphi \sin \omega}{P} + \frac{g \rho_n \sin \gamma \cos \omega}{P} - \frac{g \rho_n \cos \gamma \sin \varphi \sin \omega}{P}$$

representarán las componentes de las aceleraciones debidas á todas las fuerzas que actúan sobre el proyectil.

De la figura se deduce

$$\rho_t = \rho \cos(\rho T')$$

$$\rho_n = \rho \sin(\rho T')$$

$$\rho_A = \rho \cos(\rho A')$$

sacando de la última el valor de  $\rho$ , y sustituyéndolo en las dos primeras, resulta;

$$\rho_t = \frac{\rho_A \cos(\rho T')}{\cos(\rho A')}$$

$$\rho_n = \frac{\rho_A \sin(\rho T')}{\cos(\rho A')}$$

y poniendo por  $\frac{\rho_A}{P}$  su valor  $f(v)$ , se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{gf(v)\cos(\rho T')}{\cos(\rho A')} \cos \varphi \cos \omega - \frac{gf(v)\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')} \cos \gamma \sin \varphi \cos \omega - \\ &\quad - \frac{gf(v)\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')} \sin \gamma \sin \omega \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g \left( 1 + f(v) \frac{\cos(\rho T')}{\cos(\rho A')} \sin \varphi \right) + gf(v) \frac{\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')} \cos \gamma \cos \varphi \\ \frac{dv_z}{dt} &= -gf(v) \frac{\cos(\rho T')}{\cos(\rho A')} \cos \varphi \sin \omega + gf(v) \frac{\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')} \sin \gamma \cos \omega - \\ &\quad - gf(v) \frac{\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')} \cos \gamma \sin \varphi \sin \omega. \end{aligned} \right\} (3)$$

Construyendo las curvas de los valores de  $(\rho T')$  y  $(\rho A')$ , tomando por abscisas los de  $\delta$ , se deducen las relaciones

$$\frac{\cos(\rho T')}{\cos(\rho A')} \text{ y } \frac{\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')}.$$

En el tiro directo y en el curvo cuando es  $\frac{q}{2} > 1$  puede admitirse

$$\frac{\cos(\rho T')}{\cos(\rho A')} = 1$$

pero en este último tiro, si es  $\frac{q}{2} < 1$ , la anterior relación varía mucho con  $\delta$ : empleando los procedimientos conocidos, puede deducirse la ecuación de la curva, que aproximadamente es

$$\frac{\cos(\rho T')}{\cos(\rho A')} = 1 + 3,2 \delta^2$$

cuyo valor medio estará representado por

$$\beta = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} (1 + 3,2 \delta^2) d\delta = 1 + 1,07 \delta^2$$

Del mismo modo, siendo  $\delta$  pequeño

$$\frac{\sin(\rho T')}{\cos(\rho A')} = K \delta$$

y si varía en mayores límites

$$\frac{\sin(\rho T')}{\cos(\rho T')} = m \sin \delta \cos \delta$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones (3) y haciendo,

$$\cos \omega = 1 \text{ y } \sin \omega = \text{tang } \omega = \omega$$

puesto que las derivaciones, son siempre pequeñas con rela-

ción á los alcances, pudiendo considerarse muy pequeños los ángulos  $\omega$ , se obtiene para el tiro directo;

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -gf(v) \cos \varphi - Kg \delta \cos \gamma f(v) \sin \varphi - Kg \delta \sin \gamma f(v) \omega \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g(1 + f(v) \sin \varphi) + Kg \delta \cos \gamma f(v) \cos \varphi \\ \frac{dv_z}{dt} &= -g\omega f(v) \cos \varphi + Kg \delta \sin \gamma f(v) - Kg \delta \cos \gamma \omega f(v) \sin \varphi \end{aligned} \right\} (4)$$

Para el tiro curvo, cuando se verifica  $\frac{q}{2} > 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -gf(v) \cos \varphi - mg \sin \delta \cos \delta \cos \gamma f(v) \sin \varphi - \\ &\quad - mg \sin \delta \cos \delta \sin \gamma \omega f(v) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g(1 + f(v) \sin \varphi) + mg \sin \delta \cos \delta \cos \gamma f(v) \cos \varphi \\ \frac{dv_z}{dt} &= -g\omega f(v) \cos \varphi + mg \sin \delta \cos \delta \sin \gamma f(v) - \\ &\quad - mg \sin \delta \cos \delta \cos \gamma \omega f(v) \sin \varphi \end{aligned} \right\} (5)$$

y para el mismo, cuando  $\frac{q}{2} < 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -g\beta f(v) \cos \varphi - mg \sin \delta \cos \delta \cos \gamma f(v) \sin \varphi - \\ &\quad - mg \sin \delta \cos \delta \sin \gamma \omega f(v) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g(1 + \beta f(v) \sin \varphi) + mg \sin \delta \cos \delta \cos \gamma f(v) \cos \varphi \\ \frac{dv_z}{dt} &= -g\beta \omega f(v) \cos \varphi + mg \sin \delta \cos \delta \sin \gamma f(v) - \\ &\quad - mg \sin \delta \cos \delta \cos \gamma \omega f(v) \sin \varphi \end{aligned} \right\} (6)$$

**101.** Para obtener las ecuaciones del movimiento de traslación, en el caso del tiro directo, emplearemos las ecuaciones diferenciales (4), despreciando en la primera los dos últimos términos y solo los últimos en las dos restantes, con objeto de simplificar su integración, quedando así reducidas á

$$\left. \begin{aligned} \frac{d v_1}{d t} &= -g f(v) \cos \varphi \\ \frac{d v_y}{d t} &= -g (1 + f(v) \operatorname{sen} \varphi) \\ \frac{d v_z}{d t} &= -g \omega f(v) \cos \varphi + K g \delta \operatorname{sen} \gamma f(v) \end{aligned} \right\} (7)$$

Las dos primeras, dan el movimiento de traslación del centro de gravedad sobre el plano vertical de tiro, siendo las mismas que determinan el movimiento de los proyectiles esféricos y en las que,

$$f(v) = \frac{v_A}{P}$$

La tercera ecuación, representa el movimiento proyectado sobre el eje de las  $z$ , y de su integración, deduciremos el valor de la derivación en cada instante. Para ello, recordemos que

$$f(v) = f(\alpha v_1) = \frac{f(\alpha v_1)}{\alpha \cos \varphi}$$

por lo que

$$\frac{d v_z}{d t} = \left( K \delta \operatorname{sen} \gamma - \frac{1}{\alpha} \omega \right) g f(\alpha v_1)$$

y si para simplificar la integración, sustituimos en vez del ángulo variable  $\omega$  y de  $(\delta \operatorname{sen} \gamma)$ , sus valores medios  $\omega_m$  y  $(\delta \operatorname{sen} \gamma)_m$ , durante dos semi-oscilaciones medias del eje de figura, tendremos

$$\frac{d v_z}{d t} = \left( K (\delta \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g f(\alpha v_1)$$

que integrada entre los límites 0 y  $t$  (tiempo total del movimiento) que corresponden respectivamente a 0 y  $v_z$ , resulta;

$$v_z = \left( K (\delta \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g \int_0^t f(\alpha v_1) dt \quad (8)$$

y sustituyendo por  $v_z$  su igual  $\frac{d z}{d t}$ , multiplicando ambos

miembros por  $dt$ , é integrando de nuevo entre los límites 0 y  $t$ , se tiene

$$z = \left( K (\delta \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g \int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt \quad (9)$$

De la primera de las ecuaciones (7) se deduce, despues de sustituir por  $f(v)$  su equivalente  $\frac{f(\alpha v_1)}{\alpha \cos \varphi}$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{g}{\alpha} f(\alpha v_1)$$

que integrada, despues de multiplicar por  $dt$  ambos miembros, dará

$$\int_0^t f(\alpha v_1) dt = -\frac{\alpha}{g} (v_1 - V_1) \quad (10)$$

la que por idénticas operaciones á las que acabamos de hacer, se convierte en

$$\int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt = -\frac{\alpha}{g} \int_0^t (v_1 - V_1) dt$$

y sustituyendo por  $v_1$  su igual  $\frac{dx}{dt}$ , se tiene

$$\int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt = -\frac{\alpha}{g} \left\{ \int_0^x dx - V_1 \int_0^t dt \right\} = -\frac{\alpha}{g} (x - V_1 t) \quad (11)$$

Los valores dados por las ecuaciones (10) y (11), introducidos en las (8) y (9) respectivamente, las reducen á

$$v_x = \left( K (\delta \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha v_1 \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right) \quad (12)$$

$$z = \left( K (\delta \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha V_1 \left( t - \frac{x}{V_1} \right) \quad (13)$$

Ahora bien,

$$\omega = \operatorname{tang} \omega = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{v_x}{v_1}$$

si en esta expresion, se pone por  $v_z$  su valor formular (12), resulta;

$$\omega = \left( K (\partial \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right) \quad (14)$$

y tomando por  $\omega_m$ , la media aritmética de los valores de  $\omega = 0$  y  $\omega$ , correspondientes á  $t = 0$  y  $t$ , será

$$\omega_m = \frac{1}{2} \left( K (\partial \operatorname{sen} \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right)$$

y de aqui se deduce

$$\omega_m = K (\partial \operatorname{sen} \gamma)_m \alpha \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (15)$$

Para  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{sen} \gamma = 1$ , y por lo tanto segun las ecuaciones (35) y (36) (párrafo 99) se tiene para los movimientos ascendente y descendente

$$(\partial \operatorname{sen} \gamma) = k(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{q h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \quad (16)$$

$$(\partial \operatorname{sen} \gamma) = \frac{1}{q} \left( 2 - k(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \quad (17)$$

y en los limites de cada semi-oscilacion,

$$\partial_t = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{8(n+1) \pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi}}$$

y por lo tanto, ecuacion (29) (párrafo 99)

$$\partial_t \operatorname{sen} \gamma_t = \frac{1}{q} \frac{8(n+1) \pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi}$$

Tomando la media aritmética de los cuatro valores de  $\partial \operatorname{sen} \gamma$ , resulta;

$$(\delta \operatorname{sen} \gamma)_m = \frac{1}{2q} \left( 1 + 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \quad (18)$$

que sustituido en la ecuacion (15), dá

$$\omega_m = \frac{K}{2q} \left( 1 + 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \propto \frac{V_1 - 1}{v_1 + 1} \quad (19)$$

y este, en union del anterior, introducidos en las ecuaciones (12), (13) y (14), darán:

$$v_x = \frac{K}{q} \left( 1 + 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \propto v_1 \frac{V_1 - 1}{v_1 + 1} \quad (20)$$

$$z = \frac{K}{q} \left( 1 + 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \propto V_1 \frac{t - \frac{x}{V_1}}{v_1 + 1} \quad (21)$$

$$\omega = \frac{K}{q} \left( 1 + 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \propto \frac{V_1 - 1}{v_1 + 1} \quad (22)$$

ecuaciones que definen el movimiento del proyectil sobre el plano horizontal.

Admitiendo que la resistencia del aire, sea proporcional al cuadrado de la velocidad, se deduce (\*) de los valores de  $t$  y de  $v_1$ ,

$$v_1 = \frac{V_1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t}$$

$$y \quad x = \frac{2c}{\alpha} t \left( 1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t \right)$$

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 96.

en la que, desarrollando en serie el logaritmo y limitándonos a los dos primeros términos, resulta

$$x = V_1 t \left( 1 - \frac{\alpha V_1}{4c} t \right)$$

y bajo la hipótesis admitida de la resistencia del aire, la fórmula (34) (párrafo 99) se convierte por la sustitución de  $n = 2$ , en

$$(vf(v))_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{2gt} \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t \right)^2} \right) = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc} \times \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t}{\left( 1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t \right)^2}$$

valor que, introducido en el de  $q$  (ecuación 20, párrafo 97) da, después de multiplicar y dividir por  $\alpha \cos \varphi = 1$

$$q = \frac{h \bar{p} \alpha^2 \cos \varphi}{4 \pi \bar{c}} \cdot \frac{(\alpha V_1)^2}{gc} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t}{\left( 1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t \right)^2}$$

y si este, así como los de  $v_1$  y  $x$ , los sustituimos en la (21), se tiene

$$z = \frac{1}{2} \pi g \frac{K}{h} \frac{\bar{c}}{\bar{p}} \left( 1 + 2k \frac{\pi^2 \bar{c}}{h \bar{p}} \right) t^2 \left( 1 + \frac{\alpha V_1}{4c} t \right)^2$$

que nos dice, que la derivación disminuye, cuando el paso de las rayas  $\bar{p}$  aumenta, creciendo en mayor razón que el cuadrado de los tiempos, y puesto que

$$t = \frac{x}{V} \Psi \left( \frac{\alpha x}{2c} \right)$$

la derivación, está también en razón inversa del cuadrado de la velocidad inicial, creciendo más rápidamente que el de las distancias; y como además  $c$  es proporcional á la relación  $\frac{P}{\pi R^2}$ , disminuye la derivación cuando esta aumenta, creciendo

con el momento de inercia del proyectil, por ser  $\bar{c}$  proporcional á esta cantidad.

**102.** En el caso del tiro curvo, cuando sea  $\frac{q}{2} > 1$ , emplearemos las ecuaciones (5) despreciando en la primera y segunda, los términos que siguen al primero y el último solamente en la tercera; de este modo, con aproximación suficiente, se hacen fácilmente integrables; será en consecuencia

$$\left. \begin{aligned} \frac{d v_1}{d t} &= -g f(v) \cos \varphi \\ \frac{d v_y}{d t} &= -g (1 + f(v) \sin \varphi) \\ \frac{d v_z}{d t} &= -g \omega f(v) \cos \varphi + m g \sin \delta \cos \delta \sin \gamma f(v) \end{aligned} \right\} (23)$$

siendo, como en el caso anterior las dos primeras, las que representan el movimiento sobre el plano vertical, y la tercera sobre el eje de las  $z$ .

Siguiendo la misma marcha que en el caso del tiro directo, prescindiendo del movimiento sobre el plano vertical, por haber sido estudiado para los proyectiles esféricos, limitándonos al proyectado sobre el horizontal, sustituiremos en el primer término de la tercera ecuación por  $f(v)$ , su equivalente

$\frac{f(z v_1)}{\alpha \cos \varphi}$  y en el segundo  $f(z v_1)$ , quedando así;

$$\frac{d v_z}{d t} = \left( m \sin \delta \cos \delta \sin \gamma - \frac{1}{\alpha} \omega \right) g f(z v_1)$$

ecuación que, integrada entre los límites  $t=0$  y  $t$ , que corresponden á los instantes inicial y final del movimiento, después de sustituir por las cantidades variables  $\omega$  y  $(\sin \delta \cos \delta \sin \gamma)$ , sus valores medios  $\omega_m$  y  $(\sin \delta \cos \delta \sin \gamma)_m$ , correspondientes, el primero á toda la estension de la trayectoria, y el segundo á dos semi-oscilaciones medias, resulta;

$$v_z = \left( m (\sin \delta \cos \delta \sin \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g \int_0^t f(z v_1) d t \quad (24)$$

Multiplicando ambos miembros por  $dt$ , poniendo por  $v_z$  su valor  $\frac{dz}{dt}$ , é integrando entre los mismos limites que anteriormente, se obtiene;

$$z = \left( m (\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g \int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt \quad (25)$$

en la que podemos sustituir por  $\int_0^t f(\alpha v_1) dt$ , su igual

$-\frac{\alpha}{g}(v_1 - V_1)$  (ecuacion 40) y por  $\int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt$ , su

valor  $-\frac{\alpha}{g}(x - V_1 t)$  (ecuacion 44), resultando;

$$v_z = \left( m (\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha v_1 \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right) \quad (26)$$

$$z = \left( m (\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha V_1 \left( t - \frac{x}{V_1} \right) \quad (27)$$

y sustituyendo el valor (26) en el de  $\omega$ , se tiene

$$\omega = \frac{v_z}{v_1} = \left( m (\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right) \quad (28)$$

si ahora tomamos por  $\omega_m$  el valor medio aritmético de  $\omega=0$  y  $\omega$ , quedará

$$\omega_m = \frac{1}{2} \left( m (\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right)$$

de donde se deduce

$$\omega_m = m (\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m \alpha \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (29)$$

Para determinar el factor  $(\text{sen } \delta \cos \delta \text{ sen } \gamma)_m$ , deduciremos

de las ecuaciones (42), (46) y (47) del párrafo 99, que en los límites de ambas semi-oscilaciones, se tiene

$$\operatorname{sen} \delta_l \cos \delta_l \operatorname{sen} \gamma_l = \frac{4}{q} 8(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \left( 1 - \frac{4}{q^2} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right)$$

y de las (48) y (49) del párrafo 99, correspondientes respectivamente, al movimiento ascendente y descendente para  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  y por lo tanto  $\operatorname{sen} \gamma = 1$ , que

$$\operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} \gamma = \frac{4}{q} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi}$$

$$\operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} \gamma = \frac{4}{q} \left( 2 - 4(n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \left( \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + \frac{8}{q^4} (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right)$$

y multiplicando por 2 el valor de  $\operatorname{sen} \delta_l \cos \delta_l \operatorname{sen} \gamma_l$ , sumando el resultado con las dos últimas expresiones, dividiendo por 4 y despreciando las potencias superiores á la primera de  $\frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p}}$ , se obtiene finalmente

$$(\operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} \gamma)_{\text{m}} = \frac{1}{2q} \left( \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + 8 \left( 1 + \frac{3}{2q^2} \right) (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \quad (30)$$

valor que sustituido en la ecuacion (29), dará

$$\sigma_{\text{m}} = \frac{m}{2q} \left( \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + 8 \left( 1 + \frac{3}{2q^2} \right) (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \propto \frac{V_1 - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1}$$

que introducido, así como el (30) en las ecuaciones (26), (27) y (28) las convierten en

$$v_x = \frac{m}{q} \left( \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + 8 \left( 1 + \frac{3}{2q^2} \right) (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \propto v_1 \frac{V_1 - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (34)$$

$$z = \frac{m}{q} \left( \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + 8 \left( 1 + \frac{3}{2q^2} \right) (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \alpha V_1 \frac{t - \frac{x}{V_1}}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (32)$$

$$\omega = \frac{m}{q} \left( \left( 1 - \frac{2}{q^2} \right) + 8 \left( 1 + \frac{3}{2q^2} \right) (n+1) \frac{\pi^2 \bar{c}}{l \bar{p} \alpha \cos \varphi} \right) \alpha \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (33)$$

Por un razonamiento análogo, deduciríamos las mismas consecuencias que en el caso del tiro directo, respecto á la influencia sobre la derivacion; del paso de las rayas, velocidad inicial y tiempo de duracion.

Finalmente, en el caso de ser  $\frac{q}{2} \ll 1$ , haremos uso de las ecuaciones diferenciales (6) en las que, despreciando los mismos términos que en los anteriores casos, se reducirán á

$$\frac{d v_x}{d t} = -g \beta f(v) \cos \varphi$$

$$\frac{d v_y}{d t} = -g (1 + \beta f(v) \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\frac{d v_z}{d t} = -g \beta \omega f(v) \cos \varphi + m g \operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} \gamma f(v)$$

ecuaciones en las que, por entrar la cantidad  $\beta$ , no podemos tomar por las dos primeras, las mismas que en el movimiento de los proyectiles esféricos nos servian para determinar el proyectado sobre el plano vertical, á menos que no se admita  $\beta=1$ , cuyo valor simplifica mucho la cuestion, y es admisible atendiendo á la pequeña diferencia que en una aplicacion numérica encuentra Mayewsky, haciendo los cálculos con los valores  $\beta=1$  y  $\beta=2,3$ .

**103.** Para obtener la derivacion, nos serviremos de la ecuacion tercera, que bajo el supuesto de  $\beta=1$ , se convierte en

$$\frac{d v_z}{d t} = -g \omega f(v) \cos \varphi + m g \operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} \gamma f(v)$$

y como hemos dicho, en el caso actual

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{2}{q} \operatorname{sen} \gamma$$

por lo que, la ecuacion precedente se reduce á

$$\frac{d v_z}{d t} = \left( \frac{m q}{2} \operatorname{sen}^2 \delta \cos \delta - \frac{1}{\alpha} \omega \right) g f(\alpha v_1)$$

Siendo el valor de  $\delta$  en el caso de  $\frac{q}{2} < 1$ , menor siempre que  $\frac{\pi}{2}$ , determinando por los procedimientos conocidos el máximo que puede tener  $\operatorname{sen}^2 \delta \cos \delta$  y que resulta ser 0,385 y el mínimo que es 0, podemos tomar para este valor variable, el medio aritmético de los que toma durante todo el trayecto, y que representaremos por  $(\operatorname{sen}^2 \delta \cos \delta)_m$ , tomando tambien por  $\omega$  su valor medio  $\omega_m$ , por no ser grande su variacion, por lo que integrando entre los limites  $t=0$  y  $t$ , resulta;

$$v_z = \left( \frac{m q}{2} (\operatorname{sen}^2 \delta \cos \delta)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g \int_0^t f(\alpha v_1) dt \quad (34)$$

y de aquí

$$z = \left( \frac{m q}{2} (\operatorname{sen}^2 \delta \cos \delta)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) g \int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt \quad (35)$$

y sustituyendo por

$$\int_0^t f(\alpha v_1) dt \quad \dot{=} \quad \int_0^t dt \int_0^t f(\alpha v_1) dt$$

sus valores, ecuaciones (10) y (11) se tiene

$$v_z = \left( \frac{m q}{2} (\operatorname{sen}^2 \delta \cos \delta)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \alpha v_1 \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right) \quad (36)$$

$$z = \left( \frac{mq}{2} (\text{sen}^2 \delta \cos \delta)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \propto V_1 \left( t - \frac{x}{V_1} \right) \quad (37)$$

y por lo tanto,

$$\omega = \left( \frac{mq}{2} (\text{sen}^2 \delta \cos \delta)_m - \frac{1}{\alpha} \omega_m \right) \propto \left( \frac{V_1}{v_1} - 1 \right) \quad (38)$$

tomando por  $\omega_m$ , el valor medio aritmético entre  $\omega = 0$  y  $\omega$ , de la última ecuacion se deduce:

$$\omega_m = \frac{mq}{2} (\text{sen}^2 \delta \cos \delta)_m \propto \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (39)$$

y poniendo aproximadamente

$$(\text{sen}^2 \delta \cos \delta)_m = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \text{sen}^2 \delta \cos \delta d\delta = \frac{\text{sen}^3 \delta}{3\delta}$$

resulta;

$$v_z = \frac{mq}{2} \frac{\text{sen}^3 \delta}{3\delta} \propto \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1}$$

cuyos dos últimos valores, sustituidos en las ecuaciones (36), (37) y (38), darán;

$$v_z = \frac{mq}{3} \frac{\text{sen}^3 \delta}{\delta} \propto v_1 \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (40)$$

$$z = \frac{mq}{3} \frac{\text{sen}^3 \delta}{\delta} \propto V_1 \frac{t - \frac{x}{V_1}}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (41)$$

$$\omega = \frac{mq}{3} \frac{\text{sen}^3 \delta}{\delta} \propto \frac{\frac{V_1}{v_1} - 1}{\frac{V_1}{v_1} + 1} \quad (42)$$

En el caso actual, admitiendo  $\alpha \cos \varphi = 1$  se tiene (\*)

$$v = \frac{v_1}{\cos \varphi} = \frac{\alpha v_1}{\alpha \cos \varphi} = \alpha v_1 = \frac{\alpha V_1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t}$$

y por lo tanto,

$$vf(v) = (\alpha v_1) f(v) = \alpha v_1 \frac{v^3}{2gc} = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^3}$$

y tomando la media aritmética, se tendrá:

$$v_m = \frac{\alpha V_1}{t} \int_0^t \frac{dt}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t}$$

$$(vf(v))_m = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gct} \int_0^t \frac{dt}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^3}$$

expresiones que, después de integradas nos dan:

$$v_m = \frac{2c}{t} \text{Lg} \left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right) \quad (43)$$

$$(vf(v))_m = \frac{(\alpha V_1)^2}{gt} \int_0^t \frac{\frac{\alpha V_1}{2c} dt}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^3} = \frac{\alpha V_1}{2gt} \left( \frac{1}{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t} \right) = \frac{(\alpha V_1)^3}{2gc} \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^2} \quad (44)$$

cuyos valores, sustituidos en el de  $q$  (ecuación 38) del párrafo (99), se tiene;

$$q = \frac{l \bar{p} \alpha}{2 \pi \bar{c} V} (vf(v))_m = \frac{l \bar{p} \alpha^2 \cos \varphi}{4 \pi \bar{c}} \frac{(\alpha V_1)^2}{gc} \frac{1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t}{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{2c} t\right)^2} \quad (45)$$

calculándose el valor de  $\delta$ , como ya se ha dicho, por medio de las tablas.

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 96.

PROBLEMAS SOBRE EL TIRO.

**104. Tiro directo.**—Hemos visto, que las dos primeras ecuaciones correspondientes al movimiento de los proyectiles oblongos, determinan la proyeccion de la trayectoria sobre el plano vertical, siendo las mismas que las que corresponden al movimiento de los esféricos, y por lo tanto, cuantos problemas se resuelven en aquellas, incluyendo el general de calcular una trayectoria, pueden de igual manera serlo en estos, sin otra diferencia, que la que es consiguiente á admitir tres leyes distintas de la resistencia del aire, que son: proporcional al cuadrado de la velocidad, cuando esta excede á 360<sup>m</sup>; á la sexta potencia, para velocidades comprendidas entre 360<sup>m</sup> y 280<sup>m</sup>, y á la segunda y cuarta cuando sean inferiores á esta última, necesitándose al calcular una trayectoria, considerar las tres leyes, dos ó una solamente, segun sean los valores de las velocidades inicial y final. No quedará entonces mas, que determinar las derivaciones correspondientes á los alcances, lo que se conseguirá empleando las ecuaciones (20), (21) y (22) (párrafo 101) (\*)

(\*) Las ecuaciones que, en el caso de ser la resistencia del aire proporcional á la sexta potencia de la velocidad, determinan el movimiento del proyectil sobre el plano vertical, se deducen siguiendo idéntico procedimiento empleado en el tratado de Balística.—Artillería lisa de los Sres. Azuela y Martinez, resultando ser las siguientes:

La de la trayectoria. . . . .  $y = x \operatorname{tang} \theta - \frac{g x^2}{2 V_1^2} f'(z)$

Inclinacion de la misma. . . . .  $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \theta - \frac{g x^2}{V_1^2} f''(z)$

Velocidad en un punto cualquiera. . .  $v = \frac{V}{f'''(z)} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}$

Tiempo de un trayecto. . . . .  $t = \frac{x}{V_1} f^{iv}(z)$

Abcisa. . . . .  $x = \frac{c^3}{2 \alpha^3 V_1^4} \left( \frac{V_1^4}{v_1^4} - 1 \right)$

Inclinacion en funcion de la velocidad.  $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \theta - \frac{g c^3}{3 \alpha^3 v_1^6} \left( 1 - \frac{v_1^6}{V_1^6} \right)$

**105. Tiro curvo.**—Si este se verifica con débiles cargas, por ser entonces la velocidad inferior á 280<sup>m</sup> y emplearse proyectiles de grueso calibre, la accion de la resistencia del aire es pequeña y puede calcularse la trayectoria, con aproximacion suficiente considerando un solo arco, siendo

$$\frac{v_x}{P} = f(v) = \frac{v^2}{2gc} \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right) \text{ y } r = 488$$

$$c = \frac{P}{2A\pi R^2 g}$$

resolviéndose todos los problemas referentes á este tiro, en lo que concierne á la proyeccion vertical del movimiento, del mismo modo que con los proyectiles esféricos, obteniéndose las derivaciones por medio de las fórmulas (34), (32) y (33)

si  $\frac{q}{2} > 1$  (párrafo 102) y empleando las (40), (44) y (42)

(párrafo 103) cuando  $\frac{q}{2} < 1$ .

En las que

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= \frac{(1+z)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}z - 1}{\frac{15}{8}z^2} \\ f''(z) &= \frac{(1+z)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{3}{2}z} \\ f'''(z) &= (1+z)^{\frac{1}{4}} \\ f^{iv}(z) &= \frac{(1+z)^{\frac{5}{4}} - 1}{\frac{5}{4}z} \end{aligned} \right\} z = \frac{2c^2 V_1^4 x}{c^2}$$

y habiendo hecho además  $c^2 = \frac{P}{2A\pi R^2 g}$ . Al final del libro se insertan las tablas pertenecientes á las funciones que entran en las fórmulas, debidas al General Mayewsky.

Si las cargas son grandes, es preciso calcular la trayectoria, dividiéndola en las partes que en un principio hemos considerado, y como en este caso es pequeño el ángulo  $\delta$ , pueden obtenerse las derivaciones, empleando las fórmulas correspondientes al tiro directo.

**106. Tiro por sumersion.**—Los mismos problemas que en los proyectiles esféricos, se resuelven en los oblongos, y como en general la velocidad es pequeña, debe hacerse uso de la ley de la resistencia del aire, proporcional á las potencias segunda y cuarta, admitiendo además  $\alpha=1$ . La derivacion se obtendrá valiéndose de las fórmulas (31), (32) y (33) (párrafo 102) pues que en este caso, es conocida la distancia.

**107. Fórmulas prácticas.—Ecuacion de la trayectoria** —La trayectoria descrita por los proyectiles disparados con las piezas rayadas, es de doble curvatura segun anteriormente hemos visto, por lo que, para conocer todas las circunstancias del movimiento, se determina la trayectoria proyectada sobre el plano de tiro, y además en cada instante, la derivacion debida al rayado de la pieza.

Como mas adelante veremos, por iguales que sean las condiciones en que se efectúe el tiro, no se obtendrá siempre la misma trayectoria, y sí, un haz de estas, siendo la media de todas á la que se refieren los datos de las tablas de tiro.

Llamando  $V$  la velocidad inicial y  $\theta$  el ángulo de proyeccion, se tiene (\*) la ecuacion

$$y = x \operatorname{tang} \theta - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \theta} (1 + V^2 f(x)) \quad (1)$$

en la que el término  $f(x)$ , depende de la resistencia del aire, por lo que debe anularse con la densidad de este, así como con el valor  $V^2 = \infty$ , por quedar en este caso la trayectoria reducida á una línea recta cuya ecuacion

$$y = x \operatorname{tang} \theta$$

se obtiene, cumpliéndose la expresada condicion.

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 106.

Haciendo  $y = 0$  en la ecuacion (1), y representando por  $X$  el alcance del tiro, se tiene;

$$\frac{\text{sen } 2\theta}{g X} = \frac{4}{V^2} + f(X) \quad (2)$$

de cuya relacion, puede obtenerse experimentalmente el valor de  $f(X)$ , el que tiene generalmente la forma

$$f(X) = C X$$

El coeficiente  $C$ , es constante entre ciertos limites y variable fuera de ellos, estando entonces su valor representado con suficiente exactitud, por la expresion

$$C = C_0 \cos^n \theta$$

siendo  $C_0$  y  $n$  constantes.

La última ecuacion queda por lo tanto reducida á

$$\frac{\text{sen } 2\theta}{g X} = \frac{4}{V^2} + C X \quad (3)$$

**108. Determinacion de la constante  $C$ .**—Haciendo varios disparos con el mismo ángulo de inclinacion de la pieza, é idéntica carga, se puede determinar el valor medio  $X$  del alcance obtenido en todos los tiros, correspondiente á aquellos datos. Repitiendo la experiencia con distintas inclinaciones y con la misma carga, se obtendrán diferentes valores para  $f(X)$  de la ecuacion (2), pudiendo deducirse para cada valor de  $\theta$ , el de

$$C = \frac{f(X)}{X}$$

Si el valor de  $C$  resulta sensiblemente igual en todas las experiencias, puede admitirse, dentro de los limites en que hayan sido verificadas, que es constante, siendo el valor obtenido el que debe substituirse en la ecuacion (3).

Si por el contrario, entre los valores obtenidos para  $C$ , resultan diferencias sensibles, prueba que dentro de los limites en que se hacen las experiencias, el coeficiente  $C$  es variable,

debiéndose emplear entonces para su determinacion, la fórmula

$$C = C_0 \cos^n \theta$$

de la que se deduce,

$$\log C = \log C_0 + n \log \cos \theta \quad (4)$$

y sustituyendo en esta, por  $\theta$  y  $C$  los valores encontrados, se obtienen diversas ecuaciones entre  $C_0$  y  $n$ , que aplicando el método de mínimos cuadrados, nos darán los valores de estas cantidades, tanto mas aproximados, cuanto mayor sea el número de experiencias verificadas con distintos valores del ángulo  $\theta$ .

**109. Correccion que debe efectuarse cuando el aire no esté en calma.**—Para la determinacion del valor de  $C$ , hemos partido del conocimiento de las cantidades  $\theta$ ,  $V$  y  $X$ ; si el aire está en calma al verificar las experiencias, basta sustituirlas directamente en la ecuacion (3), pero si no fuese así, preciso es determinar la velocidad y direccion del viento, y descomponerla en dos, una  $W$  en direccion del plano de tiro y otra  $W_1$  perpendicular á este: sobre el alcance, la única que tiene influencia es la primera, siendo por lo tanto la que es preciso tomar en consideracion.

Para referir los datos  $\theta$ ,  $V$  y  $X$  dados por la experiencia, al caso de estar el aire inmóvil, supondremos impreso á todo el sistema un movimiento de traslacion, con una velocidad igual y contraria á la  $W$ .

De esta manera, la velocidad  $V_1$  que realmente posee el proyectil al abandonar la pieza, es la resultante de la  $V$ , medida por los aparatos balísticos, y la componente  $-W$ , formando entonces un ángulo  $\theta_1$  con la horizontal y produciendo un alcance  $X_1$ ; la cuestion queda reducida á deducir los valores  $V_1$ ,  $\theta_1$  y  $X_1$ , en funcion de  $V$ ,  $\theta$ ,  $X$  y  $W$ .

Si para fijar las ideas, suponemos que la direccion del viento es de atrás á adelante, el movimiento que se supone impreso al sistema general, será en sentido contrario, por lo que, la componente horizontal  $V \cos \theta$ , se convertirá en

$$V \cos \theta - W$$

mientras que la vertical  $V \text{ sen } \theta$ , no sufrirá alteracion alguna; así pues, se tendrá

$$V_1^2 = V^2 \text{ sen}^2 \theta + (V \cos \theta - W)^2$$

ó bien

$$V_1^2 = V^2 - 2 V W \cos \theta + W^2$$

Como  $W$  es siempre muy pequeño con relacion á  $V$ , esta expresion permanecerá sensiblemente la misma, si se resta del segundo miembro la cantidad  $W^2 \text{ sen}^2 \theta$ , de cuya manera se obtiene

$$V_1 = V - W \cos \theta \quad (5)$$

Siendo  $T$ , el tiempo que el proyectil tarda en recorrer la trayectoria, ó sea en producir el alcance  $X$  deducido por la experiencia; este alcance, por el movimiento impreso, se disminuirá en  $W T$ , quedando

$$X_1 = X - W T \quad (6)$$

Y por último, fácilmente se deduce la expresion

$$\text{tang } \theta_1 = \frac{V \text{ sen } \theta}{V \cos \theta - W} \quad (7)$$

Si la velocidad del viento, fuese en sentido contrario al que hemos supuesto, bastaría en las fórmulas anteriores, cambiar  $W$  por  $-W$ .

Los valores de  $C$ , así como los de  $C_0$  y  $n$ , se obtendrán haciendo uso de los de  $V_1$ ,  $X_1$  y  $\theta_1$ , en lugar de  $V$ ,  $X$  y  $\theta$ .

**110. Correccion debida á la densidad del aire.**—Esta se reduce sencillamente á referir la del dia en que se verifiquen las experiencias, á la densidad correspondiente á la presion de  $0^m,75$  de altura en la columna barométrica,  $0,50$  de estado higrométrico y  $15^\circ$  de temperatura, con cuyos datos  $4^k, 208$  es el peso de un metro cúbico de aire.

**111. Angulo de reelevacion.**—Al salir los proyectiles del ánima de las piezas, no lo verifican nunca en direccion del eje, elevándose generalmente un ángulo que no suele exceder de  $4$  á  $5$  minutos.

Para determinar el aumento que debe experimentar el valor de  $\theta$  y que llamaremos ángulo de reelevacion, se pone un blanco á muy corta distancia de la boca de la pieza; colocando esta perfectamente horizontal, se marcará la interseccion que con él haga el eje del cañon: seguidamente se hace un disparo y se mide el desnivel del centro de impacto, con respecto á la expresada interseccion del eje; la relacion entre este desnivel y la distancia que media desde la pieza al blanco, será la tangente trigonométrica del ángulo que se busca, que se admite permanece constante, para todas las inclinaciones de la pieza y el cual debe aumentarse al de inclinacion, para hacer uso de las fórmulas halladas.

**112. Determinacion del alcance.**—El alcance tiene por expresion (\*)

$$X = \frac{1}{2 C V^2} \left( \sqrt{1 + 2 C V^2 \frac{2 V^2 \sin 2 \theta}{g}} - 1 \right) \quad (8)$$

la cual, puede fácilmente calcularse por logaritmos, haciendo

$$\tan^2 \beta = 2 C V^2 \frac{2 V^2 \sin 2 \theta}{g} \quad (9)$$

por quedar de este modo

$$X = \frac{1}{2 C V^2} (\sec \beta - 1) \quad (10)$$

En esta expresion, se sustituirá por  $C$  su valor, ya sea constante ó el dado por la fórmula

$$C = C_0 \cos^n \theta$$

**113. Determinacion del ángulo de proyeccion.**  
—La ecuacion (\*)

$$\sin 2 \theta = g X \left( \frac{1}{V^2} + C X \right) \quad (11)$$

resuelve la cuestion propuesta.

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 107.

Esta fórmula dará inmediatamente los valores de  $\theta$  para diferentes alcances, en el caso de ser  $C$  constante, sustituyendo los valores de las cantidades de quien depende, despues de hechas las correcciones indicadas; pero cuando  $C$  sea variable, como depende de  $\theta$ , es preciso proceder por tanteos, para ello, se dá á la pieza una cierta inclinacion y despues de vários disparos en idénticas condiciones, se determina el alcance  $X$  y el ángulo  $\theta$ , deduciendo de estos datos el valor de  $C$ .

Sucesivamente se hace variar el alcance en progresion aritmética, por incrementos tan pequeños, que permitan tomar para cada uno de ellos, el valor de  $C$  obtenido para el alcance anterior, formándose así la siguiente tabla de valores

X.....	$\theta$ .....	C	
$X + a$ .....	$\theta_1$ .....	C	$C_1 = C_0 \cos^2 \theta_1$
$X + 2a$ .....	$\theta_2$ .....	$C_1$	$C_2 = C_0 \cos^2 \theta_2$
⋮	⋮	⋮	⋮

**114. Ángulo de máximo alcance.**—Se obtiene fácilmente, diferenciando la ecuacion (11) con relacion á  $\theta$  é igualando á cero la primera derivada

$$\frac{dX}{d\theta}$$

Resulta de esta manera, que si  $C$  es constante, el ángulo de máximo alcance es igual á  $45^\circ$ : si  $C$  crece con el ángulo de proyeccion, aquel es inferior á  $45^\circ$ , y por último cuando  $C$  decrece con  $\theta$ , el ángulo de máximo alcance es mayor que  $45^\circ$ .

El valor de  $C$  dado por la expresion

$$C = C_0 \cos^2 \theta$$

solo debe emplearse para valores de  $\theta$  inferiores al de máximo alcance, por haber sido así obtenida.

**115. Ángulo de caída.**—Si de la ecuacion de la trayectoria, se deduce la expresion formular de  $\frac{dy}{dx}$ , esta dará para cada valor de  $x$ , la tangente trigonométrica del ángulo que, con la horizontal, formen las direcciones de las

velocidades, en los puntos correspondientes á los diversos valores de  $x$ : el valor de  $\text{tang } \omega$ , siendo  $\omega$  el ángulo de caída, se obtendrá por lo tanto haciendo  $x=X$ , en la expresion

$$\frac{d y}{d x} = \text{tang } \theta - \frac{g \cdot x}{V^2 \cos^2 \theta} - \frac{3 g C x^2}{2 \cos^2 \theta}$$

es decir

$$\text{tang } \omega = \frac{g X}{V^2 \cos^2 \theta} + \frac{3 g C X^2}{2 \cos^2 \theta} - \text{tang } \theta \quad (12)$$

fórmula en la que se cambia el signo del segundo miembro, porque en la rama descendente, los ángulos se cuentan con la parte negativa del eje de las  $x$ .

De la anterior expresion se deduce;

$$\frac{\text{tang } \omega}{\text{tang } \theta} = \frac{g X}{V^2 \sin 2 \theta} (2 + 3 C V^2 X) - 1$$

y haciendo para abreviar

$$Z = C V^2 X \quad (13)$$

y recordando además que

$$\frac{\sin 2 \theta}{g X} = \frac{4}{V^2} (1 + V^2 C X) = \frac{4}{V^2} (1 + Z) \quad (14)$$

se tiene:

$$\frac{\text{tang } \omega}{\text{tang } \theta} = \frac{2 + 3 Z}{1 + Z} - 1 = 1 + \frac{Z}{1 + Z} \quad (15)$$

que para diferentes valores de  $Z$ , deducidos de la fórmula (13), dará á conocer los de  $\text{tang } \omega$ , sirviendo para facilitar los cálculos, las dos tablas siguientes, debidas á Helié; la primera dá los valores de la relacion  $\frac{\text{tang } \omega}{\text{tang } \theta}$ , correspondientes á los de  $Z$  creciendo en progresion aritmética cuya razon es 0,5, desde  $Z=0$  hasta  $Z=2$  y la segunda, dá los logaritmos de  $\frac{\text{tang } \omega}{\text{tang } \theta}$ , para diversos valores de  $Z$ , que crecen en 0,01 desde  $Z=0$  hasta

$Z=4,52$ : esta última, contiene una casilla de diferencias, que análogamente á las tablas de logaritmos vulgares, facilitan la interpolacion con objeto de determinar los valores de la expresada relacion, correspondientes á los de  $Z$  que no estén en la tabla.

Z	$\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \theta}$	Z	$\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \theta}$	Z	$\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \theta}$
0,00	4,000				
0,05	4,048	0,55	4,355	4,1	4,524
0,10	4,091	0,60	4,375	4,2	4,546
0,15	4,130	0,65	4,394	4,3	4,565
0,20	4,165	0,70	4,412	4,4	4,583
0,25	4,200	0,75	4,428	4,5	4,600
0,30	4,231	0,80	4,444	4,6	4,615
0,35	4,259	0,85	4,459	4,7	4,630
0,40	4,286	0,90	4,474	4,8	4,644
0,45	4,310	0,95	4,487	4,9	4,655
0,50	4,333	4,00	4,500	2,0	4,657

Z	Lg $\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \theta}$	Dife- rencia.	Z	Lg $\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \theta}$	Dife- rencia.	Z	Lg $\frac{\text{tg } \omega}{\text{tg } \theta}$	Dife- rencia.
0,00	0,00000		0,13	0,04729	302	0,26	0,08447	224
0,01	0,00428	428	0,14	0,05031	293	0,27	0,08371	220
0,02	0,00843	415	0,15	0,05324	288	0,28	0,08591	215
0,03	0,01246	403	0,16	0,05612	279	0,29	0,08806	211
0,04	0,01639	393	0,17	0,05891	276	0,30	0,09017	207
0,05	0,02020	381	0,18	0,06167	276	0,31	0,09224	203
0,06	0,02391	371	0,19	0,06433	266	0,32	0,09427	199
0,07	0,02752	361	0,20	0,06694	261	0,33	0,09626	194
0,08	0,03103	351	0,21	0,06950	256	0,34	0,09820	191
0,09	0,03445	342	0,22	0,07200	250	0,35	0,10014	188
0,10	0,03779	336	0,23	0,07445	245	0,36	0,10199	184
0,11	0,04103	324	0,24	0,07684	239	0,37	0,10383	180
0,12	0,04420	317	0,25	0,07918	234	0,38	0,10563	177
0,13	0,04729	309	0,26	0,08147	229	0,39	0,10740	

Z	$Lg \frac{tg \omega}{tg \theta}$	Dife- rencia.	Z	$Lg \frac{tg \omega}{tg \theta}$	Dife- rencia.	Z	$Lg \frac{tg \omega}{tg \theta}$	Dife- rencia.
0,39	0,40740	474	0,77	0,45686	96	1,15	0,18608	61
0,40	0,40914	471	0,78	0,45782	95	1,16	0,18669	60
0,41	0,41085	468	0,79	0,45877	93	1,17	0,18729	59
0,42	0,41253	464	0,80	0,45970	92	1,18	0,18788	59
0,43	0,41417	462	0,81	0,46062	91	1,19	0,18847	59
0,44	0,41579	459	0,82	0,46153	90	1,20	0,18906	58
0,45	0,41738	457	0,83	0,46243	89	1,21	0,18764	57
0,46	0,41895	453	0,84	0,46332	88	1,22	0,19021	57
0,47	0,42048	451	0,85	0,46420	86	1,23	0,19078	55
0,48	0,42199	449	0,86	0,46506	85	1,24	0,19133	55
0,49	0,42348	445	0,87	0,46591	84	1,25	0,19188	55
0,50	0,42493	444	0,88	0,46675	83	1,26	0,19243	55
0,51	0,42637	441	0,89	0,46758	82	1,27	0,19297	54
0,52	0,42778	439	0,90	0,46840	81	1,28	0,19351	54
0,53	0,42917	437	0,91	0,46921	81	1,29	0,19404	53
0,54	0,43054	435	0,92	0,47002	79	1,30	0,19457	53
0,55	0,43189	432	0,93	0,47081	78	1,31	0,19510	51
0,56	0,43321	430	0,94	0,47159	78	1,32	0,19561	51
0,57	0,43451	429	0,95	0,47237	76	1,33	0,19612	51
0,58	0,43580	426	0,96	0,47313	75	1,34	0,19663	50
0,59	0,43706	424	0,97	0,47388	75	1,35	0,19713	50
0,60	0,43830	423	0,98	0,47463	73	1,36	0,19763	49
0,61	0,43953	420	0,99	0,47536	73	1,37	0,19812	49
0,62	0,44073	419	1,00	0,47609	72	1,38	0,19861	48
0,63	0,44192	417	1,01	0,47681	71	1,39	0,19909	48
0,64	0,44309	415	1,02	0,47752	70	1,40	0,19957	47
0,65	0,44424	414	1,03	0,47822	70	1,41	0,20004	46
0,66	0,44538	412	1,04	0,47892	69	1,42	0,20052	46
0,67	0,44650	410	1,05	0,47961	68	1,43	0,20098	46
0,68	0,44760	109	1,06	0,48029	67	1,44	0,20144	46
0,69	0,44869	107	1,07	0,48096	66	1,45	0,20190	45
0,70	0,44976	106	1,08	0,48162	66	1,46	0,20235	45
0,71	0,45082	104	1,09	0,48228	65	1,47	0,20280	44
0,72	0,45186	103	1,10	0,48293	64	1,48	0,20324	44
0,73	0,45289	101	1,11	0,48357	64	1,49	0,20368	44
0,74	0,45390	100	1,12	0,48421	63	1,50	0,20412	43
0,75	0,45490	99	1,13	0,48484	62	1,51	0,20455	43
0,76	0,45589	97	1,14	0,48546	62	1,52	0,20498	
0,77	0,45686		1,15	0,48608				

**116. Duracion del trayecto.**—Se determina haciendo uso de la fórmula (\*)

$$T = \frac{X}{V \cos \theta} \frac{2}{9 C V^2 X} \left( (1 + 3 C V^2 X)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

y recordando el valor de Z (fórmula 13) y llamando para abreviar

$$\Psi = \frac{2}{9Z} \left( (1 + 3Z)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \quad (16)$$

resulta;

$$T = \frac{X}{V \cos \theta} \Psi \quad (17)$$

Conocido el valor de Z para los que tengan C, V y X, por las fórmulas (16) y (17) se deducirá el correspondiente de T: la tabla siguiente facilita la determinacion del valor de  $\Psi$

Z	$\Psi$	Z	$\Psi$	Z	$\Psi$
0,0	1,000	0,7	1,445	1,4	1,723
0,1	1,074	0,8	1,463	1,5	1,762
0,2	1,137	0,9	1,510	1,6	1,801
0,3	1,199	1,0	1,555	1,7	1,839
0,4	1,257	1,1	1,599	1,8	1,875
0,5	1,312	1,2	1,643	1,9	1,911
0,6	1,364	1,3	1,684	2,0	1,946

La expresion del valor de T, puede modificarse de la manera siguiente.

De la ecuacion (14) se deduce, dividiendo sus dos miembros por  $\frac{2 X \operatorname{tang} \theta}{g}$ ,

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa, párrafo 107.

$$\frac{V^2 \cos^2 \theta}{X^2} = \frac{g}{2} \frac{1+Z}{X \operatorname{tang} \theta}$$

de donde

$$\frac{V \cos \theta}{X} = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{\sqrt{1+Z}}{\sqrt{X \operatorname{tang} \theta}}}$$

y substituyendo este valor en la ecuacion (17),

$$T = \sqrt{\frac{2}{g} \frac{\sqrt{X \operatorname{tang} \theta}}{\sqrt{1+Z}}} \Psi$$

en la que, si hacemos

$$N = \sqrt{\frac{2}{g} \frac{\Psi}{\sqrt{1+Z}}} \quad (18)$$

se deduce,

$$T = N \sqrt{X \operatorname{tang} \theta} \quad (19)$$

fórmula que dará el valor de T, conocido que sea el de N por la expresion (18), y cuyo cálculo se facilita por medio de la siguiente tabla

Z	N	Z	N	Z	N
0,0	0,452	0,6	0,487	1,4	0,502
0,1	0,461	0,7	0,490	1,6	0,502
0,2	0,469	0,8	0,493	1,8	0,506
0,3	0,475	0,9	0,495	2,0	0,508
0,4	0,480	1,0	0,497		
0,5	0,484	1,2	0,500		

Tanto en las fórmulas del valor de T, como en las del ángulo de caída, es necesario substituir los valores de  $\theta$ , V y X correspondientes al aire en calma, haciendo las correcciones

debidas á la fuerza y direccion del viento, que ya hemos explicado.

**117. Derivacion.**—Se determina experimentalmente, dando á la pieza un cierto ángulo de inclinacion y haciendo en las condiciones mas iguales posibles, un cierto número de disparos: sumando los desvios laterales, producidos con respecto al plano de tiro, marcado de antemano sobre el terreno, y asignando signo positivo á los que estén en un cierto sentido, con respecto á dicho plano, y negativo á los opuestos: la media aritmética de todos los obtenidos, es la derivacion producida.

La experiencia enseña, que la derivacion, crece con el ángulo de proyeccion y puede obtenerse un valor bastante conforme con los resultados de la práctica, valiéndose de la fórmula

$$D = H \operatorname{sen}^n \theta \quad (20)$$

ó sea

$$\log D = \log H + n \log \operatorname{sen} \theta \quad (21)$$

en la que, sustituyendo por  $D$  y  $\theta$ , los valores que como hemos dicho, se deducen de la experiencia, se obtienen varias ecuaciones entre  $H$  y  $n$ , haciendo variar el ángulo  $\theta$  y de ellas, aplicando los minimos cuadrados, se deducen  $H$  y  $n$ .

Si al hacer las experiencias para obtener los valores de  $D$ , el aire estuviese agitado, es preciso corregirlos antes de sustituirlos en la fórmula anterior; supuesta horizontal la velocidad del viento, llamemos  $W$  su componente en direccion del plano de tiro y  $W_1$  la que lo es perpendicular, única que tiene influencia sobre la derivacion.

Siendo  $V \cos \theta$ , la componente horizontal de la velocidad inicial, resulta, que la que realmente tiene el proyectil en este mismo sentido, en el momento de la salida, será

$$\sqrt{V^2 \cos^2 \theta + W_1^2}$$

y siendo por regla general  $W_1^2$  despreciable con relacion al primer término de la cantidad subradical, puede admitirse,

que la velocidad inicial, no experimenta alteracion sensible por la influencia de la componente  $W_1$ .

El plano vertical en que se mueve el proyectil, formará con el de tiro un ángulo, cuya tangente tendrá por valor,

$$\frac{W_1}{V \cos \theta}$$

por lo que, prescindiendo de la derivacion, el proyectil se moveria, si aquella no existiese, en el expresado plano vertical y por lo tanto, el punto de caida, se desviaria del primitivo plano de tiro, una longitud,

$$\frac{W_1 X}{V \cos \theta}$$

Ahora bien, para que el aire quede inmóvil, es preciso imprimir á todo el sistema una velocidad igual y contraria á  $W_1$ , y siendo  $T$ , el tiempo de duracion del trayecto del proyectil,  $W_1 T$ , será lo que en total se habrá desviado del primitivo plano de tiro, por lo que, la correccion que debe hacerse experimentar á la derivacion será;

$$W_1 \left( T - \frac{X}{V \cos \theta} \right) \quad (22)$$

en la que  $X$ ,  $V$  y  $\theta$ , tienen los valores  $X_1$ ,  $V_1$  y  $\theta_1$  corregidos por la influencia que sobre ellos ejerce la componente  $W$  de la velocidad del viento.

El coeficiente  $H$  de la fórmula (20), por regla general no es constante: la velocidad inicial del proyectil tiene influencia sobre la derivacion: segun unas experiencias, las derivaciones eran proporcionales á los cuadrados de las velocidades y segun otras mas recientes, lo son solo á las velocidades, cuando estas llegan á 450<sup>m</sup> sin pasar de los 530<sup>m</sup>; estas contradicciones se explican, atendiendo á que si en un principio, crece rápidamente la derivacion con la velocidad, el crecimiento debe detenerse y llegar despues á decrecer, puesto que la derivacion sería nula si la velocidad fuese infinita.

La fórmula de las derivaciones, debe por lo tanto ser dependiente de una función de la velocidad que aun no está determinada, respondiendo por ahora suficientemente á las necesidades de la práctica, la expresión

$$D = KV^2 \text{sen}^n \theta$$

Crece tambien la derivacion, en piezas semejantes, con el factor  $\frac{d^3}{p}$ , es decir; inversamente á la densidad del proyectil, convirtiéndose por esta razon la fórmula que la representa, en

$$D = K' \frac{d^3}{p} V^2 \text{sen}^n \theta$$

por lo que, si  $K'$  permanece constante (como algunas experiencias lo han demostrado) proyectiles semejantes y de la misma densidad, en los que los pesos son proporcionales á los cubos de los calibres, tendrán las mismas derivaciones, bajo iguales inclinaciones, cuando sus velocidades iniciales sean tambien iguales.

Por último, el ángulo de inclinacion de las rayas, ejerce una influencia directa sobre la derivacion: segun algunas experiencias, parece deducirse que las derivaciones, varían proporcionalmente á la tangente trigonométrica de dicho ángulo, por lo que

$$D = K'' \text{tang} \beta \frac{d^3}{p} V^2 \text{sen}^n \theta$$

**118. Desvios laterales.**—La diferencia entre el desvio medio y cada uno de los observados con respecto al plano de tiro, en un conjunto de disparos, hechos en las mismas condiciones, son los desvios laterales, debidos á las causas accidentales y la media de todos, toma el nombre de desvio lateral medio, y cuyo valor  $q$  nos proponemos determinar.

Los desvios laterales, son producidos por dos causas distintas.

- 1.ª Por el desvio angular inicial en sentido lateral.
- 2.ª Por todas las demás causas perturbatrices.

Llamando  $q'$  y  $q''$  respectivamente, á los desvios medios debidos á cada una de estas dos causas, se tiene segun enseña el cálculo de probabilidades

$$q^2 = q'^2 + q''^2 \quad (23)$$

Por regla general, la direccion de la velocidad del proyectil á la salida de la pieza, no está contenida en el plano de tiro: si por una parte se proyecta sobre él y por otra sobre un plano que pasando por el eje de la pieza, sea perpendicular al de tiro; los ángulos que ambas proyecciones formen con el eje, son respectivamente el ángulo de reelevacion, que ya hemos dicho como se determina, y el desvio angular lateral: el valor medio de este se admite es igual al medio del primero, por cuanto en un conjunto de tiro, los desvios angulares se producen en todos sentidos indistintamente, sin sujecion á ninguna ley conocida.

Sea pues  $\Sigma$  el desvio angular lateral medio; proyectando este ángulo sobre un plano horizontal, el ángulo proyectado tendrá por tangente,  $\frac{\text{tang } \Sigma}{\cos \theta}$ , por lo tanto, en el alcance  $X$ , se tendrá

$$q' = \frac{X \text{ tang } \Sigma}{\cos \theta}$$

ó bien, combinando esta ecuacion con la ya conocida,

$$\frac{V^2 \text{ sen } 2\theta}{gX} = 1 + C V^2 X$$

se tendrá;

$$q' = \frac{2 V^2 \text{ sen } \theta}{g(1 + C V^2 X)} \text{ tang } \Sigma \quad (24)$$

En cuanto á  $q''$ , admitiremos que varia proporcionalmente al tiempo en que el proyectil está expuesto á las causas perturbatrices exteriores, ó sea á la duracion  $T$  del trayecto, la que segun la fórmula (19), es á su vez sensiblemente proporcional á  $\sqrt{X \text{ tang } \theta}$ , por lo que puede ponerse

$$q'' = M X \text{ tang } \theta \quad (25)$$

Sustituyendo en la ecuacion (23), los valores dados por las (24 y 25), se tendrá;

$$q^2 = \frac{X^2}{\cos^2 \theta} (\tan^2 \Sigma + M^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (26)$$

ecuacion que permite, por una série de experiencias, deducir los valores de  $\tan \Sigma$  y de  $M$ .

**119. Desvios longitudinales.**—Del mismo modo que anteriormente hemos dicho, si hecha una série de disparos en las mismas condiciones, se miden los alcances, las diferencias entre ellos y el alcance medio obtenido, son los desvios longitudinales, cuyo medio es el desvio longitudinal medio, correspondiente á la situacion que tenga la pieza.

Le llamaremos  $Q$  y puede ser debido á tres causas independientes:

- 1.<sup>a</sup> Al ángulo de reelevacion  $\Sigma_1$ .
- 2.<sup>a</sup> Al desvio medio de velocidades  $\delta$ .
- 3.<sup>a</sup> A la variacion media  $\Delta$  del coeficiente  $C$ , ó sea á las causas perturbatrices.

llamando  $Q'$ ,  $Q''$  y  $Q'''$ , los desvios medios correspondientes á cada una de estas causas, se tendrá;

$$Q^2 = Q'^2 + Q''^2 + Q'''^2 \quad (27)$$

admitiendo que cada uno de estos desvios, es proporcional á cada una de las variaciones de las causas que los producen, se tendrá;

$$Q' = \frac{dX}{d\theta} \tan \Sigma_1$$

$$Q'' = \frac{dX}{dV} \delta$$

$$Q''' = \frac{dX}{dC} \Delta$$

Ahora bien, de la ecuacion

$$\frac{V^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} = X + CV^2 X^2$$

se obtienen los valores de las derivadas que entran en las anteriores expresiones, los que substituidos en ellas y los de Q', Q'' y Q''' que así resulten, en la ecuacion (27), nos dá;

$$Q^2 = \frac{4 V^4 \cos^2 2\theta}{g^2 (1 + 2 C V^2 X)^2} \operatorname{tang}^2 \Sigma_1 + \frac{4 V^2 (\operatorname{sen} 2\theta - g C X^2)^2}{g^2 (1 + 2 C V^2 X)^2} \delta^2 + \frac{V^4 X^4 \Delta^2}{(1 + 2 C V^2 X)^2} \dots \quad (28)$$

expresion en la cual, en el valor de Q' puede suprimirse del denominador el término  $2 C V^2 X$ , que es despreciable cuando  $\theta$  es pequeño, y si esto no se cumple, lo es tambien con relacion al numerador.

La experiencia ha demostrado, que puede prescindirse del último término, ó sea de Q''', aumentando el valor del segundo, ó prescindir del segundo, si se aumenta el tercero, quedando entonces respectivamente las siguientes expresiones

$$Q^2 = \left( \frac{2 V^2 \cos 2\theta}{g} \operatorname{tang} \Sigma_1 \right)^2 + \left( \frac{2 V}{g} \operatorname{sen} 2\theta \delta \right)^2 \quad (29)$$

$$Q^2 = \left( \frac{2 V^2 \cos 2\theta}{g} \operatorname{tang} \Sigma_1 \right)^2 + V^4 X^4 \Delta^2 \quad (30)$$

Tomando en cuenta todos los términos de la ecuacion (28) y substituyendo en el segundo término, en lugar de  $\operatorname{sen} 2\theta$  su valor (ecuacion 11)

$$Q^2 (1 + 2 C V^2 X)^2 = \frac{4 V^4 \cos^2 2\theta}{g^2} \operatorname{tang}^2 \Sigma_1 + \frac{4 X^2}{V^2} \delta^2 + V^4 X^4 \Delta^2 \quad (34)$$

Si se determina  $\Sigma_1$  como se dijo (párrafo 114) se puede calcular el valor de la expresion

$$S = \frac{Q^2 (1 + 2 C V^2 X)^2 - \frac{4 V^2 \cos^2 2\theta}{g^2} \operatorname{tang}^2 \Sigma_1}{X^2}$$

y conocido que sea  $S$  y llamando

$$A = \frac{k \delta^2}{V^2} \quad \text{y} \quad B = V^4 \Delta^2$$

la ecuacion (31) que puede escribirse

$$S = A + BX^2$$

dará, empleando el método de mínimos cuadrados, los valores de  $A$  y  $B$  y por lo tanto los de  $\Delta$  y  $\delta$ , teniéndose así todos los datos necesarios para calcular el valor de  $Q$ , por las fórmulas dadas.

**120. Desvio vertical medio.**—Este desvio solo ha podido experimentarse á muy pequeñas distancias y se admite generalmente, que es igual al desvio longitudinal, por la tangente del ángulo de caída, lo que equivale á admitir que es rectilínea una pequeña parte de la trayectoria.

Tales son las fórmulas empleadas por la Comision de Gávre, para la resolucion de los problemas balísticos, cuya aplicacion es muy sencilla (\*)

---

(\*) Helié.—París, 1879.



## CAPÍTULO 4.<sup>o</sup>

### CARGAS Y PUNTERIAS.

**121. Consideraciones generales.**—En las piezas lisas, sabemos que la carga que produce el máximo efecto, es la de peso igual al del proyectil, debiendo sin embargo tener presente que, á partir de la carga mitad de esta, el efecto útil, aumenta con mucha lentitud y está muy lejos de ser proporcional al aumento de carga, no compensando por consiguiente el efecto nocivo que se ejerce sobre la pieza: esta consideración, hizo fijar la carga de  $\frac{1}{3}$  del peso del proyectil, como un límite del que no es conveniente pasar.

La relacion entre los pesos de la carga y proyectil, debe ser aun menor en las piezas rayadas; porque siendo, á igualdad de calibre, mayor el peso del proyectil que en las lisas, esto solo, produciria un aumento notable en la carga, y siendo, por otra parte mayor su resistencia al movimiento, tanto por su mayor masa, como por el de rotacion que se le imprime por el rayado de la pieza; un exceso de fuerza motriz, la obligaria á salvar las estrias, yá sea surcando el ánima, ó yá desprendiéndose los tetones, ó arrancando la envuelta de plomo, ó anillos de cobre; y como quiera que la rotacion que trata de imprimirse al proyectil, es tanto mas rápida cuanto

menor sea el paso de las rayas, la carga tendrá que disminuir con este, para que el efecto destructor sobre la pieza no aumente. Las experiencias verificadas en Chalons, Gâvre y Calais, confirman que, en general no es notable el crecimiento de velocidad, producido por un aumento de carga sobre la de  $\frac{1}{5}$  ó  $\frac{1}{6}$  del peso del proyectil; hecho que se explica por la circunstancia de que, una carga muy grande, no podrá quemarse por completo antes de que aquel abandone la pieza, debiendo además desarrollarse en un principio mayor tension, por el consiguiente aumento de resistencia al movimiento que produce un notable crecimiento de efecto nocivo.

No debe nunca llegarse á la carga limite que produce el efecto máximo, y para fijar la ordinaria que debe emplearse en las piezas rayadas, preciso es tener en cuenta todos los elementos que ejercen influencia sobre ella, que es el estudio que nos proponemos hacer.

La cantidad de carga, depende en primer término de la velocidad de su combustion, porque si fuese tan rápida que se quemara por completo antes de ponerse el proyectil en movimiento, desarrollaria todo el trabajo de que es susceptible, empleándose en su totalidad, en comunicar al proyectil la máxima velocidad que fuese capaz de imprimirle; pero á medida que la velocidad de combustion disminuye, prescindiendo de la pérdida de trabajo ocasionada por la expansion de los gases y disminucion de calórico absorbido por las capas del metal, y aumento de volumen ocasionado por el movimiento del proyectil, antes de que los granos se quemen por completo, producirá una disminucion de tension sobre él, que solo puede compensarse con un aumento de carga, ó haciendo que obre mas tiempo sobre aquel, lo que puede expresarse diciendo, que cuanto mas lentas son las pólvoras, exigen mayor cantidad de carga, y que siendo iguales las demás circunstancias, deberán ser empleadas en las piezas de mayor longitud: por el contrario, la disminucion en la longitud del ánima, exige el empleo de pólvoras mas vivas, siempre sin embargo bajo el supuesto de no descender esta longitud de un

cierto limite, pues esto obligaria á emplear pólvoras muy rompedoras.

**122.** Suponiendo constante el volúmen en que se aloja carga, cuanto mayor sea esta, mayor será la presion desarrollada por los gases, y por consiguiente la velocidad de combustion de la pólvora, produciéndose así un aumento en la velocidad impresa al proyectil: inversamente, si dejando constante la carga, se disminuye el volúmen de la recámara, por análoga consideracion, se obtendrá igual efecto; lo que nos dice, que la cantidad de carga y su volúmen, influyen en sentido contrario sobre la velocidad del proyectil, ó lo que es igual, que el efecto útil crece, con la relacion entre el peso de la carga y volúmen que ocupa; esta relacion se conoce con el nombre de *densidad de carga* y para una pólvora dada, debe tener un valor máximo, del que no debe pasarse.

De la anterior consideracion se desprende que, á medida que sea menor el volúmen en que se aloja la pólvora, mas lentas pueden ser las que se empleen, porque al disminuir el volúmen sin hacerlo el peso de la carga, habrá un aumento en la velocidad del proyectil, así como en el efecto nocivo sobre la pieza por consecuencia del crecimiento de la densidad de carga, y este efecto nocivo solo puede compensarse, siendo menor la velocidad de combustion, que es la propiedad que caracteriza las pólvoras lentas.

**123** Otro de los elementos que influyen directamente en la cantidad y naturaleza de la carga que deba emplearse, es el calibre. Consideremos dos piezas A y B de calibres diferentes, en órden de magnitudes crecientes: á igualdad de clase de pólvora, el proyectil de la pieza B, por ser de mayor calibre, presentará mayor resistencia al movimiento, por lo que deberá ser relativamente menor la carga en esta, que en la pieza A, pues en caso contrario, habria un aumento de velocidad y de efecto nocivo.

Puede deducirse igual conclusion por un razonamiento mas riguroso: supongamos para ello que la relacion de los calibres sea  $\frac{1}{2}$ , y proporcionales todas las demás dimen-

siones de las piezas: para una misma densidad de carga, en la pieza mayor, se empleará una ocho veces mayor que en la otra, ocupando un volúmen tambien ocho veces mayor: si el proyectil no se moviese, la presion sobre él seria igual en ambas piezas, pero en cuanto inicie su movimiento, ya no puede ser igual esta presion, puesto que no son proporcionales el aumento de presion y el de volúmen originado por la marcha del proyectil. En efecto, sea  $S$  la seccion del ánima en la pieza menor, y  $a$ , el espacio recorrido por el proyectil, contado desde su posicion inicial;  $S \times a$  será el volúmen originado por el movimiento del proyectil, ó bien el aumento en el que tenian los gases para su expansion y si  $L$  representa la longitud de la recámara,  $S \times L$  será el primitivo, existiendo entre ambos la relacion  $\frac{a}{L}$ ; en la pieza mayor, esta relacion será

$\frac{a}{2L}$  que es menor que la anterior, por lo que, si en un principio la presion debia ser la misma en las dos piezas, ahora será evidentemente mayor en la de mayor calibre.

En la clase de pólvora que debe emplearse, atendiendo á la diferencia de calibre, es tanto mas notable la influencia de este, cuanto mas lenta sea la pólvora, pues se concibe que, con una pólvora tan viva que pudiera quemarse por completo antes de ponerse el proyectil en movimiento, en calibres diferentes á igualdad de densidad de carga, daria segun lo dicho anteriormente, la misma velocidad; mientras que con las lentas, seria mayor la velocidad en el calibre mayor, porque en este, la velocidad de combustion aumentaria durante el movimiento del proyectil, por efecto del aumento de presion en cada instante.

Tambien el sistema de carga influye sobre su peso: á condiciones iguales, fácilmente se concibe, que una pieza á cargar por la boca, necesita mayor cantidad de pólvora que otra de retrocarga, porque en esta, tanto la supresion del viento, como la mayor resistencia por efecto del forzamiento del proyectil, aumentan la presion.

**124.** Reasumiendo lo anteriormente expuesto diremos, que puede aumentarse la velocidad del proyectil de varios modos.

1.º Dejando constante la carga y aumentando su densidad; método que tiene el inconveniente de aumentar la presión inicial y por ello el efecto nocivo.

2.º Aumentando la carga; lo que puede efectuarse aumentando su densidad, dejándola constante, ó disminuyéndola.

Si se aumenta la densidad de carga, el efecto perjudicial sobre la pieza aumenta también.

Si la densidad de carga no se varía, el aumento de velocidad no podrá pasar de cierto límite; y por último, si la densidad de carga disminuye, se obtendrá la ventaja de disminuir el efecto nocivo, pero habrá que aumentar mucho más, que en los casos anteriores, la cantidad de carga.

Siempre que se aumente la carga, puede aumentarse la lentitud de la pólvora para disminuir así el efecto nocivo.

**125. Cargas comprimidas.**—El empleo de pólvoras de granos gruesos, permite el uso de las grandes cargas que hoy tienen que emplearse en las modernas bocas de fuego de grueso calibre, pues con ellas, no es tan considerable el efecto destructor sobre la pieza.

Pero aun así, la superficie inicial de inflamación es muy grande, y en los primeros instantes, la presión alcanza un valor considerable, si bien al poco tiempo se verifica un cambio brusco en ella.

La disminución de la tensión inicial se obtendría, aumentando considerablemente la magnitud de los granos; pero como quiera que de este modo se retardaría la combustión, el empleo de grandes cargas se haría imposible porque no llegarían á quemarse por completo en tiempo útil, es decir en el que tarda el proyectil en abandonar la boca de la pieza. El objeto de las cargas comprimidas es obtener una pólvora que, en el primer instante, se queme como si fuese de granos de gran tamaño, con lo que se disminuye la tensión inicial, y en los sucesivos lo haga por su disgregación, como si los granos

fuesen pequeños, para no retardar la combustión; ó lo que es igual, hacer que la inflamación de la carga sea instantánea en toda su masa, cualquiera que sea su peso, disminuyendo al propio tiempo su volumen, con lo que, aumentando la densidad, crece la presión y por lo tanto, la velocidad impresa al proyectil.

Estas cargas, se forman por una compresión lenta de la pólvora en granos, conducida de tal modo, que siendo la suficiente para que estos se unan entre sí, no les haga perder su primitiva forma, constituyendo al fin unas galletas con un hueco central, cuya densidad, no es mucho mayor que la de la pólvora empleada en su confección.

La experiencia demuestra que estas cargas, al poco tiempo de su inflamación, se queman como la pólvora en granos, hecho que fácilmente se explica considerando, que una vez inflamadas, las galletas se deshacen en el interior de la boca de fuego. La tensión inicial es en estas cargas menor que en las ordinarias, porque á igualdad de peso, la superficie de inflamación es mucho menor que en ellas.

El aumento de la superficie de inflamación, si bien produce irregularidades en la velocidad del proyectil, no causa una variación sensible en ella, cuya circunstancia se comprueba cargando una pieza con trozos de galletas; comprendiéndose desde luego que así sea, porque si bien es verdad que de este modo se aumenta la superficie inicial de inflamación, esta no puede nunca llegar á ser igual á la de la carga ordinaria; esta propiedad es importante porque destruye en parte, uno de los inconvenientes que á las cargas comprimidas se atribuyen, cual es, el no servir mas que para el calibre para que estén construidas, pues de este modo, podrá, en algunos casos, emplearse trozos de galletas correspondientes á otros calibres.

Tampoco tiene influencia sensible la variación de espesor de las galletas, siempre que la superficie inicial de inflamación se conserve la misma.

En cambio, si se trata de hacer su densidad mucho mayor

que la de la pólvora de que provienen, disminuye la velocidad del proyectil, y así debe suceder, porque el aumento de densidad se consigue con una mayor presión y por efecto de ella, llegaran los granos á perder su forma y constituir una masa, que arderá por capas concéntricas.

La ventaja obtenida con estas cargas, consiste en permitir el uso del bronce para la construcción de las piezas de artillería, así como el de pólvoras vivas en las de retrocarga: en cambio, presentan el inconveniente de producir irregularidades en la combustión y de aquí, el que haya un cambio brusco en la presión después de los primeros instantes de su inflamación.

Con objeto de disminuir las irregularidades debidas á estas cargas, se ha tratado de construir una pólvora que se quemase por capas sucesivas de magnitud creciente, disminuyendo de este modo la tensión inicial y aumentando gradualmente las sucesivas. Esto se ha conseguido con el empleo de las cargas de pólvora prismática, de que ya nos hemos ocupado y cuyos granos, afectando formas poliédricas, cierran el paso de la llama, llegando así en parte á conducirse como si fueran de un solo grano. La inflamación se propaga á través de orificios cilíndricos abiertos en los granos, los que, presentando al principio una superficie mínima, crece esta á medida que se verifica la combustión.

Las figuras (32, 33 y 34), dan una idea de diferentes formas de granos. Con estas cargas, se tiene la ventaja de poder dar mayor homogeneidad á la pasta, por su sistema de fabricación, obteniéndose por consecuencia mayor regularidad en la combustión.

El inconveniente que presenta esta clase de pólvora, es que, rompiéndose los granos con facilidad por efecto de la gran presión que se desarrolla en el interior de la boca de fuego, y aumentándose con esto la velocidad de inflamación, hay también un aumento brusco en la presión, y el consiguiente en el efecto nocivo sobre la pieza; este inconveniente no es tan grande, si se atiende á que trascurren un cierto tiempo desde la

inflamacion inicial, hasta que la rotura se verifique, el proyectil habrá recorrido un trayecto en el ánima, con lo que, aumentándose el espacio para la expansion de los gases, que despues de la rotura se formarán rápidamente, no es tan grande el efecto destructor sobre la pieza.

En los morteros, á causa de su pequeña longitud, las pólvoras prismáticas dan poca regularidad en el tiro, y se concibe fácilmente que así sea, por no haber tiempo suficiente para la completa combustion de la carga. Así lo han demostrado las experiencias rusas verificadas en Perm, en las que se dedujo, que la pólvora mas conveniente para esta clase de piezas, era la de granos gruesos.

**126. Saquetes y cartuchos.**—Del mismo modo que en la artillería lisa, las cargas de los cañones rayados se colocan dentro de saquetes de lanilla, siempre que no haya proporcion de adquirir ventajosamente en el comercio la filosedá.

Tienen estos saquetes el inconveniente, de no presentar gran resistencia para los trasportes, así como el de permitir el tamizado de la pólvora; por esta razon en Francia, se propuso fabricar los cartuchos de una madera propia para su construccion. Constan (fig. 35) de un cilindro, en el que las fibras de la madera son normales á sus generatrices, para que sea mayor su resistencia; las bases, se cierran con discos y las uniones, tanto por el interior como por el exterior, con bandas de tela: Una galleta formada con grasa y estopa, colocada en la parte superior de la carga, constituye un lubricante.

Estos cartuchos si bien llenaban el objeto para que fueron construidos, resultaban de un coste excesivo, por lo que, se hicieron nuevas experiencias para probar la resistencia de los de lanilla y asegurar la conservacion de las municiones; el resultado satisfactorio de estas experiencias, hizo ver lo aceptable de esta tela, quedando desechados los anteriores.

**127.** Con objeto de aplicar á las piezas de artillería, la propiedad de los cartuchos de las armas portátiles, de verificar por si la obturacion en el acto del disparo, Reffye en su sistema de cañones de campaña, empleó con cargas comprimidas,

un cartucho (fig. 36) que consta de un cilindro de hoja de lata, cuyos bordes no están cerrados y si solamente puestos en contacto, cubriéndose la union con una banda de la misma materia: tanto por la parte exterior como por la interior, están cubiertos por varias vueltas de papel encolado. El fondo, está formado por un culote C de cobre, que tiene en su centro, una cavidad *aa*, dotada de varios orificios *oo*, que dán paso á la llama del estopin: el centro de esta cavidad, está reforzado con una pequeña chapa metálica P sujeta á remache: alójase en este hueco, una cápsula metálica *b* que tiene un orificio central *d* cubierto con tela fina, que es el que directamente comunica con el estopin; por último, el culote está sujeto á otro de carton *f*, sobre el que se colocan cinco galletas de pólvora comprimida, y sobre ellas, un disco de materia grasa, (que forma el lubricante.

El modo de obrar del cartucho es el siguiente: una vez inflamado el estopin, se comunica el fuego á la carga pasando primero por el orificio de la cápsula y despues por los del culote de cobre; la presion de los gases de la pólvora, actuando fuertemente en la pieza P, la obligan á que se adapte sobre el orificio *d*, impidiendo de este modo por completo, el escape de gases por el fogon: las cubiertas de papel se rompen, y el cilindro de hoja de lata, por efecto de la presion, se extiende, resbalando sus bordes por la banda que cubre la union, y como no está soldada, vuelve el cilindro, por efecto de su elasticidad, despues del disparo, á su posicion inicial, facilitándose así la extraccion.

Estos cartuchos tienen la incuestionable ventaja de verificar la obturacion, y la de conservar las cargas, propiedad que es tan indispensable en las comprimidas, presentando en cambio el inconveniente de ser mucho mayores su precio y peso, y no ser siempre fácil su extraccion.

**128.** En los cañones de retrocarga, la recámara ó sitio de la pólvora, ha tenido generalmente un diámetro mayor que el del ánima, pero solo lo necesario para facilitar la carga; Whitworth y Vavasseur, en 1872 construyeron piezas en las

que ambos diámetros tenían una diferencia notable, proponiéndose de este modo, disminuir la longitud de la recámara y por ello la del cartucho, para obtener mayor regularidad en la combustión de la carga; estas recámaras permiten también aumentar la longitud del ánima, á igualdad de la total de la pieza, ó sea sin aumentar su peso.

**129.** Este procedimiento, aplicable á las piezas de retrocarga, no lo era para las cargadas por la boca hasta que aparecieron los *cartuchos expansivos*, que teniendo el mismo diámetro que el ánima, para poder ser introducidos en ella, poseen la propiedad de ensancharse despues y llenar por lo tanto la recámara, disminuyéndose su primitiva longitud.

El primer cartucho propuesto, fué el del Mayor Maitland (1876) que era sencillamente como los ordinarios, sin mas diferencia que estar sujeto por varias tiras de papel, las que rompiéndose por un golpe del atacador, quedaba en parte deshecho y llenaba la recámara. Vavasseur al mismo tiempo, proponía otro de mejor aplicacion práctica, cuyo diámetro, era igual al de la recámara, pero antes de cargarlo de pólvora, se plegaba una parte del cartucho sobre una generatriz, sujetándose el pliegue con una larga aguja: en el momento que se introducía en el ánima, se quitaba la aguja, y al llegar á la recámara la pólvora, la ocupaba por completo como en el anterior, por deshacerse el pliegue: los dos ensayados de este género, tenían 286<sup>mm</sup> y 367<sup>mm</sup> de longitud, antes de su introduccion en la pieza, quedando respectivamente al entrar en la recámara, con 175<sup>mm</sup> y 249<sup>mm</sup>.

**130.** Armstrong, con objeto de aumentar considerablemente la velocidad inicial de los proyectiles, emplea cargas, cuyo peso excede al de su mitad, aumentando también el diámetro de la recámara, y para ellas el eminente artillero Noble, ha ideado unos cartuchos expansivos en los que, la tela del saquete está abierta según una generatriz y sus bordes están sujetos, sea por una aguja ó por un hilo que pasa por varios ojetes; estos últimos, son los que generalmente emplea en piezas de pequeño calibre: en los primeros, se quita la

aguja con el mismo atacador, y en los segundos basta un golpe de este para que el hilo se rompa: las figuras (37) y (38) representan estos cartuchos: con objeto de aumentar su resistencia en las marchas, se recubren con una funda de lona sujeta con una aguja, que se quita en el momento de hacer la carga.

Inútil parece indicar, que en las piezas recamaradas, se hace indispensable pasar el escobillon con mucho cuidado, pues por su forma, tienen el inconveniente de que es fácil queden residuos de las cargas anteriores.

**131. Lubrificantes.**—Como indica su nombre, tienen por objeto lubricar el interior del ánima, evitando la adherencia de los residuos de la pólvora, así como el emplomado de las estrías: su necesidad se hace mayor en las piezas de campaña, porque destinadas en general á hacer un fuego vivo, no es posible proceder en cada disparo á una escrupulosa limpieza.

El empleado en nuestra artillería, consistía sencillamente, en una lenteja metálica rellena de aceite, que se colocaba dentro del saquete sobre la pólvora, y en la parte de la ligadura del cartucho: su uso fué de poca duración, porque presentaba el inconveniente de que se quemaba el aceite, sin llenar por lo tanto su objeto.

Más perfeccionado que el anterior, es el usado en Inglaterra por Armstrong en sus cañones á retrocarga. Consiste (fig. 39 y 40) en una lenteja N, que contiene una mezcla por partes iguales, de jabón y aceite, y de un anillo B de cera, debajo del cual hay un taco C de cartón: al verificarse el disparo, se comprimen contra el proyectil, abriéndose la lenteja, y la mezcla que contiene, así como la cera, se reparten por el ánima, por lo que el taco, que se habrá dilatado, arrastra tras de sí los residuos que hayan podido quedar en las estrías: de las dos figuras, la primera sirve para los pequeños calibres, y para los mayores la segunda, diferenciándose únicamente, en que para aquellos, se coloca el lubricante en el interior del cartucho, y para estos exteriormente, uniéndose por medio

de la parte *m* de madera, que se enrosca en un suplemento.

Tienen todos los lubricantes, el inconveniente de aumentar la complicacion en la construccion de los cartuchos, y el peligro que siempre existe, de que la materia grasa pueda estropear la pólvora; razon por la que han caido generalmente en desuso.

La artillería Italiana, estudiando el procedimiento de lubricacion mas sencillo y exento de los inconvenientes de los anteriormente descritos, decidió recubrir el proyectil con una ligera capa de sustancia grasa; de diversas experiencias efectuadas, resultó ser la mas favorable, la mezcla compuesta de 25 partes de grasa de buey, 25 de parafina y 50 de jabon.

Posteriormente, se hicieron en Rusia experiencias comparativas entre el anterior sistema de lubricacion y el que sencillamente consiste en una capa de polvo de talco, extendida sobre el proyectil por medio de una brocha, hasta que aparece untuosa al tacto: de ellas resultó, que si bien es verdad que este último procedimiento evitaba en parte la adherencia del plomo en las estrias, era mucho mas eficaz el Italiano, que permitia no tener necesidad de pasar el escobillon á cada disparo, pudiendo adoptarse otro de mango corto para la limpieza de la recámara. La citada mezcla, que tambien se coloca sobre el proyectil con una brocha, formando una capa de medio milimetro de espesor, tiene la propiedad de endurecerse, no ablandándose ni aun por los fuertes calores del verano, lo que hace cómodo el manejo de los proyectiles.

En España, al suprimirse los lubricantes, se adoptó el escobillon corto engrasado, y siempre que la rapidez del fuego lo permita, se pasa otro largo empapado en agua fuertemente cargada de jabon, que se introduce por la recámara sacándolo por la boca.

**132.** De este modo, no se consigue desemplomar las estrias, y con este objeto, se ha adoptado un escobillon de alambre (fig. 44) el que, habiéndose experimentado con cañones sucios á expreso, no solo del sistema Krupp, sino tam-

bien de los de bronce de  $44^{\circ}/m$ , resultó, que debe introducirse en las piezas, metiendo primero en el ánima el extremo del asta que no tiene feminela, y de este modo si solo se hace rozar á esta por el ánima en sentido ó á favor de la direccion del alambre, es poca la limpieza que se consigue; pero si una vez dentro, á semejanza de lo que se practica con las feminelas de cerda, se le hace marchar hácia adelante y atras, entonces limpia y desemploma perfectamente: hasta tal punto es enérgico su efecto, que en el cañon de bronce, se notaron arenillas de este metal, arrancadas por las puntas de alambre.

En vista de todo lo indicado, la Junta Superior Facultativa, creyó que debia ser adoptado solamente para las piezas de acero, usándole con mucha prudencia, cuando haya necesidad imprescindible de esta clase de limpieza, como sucede despues de varios dias de fuego, ó bien cuando se quiera queden muy limpias para su buena conservacion, si no han de ser usadas en algun tiempo.

**133.** No parece ocioso tratándose de cargas, desvanecer una preocupacion muy general, cual es la de suponer, que dejando un hueco entre el proyectil y la carga, puede la pieza reventar en el acto del disparo. La explosion violenta de un cañon de 38 toneladas, á bordo del buque inglés el Thunderer, se habia supuesto podia ser debida á esta circunstancia, porque cargado por la boca, por medios hidráulicos, y necesitándose para esto dar á la pieza una depresion de  $44^{\circ}$ , podia suceder que, al sacar el atacador, arrastrase consigo el taco que se coloca sobre el proyectil, siguiéndole este y no el cartucho, con lo que, quedaria entre uno y otro un hueco considerable. Consultado el Capitan Noble, manifestó, que en su opinion no debia ser atribuido el accidente á esta causa, citando varios casos, en que habia quedado un hueco entre el proyectil y el cartucho, sin que el cañon sufriese al dispararlo efecto nocivo mayor que el ordinario, siempre que la pólvora empleada fuese de las de combustion lenta y no de las antiguas rompedoras.

Insertamos á continuacion una reseña de las experiencias verificadas en Elswick, para demostrar de un modo práctico la verdad de su opinion; las que tomamos de nuestro Memorial, que las ha publicado por habérselas facilitado el mismo Capitan Noble.

El cañon que se empleó era de 20 toneladas, del calibre de 40 pulgadas (25 cent.), cuya recámara habia sido barrenada al diámetro de 42 pulgadas. La pólvora empleada, fué la cúbica inglesa, conocida por *Pebble*, cuyas velocidades y presiones están determinadas en gran variedad de cañones. La carga fué constantemente de 85 libras, que es la ordinaria de los cañones de 38 toneladas del Thunderer, así como la longitud del cartucho, que era de 22 pulgadas. El último disparo, se hizo con la pólvora denominada R. L. G., cuyo grano, es semejante al de nuestra antigua pólvora de cañon, y de combustion mucho mas rápida que la *Pebble*. La velocidad inicial comunicada por este cañon á un proyectil de 400 libras, estando en contacto con el cartucho, cuya longitud era de 22 pulgadas, y conteniendo 85 libras de pólvora *Pebble*, es la de 4487 pies; y la presion desarrollada en el fondo de la recámara, próximamente unas 20 toneladas sobre pulgada cuadrada. Los proyectiles llevaban todos el anillo obturador, igual al que para la artilleria de campaña está descrito en el número del Memorial de Artillería correspondiente á Enero de 1880. Para determinar las presiones, se empleaba el aparato *crusher*, igualmente descrito en el referido número; uno estaba colocado en el fondo de la recámara, y otros tres en la superficie del culote del proyectil; uno de ellos en el centro, otro en la parte superior y el otro en la inferior. Los cilindros del *crusher*, de los cuatro aparatos, en el primer disparo y el colocado en el centro en el segundo, habian sufrido una compresion previa de 40 toneladas; los demas cilindros usados en los otros disparos, no habian sufrido esta compresion. En el siguiente estado constan los resultados obtenidos.

Carga.		Clase de pólvora.	Peso del proyectil en libras.	Distancia entre el cartucho y el proyectil, pies.	Colocacion del taco.	Velocidad inicial en pies.	Presiones en toneladas sobre pulgada cuadrada.					
							SOBRE EL CULO DE DEL PROYECTIL.					
Número del disparo.	Peso en libras.						En el fondo de la recámara.		En la parte superior.		En la parte inferior.	
							En la parte superior.		En la parte inferior.			
1.º	85	Pebble	403	2	No se usó.	4240	11,7	No llegaron á 10 toneladas.				
2.º	»	»	402	6	Idem....	4067	10,15	7,6	No llegó á 10		6	
3.º	»	»	»	4	Sobre el proyectil.	849,5	10	Menos de 8		5,6	Menos de 8	
4.º	»	»	»	2	4 pies delante del proyectil.			1208	11,1	7,9	9,2	8,4
5.º	»	R.L.G.	»	4	No se usó.	4136	16,7	25,5	35,3	23,3		

Los tacos, eran de carton piedra, en forma de discos, iguales á los usados en el Thunderer.

Como se vé en el estado, el hueco entre la carga y el proyectil, ya se emplee taco ó no, lejos de producir un aumento de presiones sobre la pieza y el proyectil, las disminuye, cuando se usa pólvora Pebble. Tampoco produce efecto nocivo sobre la pieza, el que el taco se quede delante del proyectil, dejando un hueco considerable, y no puede ser motivo para producir la rotura del cañon. Con la pólvora viva, se vé en el 5.º disparo, que si bien la presion sobre el proyectil fué enorme, en el fondo de la recámara no llegó á la normal que dá esta pólvora, que es de 27 toneladas sobre pulgada cuadrada. La diferencia notable de presiones que se observan en puntos poco distantes entre sí, la explica el Capitan Noble, suponiendo que en los *crushers*, que acusan las mayores presiones, los gases en masas considerables han chocado con gran velocidad contra el aparato, y su fuerza viva, convertida en presion, ha hecho acusar presiones anómalas, muy crecidas.

**131. Cargas de los proyectiles huecos.**—La materia en uso general, hasta ahora, para la carga explosiva de los proyectiles huecos, es la pólvora ordinaria de cañon, en cantidad suficiente para producir el mayor número de cascós, pero siempre atendiendo á que estos no sean tan pequeños, que no consigan sacar hombres fuera de combate.

Generalmente, se llena toda la cavidad interior de los proyectiles, pudiendo decir, que los limites entre los cuales varia la carga son, de  $\frac{1}{20}$  á  $\frac{1}{30}$  del peso de aquellos, llegando algunas veces hasta ser  $\frac{1}{15}$ , tomando siempre las cargas mayores, á medida que sean mas resistentes los objetos que se batien.

Varios son los defectos que tiene la pólvora ordinaria para el objeto que nos ocupa, que son; poca fuerza, facilidad de alterarse en presencia del metal del proyectil, y poca resistencia para el transporte, y si bien esto último podia evitarse en parte, aumentando la dureza de los granos, nunca podrá llegar á ser tan considerable, que se impida la pulverizacion

y fuerte compresion que en ella se produce, en el momento del disparo.

Experiencias verificadas en Francia, con diversos proyectiles cargados con pólvoras de granos finos y gruesos, ó sea de fusil y de cañon, demostraron el efecto que se produce, por el fuerte choque del proyectil á su partida, así como por el movimiento de rotacion que lleva, resultando ser una compresion tal, que solo una pequeña parte de la carga, generalmente  $\frac{1}{10}$ , permanece en el estado libre: la compresion es variable, distinguiéndose tres distintas: proviene la mayor, del choque á la partida, por el que se forma una masa muy dura de granos aglomerados, rotos algunos y unida al culote y parte cilindrica del proyectil, su dureza, aumenta con la velocidad inicial de este y llega á ser tan grande, que se hace necesario un cincel para separarla: la (fig. 42) indica su forma cuando el proyectil no tiene movimiento de rotacion, y la (43) cuando se halla animado de este movimiento.

La segunda compresion, se indica en la (fig. 44); no se encuentra mas que en los proyectiles que tienen rotacion y se halla limitada generalmente, por los planos A O y B O, que forman ángulos variables, entre  $420^\circ$  y  $480^\circ$ .

Y la última, debida sin duda alguna al choque del proyectil contra el terreno, se forma próxima al orificio de la espoleta, en pequeña cantidad, y constituida casi en totalidad por polvorin, no siendo grande su dureza.

Era por lo tanto necesario, determinar la influencia que estos efectos podian tener sobre la explosion de los proyectiles, para lo cual, se efectuaron experiencias, haciendo estallar granadas dentro de pozos cerrados, unas que habian sido disparadas con anterioridad y otras no; de estas experiencias, se dedujo el importante resultado de que en nada influia tal efecto, ni bajo el punto de vista del número de cascós, ni de su fuerza explosiva, este resultado fué corroborado tambien por experiencias análogas hechas en Italia.

En cuanto á la fácil descomposicion de la pólvora, por la presencia del metal y su poca fuerza explosiva, son inconye-

nientes que pueden tambien en parte remediarse, aumentando la intimidad y densidad de la mezcla, así como el pavon y empleando pólvoras de grano fino: pues si bien la aglomeracion que hemos dicho se verifica, puede hacer creer que no ejerce ninguna influencia la mayor ó menor magnitud de los granos, sin embargo debe tenerse presente, que no siempre será tan grande la velocidad del proyectil, que cause efectos tan considerables como los indicados, y además, que constituyendo al fin una carga comprimida, ya al tratar de ellas, vimos que concluian por quemarse como si fuesen de las ordinarias.

Con objeto de preservar á la carga explosiva de toda suciedad y para su mejor conservacion, reciben interiormente los proyectiles una ligera capa que forme un barniz: en España, se compone de siete partes de pez griega, una de aguarrás, y media de ocre rojo: en Austria, los de la artilleria del Ejército, solo se revisten de una capa de pez, y los de la Marina, de una mezcla compuesta de pez, lacre de París y asfalto. En Suiza, sencillamente se les dá una mano de pintura al óleo.

Hace ya algunos años, se estudia el reemplazar la pólvora ordinaria para cargar los proyectiles, con alguna otra materia explosiva, siendo la dinamita y el fulmicoton, las que mas se han sometido á exámen, y de estas la última, la que al parecer ha dado mejores resultados.

La colocacion mas ventajosa de la carga, para pequeños calibres, consiste en poner el fulmicoton seco y comprimido, en un tubo metálico adaptado al cuerpo de la espoleta, y llenar el resto del hueco interior del proyectil, con agua: y para los grandes, introducir el fulmicoton rodeado tambien de agua, sirviendo ésta, para la igual trasmision á las paredes del proyectil, de la presion ejercida por los gases de la carga; habiéndose probado en efecto, que la explosion es mucho mas enérgica de este modo, que colocando la carga sola: la siguiente tabla, reasume las experiencias hechas con este objeto, disparando un cañon contra varias filas de blancos, que tenian figurados soldados de caballeria é infanteria.

Granada cargada con	PUNTOS DE IMPACTO.		HOMBRES FUERA DE COMBATE.	
	Sobre el primer blanco.	Sobre todos.	de infantería.	de caballería.
Agua y $\frac{1}{2}$ onza de fulmicoton en un tubo de bronce.....	67	95	31	25
Agua y $\frac{1}{4}$ de onza de fulmicoton en un tubo de bronce.....	64	90	32	26
Una onza de fulmicoton en un tubo de acero..	44	63	22	20
Una libra de pólvora de cañon.....	12	48	7	7

Tiene el inconveniente el fulmicoton, de no producir humo en el momento de la explosion, por lo que no es fácil rectificar el tiro; inconveniente que no parece por otra parte difícil de vencer.

**135. Punterías.**—*Consideraciones generales*—Cuando un proyectil se dispara con una pieza rayada, se ha dicho, que por el movimiento de rotacion que esta le imprime, la resistencia del aire le hace desviar siempre en un mismo sentido, con respecto al plano vertical de tiro, siendo su derivacion constante, para una misma distancia. De aquí se desprende, que para apuntar una pieza de esta clase, se hace preciso, además de calcular la altura de alza correspondiente á la distancia á que se encuentra el blanco, colocar el eje de la pieza con una inclinacion tal, que el proyectil, por su derivacion, pase por aquel punto.

Consideremos (fig. 45), las dos proyecciones horizontal y vertical de una pieza, con la posicion conveniente para que una vez disparada, el proyectil dé en el blanco A. Se llama

*plano de tiro*, al vertical que pasa por el eje B C de la pieza, y de *direccion*, al que siendo tambien vertical, contiene la recta que une la boca de la pieza con el blanco, llamándose *ángulo de direccion ó derivacion*, al formado por el plano de tiro, con la línea de posicion, que designaremos por  $\beta$ : ángulo de mira es, como sabemos, el formado por el eje de la pieza, con la proyeccion sobre el plano de tiro de la línea de posicion; le representaremos por  $\alpha$ . (\*)

Siendo  $m$  el guion de la pieza, su proyeccion  $m'$  sobre el plano de alzas, es el origen de estas, que podemos considerar como centro de un sistema coordenado rectangular contenido en dicho plano, siendo uno de sus ejes, la horizontal paralela al de muñones, y el otro, una línea perpendicular á esta: las coordenadas  $m'D$  y  $DF$ , del punto en que la línea de mira artificial  $mA$ , encuentra el plano citado, son precisamente las alzas vertical y lateral precisas, para hacer la puntería en este caso; puesto que, si colocada la pieza en otra posicion cualquiera, se dirige de nuevo la visual por los puntos  $F$  y  $m$ , moviendo la pieza hasta que pase por el blanco, es evidente, que en este momento, habrá quedado colocada en la misma posicion que antes tenia y que hemos supuesto era la necesaria, para que la trayectoria pase por el punto  $A$ . La cuestion así presentada, queda reducida á calcular los valores de dichas alzas, que llamaremos respectivamente  $H$  y  $D$ , en funcion de ciertas dimensiones constantes de la pieza y de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , variables con la distancia al blanco y derivacion del proyectil.

**126. Fórmulas generales.**—Refiramos (fig. 46) la pieza á dos planos de proyeccion rectangulares, paralelo uno al de tiro y el otro, á la línea de posicion; y sean  $(AB-A'B')$  el eje de la pieza,  $(m-m')$  el guion y  $(C-C')$  el blanco;  $(A-A')$  será el punto en que el plano de alzas, corta al eje de la pieza, y las trazas de dicho plano la  $(F-F')$ ; así como

(\*) En cuanto á las demás definiciones de línea de mira, plano de alzas etc., conservaremos las mismas que en el Tratado de Balística.— Artillería lisa, se dieron al tratar de análogo asunto.

( $m C - m' C'$ ), serán las proyecciones de la línea de mira, que cortará al plano de alzas, en el punto ( $h - H'$ ); determinando de este modo las líneas  $D H'$  y  $H h$ , que son respectivamente las magnitudes de las alzas vertical y horizontal, cuyos valores tratamos de conocer.

Bajando desde el punto  $C'$ , la perpendicular  $C' M$  á la línea  $D M$ , se forman los triángulos semejantes  $D H' m'$  y  $m' C' M$ , de los que se obtiene

$$\frac{D H'}{D m'} = \frac{C' M}{m' M} \quad (1)$$

y de los  $H h m$  y  $m N C$

$$\frac{H h}{N C} = \frac{H m}{m N} \quad (2)$$

pero

$$M C' = M L + L C' = G B' + L C'$$

y

$$m' M = m' G + G M$$

por lo que, sustituyendo en la (1)

$$D H' = H = D m' \frac{G B' + L C'}{m' G + G M} \quad (3)$$

De los triángulos  $L C' B'$  y  $B C R$ , se deduce

$$L C' = B' C' \operatorname{sen} \alpha = B R \operatorname{sen} \alpha = B C \cos \beta \operatorname{sen} \alpha$$

$$B' L = G M = B' C' \cos \alpha = B R \cos \alpha = B C \cos \beta \cos \alpha$$

expresiones que, si llamamos  $X'$  á la distancia  $B C$ , se convierten en

$$L C' = X' \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$G M = X' \cos \alpha \cos \beta$$

y siendo las longitudes  $D m'$ ,  $G B'$  y  $m' G$ , constantes en cada pieza, pueden, para simplificar, representarse respectivamente por las letras  $l$ ,  $r$  y  $d$ , por lo que, después de sustituir en la

relacion (3) los valores hallados de las cantidades que entran en ella, resulta

$$\frac{H}{l} = \frac{r + X' \operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{d + X' \cos \alpha \cos \beta} \quad (4)$$

Quedando las rectas  $H'C'$  y  $HN$ , divididas en partes proporcionales, por el sistema de paralelas  $H'H$ ,  $m'm$  y  $C'C$ , se verifica:

$$\frac{Hm}{mN} = \frac{m'H}{m'C'}$$

y de los triángulos semejantes  $H'Dm'$  y  $m'MC'$ , se deduce

$$\frac{m'D}{m'M} = \frac{m'H'}{m'C'}$$

y de estas proporciones resulta

$$\frac{m'D}{m'M} = \frac{Hm}{mN}$$

la que en union con la (2) dá,

$$\frac{Hh}{NC} = \frac{m'D}{m'M} \quad \text{ó bien} \quad \frac{D}{l} = \frac{NC}{m'M} = \frac{RC - RN}{m'G + GM}$$

Por el triángulo  $RCB$ , se tiene

$$RC = BC \operatorname{sen} \beta = X' \operatorname{sen} \beta$$

sustituyendo este valor en la relacion anterior, así como el de  $GM = X' \cos \alpha \cos \beta$ , llamando  $s$  á la longitud  $RN = BP$ , que tambien es constante y dependiente de la construccion de la pieza, tendremos

$$\frac{D}{l} = \frac{X' \operatorname{sen} \beta - s}{d + X' \cos \alpha \cos \beta} \quad (5)$$

cuyas fórmulas (4) y (5), despues de hecha la division algebraica, se reducen á

$$\frac{H}{l} = \text{tang } \alpha + \frac{r - d \text{ tang } \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d} \quad (6)$$

$$\frac{D}{l} = \frac{\text{tang } \beta}{\cos \alpha} - \frac{s + d \text{ tang } \beta \sec \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d} \quad (7)$$

En estas últimas relaciones se observa, que las magnitudes  $r$ ,  $s$  y  $d$ , son siempre muy pequeñas con respecto á  $X' \cos \alpha \cos \beta = GM$ , por lo que, los segundos términos, podrán despreciarse en algunos casos; no haciéndolo siempre, pues aun cuando las expresadas magnitudes son pequeñas con relacion á  $GM$ , podrán no serlo los segundos términos en comparacion con los primeros  $\text{tang } \alpha$  y  $\frac{\text{tang } \beta}{\cos \alpha}$  y por consiguiente será necesario, para ver las simplificaciones que las fórmulas pueden tener, considerar los dos casos, en que el guion esté colocado en el plano de la boca ó en un punto de una seccion cualquiera de la pieza.

En el primer caso, siendo  $d = 0$ , las fórmulas son:

$$\frac{H}{l} = \text{tang } \alpha + \frac{r}{X' \cos \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{D}{l} = \frac{\text{tang } \beta}{\cos \alpha} - \frac{s}{X' \cos \alpha \cos \beta}$$

Ahora bien, la cantidad  $X' \cos \beta = BR$ , si el blanco está próximamente á la altura de la boca de la pieza, no diferirá mucho de su proyeccion horizontal, que llamaremos  $X$ , y por consiguiente podemos admitir que

$$X' \cos \beta = X$$

y si además de esto, el ángulo  $\alpha$  es pequeño, como generalmente sucede, cuando se emplea el alza para apuntar, podemos igualmente suponer que se verifica

$$X' \cos \beta \cos \alpha = X$$

quedando por estas reducciones las fórmulas de alzas, para

el caso en que el guion esté en la boca, convertidas en las siguientes:

$$H = l \operatorname{tang} \alpha + \frac{r l}{X} \quad (8)$$

$$D = l \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha} - \frac{s l}{X} \quad (9)$$

y siempre que  $X$  tenga un valor considerable, los segundos términos serán muy pequeños, por lo que, con aproximación suficiente, podrá tomarse por las anteriores relaciones las siguientes, de sencillez grande para el cálculo,

$$H = l \operatorname{tang} \alpha \quad (10)$$

$$D = l \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha} \quad (11)$$

Bueno será observar, que las (8) y (10), son idénticas á las correspondientes á piezas lisas (\*), como no podia menos de suceder.

En el segundo caso, es decir cuando el guion esté colocado á una distancia  $d$  de la boca, la cantidad  $r - d \operatorname{tang} \alpha$  será positiva solamente para valores de  $\alpha$  muy pequeños; siendo despreciable el segundo término de la fórmula (6), por no diferir mucho de cero el numerador, teniendo por el contrario el denominador un valor considerable: en el caso de grandes ángulos  $\alpha$ , como estos, según hemos visto, corresponden á grandes distancias al blanco, el denominador es muy grande, por lo que siempre puede admitirse

$$H = l \operatorname{tang} \alpha$$

En cuanto á la derivación, como á medida que disminuye la distancia al blanco, disminuye también el ángulo  $\alpha$ , el segundo término de la fórmula (17) tiende al valor  $\frac{s}{d}$  que es su límite, porque decreciendo las desviaciones con los alcances,

(\*) Tratado de Balística.—Artillería lisa.

$\beta$  se aproxima al valor cero, y aun cuando el despreciar dicho valor, siempre pequeño, es lo mismo que aumentar la derivacion, por ser término sustractivo, puede no tomarse en consideracion tal aumento, atendiendo á las dimensiones que tienen los objetos que se batan con piezas de artillería; por estas consideraciones, quedará la fórmula de la derivacion, reducida á

$$D = l \frac{\text{tang } \beta}{\cos \alpha}$$

que aun puede simplificarse, teniendo en cuenta que, cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son muy pequeños, sus cosenos son sensiblemente iguales á la unidad, y por lo mismo admitirse que

$$D = l \text{ sen } \beta = l \frac{R C}{B C} = l \frac{\text{Derivacion}}{\text{alcance}} \quad (12)$$

**137. Caso en que el eje de muñones no sea horizontal.**—Las anteriores fórmulas, han sido obtenidas bajo el supuesto de ser el eje de muñones horizontal, teniendo entonces el alza la posicion de la línea de máxima pendiente del plano de alzas, por lo que dejan de ser exactas, cuando dicha condicion no se cumple. En las piezas que tienen el alza y guion fijos, no es posible en la práctica, dar al alza la colocacion conveniente y de aquí la necesidad de encontrar otras fórmulas, mediante las cuales, conocida que sea la inclinacion del eje de muñones, puedan determinarse exactamente, las alzas que deban emplearse.

Supongamos (fig. 47) que sea A W la direccion del eje de muñones y O' la proyeccion del guion sobre el plano de alzas, que es el de la figura; como el alza es siempre perpendicular al eje de muñones, su posicion será O' L, y L H representará así mismo el alza lateral; estas longitudes, serán tambien las necesarias para dirigir la visual al punto en que daría el proyectil, si se disparase la pieza. Si imaginamos un giro de esta alrededor de su eje, hasta tanto que el de muñones quede horizontal, es decir, en la posicion A W', la trayectoria por

ello en nada habrá variado, y H, seguirá siendo la intersección de la línea de mira con el plano de alzas, suponiendo que la proyección del guion continúe siendo la O'; las alzas precisas, se obtendrían bajando desde H una perpendicular á la dirección O'Y, estando representadas por las longitudes O'L' y L'H, que se calcularían por las fórmulas anteriormente encontradas, haciendo en ellas  $r=O'M'$  y  $s=AM'$ , verificándose

$$\frac{O'L'}{l} = \text{tang } \alpha + \frac{O'M' - d \text{ tang } \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

$$\frac{L'H}{l} = \frac{\text{tang } \beta}{\cos \alpha} - \frac{AM' + d \text{ tang } \beta \sec \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

Ahora bien, durante el giro, el guion habrá venido á colocarse en O, y haciendo uso del verdadero guion las alzas serían dadas por las expresiones

$$\frac{H}{l} = \text{tang } \alpha + \frac{r - d \text{ tang } \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

$$\frac{D}{l} = \frac{\text{tang } \beta}{\cos \alpha} - \frac{s + d \text{ tang } \beta \sec \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

que restadas miembro á miembro de las anteriores, dán

$$\frac{O'L' - H}{l} = \frac{O'M' - r}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

$$\frac{L'H - D}{l} = - \frac{AM' - s}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

y de aquí

$$\frac{O'L'}{l} = \frac{H}{l} + \frac{O'M' - r}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

$$\frac{L'H}{l} = \frac{D}{l} - \frac{AM' - s}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

Estando inclinado el eje de muñones, las verdaderas alzas

que hemos de emplear, son las  $O'L = H'$  y  $LH = D'$  y para calcular sus valores, proyectemos la línea poligonal  $O'L'H$ , sobre las  $O'L$  y  $LH$  sucesivamente, y obtendremos

$$H' = O'L' \cos \gamma + L'H \sin \gamma$$

$$D' = L'H \cos \gamma - O'L' \sin \gamma$$

en las que, sustituyendo los valores de  $O'L'$  y  $L'H$ , deducidos anteriormente, resulta;

$$\frac{H'}{l} = \frac{H \cos \gamma + D \sin \gamma}{l} + \frac{(O'M' - r) \cos \gamma + (s - AM') \sin \gamma}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

$$\frac{D'}{l} = \frac{D \cos \gamma - H \sin \gamma}{l} + \frac{(s - AM') \cos \gamma - (O'M' - r) \sin \gamma}{X' \cos \alpha \cos \beta + d}$$

Si desde el punto  $O'$ , se baja la perpendicular  $O'M$  á la línea  $AW$  y se proyecta la línea quebrada  $O'M'A$  sobre las  $O'M$  y  $AM$  respectivamente, resulta;

$$O'M = r = O'M' \cos \gamma - AM' \sin \gamma$$

$$AM = s = O'M' \sin \gamma + AM' \cos \gamma$$

cuyos valores, sustituidos en las fórmulas anteriores, darán;

$$\frac{H'}{l} = \frac{H \cos \gamma + D \sin \gamma}{l} + \frac{r(1 - \cos \gamma) + s \sin \gamma}{X' \cos \alpha \cos \beta + d} \quad (13)$$

$$\frac{D'}{l} = \frac{D \cos \gamma - H \sin \gamma}{l} - \frac{s(1 - \cos \gamma) - r \sin \gamma}{X' \cos \alpha \cos \beta + d} \quad (14)$$

Atendiendo á que el ángulo  $\gamma$  es siempre muy pequeño, que por ello  $1 - \cos \gamma$  y  $\sin \gamma$  lo son tambien, y que el denominador, por el contrario, es relativamente grande, pueden los segundos términos despreciarse, y si en lo que queda hacemos  $\cos \gamma = 1$ , se reducirán estas fórmulas á las siguientes:

$$H' = H + D \sin \gamma \quad (15)$$

$$D' = D - H \sin \gamma \quad (16)$$

El ángulo  $\gamma$  que hemos considerado, no es precisamente la

inclinacion del eje de muñones con la horizontal, pues que está medido en el plano de alzas; sin embargo, puede tomarse por valor suyo, porque si la pieza tira con ángulos de proyeccion pequeños, aquellos son sensiblemente iguales, y si son grandes los ángulos de proyeccion, aun cuando la diferencia es mayor; como en este caso corresponden grandes derivaciones y grandes alcances, el error cometido tiene menos influencia, por ser equivalente al producido por una pequesimísima inclinacion del eje de muñones.

**138. Alzas reducidas.**—El alza que hasta ahora hemos considerado, y que toma el nombre de *alza total*, está contada (fig. 47) desde la proyeccion O del guion de mira sobre el plano de alzas, pero en la práctica, la graduacion debe partir del punto G, en que la direccion del alza corta á la pieza, correspondiendo por lo tanto, á una alza total OG, otra GQ, que se llama *reducida*, y que si la designamos por *h*, tendrá por valor

$$h = H - R + r$$

siendo R y r respectivamente, las dimensiones a G y O a, que por construccion son constantes en cada pieza: este valor, será nulo cuando se verifique

$$H = R - r$$

es decir, para el punto en que la visual deba dirigirse por el raso de metales, el que toma el nombre de *punto en blanco*.

En las piezas igualadas, ó sea en las que se verifica  $R - r = 0$ , se llama tambien punto en blanco, aquel que corresponde en terreno horizontal á un alza cero, siendo debido entonces el alcance, al pequeño ángulo que se eleva el proyectil al salir del arma, hecho comprobado por la experiencia.

Si  $H < R - r$ , el alza reducida será negativa, correspondiendo á distancias menores que las de punto en blanco, en cuyo caso, por ser siempre distancias pequeñas, fácil es arreglar el tiro por la observacion directa, pudiendo tambien

hacerse la puntería por el ascenso de la culata, en la cantidad que mas adelante veremos, dirigiendo primeramente la línea de mira natural, con la derivacion correspondiente al objeto.

**139. Puntería por el conocimiento del ángulo que forman la línea de mira y el eje de la pieza.**

—Cuando el alza sea insuficiente para dar la altura que corresponda á un cierto punto; y se conozca el ángulo que la línea de mira deba formar con el eje de la pieza, puede aproximadamente hacerse uso de este ángulo para efectuar la puntería. En efecto, dirijamos (fig. 48) la línea de mira natural  $GS$  al blanco, que suponemos  $S$ , y llamemos  $m_0$  al ángulo que el eje de la pieza forma con esta recta; si despues hacemos que gire la pieza hasta que su eje tome la posición  $A'B'$ , que es la que corresponde para dar en dicho punto, y se designa por  $m$ , el ángulo que con el eje  $A'B'$  forma la recta que une el guion  $G'$  en su nueva posición, con  $S$ , se tiene

$$B'OB = m - BOS = m - m_0 + i$$

pero siendo el ángulo  $i = GSG'$ , aquel bajo el cual se ven desde el blanco las dos posiciones del guion, será siempre muy pequeño y por lo tanto despreciable; por lo que, para que la trayectoria pase por el punto que se trata de batir, bastará hacer girar la pieza, despues de apuntada por el raso de metales al blanco, un ángulo igual á  $m - m_0$  siempre que con anterioridad se corrija la derivacion, lo que se conseguirá apuntando á derecha ó izquierda del blanco, segun el sentido de ella, á una distancia igual á la misma derivacion.

**140. Punterías por referencia.**—Puede tambien ocurrir, que conociendo las alzas necesarias para dar en un punto ( $C, C$ ) (fig. 49), no pueda apuntarse á él, ya sea por no dar el alza la altura exigida, ó por cualquier otra circunstancia: en este caso, es muy práctico efectuar la puntería á otro punto ( $\bar{C}, \bar{C}'$ ), siendo preciso determinar las alzas, vertical y horizontal necesarias para que, dirigiendo la visual á la referencia, quede la pieza apuntada al verdadero objeto que se quiere batir.

Para ello, en las fórmulas encontradas

$$H = l \operatorname{tang} \alpha + \frac{r l}{X}$$

$$D = l \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha} - \frac{s l}{X}$$

el valor de  $\alpha$  es igual á  $\theta - \Sigma$ , siendo  $\theta$  el ángulo de inclinacion del arma, es decir, el que forma su eje con la horizontal y  $\Sigma$ , el de posicion del punto (C, C') y por consiguiente, las expresadas fórmulas pueden escribirse

$$H = l \operatorname{tang} (\theta - \Sigma) + \frac{r l}{X} \quad (17)$$

$$D = l \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos (\theta - \Sigma)} - \frac{s l}{X} \quad (18)$$

Llamando H' y D' á las alzas D'a' y a b que buscamos y  $\Sigma'$  al ángulo de posicion correspondiente á la referencia, claro es, que para que la pieza tenga la misma inclinacion, deben verificarse las ecuaciones

$$H' = l \operatorname{tang} (\theta - \Sigma') + \frac{r l}{X_1} \quad (19)$$

$$D' = l \frac{\operatorname{tang} (\beta + \vartheta)}{\cos (\theta - \Sigma')} - \frac{s l}{X_1} \quad (20)$$

Para la determinacion del alza vertical, basta obtener el valor de  $\theta$  de la ecuacion (17), que sustituido en la (19), permite conocer el de H'; de la misma manera, la ecuacion (18) nos dará el valor de  $\beta$  y entonces la ecuacion (20), el de D'. Conviene elegir en la práctica, el punto ( $\bar{C} \bar{C}'$ ) en la direccion BC, porque en este caso, el ángulo  $\vartheta$  será cero ó se diferenciará poco de este valor, pudiendo admitirse

$$D' = l \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos (\theta - \Sigma')} - \frac{s l}{X_1} \quad (21)$$

que es, en la que se sustituirá por  $\beta$  su valor.

**141. Alza cuadrante.**—Las alzas rectilíneas no son las únicamente usadas, sino que se emplean también las llamadas de *cuadrante*, que no son otra cosa que un arco de círculo, situado en un punto de la culata y cuyo plano es perpendicular al eje de muñones, teniendo por centro el guion de la pieza. Con esta disposición, se evita la molestia de apuntar con grandes alturas de alza, y mediante una división en grados, pueden dar desde luego el ángulo que la línea de mira forma con el eje de la pieza, razón por la que toman el nombre anteriormente indicado.

Si suponemos (fig. 50) un cilindro de generatrices paralelas al eje de muñones y cuya directriz sea el alza CL, esta superficie cilíndrica sustituirá al plano de alzas hasta ahora considerado, y en tal hipótesis, la prolongación de la línea *sm* cortará á dicha superficie en el punto H, que será aquel en que habría que colocar la mira de culata, para que la pieza quedase apuntada. Si desde este punto H nos imaginamos un plano de alzas, la altura que correspondería sería la HO, habiendo también una cierta alza horizontal, la que lo mismo que la vertical, podría determinarse por las fórmulas (6) y (7); pero al variar la inclinación de la pieza, para ser apuntada á un nuevo blanco, el punto H tomaría otra posición sobre el arco CL, y por consiguiente, la distancia *mO*, que no es otra cosa que el coseno del arco HC, que es distinto para cada altura de alza, sería variable, por cuya razón se hace preciso modificar las fórmulas anteriores, sustituyendo por *l* la cantidad  $mH \cos M = l \cos M$  y  $H = l \sin M$ , siendo ahora *l* el radio del alza, de este modo tendremos;

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang} \alpha + \frac{r - d \operatorname{tang} \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d} \quad (22)$$

$$\frac{D}{l \cos M} = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha} - \frac{s + d \operatorname{tang} \beta \sec \alpha}{X' \cos \alpha \cos \beta + d} \quad (23)$$

las que simplificadas como se ha dicho, se reducen á

$$\text{tang } M = \text{tang } \alpha \quad \text{y} \quad D = l \text{ tang } \beta \frac{\cos M}{\cos \alpha}$$

ó bien

$$M = \alpha \quad (24) \quad \text{y} \quad D = l \text{ tang } \beta \quad (25)$$

**142.** *Caso en que el eje de muñones no sea horizontal.*— Supongamos (fig. 51) que sea AB la posición del eje de la pieza ya apuntada, o a' el de muñones, M' el guion y D' la mira de culata; siendo así, la recta M'D' prolongada, pasará necesariamente por el blanco. Si el alza fuese rectilínea, correspondería á este punto D', en el plano que pasando por él es perpendicular al eje de la pieza, el alza vertical P'L' y la horizontal L'D'; y cuando sea curvilínea, le corresponde la O'L', cuyo radio es O'M' siendo M' su centro. La cuestión pues, se reduce á calcular esta última, en función de la que correspondería para la distancia dada, si el eje de muñones fuese horizontal.

Girando la pieza alrededor de su eje, hasta que el de muñones quede horizontal, si M es la nueva posición del guion, siendo rectilínea el alza, continuaria siendo D'L'P', el plano de alzas, y en él se encontraría situada la mira de culata, que será precisamente el punto d, intersección con el citado plano, de la recta que une el guion M con el punto que se bate; si desde el punto d bajamos la dg perpendicular al plano vertical que pasando por M, es paralelo al eje de la pieza, obtendremos el alza rectilínea horizontal gd, siendo gp la vertical, cuyos valores están representados por H y D en las fórmulas (15) y (16). Pero en el caso actual de ser el alza curvilínea, después del giro expresado, esta vendrá á situarse sobre el plano LMp en la posición OL, estando marcadas las alzas correspondientes, por la intersección de ella con la gM, ó sea en el punto L y el alza rectilínea LP que llamaremos  $\bar{H}$ : si trazamos la horizontal LD, paralela al eje de muñones, la intersección D con dM, nos dará la mira de culata y la derivación LD, que representaremos por  $\bar{D}$ : la distancia pM = P'M',

es la que en las fórmulas se representa por  $l$  y de la semejanza de los triángulos  $LPM$  y  $gpM$ , se deduce

$$\frac{H}{l} = \frac{\bar{H}}{PM} = \text{tang } m$$

así como de los  $LDM$  y  $gdM$ , también semejantes, se obtiene,

$$\frac{D}{gM} = \frac{\bar{D}}{LM}$$

por lo que,

$$\frac{D}{l} = \frac{D}{gM \cos m} = \frac{\bar{D}}{LM \cos m}$$

y llamando  $l$  al radio  $LM = L'M'$  del alza, resulta, que en las fórmulas (15) y (16) es preciso sustituir

$$\frac{H}{l} = \text{tang } m \quad \text{y} \quad \frac{D}{l} = \frac{\bar{D}}{l \cos m}$$

y siendo además  $H' = L'P'$  y  $D' = L'D'$ , puede establecerse

$$\frac{H'}{l} = \text{tang } m' \quad \text{y} \quad \frac{D'}{l} = \frac{D'}{l \cos m'}$$

debiendo tener presente, que la letra  $l$  del primer término, representa la distancia  $P'M'$  y la del segundo la  $L'M'$ : hechas estas sustituciones en las expresadas fórmulas resulta

$$\text{tang } m' = \text{tang } m + \frac{\bar{D} \text{ sen } \gamma}{l \cos m} \quad (26)$$

$$\frac{D'}{\cos m'} = \frac{\bar{D}}{\cos m} - l \text{ tang } m \text{ sen } \gamma \quad (27)$$

En la primera de estas, siempre que  $m$  sea grande, su segundo término es despreciable con respecto al primero, pudiendo admitirse

$$m = m'$$

y si por el contrario  $m$  es pequeño, puede suponerse

$$\text{tang } m = m \quad \text{y} \quad \cos m = 1$$

con lo que

$$m' = m + \frac{\bar{D} \operatorname{sen} \gamma}{l} \quad (28)$$

En cuanto á la segunda siempre puede admitirse  $\cos m = \cos m'$  y por ello

$$D' = \bar{D} - l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} \gamma \quad (29)$$

tomando en ambas, como anteriormente se dijo, por  $\gamma$  la inclinacion de los muñones.

**143. Relacion entre el alza y el descenso del proyectil.**—La distancia CD (fig. 52), medida sobre la vertical que pasa por el punto C que se quiere batir, hasta su encuentro con la prolongacion del eje de la pieza, es el descenso que el proyectil tiene durante toda su trayectoria, y puede fácilmente ligarse con el valor del alza. En efecto, los triángulos HLM y B'DC, son sensiblemente semejantes, pues teniendo los ángulos en M y B' iguales, son ambos rectángulos siempre que B'C sea horizontal: por lo que si B'C es próximamente horizontal, se verificará

$$\frac{LH}{LM} = \frac{CD}{B'C}$$

ó con suficiente aproximacion

$$\frac{H}{l} = \frac{\text{Descenso}}{\text{Alcance}}$$

relacion que permite determinar el alza correspondiente á un alcance dado, cuando se conozca el descenso, ó bien este, cuando se conozca aquella.

**144. Punteria por el descenso de la culata.**—Puede tambien apuntarse una pieza, bajando ó subiendo el tornillo de puntería, una cantidad relacionada con el alza, y que nos proponemos determinar.

Sea para ello (fig. 53) AB, la posicion del eje de la pieza cuando la línea de mira natural RM, pasa por el blanco S, y A'B', cuando esté apuntada con el alza reducida HR', en cuyo

caso la línea  $RM$ , habrá venido á tomar la direccion  $R'M'$ . Estas dos líneas  $RM$  y  $HM'$ , pueden considerarse como paralelas, en atencion á las pequeñas dimensiones de la pieza, relativamente á su distancia al blanco. Por el giro de la pieza, el punto  $R$  pasa á  $R'$ , por lo que, el verdadero descenso que ha tenido el punto  $R$  de la culata, es la distancia  $RR'$  que llamaremos  $q$ ; pero como quiera que siempre, el ángulo que la pieza gira será muy pequeño; en el triángulo  $NRR'$ , el lado  $NR$  tambien lo será, y sin error sensible podrán considerarse como iguales los otros dos lados  $RR'$  y  $NR'$  y tomar como descenso de la culata este último, es decir,  $q = NR'$ .

Ahora bien, los triángulos  $R'ND$  y  $R'HM'$ , son sensiblemente semejantes, por lo que

$$\frac{R'N}{R'H} = \frac{R'D}{R'M'}$$

relacion en la que sin gran error, puede hacerse

$$R'D = d = OA' \quad \text{y} \quad R'M' = l$$

y por lo tanto

$$q = h \frac{d}{l}.$$

Fórmula que no solamente dá el descenso del punto  $R$ , sino el de uno cualquiera de la culata, tal como el  $P$ , siempre que se sustituya por  $d$ , la distancia que media desde dicho punto al eje de muñones. En efecto, sean  $P$  y  $P'$  las dos posiciones del punto que se considera, el descenso  $PP'$  puede suponerse igual á  $pp'$ , siendo  $p$  y  $p'$ , las intersecciones de las dos líneas de mira natural, con una recta, que pasando por el punto  $P$  sea paralela al alza: de los triángulos semejantes  $pp'D$  y  $HR'M'$ , se obtiene

$$\frac{pp'}{p'D} = \frac{HR'}{R'M'}$$

ó bien

$$pp' = h \frac{d}{l}$$

admitiendo como anteriormente  $d = p' D$ .

**145. Relacion entre el alza reducida y el descenso del proyectil por bajo de la línea de mira natural.**—Para obtener esta relacion, de utilidad práctica, supongamos (fig. 54) la pieza apuntada al blanco S; si desde este punto se levanta una vertical y se prolonga la línea de mira natural RM hasta su encuentro en P con ella, es evidente, que para que la pieza quede apuntada al mismo objeto, bastará dirigir la línea de mira natural al punto P. Los dos triángulos RHM y MPS, pueden considerarse como semejantes, por tener los ángulos en M iguales, recto el R y sensiblemente recto tambien el S, verificándose por lo tanto

$$\text{Descenso} = X \frac{h}{l}$$

llamando  $MS = X$ .

**146. Punterías sobre objetos movibles.**—Cuando el punto que se trata de batir no es fijo, sino que está animado de un movimiento de traslacion, fácilmente se concibe la necesidad de sujetar las punterías á reglas mas ó menos aproximadas, y estas reglas son las que vamos á determinar: la aplicacion mas inmediata de estas reglas, es la del tiro en las piezas de costa, que pocas veces tienen que batir objetos fijos de posicion.

Distinguiremos tres casos; segun que la direccion del movimiento del objeto batido, sea perpendicular á la línea que lo une á la boca de la pieza, que sea oblicua con respecto á esta línea, ó que tenga su misma direccion.

En el primer caso, sea  $v$  la velocidad del móvil, que supondremos constante, y  $d$  su distancia á la bateria; es preciso hacer una correccion en el alza lateral, ya sea aumentando la que corresponda á aquella distancia, ó disminuyéndola, segun que la direccion del movimiento sea en el sentido contrario ó en el mismo de la derivacion de la pieza: el aumento ó dismi-

nucion, deberá ser siempre tal, que corresponda al desplazamiento  $e$  del barco, durante el tiempo  $t$  que media, desde el momento del disparo, hasta el de caída del proyectil; ó sea  $e = vt$ . Debiendo contener las tablas de tiro, las variaciones de la derivacion, correspondientes á cada division horizontal del alza, se deducirá inmediatamente el número de estas que haya que aumentar ó disminuir, para conseguir el objeto deseado.

Por las mismas tablas, se conoce tambien el tiempo empleado por el proyectil en recorrer distintos trayectos, y por lo tanto, el correspondiente á la distancia  $d$ ; falta solo en la fórmula  $e = vt$ , determinar el valor de  $v$ , para que sea conocido el de  $e$ . Para hallar el valor de  $v$  puede servirnos la misma alza: si se dirige la línea de mira al extremo anterior del barco y se cuenta el tiempo trascurrido hasta que el extremo posterior del mismo, venga á pasar por la línea de mira, que ha permanecido fija, dividiendo la eslora (dato en general conocido por la naturaleza de los distintos buques de guerra), por el tiempo contado, el cociente será la velocidad que se busca. (\*)

Si la marcha del buque fuese oblicua á la direccion del eje de la pieza á él dirigido, se emplea un método práctico, que es aplicable tambien al caso anterior: consiste en dirigir una visual por la línea de mira natural, y en el momento que se vea por ella el extremo anterior del barco, se empieza á contar un tiempo igual al de la trayectoria para aquella distancia, corriendo al mismo tiempo el alza horizontal, de manera que la línea de mira, siempre pase por el mismo extremo anterior; de este modo, la variacion de alza horizontal que haya tenido que hacerse hasta trascurrir el tiempo expresado, será la correccion de la derivacion.

Por último, en el caso de que el barco marche en la misma direccion que el eje de la pieza, si se aproxima, se empleará el alza necesaria para su distancia, como si estuviera fijo,

(\*) Puede emplearse para este objeto un contador de segundos ó el Cronómetro de puntería Robert, que aprecia quintos de segundo.

dirigiendo la puntería á la proá y en la línea de flotacion; porque aun suponiéndole animado de la máxima velocidad, siempre quedará, por efecto de su altura sobre dicha línea, dentro del espacio que el proyectil puede batir: si por el contrario se aleja, se tomará el alza correspondiente á la distancia á que se encuentre el buque, aumentada en la longitud de este y en el espacio que puede recorrer durante todo el trayecto del proyectil, espacio que puede calcularse, suponiéndole una velocidad media usual, ó sean ocho nudos.

No siendo completamente exactos los medios que acabamos de exponer, se concibe la necesidad de mucha práctica en esta clase de tiro, tanto mas, cuanto que las variaciones que deban hacerse, exigen gran rapidez para que los resultados sean satisfactorios, por lo que consideramos de utilidad, que durante el tiempo de paz, se ejerciten las baterías en el tiro contra objetos movibles, valiéndose para ello de blancos apropiados: como ejemplo de estos citaremos el propuesto por el Mayor de Artillería Teichmam.

El pensamiento que ha presidido á la construcción de este blanco, obedece á la idea de obtener un objeto movible, con velocidades que puedan variarse convenientemente, y dispuesto de tal modo, que pueda detenerse en el momento mismo de hacer el disparo, con lo que se llega á conseguir, que las operaciones de apuntar y disparar, sean tan rápidas como se hace necesario en la práctica, permitiendo al mismo tiempo apreciar el error que se cometa.

Consta el aparato (fig. 55), de dos largos brancales A B, que sirven de carril á un carrillo C D, de cuatro ruedas, del que se suspende por uno de sus costados, un blanco ordinario: este carrillo recibe su movimiento por medio de pesos E, colocados en el extremo de una cuerda, que unida á él, pasa por una polea F situada al final de los brancales: las dos ruedas traseras del carrillo (fig. 56), están montadas sobre un eje, que puede correr á lo largo de unas ranuras rectangulares, abiertas en los costados de aquel, teniendo el eje en su extremo una palanca, en cuyo brazo menor hay abierto un arco de

circulo excéntrico  $ab$ , en el que se aloja un boton  $m$  fijo al carrillo. Si se hace girar el brazo mayor  $L$  de la palanca, de derecha á izquierda, sube el boton  $m$  y por consiguiente (fig. 57) los topes  $cc$ , comprimirán la parte inferior de los brancales, suspendiendo el movimiento del blanco; por último una cuerda  $H$ , sujeta á la palanca  $L$ , sirve para que el tirador detenga el blanco, al mismo tiempo que se hace el disparo.

**147. Punterías de noche.**—Es tambien importante disponer de medios para las punterías de noche, cuya dificultad es en las piezas rayadas bastante mayor que en las lisas, por tenerse que tomar en consideracion la derivacion de sus proyectiles. Entre los varios procedimientos que con este objeto pueden usarse, el que á continuacion exponemos, ha sido empleado con éxito favorable en el poligono de Varsovia. El aparato es sencillamente una caja (fig. 58) fija á un piquete, que se clava en el sitio conveniente; la caja tiene en una de sus caras verticales, una abertura circular, cuyo borde se pinta de blanco y así, al cerrar la caja con su cubierta superior, y por efecto de la obscuridad de su interior, se hace muy visible durante el día la expresada abertura: por la noche, se coloca dentro de la caja una linterna dotada de un reflector de hoja de lata.

Para su empleo, supongamos primero que desde la batería sea visible el objeto que trate de batirse; en este caso, durante el día se dirige á él la puntería, usando de las alzas vertical y horizontal necesarias para la distancia á que se encuentre: se coloca despues la caja en la inmediacion de la línea de tiro y á una distancia conveniente de la pieza, para que los gases de la pólvora no puedan actuar sobre-ella: la abertura circular debe quedar frente á la batería. Seguidamente, sin mover la pieza, se varia el ocular del alza hasta que la línea de mira que determine, pase por la abertura circular; se toma nota de las alzas horizontal y vertical que hayan resultado, que son las correspondientes á esta referencia, y se las conoce con el nombre de *alzas artificiales*. De este modo, permaneciendo fija la caja de puntería y marcando en la esplanada con unos

listones, la posicion de las ruedas cuando la pieza está apuntada, se podrá, iluminando aquella por la noche, volver á apuntarla, bastando para ello, despues de colocar las ruedas en el sitio marcado, dirigir la visual con las alzas artificiales á la abertura circular, punto muy visible, por la linterna colocada en su interior.

**148.** La rectificacion del tiro, puede efectuarse aun de noche, si esta no es muy oscura, teniendo conocimiento del terreno, por la circunstancia de poder conocer el error que se cometa; es conveniente con este objeto, encontrar la relacion que liga las alzas correspondientes á la distancia del punto batido, con las artificiales, para poder pasar de este modo, de unas á otras. Para conseguirlo, durante el dia, se varian en una division las alzas dadas por las tablas, y se apunta nuevamente al objeto y á la caja; la diferencia entre las alzas artificiales que se obtengan y las obtenidas anteriormente, dará la variacion que á estas corresponde, por cada division de aquellas: de este modo, es posible la correccion, pues bastaria apreciar la variacion que seria necesario hacer en las alzas de las tablas, y pasar de estas á las artificiales que correspondan.

Si las piezas disparasen colocadas detras de cañoneras, y bajo grandes ángulos de elevacion, el fondo estará generalmente en contrapendiente y no seria entonces posible colocar la caja fuera de la bateria, porque siendo generalmente pequeña la distancia á que se sitúa, no se veria, por lo que se hace preciso colocarla en el mismo fondo de la cañonera, con la precaucion de quitarla en cada disparo.

Muchas veces habrá dificultad en poder distinguir el guion de mira, si así sucede, se hace uso de unas linternas (fig. 59), dispuestas segun se ve, para que solo iluminen el expresado guion.

Si la bateria corresponde á una plaza fuerte, y está batida por tiros de enfilada, seria fácil la destruccion de las cajas de punteria, conviniendo entonces hacer en el declive interior del camino cubierto, pequeños nichos, cerrados con puertas de

hierro, dotadas de su correspondiente orificio circular, con lo que se sustituyen aquellos.

Por último, por la fácil degradacion de los listones de madera, para fijar en las plataformas la colocacion de la cureña, deben sustituirse por dos chapas de hierro (fig. 60), colocadas á uno y otro lado de la llanta y teniendo en la parte anterior unos chaflanes, para facilitar la entrada en batería.

**149.** Para verificar la puntería sobre objetos invisibles, y de noche, se sirve la artillería Italiana de un sencillísimo aparato llamado *derivador*, aplicado por un procedimiento análogo al anterior, y teniendo sobre él la ventaja, de no ser preciso colocar la pieza en posiciones siempre iguales sobre la esplanada, cuya circunstancia es muy atendida, si se trata de piezas pesadas.

El aparato (fig. 61), se compone de una regla de madera A B, de un metro de longitud, que resbala en una abertura C, hecha en un talon tambien de madera; en este entra un tornillo de presion, que sujeta la regla en la posicion conveniente: las dos caras mas anchas de la regla, están graduadas, una en divisiones de veinticinco milímetros, de las que tiene cuarenta, y la otra lo está en centímetros, no ocupando las marcas de estas últimas, mas que la mitad de la cara.

Supongamos una pieza apuntada por cualquiera de los procedimientos ordinarios al objeto que trate de batirse y sea A B (fig. 62), la direccion del plano de tiro que se marca sobre la esplanada; á partir del guion *m*, se mide una distancia *m P* igual á veinticinco veces la *m p*, que es la que media entre los puntos de mira; sobre la perpendicular levantada en P á la *P p* y próximamente en la direccion de la línea de mira provisional, que resulta de tomar un alza vertical de 15<sup>mm</sup> y otra horizontal de 20<sup>mm</sup>, se coloca un jalon Q, y sin mover la pieza, se dirige la puntería al extremo de este jalon, anotando las alzas que resulten y que toman el nombre de *ficticias*. Sea C D la posicion que ocupa la rueda opuesta al guion; por la parte exterior de este, se adapta el talon del derivador, de manera que la regla pase por entre dos rayos y con el extremo

40 de la graduacion hacia el eje de la pieza; se corre la regla, hasta que sobre la línea A B corresponda la division de las de 25<sup>mm</sup>, que sea igual á la derivacion ficticia, sujetando la regla en esta posicion con el tornillo.

Hecho el disparo y colocada la pieza en bateria, suponemos que la rueda venga á ocupar la posicion C' D'; si dejando invariable la posicion de esta rueda y la altura del tornillo de puntería, hacemos que el eje de la pieza ocupe una posicion paralela á la que toma antes del disparo, es evidente que quedará apuntada al blanco, pues que todo el sistema se habrá trasladado paralelamente á si mismo, una distancia  $qq' = PP'$  y si bien es cierto que hay en esto algun error, no lo es menos que será muy pequeño y menor que el natural desvío de la pieza, por ser muy pequeña la distancia  $PP'$ .

Segun esto, la cuestion queda reducida á calcular la nueva derivacion ficticia  $n' p'$ , para lo que, de la comparacion de los triángulos semejantes  $P m Q$  y  $m n p$ , se obtiene

$$\frac{np}{PQ} = \frac{mp}{mP} = \frac{1}{25} \text{ de donde } np = \frac{1}{25} PQ$$

y del mismo modo

$$n' p' = \frac{1}{25} P' Q$$

por lo que

$$np - n' p' = \frac{1}{25} (PQ - P' Q) = \frac{1}{25} PP'$$

Si en esta nueva posicion, se aplica el derivador contra la rueda C' D', la division anterior  $a$ , vendrá á situarse en  $a'$ , verificándose que

$$PP' = a a' = h 25^{mm},$$

siendo  $h$ , el número de divisiones que haya desde  $a$  hasta  $a'$  y por lo tanto

$$np - n' p' = h \text{ ó } n' p' = np - h$$

ó sea el número de divisiones que marca de la regla que ahora está sobre la directriz A B.

En consecuencia bastará para la práctica, una vez entrada en batería la pieza, colocar el derivador, y el número de la division que corresponda á la directriz trazada en la esplanada, será el número de milímetros de derivacion ficticia que es necesario emplear, para que, sin variar el tornillo de puntería y dirigiendo la línea de mira al extremo del jalon, quede apuntada la pieza al objeto que se desea.

Si no se puede colocar el jalon á la distancia dicha, de 25 veces la que media entre los puntos de mira, se toma otra que no baje de 40 metros, que supondremos sea la  $mP$  y empleando la cara del derivador graduada en centímetros se marca sobre esta, otra graduacion que se numera correlativamente y cuyas divisiones disten entre sí, una magnitud igual á la relacion  $\frac{D'}{L}$ , entre la distancia  $mP$  y la  $mp$ .

Repitiendo una operacion idéntica á la anteriormente explicada, tomaremos la derivacion ficticia  $np$ , dirigiendo la visual al jalon y colocando el derivador de manera, que sobre la línea A B esté la division de las últimamente hechas, que sea numéricamente igual á la derivacion  $np$ , y si las representamos por H, se tendrá

$$np = H$$

Los mismos triángulos que anteriormente consideramos, darán

$$np = \frac{L}{D'} PQ \quad \text{y} \quad n'p' = \frac{L}{D'} P'Q$$

y de aquí

$$np - n'p' = \frac{L}{D'} P'P$$

Si suponemos sea  $h$  el número de divisiones que la regla ha corrido de la primera á la segunda posicion, se tendrá

$$P P' = \frac{D'}{L} h$$

y por ello

$$n' p' = H - h = H'$$

número de divisiones que ahora marcará la regla.

**150.** Otro de los procedimientos empleados con el mismo objeto, consiste en hacer uso de un instrumento que consta de dos partes, llamada una *anteojo* y *colimador* la otra. La primera (fig. 63) es sencillamente un anteojo de cuatro lentes acromáticas, que tiene en su extremo A el ocular y en su interior, un retículo dispuesto del modo que indica la (fig. 64). Este anteojo tiene dos anillos *a* y *b*, el primero (fig. 65) está atravesado por un tornillo *d* y el otro (fig. 66) tiene dos *b* y *c* de distinta longitud, los que en union del *d*, sirven de apoyo al anteojo: este se coloca sobre la pieza de tal manera, que su eje óptico quede paralelo á la línea de mira natural, lo que se consigue dirigiendo la visual por el guion y el cero del alza, á un objeto situado detras de la pieza y lo mas lejano posible, siempre que se distinga claramente: los pies *c* y *b* del anteojo, quedan hácia la culata y todo él desviado hacia un lado del fogon: despues, se dirige la visual por la lente situada en el extremo A, y dando movimiento al tornillo *d*, se hace entrar en el campo del anteojo, el objeto á quien se dirigió la línea de mira natural, hecho lo cual se marca sobre el cañon, el pié del tornillo, fijando en el mismo sitio una pieza *f*, que tiene en la parte superior una pequeña cavidad para recibir al tornillo *d*, ó bien haciendo directamente sobre el cuerpo del cañon una pequeña incision. Vuelto á colocar el anteojo, poniendo el tornillo *d* en dicha cavidad, se corre el otro extremo á derecha ó izquierda, y dando movimiento á los tornillos, se consigue confundir la cruz del retículo con el objeto observado, con lo que, si este está á bastante distancia, el eje del anteojo quedará próximamente en la direccion que se desea: los puntos de apoyo de los tornillos *b* y *c*, deben marcarse tambien, para que siempre sea la misma su colocacion.

El colimador consiste en una caja de madera A (fig. 67) abierta por dos de sus extremos opuestos; dentro de ella hay montado un tubo, que puede recibir diferentes inclinaciones por medio de los tornillos *a* y *b*, cuyas tuercas están en la parte superior de la caja. El tubo tiene en su interior, en un extremo, una lente L y en el otro un retículo dispuesto como el del anteojo, y que puede iluminarse por la linterna C, colocada en otro tubo de menor diámetro que el anterior: dos resortes de latón, aplicados en uno de los lados del tubo, le comprimen contra la pared de la caja, para conseguir su estabilidad en la posición que se le coloque. Esta caja, se atornilla sobre otra que sirve de empaque, estando dispuesta de tal modo, que puede resbalar en todos sentidos.

Para emplear este aparato, supongamos apuntado el cañon durante el día al objeto que trate de batirse, el colimador colocado detrás de la pieza de manera que quede libre del retroceso, y el anteojo sobre ella en la posición indicada anteriormente: corriendo el colimador á un lado ú otro y dando movimiento al tornillo *d* del anteojo, se hace que próximamente, quede el centro del ocular cubierto con el del disco del colimador; valiéndose despues de los tornillos de este y de los del anteojo, se consigue hacer coincidir ambos retículos. Hecho esto, para apuntar la pieza, se coloca sobre ella el anteojo y dirigiendo la visual al colimador, se la dá movimiento hasta obtener la exacta coincidencia de los retículos: para evitar tanteos, es conveniente marcar sobre la esplanada, la posición de la pieza.

**151.** Aun cuando estos métodos nos parecen de mayor precisión, puede sin embargo apuntarse de otro modo cuando se carezca de instrumentos; consiste este en marcar en la esplanada como queda dicho, la posición que deba tener la cureña, con lo que se consigue dar á la pieza la derivación necesaria, y valerse de la escuadra de nivel, para dar la inclinación conveniente.

**152.** De todo lo expuesto se deduce, que si para los disparos hechos de día es muy conveniente, una vez rectifi-

cado el tiro, el poder colocar la pieza, siempre en la misma direccion, de noche no se puede apuntar sino valiéndose de referencias mas ó menos ingeniosas. El aparato que con este objeto usan los Prusianos, consiste (fig. 68) en adaptar al eje de las ruedas por medio de unas bridas, un marco trapezoidal A A que en el lado próximo á la esplanada, lleva una lámina de laton graduada: el marco puede girar y plegarse sobre la cureña cuando no se emplea. En la contera vá colocada otra regla de laton graduada que tambien puede plegarse. Su empleo fácilmente se concibe, y consiste en una vez apuntada la pieza, marcar la directriz MN sobre la esplanada, anotando la graduacion correspondiente de las dos reglas; para los tiros sucesivos, se verá la graduacion de la escala fija al eje, y se hará ronzar la contera, hasta que la diferencia entre las graduaciones de las dos reglas, sea igual á la que habia antes del disparo. Inútil parece decir, que puede tambien colocarse la pieza de manera que las graduaciones que marquen las dos reglas, sean siempre las mismas. Este procedimiento presenta la gran ventaja sobre la visual directa, de que se evitan completamente los errores á ella consiguientes, como son la influencia de la luz, etc. su uso es principalmente ventajoso en las piezas de sitio.

**153. Punteria sobre objetos ocultos.**—Antes de hacer la punteria, es preciso fijar por medio de jalones la direccion en que se encuentra el objeto que trata de batirse. El método que para esta operacion se emplea, varia segun las circunstancias del terreno. Si este es tal (fig. 69) que el obstáculo interpuesto entre la pieza P y el punto batido S es accesible, se coloca un observador en A, mirando al objeto y otro B á la pieza; este segundo, por las indicaciones del primero, viene á colocarse en la línea AS; del mismo modo el A, por las que le haga B, se colocará en A' alineado con B y P; continuando de este modo, bastarán dos ó tres tanteos para fijar la direccion SP, que se marcará con dos jalones.

**154.** Si el obstáculo (fig. 70) es inaccesible, pero que permita, desviándose á un lado ú otro, llegar á un punto desde

el que se vea el objeto S, se establece una primera alineacion MS, y marchando sobre ella, se busca un punto M, próximamente en la perpendicular PM: desde la pieza se marca la línea PR, paralela á la MS: sobre esta se toma una magnitud cualquiera  $d$ , y sobre la perpendicular á ella, otra igual á  $\frac{E}{D} d$ , siendo E igual á PM y D la distancia PS al objeto, con

lo cual quedará determinada la direccion PS, segun lo demuestra la semejanza de los triángulos formados en la figura.

Hecha esta operacion preliminar, se procede á verificar la puntería, y sea para ello OP (fig. 74) la direccion marcada por los jalones N y N', situados, el segundo á una distancia cualquiera del punto P, y el primero á doble distancia que el anterior. Si colocásemos la pieza de manera que el guion viniese á situarse sobre el plano vertical, determinado por los jalones, claro es que, dirigiendo la visual á uno de ellos, empleando el alza horizontal correspondiente á la distancia á que se tira y una vertical cualquiera, quedaria la pieza en la direccion conveniente; pero no siendo fácil conseguir esto en la práctica, se emplea el siguiente procedimiento que, aun cuando erróneo, permite dar con suficiente exactitud la expresada direccion al cañon, cuando este se encuentre desviado del plano OP, siendo O el objeto y procurando sea pequeña la distancia PM al guion.

Para conseguirlo siendo AB la posicion de la pieza, se empieza colocando el alza horizontal BD, marcada en las tablas de tiro, y se dirige la línea de mira al jalon mas alejado N: sin variar la posicion de la pieza, se corre el ocular del alza hasta que la visual, pase por el jalon N', despues de lo que, sin variar el alza, se hace girar la pieza hasta que tome la posicion A' B', en que la línea de mira C' M, pase por el jalon N, y esta es como veremos, la direccion definitiva de la pieza.

En efecto, imaginemos unido el punto O con el M y sea D' la interseccion de esta recta con la B' C' siendo la desviacion PM muy pequeña, relativamente á la distancia al primer

jalon, puede admitirse que  $N'M = N'P$  y por lo tanto, que el triángulo  $N'NM$  es isósceles y por ello

$$\text{ángulo } N'NM = \text{ángulo } N'MN$$

Del triángulo  $MNO$  se deduce

$$N'NM = NMO + NOM$$

y pudiendo despreciarse el ángulo  $NOM$ , por la pequeñez del cateto  $PM$ , se obtiene en conclusion, que la recta  $NMC'$  es la bisectriz del ángulo  $CMD'$  y en consecuencia que son iguales los triángulos  $MCD$  y  $MCD'$ , por tener un lado y dos ángulos iguales; por lo que

$$B'D' = BD$$

que como hemos dicho, es la verdadera derivacion para hacer la puntería al objeto  $O$ .

Si la colocacion de los jalones no pudiera hacerse por delante de la pieza, se sitúan detras, obteniéndose por idéntico procedimiento la posicion definitiva de la pieza  $A'B'$  (fig. 72) lo que se demuestra siguiendo la misma marcha que anteriormente.

Una vez dada la direccion y determinado el ángulo de posicion, como se explicará al tratar de la ejecucion de las diferentes clases de tiro, se dá la inclinacion á la pieza valiéndose de la escuadra de nivel, haciendo que su eje forme con la horizontal, un ángulo igual á la suma del de posicion y el dado por las tablas para la distancia á que se tira.

De este modo se hace la puntería en el primer disparo, para los siguientes, si las piezas son de sitio, se emplea el derivador, y si son de campaña, en las que no se usa este aparato, se apunta por referencia, pudiendo ser esta el jalon mas alejado, es decir del mismo modo que se hizo en las punterías de noche, siguiendo el procedimiento empleado en el polígono de Varsovia: debe procurarse colocar la pieza siempre en el mismo sitio y como no están situadas sobre plataformas, con vendrá servirse de la referencia, solo para dar la direccion dándole la inclinacion por medio de la escuadra.

**155. Puntería inversa.**—Este método, que tiene aplicacion en las baterías de costa, cuando no se vé el objeto desde la pieza, si se conoce su direccion; consiste en tener trazado en la esplanada un arco de circulo dividido en partes iguales, y cuyo centro, esté en el punto de giro del marco: por los procedimientos que mas adelante se dirán, se conoce en la direccion de que rádio se encuentra el objeto y se hace la puntería colocándose en el guion y dirigiendo la visual al extremo del rádio de direccion, con el alza horizontal correspondiente.

Este procedimiento tiene el inconveniente de que se comete un error, debido á que el eje de la pieza no se encuentra siempre en el plano vertical que pasa por el punto de giro, por lo que conviene trazar el arco á la mayor distancia posible; así es que, en las baterías de Kronstadt, no habiendo suficiente distancia para trazarlo, se marcaron las divisiones en la pared de la casa-mata, lo que equivale á reemplazar el arco por su tangente.

Los resultados de las experiencias verificadas siguiendo este método y atendiendo á la longitud de los buques, fueron satisfactorios, pero no tanto que pueda preferirse á la puntería directa, siempre que pueda hacerse.

**156. Descripcion de alzas.**—Los instrumentos necesarios para la puntería de las piezas, pueden clasificarse en dos clases, que son *alzas* y *escuadras*: las primeras, pueden ser rectilíneas ó circulares, y las segundas, de nivel, de péndulo, y de péndulo y nivel.

Ocupándonos primero de las alzas rectilíneas, su division es, en alzas *movibles* y *fijas*. Nos limitaremos á la descripcion de las empleadas en nuestra artillería haciéndolo solo de un modelo en cada uno de sus diversos tipos.

**157.** Las *alzas movibles* constan (fig. 73) de una base circular A B, de rádio necesario para adaptarse á la faja alta de la culata en la pieza correspondiente: en su punto médio, se levanta una regla graduada é inclinada con respecto á la normal de la base, que pasa por dicho punto; esta regla,

tiene una ranura rectangular en toda su longitud, y á derecha é izquierda de esta ranura, dos graduaciones, la de la derecha, es en milímetros, teniendo el cero en la base, por lo que siempre determina alzas reducidas, y la de la izquierda, representa diferentes alcances, correspondientes á las alturas de alza que hay marcadas en frente. A lo largo de la regla, resbala una pequeña corredera C que sirve de ocular, para lo que se dirige la visual, bien por su arista superior, ó por la inferior, y para que la colocacion sobre la pieza sea la conveniente, lleva el alza suspendida en su parte superior, una pequeña plomada y en la base hay marcada una incision: de este modo, haciendo que el hilo de la plomada pase por la incision, claro es que la inclinacion del alza respecto al plano vertical de tiro, siempre será la misma.

La construccion de estas, supone que la relacion entre las alzas horizontales y las verticales correspondientes á diversos alcances, es constante, porque si tomamos dos alturas de alza  $h$  y  $h'$  y llamamos las horizontales  $d$  y  $d'$ , en los triángulos semejantes que se forman en el alza, se verifica

$$\frac{h}{d} = \frac{h'}{d'}$$

Esta relacion no es exacta, á pesar de lo que, se han usado bastante esta clase de alzas, por la ventaja de la gran ligereza para la operacion de apuntar, puesto que dan al mismo tiempo la altura y la derivacion: su construccion se hace, dándoles la inclinacion correspondiente al término medio de la relacion  $\frac{d}{h}$ , para los alcances usuales de la pieza á que corresponda; el error que así se comete es pequeño, y aun menor que el correspondiente al desvio de la pieza.

Presentan en cambio el grave inconveniente, de que cada graduacion no sirve mas que para una carga, y esta es la razon por la que en su base, tienen marcada la carga correspondiente.

El error debido á ser rectilínea el alza, puede evitarse calculando para cada altura, la derivacion correspondiente, y

uniendo despues por una línea, los extremos de las derivaciones, resultando de este modo un alza curvilínea. La propuesta por el Comandante Perez obedece á este principio, diferenciándose de la anterior, en ser curva la ranura por donde marcha el ocular y tener un pequeño nivel sobre su base, para la colocacion sobre la pieza.

**158.** Várias son las formas que afectan las alzas fijas: la (fig 74) representa la correspondiente al cañon de hierro de 16<sup>cm</sup>; se compone de un brazo largo A B, de seccion rectangular, terminando en una pieza C D, con una ranura por la cual marcha una corredera F, que contiene el ocular formado por una cruz: la parte inferior de la ranura está graduada en milímetros, correspondiendo el cero, á la línea de mira paralela al plano vertical que pasa por el eje de la pieza: esta graduacion tiene por objeto, tomar la correccion de la derivacion, bastando para ello, hacer resbalar la corredera hasta que una señal ó incision que tiene en su centro, coincida con la division marcada para la distancia á que se tira: en el brazo mayor del alza están marcadas varias distancias y á su derecha, las correcciones de la derivacion. Para su colocacion en la pieza, tiene ésta, abierta en su parte posterior, una caja en donde se aloja el brazo del alza, con facultad de subir y bajar en ella, quedando fija en la posicion conveniente para hacer la punteria, sea por un muelle colocado en el interior de la caja ó por un tornillo de presion.

**159.** Análoga á la anterior en su forma (fig. 75) es la del cañon de bronce de 16<sup>cm</sup>, estando su brazo mayor dividido en milímetros, y diferenciándose de ella además, en tener sobre el brazo menor un nivel de aire N, que sirve para colocarla vertical en el acto de hacer la punteria. Para fijarla en el cañon, tiene este una pieza A, en la que entra otra B, que tiene una cavidad DD, en la que se aloja el boton C: de este modo, queda esta última pieza sujeta al cañon, así como el alza, cuando su brazo mayor se introduzca en la ranura E; fijándose en la altura que se necesite, por medio del tornillo de presion P. La pieza B, tiene en su parte anterior un pequeño

índice H, cuyo extremo es el que debe marcar la altura de alza; por último, el brazo mayor pasa por otra pieza I, también unida al cañon, y cuya parte central R, tiene facultad de correr á derecha é izquierda por medio del tornillo S, y puesto que también el alza por su colocacion puede moverse, se consigue la horizontalidad del nivel ó sea la verticalidad del alza, sin más que actuar sobre el expresado tornillo. En los cañones de 14<sup>cm</sup> á cargar por la culata, se usa un alza de esta misma forma.

**160.** La (fig. 76) representa en tamaño natural, el alza del cañon de acero de 8<sup>cm</sup> á cargar por la culata, sistema Krupp: su brazo mayor es prismático, cuya seccion se indica en A y el menor, está constituido por un cilindro B, el cual tiene una escala para tomar la correccion de la derivacion: fija al brazo mayor del alza hay una pieza, en cuyo centro tiene marcada una flecha que sirve de índice, por estar en el plano vertical paralelo al que pasa por el eje del ánima: en el interior del cilindro, y fija también al brazo mayor, hay una tuerca, en la que engrana un tornillo que tiene por eje el del cilindro y que se le hace girar por el boton D: dando movimiento á este boton, en uno ú otro sentido, el cilindro marcha lateralmente, con lo que se puede hacer coincidir la flecha con la division necesaria para verificar la punteria. La pieza, en su culata, tiene abierto un orificio de igual seccion que el brazo del alza, y en él se aloja, sosteniéndola en la altura conveniente para la distancia á que se tira, por medio de un tornillo de presion: la pequeña ranura en ángulo F, constituye el punto de mira anterior. El alza del cañon de acero de 9<sup>cm</sup> es de esta misma forma.

**161.** También en tamaño natural, la (fig. 77) representa el alza del cañon de 8<sup>cm</sup> corto, sistema Plasencia: consta de un brazo ó regla A de seccion rectangular, graduado en milímetros; á lo largo de él marcha una corredera B que se fija á la altura conveniente, por medio del tornillo C, bastando para colocar el alza en el cañon, introducir la regla en una abertura que tiene en su parte posterior, sirviendo de tope la corredera.

La cabeza del alza está formada por una pieza D y una de sus caras termina en un pequeño plano inclinado E, que también está graduado en milímetros; dentro de una ranura que tiene en toda su longitud, resbala otra pieza de latón F que tiene el punto de mira anterior y una marca H, que es la que debe colocarse coincidiendo con la graduación correspondiente á la corrección de la derivación, fijándola con el tornillo P. Sería preferible que la pieza F, marchara por la acción de un tornillo como en el alza Krupp ya descrita, pues de este modo, se evitaría el movimiento que al apretar el tornillo P toma la pieza F, variando por lo tanto la graduación. De igual forma es la del cañón de bronce de 10<sup>cm</sup>, así como la del de 7,6<sup>cm</sup> sistema Whitworth, diferenciándose únicamente esta última, en que el brazo mayor es prismático exagonal y en que la pieza que sirve de tope para su colocación en el cañón, es un cilindro de latón.

**162.** Los cañones ensayados en Madrid por la Junta Superior Facultativa del Cuerpo, que eran del calibre 76<sup>mm</sup> y procedían de la casa Armstrong, tenían el alza que representa la (fig. 78) la que se compone de un brazo mayor A, de sección rectangular, con sus aristas redondeadas; en una de sus caras lleva la graduación, que sirve para marcar la altura de alza, con los números de 4 al 15, correspondientes á grados de inclinación, con relación á la línea que vá de la intersección del eje de la pieza con el de muñones, al blanco. Cada grado está dividido en medios y sextos, viniendo á resultar la graduación en divisiones de 10'. Para apreciar los minutos, termina el vástago por la parte superior, en una tuerca B que puede dar una vuelta justa, imprimiendo un movimiento rectilíneo á la cabeza del alza: en la vuelta entera de la tuerca, sube el ocular una parte igual á 40', y estando dividida la circunferencia exterior de la tuerca en diez partes iguales, cada una de estas corresponde á 4'; así, á la altura de alza marcada en el vástago, hay que añadir de 0' á 40', según que coincidan con la flecha marcada en aquel, las cifras 0'.....4' etc. hasta 40'.

La cabeza del alza, es análoga á la últimamente explicada y tiene un pequeño orificio que sirve de ocular: la graduacion de la corredera por donde marcha, es tambien de 10' en 10'.

La colocacion en la pieza, es igual que las de los cañones Plasencia y Whitworth.

El punto de mira C es de reticulo, formado por dos alambres delgados de cobre, y su colocacion en la pieza, es por medio de una rosca de filete cuadrangular grueso y de gran paso, que entra á mano suavemente, para poderlo quitar y poner á voluntad: una vez roscado, una pequeña guia que tiene un corto movimiento vertical, fija la posicion del punto de mira, á fin de que no pueda variar con el uso del tornillo.

Además de la linea de mira determinada por el reticulo y el orificio abierto en la cabeza del alza, hay otra paralela, formada por una pequeña ranura abierta en la parte superior del alza y el punto mas alto del de mira.

**163. Alza cuadrante.**—A este género pertenece la del obus de hierro de 21<sup>cm</sup> representada en la (fig. 79). Consta de un tubo A en arco de círculo, cuyo centro es el punto de mira anterior B colocado en el muñon izquierdo del obus: en su parte posterior está graduado el tubo, sirviendo la graduacion para tomar las alturas de alza, y en un manguito C, está fija una regla D tambien graduada, para las correcciones de la derivacion; este manguito puede marchar á lo largo del tubo, para lo que tiene un piñon que engrana en una cremallera abierta en el costado de aquel. Para su colocacion en la pieza, tiene esta fija en la culata, otro pequeño tubo E, en el que entra el extremo del alza.

**164. Escuadras** —Se dividen como queda dicho, en *escuadras de nivel, de péndulo y de péndulo y nivel* (\*).

La (fig. 80) representa una de péndulo, cuya inspeccion basta para comprenderla, con solo decir que los lados de la caja son paralelos á los radios extremos del cuadrante, por

---

(\*) Las primeras, que son las empleadas en nuestra artillería, se hallan en el Tratado de Balística.—Artillería lisa.

lo que, cuando el péndulo está vertical, el ángulo que forma con uno de los lados de la caja es igual al que la horizontal hace con el adyacente.

**165.** Las de nivel y péndulo constan (fig. 81) de una chapa metálica en la que hay una graduacion desde  $0^{\circ}$  á  $65^{\circ}$ : dos de sus lados están rodeados por una faja, cuyo plano es perpendicular al de la chapa: en el centro del arco graduado, está fijo uno de los extremos de un nivel, con facultad de girar, llevando un nonio en el otro, que se fija en la posicion conveniente, por medio de un tornillo de presion. Para asegurar la verticalidad del plano graduado, sirve un péndulo, cuyo eje de suspension le es paralelo, así como al radio del origen de la graduacion; este péndulo se mueve libremente en un espacio graduado en milímetros, correspondiendo el cero á la posicion vertical del plano.

---



## CAPÍTULO 5.º

---

### DIVERSAS CLASES DE TIROS Y MANERA DE EJECUTARLOS.

---

**166. Clasificación del tiro.**—Generalmente se hace, bien sea por los elementos que determinan la trayectoria, por el efecto que trate de obtenerse ó por la clase de proyectiles que se empleen.

Por los elementos que determinan la trayectoria, ó sea por la cantidad de carga necesaria para la distancia á que el objeto se encuentra, se divide en *directo é indirecto*; el primero es aquel en el que se emplea la carga llamada *ordinaria* y el segundo el que exige otra distinta.

El tiro directo se emplea cuando solo se dá el punto de impacto deseable, aun cuando esté oculto por un obstáculo cualquiera, bastando que la trayectoria tenga la altura necesaria para salvarlo, y el indirecto cuando además del punto de impacto, media la condicion de que la trayectoria pase por un segundo punto, ó bien, la de que el proyectil caiga con un ángulo dado.

Atendiendo al efecto que trate de obtenerse, se divide en *tiro de campaña* ó sea contra tropas y objetos poco resistentes: *de sitio* que á su vez se divide en *tiro de brecha de demolicion de enfilada y defensivo*, empleándose para batir obras de gran resistencia en general, así como al personal y material en

ellas colocado, y por último en tiro de *costa* ó sea contra buques.

Y finalmente por la clase de proyectiles que se emplean en tiro de *granada*, de *granada de metralla* y de *metralla*.

Para la explicacion de las diferentes clases de tiro, empezaremos por el de granada en todos los casos que puede emplearse y sucesivamente el de los demás proyectiles indicados.

**167. Tiro de granada.**—*Ley de dispersion de los disparos.*—Segun la balística experimental enseña, si con una misma pieza se hace un cierto número de disparos en condiciones tan iguales como sea posible, se obtiene un haz de trayectorias que es tanto mas estenso, cuanto mayor es la distancia á que se tira. Si este haz se le supone cortado por dos planos uno horizontal y otro vertical, siendo además perpendicular este á la línea de tiro, y si en ambos se recogen todos los puntos de impacto, quedan estos distribuidos con sujecion siempre á leyes fijas, alrededor de un punto, que corresponde á la trayectoria media y que es precisamente á la que se refieren los datos que proporcionan las tablas de tiro.

La distancia del punto de impacto medio á cualquiera de los otros, tomã el nombre de *desvío absoluto* y refiriéndolos á un sistema coordinado rectangular cuyo origen sea el punto de impacto medio, dá lugar en el plano vertical á dos desvíos, que toman los nombres de *lateral* y *vertical* y á otros dos en el horizontal que así mismo se llaman *longitudinal* y *lateral*.

Como se sabe por el cálculo de probabilidades, el desvío probable es aquel en que, la probabilidad de obtener uno menor que él es igual á 0,50; y el desvío máximo es igual á cuatro veces el anterior, admitiéndose siempre la misma probabilidad de cometer errores en cualquiera de los dos sentidos que pueden considerarse.

Suponiendo trazadas dos rectas paralelas á cada uno de los ejes coordinados, situadas de manera que el punto medio quede á la mitad de la distancia entre ambas, que suponemos sea ocho veces el desvío probable; dentro de la faja indefinida así constituida quedan contenidos todos los disparos, distri-

buidos de modo, que si se divide en otras ocho fajas iguales, teniendo cada una de anchura el desvío probable, las dos centrales contienen el 50 por 100, las contiguas diez y seis, siete las siguientes y dos las restantes.

**168. Factores de probabilidad.**—Se llama *factor de probabilidad*, el número por quien hay que multiplicar la anchura de la zona que contiene el 50 por 100 de los disparos, para obtener la correspondiente de otra zona, en que caigan un número dado por ciento de proyectiles.

Si por ejemplo, nos proponemos determinar este factor para que sea  $N$  el por ciento que se desea, emplearemos la tabla (núm. 2) que nos dá la probabilidad de cometer un error, en valor absoluto, menor que una cantidad dada, é inversamente. En ella buscaremos el valor de  $\lambda$ , correspondiente á la probabilidad  $\frac{N}{100}$  y como sabemos que

$$\lambda = a h = a \frac{0,476}{r}$$

en donde  $r$  representa el error probable, se deduce

$$a = \frac{\lambda}{0,476} r$$

ó bien

$$2a = \frac{\lambda}{0,476} 2r$$

fórmula en la que  $2a$ , es la zona que tratamos de determinar y  $2r$  la del 50 por 100, por lo que  $\frac{\lambda}{0,476}$  será el factor de probabilidad.

De este modo se ha formado la siguiente tabla; en ella la columna  $P(f)$ , es el tanto por ciento y  $f$  el factor de probabilidad.

P(f)	f								
1	0,02	21	0,40	41	0,80	61	1,27	81	1,94
2	0,04	22	0,41	42	0,82	62	1,30	82	1,98
3	0,06	23	0,43	43	0,84	63	1,33	83	2,03
4	0,07	24	0,45	44	0,86	64	1,36	84	2,08
5	0,09	25	0,47	45	0,89	65	1,39	85	2,13
6	0,11	26	0,49	46	0,91	66	1,42	86	2,18
7	0,13	27	0,51	47	0,93	67	1,45	87	2,24
8	0,15	28	0,53	48	0,95	68	1,48	88	2,30
9	0,17	29	0,55	49	0,98	69	1,52	89	2,37
10	0,18	30	0,57	50	1,00	70	1,54	90	2,44
11	0,20	31	0,59	51	1,02	71	1,57	91	2,52
12	0,22	32	0,61	52	1,04	72	1,60	92	2,60
13	0,24	33	0,63	53	1,07	73	1,64	93	2,69
14	0,26	34	0,65	54	1,09	74	1,67	94	2,78
15	0,28	35	0,67	55	1,12	75	1,71	95	2,90
16	0,30	36	0,70	56	1,14	76	1,74	96	3,04
17	0,32	37	0,72	57	1,17	77	1,78	97	3,22
18	0,34	38	0,74	58	1,19	78	1,82	98	3,45
19	0,36	39	0,76	59	1,22	79	1,86	99	3,82
20	0,38	40	0,78	60	1,25	80	1,90	100	

Tres son las cuestiones que pueden resolverse por medio de esta tabla.

1.<sup>a</sup> Determinar la altura  $x$  de un objeto de anchura indefinida, para que reciba un  $N$  por 100 de proyectiles. Bastará para ello buscar en la tabla, el factor de probabilidad correspondiente al número  $N$  y si suponemos sea  $a$ , así como  $l$  la altura de la zona que contiene el 50 por 100,

$$x = a l$$

será la solución buscada.

2.<sup>a</sup> Determinar el número  $x$  de proyectiles que por cada ciento, darán en un objeto de altura  $a$  y anchura indefinida.

Siendo en este caso  $\frac{a}{l}$  el factor de probabilidad, el por ciento de las tablas que á él corresponde, resuelve la cuestion.

3.<sup>a</sup> Determinar el número de proyectiles que darán en un objeto de altura  $a$  y anchura  $b$ . Como en el caso anterior, determinaremos el tanto por ciento  $N_a$  y  $N_b$ , que caerán respectivamente en una zona de altura  $a$  y en otra de anchura  $b$ .

$$\frac{N_a}{100} \text{ y } \frac{N_b}{100}$$

serán las probabilidades de dar en una ú otra zona y segun el principio de la probabilidad compuesta,

$$\frac{N_a}{100} \times \frac{N_b}{100}$$

será la de dar en el rectángulo propuesto; y el tanto por ciento de los proyectiles que en este rectángulo caerán, será

$$\frac{N_a \times N_b}{100}$$

**169. Ejecucion del tiro en campaña.**—Pueden distinguirse dos casos distintos, segun esté el objeto visible ú oculto.

*Caso del objeto visible.*—La primera determinacion necesaria para efectuar el tiro, es el conocimiento de la distancia que média desde la bateria al blanco, la que puede conseguirse, bien sea haciendo uso de Telémetros de campaña, ó por las indicaciones que se dán á conocer en la Escuela de distancias, cuando se carezca de dichos instrumentos.

Conocida que sea, las tablas de tiro darán las alzas vertical y lateral que á ella corresponden, á las que no debemos considerar mas que como provisionales; sirviendo por lo tanto de punto de partida, que evitará hacer muchos disparos de ensayo. Con estas alzas, es con las que desde luego se hace la puntería, siguiendo los métodos expuestos en el capitulo anterior.

:

La razon de no poder considerar mas que como provisionales las alzas de las tablas, estriba en el error que haya podido cometerse en la apreciacion de la distancia y muy especialmente, en que por regla general, serán muy distintas las circunstancias en que aquellas han sido obtenidas y las que se presenten en cada caso; por esta razon se hace indispensable proceder á encontrar las correcciones que deben experimentar, siguiendo para ello los métodos que á continuacion se exponen y que tienen por objeto, llegar á conseguir que la trayectoria média pase tan próxima al blanco, como sea posible en el terreno real de los hechos, haciendo para ello el menor número de disparos.

**170. Correccion del tiro.**—Dos son los métodos que se emplean; basado uno, en el conocimiento exacto de la distancia que média desde el punto de caída al objeto, y el otro en el conocimiento del número de disparos cortos que debe haber, cuando el tiro esté rectificado. El primero, mucho menos práctico que el segundo, solo podrá emplearse en la guerra en casos muy escepcionales, teniendo por ello su mayor aplicacion en el tiro de Escuela; el segundo por el contrario es muy espedito, cualesquiera que sean las circunstancias del tiro.

**1.º Método.**—Partiendo de un caso general, para descender al caso de uno, dos, tres y cuatro disparos, hechos con la misma alza; supongamos efectuados  $n$ , cuyos puntos de impacto estarán, segun anteriormente queda dicho, distribuidos dentro de una zona igual á ocho veces el desvío probable, que llamaremos  $r$  y el cual estará dado en las tablas de tiro, y será el correspondiente á la distancia á que se tira. Llamando  $h$  el módulo de convergencia de cada uno de los disparos, se tiene

$$h = \frac{0,4769}{r}$$

y tomando la media diferencial de los alcances, se obtendrá un punto en el terreno, que tendrá un desvío con respecto

al verdadero punto de impacto medio, correspondiente á la situación de la pieza, siendo

$$R = \frac{0,4769}{H}$$

el desvío probable de esta media diferencial, representando por  $H$  el módulo de convergencia, cuya expresion es

$$H = h\sqrt{n} = \frac{0,4769}{r} \sqrt{n}$$

de donde

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}}$$

por lo que, el desvío máximo de dicho punto, con respecto al de impacto medio, será

$$\delta = \frac{4r}{\sqrt{n}}$$

que puede hacerse tan pequeño como se quiera, siempre que el número de disparos hechos sea bastante grande.

Si suponemos verificado uno solamente, con el alza de las tablas, después de lo dicho, la distancia máxima á que caerá el proyectil del punto medio, deberá ser

$$\delta = 4r$$

deduciendo por consiguiente la

**171. 1.ª Regla.**—*Siempre que al hacer un disparo, el proyectil caiga á mayor distancia del objeto, que el doble de la zona que contiene el 50 por 100, debe inmediatamente corregirse el tiro, aumentando ó disminuyendo el alza, la cantidad correspondiente al desvío observado.*

De este modo se habrá conseguido, que la probabilidad de haber aproximado la trayectoria média al objeto, á menos del doble del desvío probable, sea mayor que 0,82, que es la correspondiente á que un proyectil caiga dentro del doble de la zona del 50 por 100, segun lo expresa la tabla anterior.

Corregida de este modo el alza, consideremos dos disparos hechos con la nuevamente obtenida, en cuyo caso

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{2}} = 2r\sqrt{2}$$

ó sea un desvío máximo mayor que  $2r$  y como el probable tiene por valor

$$R = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

resulta, que la probabilidad de que el punto médio de los dos disparos esté á una distancia del verdadero de impacto médio menor que  $2r$ , se determinará buscando en la misma tabla el valor correspondiente á

$$f = \frac{2r}{R} = 2,84$$

que será

$$P(f) = 0,945$$

Mientras que la probabilidad para que aquel punto caiga entre  $2r$  y  $2r\sqrt{2}$  será

$$100 - 0,945 = 0,55$$

por consiguiente, si hechos dos disparos, los proyectiles han caído de tal modo, que su punto medio esté á menor distancia que  $2r$  del blanco, la probabilidad de que la trayectoria média esté dentro de este límite, será mayor que

$$\frac{1}{2} \times 0,945 = 0,478$$

que es próximamente 0,50, no habiendo por lo tanto razon para variar el tiro. Pero si por el contrario, el punto medio de los dos de caída estuviera á mayor distancia, la probabilidad de que la trayectoria media pase por el blanco, estará comprendida entre 0,50 y 0,055, límites que corresponden á caer el

punto medio entre  $2r$  y  $2r\sqrt{2}$ . Podemos pues, teniendo siempre por norma no corregir el tiro mientras pueda haber duda, establecer la siguiente:

**172. 2.<sup>a</sup> Regla.**—*Cuando hechos dos disparos con la misma alza, los dos proyectiles caigan en el mismo sentido y á mayor distancia del objeto que la zona del 50 por 100, debe corregirse el tiro, en una cantidad igual á la distancia que media desde el punto de impacto medio, al referido objeto.*

Con la correccion indicada, habrá una probabilidad 0,945 de haber aproximado la trayectoria media al blanco, á menos de la zona del 50 por 100.

Sea ahora tres el número de los disparos; las fórmulas dan en este caso

$$\delta = \frac{4r}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad R = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

por lo que, la probabilidad para que el punto medio se desvíe menos de  $2r$  del verdadero, será

$$P=0,98$$

y por lo tanto, lo mismo que anteriormente, siempre que el punto medio esté á una distancia del blanco, menor que la zona del 50 por 100, hay una probabilidad superior á 0,49 de que la trayectoria media pase por él ó muy próxima, no debiendo modificarse el tiro. Pero cayendo los tres proyectiles en el mismo sentido, la probabilidad de que la trayectoria media pase por el objeto, es tan solo de  $\frac{1}{8}$ , cantidad tan pequeña, que nos obliga á no aceptar como bueno el tiro, mas que en el caso en que los tres impactos estén en un intervalo menor que  $2r$ , en cuyo caso, dada la ley de dispersion de los disparos, es mas probable hayan caido dentro de la zona del 50 por 100, por lo que podemos establecer la siguiente:

**173. 3.<sup>a</sup> Regla.**—*Si hechos tres disparos, los proyectiles caen todos en el mismo sentido y uno por lo menos á mayor distancia del objeto, que la zona del 50 por 100, el tiro debe corregirse.*

La correccion se hará del mismo modo que anteriormente.  
Cuando los disparos sean cuatro

$$\delta = 2r \quad \text{y} \quad R = \frac{r}{2}$$

teniéndose en consecuencia la certeza, que su punto medio cae á menos distancia que  $2r$  del de impacto medio; pero como quiera que en este caso, la probabilidad de obtener cuatro disparos cortos, es solamente  $\frac{1}{16}$ , deberá desde luego corregirse si todos ellos caen en el mismo sentido, teniéndose así una probabilidad 0,30, de aproximar la trayectoria media á una distancia menor que  $r$ . Si comprendieran al objeto, no debe efectuarse correccion alguna, porque siendo tan pequeño el número de tiros, los anteriores razonamientos no pueden considerarse como rigurosamente exactos. Por lo tanto, tal será la

**174. 4.ª Regla** — *Si se hacen cuatro disparos y todos los proyectiles caen en el mismo sentido, debe corregirse el tiro.*

Obtenida ya una primera aproximacion para el alza, siguiendo las reglas acabadas de establecer, se procederá á efectuar diez disparos y si el desvío de la media diferencial es superior al probable, se corregirá, por ser con este número el error máximo

$$\delta = 4,264 r$$

que aun cuando algo superior á  $r$ , consideraremos á este un límite del cual no debe pasarse, pues sabido es que la probabilidad, disminuye muy rápidamente á medida que el error se aproxima á su máximo.

Para  $r = 20$ , se obtiene

$$\delta = \frac{4 r}{\sqrt{20}} = 0,894 r$$

y por lo tanto, desde este número de disparos es cuando deben empezarse á corregir errores inferiores á  $r$ .

**175. 2.º Método.**—En el tiro de guerra, no es posible

apreciar desde la batería la magnitud de los errores en alcance, pudiéndose en general tan solo distinguir si los disparos son cortos ó largos, observando muy especialmente el humo producido por la explosion de las granadas, conviniendo, cuando pueda hacerse, establecer una observacion en la misma linea de la batería hácia el costado en que viene el viento.

Los errores en direccion podrán mas facilmente ser apreciados, no tan solo en el sentido en que se verifican, sino tambien en su magnitud, por lo que será fácil hacer las correcciones necesarias, y estas podrán fundarse en los desvíos observados, no ocupándonos por lo mismo de este asunto.

La rectificacion del tiro partiendo del alza que dán las tablas para la distancia presumible á que se encuentra el punto que se bate, consta de dos partes: primeramente se determina un alza llamada de ensayo, tal, que el objeto quede comprendido en el rectángulo de dispersion de los disparos y una vez que se haya obtenido, se modifica hasta que la trayectoria média pase por el blanco, con lo que se tendrá yá el alza verdadera.

Para lo primero, ó sea para determinar el alza de ensayo, se empieza por fijar la distancia al objeto, sea á simple vista, ó sea con telémetros de campaña y con el alza correspondiente que dán las tablas, se hace un disparo y si resultase corto se aumentará el alza sucesivamente con intervalos de 200 en 200 metros hasta obtener un tiro largo y tomando la media diferencial de las dos alzas últimamente empleadas se hará un nuevo disparo, que si resulta largo se volverá á tomar la média entre esta alza y la empleada en el disparo corto mas próximo al objeto; llegándose de este modo á obtener dos distancias que difiriendo en 50 metros, comprenderán al objeto y por lo tanto tomando para alza de ensayo cualquiera de las correspondientes á dichas distancias ó su média diferencial, se tiene la certeza de que el objeto está comprendido dentro de la zona de dispersion de los disparos.

Ahora bien, las variaciones de alza hasta llegar á las

dos que comprendan el objeto, se deben fijar de tal manera, que los rectángulos de certeza de los diferentes disparos no se corten, porque de otro modo puede presentarse la anomalía, de ser un disparo mas corto que otro en el que se hubiera empleado mayor alza, pudiéndose admitir como regla fija para todas las piezas, la variacion de 200 metros que hemos empleado.

En campaña es tambien conveniente, en la generalidad de los casos tomar como alza de ensayo, en vez de la média diferencial, la del disparo corto, para evitar se aumente la proporcion de los largos, que siempre producen menor efecto.

Resta ahora la determinacion del alza verdadera, para lo que es preciso fijar, segun la naturaleza del objeto que se bate, á que distancia de él debe conducirse la trayectoria media, y como quiera que en campaña, conviene siempre la rapidez del fuego, precisas son reglas generales y muy sencillas que lo determinen, habiéndose fijado que para tirar sobre tropas en columna, dada la profundidad que estas generalmente tienen, el punto medio debe estar á una distancia de la cabeza de la columna igual á un desvío probable, con lo que la mejor mitad de los disparos caerá en el objeto, obteniéndose en el tiro arreglado  $\frac{1}{4}$  de disparos cortos que aun podrán causar efecto por la explosion.

Contra una línea de infantería ó caballería en batalla, los disparos largos no producirian efecto ninguno, debiéndose por lo mismo llevar el punto medio delante del objeto y á una distancia igual del doble del desvío probable, en cuyo caso, tan solo  $\frac{1}{4}$  de los disparos serán largos ó darán en él, produciendo tambien la mejor mitad todo su efecto por la explosion. Resulta pues, que en campaña, batiendo objetos visibles, convendrá segun los casos, obtener  $\frac{1}{4}$  de disparos cortos ó  $\frac{1}{4}$  tambien de tiros no cortos.

Determinada el alza de ensayo, si haciendo uso de ella se obtienen cuatro disparos cortos, se corregirá aumentándola en una cantidad inferior á 25 metros, haciendo seguidamente un grupo de ocho disparos y si resultan seis no cortos, si se

tira contra columnas, ó seis cortos si es contra tropas en batalla, se conservará el alza empleada, aumentándola ó disminuyéndola si así no sucediera, lo cual se hace como se ha dicho, ó bien, teniendo presente que la variacion en un desvío probable, aumenta ó disminuye en  $\frac{1}{4}$  la proporcion de tiros cortos.

Obtenida así el alza se continua el fuego, variándola convenientemente si aun fuese preciso, por la observacion en un cierto grupo de disparos.

Con objeto de facilitar las variaciones de alza, las tablas de tiro contienen *correcciones específicas*, es decir las variaciones en altura, direccion y alcance correspondientes á uno ó varios milímetros de alza, ó de derivacion, y para los casos en que se apunte dando inclinacion á la pieza con la escuadra, ó en los que como mas adelante veremos es preciso variar las cargas, contienen así mismo las que corresponden á uno ó varios grados, ó á una ó varias unidades de carga.

Si las tablas no tuvieran estas correcciones, fácil es determinarlas, admitiendo que en intervalos pequeños, como por ejemplo de 200 metros, son proporcionales las variaciones de alza á la de los alcances; por lo que si suponemos que con el cañon de *Ac*, de 15<sup>cm</sup> *Cc*. se tira á una distancia de 4900 metros; se toman las alzas de las dos distancias que difieran en mas y en menos 100<sup>m</sup> de la dada, que son respectivamente 61<sup>mm</sup> y 53<sup>mm</sup> y dividiendo 200 por la diferencia 8 entre ambas alzas, el cociente 25 será la variacion en metros por cada milímetro de alza, con aproximacion suficiente, puesto que tan solo se diferencia en dos metros de la dada por las tablas.

De idéntica manera se procedería para obtener la variacion correspondiente á una unidad de carga.

En cuanto á las correcciones en la derivacion, admitiremos igualmente, que las variaciones en las alzas laterales son proporcionales á las diferencias entre las derivaciones obtenidas, por lo que si con la variacion de alza *b c* (fig. 82) se obtiene una derivacion *AB*, con una unidad se tendrá  $\omega$ , verificándose

$$\frac{x}{l} = \frac{A B}{b c}$$

y admitiéndolo que los triángulos  $b c o$  y  $o A B$  son semejantes, si se sustituye por  $o b$  la longitud  $l$  de la línea de mira y por  $O A$  la distancia  $D$ , se tiene

$$x = \frac{D}{l} \times l$$

que nos dice, que la variación en la derivación correspondiente á una unidad en el alza, se obtiene aproximadamente dividiendo la distancia á que se tira por la longitud de la línea de mira expresada en las mismas unidades que el alza. Esta es la razón por la que conviene que las divisiones del alza sean milésimas partes de la línea de mira, siendo entonces la milésima parte de la distancia, la variación buscada. En el cañon citado de 45<sup>cm</sup> sucede así.

Inútil parece indicar que de la misma manera se obtienen las variaciones en altura.

**176. Objetos movibles.**—Suponiendo que se aproxima á la batería el punto que se bate, el tiro se empieza como queda dicho hasta determinar las dos distancias que le comprenden, que pueden diferenciarse en 400<sup>m</sup> ó 200<sup>m</sup> según sea la velocidad de la marcha ó la distancia á que se encuentra. Haciendo uso entonces de la más corta de las alzas, se hace fuego con lentitud mientras se observen tiros cortos, y en el momento que se observe que un proyectil dá en el objeto, el fuego se ejecuta con gran rapidez hasta que se observen varios tiros consecutivos no cortos, en cuyo caso se disminuye el alza en 400<sup>m</sup> ó 200<sup>m</sup> para continuar con un fuego lento y volver al rápido como queda dicho, continuando así sucesivamente.

Si el objeto tuviera en su marcha necesidad de pasar por un punto determinado, como por ejemplo por un puente se arreglará el tiro con respecto á este punto, esperando á hacer un fuego rápido cuando llegue.

Este procedimiento debe seguirse, si el objeto se aleja. Si la dirección en que se mueve es oblicua con respecto á la

línea de tiro; cuando sus dimensiones sean grandes, conviene apuntar á la cabeza y si son pequeñas y mucha la velocidad de marcha, á un punto que esté algo por delante, segun ya se dijo al tratar de punterías sobre objetos movibles.

**177. Objetos ocultos.**—En el tiro contra tropas cubiertas por algun obstáculo se hace la puntería siguiendo los procedimientos indicados, considerándose el tiro rectificado cuando menos de  $\frac{1}{4}$  de los proyectiles queden cortos, porque no produciendo estos ningun efecto conviene disminuir su número.

**178. Observacion del tiro.**—El mejor medio para apreciar si los disparos son cortos ó largos, es el humo producido por la explosion de las granadas, aprovechando el instante siguiente á ella, antes que el viento lo desipe. Si el humo oculta al objeto en parte ó en su totalidad, el disparo es corto, mientras que si queda por detras será el disparo bueno ó largo segun sea la profundidad de aquel.

**179. Tiro de brecha.**—Sea de brecha propiamente dicho ó de demolicion, se verifica este tiro en el caso mas general, estando cubierta la mampostería que trate de batirse, siendo preciso en ambos determinar todos los elementos, partiendo de la condicion de que las tierras desprendidas sean suficientes para formar una rampa accesible, tomando en consideracion el punto mas alto de la masa cubriente.

Se diferencian uno de otro tan solo en los procedimientos empleados para su ejecucion.

**180. Límite inferior de la brecha.**—La inclinacion que generalmente se desea obtener en las tierras es la de 2 á 3, tomando como limite máximo la de 4 á 4. Conocido pues este dato, propongámonos ante todo determinar (fig. 83) el punto *a* inferior de la brecha, con la condicion de que trazando por él la línea *bac* con la inclinacion dada, la masa de tierras desprendidas llenen el espacio prismático *abd*, condicion que quedará reducida á la equivalencia de las superficies *afgc* y *abd*.

Por la pequeña inclinacion que en general tiene la escarpa,

podemos sin gran error, admitir que sea vertical y que el declive superior  $gc$  sea horizontal con cuyas hipótesis, sustituiremos al polígono  $afhgc$  el cuadrilátero sensiblemente equivalente  $Kh'gc$  que se obtiene, tomando sobre la berma una longitud  $hh' = 0^m,50$ , uniendo el punto  $h'$  con el  $g$  y trazando la recta  $h'K$  paralela á la escarpa. El error que así se comete no es de consideracion, pues si bien se prescinde de la parte  $fh'Ka$ , como las bermas, en el caso de exceder de  $0^m,50$  es siempre en muy pequeña cantidad, la longitud  $fh'$  será tambien tan pequeña, que permita no tomar en consideracion el prisma expresado.

En cambio, el aumento debido al prisma cuya base es  $h'hg$ , resulta ilusorio, pues que en él, no existen tierras y por consiguiente el punto  $a$  así calculado, resultará mas alto de lo debido; pero empezado el tiro, pronto habrá un descenso de la masa cubriente, que permitirá á los proyectiles chocar mas abajo; de lo que resultará que siendo mayor la parte demolida, dará un aumento de tierras que equivaldrá al del prisma que tomamos en consideracion.

Llamando  $x$  la altura  $fa$  que tratamos de conocer y haciendo  $H=fd$ ,  $b=fh'$  ó sea la anchura de la berma disminuida en  $0^m,50$ ,  $h'g=l$ ; representando por  $\alpha$  el ángulo  $abd$  y por  $\beta$  el  $gh'h$  y trazando por el punto  $h'$  las paralelas  $h'm$  y  $h'n$  á las líneas  $ab$  y  $bd$ ; el cuadrilátero  $Kh'gc$  se comprondrá de los triángulos  $Kh'n$ ,  $h'gm$  y del paralelógramo  $mh'nc$ , que tienen respectivamente por áreas

$$\text{área } Kh'n = \frac{(x - b \operatorname{tang} \alpha)^2}{2 \operatorname{tang} \alpha}$$

$$\text{área } h'gm = \frac{1}{2} l^2 \operatorname{tang} (\beta - \alpha)$$

admitiendo que las dos longitudes  $h'g$  y  $h'm$  son iguales, error pequeño, porque difiriendo poco los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , los puntos  $g$  y  $m$  estarán muy próximos.

$$\text{área } h' m n c = \frac{x - b \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \alpha} l \operatorname{sen} \beta$$

Como por otra parte el triángulo  $a b d$  tiene por área

$$\frac{(H - x)^2}{2 \operatorname{tang} \alpha}$$

la igualdad entre esta y la suma de las otras tres, será la equivalencia buscada

$$\frac{(H - x)^2}{2 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{(x - b \operatorname{tang} \alpha)^2}{2 \operatorname{tang} \alpha} + \frac{x - b \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \alpha} l \operatorname{sen} \beta + \frac{4}{2} l^2 \operatorname{tang} (\beta - \alpha)$$

Si con objeto de simplificar la fórmula, suponemos  $\beta = \alpha$ , se tiene

$$\frac{(H - x)^2}{2 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{(x - b \operatorname{tang} \alpha)^2}{2 \operatorname{tang} \alpha} + (x - b \operatorname{tang} \alpha) l \cos \alpha$$

de donde se deduce

$$x = \frac{H^2 + 2 b l \operatorname{tang} \alpha \operatorname{sen} \alpha - b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha}{2 H + 2 l \operatorname{sen} \alpha - 2 b \operatorname{tang} \alpha}$$

y tomando como tipo para valor de  $\alpha$ , el que resulta de ser

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2}{3}$$

por lo que

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,5547$$

se tendrá finalmente

$$x = \frac{3 H^2 + 2,20 l b - \frac{4 b^2}{3}}{6 H + 3,30 l - 4 b} \quad (1)$$

Cuando la berma, como generalmente sucede, no pase de  $0^m,50$  será  $b = 0$ , por lo que

$$x = \frac{3 H^2}{6 H + 3,30 l} \quad (2)$$

Podrá suceder que la anchura del parapeto sea tal, que la línea *ab* no corte al declive superior, y en este caso resultaría del cálculo una masa de tierras mayor que la que realmente se desprendería; pero aun así puede hacerse uso de las fórmulas deducidas por que la conmoción arrastra siempre mayor cantidad, con lo que se compensará el error.

En la práctica puede prescindirse de estas fórmulas tomando el punto inferior de la brecha, á una altura igual á  $\frac{1}{3}$  del muro á partir del pie cuando las distancias á que estén las baterías sean superiores á 4200<sup>m</sup> y para las menores á la mitad de altura. En el primer caso, el aumento del ángulo de caída está compensado con la mayor carga que puede emplearse y la disminución de efecto en el segundo también lo está con la mayor precisión que entonces tienen las piezas.

Los muros en las obras modernas de escarpa están desfilados en  $\frac{1}{5}$  ó  $\frac{1}{3}$  de su altura siendo preciso limitar la parte batida al tercio superior, pues de otro modo, ni aun con los mayores calibres se obtendría fuerza viva suficiente.

**181.** *Angulo de caída.* Determinado que sea el punto *a*, es preciso encontrar la carga, y el ángulo de caída conveniente para efectuar el tiro, contando con que el proyectil conserve la fuerza viva necesaria para obtener el efecto deseado, suponiendo siempre que el plano de tiro es perpendicular á la cara del muro.

Convendremos en tomar por ángulos de caída y de tiro los formados con la línea de posición por las tangentes á la trayectoria en sus puntos final é inicial admitiendo que, cuando se eleva la pieza un pequeño ángulo, la trayectoria sin cambiar de forma, experimenta la misma elevación.

La velocidad de llegada se descompondrá en dos, una normal al muro ó sea horizontal según la hipótesis anteriormente admitida y la otra tangencial: de estas la primera será causa de la penetración del proyectil, estando determinado por consiguiente su valor mínimo según sea la clase de mampostería que trate de batirse y que previamente se conocerá por la experiencia: para producir por lo tanto con

un calibre dado un efecto máximo, se hace preciso que la componente horizontal tenga el máximo valor y para esto el ángulo de caída deberá ser el mínimo, lo que se conseguirá, cuando exista una masa cubriente, haciendo que el proyectil pase rasando su cresta. Si suponemos pues, que se haya fijado la posición de la batería, siguiendo para ello los principios que mas adelante expondremos, habrá para calcular los elementos del tiro dos puntos por donde debe pasar la trayectoria, que son; la cresta de la masa cubriente y el punto mas bajo de la brecha.

Sea C (fig.84) este punto y M N el muro en que se quiere abrir la brecha; A la cresta de la masa cubriente y B la posición de la pieza. Admitiendo que la parte de trayectoria A C se confunda con la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C, el ángulo de caída T A B será igual al A C B, por tener la misma medida. Si llamamos  $b$  al desnivel del punto A con respecto al C;  $a$  la distancia de la cresta al muro y D la que media desde la misma cresta á la pieza, contadas ambas horizontalmente, facilmente se deduce de la figura

$$\text{tang T A B} = \text{tang (A C D + D C B)}$$

ó bien, dada la pequeñez del ángulo D C B

$$\text{tang T A B} = \text{tang A C D} + \text{tang D C B}$$

la que se convierte, si representamos por  $\omega$  el ángulo de caída y por  $\Sigma$  el de posición de la cresta, en

$$\text{tang } \omega = \frac{b}{a} + \frac{D \text{ tang } \Sigma - b}{D + a} \quad (3)$$

En el caso que el punto B esté mas elevado que el N, la fórmula será la misma, afectando de signo negativo al ángulo de posición.

**182. Angulo de posición.**—Para la aplicación de esta fórmula, las cantidades  $a$ ,  $b$  y D se determinan por el plano y perfil de la obra ó por reconocimientos hechos al efecto, y el ángulo de posición, valiéndose de la misma pieza si la cresta

es visible, para lo que basta, con el alza en cero, dirigir la línea de mira natural á la cresta y medir con la escuadra la inclinacion de la pieza.

Si el punto A no es visible, por haber un obstáculo intermedio C (fig. 85) se miden los ángulos  $\beta$  y  $\alpha$  colocándose en B y C respectivamente, teniéndose, segun la figura indicada

$$\text{tang}'\Sigma = \frac{a \text{ tang } \alpha + b \text{ tang } \beta}{a + b}$$

y como en general dichos ángulos son pequeños, pueden tomarse por sus tangentes, con lo que la fórmula será

$$\Sigma = \frac{a \alpha + b \beta}{a + b} \quad (4)$$

debiendo como anteriormente determinarse las cantidades  $a$  y  $b$  por medio de los planos de la obra.

Conocido el valor de  $\Sigma$  puede encontrarse el de su tangente admitiendo que estas son proporcionales á los arcos y estando dado  $\Sigma$  en grados, se puede establecer

$$\frac{\text{tang } \Sigma}{\text{tang } 1^\circ} = \frac{\Sigma}{1}$$

de donde

$$\text{tang } \Sigma = \Sigma \times \text{tang } 1^\circ = 0,017 \Sigma \quad (5)$$

**183. Carga y ángulo de tiro.**—Queda por lo tanto que determinar la carga y el ángulo de tiro necesarios, para lo que, si las tablas están encabezadas con distintos valores del ángulo de caída, contienen para cada uno de estos y á distancias que varían de 100 en 100 metros; el ángulo de tiro correspondiente, velocidad remanente horizontal, derivacion, cargas y desvíos probables, en alcance, direccion y altura.

Se buscarán en las tablas dos valores consecutivos  $\omega$  y  $\omega'$  del ángulo de caída, que comprendan al determinado: buscando enseguida, las cargas y ángulos de tiro correspondientes á los  $\omega$  y  $\omega'$  para las distancias  $d$  y  $d+100$ , se obtendrán los datos siguientes:

$$\omega \dots d \dots \dots \dots \varphi \dots c$$

$$\omega \dots d + 100 \dots \varphi_1 \dots c_1$$

$$\omega' \dots d \dots \dots \dots \varphi' \dots c'$$

$$\omega' \dots d + 100 \dots \varphi'_1 \dots c'_1$$

y empleando la interpolacion lineal, llegaremos á determinar las variaciones  $y$  y  $g$  que deben sufrir respectivamente  $\varphi$  y  $c$  para obtener los valores que corresponden al ángulo de caída dado  $\Delta$  y á la distancia verdadera  $d + \delta$ .

Primeramente determinaremos los ángulos de tiro  $\alpha$  y  $\beta$  correspondientes á la distancia dada y á los de caída  $\omega$  y  $\omega'$  respectivamente, admitiendo como hemos indicado, que las diferencias de los ángulos de tiro son proporcionales á las de las distancias, tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} d \dots \dots \dots \varphi \\ d + \delta \dots \dots \alpha \\ d + 100 \dots \varphi_1 \end{array} \right\} \frac{\delta}{100} = \frac{\alpha - \varphi}{\varphi_1 - \varphi}$$

$$\left. \begin{array}{l} d \dots \dots \dots \varphi' \\ d + \delta \dots \dots \beta \\ d + 100 \dots \varphi'_1 \end{array} \right\} \frac{\delta}{100} = \frac{\beta - \varphi'}{\varphi'_1 - \varphi'}$$

de donde se obtiene

$$\alpha = \varphi + \frac{\delta}{100} (\varphi_1 - \varphi)$$

$$\beta = \varphi' + \frac{\delta}{100} (\varphi'_1 - \varphi')$$

y

$$(\beta - \alpha) = (\varphi' - \varphi) + \frac{\delta}{100} ((\varphi - \varphi') - (\varphi_1 - \varphi'_1))$$

fórmula en la que podemos despreciar el segundo término por ser muy pequeño con relacion al primero, quedando así

$$\beta - \alpha = \varphi' - \varphi$$

:

Conociendo ya  $\beta$  y  $\alpha$ , suponiendo  $\Delta - \omega = \Psi$ , del cuadro

$$\begin{array}{l} \omega \dots\dots \alpha \\ \omega + \Psi \dots \varphi + y \\ \omega' \dots\dots \beta \end{array}$$

se deduce

$$\frac{\Psi}{\omega' - \omega} = \frac{\varphi + y - \alpha}{\beta - \alpha}$$

y por lo tanto

$$y = \frac{\Psi}{\omega' - \omega} (\beta - \alpha) + \alpha - \varphi$$

y poniendo por  $(\beta - \alpha)$  y  $\alpha$  sus valores, será:

$$y = \frac{(\varphi' - \varphi)}{\omega' - \omega} \Psi - \frac{\delta}{100} (\varphi - \varphi_1) \quad (6)$$

Siguiendo una marcha análoga respecto á la carga, obtendríamos:

$$g = \frac{\delta}{100} \left\{ \frac{y}{\varphi' - \varphi} (c'_1 + c - (c_1 + c')) + (c_1 - c) \right\} \frac{y}{\varphi' - \varphi} (c - c')$$

y haciendo

$$\frac{y}{\varphi' - \varphi} (c'_1 + c - (c_1 + c')) + (c_1 - c) = [A]$$

se tiene finalmente

$$g = \frac{\delta}{100} [A] - \frac{y}{\varphi' - \varphi} (c - c') \quad (7)$$

Tanto en esta fórmula como en la que dá el valor de  $y$  los ángulos deben expresarse en minutos y las cargas en gramos.

De un modo análogo se procedería si las tablas estuvieran encabezadas con distancias ó cargas, siendo muy frecuente en todos los casos de la práctica no hacer uso de las fórmulas, por exigir cálculos más ó menos laboriosos, y el método

comunmente empleado, consiste en determinar la carga que para la distancia  $D$  corresponde al ángulo de caída dado y como en general este ángulo no se encontrará en las tablas, se toman dos que le comprendan, adoptando como carga y alza primera las correspondientes al mayor de los dos.

**184. Terreno peligroso.**—Hasta aquí hemos admitido tácitamente que se conocia la distancia desde la pieza al muro batido. En la práctica son muchas las circunstancias que deben tomarse en consideracion para elegir la posicion mas conveniente de la batería, y como de colocarse á una distancia pequeña, la velocidad remanente no será la necesaria para la penetracion y por el contrario, de ser grande, la certeza del tiro disminuye se desprende que debe haber dos limites inferior y superior en el terreno para la expresada posicion.

Si desde el punto medio de la brecha, levantamos una perpendicular al muro y desde él, trazamos dos rectas que formen con ella  $30^\circ$ , la parte del sector comprendida entre estos ródios y los círculos de las distancias máxima y mínima, toma el nombre de *Terreno peligroso* por cuanto fuera de este sector la direccion del tiro con respecto al muro sería inferior á  $60^\circ$  y los proyectiles no penetrarían.

**185. Límite inferior.**—Queda determinado por la condicion de que la velocidad remanente horizontal sea la necesaria para la penetracion.

Conocida que sea por la experiencia esta velocidad limite, variable con el calibre y naturaleza del muro batido; se busca en las tablas de tiro, dos ángulos de caída que comprendan al  $\theta$ , formado con la horizontal por la recta que une la cresta cubriente con el punto mas bajo de la brecha, que sería el que correspondería si la pieza estuviera colocada al mismo nivel que la cresta; se verán los valores de las velocidades de llegada y la distancia correspondiente á la que sea igual ó algo superior á la necesaria para la penetracion, será el limite que se busca.

**186. Límite superior.**—Para fijar este limite se parte de la condicion de obtener un tanto por ciento de proyectiles que

dén en el muro, cuyo dato depende del tiempo en que se desea abrir la brecha, cantidad de proyectiles disponibles, y facilidad en el municionamiento, no debiendo nunca bajar de un 25 por 100. Fijado que sea, buscaremos en las tablas de tiro para el mismo ángulo que anteriormente hemos dicho, la distancia para la cual la probabilidad  $P$  de dar en el rectángulo propuesto en el muro sea igual á la impuesta, calculando ésta, como se ha dicho por la tabla de los factores de probabilidad y teniendo en cuenta que los desvíos probables  $r_a$  y  $r_b$  en altura y en anchura, son en general menores que los verdaderos, conviniendo por lo tanto aumentar algo los que dan las tablas. Si como generalmente sucederá, el ángulo no está en las tablas, se buscarán dos que le comprendan, tomando los valores de  $r_a$  y  $r_b$  en los correspondientes al limite superior si á él se aproxima mas el ángulo dado y la media diferencial de los valores de  $r_a$  y  $r_b$  de ambos límites, cuando el ángulo se acerca mas al inferior, obteniéndose asi, desvíos mas próximos á los verdaderos.

**187.** *Eleccion de la posicion de la bateria.*—A medida que la distancia aumenta, —para un ángulo de caída constante— la fuerza viva crece, disminuyendo por el contrario la probabilidad de dar en el muro, deduciéndose de aquí que el efecto del tiro varia con el producto

$$P \times x$$

y entre los limites anteriormente fijados, la distancia mas favorable en terreno horizontal será aquella para la que el expresado producto tenga un valor máximo.

Suponiendo que las tablas de tiro estén calculadas de 50 en 50<sup>m</sup> á partir de la distancia mínima, determinaremos los valores  $P \times x$  para el ángulo dado y suponiendo que para una distancia  $D$  su valor sea mayor que para la anterior y posterior  $D-50$  y  $D+50$ , admitiremos que  $D$  es la que buscamos, conviniendo sin embargo disminuir algo su valor, por ser el crecimiento de la velocidad mayor que el que dá la relacion supuesta.