METODOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA

PRIMERA EDICIÓN

MANUALES REUS

ENSEÑANZA

METODOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA

POR

José María Eyaralar

PRIMERA EDICION

INSTITUTO EDITORIAL REUS, S. A.
CENTRO DE ENSEÑANZA Y PUBLICACIONES
PRECIADOS, 6 Y 23, Y PUERTA DEL SOL, 12
MADRID

PROLOGO

Con esta obra, creemos satisfacer una necesidad sentida por cuantos desean orientarse fundamentalmente en enseñanza tan difícil como la Matemática, mucho más después de que, acertadísimamente, se transformó la enseñanza de nuestras Normales, de puramente instructiva en obra de formación profesional.

No se trata de una obra improvisada, sino que recoge el fruto de largos años de estudio y experiencia, transcurridos desde la publicación de nuestro *Nuevo Tratado de Aritmética*, escrito con arreglo a las más recientes orientaciones didácticas, que después han seguido otros autores. Recoge además, este libro, el fruto de un año de trabajar en la nueva asignatura de Metodología de las Matemáticas del grado profesional, y la opinión dominante en el cursillo de Orientación Metodológica, últimamente celebrado, al que muchos compañeros aportaron interesantes datos y valiosas sugestiones.

No hemos intentado hacer un recetario, que trate de cómo han de enseñarse en detalle cada uno de los puntos que abarca la Matemática Escolar, tarea imposible aquí, propia de libros escolares, y que sería una invitación a la rutina, cuando entre nuestros axiomas figura el de la invención constante para adaptarse a las múltiples circunstancias de plan, ambiente, conocimientos previos, características psicológicas, etc. Hemos procurado, por el contrario, fundamentar sólidamente las direcciones cardinales de la enseñanza, descendiendo a normas especiales sobre asuntos que lo requieren, y llegando al detalle cuando lo aconsejan la dificultad del caso el deseo de desterrar errores arraigados.

Especial atención hemos dedicado a la Historia de la Matemática por su valor educativo y didáctico y a los *automatismos* y los *tests*, base aquéllos del cálculo y origen éstos de lo más valioso y moderno en la didáctica experimental.

Apremios de tiempo han hecho que esta obra, pensada lentamente, se haya escrito y editado tal vez con excesiva premura; pero en los tiempos de intensa renovación que afortunadamente vivimos, hemos creído que debemos ofrecer a los demás el fruto de nuestro esfuerzo para que sea cuanto antes superado.

CAPITULO PRIMERO

OBJETO DE LA METODOLOGIA

«Los métodos son los maestros de los maestros.»

TAYLLERAND

1. **Definición.**—Si un maestro novel tuviera que organizar por sí mismo los estudios escolares, como un Robinsón de la enseñanza, sin libros ni programas en qué inspirarse, seguramente las primeras cuestiones que se plantearía serían las siguientes: ¿Qué debo enseñar? ¿Cómo debo enseñar? La respuesta a estas preguntas comprende todo el *contenido* o *materia* de la enseñanza y el *método* o la *forma* de realizarla.

Pero una reflexión más detenida le llevaría a considerar que, tanto lo que debe enseñarse como la forma de hacerlo, derivan a su vez de otra cuestión más fundamental, que referida a nuestro estudio se enunciaría así: ¿Para qué he de enseñar mátemáticas a los niños? ¿Qué me propongo al procurarles esta clase de conocimiento? Según que se proponga hacer de ellos simples calculistas, contables, agrimensores, marinos ... tanto el contenido de la enseñanza como los métodos variarán considerablemente. Y como el responder a estas preguntas es lo que se propone la Metodología de las Matemáticas, podemos definirla diciendo que *tiene por objeto determinar los fines de* *la enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria y fundamentar y describir los métodos más adecuados para lograrlo.*

Observación.—Decimos *fundamentar*, porque la Metodología no ha de ser un simple *recetario*; en primer lugar, porque el maestro no sabrá aplicar bien métodos cuyo fundamento y alcance no comprenda, y en segundo lugar, porque las infinitamente variables condiciones en que se desarrolla la obra educativa obligan al maestro a modificar constantemente los procedimientos para adaptarlos a la realidad, y, finalmente, para poder satisfacer la condición esencial de los métodos, que según Mme. Necker de Saussure es la de estar en continuo perfeccionamiento.

2. Los fines generales. — Puesto que la Escuela Primaria prepara para la vida, ha de proporcionar aquellos conocimientos que en la vida corriente son indispensables. Entre ellos encontramos las operaciones de cálculo, y el sistema de pesas y medidas, enseñados desde los primeros tiempos de la escuela por su *valor utilitario*.

Junto a este fin, de interés inmediato, existe otro de mayor valor real y que consiste en procurar por medio de la enseñanza el desenvolvimiento de las facultades psíquicas del niño, constituyendo su finalidad *educativa*, que no ha sido estimada todavía por padres y maestros en toda su trascendencia, por lo menos en lo que a las Matemáticas se refiere, a pesar de que hombres clarividentes como Tyndall, hayan dicho: *No quiero hacer de la Geometría una asignatura más, sino un medio de educación* (1).

(1) La finalidad utilitaria ha sido siempre la predomi-

3. Los fines especiales.—Siendo el fin utilitario y el educativo comunes a todas las enseñanzas debemos señalar más concretamente los objetivos que se propone en grandes líneas la enseñanza de las Matemáticas. Podemos notar que su acción se reduce:

1.° A la adquisición de *conocimientos*, tales, por ejemplo, como los que constituyen el sistema métrico.

2.° Consecución de ciertas *destrezas o habilidades* entre las que citaremos la rápidez y seguridad en el cálculo, tanto mental como escrito.

3.° La formación de ciertos *hábitos mentales* entre los cuales citaremos la precisión y claridad, que puede referirse a *los conceptos, al razonamiento y a la expresión.*

Estos tres fines están muy lejos de ser alcanzados en las escuelas actuales; baste citar con relación al tercero y como ejemplo de imprecisión y oscuridad de concepto, que son muchos los aspirantes a ingreso en las antiguas Normales que daban como definición *única* de la multiplicación lo de hacer un número tantas veces mayor, etc., etc. Y como muestra de las mismas faltas en el razonamiento, recordemos la demostración de que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas, que suele hacerse diciendo que no se encuentran, porque si se encontrasen no serían paralelas...

nante, y por ello se ha dedicado más atención al cálculo que a la Geometría, a pesar de ser ésta más interesante para el niño y contrariar con ello la evolución histórica que dió formada la Geometría como ciencia con Euclides (300 a. de J. C.) con anterioridad a la Aritmética. Ambos fines deben procurarse juntamente partiendo de los problemas útiles para pasar a los conceptos y propiedades y descender a las aplicaciones.

4. Importancia de esta Metodología.—A pesar del largo tiempo que la enseñanza de las Matemáticas y en especial del cálculo lleva en las escuelas y la gran atención, que siempre se le ha concedido, su estudio ha pasado por ser siempre uno de los más áridos y fastidiosos para los niños.

La causa de ello está en que exigen el empleo constante de la atención, tanto interna como externa, débil y vacilante en el niño: manejan conceptos generales y abstractos cuando el niño vive sólo para lo particular y concreto, y se forma mediante el razonamiento puro que el niño es incapaz de seguir. Por ello la escuela antigua se limitó a aprovechar la facilidad de memorización del niño para sustituir los conceptos por palabras, y a utilizar la plasticidad cerebral del mismo para enseñarle mecánicamente a calcular, olvidándose del principio importantísimo de que la instrucción ha de ser racional.

En cambio, para las escuelas modernas tenemos la afirmación del pedagogo alemán Lay, de que hay dos enseñanzas, la del lenguaje y la de las Matemáticas, que han alcanzado su perfección.

El dificilísimo escollo que era preciso salvar, y el acierto con que se ha conseguido hacerlo, revelan por sí solos la trascendencia de nuestro estudio.

5. Fuentes para su estudio.—La Metodología de las Matemáticas depende como es natural de la *Metodología General* de que es una rama; y de la *Lógica*, ya que los métodos pedagógicos sólo son un caso particular de los métodos lógicos, y por último, tratando de enseñar las Matemáticas al niño, deberá conocer las características psicológicas de este, dadas por la *Paidología*; y sobre todo *la materia a enseñar*, no sólo en su contenido, sino fundamentalmente, en sus cualidades esenciales.

Al lado de estas fuentes de carácter general, encontramos otras especializadas, como son los libros que tratan especialmente cuestiones metodológicas; los libros y programas que se emplean en las escuelas.

Finalmente, podemos desenvolver nuestra actividad por la *observación* contemplando la labor de buenos maestros; la *recopilación*, de datos de interés metodológico, por ejemplo, juegos y canciones del país en que intervenga el número o la cantidad; y mediante la *experimentación*, no sólo en general, con la práctica de la enseñanza, sino ensayando procedimientos especiales para determinar, por ejemplo, el mejor modo de aprender la tabla de multiplicar, o los problemas que corresponden en las escuelas españolas según los diferentes años de escolaridad a trabajos ya hechos en escuelas de otros países y especialmente por Binet y Simón en Francia para su examen pedagógico. (Véase Cap. IX, I).

Al final de este libro hallará el lector una sucinta, pero selecta y controlada Bibliografía.

EJERCICIO

Destacar de un programa o libro escolar tres cuestiones de finalidad utilitaria, otras tres de valor educativo y otras tres que no sean ni lo uno ni lo otro.

NOTA AL CAPITULO PRIMERO

Los fines de la enseñanza de la Matemática

La finalidad primera de la enseñanza de la Matemática debe ser el desenvolvimiento de la capacidad para comprender y analizar las relaciones cuantitativas y espaciales necesarias para conocer y actuar sobre el mundo que nos rodea, y para la apreciación del progreso humano en sus varios aspectos; y la adquisición de aquellos hábitos mentales y destrezas que harán útil esa capacidad en la vida ordinaria.

«Report by The National Committee on Mathematical Requeriment under the auspices of the Mathematical Association of America.»

CAPITULO II

VALOR UTILITARIO DE LA MATEMATICA

«Los números gobiernan al mundo.»

PITAGORAS.

6. Valor utilitario de las Matemáticas.—La frase transcrita del sabio griego tenía seguramente cuando fué expresada una significación distinta a la que hoy le damos, por referirse, seguramente, en gran parte a supuestas influencias espirituales de los números, a cierto poder misterioso que aun hoy se les atribuye (por ejemplo, al *trece*) por gentes supersticiosas.

Aun descartado este aspecto, queda el hecho de que el conocimiento de la Naturaleza y de los medios de actuar sobre ella, se consigue por el empleo de las Matemáticas en sus diferentes ramas, y a medida que este conocimiento de la Naturaleza y esta acción del hombre sobre ella van siendo más claros, precisos y sistemáticos, esto es, más científicos, mayor es la utilidad de los estudios matemáticos por ser más ampliamente utilizados.

a) *En la vida ordinaria.*—Como conocimientos en absoluto indispensables podemos señalar:

La lectura y escritura de números enteros y decimales.

El sistema métrico.

Las cuatro operaciones fundamentales.

El conocimiento de las figuras geométricas.

Las áreas y volúmenes más sencillos.

Como convenientes indicaremos:

Las llamadas *reglas* que tanta aplicación tienen diariamente en los descuentos, tanto por ciento, los intereses, las mezclas en su fase moderna de determinación, por ejemplo, de la ración alimenticia o en su aplicación a los abonos. Nociones de Contabilidad.

La agrimensura.

La cubicación de recipientes: aljibes, acequias, etcétera, etc.

Obtención de planos y mapas y su empleo. Los croquis a escala. Relación entre el tiempo local y la situación geográfica.

Estudio numérico y gráfico de la relación de magnitudes que con tanta frecuencia se encuentra incluso en la prensa diaria como cotización de monedas, variaciones o relaciones de producción, precios, temperaturas, etc., o en la vida doméstica, como las variaciones de talla y peso en los niños y de la de la fiebre en un enfermo.

Junto a esta enumeración que podría fácilmene aumentarse, y el tiempo acrecienta, se nota bajar en importancia algunas cuestiones, como el sistema métrico local y los quebrados, cuyo uso disminuye desde que se adoptó el sistema Métrico Decimal; y en cambio aumenta el interés de las cuestiones sobre densidades, velocidades, seguros y otras muchas que el progreso introduce en la vida ordinaria. Citaremos como curiosos el volumen del *tubo* y el del *toro* de determinación cada vez más frecuente, siendo ejemplo del último el del aire contenido dentro de neumático.

b) *En las Artes.*—Desde el jardinero que traza elipses y el decorador que dibuja *espirales* hasta el mecánico que construye en metal figuras de tal exactitud que no admiten un error de una décima de milímetro, todos los oficios en general recurren a las Matemáticas, especialmente carpinteros, albañiles, canteros, cuyos artes son tan conocidos, y en algunas nuevos como el del electricista, el uso de diagramas, logaritmos, etc., y el empleo de la regla de cálculo y la utilización de fórmulas complicadas, demuestra el influjo creciente que antes señalábamos.

c) *En las Ciencias.*—Con una frase de Kant pudiéramos hacer notar toda la importancia que tienen las Matemáticas en la ciencia: *Todo estudio de la Naturaleza tiene de ciencia lo que tiene de Matemática.* Lo cual se justifica notando que el ideal de las ciencias de la Naturaleza es la obtención de leyes *cuantitativas* que al determinar exactamente la relación entre la causa y el efecto, permiten preverle. Así hacen la Mecánica, Física, Química y aun Biología.

Modernamente la misma *Psicología* (Leyes de Weber y Fechner) y *la Sociología*, han recurrido a las Matemáticas, y finalmente, donde su importancia es decisiva es en las llamadas ciencias aplicadas, como la Astronomía, la Ingeniería, etc.

7. **Conocimientos de orden utilitario.**—De los conocimientos que por su carácter utilitario hayan de adquirirse en la Escuela Primaria queda hecho un esquema (6, *a*) que es naturalmente variable según las condiciones de la Escuela y el medio en que se desenvuelve, ya que de éste ha de extraer las datos que emplee, y para la vida en él ha de preparar a los niños. Así no serán

los mismos los conocimientos útiles en una escuela rural que en otra de ciudad industrial o mercantil o en una barriada de pescadores.

En cada caso el criterio de utilidad debe marcar no sólo la *selección* sino hasta la *preferencia*. Así se dará más importancia al área del triángulo rectángulo que a la de cualquier otro triángulo, y a la del rectángulo más que a cualquier paralelogramo, por ser éstas figuras las que más comúnmente se encuentran y a las que se reducen las demás.

El fin utilitario se alcanza por los conocimientos en sí, por la forma de darlos o como aplicación de cuestiones teóricas.

a) *Valor utilitario de los conocimientos por sí mismos.*—Los números que hayan de usarse serán los usuales, de tres a cuatro cifras, que son las prácticamente útiles (dejando de una vez para siempre las largas filas de números que ni dicen nada al niño ni corresponden a la realidad), y referidos siempre a unidades también usuales, por ejemplo el km., m. o cm., en las medidas de longitud.

El sistema métrico debe estudiarse practicándolo constantemente, utilizando las medidas reales. (50 m.; 20 m.; 10 m.; 1 m. para las longitudes).

Por esta razón de utilidad deben estudiarse las medidas usuales en la región, y su correspondencia con el sistema Métrico Decimal.

Las operaciones numéricas y los problemas deben hacerse sobre datos reales, exactos, tomados de cuanto rodea al niño: su propia talla y peso, las dimensiones de la escuela, la cubicación del brocal del pozo o del aljibe, los precios corrientes en la localidad; y sobre todo los que interesen al niño: los de los cuadernos, lápices, dulces, etc., los gastos y rentas de la familia, etc.

El estudio de las formas se hará también por las que puedan observarse. El tubo de chimenea da idea del cilindro; su caperuza, del cono; una pantalla, del tronco de cono, etc.

Los repartos de contribuciones, las extensiones de las fincas, el plano de la ciudad dan origen a multitud de cuestiones de orden utilitario y del mayor interés.

b) *Por la forma.*—En la enseñanza deberá seguirse también la forma que presente la realidad. Para enseñar a manejar el dinero se fabrica un dinero escolar apropiado; un cuadrante de cartón con unas manecillas es conveniente para enseñar con el conocimiento de la hora otras cuestiones.

Los datos para una suma se dan como los de una factura y conviene escribirlos en un impreso a propósito.

Las nociones de Contabilidad deben darse en la forma práctica usual, evitando así el que como decía un banquero de Londres sean preferidos para contables los muchachos que no tienen instrucción especial, por no tener que desarraigarles hábitos de fundamento teórico pero sin valor práctico.

El trazado de paralelas deberán enseñarse *preferentemente* por el procedimiento de unir dos puntos situados a igual distancia de la recta dada, que es el que en la práctica se emplea más.

Y así podríamos seguir citando ejemplos, pero creemos basta con lo indicado.

c) *Como aplicación.*—Hemos dicho que los conocimientos puramente teóricos deben aplicarse a casos de utilidad. Así la distinción entre números primos y compuestos puede referirse a la posibilidad de agrupar en formas rectangulares determinado número de objetos, la posibilidad de trazar un plano perpendicular a una recta en un punto se aplica a colocar una rinconera en un punto dado de un rincón. La mediatriz de un segmento sirve para determinar sobre un plano el emplazamiento de un puente equidistante de dos puntos.

La defínción de raíz cuadrada y cúbica deben referirse a su valor práctico más inmediato: hallar el lado de un cuadrado cuya área se conoce o la arista de un cubo de volumen dado.

8. Destrezas.—En la vida corriente se presenta cada día más el uso de *tablas*: tarifas, baremos, etc.; para cuyo empleo debe prepararse al niño con el manejo de las tablas de sumar y multiplicar en forma adecuada, pero la verdadera preparación consistirá en que el alumno maneje las mismas tablas que suelen emplearse en la vida utilizándolas en sus ejercicios. La *interpolación* tan descuidada en nuestra enseñanza tiene aquí un lugar adecuado. La *construcción* de algunas tablas dará la mejor idea de ellas.

Las gráficas, tan prodigadas en la gran prensa, tienen tal importancia que el niño deberá aprender: primero, a formarlas a base de las tablas, refiriéndose principalmente a asuntos de interés inmediato: su propia variación en peso y talla; las variaciones de los precios en los artículos de primera necesidad; las de las producciones de la localidad; las variaciones de temperatura de lluvia caída en el término municipal; la relación entre el número de días de sol, nublados y lluviosos, etc. Y en segundo lugar aprenderá a *interpretarlas*. El maestro elegirá gráficas que presenten alguna particularidad notable; podemos citar: la mortalidad en Espada del año 1910 al 1920 que presente un máximo muy pronunciado en 1918, año de la grippe; el comercio exterior español en el mismo período mostrando el incremento que la guerra mundial dío al de exportación; y, finalmente, las fluctuaciones del cambio de 1929 hasta 1932.

El dibujo geométrico debe ser considerado como una destreza correspondiente a los conocimientos matemáticos que prepara y cuya aplicación es, teniendo además en cuenta que cuando sea posible debe ser *razonado*. Pero además de las cuestiones que corrientemente suelen considerarse, recomendaríamos la construcción e interpretación de planos y mapas, incluso con líneas de nivel, de tan grande aplicación geográfica y utilitaria y aun educativa, y la representación de objetos por croquis en planta y alzado de tan grande interés en las artes y que puede aplicarse en la misma escuela a los trabajos manuales que debieran tener cada día mayor importancia.

Pero la destreza que más importa cultivar desde nuestro punto de vista es el *cálculo*, tanto mental como escrito, hasta conseguir la mayor seguridad y rápidez posibles. (Véase IX, 4).

9. Hábitos mentales.—Destacaremos los más importantes entre aquellos que corresponden a los que debe tener todo hombre de negocios aun de la más modesta esfera, o cualquier artesano.

Familiarizarse con el efecto de los pequeños errores cometidos en la medición, que en longitud varía del mm. al Km. según las dimensiones.

Apreciación de los valores relativos de los números, lo cual se consigue mediante su representación espacial, en el dibujo, o con la imaginación. o mediante correlaciones de tiempo.

Ejemplo: Para expresar la relación entre el millón y el billón es interesante notar que si el

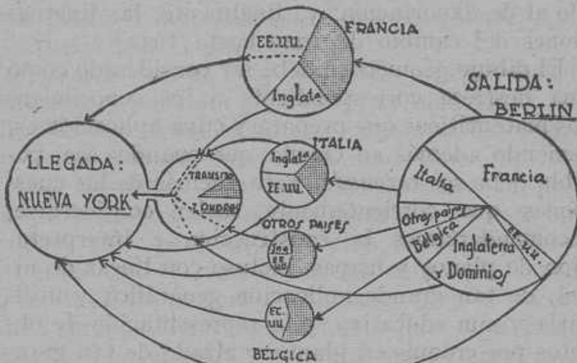


Fig. 1.—La zona sombreada, indica la parte de reparaciones que conservan los países que las cobran.

primero representa la anchura de una calle, al segundo le corresponde la distancia de Roma a San Francisco de California, o bien entre ellos existe la relación que entre dos meses y 3.000 años.

También debe habituarse el niño a apreciar con exactitud cantidades sin medirlas, por ejemplo, la longitud de la mesa, la anchura de la clase, la distancia a su casa etc., o inversamente a hallar cantidades que correspondan a números dados. Lo cual se consigue practicando ejercicio de evaluación que después se comprueban con la medición directa.

Debe habituarse al niño a percibir las relaciones existentes entre los diversos factores que intervienen en una cuestión, recurriendo para ello a las relaciones gráficas. Como ejemplo notable acompañamos el gráfico adjunto que muestra la circulación del dinero en las reparaciones, consecuencia de la Guerra Mundial.

Fig. 2. -El verdadero beneficiario de los pagos del Reich.

Es indispensable habituarse a calcular una solución aproximada de los cálculos y problemas que se presenten, lo cual orienta en la manera de resolver éstos y evita soluciones absurdas, que frecuentemente suelen darse; así cuando intervengan decimales en una multiplicación o división cabe un tanteo sustituyendo el decimal por su fraccionario aproximado.

Ejemplo:

$$412 \times 0{,}24 \simeq 400 : 4 = 100.$$

Comprobar todas las operaciones, lo cual da seguridad, confianza en sí mismo, permite ver relaciones entre unas operaciones y otras, aumenta la práctica y sustituye a veces a la demostración.

Ha de buscarse el camino más breve y al mismo tiempo más claro para resolver los problemas, y se ha de procurar la exposición clara, metódica y completa de las operaciones que es preciso hacer para obtener el resultado, de manera que puedan fácilmente seguirse por otra persona.

Todas las operaciones deben justificarse. Para ello es conveniente seguir durante algún tiempo el *método analítico-sintético*, hasta que la síntesis o exposición pueda hacerse fácilmente.

El análisis empieza con expresar la misma cantidad que es objeto de la pregunta del problema y cuyo valor se determina en función de cantidades, alguna de las cuales no es conocida, la que se halle en este caso se expresa a su vez en función de las cantidades de que dependa y así se continúa hasta que todas estén directa o indirectamente expresadas en función de los datos. La síntesis sigue el camino opuesto y termina, por tanto, con la respuesta al problema. El ejemplo siguiente aclarará lo anteriormente dicho.

PROBLEMA

Un propietario quiere cercar un jardín de 99 m. por 11 m. con una tapia que le cuesta a 9 ptas. metro. Permutando este jardín por otro de igual extensión, pero cuadrado, cuánto se ahorra en la construcción de la tapia.

Análisis

Ahorro = Coste 1.ª tapia — Coste 2.ª
Coste 1.ª = Perímetro 1.ª × 9 ptas.
» 2.ª = » 2.ª × 9 »
Perímetro 1.ª tapia = (11 + 99) × 2
» 2.ª » = lado × 4
Lado cuadrado = $\sqrt{\text{Area}}$
Area del jardín = 99 × 11

Síntesis.

Area del jardín = 11 × 99 = 1088 m^2.
Lado cuad. = $\sqrt{1089}$ = 33 m.
Perímetro 2.ª = 33 × 4 = 132 m.
» 1.ª = (11 + 99) × 2 = 220 m.
Coste 2.ª tapia = 132 × 9 = 1188 ptas.
» 1.ª » = 220 9 = 1900 »
Ahorro = 1980 — 1188 = 792 ptas.

Comprobación:

Diferencia de long, de las tapias 220 — 132 = 88 m.
» de coste 88 × 9 = 792 ptas.

Construcción gráfica

La adjunta figura 3 hecha en escala de $^1/_2$ mm por 1 m, o sea 1 : 2000.

Fig. 3.

muestra la equivalencia de ambas figuras, obtenida fácilmente por descomposición.

Respuesta: 792 *pesetas*

El anterior problema inicia en la teoría de los máximos y mínimos de las figuras y tiene elegidos sus datos de modo que se pueda operar por cálculo mental, excepto para la raíz cuadrada que debe obtenerser al margen, o puede hallarse mediante una tabla de cuadrados.

CAPITULO III

EL VALOR EDUCATIVO DE LA MATEMATICA

1.—Opiniones de filósofos, matemáticos y pedagogos

«Nadie entre sin saber Geometría.»

PLATON.

10. Opiniones afirmativas.—Platón, como indica la condición que exigía a los que pretendían asistir a la Academia, tenía de la Geometría el más alto concepto como ciencia cuyo estudio adiestraba a las inteligencias para el estudio filosófico. Tal vez en ello entraba por mucho la consideración de que la Geometría presenta los arquetipos de las formas naturales, haciendo así sensibles las ideas madres que fundamentaban su filosofía, pero en todo caso decía, las *Matemáticas despiertan y elevan el alma*. Mucho antes Solón había dicho que eran *útiles para el recto pensar*, y Pitágoras había manifestado:

La Gimnasia, los números y la Matemática constituyen los tres grados de la Educación. La primera hace fuerte al alumno; la segunda, lo purifica, y la tercera, le perfecciona y le hace apto para alternar con los dioses.

El Renacimiento volvió a conceder a la Matemática el mismo valor educativo, y posteriormente pueden citarse las opiniones de algunos autores como Descartes que la llama fundamento de la

Filosofía; Spinosa, que trató de construir su Etica a estilo geométrico; Hobbes, que llama a la Geometría fuente de toda cultura, y Kant que dice textualmente: *La ciencia de las Matemáticas presenta el ejemplo más brillante de cómo la razón puede ensanchar sus dominios victoriosamente sin auxilio de la experiencia.* El mismo Herbart trató de dar forma matemática a sus estudios psicológicos.

Por otra parte, Pestalozzi hacía de *el número, la forma* y la *palabra,* el núcleo de su enseñanza y Froebel y la Montessori le dedican la mayor parte de su método, y el pedagogo y matemático norteamericano Smith, dice lo siguiente: *El niño encuentra en la matemática una verdad positiva, una ley inconmovible en una época en que todo es dudoso para él. No es seguro que toda flor tenga pétalos, ni que todo animal necesite de oxígeno libre para respirar, ni que «lo más desagradable» sea buena forma gramatical, ni que Colón sea el descubridor de América, pero, pase lo que pase en el mundo, siempre será*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Finalmente, la enseñanza primaria en casi todas partes está fundamentada en el estudio de la Lengua y la Matemática como elementos formativos. La selección que se hace a base de estudios matemáticos en Universidades y Escuelas Especiales ha demostrado que proporciona verdaderas *élites* o selecciones, e incluso parece que en algunas Universidades italianas se llegó a incluir estudios matemáticos en la carrera de Derecho para adiestrar a los alumnos en el razonamiento lógico.

11. La crítica.—Hamilton, filósofo escocés del segundo tercio del siglo pasado, atacó violentamente el valor educativo de la matemática, diciendo: *Si consultamos la razón, la experiencia y el testimonio de todos los tiempos, llegaremos a concluir que ningún estudio cultiva menos facultades y de manera más parcial que las Matemáticas, que funden y secan la mente y son perniciosas como medio de educación intelectual.* Lo demuestra a continuación con el hecho de que *los que sólo estudian Matemáticas son víctimas de la más ciega credulidad o de un irracional excepticismo*; y con el testimonio de matemáticos como D'Alambert, Pascal y Descartes.

En la discusión que se siguió se puso en claro que habían sido citados erróneamente tales testimonios, especialmente el de Descartes, como hemos visto, y se reconoció la exactitud de la primera parte, sacando como consecuencia que *no basta* el estudio de la Matemática (como de ninguna ciencia aislada, véase el apartado siguiente) para la educación intelectual.

También Schopenhauer cerró contra la Matemática, especialmente contra el método de *reducción al absurdo* que llamaba de la ratonera (*Mausefallenbeweise*), pues se reduce a cerrar todas las puertas menos una.

Por último, Huxley, en 1869 decía de las Matemáticas: *No saben nada de la observación, nada de la experimentación, nada de la inducción ni de la causalidad. Puramente deductivas, parten de unas pocas proposiciones evidentes, y todo el resto del trabajo consiste en hacer de ellas sutiles deducciones.*

En respuesta a tales críticas, algunos matemáticos expusieron su opinión que extractaremos brevemente.

Sylvester decía: *Invoca el Análisis Matemático constantemente nuevos principios, nuevas ideas y nuevos métodos..., apela constantemente a las facultades de observación y de comparación..., una de sus principales armas es la inducción..., recurre frecuentemente a la experimentación y la comprobación, y presenta un campo ilimitado al ejercicio más intenso posible de la imaginación y la invención.*

Lagrange pone de relieve la gran importancia que para el cultivo de la Matemática tiene la *observación*, y Gans llama a la Geometría la *ciencia de la vista* y sostiene la apelación constante al *principio de causalidad*.

Por nuestra parte creemos que las críticas sólo son merecidas cuando se sigue un método deficiente que ellas mismas definen, mientras las opiniones citadas de los grandes matemáticos prueban la *posibilidad* y aun *necesidad* de un método que sea altamente educativo, y es el que debemos explicar.

2.—Necesidad de la Matemática para la educación integral de la inteligencia

«Los grandes pensadores suelen ser medianos observadores.»

MEUMANN.

12. El anterior pensamiento del notable psicólogo alemán nos plantea y resuelve en sentido negativo el problema de la educación intelectual formal, que podemos enunciar preguntando *si el cultivo de una clase de conocimientos desarrolla las facultades intelectuales habilitando para toda clase de disciplinas.*

Al mismo resultado conduce el estudio de la vida de los grandes hombres y la observación vulgar: Existen hombres de una capacidad notable en ciertas esferas del conocimiento que son medianías y aun nulidades en otras esferas. El estudio de las Ciencias Naturales desarrolla la inteligencia para la mejor comprensión de los fenómenos naturales, pero no la prepara, por ejemplo, para el estudio de lenguaje.

En la memoria se presentó el mismo problema, y según parece, a juzgar por el mismo Meumann, ha sido resuelto en sentido afirmativo, comprobando que el ejercitar la memoria aún para retener y reproducir palabras sin sentido desarrolla también la memoria de números, la visual, auditiva, etc. (1). En el caso de la educación intelectual, el problema se plantearía preguntando cuál es el mínimo de estudios que desarrolla la inteligencia habilitándola para cualquier clase de estudios. Problema íntimamente relacionado con el de clasificación de las Ciencias.

Las Ciencias pueden clasificarse por su objeto en Ciencias de la Naturaleza, predominantemente objetivas, y Ciencias del Espíritu (así llamadas por los alemanes) o Ciencias Morales, o mejor Humanidades, que son predominantemente sub-

(1) Al mismo resultado llegó William James en 1890, como consecuencias de numerosas experiencias hechas en la Universidad de Harward.

jetivas. En las primeras incluiríamos la Mecánica, Física, Química y Biología; y entre las segundas, la Gramática. La Psicología, la Etica, la Historia, etcétera. Es como se ve en cierto modo la tradicional división en Ciencias y Letras.

Ahora, entre las Ciencias de la Naturaleza y las Ciencias del Espíritu existen, dice Wundt, las leyes lógicas y cuantitativas comunes a ambas y estudiadas por la Lógica y las Matemáticas.

Las Matemáticas toman escasísimos elementos del mundo exterior y sobre ellos edifican con un puro trabajo lógico toda la ciencia que después se adapta maravillosamente a los fenómenos de ese mismo mundo exterior.

A su vez las Matemáticas, por el grado de objetivación que alcanzan, pueden clasificarse en sus ramas elementales en Geometría, Aritmética y Algebra, pudiendo formar el cuadro siguiente:

Gramática.	Lógica.	Mecánica.
Psicología.	Matemáticas.	Física.
Etica.	Algebra-Aritmética-Geo-	Química.
Historia.	[metría.	Biología.

Ahora podemos notar que el estudio de las Matemáticas habilita al entendimiento para el estudio de las otras dos ramas, por su posición central, y así vemos que grandes matemáticos como Arquímedes y Newton han sido grandes físicos. Otros como Platón y Descartes han sido filósofos célebres, y algunos como Pascal han descollado en las tres ramas del saber humano. En cambio, filósofos notables pero no matemáticos como Aristóteles, eran mediocres cultivando las

Ciencias Naturales y Linneo, naturalista célebre, no pudo aprender el holandés durante su larga estancia en los Países Bajos (1).

También es notable si consideramos las razas, que los arios, objetivos cultivadores de las Ciencias hayan desenvuelto primeramente la Geometría (griegos), mientras los semitas, subjetivistas, inventasen el Algebra.

De todo ello deducimos la necesidad de cultivar en la Escuela los Estudios Matemáticos para una educación integral de la inteligencia, que en ellas no puede hacerse a base de la Lógica.

3.– Criterio lógico.

«La Matemática es una Lógica en acción.»

ARAGO.

13. Los conceptos.—*La Mátemática forma fácilmente conceptos precisos universales e inmutables.*

Los forma fácilmente porque le basta tomar del mundo exterior escaso número de elementos fácilmente aprehensibles. Así, la Aritmética reposa sobre los conceptos de *unidad* y *pluralidad* que bastan para construir sobre ellas todo el admirable edificio de esta ciencia, y como ejemplo curioso dentro de ella citaremos el de la *infinitud* del número, fundado sencillamente en la posibi-

(1) Experimentos realizados en 1908 por la Universidad de Illinois, demuestran que el estudio de la Matemática perfecciona para el de las Lenguas Extranjeras, Ciencias Naturales y Derecho.

lidad de añadir una unidad a cualquier número dado.

La Geometría puede limitarse a considerar las intuiciones del punto y del segmento; en una primaria ampliación admitiríamos el movimiento y la dirección y la magnitud, y con la máxima tolerancia a la intuición pudiéramos admitir la de ciertas líneas, superficies y cuerpos, para facilitar el estudio de la Geometría, no para formarla, pues sólo necesita las primeras intuiciones enunciadas, y aun se puede construir de un modo absolutamente lógico. (Véanse notas al cap. IV).

Nótese, en cambio, la dificultad existente para formar los conceptos de Nación, Hombre, Atomo, necesitados de estudios, comparaciones, controversias, observaciones y experimentos múltiples.

Forma y maneja la Matemática conceptos *precisos*, comprobándose èsta precisión, porque la definición dada de cada concepto permite determinar con toda exactitud si un sér cualquiera está incluído o excluído de la definición. Así nos sucede con el concepto de múltiplo de un número que nos permite clasificar cualquier número dado entre los que son múltiplos o los que no lo son; o, el concepto de cuadrado permite decir con seguridad absoluta si una figura los es o no lo es.

Compárese con la imprecisión del concepto de Nación que impide determinar si tal o cual pueblo es una nacionalidad, o con conceptos generales como los de animal y planta que no permite clasificar seguramente a muchos seres vivos ni en una ni en otra de tales agrupaciones.

Sus conceptos son *universales*, válidos igualmente en todas las latitudes, y ejemplo curioso de ello es que para hacer notar a los habitantes de Marte que en la Tierra existen seres inteligentes, se propuso dibujar sobre la superficie del Sahara con grandes proyectores eléctricos la figura clásica del Teorema de Pitágoras. En cambio, conceptos como el de patria o moralidad, varían de unas a otras latitudes.

Los conceptos matemáticos son, finalmente, *inmutables*; el mismo concepto tenemos hoy de la circunferencia que en tiempo de Euclides (300 años a. de J. C.), y la misma definición de número primo se da hoy que en tiempo de Eratóstenes.

Por el contrario, la idea de *la pena* en Derecho, o el concepto de la *propiedad*, ha sufrido a lo largo de los tiempos numerosas variaciones.

Por todo ello constituyen los conceptos matemáticos fundamentos firmísimos para el razonamiento, ya que como indicaba Sócrates, sólo cabe la discusión, esto es, la disparidad de criterios, cuando se interpretan de diferente modo las palabras, cosa imposible en Matemáticas Son, pues, los conceptos matemáticos verdaderos modelos cuyas cualidades debe procurar el pensador en todos los conceptos que maneje. Claro es que estas cualidades no pueden darse en los primeros años de la Escuela Primaria, sino que son el ideal a que se ha de tender en los últimos.

14. La clasificación.—Aun cuando no tiene en Matemáticas la decisiva importancia que en Ciencias Naturales, es utilísima también la ***clasificación***, que en un sentido más amplio pudiéramos llamar *sistematización*. Ella permite establecer las necesarias relaciones lógicas entre la muchedumbre de los conocimientos, ayuda a percibirlas y a recordarlos.

Como ejemplo de ello citaremos en Aritmética las operaciones clasificadas como muestra el cuadro adjunto:

Grado	*Directas*	*Inversas*
1.º	Suma	Resta
2.º	Multiplicación	División
3.º	Potenciación	Radiación Logaritmación (1)

Recuérdese que cada operación es un caso particular de la de grado inferior inmediato, tanto en las directas como en las inversas, y la relación que existe entre unas y otras.

En Geometría podemos notar cómo se agrupan sistemáticamente los conocimientos (véase nuestro «Nuevo Tratado de Geometría») del modo siguiente: 1.° El Punto.—La línea recta.—El ángulo.—El triángulo.—El cuadrilátero.—Los polígonos.—2.° La circunferencia y las figuras anteriores, etcétera.

Es posible incluso la clasificación dicotómica que conduce a la definición lógica. Ejemplo:

Línea	recta			
	curva	cerrada	Plana.	Circunferencia.
			En el espacio.	
		abierta	Plana.	Espiral.
			En el espacio.	Hélice

Así se obtiene la definición corriente de la circunferencia como *una línea curva, cerrada y plana ... cuyos puntos equidistan de un punto interior.*

(1) Véase nuestro «Nuevo Tratado de Aritmética» o nuestra «Aritmética Racional».

15. Los métodos.—La Matemática, además de sus métodos especiales, emplea constantemente los métodos generales puramente lógicos.

a) *La analogía.*—Aunque rigurosamente no es un método lógico, pues sus resultados necesitan demostración, es utilísimo como guía del pensamiento en el descubrimiento de propiedades, y la Matemática acude a él con frecuencia como muestran los ejemplos siguientes:

De la regla para multiplicar una suma por un número se obtiene por analogía la regla para dividir una diferencia por un número. De la regla para elevar un producto al cuadrado se obtiene la regla para elevarlo al cubo o a cualquier potencia.

De la regla para multiplicar un número abreviadamente por 9 *se obtiene para hacerlo por* 99; 999, etc.

El procedimiento seguido para obtener la fórmula del área del triángulo se aplica a la obtención del volumen del prisma recto triangular.

Pero existe en ella un peligro que es preciso poner de relieve, ya que puede conducir a resultados falsos. Así, por ejemplo, de las reglas anteriormente citadas para multiplicar o dividir una suma por un número, parece obtenerse que para multiplicar o dividir un producto de varios factores por un número será necesario multiplicar o dividir cada uno de los factores, y como en espíritus poco formados lógicamente tiene más fuerza la analogía que el razonamiento, conviene en estos casos mostrar intuitivamente y por medio de ejemplos numéricos repetidos cuál es la verdadera regla, y el error cometido aplicando la simple analogía (véanse nuestras obras antes citadas o nuestra «Aritmética Intuitiva»).

b) *La inducción.*—Consiste, como es sabido, en el tránsito de las verdades particulares a las generales. Se ha utilizado constantemente en la formación de las Matemáticas y puede ser ventajosamente empleada en su enseñanza aplicando el método histórico. Como ejemplo de ello, citaremos *el Teorema de Pitagoras y el valor de la suma de los ángulos de un triángulo* (véanse notas, capítulo IV), y como cuestión usual indicaremos la misma suma de ángulos, llevada primeramente a los cuadriláteros y finalmente a los polígonos.

c) *La deducción.*—Propiamente dicha, consiste en el paso de las verdades generales a las particulares en ellas comprendidas, y ejemplo típico de ello son los llamados *corolarios* que en buena pedagogía no deben darse, sino que deben *inventarse* por los alumnos, enunciando cuando más el caso articular a que se refieren. De este modo quedarán permanentemente grabados en la memoria del niño en vez de ser difícilmente recordados, y su obtención constiturá un ejercicio del más alto valor educativo.

Ejemplo: *Demostrado que la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos,* se puede preguntar qué ocurre: *Cuándo un ángulo es recto; cuándo es obtuso; cuándo siendo recto es isósceles; cuándo los tres ángulos sean iguales.* Más adelante puede el mismo alumno investigar él mismo estos casos particulares.

d) *El análisis.*—Consiste en la *descomposición* de la materia objeto de estudio para conocer con mayor facilidad cada una de sus partes. Ejemplo de ello tenemos en Aritmética en la misma numeración que descompone al número en unidades de los diferentes órdenes, y en las operaciones con números de varias cifras, que en definitiva se reducen a operar separadamente con las unidades de los diversos órdenes. Caso típico es también la descomposición en factores primos.

En Geometría citaremos los procedimientos de obtención de áreas, por ejemplo, para el trapecio, descomponiéndolo en dos triángulos por una diagonal, o el polígono regular dividido en triángulos isósceles. El *recortado* de figuras en papel es en la Escuela Primaria un análisis materializado.

e) *La síntesis.*— Consiste en la *composición* de elementos conocidos para obtener el conocimiento del conjunto, y a veces por el de éste deducir el conocimiento de las partes.

Ejemplo de ello: tenemos en Geometría en la obtención del área del triángulo componiendo un paralelogramo de cuya área se deduce la de aquél. Para hallar la suma de los ángulos de un triángulo se componen los tres ángulos en un mismo vértice trazando por él una paralela al tercer lado. El *ensamblado* del trabajo manual es la materialización de este método.

En realidad los dos métodos anteriores se utilizan juntos formando el *analítico-sintético*, como en la manera de obtener el área del triángulo reduciéndolo a un paralelogramo o un rectángulo y cuya materialización tenemos en el *plegado* de los trabajos manuales.

16. Las proposiciones.—Las proposiciones lógicas reciben en general en Matemáticas el nombre de *teoremas* y constan de una verdad que se admite (hipótesis) y de otra que se intenta demostrar (conclusión). Admiten a veces sus *recíprocos*, en que se invierten los papeles de ambas verdades, y sus contrarios, en que negada la hipótesis se niega la conclusión. Tales proposiciones son modelo de claridad y pueden expresarse fácilmente. Así tenemos las propiedades de la bisectriz W de un ángulo fig. 4.

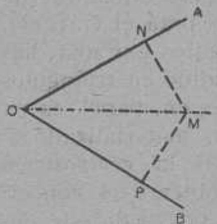


Fig. 4.

Teorema directo y recíproco

$$M \text{ está en } W \rightleftarrows MN = MP$$

Teoremas contrarios

$$M \text{ no está en } W \rightleftarrows MN \neq MP$$

17. El razonamiento. — El razonamiento alcanza en la Matemática una precisión admirable que hace de él un modelo para la argumentación. El encadenamiento es absolutamente riguroso, casi mecánico, estableciéndose escalonadamente como muestra el siguiente ejemplo, aplicado a demostrar la proposición enunciada en el apartado anterior.

$$\text{Si } M \text{ está en } W \rightleftarrows M\hat{O}N = M\hat{O}P$$

$$\text{Si } M\hat{O}N = M\hat{O}P \rightleftarrows \overset{\triangle}{MON} = \overset{\triangle}{MOP}$$

$$\text{Si } \overset{\triangle}{MON} = \overset{\triangle}{MOP} \rightleftarrows MN = MP$$

La demostración del recíproco está dada por la marcha rigurosamente inversa que indican las flechas.

Un ejemplo de este mismo encadenamiento en la resolución de problemas fué indicado en el número 9.

Naturalmente, este rigor lógico sólo puede alcanzarse en una etapa elevada de los estudios, sustituyéndose en un principio por las demostraciones intuitivas y aun las simples comprobaciones, pero alcanzando en cada momento todo el rigor lógico de que es susceptible la inteligencia del alumno, cuidando mucho de no sobrepasarlo. El mismo Poincaré reconoce ésto, aconsejando que no se enseñe con un rigor lógico cuya necesidad no sea sentida por el alumno, so pena de disgustarle de las Matemáticas en las que verá un simple juego de sofistas.

Tampoco es el anterior el estado final de la demostración, pues la agilidad mental del avezado a los estudios matemáticos permite dejar implícitos muchos de los términos de encadenamiento, con lo cual el razonamiento gana en elegancia y atractivo.

EJERCICIOS

2. Clasificar el cuadrado entre las figuras planas.

3. Expresar la hipótesis y la conclusión en las proposiciones siguientes:

La suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos.

La serie de los números primos es ilimitada.

4.—Criterio psicológico.

«La cualidad fundamental del matemático, como la del poeta, es la imaginación creadora.»

WEIERSTRASS.

18. Educación sensorial.—Partiendo del principio psicológico de que se desarrollan aquellas actividades que se ejercitan, tendremos que la enseñanza de la Matemática en las Escuelas Primarias educa el sentido de la vista ejercitándose en la apreciación de conjuntos de objetos, de distancias, superficies y volúmenes, así como en las relaciones de forma, posición y magnitud de líneas que emplea la Geometría (1).

19. La atención.—La atención externa se ejercita con la continua contemplación y manejo de cifras, acentos, letras y líneas en las que una equivocación echa a perder un cálculo, un problema o una demostración. A esto podemos añadir el estudio analítico de las formas geométricas.

La atención interna se ejercita con el cálculo mental de uso constante, pudiéndose notar en la expresión del niño el esfuerzo de reflexión que realiza. Por todo ello Ebbinhaus empleó las operaciones sencillas, por ejemplo, series de sumas, para determinar la fatiga o grado de atención de los

(1) Los experimentos de Puigg en 1915, Universidad de Illinois, han patentizado que el estudio de la Geometría Descriptiva mejora el uso mental de los elementos espaciales.

sujetos, siendo aquélla tanto mayor cuanto mayor era el número de errores cometidos.

Pero la atención es de dos clases, central y periférica, según que una vez concentrada la atención sólo se perciba el punto central o puedan percibirse simultáneamente los puntos de la periferia. Esto último, utilísimo en las ciencias de observación, tiende a desviar la atención, impidiendo su fijeza. La Matemática desarrolla la fijeza de la atención por el encadenamiento riguroso de sus operaciones mentales, por la sencillez de los puntos en que la atención se fija, y por la renovación del interés en el casi ilimitado desenvolvimiento de que es susceptible el pensamiento matemático. De aquí casos como el de Leibnitr, que no se levantaba de la mesa de trabajo ni para dormir.

La atención, ejercitándose deliberadamente sobre un objeto, constituye lá *observación* y ésta puede ejercitarse continuamente en la enseñanza de la Matemática, en donde el encerado constituye fácil campo de inagotable observación. Para ello toda cuestión, toda *operación indicada* o toda hipótesis puesta de manifiesto simbólicamente, debe fijar la atención del alumno atraída sobre ella por la pregunta *¿Qué tenemos aquí?*, debiendo analizarse cuidadosamente la expresión en todos sus detalles. También en las *figuras geométricas* deberá preceder a la demostración propiamente dicha una detenida observación de las relaciones de magnitud y posición existentes entre los elementos de la figura; así se facilitan demostraciones que parecen muy complicadas, como la de la paralela media de un triángulo. También las *fórmulas* deben observarse atentamente y expresar en lenguaje ordinario su significado, constituyendo un ejercicio provechoso.

20. La memoria.—El estudio de las Matemáticas desenvuelve desde luego la Memoria de números por el empleo constante que de ellos hace, no sólo en las tablas de las operaciones que algunos amplían hasta 20×20 en la multiplicación, sino también con productos típicos como $4 \times 15 = 60$; $12 \times 12 = 144$; $15 \times 15 = 225$; $25 \times 25 = 625$; $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ $\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$ Desarrolla la memoria de formas con las que estudia la Geometría, en las cuales sería conveniente la introducción de la elipse, parábola e hipérbola, que tan frecuentemente se encuentran hasta en las sombras de las pantallas sobre los muros.

Ejercita la memoria verbal por el aprendizaje de definiciones, reglas y propiedades que deben aprenderse de memoria para su retención, por el desarrollo de la memoria que procuran y por constituir modelos de lenguaje.

Utiliza la memoria visual cuando las demostraciones y las propiedades se representan gráficamente o se esquematizan mediante símbolos. De aquí la conveniencia de acudir a unas y otros.

Como ejemplo de ellos, citaremos el teorema fundamental de las paralelas, que se expresa simbólicamente de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ b \perp c \end{array}\right\} a \parallel b$$

Si se conviene en que siempre las letras minúsculas representen rectas y los signos $\perp$ y $\parallel$ la propendicularidad y el paralelismo.

La conocida propiedad de la serie de razones iguales puede expresarse simbólicamente por

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{a + m + p}{b + n + q}}$$

y también por la fig. 5.

21. La imaginación.—La relativa escasez de elementos que en Matemáticas pueden servir

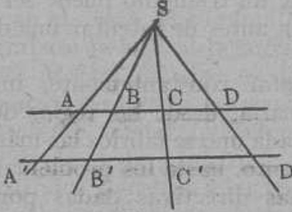


Fig. 5.

de base al doble juego de descomposición y recomposición en que consiste la labor imaginativa, está desde luego compensada con la guía segura que los métodos matemáticos ofrecen, con la facilidad de laborar sobre los datos y expresar los resultados, reducidos a utilizar como dóciles instrumentos el lápiz y el papel, y finalmente, el vastísimo campo de acción que tiene ante sí el matemático, explican el asombroso desarrollo imaginativo que la creación de las matemáticas significa, obra de la imaginación, que justifica la frase de Weierstrass que encabeza este epígrafe. Las creaciones de los matemáticos no sólo han superado a las fantasías de los poetas, sino que además han servido de base a interesantes fábulas de los más renombrados novelistas, sirviendo de excepcional ejemplo de ello el concepto del espacio de más de tres dimensiones.

La acción imaginativa se pone de manifiesto en la *invención* y ésta se halla dirigida por los métodos lógicos ya estudiados de la analogía, la inducción y la deducción. Cabe, además, considerar aquí la Experimentación, a la que no son ajenas las Matemáticas, y así el valor de la suma de los ángulos de un triángulo puede ser hallado por simple adición antes de intentar una demostración cualquiera.

Cabe inventar constantemente, incluso en la Escuela Primaria, desde las reglas de cálculo rápido en que cada uno se fabrica las más acordes con su temperamento, hasta los problemas en los cuales sobre unas directivas dadas por el Maestro, cada niño puede proponer los que más puedan interesarle.

Cabe, finalmente, dar la enseñanza, y esto es para nosotros esencial, *como si se inventase*, y a ello responden dos excelentes libros escolares: *La Aritmética Inventiva*, de Nelson y *La Geometría Inventiva*, de Spencer.

22. La inteligencia.—En el sentido moderno de esta palabra, *como adaptación psíquica a una situación nueva*, tiene su ejercicio más adecuado y su mejor medida con los problemas matemáticos, especialmente los de Geometría, ya que las características de la nueva situación quedan en ellos perfectamente definidos y los medios de adaptación están dados por la serie de conocimientos precedentes. Por esto la selección de aspirantes se ha hecho frecuentemente y con éxito por medio de pruebas de examen consistentes en problemas matemáticos.

23. La espiritualidad.—El empleo constante de la abstracción y la generalización, el hecho de producir con un mínimo de elementos del mundo exterior un conjunto maravilloso de verdades, y la consideración de que el mundo material exterior obedece fielmente a estas creaciones del espíritu humano, desenvuelve en el cultivador de la Matemática una alta espiritualidad, de la que son ejemplos notables Descartes, Pascal y Leibnitz, y que se sintetiza en el deseo de Bernouilli de que en su tumba se grabase la espiral logarítmica con la leyenda: *Eadeo Mutata Resurgo*, es decir, *después de la transformación resurgo la misma*, bien porque la espiral representa mejor que el círculo el ciclo inacabable de la vida espiritual, ya porque la espiral logarítmica sometida a las transformaciones de que se suele hacer objeto a las curvas, se transforma en sí misma, pero indicando de todos modos la alta espiritualidad del célebre matemático. El gran matemático francés Poincaré decía que «el pensamiento es sólo un relámpago entre dos eternidades, pero este relámpago lo es todo». Conceptos como el del infinito y la pluralidad de dimensiones, son de la más alta espiritualidad, así como el ideal de perfección que la misma profesión de la ciencia inculca en quien le cultiva.

24. Peligros.—De todo lo que antecede se deduce también la existencia de graves peligros de orden educativo en el aprendizaje de las Matemáticas.

a) Ejercitando la atención de tipo central, llega a producir el *ensimismamiento* de que hay numerosos ejemplos entre los matemáticos, y hace perder la agilidad mental que necesita de la atención periférica. El remedio a esto se halla en el cultivo de otros estudios, especialmente el de las ciencias de la naturaleza.

b) La dificultad de los niños para el razonamiento abstracto, su docilidad mental y su facilidad para los mecanismos, tienden a que la enseñanza se haga en las Escuelas puramente *rutinaria*, sin intervención de la razón, sin demostración de ninguna clase. Esto, desde el punto de vista educativo es una aberración, contra la que hay que ponerse en guardia, ya que aun cuando Boutroux reconoce que el cálculo algebraico suele hacerse siempre y por todos sin intervención de la inteligencia, toda técnica debe ser aprendida inteligentemente para que sea útil a la inteligencia, como asegura Dewey.

c) Cabe también que aun razonando se siga con tal rigor el encadenamiento lógico que se convierta en un puro *mecanismo* el razonar siguiendo la explicación del Maestro. Esto es lo que ha permitido a deficientes mentales hacer ciertos progresos en Matemática sin perder su deficiencia. Para evitarlo, basta recurrir constantemente a la invención, como antes hemos indicado.

d) El mismo encadenamiento riguroso de las Matemáticas y su múltiple trabazón hace que en cada momento sea necesario el dominio perfecto de lo anteriormente aprendido. No basta, como, por ejemplo, en Historia, conocer las líneas generales de los sucesos en un período para poder estudiar los del siguiente, sino que es menester el conocimiento o mejor el dominio detallado de todo lo anterior. De aquí lo peligroso que es en la enseñanza de las Matemáticas *el avance precipitado*. Para evitarlo es preciso asegurarse de que cada lección está bien sabida antes de pasar a la siguiente y en cada una recordar previamente los antecedentes necesarios. Esto se refiere igualmente a cada técnica en particular y con más motivo al paso de un grado al otro. Es evidente, por ejemplo, que no puede pasarse a multiplicar sin saber sumar perfectamente los números que se empleen; que antes de estudiar la tabla en cuestión se ha de saber perfectamente sumar de dos en dos, tres en tres, lo cual ha de recordarse antes de aprender la multiplicación correspondiente, y que, el conocimiento perfecto de la multiplicación y divisíón de concretos, debe preceder y repasarse antes de estudiar el método de reducción a la unidad.

e) El carácter abstracto de nuestros estudios suele tener como primera consecuencia el que las demostraciones *no sean entendidas*, lo cual se remedia utilizando todos los recursos para hacerlas intuitivas; y, por otra parte, se pierde fácilmente el *contacto con la realidad*, lo cual se remedia partiendo constantemente de ésta y volviendo a ellas en las aplicaciones. Ejemplo de ello es el Album de Números y el de Formas que deben formar los niños en la Escuela, y como aplicación curiosa de la proporcionalidad compleja citaremos la pérdida de peso que se experimenta al elevarse sobre la superficie terrestre.

f) Finalmente, la misma abstracción es causa de *la falta de interés* por los estudios matemáticos, lo cual exige el echar mano de todas los recursos del interés *indirecto* en la Escuela, ya que el interés directo de su propia belleza suele pasar desapercibido para los niños. Ahora nos limitaremos, dentro de la esfera estrictamente de contenido, a la forma de presentarlo. Por ejemplo, el cálculo puede hacerse entretenido cuando se obtienen números notables. (Véanse notas del cap. VI.) La imaginación espacial puede excitarse con preguntas como ésta: *Un cubo de tres pulgadas de arista tiene sus caras pintadas de rojo. Se corta en cubitos de una pulgada de arista. ¿Cuántos saldrán? ¿Cuántos cubitos tendrán rojas tres caras? ¿Dos caras? ¿Una cara? ¿Ninguna?* Puede complicarse el ejercicio dividiéndo el cubo en mayor número de cubitos. La descomposición de figuras puede presentarse como en el caso siguiente:

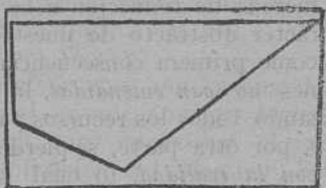


Fig. 6.

Un hombre poseía una extensión de tierra de forma igual a la del dibujo. Decidió dividir en lotes la mitad y reservarse, indivisa, la otra mitad. Además deseó que la parte que se reservaría, fuera de forma regular y paralelos sus lados opuestos. Conocía el largo de cada lado del campo, pero no su área total. ¿Cuál es la manera más fácil de trazar la parte con que deseaba quedarse?

5.—El programa escolar desde el punto de vista educativo

25. Conocimientos.—Como conocimientos que pueden incluirse en un programa escolar por su valor educativo, señalaremos los sistemas de numeración. Es algo realmente maravilloso que con 13 palabras se pueda dar nombre a un millón de números (exactamente 999 999) y que esto se haga dando al mismo tiempo una idea exacta de su composición. La frase de Arquímedes *Quiero formar un sistema con el que se pueda dar nombre al número de granos de arena necesario para llenar el Universo*, refleja esta admirable cualidad; pero para que el conocimiento de los sistemas de numeración sea completo y educativo desde un punto de vista humano, es necesario que se estudien los diferentes sistemas, sus evoluciones con los inconvenientes y ventajas que presentan (numeración romana inclusive), para llegar a percibir la larga evolución del pensamiento humano hasta la adquisición del actual y maravilloso mecanismo.

Por análogas razones deberá estudiarse la historia del Sistema Métrico y serán altamente educativas sobre todo en el tercer grado en que aparecen los intereses sociales, las anécdotas, relatos de episodios de carácter matemático, y aun la biografía de sabios cultivadores de nuestra ciencia.

La correlación entre las operaciones numéricas exige el estudio completo en los números enteros en que se percibe su gradación, opinando nosotros que no sería excesivo introducir la *logaritmación* en el tercer grado para completar el cuadro de las operaciones, y que en todos los grados se deben estudiar las inversas como tales, lo cual se hace sencillamente con ejercicios del tipo de los siguientes: $5 + ? = 15$; $5 \times ? = 15$.

Y, finalmente, casi sólo por su valor educativo pueden mantenerse los números fraccionarios en un estudio elemental, siendo aun esto harto discutible.

En Geometría es de gran valor el estudio de *los movimientos*, que da animación y vida a una ciencia demasiado estática, así como el de la *Simetría*, que desenvuelve la atención, facilita el conocimiento de múltiples propiedades, familiariza con un elemento estético, siquiera sea elemental, y prepara para el estudio de las formas de la Naturaleza que son las que han de iniciarlo en los primeros grados: Mariposas, para la simetría con relación a un eje; estrellas de mar, para la simetría con relación a un punto, etc.

Los lugares geométricos son también para nosotros del más alto valor por la claridad con que determinan figuras mediante relaciones de magnitud y por la facilidad con que permiten resolver numerosos e interesantes problemas de Geometría de indudable trascendencia práctica.

Finalmente, en ambas disciplinas si ha de alcanzarse el fin educativo propuesto, es indispensable el conocimiento completo de las definiciones y propiedades, y el uso de demostraciones, adaptadas, claro es, al grado de madurez lógica alcanzado por el alumno (1).

(1) Así, es indefendible que se conserve la definición de la

26. Destrezas. *a*) Es indispensable alcanzar una gran destreza en *el manejo de números y símbolos* en que consiste en gran parte la mayor dificultad que las Matemáticas presentan, ya que toda deficiencia en ello suele entorpecer la marcha del pensamiento, que se ha de apoyar constantemente en transformaciones de cálculo numérico y literal.

Aplicación.—A fin de no unir ambas dificultades, la mecánica y la discursiva, será conveniente en las demostraciones elegir números o expresiones literales de fácil manejo; así, si queremos llegar a enunciar la regla para dividir un número de varias cifras por otro de una sola, el primer razonamiento lo haremos sobre un número formado de cifras pares dividido por dos. Un segundo ejemplo en cuyo dividendo entre alguna cifra impar, será suficiente para enunciar válidamente la regla.

b) Debe procurarse adquirir *facilidad para expresar simbólicamente* tanto los enunciados como las diferentes fases de una demostración. A los ejemplos antes citados podemos añadir el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} a \parallel c$$

constituyendo también una práctica utilísima la enunciación rápida y correcta de expresiones de esta clase, y la lectura y aplicación de fórmulas, que merece, si es preciso, un ejercicio especial.

c) En Geometría es indispensable *construir con*

proporcionalidad directa como suele darse, diciendo que a *más* corresponde *más*, etc.

exactitud las figuras, con lo cual se perciben mejor las relaciones de sus elementos, y marcar bien por los medios que da el dibujo, líneas de puntos de trazo y punto, llenas, finos y gruesos, marcas especiales y tizas de colores, etc., los elementos que se deban diferenciar o poner de relieve, procurando que a analogías en dichos elementos correspondan análogas formas o marcas. Estas precauciones facilitan grandemente las demostraciones hasta hacerlas intuitivas y aquella habilidad evita errores como el que muestra la demostración errónea de la Nota 2.

d) En Aritmética, además de los signos usuales y de los propuestos por nosotros (Nota 4) es conveniente emplear siempre *u, d, c,* para representar unidades decenas y centenas; *m,* para múltiplo; *p,* para número primo; *d* para divisor, y M y D para mínimo común múltiplo y máximo común divisor. y en general las iniciales de las magnitudes que se empleen, c = cantidad; p = precio, etc. El signo Σ que se lee *sigma* (letra griega = S), significa *suma de términos de la forma* ... y con su auxilio la fórmula que da el precio medio en la regla de aligación, puede escribirse brevemente,

$$\boxed{P\,m = \frac{\Sigma\, pc}{\Sigma\, c}}$$

e) En Geometría deben seguirse los convenios científicos de valor universal que no son menos útiles en las Matemáticas elementales que en las superiores; así una letra mayúscula A, B, ... representará siempre un punto, y una minúscula una línea *a*, *b*, ... los signos — y $\wedge$ determinan un segmento o un ángulo; así $\overline{AB}$ se lee segmento AB y $\hat{A}$ significa ángulo A; en un triángulo, cada lado se representa por la letra minúscula correspondiente al vértice opuesto, y en los polígonos, nombrados aquellos por las letras mayúsculas en orden alfabético, se nombran los lados por las minúsculas en el mismo orden, a partir del mismo punto.

Los signos $\parallel$ y $\perp$ representan el paralelismo y la perpendicularidad; $\triangle$ triángulo; $\bigcirc$ círculo. Con estos símbolos el enunciado de un problema se simplifica extraordinariamente. Así: *Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados*, se escribe $\bigcirc$: A, B, C.

27. Hábitos mentales.—El cultivo de la Matemática debe habituar a llevar a todos los dominios del conocimiento lo que es práctica constante en el nuestro. Por ejemplo:

a) No emplear palabras cuyo concepto claro no se posea.

No admitir proposición ninguna que no esté claramente enunciada, ni darla por cierta sin después de detenido análisis, y si es preciso tras rigurosa demostración.

Exponer con la mayor claridad posible, dividiendo y subdividiendo las cuestiones por su dependencia lógica.

Obtener la línea general de una exposición de ideas, prescindiendo de los detalles que en ella intervienen.

Descubrir por analogía, generalización o deducción nuevas cuestiones relacionadas con las conocidas.

Sistematizar un conjunto de conocimiento por medio de un resumen, cuadro sinóptico, etc.

b) Analizar una *situación* compleja descomponiéndola en partes, recogiendo las esenciales y desechando las accesorias.

Reconocer las relaciones existentes entre ellas y expresarlas en forma clara y precisa.

Generalización o descubrimiento de la ley general.

Obtención de sus propiedades y aplicaciones.

c) Mantenerse en una constante actitud de investigar.

Deseo de comprender y de llegar al fondo de la cuestión.

Hábito de concentración y persistencia.

Amor por la precisión, claridad y exactitud y disgusto por la vaguedad y lo incompleto.

Deseo de una organización ordenada y lógica que ayude a la comprensión y la memoria.

Considerar las cosas en el sentido funcional o de relaciones.

Sandfor ha demostrado experimentalmente que siempre quedan y se transfieren los hábitos y actitudes mentales y la tendencia a emplear los métodos y procedimientos eficaces.

Y, finalmente, Smith, asegura que «la misma forma lógica, la misma atención al detalle, la misma paciencia y el mismo cuidado que ponga ahora el niño en resolver un problema, mostrará años más tarde en el comercio, en la banca etc. No habrá adquirido solamente conocimientos, sino capacidades».

EJERCICIOS

4. Señalar en cualquier texto de Aritmética o Geometría algún concepto no definido con precisión.

5. ¿Qué propiedad está admitida sin prueba de las que entran en la demostración de que por un punto exterior sólo se pueda trazar una perpendicular a una recta?

6. ¿Qué proposiciones se admiten sin prueba en el principio de la Gaometría?

7. Clasificar los triángulos.

8. Idem las posiciones relativas de dos circunferencias.

9. Idem las propiedades del M de dos números tomadas de cualquier texto de Aritmética para la enseñanza secundaria.

10. Obtener la marcha general de la demostración de la divisibilidad de un número por 9.

11. Idem de la demostración de las propiedades de la paralela media en un triángulo.

12. ¿Cuál sería en Geometría del Espacio el equivalente del teorema que da el valor de la diagonal del cuadrado?

13. ¿Y de la de la del rectángulo?

14. ¿Y de la longitud de un arco?

15. Aplicar la fórmula

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

que da el área de un triángulo al caso en que éste sea equilátero, isósceles, rectángulo y rectángulo e isósceles.

16. Formar un cuadro sinóptico de los conocimientos referentes a las cuatro operaciones fundamentales con números enteros habituales en la enseñanza secundaria.

17. Idem de las propiedades de los triángulos en general.

18. Expresar abreviadamente

$$i = \frac{ct + c't' + c''t''}{D}$$

$$V_m = \frac{ct + c't' + c''t''}{c + c' + c''}$$

$$V_m = \frac{C - (c + c' + c'') + (c + c' + c'')\, r}{C_r}$$

siendo V_m = vencimiento medio.

19. Enunciar en lenguaje corriente

Area del $\triangle = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$

Area del paralelepípedo rectángulo $=$
$= 2\,(a\,b + a\,c + b)$

NOTAS AL CAPITULO III

1.— *Las demostraciones intuitivas*

Muy útiles en los primeros años de la enseñanza, deben proscribirse en cuanto la mente del niño alcanza la madurez lógica suficiente; pero como siempre trataría de volver a ellas por ser la línea de menor resistencia, conviene hacerle ver cuán fácilmente pueden inducir a error con demostraciones como la siguiente:

Demostrar intuitivamente que $64 = 65$

Tomemos un cuadrado (fig. 7) de 8 unidades de lado, con lo cual obtenemos la representación gráfica de $8^2 = 64$, comprobándose que efectivamente está constituído por 64 cuadraditos; trácense las líneas que muestra la figura, recórtese por ellas y ensamblando convenientemente los trozos, resulta la fig. 8, un rectángulo que tiene de lado 13 y 5 divisiones, y por tanto $13 \times 5 = 65$ cuadra-

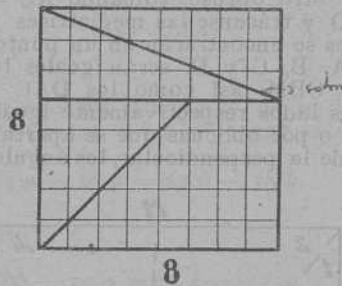


Fig. 7.

ditos. La aparición del cuadradito misterioso es debido a la deficiente ensambladura de los tro-

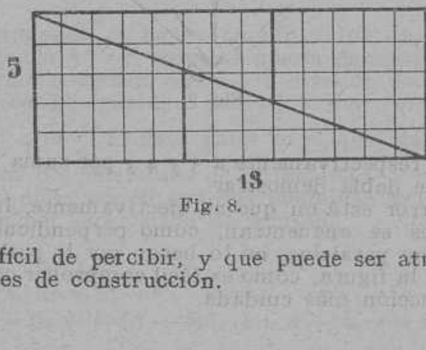


Fig. 8.

zos, difícil de percibir, y que puede ser atribuída a errores de construcción.

2.— La exactitud en el trazado de figuras

Aunque la Geometría ha sido definida como el arte de razonar exactamente sobre figuras inexactas, conviene dibujar éstas con la mayor precisión posible. Se evidencia esto con la adjunta demostración de que el ángulo recto es igual al obtuso. Para ello, tómese un segmento AB, (figura 9) y en sus extremos constrúyanse un ángulo agudo y otro obtuso, tomando AC = BD. Unase C con D y trácense las mediatrices de AB y CD, las cuales se encontrarán en un punto O. Uniendo O con A, B, C y D, serán iguales los triángulos OAM y OBM, así como los OAC y OBD por tener sus lados respectivamente iguales por construcción o por oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular, los ángulos 1 y 2 serán

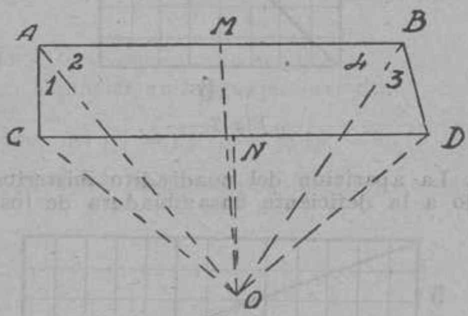


Fig. 9.

iguales respectivamente a 3 y 4 y por suma $\hat{A} = \hat{B}$ como se debía demostrar.

El error está en que si, efectivamente, las mediatrices se encuentran, como perpendiculares a rectas no paralelas, no lo hacen por la parte inferior de la figura, como es fácil comprobar con una construcción más cuidada.

3.— *El rigor lógico*

El conocer perfectamente los hechos matemáticos en que se funda una demostración y el hábito de escalonar ésta sin una *falla* o solución de continuidad, es tan esencial que prescindiendo de ello, se llega a demostrar aparentemente verdaderos absurdos como éste, por ejemplo de que $5 = 7$.

Supongamos que se verifique

$$a = \frac{3}{2} b$$

multiplicando los dos miembros de la igualdad por 4, se obtiene $4a = 6b$, o lo que es lo mismo

$$14a - 10a = 21b - 15b$$

y trasponiendo

$$15b - 10a = 21b - 14a$$

sacando factores comunes

$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$$

Suprimiendo el factor común a los dos miembros, queda $5 = 7$. como se quería demostrar.

El error cometido está en la división de los dos miembros de igualdad por $3b - 2a$ que es *cero*, por ser $a = \frac{3}{2} b$. Este valor es el que iguala entre sí los dos miembros de la igualdad, y no pueden dividirse por él sus dos miembros porque la división por *cero* carece de sentido.

Otra:

$$\text{Si } a = b,\ ab = a^2,\ ab - b^2 = a^2 - b^2,,\ b(a - b) = \\ = (a + b)(a - b),,\ b = a + b,\ 1 = 2$$

Otra:

$$\text{Si } a \neq b \text{ y } a + b = 2c,\ (a + b)(a - b) = 2c\,(a - b), \\ a^2 - b^2 = 2ac - 2bc,\ a^2 - 2ac = b^2 - 2bc,\ a^2 - 2ac + \\ + c^2 = b^2 - 2bc + c^2,\ (a - c)^2 = (b - c)^2,\ a = b$$

4.—*Los símbolos*

Como puede verse en el capítulo que trata de la evolución de nuestra ciencia, el simbolismo matemático, que es de la más alta importancia por cuanto facilita el pensar, no se ha completado hasta fines del siglo XVIII y aún no se ha uniformado totalmente. Y podemos añadir que ni siquiera está completo. Llamaremos la atención del lector sobre un signo indispensable y la modificación que proponemos de otro.

Creemos indispensable la adopción y uso de un signo para *aproximadamente igual*, relación que se presenta continuamente y nos evitaría escribir absurdos como

$$46 : 9 = 5 \quad \text{o bien} \sqrt{2} = 1{,}41$$

Algun autor español, Rey Pastor, utiliza el signo $\sim$ pero puede confundirse con el de semejanza, y además no tiene analogía ninguna con la relación que trata de representar. Nosotros hemos propuesto y utilizado con éxito el signo $\simeq$ inconfundible, y análogo al de la igualdad y relacionado, por tanto, con su significación. Las relaciones anteriores se escribirán

$$46 : 9 \simeq 5 \quad \text{y} \quad \sqrt{2} \simeq 1{,}41$$

que se leerán· 46 *dividido* por 9, *aproximadamente igual* a 5, y $\sqrt{2}$ *aproximadamente igual* a 1,41, con pleno rigor expresivo.

Este símbolo es susceptible de ampliación si consideramos la aproximación por defecto o por exceso escribiendo

$$5 \lesssim 46 : 9 \quad 1{,}41 \lesssim \sqrt{2} \lesssim 1{,}41$$

representando $\lesssim$ *aproximadamente igual por defecto*, símbolo que se forma con los *igual* y *menor* sin confundirse con ellos, como ocurre a la relación que representa. Por el contrario, utilizando el símbolo $\gtrsim$ para representar aproximadamente igual por exceso, tendríamos escritas con todo rigor relaciones como

$$6 \gtrsim 46 : 9 \text{ y } 1{,}42 \gtrsim \sqrt{2}$$

relaciones que pueden invertirse invirtiendo también el signo.

Si consideramos ahora la expresión

$$\log_b A = a \text{ ó } \log_b (A + B) = n$$

notaremos que análogamente a lo que ocurrió en los primeros tiempos de la Matemática, cuando se escribía, por ejemplo, *radix* para la raíz, se trata de una expresión poco clara y elegante. Los alemanes escriben las expresiones anteriores

$$\ell_b \underline{A} = a \quad \ell_b \underline{A + B} = n$$

simplificándolas notablemente y evitando el uso del paréntesis. Nosotros proponemos esquematizar aún más empleando el signo de la raíz y colocando el indicador de la base como el índice, en la forma siguiente:

$$\ell_b \underline{A} = a \quad \ell_b \underline{A + B} = n$$

Esta forma expresiva se ha deducido por un camino natural, es esquematización de las precedentes, como ha ocurrido con gran número de símbolos, y responde además a la íntima significación de la logaritmación, hermana gemela de la radicación como muestra el ejemplo adjunto:

$$\text{De} \quad 5^3 = 125 \quad \text{se deducen} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{125} = 5 \\ \ell_5 125 = 3 \end{cases}$$

Esperemos que aun siendo útiles tales símbolos, tarden un par de siglos, como ha ocurrido otras veces, en ser generalmente usados, si es que llegan a serlo.

CAPITULO IV

CARACTERES PROPIOS DE LAS MATEMATICAS

«Le professeur ne sera maitre de son metier qu'aprés l'avoir vu de trés haut.»

MERAY

1.—La Matemática como arte y como ciencia.

28. En los capítulos anteriores hemos estudiado forzosamente muchos de los caracteres propios de las Matemáticas, pero siempre en relación con el punto de vista adoptado. Ahora se trata de añadir a aquéllos los que no han tenido exposición adecuada entonces. Tengamos en cuenta que las Matemáticas tienen por objeto el estudio de la cantidad, expresada por números en la Aritmética y manifestada en la extensión en Geometría; y que constituyen una *ciencia por ser un conjunto sistemático de verdades y un arte, porque dan reglas adecuadas para la ejecución de ciertas operaciones o resolución de ciertos problemas.* Carácter este último predominante en la enseñanza elemental, y más en la Aritmética que en la Geometría.

En el primer aspecto, las Matemáticas son un conjunto de conceptos, propiamente *indefinibles* unos, como el de *unidad, pluralidad, punto, segmento, rectilíneo,* y *definibles* otros, esto es, reductibles a conceptos más elementales. Constan, además, de *proposiciones,* esto es, de *verdades relati-*

vas a propiedades de los seres que estudia hechas evidentes a nuestro espíritu por la demostración.

Como Arte están constituídas las Matemáticas por un conjunto de reglas que resuelven unas veces problemas puramente teóricos, aunque de aplicación práctica, y otras veces se ciñen por completo a la resolución de las cuestiones que presenta la realidad. Ejemplo de los primeros, tenemos sencillamente al tratar de hallar uno de los dos sumandos que constituyen una suma conocida, ésta y el otro sumando, y de los segundos es muestra la regla de las mezclas. Claro es que el origen histórico de las cuestiones es generalmente el segundo, y esto se ha de tener en cuenta en la enseñanza elemental para proceder análogamente; así, al problema teórico que constituye la resta, debe preceder un problema de carácter real y concreto.

Esto mismo puede hacerse con las propiedades más abstractas, por ejemplo, la propiedad distributiva de la multiplicación, como muestra el siguiente ejemplo:

Punto de partida.—Problema: *Un litro de aceite pesa* 900 *g. En una vasija tenemos* 16 *litros de aceite y en otra* 9 *litros. ¿Cuánto pesa más el aceite de la primera que el de la segunda?*

El problema puede resolverse de dos maneras:

1.ª Peso del aceite de la primera vasija:

$$900 \times 16 = 14400 \text{ g.}$$

Peso del aceite de la segunda vasija:

$$900 \times 9 = 8100$$

Diferencia: $14400 - 8100 = 6300$ g.

2.ª Diferencia entre las dos vasijas: $16 - 9 = 7$ l.

Su peso: $900 \times 7 = 6300$ l.

Consecuencia: $(16 - 9)\ 900 = 16 \times 900 - 9 \times 900$

Propiedad general. — $(a - b)\,n = a \,.\, n - b \,.\, n$

Aplicación. — $N \,.\, 9 = N\,(10 - 1) = N \,.\, 10 - N$

$N \,.\, 19 = N\,(20 - 1), \quad N \,.\, 20 - N$

Como vemos, el Arte y la Ciencia se mezclan íntimamente y en el método pedagógico debe partirse de la cuestión práctica, resolverla, pasar, si es posible, a la regla general o a la propiedad abstracta, y descender de nuevo a las aplicaciones.

Como Ciencia, la Matemática ha experimentado una *extensión y unificación progresivas* que pueden ponerse de manifiesto aun en su parte *más elemental*. El concepto, por ejemplo, de número que empezó por referirse sólo al número entero, se extiende al número fraccionario y con él ha de ampliarse también las definiciones, especialmente la del multiplicador, que siendo entero, indica el número de veces que se toma como sumando el multiplicando, sea éste el que sea, pero que carece de significación para el multiplicador fraccionario; resultando siempre el número entero un caso particular del fraccionario, como ambos lo son del número en general, definido por una *cortadura*, en el campo de los números reales, es decir, como el elemento que separa a todos los números reales en dos *clases*, siendo los números de la una menores que los de la otra, y pudiendo ser la diferencia entre dos números de una y otra tan pequeña como se quiera. La misma generalización sufren las definiciones de las operaciones. Al propio tiempo la Aritmética se constituye solamente con elementos propios en un modelo de organización lógica.

En la Geometría pueden notarse las mismas tendencias. Así la *igualdad* de figuras se incluye en la semejanza, como un caso particular, cuando su razón es igual a *uno*. Y a su vez la semejanza queda incluída en la *homotecia*, la cual comprende también (cuando es inversa y su razón igual a —1), el caso de la *simetría* con relación a un centro, y *la traslación paralela*, suponiendo que el centro de *homotecia directo* se traslada al infinito.

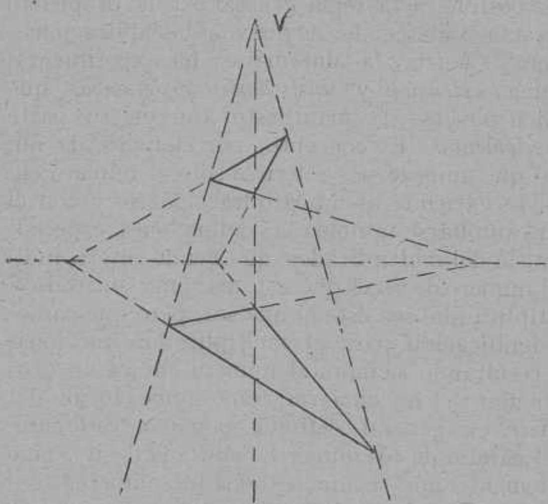


Fig. 10

Pero, a su vez, la homotecia no es sino un caso particular de la *homología*, relación en la cual las figuras se corresponden punto a punto de manera que los puntos homólogos están sobre rectas que pasan por un mismo punto, *centro de homología*, y las rectas homólogas se cortan en punto de una misma recta llamada *eje de homología*. La fig. 10

muestra dos triángulos homológicos. Si ahora suponemos que el eje se traslada al infinito, etc., las rectas homólogas son paralelas y la homología se convierte en homotecia.

Si el centro V se va al infinito en dirección perpendicular al eje, se obtiene la *simetría* con relación a un eje.

Claro es que el estudio de los caracteres científicos de la Matemática pudiera extenderse indefinidamente, pero aparte de las consideraciones hechas anteriormente y de las que expondremos en otros capítulos, hemos creído que basta indicar aquí algunos de los caracteres que relacionan y amplían los conceptos elementales. Baste añadir que, como dice Abel Rey, la Matemática constituye el modelo de todas las ciencias.

29. La característica de la Matemática como arte está de manera notable manifestada al compararla con una de las magníficas máquinas segadoras-trilladoras que efectúan en pocas horas la labor de semanas realizada por el labrador con la hoz y el mayal. Todas las reglas que da la aritmética se pueden sustituir fácilmente con una aplicación perseverante de la operación de contar. Sabido es que a esto se reduce la suma, que la multiplicación es una suma abreviada, como la división puede reducirse a una resta, etc.

Para dar una idea de esta *simplificación* que permite realizar las operaciones con mayor *rapidez* y *exactitud*, citaremos un ejemplo de cada una de las dos ramas principales de la Matemática Elemental.

En Aritmética puede servir de ejemplo típico la regla para calcular el *interés* de varios capitales a un mismo *rédito*. La fórmula correspondiente es

$$I = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_p}{D}$$

Utilizando la cual nos ahorramos $p-1$ divisiones al no calcular directamente cada interés por separado

$$i_1 = \frac{N_1}{D}; \quad i_2 = \frac{N_2}{D} \ldots \text{ siendo } N_1 = c_1\, t_1\; N_2 = c_2\, t_2 \ldots$$

Ahora, al utilizar la fórmula

$$i = \frac{ct}{D} \text{ en lugar de } i = \frac{crt}{36000}$$

ahorramos una multiplicación y dividimos por un número más sencillo.

Pero, a su vez, empleando la fórmula del interés en lugar de calcular éste por una regla de tres compuesta, ahorramos tiempo y esfuerzo, y más aún que empleando el método de reducción a la unidad, que se descompone en operaciones reductibles a la operación de contar.

En Geometría cabe considerar la diferencia entre los *procedimientos naturales* de evaluación de áreas y volúmenes con la sencillez, rapidez y exactitud que introducen las fórmulas algebraicas. Como ejemplo análogo en el trazado de figuras notaremos la mayor sencillez que supone el procedimiento del trazado de tangentes desde un punto a una circunferencia por el procedimiento del ángulo inscrito, en relación con el fundado en la propiedad de la mediana del triángulo isósceles. Esto sin considerar que sin el auxilio de los conocimientos geométricos son imposibles operaciones como las de hallar la distancia entre puntos inaccesibles, la longitud de la circunferencia, el área del círculo, etc.

2.—Los conceptos matemáticos

30. Origen de los conceptos.—Estudiados en sus características, nos limitaremos aquí a exponer su origen. A pesar de hallarse consagrada por la mayor parte de los psicólogos la frase escolástica de que *nada hay en el entendimiento que antes no haya estado en los sentidos*, el carácter puramente inteligible de los conceptos matemáticos que se desenvuelven por completo dentro del entendimiento y que parecen ser el ideal por que se rigen las leyes naturales y las formas del mundo exterior, ha hecho pensar a algunos filósofos (Platón) que los conceptos matemáticos fuesen formas preexistentes en el entendimiento humano. Otros, por el contrario, las han encontrado un origen experimental, análogo a las verdades de las Ciencias de la Naturaleza y de valor hipotético como ellas (Poincaré).

La solución al problema es como suele ocurrir, intermedia. Los conceptos matemáticos tienen su origen en la experiencia, pero la sobrepasan inmediatamente. Ella nos da cuando menos el concepto irreductible de *unidad* y *pluralidad* y los de *punto* y *segmento rectilíneo*, pero operando sobre ellos el entendimiento crea conceptos nuevos que exceden a la realidad experimentable. Así, por ejemplo, sucede con el concepto de *infinitud* obtenido sencillamente por la posibilidad de agregar un nuevo elemento a una pluralidad. El de *divisibilidad*, que en la práctica tiene un límite dado por la deficiencia de nuestros medios de observación y que en teoría no tiene límite; baste recordar la aproximación obtenida para el número π calculado por Shanks en 1873 con 707 decimales. Un sabio francés dedicó diez años de considerables investigaciones a estudiar las propiedades del polígono regular de 65.537 lados que, seguramente, no se puede estudiar directamente, y los poliedros imaginados por los geómetras no han sido agotados ni siquiera por las variadísimas formas de los cristales.

Por otra parte, si observamos la forma a que ha llegado la Geometría después de los esfuerzos para hacer de ella una pura creación del espíritu, notaremos que aun el mismo Hilbert admite como fundamentales en sus *Grundlagen der Geometrie.* (véase nota) los conceptos de punto, recta y plano, a los que atribuye cualidades que concuerdan con las que nos proporciona la intuición. Y Thieme, aun reduciendo los conceptos fundamentales a los de punto y segmento rectilíneo, los toma de la experiencia, como proporcionados por *la contemplación de una huella de la punta de lápiz o un grano de arena* imaginados infinitamente pequeños, o de *la consideración de un hilo tirante libremente tenso*, respectivamente.

Pero ni siquiera se han formado los conceptos matemáticos en la realidad por la pura elaboración espiritual que esto supone. La Historia, por el contrario, nos muestra que durante mucho tiempo el desenvolvimiento de las Matemáticas siguió paso a paso el conocimiento de la realidad cuantitativa que iba adquiriendo el hombre impulsado por sus necesidades. Por ello nacieron las Matemáticas como Artes destinadas a satisfacer las necesidades humanas. La Geometría, como una Agrimensura, o *medida de la tierra* en Egipto, donde las inundaciones del Nilo borraban periódicamente los linderos, y la Astronomía en Caldea, por la necesidad de orientarse y medir el tiempo. Y la Aritmética, por la necesidad de contar y de operar con números en lugar de hacerlo con las cantidades reales. Así tambien el signo — parece que separaba el número indicador del peso de una mercancía del número que representaba su tara. El signo × separa el peso de un saco del número de ellos. Los números decimales fueron usados antes que nadie por comerciantes, y mercaderes fueron también los inventores del artificio de contar por unidades colectivas, conservándose aún las *docenas* y las *gruesas* y otras varias.

Aplicación.—En casi toda la enseñanza primaria los conceptos deben formarse extrayéndolos de la experiencia, no construyéndolos de un modo lógico, lo cual sólo podrá hacerse en el último grado. Así la multiplicación surgirá de un problema concreto en que los sumandos sean iguales, y la circunferencia, de la consideración del aro, de la trayectoria de la piedra en la honda, de la sección de una naranja, del estudio de la rueda de un carro, etc.

3.—Las definiciones.

31. Las definiciones.—Los entes o seres matemáticos suelen definirse de dos maneras. *La definición descriptiva enuncia las cualidades esenciales que permiten reconocerlos.* Ejemplo de ella, es la definición dada en 14 de la circunferencia. Un ejemplo aritmético sería la definición de múltiplo de un número diciendo que es *aquel número que dividido por éste da cociente exacto.* En este caso se procede análogamente a las ciencias naturales, y el ideal de la definición es, aquí como allá, la que consta de *género próximo* y *diferencia última*; así definiríamos el rombo como *un paralelogramo de lados iguales,* y el cuadrado como *un rombo de ángulos rectos.*

Definiciones generativas son aquellas que como su nombre indica, *expresan cómo se engendra lo definido.* Así se define la circunferencia como *la línea engendrada por el extremo de un segmento que gira alrededor del otro extremo,* y el múltiplo de un número como el *producto del número dado por un número cualquiera.*

Aplicación.—De las dos clases de definiciónes, la más acorde con el sentido *inventivo* de la ciencia, es la generativa, siendo además la que da más animación y vida a la enseñanza, debiendo ser por ello preferida. Así, por ejemplo, para dar a conocer al niño el número *cuatro,* se presentará un grupo de *tres* cubos coloreados, y un cubo suelto que se agrupará con los anteriores, formando un conjunto al que corresponde el nombre de *cuatro,* de acuerdo con la definición generativa o serial de este número que es $4 = 3 + 1$. (Véase nota, capítulo V.)

Esto no quiere decir que deban proscribirse las definiciones descriptivas, antes al contrario, pueden complementarse unas y otras. Así, por ejemplo, para llegar a la definición de circunferencia puede partirse del estudio de una rueda midiendo las distancias al centro de los puntos de la periferia y después trazar la circunferencia por medio de la cuerda o del compás de carpintero para pasar a la segunda definición. *La observación, o la construcción, o ambas operaciones, deben, pues, preceder a toda definición.*

4.—Las proposiciones y sus clases.

32. Las proposiciones.—Las Matemáticas toman a los seres o entes matemáticos previamente definidos, por ejemplo, el *máximo común divisor de dos números o el triángulo*, y les van encontrando determinadas propiedades. Por ejemplo, al máximo común divisor, la de *dar cocientes primos entre sí*; al triángulo, la de que *sus ángulos sumen dos rectos*. Es exactamente lo mismo que hace un químico o un biólogo al estudiar un cuerpo o un ser vivo. Estas propiedades en Matemáticas se *demuestran* éstos, su verdad se refiere a otra u otras anteriormente demostradas o admitidas como ciertas.

Claro es que en el primer caso no se puede prolongar indefinidamente la serie de verdades, y así lo demostró Aristóteles. Es preciso, pues, que la cadena de verdades principie en algún punto. Teniendo esto en cuenta, las proposiciones matemáticas se pueden clasificar como indica el cuadro adjunto:

Proposiciones.	Axiomas.	Generales. Especiales.
	Postulados.	Esenciales. Circunstanciales.
	Teoremas. - Corolarios.	

Axiomas son aquellas proposiciones o verdades evidentes, fundamentales, es decir, no derivables de otras y necesarias que sirven de principio o punto de partida a una ciencia.

Estos axiomas son *generales* cuando se aplican a varias ciencias, como el conocido de que *dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.* Y *especiales*, cuando son privativos de una ciencia determinada. por ejemplo, de las ciencias de la cantidad, es axioma propio el de *si con cantidades iguales se realizan operaciones iguales, los resultados deben ser iguales.*

Postulados son aquellas verdades no evidentes por sí mismas y no demostrables que se admiten como ciertas, y suelen intercalarse en cualquier punto de la serie. Ejemplo de ello es el de Euclides. Este afirma que por un punto exterior a una recta sólo puede trazársele una paralela. Puede prescindirse de él, y esto hizo Lobatchewski obteniendo con un desarrollo perfectamente lógico otra Geometría. Sin embargo, consideramos *esenciales* postulados como éste cuando su admisión o no admisión cambia por completo el desarrollo de la ciencia. En la Geometría corriente existe gran número de postulados puestos de manifiesto por la crítica contemporánea, cuya no admisión ha dado origen a distintas Geometrías.

En cambio, *desde el punto de vista pedagógico exclusivamente*, llamamos postulados *circunstanciales* a *aquellas verdades que pedimos* (postulamos, de *postulare* = pedir) *que se admitan como ciertas, aun cuando son susceptibles de demostración en un estudio más completo de la ciencia*, que corresponde a un adelanto en la evolución mental del alumno. Así como postulado circunstancial puede incluirse en el estudio de los números primos, la propiedad de que *un número compuesto no admita más que una sola forma factorial*, y como tal postulado debiera darse en todas las Geometrías usuales la propiedad de la línea recta de ser *el camino más corto entre dos puntos*, propiedad perfectamente demostrable, aun en una exposición elemental.

Opinamos que lo que no se demuestre siendo demostrable, debe ser indicado al estudiante sin pasarlo como evidente, fundándose en su falta de rigor lógico.

De los *Teoremas* y *Corolarios* hemos hablado ya anteriormente, considerando a éstos como un caso particular del que trata en general el teorema.

5.—La demostración, análisis y síntesis

35. La demostración.—La proposición que se demuestra es generalmente una equivalencia. Por ejemplo, *Si tres ángulos están formando parte de un triángulo, esto equivale en magnitud a que su suma valga dos rectos*. La demostración consiste en una serie de equivalencias intermedias que recuerda la regla de conjunta. (Véase núm. 17.) Estas equivalencias son proposiciones ya demostradas anteriormente.

Aplicación.—Antes de dar una demostración, conviene recordar aquellas propiedades en que se funde, estableciendo así una especie de *apercepción* matemática; y, a manera de resumen, es también conveniente anotar al margen la serie de proposiciones utilizadas.

Los métodos generales de demostración son como en Lógica el *análisis* y la *síntesis*.

34. El análisis.—El análisis propiamente matemático, fué utilizado ampliamente por Platón:

a) *En la demostración de propiedades* consiste en suponer cierta la verdad que se trata de demostrar, y, sometiéndola a transformaciones lícitas, llegar a una verdad evidente o demostrada.

Ejemplo 1.° Tratemos de demostrar la veracidad de la proposición contenida en la expresión siguiente:

$$(a + b) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

multiplicando los dos miembros de la igualdad por m sale

$$[(a + b) : m\,]\, m = \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) m$$

por la definición de división y la regla para multi plicar una suma por un número se obtiene:

$$a + b = \frac{a}{m}\, m + \frac{b}{m}\, m$$

de donde aplicando de nuevo la definición del cociente

$$a + b = a + b$$

siendo esta igualdad evidente también será cierta la primera de que hemos partido.

Ejemplo 2.° Demostrar la conocida propiedad de los lados de un triángulo

$$a > b - c$$

sumando c a los dos miembros de la igualdad sale

$$a + c > b$$

y como esta desigualdad es cierta, también lo es la primera.

b) *En los problemas aritméticos* se utiliza el análisis como hemos ya expuesto y de los geométricos puede y servir como ejemplo el siguiente: *Trazar por un punto* O *una recta que equidiste de dos puntos dados* A *y* B.

Se empieza por construir la figura trazando la recta, tomando en ella el punto O, y a un lado y otro de la misma los puntos A y B, equidistantes de ella, esto es, siguiendo una marcha en todo inversa a la indicada por el enunciado.

Ahora, siendo

$$NA = BP \text{ será } \triangle MAN = \triangle MBP$$

Y siendo

$$\triangle MAN = MBP, \text{ será } MA = MB$$

De aquí se deduce la construcción: Unir el punto dado O con el punto medio M de AB.

35. Esta misma marcha sirve para demostrar una proposición haciendo ver que su contraria es falsa por llegarse, de admitirla, a una proposición no verdadera. Ejemplo de ello es la demostración en Geometría de que *dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas*, con varias otras proposiciones de la misma teoría, constituyendo este procedimiento el llamado de *reducción al absurdo*, y fué muy empleado por Euclides. Es de advertir que su elegancia es nula y su claridad escasa para los principiantes, por lo que debe usarse lo menos posible.

36. *El verdadero análisis aplicado a los problemas consiste en descomponer la cuestión dada en cuestiones más sencillas que se van resolviendo sucesivamente.*—Así, para trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados buscamos el centro de la que pasa por dos de ellos y luego el centro de la que pasa por uno de éstos y el tercer punto, obteniendo la solución buscada. Tal vez podamos considerar a Hipócrates de Chios como el autor de este método.

37. La síntesis.—*En las demostraciones consiste en partir de una verdad conocida para llegar a la que se quiere demostrar.* Así, para demostrar la regla de multiplicar una suma por un número

$$(a + b) \times n$$

aplicamos la definición de multiplicar, obteniendo

$$(a + b) + (a + b) + (a + b) \ldots (n \text{ veces})$$

aplicando ahora la propiedad conmutativa de la suma sale

$$a + a + a + \ldots (n \text{ veces}) + b + b + b + \\ + b\ldots = (n \text{ veces})$$

que por la propiedad asociativa se convierte en

$$(a + a + a + a + \ldots) + (b + b + b + b + \ldots)$$

de donde por la definición de multiplicación sale

$$a \times n + b \times n$$

En los problemas de Aritmética se procede como ya se indicó y en cuanto a los de Geometría tra-

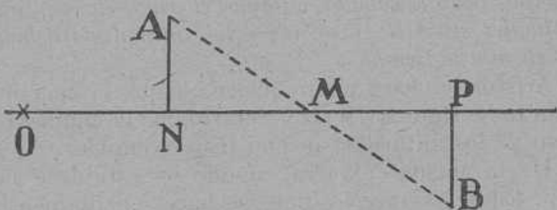


Fig. 10.

taremos como ejemplo el anteriormente propuesto (figura 10).

Unase A con B tómese su punto medio del segmento A B y unase O con M. En efecto, siendo

$$MA = MB \text{ será } \triangle MAN = \triangle MBP$$

y siendo

$$\triangle MAN = \triangle MBP \text{ también } AN = BP$$

Notándose también como en una marcha inversa a la del análisis.

Ahora el método analítico es el de invención, mientras que el sintético es el de exposición de la verdad.

6.—La inducción completa.

38. La inducción en las Ciencias de la Naturaleza.—Aristóteles expone y discute ya el silogismo inductivo aplicado a las Ciencias Naturales con el ejemplo siguiente:

El caballo, el mulo, el asno etc. ..., viven mucho tiempo, pero *el caballo, el mulo, el asno, etc. ..., son animales sin hiel*, luego *todos los animales sin hiel viven mucho tiempo.*

Aristóteles hace notar que, para que la conclusión fuese rigurosa, sería necesario que la enumeración de los animales sin hiel fuese completa.

De la misma manera cuando se establece la ley: *todos los cuerpos caen*, se hace sencillamente ante la consideración de haber notado la caída de varios cientos de cuerpos, sin que ninguno se haya librado de ello, a no ser por causa justificada, como el globo o el aeroplano que se elevan. Cuando se dice *todos los cuerpos caen con igual velocidad en el vacío*, la afirmación se hace generalmente ante la experiencia de unos pocos cuerpos que cumplen la ley. Por otra parte, nosotros podemos imaginar cuerpos no sometidos a la gravedad sin inconveniente alguno.

39. La inducción en la Matemática.—Ha sido siempre una gran preocupación para los matemáticos el encontrar una expresión que proporcionase números primos, reducidos como están casi a la criba de Eratóstenes, y por ello fué motivo de expectación la fórmula propuesta por *Fermat* $2^{2^n}+1$ que daba números primos para los primeros valores de n: 1, 2, 3, 4. ¿Se podía afirmar que cualquier valor de n proporcionaría números primos? Euler comprobó que para $n = 5$ no existía tal propiedad.

Otro ejemplo más sencillo tenemos en la expresión utilizada en la Aritmética elemental

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots\ p + 1$$

formada por el producto de los números primos hasta p, aumentado en una unidad. Para valores de $p = 1, 2, 3, 5$ el valor de esta expresión es un número primo; ¿lo será siempre? Fácilmente se comprueba que para $p = 13$ el valor obtenido no es primo. La inducción incompleta no es, pues, válida en la Matemática.

Pero ocurre algo más notable. Si tomamos, por ejemplo, la sucesión de los cuadrados de los números enteros

$$0^2,\ 1^2,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36 \ldots$$

y si restamos de cada uno de ellos el anterior encontramos la serie

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots$$

de los números impares. Esta regla no sufre excepción por mucho que se prolongue el ensayo, y, sin embargo, *no le es lícito al matemático darla por valida sin ulterior demostración.*

40. El principio de la inducción completa.— Para tales casos existe el llamado *principio de la inducción completa,* utilizado primeramente por un matemático italiano del siglo XVI, Maurolyco; continuado por Pascal y aplicado a su famoso triángulo aritmético, y desenvuelto por Jacques Bernoclli, y que dice: *Si una propiedad referente a números enteros es cierta para* 1, *y siéndolo para* n *lo es para* n + 1, *es siempre verdadera.*

Para aclararlo lo aplicaremos a un ejemplo. Si observamos que la suma de los 1, 2, 3, 4 números impares consecutivos 1, 3, 5, 7 ..., es: 1, 4, 9, 16 ..., podemos inducir que *la suma de los* n *primeros números impares es* n^2, esto es, que $1 + 3 + 5 + \ldots 1_n = n^2$.

Para demostrarlo observamos: 1.°, que se verifica para $n = 1$.

2.° Siendo $2n - 1$ el n^{simo} número impar y $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n^{\circ} - 1) = n^2$, bastará demostrar que

$$1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

ya que el n° impar siguiente a $2n - 1$ es $2n + 1$

Y, en efecto, sustituyendo todos los sumandos menos el último por su suma, sale

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n\,1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

que es el desarrollo de $(n + 1^2)$ como es fácil comprobar.

Según esto, como la propiedad en cuestión se verifica para $n = 1$, se verificará para $n = 2$, verificándose para $n = 2$, se verificará para $n = 3$; verificándose para $n = 3$, se verificará para $n = 4$, y así indefinidamente. Con lo cual queda demostrada su absoluta generalidad sin que quepa ni imaginar siquiera la existencia de números para los cuales no se verifique la propiedad en cuestión.

Este principio es aplicado con gran frecuencia en Matemáticas, y de ello puede servir de ejemplo en la parte elemental la demostración de la fórmula del binomio de Newton, comprobada para el cuadrado y el cubo y demostrando que si es cierta para la potencia n^a lo es también para la $(n + 1)^a$.

7. Métodos particulares de demostración de teoremas y de resolución de problemas

41. La correlación.—Con este nombre se designa la acción de corresponder uno a uno los elementos de dos figuras, y constituye un método importantísimo, no sólo para establecer propiedades y demostrarlas por una analogía más o menos rigurosa, sino además para sistematizar los conocimientos agrupándolos en un sencillo paralelismo. Su importancia y aplicación es mayor en Geometría, y a esta ciencia nos hemos referido en la definición, y a ella nos seguiremos refiriendo en su estudio detallado

a) *Correlación en el plano.*—Al *punto* se le puede hacer corresponder la *recta*, y recíprocamente obteniéndose proposiciones como las siguientes:

Por un *punto* pasan infinitas *rectas*.	En una *recta* pueden tomarse infinitos puntos.
Dos puntos determinan la posición de *una recta*.	Dos *rectas* determinan la posición de un *punto*.
Un punto puede desplazarse sobre una recta en dos sentidos.	Una recta pueda girar alrededor de un punto en dos sentidos.

Al *segmento* corresponde el *ángulo*, y las propiedades de unos y otros pueden estudiarse correlativamente.

Existe, sin embargo, una diferencia capital y es la existencia de una *unidad* absoluta para los ángulos que falta en el segmento; en algunas Geometrías modernas esta analogía se completa con la existencia de la unidad absoluta de longitud, análoga a circunferencia máxima en la Geometría estérica.

b) *Correlación en el espacio.*—Al *punto* corresponde el *plano* y a la *recta* ella misma, obteniéndose correlaciones del tipo siguiente:

Por un punto pasan infinitos planos no colineales.	En un plano pueden tomarse infinitos puntos que no pasan por una recta.
Tres puntos determinan la posición de un plano.	Tres planos determinan la posición de un punto.
Dos puntos en el espacio determinan una recta.	Dos planos se cortan según una recta.

c) *Correlación del plano con el espacio.*—Aunque sin g an rigor lógico, con fines didacticos puede establecerse una correlación entre los ángulos planos con los diedros, que simplifica grandemente la exposición.

d) *La forma plana, la radiación y la esfera.*—Si una forma plana, es decir, una figura cualquiera situada en un plano la proyectamos desde un punto exterior a él (*vértice*), tendremos una *radiación* en la cual, a *puntos* del plano corresponden *rectas* que pasan por el vértice, y a las *rectas* corresponden *planos* que gozan de la misma propiedad. Si la radiación la cortamos por una superficie esférica que tenga como centro el vértice, obtenemos una figura sobre la superficie en cuestión, en la cual a *rectas* de la radiación corresponden *puntos* y a los planos *arcos de circunferencia máxima*. Pudiendo establecerse la siguiente correlación:

Forma plana	*Radiación*	*Forma esférica*
Punto	Recta	Punto
Recta	Plano	Círculo máximo
Segmento	Angulo plano	Arco de círculo
Angulo plano	Angulo diedro	Angulo de arcos
Triángulo	Triedro	Triángulo esférico
Polígono	Angulo poliedro	Polígono esférico

Las propiedades son unas veces idénticas y otras simplemente análogas, y lo mismo ocurre con las demostraciones.

Así, por ejemplo,

$$\text{en un}\left\{\begin{array}{l}\text{triángulo plano}\\ \text{triedro}\\ \text{triángulo esférico}\end{array}\right\}\text{un}\left\{\begin{array}{l}\text{lado}\\ \text{cara}\\ \text{lado}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{es menor que}\\ \text{la suma de los}\\ \text{otros lados.}\end{array}$$

y mayor que su diferencia.

La suma de los tres ángulos

de un	triángulo plano	es igual a dos rectos.
	triedro	es mayor que dos rectos
	triángulo esférico	y menor que seis.

Tal importancia tiene esta correlación que algunos autores estudian simultáneamente las propiedades que se corresponden, y son muchos lo que aconsejan efectuar en esta forma el repaso de las mismas.

42. Métodos especiales en Aritmética.—Los más interesantes para nosotros son aquellos que más se utilizan en la enseñanza secundaria y en la primaria sobre todo. En la demostración de propiedades nos limitaremos al que pudiéramos llamar método *intuitivo* que presentaremos en sus tres variantes.

a) *Método objetivo.*—Consiste en la representación de los números mediante objetos para operar con ellos.

Ejemplo 1.° Los diferentes órdenes de unidades que forman un número se representan por hacer de palillos; mejor con tallos de asfodelos en las regiones en que se dan, por ser aquellos demasiado pequeños para las manos de los niños. Palillos sueltos representan las unidades, haces de 10, atados con cordón rojo las decenas, y 10 haces de decenas atadas a su vez con hilo verde o azul dan las centenas. Las operaciones de suma o resta se hacen perfectamente con dos series de haces de palillos que se cuelgan de un travesaño de madera a un lado y otro de su parte media, agrupados en tres porciones del travesaño, diversamente coloreadas.

Ejemplo 2.° Que el *orden de factores no altera el producto* se demuestra cuando son dos los factores, formando, por ejemplo, con 12 discos o cuadrados 3 filas de a 4 ó 4 filas de a 3. Para cuando los factores son tres se procede análogamente con cubitos.

Ejemplo 3.° Si cada cubito representa una unidad, y están coloreados diversamente en sus seis

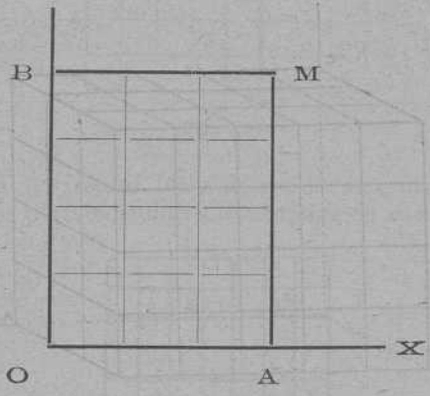


Fig. 11.

caras, se colocan por ejemplo 25 cubitos (n^2) formando un cuadrado, de modo que el *uno*, el que forma un vértice, presente un color determinado, los *tres* adyacentes otro color, los *cinco* adyacentes a éstos otro diferente. Así, se evidencia que

$$\sum (2n + 1) = n^2$$

Observación: Varias de estas operaciones pueden realizarse con dibujos, pero es preferible llevarlas a cabo como indicamos por la *actividad* que lleva consigo el método, la complicación de sensaciones, etc.

b) *Método gráfico.*—Consiste en emplear la representación gráfica de los números para estudiar sus propiedades.

Ejemplo 1.° La propiedad conmutativa de la multiplicación se evidencia considerando en di-

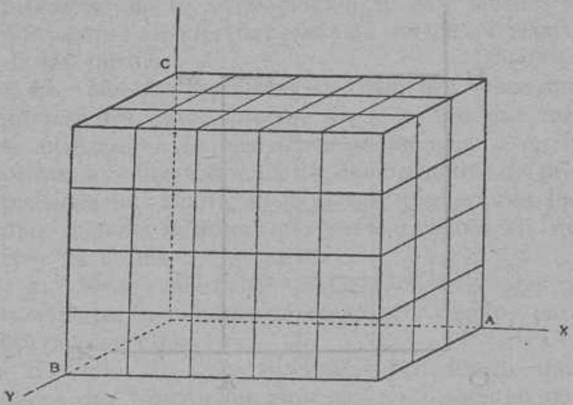


Fig. 12.

ferentes porciones la representación gráfica de un producto de dos y de tres factores que muestran las figuras 11 y 12.

Ejemplo 2.° La propiedad distributiva de la multiplicación se demuestra por la consideración de la figura 13.

Ejemplo 3.° La conocida propiedad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

se evidencia con la fig. 14.

c) *Método Nomográfico.*—Le damos este nombre para distinguirlo del anterior, y por él tratamos de hacer intuitivas las relaciones entre magnitudes.

Para las magnitudes simplemente relacionadas se construyen las gráficas tomando sobre un eje

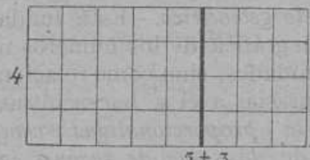


Fig. 13.

o recta horizontal los valores de una magnitud y sobre perpendiculares levantadas en cada pun-

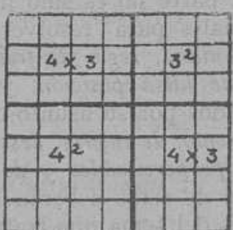


Fig. 14.

to los valores correspondientes de la otra magnitud. Uniendo mediante una línea los puntos obtenidos aparece la correspondiente gráfica que da clara idea de las variaciones de una magnitud en función de la otra.

Para las magnitudes directamente proporcionales se obtiene en el caso anterior una línea recta, mientras que en las inversamente proporcionales la línea obtenida es una curva llamada *hipérbola*. Tales líneas no solamente marcan la relación existente entre las magnitudes, sino que nos permiten fácilmente calcular un valor de una de ellas correspondiente a un valor dado de la otra.

d) *Método geométrico.*—Está fundado en la representación gráfica de los números no como conjunto de unidades, sino como relación entre magnitudes, y gracias a él se hacen intuitivas relaciones como *la proporcionalidad compuesta* y la propiedad de *la suma de razones iguales* (véase nuestra Aritmética Intuitiva) la *medida aritmética* y la *medida geométrica.*

43. Métodos especiales de resolución de problemas en Aritmética.—La Aritmética elemental en su segunda parte no es sino una colección de métodos especiales para resolver problemas: *reducción a la unidad, regla de tres simple y compuesta, regla de falsa posición*; y aun especialísimos, clasificados por su asunto, como las reglas de *tanto por ciento, de interés, descuento, aligación, repartimientos proporcionales y de conjunta.* Claro es que algunas de éstas deberán desaparecer por falta de interés del tema que tratan, y alguna de aquéllas como la de falsa posición, deberá ser sustituída por las ecuaciones. Entre los *métodos* especiales distinguiremos el de *comparación con la unidad*, el *gráfico*, el *geométrico*, el *algebraico*, que para mayor claridad aplicaremos a la resolución de una cuestión típica, el llamado *problema de los móviles.*

Dos automóviles parten al mismo tiempo de dos puntos A *y* B *distantes* 300 Km. *y marchan a* *encontrarse llevando el de* A *una velocidad de* 30 Km. *por hora y el de* B, 45 Km. *por hora. ¿A qué distancia del punto* A *se encontrarán?*

a) *Método de comparación con la unidad.*—En *una* hora recorren

$$30 + 45 = 75 \text{ Km.}$$

de la distancia que los separa.

Para recorrer los 300 Km. necesitarán tantas horas como veces 300 contenga a 75, esto es,

$$\frac{300}{75} = 4 \text{ h.}$$

$$\text{Distancia de A} = 30 \times 4 = 120 \text{ Km.}$$

Comprobación 1.ª

Distancia recorrida por el 1.º	$30 \times 4 =$	120 Km.
» » » 2.º	$45 \times 4 =$	180 Km.
	Total	300 Km.

Comprobación 2.ª

Tiempo empleado por el móvil 1.º $\dfrac{120}{30} = 4$ h.

Tiempo empleado por el 2.º $\dfrac{300-120}{45} = \dfrac{180}{45} = 4$ h.

b) *Método gráfico.* — Consideremos la figura 15. En ella están representados horizontalmente los Km. y verticalmente las horas. La recta que representa el movimiento del primer automóvil se ha obtenido uniendo el punto de partida A con el punto M, que representa su posición al cabo de 2 horas en que está a 30 . 2 = 60 Km. del punto de partida. Análogamente se ha obtenido la recta que representa el movimiento del móvil B. uniendo este punto con el N situado a las 2 horas a 45 . 2 = 90 Km. de B, esto es, a 300 — 90 = 210 Km. de A. El

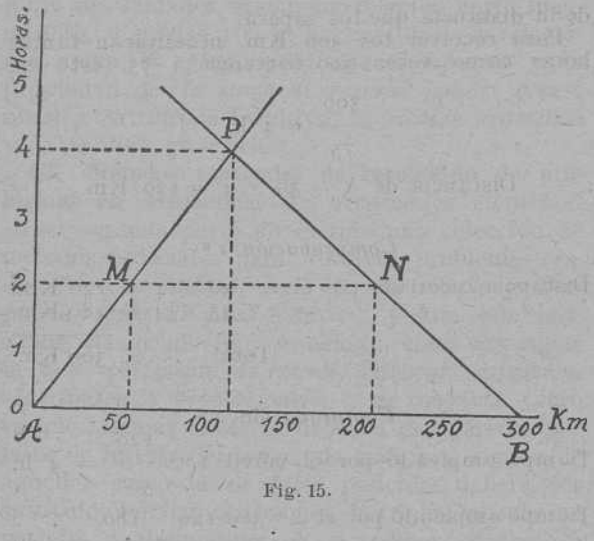


Fig. 15.

punto P donde se encuentran las dos rectas nos da la solución del problema, diciéndonos que los móviles se encuentran a las 4 horas de marchar a 120 Km. del punto A.

c) *Método geométrico.*—Si consideramos que la distancia recorrida por cada móvil hasta el punto de encuentro es proporcional a su velocidad, nos bastará dividir esta distancia gráficamente (o numéricamente) en partes proporcionales a dichas velocidades. Representando, pues, dicha distancia como muestra la fig. 16 pero en escala de 1 : 300.000 (1 dm. por 300 Km.), y levantando en sus extremos A y B rectas perpendiculares dirigidas en sentido contrario, de longitudes proporcionales a las velocidades respectivas (doble escala de la anterior), obtenemos los puntos C y D, que unidos determinan el punto M de encuentro de los móviles. Su distancia a A es de 40 mm. que

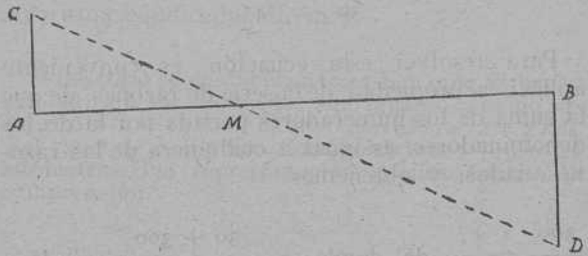


Fig. 16.

multiplicada por el denominador de la escala da 120 Km. como solución del problema.

Observación.—Con análoga sencillez se resuelven problemas tan curiosos como el clásico de *las luces* o el de hallar la porción del punto del espacio en que la atracción de la tierra y la luna se equilibran, o el más modesto de hallar el punto de aplicación de la resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido.

d) *Método algebraico.*—Llamemos x a la distancia buscada, y siguiendo el camino de la

2.ª comprobación expuesto en a), tendremos.

Tiempo empleado por el móvil 1.º $= \dfrac{x}{30}$

Tiempo empleado por el móvil 2.º $= \dfrac{300 - x}{45}$

Y como dichos tiempos deben ser iguales,

$$\frac{x}{30} = \frac{300 - x}{45}$$

Para resolver esta ecuación, es conveniente aplicar la propiedad, de la serie de razones, de que la suma de los numeradores partida por la de los denominadores, es igual a cualquiera de las razones dadas, y obtenemos:

$$\frac{300}{75} = \frac{x}{30}, \text{ de donde } x = \frac{30 \times 300}{75} = 120 \text{ Km.}$$

44. Procedimientos especiales.—Con este nombre indicamos varios procedimientos utilísimos, casi indispensables si no se estudian en la Escuela Primaria las ecuaciones, y convenientes siempre, porque resuelven la cuestión con más facilidad que el Algebra y constituyen además una gimnasia intelectual excelente. Indicaremos esquemáticamente su fundamento algorítmico dejando al cuidado del lector el desarrollo de su significación en lenguaje vulgar, notando que *a* y *b* representan las cantidades desconocidas.

a) *Fundamento:*

$$(a+b) \pm (a-b) = \begin{cases} 2\,a \\ 2\,b \end{cases}$$

Ejemplo.—*Dos peatones han partido de dos puntos A y B distantes 16 Km., y el 2.° ha hecho 2 Km. más que el 1.° hasta llegar a encontrarse. Cuánto ha recorrido cada uno.*

Está incluído en el esquema anterior, puesto que se conoce la suma y la diferencia de los espacios recorridos. Para vulgarizar la operación algorítmica indicada, diremos:

Si del total se descuentan los 2 Km. que ha hecho más el 2.°, los recorridos son iguales, y como suman $16 - 2 = 14$ el 2.° habrá recorrido $14 : 2 = 7$ km. y el 1.°, $7 + 2 = 9$ Km. Comprobación: $7 + 9 = 16$ kilómetros. Una representación gráfica facilita la comprensión.

El esquema sirve, además de aclarar la resolución, para la invención de problemas de este tipo.

b) *Fundamento:*

$$\left.\begin{array}{l} a + b = \mathrm{S} \\ \dfrac{a}{b} = n \end{array}\right\} \quad \frac{\mathrm{S}}{b} = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = n + 1, \quad \frac{\mathrm{S}}{n+1} = b$$

Ejemplo: *Un oficial y un aprendiz han cobrado* 48 *ptas. por una semana de trabajo. Sabiendo que el oficial cobra* 3 *veces más que el aprendiz, hallar la parte de cada uno.*

El esquema se traduce en lenguaje vulgar diciendo:

Por *una* parte del aprendiz tiene 3 el oficial, y entre los dos $3 + 1 = 4$ partes. Valor de una parte $48 : 4 = 12$ ptas. Valor de 3 partes $12 \times 3 = 36$ pesetas, que representan lo cobrado semanalmente por uno y otro.

c) *Fundamento*:

$$\left.\begin{array}{l} a - b = d \\ \dfrac{a}{b} = n \end{array}\right\} \frac{d}{b} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 = n - 1, \quad \frac{d}{n-1} = b$$

Ejemplo: *Un padre tiene 39 años y su hijo 4. ¿Cuándo la edad del padre será seis veces mayor que la del hijo?*

Para justificar el esquema razonaremos diciendo:

Cuando esto ocurra, el padre seguirá teniendo $39 - 4 = 35$ años más que el hijo, y como el total de su edad es 6 veces mayor, estos 35 años representan 5 veces la edad del hijo, que será de $35 : 5 = 7$ años, y la del padre $7 \times 6 = 42$ años.

Comprobación: Para que el hijo tenga 7 años han de transcurrir $7 - 4 = 3$ años.

Para que el padre tenga 42 años han de transcurrir $42 - 39 = 3$ años.

d) *Proporcionalidad de la diferencia.*—Ejemplo: *Un litro de leche pesa* 1,03 kg., *y una persona compra* 15 *litros y encuentra que pesan* 15,390 kg. *¿Cuánta agua había añadido el lechero?*

Razonamiento: Si los 15 litros hubieran sido leche pura habrían pesado $1{,}03 \times 15 = 15{,}450$ kg.

La diferencia 15,450 — 15,390 = 60 g. es debida a la sustitución de la leche por agua.

En 1 litro de leche sustituído por agua la diferencia es de 1,030 — 1 = 30 g.

El número de litros será 60 : 30 = 2.

Comprobación:

Número de litros de leche	15 — 2 = 13.		
» » agua	2		
	Su peso 1,03 × 13 =	13,39	Kg.
	» »	2	»
Total 15 litros con un peso de		15,39	»

e) *Igualación.*—Ejemplo: *Un individuo paga* 6,80 *ptas. por* 8 kg. *de pan y* 4 *l. de vino y después* 4,60 *ptas. por* 6 kg. *de pan y* 2 *l. de vino a los mismos precios; ¿cuáles eran éstos?*

Para mayor claridad escribiremos el esquema de la cuestión:

8 Kg. de pan + 4 l. de vino = 6,80 ptas.
6 » » + 2 » » = 4,60 »

Si las cantidades de una de las sustancias hubieran sido iguales, la diferencia de coste dependería de la diferencia de la otra, y podríamos hallar su precio; pero para obtener esa igualdad con relación al vino, basta suponer duplicada la segunda compra, y obtenemos:

8 Kg. de pan + 4 l. de vino = 6,60 pts.
12 » » + 4 l. » = 9,20 »
y restando 4 » » = 2,60 »
de donde 1 » » = 260 : 4 = 0,65 »

Ahora el problema pudiera terminarse fácilmente, pero es más instructivo y tal vez más rápido operar análogamente igualando las cantidades de pan, para lo cual basta multiplicar por 3 la primera compra y por 4 la segunda, obteniendo:

	24 Kg. de pan +	12 l. de vino	=	19,80 pts.	
	24 » » +	8 » »	=	18,40 »	
restando		4 » »	=	1,40 »	
		1 l. de vino = 1,40 : 4	=	0,35 »	

Notaremos que este procedimiento es una *aritmetización* del *método de reducción* del álgebra al cual prepara, y al cual sin dificultad ninguna sustituye. Su exposición debe hacerse gradualmente, empezando con un problema en el cual las dos cantidades de una misma sustancia sean iguales, y pasando a otro en que esta igualdad se obtenga como en el primer caso, considerado por nosotros por una simple multiplicación (o división).

Observación.—Son tan variados los procedimientos de resolución de problemas aritméticos que no creemos naturalmente haber agotado la materia, y remitimos al lector a las obras especiales que tratan el tema.

45. Métodos especiales de demostración en Geometría.—Mientras en Aritmética casi no se emplean más que los métodos generales debido a la sencillez de la materia con que se opera (los números), en cambio, las variadísimas relaciones derivadas de la forma, la posición y la extensión en Geometría, hacen que se utilicen numerosos métodos de demostración, limitándonos, sin embargo, nosotros a considerar sumariamente aquellos que son más empleados en la enseñanza elemental y primaria.

a) *La superposición.*—Se emplea generalmente para demostrar la igualdad de las figuras o de sus elementos. Ejemplo de ello tenemos en la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, de los ángulos formados por dos paralelas cortados por una secante, de la equidistancia entre paralelas, de los triángulos, etc. Es de notar que tales superposiciones deben hacerse *realmente* con figuras construídas *exprofeso*, y aun puede utilizarse el *Cinematógrafo Geométrico* para *ver* cómo se verifica la superposición. Conviene, además, graduar este método, limitándose a la simple percepción al principio, pero llegando al final a explicar el porqué de la superposición de cada uno de los elementos que van coincidiendo.

b) *La composición y descomposición.*—Análogo a la síntesis y el analisis de los métodos generales, difiere de ellos en que debe hacerse intuitivamente. Así, tenemos como ejemplo interesante la obtención de las áreas de las figuras planas en las cuales un corte y un movimiento transforman un paralelogramo en rectángulo, un triángulo en paralelogramo, un polígono regular en rectángulo. Lo mismo ocurre en los volúmenes.

c) *La simetría.*—La consideración de la simetria facilita grandemente las demostraciones. Sean ejemplo de ello el estudio de las propiedades del rombo y rectángulo, y la propiedad de las circunferencias tangentes de tener el punto único común sobre la línea de los centros, eje de simetría.

d) *Los límites.*—El procedimiento del paso al límite que pudiera parecer difícil, pierde toda dificultad desde el momento que la especie de movimiento que supone le hace interesante para el niño. Citaremos como ejemplos la propiedad de la tangente, perpendicular al radio, que se obtiene al considerar a aquella recta como límite de una secante y la obtención de la longitud de la circunferencia, el área del círculo, y las áreas y volúmenes de conos y cilindros por los correspondientes límites.

46. Métodos especiales de resolución de problemas en Geometría.—La grandísima variedad de ellos que existe no nos deja sino la dificultad de la elección, limitándonos a los más usuales

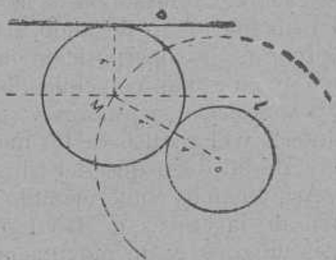


Fig. 17.

dentro de los conocimientos elementales. Como tales consideramos:

a) *Los lugares geométricos.*—Un problema geométrico se propone en último término la determinación de un punto que satisfaga a ciertas condiciones. Ahora, tales puntos suelen estar sobre líneas determinadas (lugares geométricos), cuya intersección da el punto buscado. Ejemplos corrientes son en Geometría, el hallar el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos y construir un triángulo, dados A, *h* y *a*.

Ejemplo.—*Trazar una circunferencia de radio dado y que sea tangente a una circunferencia y a una recta dadas.* (Fig. 17). Sean *r* el radio dado, *o* la circunferencia y *a* la recta. Para trazar la circunferencia pedida bastará determinar su centro. Este, por distar de la recta *a*, la longitud *r* estará sobre la recta paralela a ella trazada a esa distancia (son dos las paralelas), y por ser centro de la circunferencia tangente a la dada estará sobre una circunferencia concéntrica con ella y trazada con un radio igual a la suma (o la diferencia) de los radios. La intersección de ambas líneas determina el centro buscado, pudiendo haber desde ninguna hasta ocho solución.

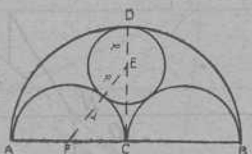


Fig. 18.

b) *Método algebraico.*—Consiste en determinar el punto buscado mediante una relación cuantitativa que, considerada como una incognita, se obtiene mediante una ecuación. Una vez hallado su valor se construye geométricamente.

Ejemplo 1.° *Siendo* C *el punto medio de un segmento* A B, *se han trazado sobre* A B, A C *y* C B *como diámetro tres semicircunferencias. Trazar la circunferencia tangente a ellas* (fig. 18).

El centro del círculo que buscamos habrá de estar sobre el eje de simetría de la figura, que es C D $\perp$ A B; nos bastará, pues, determinar su distancia x al punto D. Llamando r al radio F C, los lados del $\triangle$ rectángulo F E C son F C $= r$, F E $= r + x$, y C E $= 2r - x$, y aplicando el teorema de Pitágoras obtendremos $(r + x)^2 = = r^2 + (2r - x)^2$, y desarrollando los valores de los paréntesis obtenemos $r^2 + 2rx + x^2 = r^2 + + 4r^2 - 4rx + x^2$; suprimiendo los términos comunes a los dos miembros de la igualdad queda $2rx = 4r^2 - 4rx$. Simplificando se obtiene $x = 2r - - 2x$; de donde $3x = 2r$, y $x \frac{2}{3} r$, que nos permite determinar fácilmente el punto E.

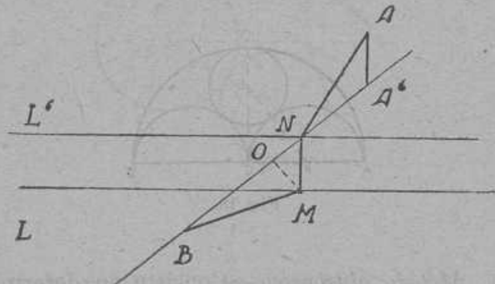


Fig. 20.

c) *Los movimientos.—La traslación paralela* y el *giro* de elementos de una figura pueden ser muy útiles para simplificar los problemas y por tanto resolverlos.

Ejemplo 1.°—*Sobre las orillas de un canal rectilíneo hallar el emplazamiento de un puente que equidiste de dos puntos situados a distinto lado del mismo.*

Sean (fig. 19) A y B los puntos dados. Si suponemos el problema resuelto siendo MN el emplazamiento, y hacemos experimentar a la parte superior de la figura una traslación paralela que lleve el punto N en M, el punto A caerá en A' y el punto M equidistará de A' y B. Estará, por tanto, en la mediatriz de BA', y en su intersección con L.

Ejemplo 2.° *Construir un △ equilátero cuyos vértices estén sobre tres paralelas dadas.*

ANALISIS.—Sea en la fig. 20: $l \parallel l' \parallel l''$ y A B C el △ pedido.

Uno de los vértices, B, puede ser elegido arbi-

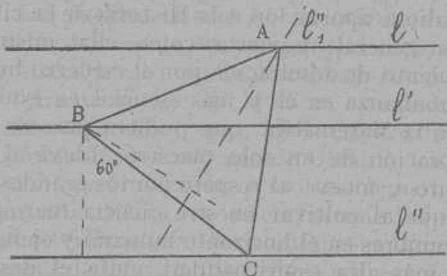


Fig. 20.

trariamente. Ahora, si hacemos girar 60° alrededor de B el lado B C y la recta l'', el lado B C coincidirá con B A y la recta l'' pasará por el punto A.

Construcción.—Hacer girar la recta l'' 60° alrededor de B; el punto V, en que corta a l, es otro de los vértices del △. Con radio B A y centro B se corta a l'' en C, dándonos el tercer vértice.

Una información bastante completa se encontrará en el libro de F. G. M. «Exercices et Problèmes de Geometrie», y en un folleto de Patersen sobre el mismo asunto, y algunas indicaciones útiles en nuestro *Nuevo tratado de Geometría.*

8.—Evolución de la Matemática.

47.—Importancia de su conocimiento.—El estudio histórico de una ciencia que tanta influencia ha ejercido en la marcha de la Humanidad y tanto ha contribuído a su elevación espiritual constituye una valiosa aportación a la Historia de la civilización en general; despierta, como ella misma, un sentimiento de admiración por el esfuerzo humano y de confianza en él, y más esencial es este estudio, en la Matemática, que pudiera parecer lógica elucubración de un solo maestro. Lleva al conocimiento y mueve al respeto por los grandes hombres, que al cultivar nuestra ciencia fueron también cumbres en el horizonte humano y ejemplares de la más alta espiritualidad; evita el desánimo de los investigadores actuales, mostrándoles el triunfo de los antiguos tras de una larga prueba; provoca un repaso y síntesis de los conocimientos adquiridos situándolos a lo largo de las vías naturales de la evolución científica, y mostrando la complejidad creciente y el progreso sin límites de que es susceptible nuestra ciencia, estimula la capacidad de invención y evita la ridícula pedantería de los que creen saberlo todo, y es, sobre todo, base del método llamado histórico, de considerable valor en la enseñanza.

Al aparecer en los últimos años de la vida escolar los intereses sociales y especialmente el deseo de conocer e imitar a los grandes hombres, la historia de la Matemática puede mostrar ejemplares humanos del más alto valor.

La evolución de la ciencia en los diferentes pueblos

A. *La Edad Antigua*. En la *Edad Antigua* podemos establecer una línea que sigue de Babilonia a Egipto, culmina en Grecia y desciende y acaba en Roma.

48. Los pueblos salvajes.—Es notable el hecho de la existencia en la mayor parte de estos pueblos de sistemas de numeración a base del 5, el 10 ó el 20. Un personaje de Homero cuenta los rebaños de focas de 5 en 5. Los esquimales, las tribus africanas, los salvajes de Oceanía y los del Africa del Sur empleaban y muchos siguen usando el sistema de base 5, mientras que los *mayas* y muchas tribus de Norteamérica emplean el de base 20, de la cual quedan vestigios en Europa en el *quatre vingts* francés y el *score* inglés. La relación evidente de estas bases con el número de dedos del hombre, y las ventajas que sobre el sistema de base 10 tiene el de base 12, hacen desear a algunos historiadores que el hombre debiera haber tenido seis dedos en cada mano.

49. Babilonia y Asiria.—Varios miles de años antes de Jesucristo alcanzaron un gran nivel cultural los pueblos establecidos en las orillas del Eúfrates. Poseían un curioso sistema de numeración que empezaba por ser de base 10 para continuar siendo de base 60, quedando de esto último recuerdo en nuestra división de grados y ángulos. Los babilonios, grandes astrónomos, calcularon primeramente el año de 360 días, y la fácil división de la circunferencia en 6 partes, les impuso el *sextante* que dividieron en 60 partes iguales, nuestros actuales *grados*. Sus fracciones eran de denominador 60, y consecuencia de ellas fué, miles de años después, el valor dado por Ptolomeo para

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$$

Para combinar las diferentes unidades de su sistema de numeración, empleaban la suma y la multiplicación, y así siendo

$1 = \vee$ y $10 = <$ 100 era $\vee <$ y 23 estaba representado por $<< \overset{\vee\vee}{\vee}$

Conocieron el valor relativo de las cifras, y empleaban el *cero* como consecuencia, representándolo por $\overset{<}{<}$

Conocieron y utilizaron las cuatro operaciones fundamentales, incluso la potenciación, habiéndose encontrado ladrillos conteniendo tablas de multiplicar, de cuadrados y cubos, así como de operaciones referentes a la Aritmética mercantil.

Poseían un sistema métrico bastante completo. La unidad fundamental de longitud era el *dedo* = = 1,65 cm., y sus múltiples *el pie* = 20 dedos; *el codo* = 30 dedos; la *percha* = 12 codos; la *cuerda de agrimensor* = 120 codos, y la *legua* = 180 cuerdas. Nótese el uso de los múltiples y divisores de 60 y la clase de arte a que alude la cuerda de agrimensor.

Para el peso tenían el *grano* = 46 mg.; el *siclo* = 8,416 g., y el *talento* = 30,5 kg., nombres que aplicados a la moneda se siguieron utilizando miles de años después.

En cuanto a la moneda emplearon primeramente la *cebada*, y 3.000 años antes de Jesucristo utilizaban barras de oro y plata siendo de 6 hasta 12 a 1 la relación entre el valor de ambos metales, denotando una depreciación del último, como ocurre en la actualidad.

50. Los egipcios.—En este curioso pueblo se superponen realmente dos civilizaciones, la *sacerdotal*, que aspiraba a menteneerse secreta, y la *demótica* o popular. Emplearon la numeración decimal, representando con signos especiales las diferentes unidades que se repetían al expresar cada número, por lo cual su numeración era simplemente aditiva. No sabían multiplicar, y esta operación la reducían a duplicaciones sucesivas combinadas con las sumas precisas, aunque esto creemos que sólo podría referirse a la segunda de las civilizaciones indicadas, pues los sacerdotes debieron tener conocimientos análogos a los nuestros, ya que según parece tenían como unidad de longitud el codo; sagrado, ¡igual a la diez millonésima parte del radio polar terrestre! Su sistema métrico relacionaba, como el nuestro el volumen con el peso, siendo la unidad ponderal el peso de un codo cúbico de agua.

Pero el mayor mérito de los egipcios está en haber iniciado el impulso creador de nuestra Geometría, obligados a medir sus campos por las inundaciones del Nilo, lo cual originó la Agrimensura. El papiro de Ahmes que refleja conocimientos anteriores en 4000 años antes de Jesucristo, aunque estuviese escrito hacía el 2000, da idea del estado de la ciencia matemática en aquella época, aunque sigamos opinando que sólo de la popular. Basta notar que señala para área del triángulo isósceles la fórmula $\frac{ab^1}{2}$, es decir, el semiproducto de la base por un lado.

Conocieron, según Ahmes, las fracciones reducidas a las más sencillas, y en general de numerador *uno*, reduciéndose a éstas por suma las más complicadas, así $\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. En cambio hay síntomas en el papiro de la existencia de conocimientos superiores: progresiones, como muestra un problema muy repetido después en el curso de los tiempos: 7 personas tenían cada una 7 gatos, cada uno de los cuales se comió 7 ratones, cada uno de éstos se hubiese comido 7 granos de cebada, que cada grano de cebada hubiese dado 7 medidas de trigo. El cálculo de la cantidad de cebada salvada por el celo de los gatos, tiende a justificar el culto que se les tributaba. También conocían y utilizaban la semejanza, como demuestra el uso de la cuadrícula para el trazado de los bajorrelieves y pinturas, uso conocido por haberse encontrado en una de las pirámides un trabajo preparado en esta forma. Tenían un año de 360 días dividido en semanas de 10 días.

51. Grecia.—El gran mérito de los egipcios consistió en haber sido los maestros de los sabios griegos, en cuanto a la Geometría se refiere, ya que la enorme diferencia con relación a sus adelantos en Aritmética, pueda deberse a su genio especial, pero también sin duda fué debida a las enseñanzas de los egipcios.

En la numeración empezaron los griegos por designar los números con la letra inicial de su nombre, pero acabaron por representar los 10 primeros números por las 10 primeras letras de su alfabeto (intercalando una, cuya forma presenta por cierto bastante analogía con nuestra cifra 6 a la que representaba). Las letras siguientes representaban las decenas de 20 a 100, y las siguientes, con una letra suplementaria las centenas. Así $\omega = 800$. Los millares eran representados por las mismas letras con una coma delante: así $,\beta = 2.000$. Además era $10.000 = \mathrm{M}$ y para 2.000 escribían $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$. etcétera. Las fracciones eran representadas escribiendo el numerador, cuando era distinto de la unidad, con un acento, y a continuación el denominador con dos acentos, así:

$$\frac{1}{4} = \delta'' \quad {}^{3}/_{4} = \gamma'\,\delta'' \quad \frac{1}{112} = \rho\iota\beta'' \quad \frac{17}{21} = \iota\zeta'\ \kappa\alpha''$$

Con tal sistema de numeración, las operaciones les eran muy difíciles y debieron de emplear *abacos* con columnas para las unidades de los diferentes órdenes en los que colocaban piedrecillas. A ello alude este pensamiento de Solón: *En la amistad de un tirano, un hombre es como la piedrecilla de calcular, que tan pronto vale mucho como poco.*

Tal importancia tiene Grecia en la evolución de la Matemática que no podemos por menos de enunciar sus diferentes escuelas, tomando las fechas correspondientes redondeadas para mayor claridad.

a) *Escuela Jónica*.—Su representante es *Thales de Mileto* (650-550 antes de Jesucristo). Uno de los Siete Sabios de Grecia, estudió en Egipto, donde parece que midió la altura de las pirámides por su sombra. Se le atribuye el estudio del triángulo isósceles, las propiedades del diámetro; el primer caso de igualdad de triángulos que utilizaba para hallar la distancia de un barco a la orilla, el valor del ángulo inscrito en una semicircunferencia, y el teorema fundamental de los triángulos semejantes.

Uno de sus discípulos, Anaxágoras, emprendió el cálculo de π.

b) *Escuela Pitagórica*.—También aprendió *Pitágoras* en Egipto y hacia 550 fundó su Escuela, que duró siglos, influyendo incluso en el gobierno de los pueblos, pues tenía algo de orden monástica y de masonería. Su distintivo era el pentágono estrellado, y se refiere que un pitagórico pobre murió recogido en una humilde casa, dejando a sus caritativos moradores solamente su distintivo, que encargó colocaran en sitio visible. Un pitagórico que conoció por el distintivo la obra caritativa, recompensó a sus autores.

La fama de Pitágoras se funda en su teorema, inspirado, al parecer, por la *cuerda de nudos* que los egipcios empleaban para el trazado de perpendiculares, cuerda con la que formaban un triángulo rectángulo cuyos lados medían 3, 4 y 5 unidades. Pitágoras hallo la relación $3^2 + 4^2 = 5^2$, y como los griegos reducían el cálculo a figuras geométricas, lo enunció como aún suele hacerse en nuestras Geometrías. Lo generalizó, además, para los números comprendidos en la forma $2n+1$, $2n^2+2n$, $2n^2+2n+1$, donde n es un número entero cualquiera. Lo generalizó también para las áreas, aunque parece ser que sólo para el caso del triángulo rectángulo isósceles en que la demostración es intuitiva. La que suele darse, fué obtenida por Euclides más de dos siglos después.

Halló también Pitágoras la suma de los ángulos de un triángulo, dando la demostración aún corriente y como aplicación de su teorema al cálculo de la diagonal del cuadrado se encontró con la $\sqrt{2}$, que por carecer para él de toda significación intuitiva, fué desechado como número *irracional*, prohibiendo se hablase de tales números. Halló diversas áreas y estudió los poliedros regulares ordinarios, que por ello reciben el nombre de sólidos pitagóricos.

Uno de sus discípulos más notables fué *Architas de Tarento*, que ejercitó su ingenio en el problema de la duplicación del cubo, cuestión notable por su origen. Dícese que habiendo estallado una epidemia consultaron al oráculo de Apolo en Delos qué deberían hacer para que cesase. El dios pidió un altar doble que el que tenía. Era éste un bloque cúbico y pensaron satisfacerle colocando encima otro bloque igual. No cesó la epidemia, y el oráculo, ante las reclamaciones, arguyó que el altar no era ya cúbico. Construyeron, parece, otro cubo de doble arista, y como no cesase la epidemia ante nuevas protestas, objetó el oráculo que el altar no era doble sino 8 veces mayor. Precisada así la cuestión, el problema de construir un cubo doble que otro dado (tan fácil para el cuadrado) ocupó a los principales sabios griegos que emplearon ingeniosísimos procedimientos, continuados por los sabios modernos, quienes han demostrado que no puede resolverse si se pone la condición de hacerlo gráficamente, utilizando sólo la regla y el compás.

c) *Escuela Sofística.* (450 →).—Al mismo tiempo que los problemas filosóficos de imposible resolución, plantearon los sofistas cuestiones matemáticas que tampoco la tienen en las condiciones ordinarias: La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, imposibles de realizar con sólo el compás y la regla. Trabajando con intención de resolver el primer problema, se formó el método de la *exaustación* que procede por aproximaciones sucesivas, etc. *Hipócrates* consiguió un triunfo resonante hallando para sus *lúnulas* la equivalencia de una figura rectilínea. Al mismo tiempo *Zenón*, de Elea, trataba de combatir la divisibilidad infinita del espacio y el tiempo con sus célebres paradojas especialmente la de que Aquiles, el de los pie ligeros, no podía alcanzar a una tortuga, pues cuando Aquiles hubiese recorrido la distancia que los separaba, la tortuga habría recorrido algun espacio, y así sucesivamente.

d) *Escuela Platónica* (400 a. J. C.).—Fué *Platón* el fundador de la célebre Academia, llamada así por dar su enseñanza en los Jardines de Academo, a cuya entrada colocó la célebre prohibición: *Nadie entre sin saber Geometría.* Aun cuando la figura de Platón descuella en la Filosofía, contribuyó también al desarrollo de la Matemática con su procedimiento de análisis (34) su estudio de las cónicas y sobre todo aplicando de una manera rigurosa la Lógica a los estudios matemáticos, forzado a ello tal vez por los sofistas y preparando así la magnífica obra de la Escuela siguiente.

e) *Escuela Alejandrina.*—En Alejandría, fundada hacía poco por Alejandro, el genio griego, había reanimado la vieja cultura egipcia, y el más alto representante de esta Escuela fue *Euclides* (300 a. J. C.) que presentó al mundo, por vez primera un tratado completo de *Geometría* perfectamente estructurado, desde el punto de vista lógico, haciendo alcanzar así a la antigua y modesta Agrimensura, la categoría de ciencia definitivamente formada. La obra de Euclides no fué solamente la más perfecta durante todo el resto de la civilización greco-romana, sino que hasta nuestros días ha sido enseñada en las escuelas secundarias, principalmente en las inglesas, como modelo insuperable. Al mismo tiempo, el propio Euclides inventaba el procedimiento de las divisiones sucesivas para hallar el m. c. d. de dos números, definía los números primos y demostraba su ilimitación. *Eratóstenes,* formó su famosa criba y midió por un ingeniosísimo procedimiento el radio terrestre, determinando la diferencia de inclinación de los rayos solares en el mismo instante en dos puntos situados sobre el mismo meridiano y cuyo distancia conocía. *Arquímedes,* en Siracusa calculaba el valor de π por el método de los perímetros, y determinaba la relación entre los volúmenes del cilindro, cono y esfera de diámetros y alturas iguales, constituyendo una figura que fué grabada sobre el monumento elevado a su memoria por Metelo, el general romano que mandaba a las tropas que le asesinaron en el asalto a la ciudad de Sicilia.

Un segundo florecimiento tuvo la Escuela alejandrina. Hacía 100 d. J. C., florecieron *Menelao,* que estudió principalmente la Geometría esférica, y estableció el teorema que lleva su nombre y *Ptolomeo*, autor del sistema geográfico tantos siglos dominante, confundiéndose ya cada vez más la corriente griega con la romana de que hablaremos a continuación, no sin citar antes un caso curioso. Junto a esta brillante y admirable cultura, el Egipto oficial, que había hecho poco menos que sagrados sus cuestionarios y exámenes seguía estancado en la modestísima ciencia llena de puerilidades y aun inexactitudes que constituían el papiro de Ahmes, 2500 años antes.

52. Roma.—El carácter eminentemente práctico de los romanos hizo que en ellos la Matemática quedase reducida a lo que tiene de arte, la Aritmética al cálculo y la Geometría a la agrimensura. Su sistema de numeración era, a juzgar por los nombres de los números, el decimal, pero por sus cifras era mixta como se sabe, y por no conocer el *valor relativo* de las cifras, su cálculo era muy penoso y lo hacían por medio de abacos. Filas de alambres representaban los diferentes órdenes de unidades, y anillas engarzadas en ellos correspondían a las unidades de cada orden (o series de ranuras y clavijas); pero a fin de no emplear 9 clavijas o anillas para cada orden, dividían éste en dos partes, el inferior con cuatro clavijas y el superior con una, que valía por cinco, de aquí tal vez sus cifras que representan una y cinco unidades de los tres primeros órdenes. Empleaban las fracciones, pero solamente de denominador 12, o sus divisores, tal vez debido a que eran 12 las onzas que constituían una libra (relación continuada en los 12 chelines que forman una libra esterlina), de tal modo que en lugar de doceavos decían onzas, como muestra el siguiente curioso pasaje de Cicerón: *Dime, hijo de Albano, si de 5 onzas quitamos una, ¿que queda?*—$^1/_3$—*¿Y si añadimos una onza?* —$^1/_2$—*Muy bien, puedes administrar tu hacienda*. Conocieron los repartimientos proporcionales aplicándolos a la partición de herencias.

En Agrimensura cometieron errores análogos a los de los egipcios. Para área del triángulo equilátero daban como fórmulas

$$\frac{1}{2}a^2,, \quad \frac{1}{2}\left(a^2 + a\right) \text{ y } \frac{13}{30}a^2$$

Sus tratadistas entroncan con la Escuela de Alejandría. *Nicomaco* (100 d. J. C.) escribió una *Introductio Arithmeticae* que copió más tarde *Boecio*. *Diofanto*, clasicó por la resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado, nos dejó un cuadro bastante exacto de los conocimientos de aquellos tiempos en que si multiplicaban, mediante los abacos, difícilmente, nadie sabía dividir, y acudían a las restas sucesivas. La especialidad de Diofanto fué la resolución de ecuaciones, aun cuando acudía a procedimientos casi infantiles, como series de sumas y restas para verificar la *transposición*, y desechaba las soluciones negativas.

Finalmente, un hijo póstumo de la civilización romana, fué Boecio (500 d. J. C.). Autor de un tratado filosófico titulado *De consolacione*, escribió además un tratado de educación adoptado por el rey bárbaro Teodorico, origen del *Trivium y el Cuadrivium* que dominó durante toda la Edad Media, y en el cual aparecen por primera vez en Europa las cifras representativas de los 9 primeros números (*ápices* de Boecio), y que, aun cuando sin el cero, hubieran podido hacer adelantar considerablemente el arte del cálculo en Europa.

B.—*La Edad Media*

53. Tres corrientes principales fluyen todo a lo largo de la Edad Media para reunirse en nuestra Europa occidental a principios de la Edad Moderna. Estas corrientes son: la de *la India*, impulsada tal vez desde Alejandría; la *civilización árabe* que la recoge, y *los reinos cristianos medioevales* que tratan penosamente de elevarse, con un espíritu nuevo, sobre las ruinas de Roma.

54. La India.—Muy pronto debió alcanzar la numeración en la India un gran desenvolvimiento, puesto que sus libros sagrados emplean números fabulosamente grandes. Sin embargo, solamente entre el siglo V a VI (d. de J. C.) aparece formada su numeración decimal, utilizando el valor relativo de las cifras, lo cual les permitía realizar todas las operaciones sin necesidad de ábacos. La fecha en que aparecen las cifras y el hecho de que Boecio las conociese, aun cuando tal vez con otras formas, permiten suponer que fueron importadas de Alejandría. El mismo Ptolomeo ya citado, parece que utilizó la letra griega O = *o micrón* para representar el cero que los indios utilizaron amplia y sistemáticamente realizando como dice un autor *el descubrimiento matemá-*

tico que más ha contribuído al progreso de la inteligencia, descubrimiento que no llegó a Europa hasta seis siglos después, y gracias a los árabes. Las cifras, pues, debieran llamarse índicas en lugar de arábigas. El principal matemático indio, fue Bhaskara (1.200 de J. C.), cuya resolución de la ecuación de segundo grado es todavía utilizada, y demostró por semejanza el teorema de Pitágoras. Aceptaban las soluciones negativas como válidas y distinguían las diferentes incógnitas de un mismo problema, representándolas con los nombres de los colores.

Admitían y manejaban corrientemente los números enteros, fraccionarios e inconmensurables con los que efectuaban toda clase de operaciones en tablas blancas cubiertas de harina roja, lo cual les permitía borrar los números intermedios, por lo que hacían desaparecer inmediatamente ciertas operaciones que nosotros dejamos escritas, como los productos parciales de la multiplicación, y por este motivo no pudiendo repasar las operaciones acudían constantemente a la *prueba por nueve*.

En cambio, no era muy grande la precisión de sus conceptos, como en el de proporcionalidad. Así, resolvían por regla de tres el problema siguiente: *Una esclava de dieciséis años cuesta 32 niskas; ¿cuánto vale una de veinte años?*

55. Europa cristiana.—La escasa cultura matemática de los romanos, estuvo a punto de desaparecer por completo bajo los bárbaros. La Iglesia y Carlomagno intentaron renovar la instrucción y aun el Emperador franco en su efímera tentativa, hubo de servirse de monjes, que continuaron por todas partes la obra de la cultura, aunque principalmente en su aspecto monástico. Apenas si en la Europa propiamente medieval se pueden presentar unos cuantos nombres de consideración. Es el primero San Isidoro, de Sevilla (600), quien en su *Etimologías* expone las referentes a la Matemática, que le lleva en su entusiasmo a exclamar: *si se suprimen los números, todo se destruye*. El venerable Veda estableció, bajo los auspicios de Carlomagno, escuelas en que se practicaba el cálculo, auxiliándose especialmente de los dedos, con recursos muy ingeniosos. Y el monje *Alcuino* (hacia el año 1.000) escribió una colección de problemas «para avivar la mente», en el que se encuentran los clásicos del galgo y la liebre, la herencia y los gemelos, la cabra, el lobo y la cesta. Por el mismo tiempo existía en Vich una célebre Escuela de Matemáticas, de la que salió el célebre Gerbert, más tarde Papa. Posteriormente, se fué dejando sentir la influencia árabe sobre todo a través de España, generalizándose las cifras indias, aun en forma incierta, por lo que casi en el siglo XIV se prohibió a los comerciantes florentinos el uso de tales cifras en Teneduría, debiendo emplear las romanas o escribir los números en letras. (1) Y con esto se llega al verdadero principio de la Edad Moderna en el terreno cultural.

56. Los árabes. Es maravillosa la historia de este pueblo, que en un siglo pasó de ser un conglomerado de tribus miserables e ignorantes a constituir un gran emporio de civilización y de cultura, reuniendo la greco-romana, egipcia e índica para trasmitirlas a la Europa moderna. Ya en el año 813, *Alchwarizmi* dió orígen al Alge-

(1) *Non per cifras sed per literas claras.*

bra, con su tratado de *Aldschebr Walmukabalah* (transposición y reducción), en la que se había perdido el simbolismo indio, pero que trataba completamente las cuestiones. Calculaba sin ábacos, gracias a las cifras indias, y estudiaba la Astronomía (de él derivan dos nombres: Algoritmo y Algebra).

En el general florecimiento descollaron los árabes españoles, y en 1150 Dschabir ibn Aflah, de Sevilla, escribió un tratado de pura trigonometría y Alkalsadi, de Granada, en 1482, un tratado de Algebra, superior al de Alchwarizmi, por conservar el simbolismo algébrico, y que fué seguido después por toda Europa. Algún tiempo antes, Juan de Sevilla había traducido del árabe un *Liber Alghoarizmo* que alcanzó gran influencia en la cultura occidental.

57. La Edad Moderna.—Puede decirse, que en esta época la cultura es exclusivamente europea. En el siglo XIV, los italianos debieron llegar a tener que contar grandes cantidades, y del aumentativo de la palabra *mil* hicieron el *millón*. A principios del XVI, el entusiasmo por las cuestiones matemáticas era enorme en Italia, concediéndose toda clase de honores y recompensas a sus cultivadores, y verificándose los célebres *torneos matemáticos*, en los cuales dos hombres de ciencia se desafiaban a resolver un cierto número de problemas, disputándose las soluciones solemnemente ante testigos de los dos bandos, generalmente en una iglesia, y quien poseía una fórmula (p. c. de la ecuación de segundo o tercer grado) tenía gran ventaja sobre su rival; de aquí que se mantuvieran secretas y aun procurasen apropiárselas de unos a otros (caso de Tartaglia y Cardano).

Los artistas también tomaban parte en estas cuestiones. Leonardo de Vinci construyó un aparato para la cuadratura del círculo, consistente en un cilindro de altura igual a la mitad del radio, en el cual el desarrollo del área lateral es igual a la del círculo de la base. Y Alberto Durero, que transformaba los círculos en elipses acortando proporcionalmente las *ordenadas*, obtenía el desarrollo de los poliedros regulares y semiregulares.

En 1600, Stevin, de Brujas, expone su invención de los números decimales en un folletito de siete páginas (uno de los más trascendentes de la historia) con la notación $\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 3 & 1 \end{smallmatrix} = 5{,}931$, en donde propugnaba el sistema métrico decimal y predecía su triunfo. Poco después Neper y Briggs inventaron sus logaritmos *que duplicaron la vida del astrónomo*, según Laplace, pero que tardaron más de siglo y medio en ser enseñados en las Escuelas Superiores. Hacia la misma fecha, se vulgariza el método italiano de dividir, que actualmente usamos; Pascal, escribe a los dieciséis años un tratado sobre las cónicas, y antes, aun desprovisto de libros por orden paterna, su genio le lleva a *inventar* gran parte de la Geometría. Cavallieri, con su famoso principio (véase nuestro Nuevo tratado de Geometría), sienta las bases del cálculo integral de áreas y volúmenes; Euler, ya en el siglo XVIII, estudia los poliedros y enuncia su teorema, al mismo tiempo que Kramer, introducía en el Algebra las determinantes.

Iba a todo esto, precisándose el simbolismo matemático, siendo de los últimos signos adoptados el : debido a Leibnizb, sin que todavía se haya llegado a la unificación, pues los ingleses siguen usando ÷ para dividir, y el punto, sin cero delante, en lugar de la coma para los decimales. La discusión del postulado de Euclides, con la creación de las Geometrías no euclidianas de Lowalchewski (1829), Bolyai (1800) y Riemann, y la Geometría axiomática de Hilbert, Peano, etc. marcan el límite actual de la evolución de las Matemáticas elementales, mientras el conjunto de la Matemática sigue su evolución admirable extendiendo su campo de acción cada día y cultivando con más esmero el que de antiguo tiene conquistado.

Líneas generales de su evolución

58. Como se ha visto por la exposición anterior de los hechos históricos, no cabe sintetizar en una línea ascendiente la evolución de la Matemática: ésta se eleva o desciende con el oleaje histórico.

En relación con esto encontramos la teoría de Spengler de las culturas que evolucionan según las mismas leyes en períodos análogos, ley fácil de comprobar en la historia de la Matemática. Ha de pasar ésta, según la conocida teoría de Augusto Compte, por una fase mágica o teológica, que, en efecto, parece se dió en Asia y Egipto, y que alcanzó gran desarrollo en Grecia con Pitágoras. Para éste, los números tenían una significación: el 4, era un número perfecto ($4 = 2 + 2 = 2 \times 2$), representaba al alma humana; el 5, era la causa del calor; el 6, la del frío; el 7, la del pensamiento, la salud y la luz; el 8, la del amor y la amistad. En los sólidos pitagóricos el tetraedro tenía una misteriosa relación con el fuego; el octaedro, con el aire; el cubo, con la tierra; el icosaedro, con el agua, y el dodecaedro, con el Universo. El pentágono estrellado era un mensajero o portador de felicidad.

Varios cientos de años después, en la cultura occidental, el monje *Alcuino* consideraba al 6 el número perfecto, igual a la suma de sus divisores, y por eso la creación se había desarrollado en seis días. El 8, es defectivo, por no igualarle la suma de sus divisores, y *por ello*, corresponde con el número de almas humanas encerradas en el arca de Noé. El pentágono estrellado, volvió a ser considerado en la Edad Media provisto de virtudes mágicas, y se le llamaba cuño, marca o pie de hechiceros.

Nótese también, cómo se reproducen los problemas clásicos con fines idénticos y cómo el radio terrestre ha sido determinado *originalmente* cada vez por egipcios, griegos y europeos.

59. La definición de la evolución en general dada por Spencer, puede aplicarse a la Matemática: *El tránsito de una homogeneidad incoherente e indefinida a una heterogeneidad coherente y definida.*

Nótese cómo entre los mismos griegos, la Aritmética y la Geometría se confundían a menudo, haciendo el cálculo principalmente por medios gráficos, y aun en nuestros días es corriente incluir en el Algebra cuestiones puramente aritméticas como el cálculo con los números negativos y las progresiones.

Pero el progreso se realiza, según Spencer, por un proceso simultáneo de diferenciación e integración progresivas. La primitiva Matemática indiferenciada, se resuelve en Geometría, Aritmética y Algebra, y para seguir el curso de una sola de ellas, pronto la Geometría se diversifica en *Métrica* (que pudiéramos definir como la Geometría que estudia las transformaciones de figuras que dejan invariable la razón de dos segmentos), *Proyectiva* (que considera las que dejan invariable la razón doble) y *Descriptiva* que realiza en el plano el estudio de las relaciones espaciales. Al mismo tiempo, se verifica una integración de que son ejemplo el Análisis Matemático, en que los conceptos numéricos y espaciales se consideran simultáneamente, y la Geometría Analítica fundada por Descartes, en la que se hace el estudio de las formas geométricas por medio de las funciones algebraicas.

60. Otra de las características del progreso, según Pelletan, consiste en la espiritualización, que en nuestro caso consistiría en *la abstracción progresiva* fácilmente comprobable con los hechos siguientes: la Geometría quedó formada el año 300 (a. de J. C.); la Aritmética, de 1100 a 1200, y el Algebra, hacía 1.600 con Viete.

Existen las excepciones de Diofanto, siglo V, y AlkWarismi, siglo IX; que trataron de cuestiones algebraicas; pero nótese que se refirieron principalmente al problema concreto y práctico de la resolución de ecuaciones.

Al mismo tiempo y como consecuencia natural de la abstracción, se intensifica *el rigor lógico*, tanto más necesario, cuanto más lejos se halla el investigador del soporte intuitivo, llegándose por ello en las Matemáticas elementales, a construir lógicamente la Aritmética, (pudiendo servir de ejemplo de rigor lógico el teorema de la igualdad de conjuntos que se verifica cualquiera que sea el orden en que se coordinen) y a la formación de las diferentes geometrías rigurosamente desarrolladas que han llevado a conceptos tan trascendentales como los espacios de n dimensiones.

Otra consecuencia de la abstracción, es la *generalización* patente, por ejemplo, en la sucesiva admisión de las diferentes clases de números enteros, fraccionarios, inconmensurables e imaginarios, como susceptibles de ser sometidos a las mismas definiciones y a las mismas leyes del cálculo convenientemente generalizadas.

Finalmente, hemos de señalar la *aplicación* creciente de la Matemática a la vida ordinaria, a las artes, y sobre todo, a las ciencias, siendo ya la Mecánica y Astronomía casi puramente matemáticas; en gran proporción lo es la Física, y sigue de cerca la Química, y aun la Biología se transforma en este sentido, alcanzando con ello la categoría de ciencias, ya que según la frase de Kant, *todo estudio de la Naturaleza tiene de Ciencia lo que tenga de Matemática.*

La enseñanza

61. La enseñanza de la Matemática siguió, como es natural, las vicisitudes de la ciencia constituyendo en Grecia una especie deseminario o de laboratorio, en donde los nuevos matemáticos se formaban junto almaestro, dedicándose todos a la investigación.

62. En la Edad Media, ocupó un lugar la enseñanza de la Aritmética, Geometría y Astronomía, que con la Música, formaban el *Cuadrivium* en las Escuelas Monacales..., debido principalmente a la necesidad de calcular la fecha de la

Pascua de Resurreción. Además, la costumbre y deseo de ergotizar, llevaba a tratar problemas artificiosos como del que es tipo el de la herencia dejada a una viuda con la condición de hacer un reparto entre ésta y el hijo póstumo si era varón, y otro reparto distinto siendo hembra, resultando dos gemelos, uno de cada sexo; ¿cómo debía repartirse la herencia?

Otra organización de la enseñanza de la Matemática durante la Edad Media, fué la llevada a cabo por la Liga Hanseática de Ciudades Libres alemanas, eminentemente mercantil, y que a fin de asegurar la existencia de los conocimientos indispensables en las principales plazas comerciales, instituyó en ellas los *Rechenmeister* o Maestros de cálculo, cuya existencia se prolongó hasta época relativamente reciente, y cuya influencia se manifiesta en la importancia concedida a la Aritmética mercantil y es causa de que en nuestros libros aparezcan todavía cuestiones como la Regla de compañía, los arbitrajes, o la de conjunta, muy importantes para un *Rechenmeister*, pero sin interés para nuestros escolares.

63. Hasta el siglo XVI, se enseñaba a contar con objetos, pasándose poco a poco a utilizar las cifras, para cuyo uso se daban gran número de reglas, muchas de ellas en verso para mejor asidero de la memoria. El impulso dado por la Reforma a la enseñanza, hizo que fuese incorporándose la de las Matemáticas, pero con gran lentitud. En la Institución de Franke en Halle a principios del XVIII, se considera esencial aprender primeramente a leer y escribir, y la enseñanza del cálculo se hacía mediante lectura de las reglas hecha por el niño ayudado del maestro, y por problemas que cada niño copiaba de un mismo libro y resolvía por escrito.

Casi a fines del mismo siglo, en el ***Filantropium*** de Dessau, se aprendía, primero a leer y escribir números hasta los trillones, después largas sumas, más tarde restas interminables, etc...., como hemos podido ver aún en algunas de nuestras escuelas. Trapp hizo más pedagógica la enseñanza hacia 1777, empleando objetos para contar y bloques para mostrar la relacion entre las unidades decimales, y nueve años más tarde utilizó la representación gráfica de los números pequeños, la decena y la centena por puntos como los del dominó.

64. El gran renovador de la enseñanza fué también en nuestros estudios Pestalozzi, que aplicó su sistema de la *enseñanza elemental* y de *la intuición*. Utilizaba la tabla de unidades, gran cuadro dividido en 100 cuadraditos, en los cuales estaban representados por puntos o rayitas los, diez primeros números repetidos diez veces cada uno. La tabla de quebrados, presentaba análogamente las diez primeras unidades fraccionarias por descomposición en partes iguales de un cuadrado. Enseñaba intuitivamente los números, les daba nombre y efectuaba mentalmente con ellos todas las operaciones antes de escribir una sola cifra. Análogamente procedía con los quebrados obteniendo con ello grandes calculistas que asombraron al último de los *Rechenmeister* que acudió a contemplarlos. Es decir, que por su concepto de la intuición como visión interna (y aquí creemos que se pone de manifiesto claramente su discrepancia con el concepto corriente), abandonó en el cálculo las cifras, como antes se había abandonado el ábaco.

Hacia 1806, Tillich estudiaba los números en enseñanza gradual de 1 a 10 y de 10 a 100, considerando a éstos como formados por las decenas más las unidades, y a fin de hacer intuitiva esta relación empleaba una caja con diez ejemplares de cada uno de los paralelepípedos rectángulos de base cuadrada de una pulgada de lado y de 1,2 ... hasra 10 pulgadas de altura. Las operaciones se estudiaban en cada grado. Nos encontramos ya, como puede notarse, en los umbrales de la enseñanza contemporánea.

9.—Aplicación del Método Histórico a la enseñanza de la Matemática

65. Su fundamento.—Es opinión común entre psicólogos, filósofos y educadores que la evolución psíquica del individuo, es una reproducción abreviada de la evolución de la raza, mejor diríamos de la cultura, en el sentido de Spengler. En particular esto ha sido admitido para la evolución del conocimiento por filósofos como Compte y educadores como Pestalozzi y Froebel. Indudablemente, el orden y la forma en que la Humanidad ha ido elaborando una ciencia por adecuación entre las facultades psíquicas del hombre y las características de la ciencia en cuestión, son, aún influídas por las circunstancias, una indicación valiosísima acerca del orden y la forma en que el hombre individual puede adquirir ese mismo conocimiento. Claro es, que ello no es un criterio absoluto, y que además es evidentemente preciso abreviar las etapas de la instrucción. Y en apoyo de la primera parte, citaremos el error pedagógico del propio Pestalozzi, haciendo operar a sus alumnos sin conocer las cifras, primordialmente por la razón de que así habían procedido los hombres en un principio, método que fué calificado por uno de sus visitantes, como lo más monstruoso, curioso y bizarro que haya aparecido en la enseñanza.

El método histórico, tiene, pues, un valor relativo que necesita del aval del método psicológico y de la comprobación práctica.

66. Aplicaciones.—Si examinamos los hechos históricos expuestos en el apartado anterior y los aplicamos al orden y forma de la enseñanza, nos encontraremos con una gran cantidad de reglas útiles para la enseñanza que expondremos brevemente, para facilitar la tarea del lector.

La numeración deberá aprenderse *contando* objetos, y en su parte sistemática, por medio de los ábacos (no el romano que introduce la complicación de los *cincos*), siguiendo la marcha indicada y deberán realizarse las operaciones con números pequeños usuales (recuérdese la época en que fué inventada la palabra *millón*).

Los números fraccionarios sencillos, pueden darse desde los primeros tiempos de la enseñanza, prefiriendo los de numerador *uno*, y obteniendo las sumas de fracciones sencillas (papiro de Ahmes).

Análogamente a como los romanos empleban en el cálculo sus *doceavos*, por ser la expresión de los divisores de su moneda, puede introducirse desde el principio el uso de los *céntimos* aun antes de hablar de los números decimales de un modo sistemático. En cambio, los números irracionales y negativos, deben aplazarse hasta que el alumno esté en condiciones de *utilizarlos*, y aun los primeros sólo como susceptibles de aproximación indefinida, sin concepto preciso, difícil de adquirir.

Las operaciones deberán realizarse primeramente con los ábacos, aun cuando sólo fuese las de sumar y para adquirir una idea intuitiva de la significación del valor relativo.

El cálculo mental, sin la exageración pestalozziana, debe ser impulsado, como lo fué en los primeros tiempos de las escuelas monacales, y hasta la generalización de las cifras árabes después del 1500.

Al sistema métrico decimal, debería preceder una época en que se empleen *unidades naturales* como han hecho todos los pueblos desde los asirios, hasta los medievales. Así lo hace modernamente Decroly en el primer grado de su enseñanza.

La Geometría deberá enseñarse íntimanente unida a la Aritmética, como lo estuvo en su génesis, y orientada principalmente a la Agrimensura. El mismo ejemplo de los errores cometidos por egipcios y romanos, sirve para demostrar la necesidad de la comprobación primero, y demostración después de las fórmulas que se emplean. La relación de la Geometría del Espacio con la Geografía, nos llevará a dar importancia a la Geometría de la esfera.

Del Algebra pudiera enseñarse la resolución de ecuaciones resultantes de problemas concretos, según la observación hecha en el apartado anterior, y en cuanto a los problemas en general, el carácter de los expuestos de Alcuino, repetición de indios, egipcios y griegos, nos muestra el carácter de entretenimiento y de apelación al ingenio que deberán tener los problemas que se propongan en las escuelas.

En cambio, deberán desaparecer del programa escolar, aquellas cuestiones que en la marcha histórica tienen solamente un valor circunstancial como el estudio detenido de los quebrados, debido a la arbitraria división de las unidades de los sistemas métricos antiguos, con sus secuelas del máximo común divisor y mínimo común múltiplo que se necesitaban para simplificarlos y reducirlos a un común denominador; así como también es merecedora de un examen expurgatorio la llamada Aritmética Mercantil, herencia de los *Rechenmeister*; y de desear la desaparición absoluta de la regla de falsa posición, sólo sustentable ante el desconocimiento de las ecuaciones.

Las leyes que hemos indicado resumiendo la evolución de la Matemática, su abstracción progresiva y el aumento de su vigor lógico nos indican las características del método en la enseñanza, pero hemos de hacer notar, que así como estas cualidades se manifiestan en la Matemática cuando los matemáticos sienten *espontáneamente* lo defectuoso de la abstracción y vigor lógico anteriores, también en la enseñanza se pasará a definiciones y demostraciones más abstractas y lógicas solamente cuando la mente del alumno esté capacitada para sentir su necesidad, sin lo cual se disgustaría de la Matemática, por parecerle, como dice Poincaré, un simple juego de sofistas.

Finalmente, la tendencia de la Matemática a traducirse en aplicación a la vida ordinaria, a las Artes y las Ciencias, justifica históricamente una vez más que en la escuela se haga ampliamente esta aplicación.

NOTAS AL CAPITULO IV

1. — *Los fundamentos.*

Legendre, notable matemático francés, trató de modificar la tradicional Geometría de Euclides. He aquí los fundamentos lógicos de uno y otro autor:

Postulados de Euclides.

1.° $\left.\begin{array}{r}\text{Si } a = b \\ \text{y } b = c\end{array}\right\} a = c$

2.° $\left.\begin{array}{r}\text{Si } a = b \\ \text{y } m = n\end{array}\right\} a + m = b + n$

3.° $\left.\begin{array}{r}\text{Si } a = b \\ m = n\end{array}\right\} a - m = b - n$

4.° $\left.\begin{array}{r}\text{Si } a > b \\ m = n\end{array}\right\} a + m > b + n$

5.° $\left.\begin{array}{r}\text{Si } a > b \\ m = n\end{array}\right\} a - m > b - n$

6.° Si $a = b \quad 2a = 2b$

7.° Si $a = b \quad \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2}$

8.° Dos figuras son iguales si superpuestas coinciden.

9.° El todo es mayor que la parte.

10.° Dos rectas no cierran espacio.

11.° Todos los ángulos rectos son iguales.

12.° Si dos rectas forman con una tercera ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectas, las rectas se encuentran hacia el lado en que esta suma es menor.

Axiomas de Legendre.

1.º $\left.\begin{array}{l}\text{Si } a = b \\ \text{y } b = c\end{array}\right\} a = c$

2.º El todo es mayor que la parte.
3.º El todo es igual a la suma de las partes.
4.º Dos puntos determinan la posición de una recta.
5.º Dos figuras son iguales si superpuestas coinciden.

2. — *Los conceptos primarios.*

Hemos dicho, que los conceptos primarios en Geometría son indefinibles: de aquí el variado número de definiciones que se han dado de ellos. Como ejemplo, citamos a continuación algunas definiciones de la línea recta, que la *saracterizan*:

La línea cuyos extremos ocultan los puntos intermedios.

PLATÓN.

La línea que está igualmente colocada con relación a los puntos que la forman.

EUCLIDES.

Una línea tal, que inmovilizando dos de sus puntos todos los demás quedan inmóviles

LEIBNITZ.

El camino más corto entre dos puntos.

LEGENDRE (1794).

Una línea determinada por dos puntos.

DUHAMEL.

La que en una rotación no engendra superficie ni volumen.

La que puede coincidir consigo misma en una traslación.

La línea de una figura que puede permanecer inalterable cuando todas las demás se mueven.

Nótense las aplicaciones de cada uno de estos caracteres al jalonamiento, la comprobación de la regla, los ejes de las máquinas, las varillas de los émbolos, etc.

3. — *Definiciones de rectas paralelas.*

Las que situadas en un mismo plano no se encuentran por más que se prolonguen.

EUCLIDES (300 a. de J. C.)

Las que equidistan en toda su extensión.

ALBERTO DURERO (1525).

Las que forman el mismo ángulo con una tercera.

VARIGNON et BESOUT (1750).

Las perpendiculares a una tercera.

LACROIX (1805).

Las que tienen la misma dirección.

Las que tienen común el punto del infinito.

DESARGUES (1639).

La recta más larga que puede trazarse desde un punto a una recta.

STONE.

4. — *Formas diversas del postulado de Euclides.*

Dado un triángulo cualquiera puede siempre construirse otro semejante a él tan grande como se quiera.

WALLIS (1663).

Existe el rectángulo.

CLAIRAUT (1750).

Por tres puntos dados no en línea recta pasa siempre una circunferencia.

BOLYAI (1800).

La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos ángulos rectos.

LEGENDRE (1794).

Por un punto del interior de un ángulo se puede trazar una recta que corte a los dos lados.

LORENZ (1791).

Dos rectas que se cortan no pueden ser paralelas a una tercera.

PLAYFAIR

5. — *Geometrías no euclídeas.*

La Geometría de Euclides tiene como fundamento el conocido postulado, que ni es evidente, ni ha podido ni puede demostrarse a base de las proposiciones anteriores a él, ya que negándole se construye una Geometría perfectamente lógica sin contradicción con dichas proposiciones previas.

Entre las varias Geometrías que la negación de éste, u otros postulados (el de Arquímedes, por ejemplo,) determinan, son las más importantes las de Lobatchewski y Riemann.

Lobtchewski parte de la definición de rectas paralelas. Sea una recta (fig. 21) y un punto fuera de ella. Si por este punto trazamos una perpendicular MO, y suponemos ahora que el punto O se desplace indefinidamente hacia la derecha, la secante así determinada tiene un *límite* que es la paralela trazada por M a la recta. Claro es, que por la izquierda puede hallarse otra posición límite distinta de la anterior, y tendríamos dos paralelas a una misma recta por un mismo punto. En el interior del ángulo formado por ellas quedarían incluídas infinitas rectas *no secantes*, es decir, que no

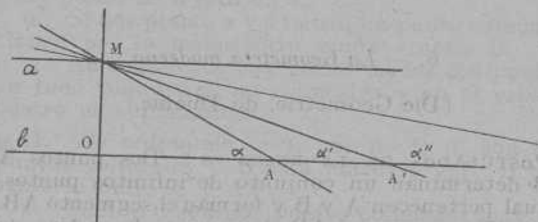


Fig. 21.

serían paralelas ni cortarían a la recta dada Si suponemos que la recta límite es perpendicular a la MO, nos hallamos de nuevo en la Geometría de Euclides. Como consecuencia de esta nueva forma del paralelismo de dos rectas, resulta que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a dos rectos, y su área proporcional a esta diferencia.

Hacia mediados del siglo pasado, el alemán Riemann publicó los fundamentos de una nueva Geometría en la que considera el espacio como *esférico*, en que el plano es como una superficie esférica, siendo la recta equivalente al arco de círculo máximo, y por tanto, dos puntos no determinan la posición de una recta, y en particular, por dos puntos pueden pasar infinitas rectas; dos rectas se encuentran siempre, y por tanto, no *puede trazársele ninguna paralela por un punto* *exterior*; y la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de dos rectos.

Tanto una Geometría como otra, determinan un espacio distinto del euclidiano, que desempeña un papel importantísimo en la moderna teoría de la relatividad.

El espacio euclídeo sería el que se presenta a nuestros sentidos en pequeñas distancias, pero no en las grandes, y por eso, la determinación de la suma de los ángulos de triángulos astronómicos pudiera decidir experimentalmente del valor *real* de las tres Geometrías indicadas, no del *lógico*, en el cual cada una de las tres parece igualmente cierta.

6. — *La Geometría moderna*

(Die Geometrie, de Thieme.)

POSTULADOS DE LA RECTA.—1.º Dos puntos A y B determinan un conjunto de infinitos puntos, al cual pertenecen A y B y forman el segmento AB.

2.º Un segmento AB determina dos series de puntos que son sus prolongaciones.

3.º Si C es un punto de AB, la prolongación de CB más allá de B coincide con la de AB más allá de B, y la prolongación de AC más allá de C coincide con CB y con la prolongación de AB más allá de D.

4.º No existe ningún punto común a las dos prolongaciones (Geometría no elíptica).

Definición.—Recta es el conjunto formado por un segmento y sus prolongaciones.

7. — *Geometría axiomática.*

(Grundlagen der Geometrie, de Hilbert.)

CONCEPTOS FUNDAMENTALES. — Existen *entes* llamados: *puntos*, que se representan por A, B, C. ...;

rectas, a, b, c, ..., y planos, α, ρ, φ, ..., y *conceptos: está, entre, paralelo, congruente, continuo.*

Postulados. — I. *De conexión.* — 1. Dos puntos distintos determinan una línea recta: $AB = a$; $BA = a$.

2. Dos puntos cualesquiera de una línea recta la determinan $\left.\begin{matrix} AB = a \\ AC = a \end{matrix}\right\} BC = a$

3. Tres puntos no colineales determinan un plano. $A, B, C = \alpha$.

4. Tres puntos no colineales de un plano lo determinan.

5. Si dos puntos A y B de una recta a están en α, todo punto de a está en α.

6. Si dos planos α y β tienen un punto común A, tienen por lo menos otro punto común B.

7. En toda recta hay por lo menos dos puntos, en todo plano tres no colineales y en el espacio cuatro no coplanarios.

II. *De ordenación.* — 1. Si A, B, C son tres puntos colineales y B está entre A y C, B está también entre C y A.

2. Si A y C son dos puntos colineales, hay por lo menos un punto B entre ellos, y al menos un punto D tal que C está entre A y D.

3. De tres puntos colineales hay una solo que está situado entre los otros dos.

4. Cuatro puntos colineales A, B, C, D pueden ordenarse de modo que B quede entre A y C y también entre A y D, y que C quede entre A y D y también entre B y D.

5. Si A, B, C son tres puntos no colineales y a es una recta del plano ABC que no contenga a ninguno de ellos, si la recta a pasa por un punto del segmento AB, debe pasar también por un punto del segmento BC o del AC.

III. *De paralelismo.*—Por un punto A no situado en una recta a pasa una sola recta paralela a a.

IV. *De congruencia.* — 1.º Si A y B son dos puntos de a y A′ es un punto de la misma o de otra recta a', es posible encontrar en a' a un lado dado de A' un punto único B' tal que el segmento AB (o BA) es congruente con $A'B'$.

2.º Si AB es congruente con $A'B'$ y con $A''B''$, estos segmentos son congruentes entre sí.

3.º Si AB y BC son dos segmentos de a sin puntos comunes, y $A'B'$ y $B'C'$ son dos segmentos análogos de a', si AB es congruente con $A'B'$ y BC con $B'C'$, AC será congruente con $A'C'$.

4.º y 5.º Los mismos anteriores para los ángulos

6.º Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se verifica $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $< BAC = < B'A'C'$, se verificará también $< CBA = < C'B'A'$, $< ACB = A'C'B'$.

V. *De continuidad.* — Si A_1 es un punto de a entre A y B y se toman A_2, A_3 ..., de modo que A_1 esté entre A y B, A_2 entre A_1 y B_2 y los segmentos A_1, $A_2 A_3$ ... son iguales, habrá un punto A_n tal que B estará entre A y A_n (Arquímedes).

8. — *El teorema de Pitágoras.*

1. *Los números pitagóricos.* — Este conocido y utilizadísimo teorema es uno de los más típicos ejemplos del desarrollo alcanzado por una idea a partir de un hecho puramente empírico, mostrando cómo la ciencia surge del arte y cómo se desenvuelve indefinidamente.

Expuesta en la ojeada histórica la iniciación de esta idea en la mente del sabio griego por la consideración de la famosa cuerda de nudos (600 años antes de J. C.) y su interpretación, notaremos la sencillez con que se demuestra la relación $a^2 = b^2 + c^2$ para los números 5, 4 y 3, construyendo los cuadrados correspondientes y dividiéndolos por los puntos de división de los lados en cuadraditos que son en número de 25 para la hipotenusa, 16 para el lado b y 9 para el lado c. Demostración, más bien comprobación, de carácter *particular* y *concreto,* por versar sobre números o dimensiones *particulares* y por utilizar las áreas, expresión *concreta* del cuadrado.

Las fórmulas dadas por Pitágoras para obtener números enteros que satisfagan su relación y que han sido citadas en el texto, dan para los valores números de $n=1, 2, 3, \ldots$, los comprendidos en el siguiente cuadro, que se suelen llamar números pitagóricos y que se corresponden verticalmente para formar los lados de un triángulo rectángulo:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	...				
$c =$	3	5	7	9	11	13	15	17	...	8	20	12	28
$b =$	4	12	24	40	60	84	112	144	...	15	21	35	45
$a =$	5	13	25	41	61	85	113	145	...	17	29	37	53

Los números añadidos sin referencia a n son también números pitagóricos como es fácil comprobar, y estos números multiplicados por un número entero siguen dando números pitagóricos.

La tabla anterior permite resolver el siguiente curioso problema propuesto por el chino Kruc Tshan (2600 años a. de J. C.).

En el centro de un estanque cuadrado de 10 *pies de lado crece una caña de bambú que emerge una longitud de* 1 *pie sobre el agua, y que inclinada hasta tocar el punto medio de un lado, llega justamente a él. ¿Cuál es la profundidad del estanque?*

En la posición inclinada forma la caña la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos mide 5 pies, siendo el otro la altura buscada; pero la diferencia entre la hipotenusa y el cateto es de 1 pie, correspondiendo a la segunda columna de la tabla donde se encuentra 12 pies para profundidad del estanque y 13 para longitud de la caña.

2. *La demostración.*—El mismo Pitágoras parece que demostró su teorema para el triángulo isósceles con la figura 22, que no necesita explicación. Euclides, 300 años después, dió su demostración general, para cualquier triángulo rectángulo, pero todavía de carácter concreto por referirse a áreas. Casi catorce siglos después, Bashkara dió una demostración independiente de las áreas fundándose en la semejanza de triángulos; modernamente, y

fundándose en la teoría de las antiparalelas, se ha dado otra demostración, que puede verse, como la de Euclides, en nuestro Nuevo Tratado de Geometría. Además, gran número de ingenios se han esforzado en demostrar este famoso teorema de un modo original, bastando para evidenciarlo citar los nombres de Terquam, Sonndorfer, La Campa (español), Yoshinosi (japonés, 1634), Volkow (ruso, 1867) y la de Leer, que nosotros hemos realizado en madera, haciendo intuitiva mecánicamente la superposición de superficies. Para construirla (figura 23) tómese el centro del cuadrado construído

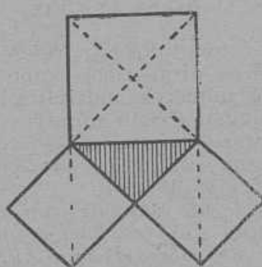


Fig. 22

sobre el cateto mayor, y trácense por él una perpendicular y una paralela a la hipotenusa. Tómense los puntos medios de los lados del cuadrado construído sobre la hipotenusa y trácense paralelas a los catetos como muestra la figura.

Ampliación. — Siguiendo la tendencia a la generalización propia de la Ciencia, se ha ampliado el teorema en dos direcciones. La primera, aplicándolo a un triángulo cualquiera obtiene los teoremas referentes al cuadrado del ángulo opuesto a un ángulo agudo u obtuso, que figuran en casi todas las Geometrías. La segunda sustituye los cuadrados por paralelogramos en el llamado teorema de Pappus (600 d. de J. C.), que dice: *Si sobre dos lados de un triángulo se construyen sendos paralelogramos, se une el vértice común con el punto de* *intersección de las prolongaciones de los lados exteriores de los paralelogramos, y sobre el tercer lado se construye el paralelogramo cuyos lados sean paralelos e iguales al segmento anterior; este paralelogramo equivale a la suma de los otros dos.*

3. *Aplicaciones.* — Constituye un buen ejercicio para los alumnos la determinación de aquellos

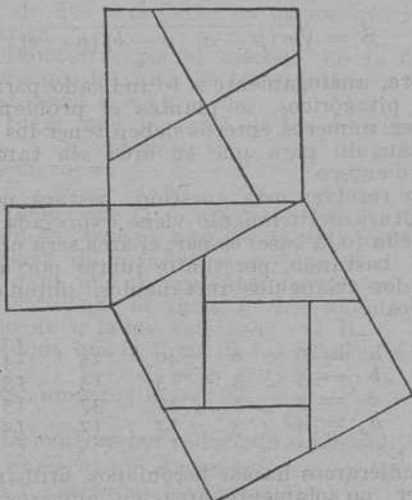


Fig. 23.

problemas o teoremas en que se utiliza este importantísimo teorema.

9. — *Los números de Heron.*

Este sabio, que vivió en Alejandría un siglo antes de la Era Cristiana, es llamado el padre de la Agrimensura, y dió entre otras fórmulas notables, la que proporciona el área de un triángulo conocidos sus lados, que propagó siete siglos más tarde otro Heron, de Constantinopla, fórmula tal vez penosa, pero cuyos datos se obtienen fácilmente en el terreno sin más aparato que la cinta métrica o la cadena de agrimensor.

Si llamamos a, b, c a los lados de un triángulo, p a su semiperímetro y S a su área, la fórmula en cuestión da

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ahora, análogamente a lo indicado para los números pitagóricos, se plantea el problema. ¿Qué valor en números enteros deben tener los lados de un triángulo para que su área sea también un número entero?

Para resolver esta cuestión, bastará notar que si la altura del triángulo viene expresada en enteros, y ella (o la base) es par, el área será un número entero, bastando, por tanto, juntar por un cateto igual dos triángulos rectángulos, obteniendo los números

$a =$	6	8	40	25	14
$b =$	5	5	13	13	13
$c =$	5	5	37	37	15
$h_a =$	4	3	12	12	12

que pudiéramos llamar heronianos, utilísimos para obtener no solamente áreas en números enteros, sino resultados del mismo género en la determinación de sus elementos, tales como alturas y proyecciones.

EJERCICIOS

20 Señalar en los postulados de Euclides y en los axiomas de Legendre cuáles son axiomas, cuáles postulados y cuáles verdaderos teoremas.

21 El que sea $a > b$ quiere decir que $a = b +$

$+ d$, siendo de una cantidad positiva cualquiera. Demostrar, según esto, el postulado 4.º de Euclides.

22 Obtener la gráfica de la relación entre grados centígrados y Fahrenheit y utilizarla para la conversión de temperaturas.

23 Idem entre el volumen y la presión de un gas, suponiendo que una presión de 8 kg. corresponde a un volumen de 90 c.

24 Demostrar intuitivamente que la media aritmética de dos cantidades es mayor que la media geométrica.

25 Demostrar por el método de la inducción completa que la suma de los n primeros números pares es igual a $n\,(n+1)$.

26 Idem, que la suma de los n primeros números enteros es $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

27 Idem, que $(1+a)^n > 1 + na$.

28 Idem, que el número de vértices de una línea abierta de n lados es $n + 1$.

29 Idem, que en una línea cerrada es n.

30 Idem, que la suma de los ángulos de un polígono de n lados vale $(2n - 4)$ R.

31 Idem, que la suma de los cuadrados de los n primeros números es $\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

32 Demostrar por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ es un número inconmensurable (esto es, que no puede ser entero ni fraccionario).

33 Obtener dos ejemplos de Aritmética y tres de Geometría elementales en que se utilice la reducción al absurdo.

34 Escribir en caracteres asirios 34, 22, 200.

35 Hallar la equivalencia en el sistema métrico decimal de las unidades asirias de longitud.

36 Idem, de las de peso entre sí.

37 Obtener 164×8 y 164×15 con el procedimiento egipcio.

38 Escribir con caracteres griegos 35, 44, 78, 845, $^1/_2$ $^4/_5$.

39 Hallar un límite de error para la fórmula egipcia del área del triángulo isósceles.

40 Comprobar, comparándolas con la verdadera, las fórmulas romanas del área del triángulo equilátero.

41 Hallar para qué cuadriláteros es exacta la fórmula egipcia del área $\frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$, y determinar el error en algún ejemplo para los que no lo es.

42 Demostrar la exactitud de la cuadratura del círculo de Leonardo de Vinci.

43 Dibujar una elipse por el procedimiento de Alberto Durero y obtener sus focos, comprobando el trazado.

CAPITULO V

LA PSICOLOGIA DEL NIÑO Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

El rigor lógico no es el punto de partida de la evolución mental, sino su término.

DEWEY.

1.—Las actividades psicológicas del niño en relación con el estudio de la Matemática

65. Hasta ahora, hemos estudiado principalmente la materia a enseñar, obteniendo por ello *qué cosas* deberíamos enseñar al niño; ahora emprendemos brevemente el estudio de cómo es el niño para deducir cómo y cuándo hemos de utilizar y desenvolver sus cualidades para conseguir adecuadamente la instrucción matemática y la educación intelectual que nos proponemos en nuestra enseñanza.

Podemos observar que el niño posee todas las actividades psicológicas del hombre, aunque en menor grado de consciencia y operando de manera concreta y sensible sobre un área menor.

66. **La atención voluntaria.** Apenas si existe en un principio, desarrollándose más tarde y estando dominada por el *interés* como la involuntaria. Cuan do éste no es muy intenso son ambas clases de atención poco intensas, escasamente sostenidas y grandemente *periféricas*'predominando la atención sensorial externa sobre la interna o *reflexión*. Todo ello es harto lamentable para el cultivo de la Matemática que exige precisamente todo lo contrario, de aquí la necesidad de recurrir al interés indirecto, hacer breves y variadas las lecciones y utilizar por todos los medios la *intuición sensorial* y la *acción*, únicas capaces de fijar y retener la atención infantil.

La percepción, incluso la sensorial, es dificiente, tanto, que la sugestión la enmascara con facilidad y las relaciones cuantitativas de la extensión y la posición relativa se perciben mal, aun cuando ocurra todo lo contrario en la percepción simple. Wolfe, sostuvo que los niños aprecian longitudes cortas y áreas de círculos mejor que los universitarios. Pero esta percepción es parcial, no sintética, cuando el cultivo de la Geometría necesita todo lo contrario; de aquí la precisión de recurrir a la medida, al dibujo exacto, la comprobación de relaciones y la superposición lo más inmediata posible. En el caso de la suma de los ángulos de un triángulo, por ejemplo, la demostración ordinaria casi no dice nada a los niños, aun cuando comprendan cada uno de sus eslabones; la comprobación numérica dice más, y más aún de la superposición de los tres ángulos (en el punto de la base simétrico del vértice con relación a la línea media) sobre todo, si se dibujan en este punto los dos ángulos rectos.

67. La comprensión verbal.—Es también deficiente teniendo el niño el hábito de interpretar a su gusto las palabras cuyo significado conoce a medias, o cree conocer, y el de prescindir de las que no conoce, sin darse, por tanto, clara cuenta del significado total de la frase que interpreta muchas veces erróneamente con la mayor tranquilidad.

Esto es un grave inconveniente para la Matemática que descansa precisamente en la precisión de los conceptos. y por esto es preciso considerar este estudio *como una enseñanza de lenguaje*, cerciorándose el maestro en cada caso de que el niño tiene el concepto claro, intuitivo o por definición, de las palabras que emplea, no sólo referentes al léxico propiamente matemático, sino aquellas otras que parecen propias sólo del vulgar, como *reunir*, *repartir*, *ganancia*, *precio*, etc.

68. La memoria.—Contra lo que se supone, es inferior en el niño al adulto; pero ello claro que es debido a la deficiencia de la memoria *juiciosa* y al menor *número de enlaces* que el niño posee. En cambio, lo que pudiéramos llamar memoria muscular y sensible y como consecuencia de ello la verbal es grande en el niño, porque está en la época de formar los mecanismos psicológicos que tienen por base tanto una como otra.

La consecuencia es inmediata: *utilizar* ampliamente estas clases de memoria a fin de formar los mecanismos del cálculo que son fundamentales en nuestra enseñanza, y fijar aquellos conocimientos indispensables para la vida que da la Matemática; y *cultivar* la memoria juiciosa a que tanto se presta nuestro estudio por acompañar el pensamiento lógico a las definiciones, propiedades, reglas y clasificaciones que hayan de aprenderse. Teniendo en cuenta que la memoria mecánica alcanza su máximo hacia los diez años, cuando ella decrece es ocasión de cultivar la otra memoria juiciosa o lógica.

69. La imaginación.—No es el niño, contra lo que suele creerse un ser rico en imaginación, por la razón sencilla de que es pobre en elementos que combinar y poco apto en establecer las relaciones combinatorias; en cambio, sí tiene el niño una gran viveza de imágenes y un placer indudable en ejercitar su fantasía, cuyas imágenes casi confunde con las percepciones reales. Como consecuencia no podremos *utilizar* directamente esta actividad psicológica y menos aún en la forma fría y escueta que presenta ordinariamente nuestra ciencia. Cabe sí emplearla indirectamente y *cultivarla* útilmente por el placer que su ejercicio lleva consigo:

a) Excitándola con anécdotas y narraciones de todo género relacionadas con nuestro estudio. En toda lección debiera darse una de estas anécdotas, y el libro de Matemática debiera tener narraciones referentes a ella.

b) Presentando las cuestiones de modo que hieran la imaginación. Así, por ejemplo, el problema de la duplicación del cuadrado puede explanarse diciendo:

Un propietario tenía un estanque cuadrado en cuyos vértices había cuatro árboles magníficos, y quería duplicar la extensión del estanque que le resultaba pequeño, conservándole la forma de cuadrado..., y respetando los árboles. ¿Cómo se las arreglaría?

c) Incitando al niño a que emplee su capacidad imaginativa en la invención. Claro es, que esto se consigue en los problemas y presentando como tal toda cuestión, pero en todo ello el niño va guiado por el maestro. Un ejercicio libre puede encontrarse, y es mucho más grato, en la invención de reglas propias para el cálculo mental; en la invención de problemas sobre ciertos datos o guías;

en el dibujo, en cada lección de Geometría, de frisos, utilizando la figura estudiada, y finalmente en la confección de *proyectos* de tipo matemático en que puede intervenir la clase colectivamente.

70. El razonamiento.—He aquí otra actividad dificilmente utilizable para nuestra enseñanza que es la ciencia racional por excelencia. El niño carece de espíritu crítico desde el punto de vista lógico. Todo niño está como el príncipe francés dispuesto a creer la verdad de una proposición matemática que su Profesor trata de demostrarle: *parceque vous êter un honnête homme*. Juzga bien, pero es difícilmente capaz de seguir una serie de tres juicios. Las mismas demostraciones matemáticas de tipo geométrico indicadas en 17 puede seguirlas, comprende cada uno de sus eslabones, pero no percibe el conjunto, el encadenamiento no es para él sino una ayuda mnemotécnica. Claro es que hay niños especialmente dotados (caso extraordinario es el de Pascal), y que este sombrío cuadro aclara sus tintas hacia los últimos años de la edad escolar. La repugnancia se conserva, sin embargo, hasta más tarde por dos clases de proposiciones y razonamientos: los *contrarios*, que exigen una violenta vuelta del razonamiento sobre sí mismo (y tienen un desagradable carácter negativo), y el *método de reducción al absurdo*, tan criticado por Schopenhauer, que se halla en el mismo caso. Y cerca de ellos podemos colocar los *recíprocos* desagradables, porque parecen inútiles tras el directo. Sólo una cuidadosa inculcación de su necesidad, evidenciando que existen recíprocos no ciertos, puede salvar este desagrado. La consecuencia es inmediata: Suprimir en la enseñanza esta última clase de proposiciones y razonamientos, dejar para lo más tarde posible, las demostraciones que exijan más de dos juicios consecutivos, estableciendo antes las propiedades correspondientes como *postulados* de carácter pedagógico, y unir, en cuanto sea posible, al razonamiento alguna operación numérica en Aritmética y de movimiento en Geometría, dividiendo en cuanto sea posible y escalonando las dificultades.

Así, por ejemplo, podemos *razonar* la regla del tercer caso de la división empezando con un ejemplo, como 648 : 2, sigüiendo con 658 : 2, más adelante 647 : 2, luego 657 : 2 y finalmente pasando a un divisor de varias cifras que sea el más sencillo posible, 11, conservando de tres cifras el dividendo.

Así para 568 : 11 diremos la onceava parte de 56 decenas son 5 decenas y sobra 1, que con las 8 unidades sobrantes son 18. La onceava parte de 18 unidades es 1 unidad. Con lo cual, y escribiendo los restos correspondientes, tenemos razonada la difícil regla.

Téngase siempre en cuenta que según Lindley y Bernes la capacidad para la crítica y el razonamiento no aparece hasta los doce años (en niños norteamericanos) y que la escuela puede perjudicar aún esta aparición, pasando demasiado deprisa del razonamiento inconsciente, basado en la sensación y la acción, a la fase del razonamiento abstracto, analítico y general. Una fase interesante es aquella en que el razonamiento se hace consciente, versando sobre lo concreto como indicamos, y ayudado por la imaginación, fase ésta que probablemente no debe ser rebasada en la escuela si no extiende ésta su acción hasta los catorce años de un modo efectivo.

71. La capacidad de análisis.—Queda casi reducida al *elemental* y aun éste a la forma sensorial de considerar sucesivamente las partes de un todo. A continuación se desenvuelve el análisis *causal*, cuyo interés patentiza el niño en sus constantes *por qué*, y que aparecen ya a los cuatro años, si bien con una facilidad tan grande para satisfacerse con cualquier respuesta que muestran lo superficial de la tendencia. El análisis *lógico* solamente al final de la edad escolar se desarrolla, y sólo entonces puede ser *cultivado* con éxito en la *clasificación* de figuras, formación de cuadros sinópticos, deducción de corolarios, etcétera.

El análisis elemental puede ser utilizado en el estudio de las figuras y en la descomposición de un número en sus órdenes de unidades, con todas sus consecuencias (procedimientos operatorios) y a la descomposición en partes de una figura geométrica. La simple consideración de ser $9 = 10 - 1$, útil para el cálculo rápido, es una aplicación del análisis.

72. La capacidad de síntesis.—Se desarrolla lentamente. Recuérdese el caso de la niña incapaz de reunir en un concepto los dos pares de cerezas de que habla Duroly. En algunos casos se han manifestado los niños inferiores a los chimpancés en realizar la síntesis de actividades puramente mecánicas. Sin embargo, el niño utiliza constantemente esta actividad en formas accesibles a él. Las operaciones llamadas de *composición* son una prueba de ello y en los procedimientos de cálculo, sumas de sumas, sumas de productos parciales, se operan continuas síntesis elementales. Y el método *analítico-sintético* es utilizado en esas mismas cuestiones en la obtención de áreas y volúmenes etc.

73. La capacidad de abstración.—Tanto *aisladora* como *generalizadora*, es manifestada muy pronto por el niño que se fija en detalles que a veces escapan al adulto y que llama, por ejemplo, papás a todos los señores de edad; pero tal actividad sólo se manifiesta en la infancia en el terreno propio, que es el sensorial, y no con relación a los conceptos abstractos manejados en la Matemática, y sólo en la Geometría puede utilizarse aquel carácter, mientras pueda ir soportado por alguna intuición sensible.

2.—La imitación, el juego y los intereses

74. Las formas permanentes.—Existen formas, permanentes de la actividad psíquica del niños que ponen en juego cierto número de sus facultades, siendo, por ello, un elemento indispensables en la educación, puesto que se pueden *utilizar* para la instrucción y *desenvuelven* aquellas facultades que ejercitan; son al mismo tiempo, una garantía de que la educación será *grata* y un medio seguro de conducción o guía del niño. Se observa en los autores alguna discrepancia respecto a la clasificación de estas formas permanentes, habiendo sido llamadas por algunos (Kirpatrik) *instintos* y por otros *intereses* (Claparéde), existiendo formas comunes en ambas nomenclaturas. Nosotros las distinguiremos unas de otras por caracterizar a los primeros tendencias generales a la acción, y en los segundos, el predominio de alguna cualidad o actividad psíquicas, siendo además aquéllos permanentes, mientras que éstos cambian con la edad.

75. Los instintos adaptativos.—Son aquellas disposiciones permanentes del hombre que tienen por objeto adaptar al hombre al medio, y entre ellos tenemos: la *imitación*, que tiende a la reproducción de sonidos y movimientos, y puede ser *refleja*, *espontánea*, *voluntaria*, *dramática* e *idealizada*; el *juego*, en cuya definición no hemos de entrar por ser sobrado conocidas las teorías que lo explican, de las que sólo destacaremos la de Groos, que le asigna la finalidad de *preparar para la vida*; la *curiosidad* o tendencia a renovar las sensaciones, y con ellas los conocimientos, base, por tanto, de la instrucción; y finalmente, la *lucha*, o tendencia a demostrar su superioridad sobre los demás, base de la *emulación*, y que puede hacerse refleja convirtiéndola en emulación consigo mismo (Rousseau), o en deseo de vencer dificultades por el gusto de hacerlo. Entre los instintos individuales nos interesa señalar solamente el de *expresión*, más fuerte en el niño que en el hombre por el menor desarrollo de los mecanismos inhibitorios y por la necesidad de simpatía y de aprobación que experimenta el niño.

76. La imitación.—Esta tendencia se refuerza, según es sabido, por el *prestigio* personal, por el *número* de los que ejecuten la acción (caso de los Internados, Colegios, Moda, etc.), llegando a constituir una verdadera sugestión. Es por ello un auxiliar inapreciable para la formación de los *automatismos*.

El niño *imitará* los números y las figuras que el maestro trace en la pizarra, la disposición de los cálculos, la ordenación de las demostraciones y el razonamiento de los problemas. Las definiciones y reglas, o las operaciones numéricas repetidas en coro como se acostumbra en muchas escuelas francesas, se graban sin esfuerzo indeleblemente en la memoria por esta imitación espontánea.

La imitación *dramática* se traduce principalmente en el *juego*, de que luego hablaremos, y la *idealista*, que alcanza ya intensidad grande a partir de los diez años, hace nacer el culto a los héroes y el gusto por las acciones destacadas, y da ocasión de exponer la historia de la Matemática y sus hombres más representativos.

77. El juego.—Hasta los siete años parece que el carácter predominante del juego es el *movimiento* (tipo animal); hasta los nueve los de tipo salvaje, *la caza, el tiro, el escondite;* hasta los diez, los de *rivalidad y destreza*, propios a lo sumo del nómada; hasta los once, los de *colección* y jardinería (pastor y agricultor), y, finalmente, los juegos de *construcción*, mecanismos de tipo moderno. Una clasificación más sencilla es la siguiente: Hasta siete años, juegos de movimiento; siete-ocho, de pensar acertijos, adivinaciones; ocho-diez, batir *records* o superar marcas; y de diez en adelante de *cooperación*.

Es preciso tener también en cuenta, que las reglas del juego deben ser simplemente imitativas para los niños pequeños; después muy sencillas, y aun preferible el que no sean impuestas, sino vistas realizar, admitiéndose, y deseándose la complicación de las reglas con el aumento de la edad, de tal modo, que después de los doce años sólo se admiten los deportes.

De acuerdo con lo que antecede, indicaremos algunos de los juegos que pueden utilizarse para hacer grata y activa la enseñanza de la Matemática, dejando al cuidado del lector su clasificación adaptación a las diferentes edades, según una u otra de las normas dadas, por no considerarlas perfectas ni definidas. Notaremos, por otra parte, la conveniencia de recoger los juegos regionales de carácter matemático que son los más adaptados y gratos para los niños de cada localidad. Además de los juegos que indicamos a continuación, algunos pueden utilizarse de distintas maneras, según se hagan individuales o colectivos en la apreciación de los resultados.

Juego del columpio.—Contar las mecidas, con bolas, con rayas, con cifras

Pares o nones.

El coto.—Cilindro aguzado por los extremos que se hace saltar y se golpea con una pala. Medir la distancia alcanzada con *pies* o *pasos.*

El tejo.—Dibújese una forma de aeroplano dividida la cola en segmentos numerados y las alas en dos. Láncese el tejo y empújese con un pie teniendo el otro en el aire. Entrar y salir del aeroplano procurando pasar por todas las casillas. El número de recorridos se suma. El quedar el tejo en una línea hace perder.

Los bolos.

Las anillas.—Si fija un vástago o varilla de hierro en el suelo, a su alrededor se traza una circunferencia. Desde ella tiran los niños anillas que ensartan en el vástago. Las anillas pueden ser de tres tamaños para contar unidades decenas y centenas.

Los discos.—Una tabla con tres agujeros circulares de distinto diámetro; boca de sendas bolsas se coloca inclinada mediante un caballete. Los niños tiran discos desde cierta distancia, cada agujero tiene un coeficiente numérico para calcular el número de puntos.

El tranvía.—Se marca un itinerario en el suelo. Un niño hace de conductor y otro de cobrador. Los demás de pasajeros que abonan sus billetes. El cobrador lleva la cuenta y los niños turnan en esta faena.

El papel doblado.—Una tira de 20 × 3 centímetros, plegada en 8 trozos. Contar las 7 divisiones. En la pizarra la misma figura. Escribir la serie de los números a partir de uno dado. Cada niño tiene su tira de papel doblado. Se les incita a adivinar el número escrito en la 3.ª, 4.ª casilla, etcétera, comprobar.

Adivinar una cifra borrada.—Escríbase un número de 4 cifras. Sumarlas. Restar del número este resultado. Tachar una cifra. Decir la suma de las restantes. La diferencia a 9 ó a 18 es la cifra tachada.

Adivinar una suma.—Escríbase por un niño un número de 4 cifras.

Debajo coloca el maestro el complemento a 9 de cada cifra. Otro niño dicta otro número y el maestro repite la operación. Todos hacen la suma y el maestro anuncia el resultado. Este es 9999 × 2 en este caso. Generalícese.

Adivinar la edad.—Piénsese el número del mes en que se ha nacido. Multiplíquese por 2. Añádase 5. Multiplíquese por 50. Añádase la edad. Réstese 300. Dígase el resultado. Sumándole 50, en el número obtenido, la primera o primeras cifras corresponde al mes y el número formado por las dos segundas a la edad.

Demostración.—Sea m el indicador del mes y a el número de años. Lo hecho equivale a

$$(m \times 2 + 5) \times 50 + a - 300 + 50 = m \,.\, 100 + \\ + 250 + a - 250 = 100\, m + \,.\, a$$

Adivinar un número pensado.—Multiplíquese por 3, divídase por 2, multiplíquese por 3 de nuevo, y divídase por 9. Dígase el resultado. Si éste es n, el número pensado es 2 n.

Adivinar una diferencia.—Escríbase un número de tres cifras. Inviértase. Réstense. Dígase la última cifra del resto. Sea n. La anterior es 9. La primera es $9 - n$.

Adivinar un resto.—Pónganse dos filas de objetos habiendo 1 más en la superior. Quítense de ésta n objetos, quítense de la de abajo tantos objetos como quedan arriba. Quítense los de arriba. Quedan $n - 1$.

Demostración

$$\begin{array}{ccc} A & A - n & o \\ A - 1 & (A - 1) - (A - n) = n - 1 & \end{array}$$

Adivinar una hora pensada.—Señálese sobre el reloj una hora a y dígase al sujeto que a partir de la hora pensada por él n vaya contando hasta $a + 12$ a cada hora que señale el operador sobre el reloj, lo cual hará sucesivamente en sentido inverso al del movimiento de las saetas.

Cuando el sujeto llegue a $a + 12$, el operador señalará la hora pensada.

En efecto, el número de horas que se ha retrocedido es $a + 12 - n$ y nos encontraremos sobre la hora $a - (a + 12 - n) = n - 12$; pero como el 12 no influye en el reloj, porque 12 avances o retrocesos llevan a la misma hora, nos hallaremos sobre n.

Adivinar un número pensado por medio de tablas.—El maestro puede disponer de tablas como las adjuntas. Un niño piensa un número, y se-

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31
A	B	C	D	E

ñala en qué tablas se encuentra. La suma de los números que las encabezan, da el número pensado.

Para construir estas tablas se expresan los 31 primeros números en el sistema de base 2, lo cual puede hacerse a partir de 1 por adición, y se colocan en la 1.ª, 2.ª y 3.ª... tablas los números que tengan un 1 en la 1.ª, 2.ª y 3.ª cifra de su expresión en el sistema de base 2.

Fácilmente se obtiene una tabla más, extendiendo la operación hasta 63.

Transformar un cuadrado en un triángulo de igual base y doble altura.

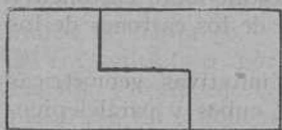


Fig 24.

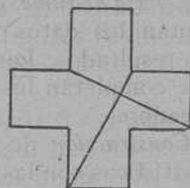


Fig. 25.

Convertir en cuadrados las figuras siguientes (las líneas interiores indican por donde dar los cortes que es preciso).

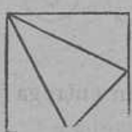


Fig. 26.

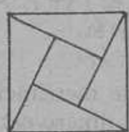


Fig. 27.

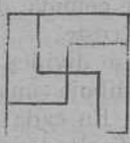


Fig. 28.

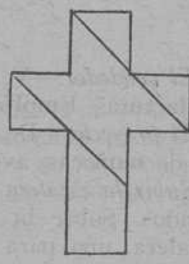


Fig. 29.

Recortar las adjuntas figuras como se indica, invitando al alumno a reconstruir un cuadrado o la cruz, según los casos.

Los dados, uno sólo para contar, dos para combinar por suma y multiplicación.

El Dominó.

Tiro al blanco.

La lotería ordinaria.—Para el primer grado puede no ser de cifras, sino de puntos.

Lotería de sumas, restas, productos y cocientes.—Se cantan los datos y los jugadores reclaman por los resultados. Los datos están sobre cartoncitos que completan los dibujos de los cartones de los jugadores.

Construcción de figuras imitativas, geométricas o artísticas con las varillas, cubos y paralelepípedos de los dones de Froebel.

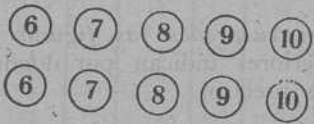


Fig. 30.

El vendedor.—Venta de mercancías con entrega de facturas. Empléese el dinero escolar.

El proyecto.—De excursión, de comida, de equipo de muñecas, averiguando el coste.

Subir la escalera.—Los niños se dividen en dos bandos. Sobre la pizarra se dibuja una doble escalera, una para cada bando. En cada escalón se indica una operación de dificultad creciente. Se supone que un bando sube un escalón cuando encuentra la solución exacta. Se trata de alcanzar la cúspide antes que el otro bando.

Los naipes.—Son parejas de naipes, de los cuales, una tiene indicada una operación y su pareja el resultado. Se distribuyen entre los dos bandos. Echando alternativamente el naipe con los datos, el bando contrario debe hacer baza con el resultado exacto. En caso contrario, pierde la baza.

La multiplicación.—Tiene por objeto, ejercitar gratamente en la multiplicación de los números de 6 a 10 que son los más difíciles. Dos bandos de niños llevan las cifras de 6 a 10 y se colocan como indica la figura 30.

Para multiplicar, por ejemplo, 6×8 se adelanta una fila y retrocede la otra hasta que los niños que llevan estos números, queden frente a frente. como muestra la figura 31.

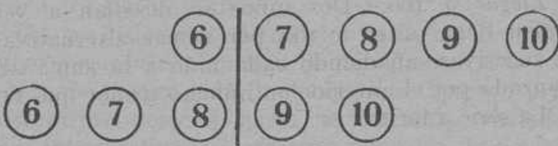


Fig. 31.

La suma de los niños que quedan a la izquierda de la raya, dan las docenas del producto que deben ir incrementadas por el producto de los números indicados por los niños que quedan a la derecha. Así en nuestro caso, el producto es: $3 + 1 = 4$ decenas y $4 \times 2 = 8$ unidades.

La multiplicación manual.—Pueden sustituirse las filas de niños del caso anterior por los dedos de ambas manos y proceder en igual forma. Es más sencillo numerar los dedos de 5 a 9 tomando la divisoria antes de la coincidencia, en vez de hacerlo después, y aun es preferible el procedimiento siguiente: levantar en cada mano tantos dedos como representa el exceso sobre 5 de cada uno de los factores. Su suma representa decenas del producto a las que hay que agregar el producto de los números representados por los dedos sin alzar de cada mano. Así, para $7 \times 9 = (5 + 2) \times$ $\times (5 + 4)$, levantaremos 2 dedos de una mano y 4 de la otra, obteniendo $2 + 4 = 6$ decenas $= 60$. Los dedos no alzados son respectivamente 3 y 1, cuyo producto es 3, y el total $60 + 3 = 63$. (1)

El fundamento de ello está dado por la igualdad siguiente:

$$(5 + a)\ (5 + b) = (5 - a)\ (5 - b) + 10\ (a + b)$$

Llegar a 100.—Dos niños se desafían a ver quien llega antes a 100 por sumas alternativas y sucesivas, añadiendo cada niño a la suma alcanzada por el anterior un número menor que 11.

La serie a formar es:

1 — 12 — 23 — 34 — 45 — 56 — 67 — 78 — 89.

Agotar la baraja, sacando a lo más seis cartas cada vez. Serie 6 — 13 — 20 — 27 — 34 — 41.

Obervación: No detallamos la manera de realizar estos juegos, porque es fácil de obtener y porque el maestro puede introducir en ella cuantas variantes le sugiera su ingenio. Tampoco agotamos con la enumeración anterior el número de juegos posibles que será preferible inventar, pudiendo hallarse algunos más en nuestra Aritmética Intuitiva.

del modo siguiente: Hasta los doce años predominan

(1) Procedimiento muy usado en la Edad Media y principio de la Moderna por simplificar la Tabla de Multiplicar.

78. Los intereses.—*a*) Claparède los clasifica los de tipo *adquisitivo*; desde doce a dieciocho, los de *organización* y más adelante, los de *producción*. Estos tres tipos parecen corresponder a las tres clases de enseñanza; la *primaria*, fundada en la *observación*; la *secundaria*, en la *experimentación*; y la *universitaria*, que tiende a la *investigación*. Según ello, sólo sería posible en la Escuela primaria la adquisición de conocimientos, sin su organización o sistematización, que es uno de los principales fines de la Matemática en su aspecto educativo. Cabría sólo preparar esta sistematización en los últimos años y hacerla efectiva de los doce hasta los catorce años.

Un análisis más detallado lleva al Profesor suizo a considerar dentro de la edad escolar los intereses *glósico* o del lenguaje, que aparece primeramente; después, hasta los siete años, viene la fase *interrogativa* con intereses generales; hacia los diez se desarrolla ampliamente el sentido *coleccionador*, y, finalmente, hasta los doce predominan los *especiales* por la casa, el pastoreo, la agricultura, el comercio, y aparecen los *sociales*, que se desenvuelven durante la pubertad.

De todo ello, apenas si podemos sacar otra consecuencia que la falta de un interés directo por las cuestiones cuantitativas, y su necesaria incorporación a métodos que utilicen dichos intereses. Tan sólo la proximidad a la época del interés glósico de los primeros años escolares, nos permite dar entonces gran parte del vocabulario matemático en unión de las formas intuitivas a que corresponde, y esto hallaremos en el método Montesori. Nuestra propia experiencia nos ha mostrado la facilidad con que niños pequeños se asimilan y emplean palabras como vertical, horizontal, paralelepípedo, etc., que suelen parecer extrañas a personas mayores.

b) Luckey, agrupa los intereses en tres grandes épocas de la vida, que se repiten paralelamente después de la pubertad. Así tenemos, hasta los tres años y hasta los dieciséis, el período *afectivo sensorial*; hasta los ocho y los dieciocho, el *volitivo*, en que predomina la actividad de tipo muscular; y hasta los doce y veinticinco, el *intelectual*, constructivo, en que puede hacerse un trabajo serio.

Esto nos llevaría a distribuir la enseñanza de la Matemática dentro de la edad escolar en un primer período ocasional, de juego, y un segundo período *activo* y un tercero *sistemático* (véase Capítulo VII-3).

c) En cuanto a la *forma* como evolucionan los intereses, nos interesa solamente recoger las siguientes fases:

El paso de lo simple a lo complejo, nos lleva a graduar la Aritmética por la cuantía de los números, y a principiar la Geometría por la línea recta.

El tránsito de lo concreto a lo abstracto, nos lleva a manejar sucesivamente objetos, imágenes y símbolos.

El niño es pasivo en sus primeros tiempos, para volverse activo poco a poco, por lo cual hemos de procurarle un material que le incite al trabajo (véase Cap. VII-6).

La evolución de la indiferenciación a la especialización, nos conduce a hacer una enseñanza simultánea en los primeros grados, mientras que en los últimos se puede dejar a los alumnos la selección individual de la clase de problemas cuantitativos en que desee trabajar, prestándose admirablemente a eso nuestra enseñanza.

Finalmente, el paso del interés por lo inmediato, al gusto por lo lejano, nos indica sobre qué clase de materias han de versar los ejemplos, las anécdotas y los problemas, empezando por cuestiones referentes al mismo niño (su mejor contador son sus dedos), siguiendo por la escuela, la casa, el pueblo, la nación etc., hasta los datos estadístiIos que abracen el mundo y la humanidad.

79. En resumen, podemos decir, que pocas son las actividades psicológicas del niño que pueden ser *utilizadas* para el estudio racional de la Matemática, justificando así en cierto modo el aprendizaje rutinario que durante tantos siglos se ha hecho, y que las capacidades que podamos *desenvolver* con el mismo estudio, han de serlo con una gran prudencia hacia el final de nuestros estudios. Esto patentiza, por otra parte, la necesidad de recurrir a los medios pedagógicos que hagan esta enseñanza grata y educativa, con el mayor cuidado y el máximo interés, siendo, por lo tanto, el estudio de estos medios pedagógicos de la más alta importancia, mucho mayor que aquellas otras disciplinas como la Geografía y la Historia o las Ciencias Naturales que tienen para el niño mayor atractivo, utilizan mayor número de actividades y desenvuelven facultades que aparecen dentro de la edad escolar.

Y a pesar de todo ello aseguraba Pestalozzi que *los niños tienen más gusto por los números que por las letras* (1). Esto podrá ser consecuencia

(1) Sobre la afirmación de Pestalozzi tenemos las conclu-

de su manera especial de enseñar unos y otras, pero existe un instinto humano, que de intento hemos dejado para el final, que justifica el interés y aun el apasionamiento por la Matemática. Es el instituto de lucha, que despierta ese interés si se le sabe comunicar un aspecto deportivo. Para ello el niño se encuentra con unos elementos dóciles, números, instrumentos de dibujo geométrico, que puede manejar libremente para salvar dificultades crecientes e ilimitadas que puede terminar con la certeza de su victoria. Esto exige, para que exista el esfuerzo útil, que las cuestiones sean *adecuadas* a su entrenamiento, que esté fijada *la marca* que es preciso superar (operación nueva, mayor rapidez o exactitud que en las antiguas, problema de solución desconocida, etc.) y que se tenga la seguridad de haber alcanzado la meta, para lo cual es preciso que el maestro dé la solución de las problemas o que el mismo alumno pueda comprobarlos (prueba por 9 en la operación, comprobación en los problemas numéricos o geométricos) y aun muchas veces que el alumno conozca de antemano la solución que

siones de los experimentadores. Lobsien en Kiel halló que las preferencias de los niños, seguían este orden: *Dibujo, Gimnasia, Aritmética* ... y las de las niñas: *trabajo manual y aritmética*...

Stern obtuvo análoga conclusión. Mac Knight, en Norteamérica, halló para la Aritmética el primer lugar por 327 votantes, mientras que la historia sólo tuvo 164. Lewis, en Inglaterra, encontró que clasificaban la Matemática en el primer tercio de sus preferencias 16 niños; en el segundo, 53; y en el tercero, 31. Y Brandell, en Suecia, halló análogo resultado, aventajada en preferencia por el trabajo manual la enseñanza *Menagere* y el Comercio, pero preferida a la Historia, las Ciencias Naturales y la Gramática.

trata de alcanzar, en la seguridad de que el *fair play* (juego limpio), le llevara a no enmascarar para ello los resultados intermedios. Véanse entre otros los productos curiosos del Cap. VII—3.

El ideal estará, pues, en hacer de toda la enseñanza de la Matemática un campeonato continuo en que la rapidez, la exactitud, la facilidad, la precisión y el rigor lógico, la perfección, en una palabra, vayan aumentando sucesivamente de acuerdo con las características que como arte y como ciencia le hemos asignado.

3.—Génesis del concepto de número y de la extensión

80. En Aritmética se considera un cuádruple concepto del número entero:

a) *Como colección de unidades* percibidas simultáneamente, corresponde al número llamado *cardinal* y le origina la percepción directa en los números pequeños, y en los grandes, su agrupación en conjuntos discernibles (Euclides).

b) *Como un elemento de la serie natural o concepto serial*, en virtud del cuál un número sigue a otro. Según esto, 25 es el número siguiente a 24, obtenido agregándole una unidad. Se origina en la operación de contar sucesivamente y corresponde al llamado número *ordinal*. Hemholtz consideraba este concepto como el fundamental.

c) *Como relación entre la cantidad y la unidad*, se origina en la operación de *medir* y convierte en cierto modo las cantidades *continuas* en *discretas*. Newton, consideró a su vez fundamental este concepto y Tillich, lo llevo a la enseñanza.

d) *Como relación de números.*—Así el 6, no sería solamente lo anteriormente expuesto, sino que habría de ser considerado en todas las formas que lo originan, por ejemplo: $4 + 2$ y 2×3.

81. De estos cuatro conceptos, el que primero se forma en el niño y parece ha formado la humanidad, es el cardinal pero aplicado a los números pequeños. La primera distinción pacerce ser la de *uno* y *varios*. Se dice que algunas tribus de indios bolivianos llamados los *chiquitos*, no han pasado todavía de esta noción. El segundo paso parece que debe ser la consideración del número *dos*, debido a la presencia constante ante la mirada del hombre de las *dos* manos, los *dos pies*, etc.; en relación con esto se encuentran en algunas lenguas, entre ellas el griego, el número *dual*, además del singular y el plural.

Pronto, sin embargo, se aprecian conjuntos mayores, algunas aves notan la falta de un huevo de *tres* y aun *cuatro*, y el chimpancé parece poder apreciar hasta *cinco*; según las experiencias de Mme. Descoendres, los niños no adquieren esta habilidad hasta los seis años.

Siendo el concepto del número una síntesis de la unidad y la pluralidad, cabe preguntar cómo se percibe esta última y qué es lo que mueve a sintetizar una y otra. La pluralidad puede percibirse por la vista, manchas luminosas análogas sobre un fondo común; por el oído, intervalos de sonido y silencio, y por el tacto, elevaciones y depresiones. La sensibilidad interna, según William James sería, sin embargo, la determinante, al percibir los períodos alternativos de atención e inatención.

Como causa de la síntesis, podemos señalar la tendencia a la unificación característica del espíritu humano (Abel Rey, Psicología), y en cuanto se refiere al sentido de la vista, la extensión en que aparecen los objetos. A este respecto, son interesantes las experiencias de Binet, según lacuales, una niña apreciaba como mayor la pluras lidad que por tener mayores sus objetos ocupaba más espacio (1).

De todos modos, el origen concreto del número es evidente y así lo demuestra el nombre primitivo de muchos números (dos = dedos de avestruz, cinco = mano; siete = hoja de castaño de Indias), y aun la representación de los números entre los pueblos antiguos, por ejemplo, los egipcios, para los números pequeños empleaban tantas rayitas como unidades, y algo análogo ocurre en la numeración romana.

La relación estrecha que guarda el número con la extensión puesta de relieve en la experiencia de Binet, está confirmada históricamente por el hecho de que los griegos estudiasen las relaciones cuantitativas en forma geométrica.

El uso de piedrecillas (calculi), por los romanos para calcular, y el empleo de los ábacos por los diferentes pueblos, prolongado hasta el siglo XVIII en la Administración francesa, indica lo difícil que les ha sido a los hombres concebir de un modo abstracto los números y operar con ellos.

82. El concepto serial del número, según el cual, cada número resulta de añadir una unidad

(1) Es también decisivo el caso citado por Decroly y Degand de la niña que teniendo un par de cerezas en cada oreja no sabía decir, que tenía en total 4 cerezas, sino *dos* y *dos*.

al anterior es de una trascendencia extraordinaria para el desenvolvimiento de la Aritmética, puesto que hace posible la suma al agregar a un sumando una a una las unidades, contenidas en las demás y con ella todas las operaciones. A él parece haber conducido la operación de contar ordinalmente, indispensable en cuanto los conjuntos son algo numerosos, y esto se relaciona con la interesantísima cuestión de si se inventaron primeramente los números ordinales o los cardinales, habiendo opiniones para defender una y otra tesis. El hecho patentizado por Mlle. Descoedres, de que los niños identifican mejor un conjunto aun pequeño, contando que apreciándolo, da un argumento en favor de la prioridad de los ordinales. Según sus experiencias, a los seis años un niño sólo determina *cuántos* objetos hay en un conjunto hasta *cuatro* objetos, mientras que contando llega hasta *cinco* a los dos años y medio. La niña de Stern solía contar serialmente los dedos de la mano, pero no decir cuántos tenía.

Aplicaciones.—1.ª Durante mucho tiempo, el niño ha de adquirir el concepto del número de un modo intuitivo, primero con objetos coloreados que vea y toque para contar, luego con imágenes y después con símbolos que recuerden los objetos concretos.

Desde este punto de vista, es altamente recomendable el *álbum numérico*, donde el niño colecciona clasificadas imágenes de diferentes conjuntos. La intuición debe hacerse extensiva a las unidades de cada orden, por haces de palillos, por ejemplo, y esta intuición puede hacerse simbólica, representando con I las unidades, H las decenas y |=| las centenas.

2.ª La estrecha unión existente entre el número y la extensión justifica una vez más que se acuda a la representación gráfica de los números, para estudiar sus propiedades, y que la medición acompañe el estudio de los números, y sus resultados sirvan de base para las operaciones.

3.ª Es conveniente para facilitar la tendencia a la síntesis antes indicada, agrupar los objetos que forman el número para dar la sensación del conjunto; por ejemplo, que los cuatro cubitos que hacen intuitivo el número 4, presenten un cuadrado a los ojos del niño, y en último término, encerrarlos dentro de un contorno, circular, cuadrado, etc.

83. El número como relación, tiene toda la importancia que le da su gran generalidad y el ser la base de la comparación de cantidades. Claro es, que surge con toda precisión de la medida, pero mucho antes que el niño llegue a ella, compara cantidades aproximadamente y a ello puede incitársele en conversaciones; lo aplica en el dibujo, y sistemáticamente se desarrolla con ejercicios como los de comparar casas de diversas alturas; determinar el número de vasos que pueden llenarse con botellas de diferentes tamaños; y algunos otros juegos utilizados en las escuelas francesas (véase nuestra *Memoria*).

Los quebrados sencillos surgen inmediatamente con este concepto y deben emplearse desde el principio en la escuela.

84. El concepto analítico del número, no se obtiene sino como consecuencia de la enseñanza y puede ser útil y debe efectuarse aplicándolo a los números hasta el 10 y aun al 12, componiéndolos y descomponiéndolos de todas las maneras posibles, es decir, haciendo de ellos un verdadero estudio monográfico.

En general, debe limitarse en los números mayores a considerar su forma en el sistema decimal; así, 26 no es 25 + 1 sino 20 + 6, y en particular deben ponerse de manifiesto aquellas estructuras útiles en el cálculo, como por ejemplo:

$$9 = 10 - 1;\ 11 = 10 + 1;\ 49 = 50 - 1;\ 99 = 100 - 1$$
$$1{,}5 = 1 + 1/2;\ 1{,}25 = 1 + 1/4$$

que nos proporcionan una gran simplificación en las operaciones, en el caso de que entren estos números, como multiplicadores de números enteros o decimales.

85. *Génesis del concepto de la extensión.*—El concepto de espacio, como el de tiempo, es para muchos como una idea innata. Tal vez aquel nazca de la percepción del conjunto de sensaciones internas primero y externas después, que referidas al extremo periférico de los nervios correspondientes crean la sensación confusa de la existencia de un *no yo* extenso al que se llama espacio.

Pero la cuestión más importante para nosotros, es la de cómo al concepto de este espacio se le añade la relación de cantidad y las de dimensión. Tal vez por la propia verticalidad del hombre y por la horizontalidad con que están colocados los ojos, el hombre distingue fácilmente estas dos dimensiones, *direcciones*, de las restantes y un lento juicio comparativo de las distancias le va dando el concepto correspondiente de cantidad. En ello ha de influir el sentido muscular por la sensación de esfuerzo requerida por el movimiento de los ojos al seguir la línea cuya longitud se trata de apreciar; por esto la apreciación es más exacta para las líneas horizontales, menos para las verticales y menos aún para las inclinadas. Y la apreciación visual de la extensión superficial, permanece siempre deficientísima, como resultado que es de los anteriores. Solamente cuando el ojo puede seguir fácilmente el contorno de la superficie, al medir en cierto modo aquél, aprecia ésta con mayor exactitud. Serían convenientes experimentos en este sentido. Claro es, que las sensaciones cinestésicas determinadas por el movimiento de otros órganos contribuyen también a dar la sensación de cantidad espacial: nótese el movimiento de los brazos cuando queremos expresar un gran volumen.

86. De adquisición más lenta es la percepción de la tercera dimensión. Los niños se equivocan grandemente al apreciar distancias en el sentido del alejamiento. Los ciegos operados, parece que ven todos los cuerpos como situados en un mismo plano. Los pintores primitivos carecen de perspectiva y lo mismo les ocurre a los niños en sus primeros dibujos.

También aquí las sensaciones cinestésicas desempeñan un gran papel. Ellas nos dicen el *mayor* o *menor* esfuerzo que hemos de hacer para alcanzar con la mano un objeto próximo o *cuánto* hemos de caminar hasta llegar a un objeto lejano. Con esto se relaciona pronto el esfuerzo necesario para converger los ejes oculares en el punto en cuestión. Más tarde se relaciona también con el tamaño aparente de los objetos, con la diferencia de detalles debida al diferente punto de vista con cada ojo, aun cuando se fundan los dos imágenes en una, y finalmente con la diferencia de iluminación que presentan los objetos y el agrisamiento progresivo que la interposición del aire determina, motivo por el cual los colores *cálidos*, rojo, amarillo, etc., nos parecen más cercanos que los *fríos*.

87. El concepto de la extensión se precisa con la apreciación de distancias hechas por la vista o el movimiento de las manos comprobadas con la medida; apreciación de inclinaciones, comprobadas con el semicírculo graduado, y sobre todo, el dibujo como medio de expresión de la percepción especial.

Especial importancia tiene el saber *ver* en el espacio, esto es, el dominio de la tercera dimensión. A esto se acude con los modelos realizados en el espacio, de los cuales, el más sencillo y educador es el cubo, por ser como el esquema de las tres dimensiones, modelos que no sólo deben ser presentados sino *ejecutados* por los niños. La visión estereoscópica, es recomendable así como el uso de las *anaglifas* que despiertan la curiosidad del niño al ver cómo se *incorporan* las líneas rojas o verdes trazadas en un papel miradas con anteojos de los mismos colores. El empleo constante de la perspectiva en el dibujo y la pintura correctamente enseñadas, ayudan a este fin y aun añadiríamos unas nociones de dibujo de objetos en planta, alzado, y aun sección transversal, utilísimo para oficios como el de carpintero, albañil, etc., y que contribuirían en la escuela a manejar mejor los conceptos espaciales; como se ha demostrado experimentalmente que contribuye a ello el estudio de la Descriptiva.

88. En relación con el concepto de extensión se halla el de la *forma*, cualidad apreciada desde los primeros grados de la evolución *psicológica* independientemente de la extensión. Los chimpancés estudiados por Köhler reconocían claramente sus retratos, y los objetos fotografiados. Según los experimentos de Miss Shirm, una niña menor de un año tenía miedo del retrato de un gato. A los veintiún meses, llamaba *triángulo* a la correspondiente porción de un cuello de pajarita. A los veintidós meses, llamaba cuadrado al cubo, pero no lo confundía con la esfera. El niño de Stern quería utilizar un biberón de juguete 15 veces menor que el suyo. De todos modos las formas interesantes aunque complicadas, son reconocidas antes que las formas geométricas más sencillas.

89. Otra cualidad infantil notable, es la independencia de la *forma* con relación a la *posición* siendo los niños capaces de leer con el libro invertido o en un espejo, y sabido es, que no le dan importancia a tener al revés un libro de estampas. Según experimentos concluyentes, lo mismo les sucede a los negros *bantús*. Al hombre, por el contrario, le es esencial la posición de la forma para su reconocimiento, y aun se dan paradojas acerca de ello, como el hecho de que parezca mayor un cuadrado colocado de punta, que situado horizontalmente.

90. Una última ley psicológica notable hemos de hacer constar: La tendencia a referir *formas y magnitudes* a su verdadero ser, independientemente de la posición y la distancia. Así cuando vemos a cierta distancia un hombre o una casa, no lo creemos ni del tamaño de un niño de una casa de juguete, sino que los referimos a sus verdaderas magnitudes. Kohler, realizó sobre esto, un experimento verdaderamente concluyente con un chimpancé de cinco años. Le habituó a señalar de dos cajas la que presentaba mayor superficie frontal, y, conseguido esto, sin titubeo, alejó la caja mayor hasta que su tamaño aparente fuese menor que el de la otra, a pesar de lo cual, el chimpancé siguió señalandola como la mayor. Creemos, sin embargo, que ésto sea una ley limitada, pues todos recordamos la impresión de pequeñez que nos han dado hombres y casas vistos desde una altura considerable.

Análogamente sucede con las *formas*: cuando vemos en escorzo un cuadrado y se nos aparece como un triángulo, *sabemos*, sin embargo, cuál es su verdadera forma, y reconocemos en el ángulo agudo el recto. Esta preferencia por las formas ortoscópicas, es explicada por una tendencia a las formas regulares que se nota en niños y adultos, y así no es que percibamos como rectos los ángulos agudos, dice Kofka, porque veamos constantemente ángulos rectos, y vayamos mentalmente a lo conocido, sino que en la realidad vemos los tales ángulos agudos y nuestra preferencia por la forma regular hace que los consideremos rectos.

Esta constancia de *formas* y *magnitudes* que es de la mayor importancia para el conocimiento real del mundo a pesar de su aspecto ficticio, tiene, sin embargo, inconvenientes para el dibujo por la tendencia a reproducir no como vemos, sino como *pensamos*, y es condición que el maestro debe tener muy en cuenta para enseñar a ver y a reproducir en el dibujo donde es necesaria la corrección, mientras no lo es en el *modelado*, que desde este punto de vista se prestaría mejor a que el niño diese una interpretación de su percepción de formas y magnitudes.

NOTAS AL CAPITULO V

1.—*Génesis del número según Decroly*

Decroly, distingue en la génesis del concepto del número, las fases siguientes que cultiva en su método:

1.° Noción de la presencia y ausencia.
2.° Facultad de diferenciar e identificar.
3.° Estado de repetición.
4.° Noción de unidad y pluralidad. Noción del 2.
5.° Noción del 3.
6.° Facultad de comparar los tamaños.
7.° Noción del 4. Análisis y síntesis.
8.° Noción del 5. Primera noción de la fracción.

Estas fases, que tan fino análisis suponen, son de utilidad a nuestro juicio en la enseñanza para anormales en que la evolución se realiza con un ritmo más lento, pero no tienen gran valor práctico para la educación del niño normal.

2.—*Los estímulos*

Algunos psicólogos americanos, han establecido listas de estímulos utilizables en toda enseñanza, y más necesarios que en ninguna otra en el estudio de la Matemática. A continuación damos dos de estas listas, debida una de ellas a un fecundo cultivador de nuestra Metodología. El lector podrá buscar en ellas la explicación de procedimientos que proponemos y hallar sugestiones para otros nuevos.

Parker	*Thorndike*
1. Interés en aventuras.	1. Actividad física.
2. Idem en acciones de personas y animales.	2. Acertijo.
3. Deseo de aprobación.	3. Amor propio.
4. Canto, sonido y ritmo.	4. Novedad.
5. Curiosidad por lo maravilloso o complicado.	5. Uso práctico.
6. Deseo de comunicarse con los demás.	6. Lo que otros hacen.
7. Actividad física.	7. Sociabilidad.
8. Coleccionar.	8. Rivalidad individual.
9. Imitación.	9. Idem colectiva.
10. Juego en grupos.	10. Invención.

3. *Los números pequeños y los grandes números*

Está claramente reconocido como perniciosa, la antigua costumbre de hacer escribir y manejar a los niños grandes números, superiores siempre a los que pueden concebir y a los que caen dentro de su órbita de interés.

Ya hemos mencionado la limitación del número que tienen los niños pequeños, según las experiencias de Mlle. Descoedres, y los de algunos salvajes. Los Bakari que viven en un afluente del Amazonas, dan nombre a los números hasta 6, y para indicar números mayores, cogen un mechón de sus propios cabellos. Los *botokudos*, como los *chiquitos* citados, no distinguen ya entre 2 y 3 al menos por el lenguaje.

El hecho de que hasta mil haya cierto parentesco entre las palabras que expresan los números, parece indicar que los hombres primitivos no alcanzaron esa cantidad hasta después de su separación, esto es, muy avanzada la civilización.

La palabra *millón* no aparece hasta 1362, lo cual indica, que antes no fué echada de menos, y la palabra *millard* = mil millones, no se empleó hasta el siglo XIX y para cuestiones financieras.

La Astronomía es la ciencia que necesita emplear números mayores, y la sigue la Físico-Química; por ejemplo, las distancias a las estrellas se cuentan por billones de km. y el número de moléculas de 15,5 l. de un gas es de 24 avo orden. Luego vienen las finanzas, y en la vida ordinaria, los números suelen ser de 5 cifras.

Como medio de dictar números de muchas cifras, todas significativas (en las ciencias, por el valor aproximado de sus números, son ceros las últimas), citaremos el de Sessa, número de granos de trigo pedidos por el inventor del ajedrez.

$$18_3\ 446\ 744_2\ 073\ 709_1\ 551\ 615$$

Un céntimo colocado al 4 por 100 de interés compuesto, hace 1875 años se habría convertido en

$$865\ 486_4\ 626\ 476_3\ 236\ 508_2\ 270\ 156_1\ 786\ 660 \text{ pts.}$$

Quince personas se pueden poner en fila de

$$1_2\ 307\ 674_1\ 638000$$

maneras distintas.

Para hacerse idea de este número diremos se necesitarían 41.000 años, aun cuando sólo empleasen un segundo para cambiar el orden de la fila.

Finalmente, el número más grande que puede escribirse con *tres* cifras es 9^{9^9}.

Para escribirlo, se necesitarían 28 años y 48 días trabajando 10 horas diarias y anotando una cifra cada segundo, y si cada cifra ocupaba 4 mm., se necesitaría una banda de papel de 1.478 km., 772 m., 40 cm., casi igual a toda la costa española del Atlántico (1.481 k.).

4.—*Psicología de las razas.*

Creemos interesante la siguiente información sobre las cualidades matemáticas de la raza negra africana en estado salvaje, por lo que pueda representar de *infantilismo*, aplicable por lo tanto a los niños pequeños.

«Lo más chocante es que el negro aprende muy fácilmente un idioma, pero encuentra las mayores dificultades para asimilarse las nociones de cálculo. Para ellos, la noción del tiempo, es tan poco precisa que casi no existe. Es por lo tanto inútil calcular el tiempo. Ninguno es capaz de decir su edad. Saben únicamente que su nacimiento coincidió con un acontecimiento notable que todos recuerdan.

No tienen tampoco idea de la medida. Salen del paso con lo que tengan a mano. Lo mismo si se trata de longitudes que de superficies o volúmenes, una caja de hoja de lata es para ellos la unidad de medida.

Pueden contar hasta mil, pero sin noción clara. Si un indígena dice que ha visto muchos antílopes y para precisar se le pregunta, *¿cuántos?*, responderá que tres o cuatro.

La idea de fracción, es inabordable para los negros. Les es tan extraña que no han experimentado nunca la necesidad de una palabra que la exprese. En su lengua, se encuentra la voz *parte*, pero nada que signifique mitad, ni mucho menos partes iguales.

La solución de un problema, es para ellos cuestión de memoria, utilizando una cuestión análoga que se les haya presentado por casualidad en el curso de su vida. En caso contrario, no hacen ningun esfuerzo, y a la pregunta del Maestro responden: Tú eres quien me lo ha de decir. Para un negro, un problema es una historia en que entran dos números. Lo más claro es que les digan: Haz una suma o una resta.»

(De *L'Education Enfantine.*)

5.—*Dos y dos son cuatro*

En esta frase, tan utilizada por el vulgo para expresar una verdad evidentísima, ven algunos intelectuales una simple *tautología*, esto es, que se expresa la misma idea con diferentes palabras (decir *dos y dos*, es lo mismo que decir *cuatro*) y que, por lo tanto, no se dice nada; pero lo mismo sería decir *que* 25 *y* 17 *son* 42, lo cual no es tan evidente.

La evidencia de esta afirmación, reposa en el concepto intuitivo del número combinado con la claridad de la operación de sumar, representada por la conjunción, y gráficamente podríamos expresar la proposición anterior.

$$!! + !! = !!!!$$

Si suponemos desaparecido el signo $+$, intuitivamente son iguales ambos miembros de la expresión, y a esto es a lo que alude el vulgo como máximo ejemplo de evidencia, que no percibe en $25 + 17 = 42$ por carecer del concepto intuitivo de estos números.

Este concepto es difícil de adquirir en cuanto los números son un poco grandes y a causa de ello se sustituye por el *concepto serial* en el cual cada número está formado agregando una unidad al anterior. Así mientras el concepto intuitivo de 4 está proporcionado por !!!! u otro conjunto análogo, su concepto serial es $4 = 3 + 1$... y ahora ya no es evidente la proposición que encabeza esta nota.

Para demostrarla partiremos de la primera expresión

$$2 + 2$$

y como 2

$$2 = 1 + 1$$

sustituyendo tendremos

$$2 + 2 = 2 + 1 + 1$$

pero como

$$2 + 1 = 3$$

sustituyendo de nuevo

$$2 + 2 = 3 + 1$$

y por definición del 4

$$2 + 2 = 4$$

como se quería demostrar.

Demostración en que hemos debido admitir que *un sumando puede descomponersz en suma de otros* y que *los dos primeros sumandos puedan sustituirse por su suma efectuada.*

La cuestión planteada pudiera parecer minúscula, pero responde a una preocupación popular, compara conceptos de números, precisa el mecanismo de la demostración... y mereció que Leiniz se ocupase de ella.

CAPITULO VI

CARACTERES GENERALES DE LA ENSENANZA DE LA MATEMATICA

1. — La graduación

91. Su necesidad.—La disposición en grados de la enseñanza fundada en general en la debilidad inicial de las facultades psíquicas que le impide adquirir en una primera etapa los conocimientos referentes a cualquier disciplina, y en el progresivo desenvolvimiento de esas mismas facultades que le permiten vencer sucesivamente las dificultades, está más imperiosamente justificada en lo que se refiere a la enseñanza de la Matemática, por la mayor dificultad de esta enseñanza, como hemos señalado en capítulos anteriores, y además, porque en Matemáticas el encadenamiento lógico, exige no sólo el conocimiento, sino el dominio completo de una etapa antes de pasar por ejemplo, la simple práctica de la división a la siguiente; así, exige el dominio de las tres operaciones anteriores, el estudio de las propiedades de un rectángulo requiere el conocimiento de las propiedades de los segmentos, ángulos, paralelismo y perpendicularidad.

92. Sus caracteres.—Existe una gradución propia de la Matemática, seguida ciegamente hasta no hace mucho en nuestras escuelas: la que estudia los enteros antes de los quebrados, y las diversas operaciones en su orden lógico de sucesión. Como en Geometría estudia la Plana antes de la del Espacio, y dentro de éstas, las figuras geométricas en orden de complicación creciente: rectas, ángulos, polígonos, circunferencia, etc. (Véase el índice de nuestro *Nuevo Tratado de Geometría*).

Pero esta gradación que en líneas generales es indispensable por ser genética, esto es, porque cada elemento engendra el siguiente, se aplica en cada grado de la enseñanza, pero cada grado a su vez se determina, en Aritmética, por la cuantía de los números que se emplean. Así, en gradación sucesiva se estudian las operaciones numéricas y aun se inician las propiedades (descomposición en factores) con los 10 primeros números; después con los números hasta 20; más tarde hasta 100, y después hasta 1.000; 100.000, e indefinidamente. Se consigue así limitar el campo de acción a números que el niño concibe y por los que se interesa, y al simplificar las operaciones ponerlas al alcance de sus escasas capacidades, sobre todo de su débil capacidad de atención sostenida. En el Sistema Métrico la gradación estará determinado por las unidades que el niño pueda utilizar y concebir, así serán las primeras el dm., cm. y mm., y el kg., g. y l., aun contra lo que suele hacerse.

En Geometría cabe discrepancia en el punto de partida, si éste ha de ser de lo *real*, esto es, de los sólidos en el espacio, para descender a los elementos planos, o ha de partirse de lo sencillo, que es el punto y la recta, para ir a lo complejo. Un criterio armónico es el mejor, empezando, en efecto, por el conocimiento de los sólidos: esfera, cilindro y cubo, como quería Fröebel para pasar en seguida al plano y continuar en él, si bien no con el rigor clásico, sino que en cada grado puede estudiarse la parte plana y la parte espacial; así, por ejemplo, el estudio del cubo, con sus consecuencias de volumen, perpendicularidad en el espacio, ángulos triedros, etc., puede hacerse incluso al final del primer grado, antes que los polígonos en general.

La preferencia por la Geometría Plana está determinada con seguridad completa por la mayor sencillez de sus figuras y sobre todo por la mayor facilidad que tiene el niño para *operar* en el plano. Basta citar como ejemplos la facilidad con que el niño percibe el área de una figura por el procedimiento natural (descomposición en cuadrados iguales a la unidad), con la dificultad que presenta para análoga percepción en los volúmenes, y la enorme diferencia existente entre el trazado de la perpendicular a una recta o a un plano (de que ya nos ocuparemos.)

En definitiva propugnamos una graduación del contenido de la Matemática predominantemente psicológica para formar los grados, por la complicación relativa de números o formas, pero una graduación genética, esto es, la propia de la ciencia dentro de cada grado.

93. La gradación en las definiciones.—Dentro de cada grado la enseñanza debe adaptarse a la capacidad del niño; sería absurdo definir a un párvulo la esfera, el cilindro y el cubo que distingue perfectamente. En el concepto que tenemos de los seres suelen considerarse tres etapas: en la primera, el objeto es claramente percibido y con esto nos contentamos; este es el concepto que todo el mundo tiene, por ejemplo: del caballo; en la segunda, formada generalmente por la necesidad de expresión, definimos el objeto por *algunas* de sus cualidades que bastan para darlo a conocer. En el tercer momento definimos el objeto plenamente por sus cualidades esenciales. Estas mismas fases debe seguir la enseñanza de la Matemática. En la primera se dice: *esto es tal cosa*. Se traza una circunferencia y se dice: *esto* es una circunferencia. El niño pequeño no siente necesidad de más explicaciones. Se escribe, en el segundo grado un número mixto, por ejemplo $2\frac{3}{4}$ y se dice esto es un número mixto. Se pone un ejemplo de interés, sin necesidad de definirlo. Más tarde vendrán las definiciones imperfectas: una línea redonda es la circunferencia, como un cuerpo redondo es la esfera; el interés es la *ganancia*, etc.

Al final se darán las definiciones correctas de todos conocidas. Análogamente, 1 kg. es primero una *pesa*, después el peso de 1 l. de agua, más tarde el de 1 dm^3, en las condiciones sabidas. Hasta el cuarto año no dan los libros alemanes la definición de suma.

Observación.—Claro es que las definiciones intermedias no deben ser aprendidas de memoria.

X **94. La gradación en las demostraciones.**—El niño pequeño se conforma con una simple *comprobación*; a esto puede reducirse en un principio la propiedad conmutativa de la multiplicación, y el valor de la suma de los ángulos de un triángulo, y el teorema de Pitágoras, cuando los lados valen 3, 4 y 5, y el área de un triángulo.

Más tarde viene la demostración *intuitiva*: En la formación de discos que representa un producto, o en su representación gráfica, o en la tabla Montessori, pueden cambiarse las filas en columnas, lo cual equivale a invertir el orden de los factores; en la suma de los ángulos de un triángulo se reúnen los tres vértices por un doblez en el punto de la base simétrico del vértice con relación a la línea media; el teorema de Pitágoras se evidencia con la superposición señalada en la nota al capítulo anterior.

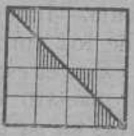


Fig. 32.

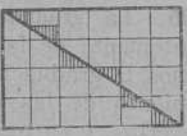


Fig. 33.

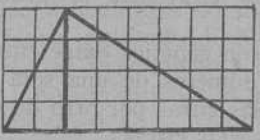


Fig. 34.

Pero cabe también una gradación aun más fina dentro de cada grado para aquellas propiedades difíciles de percibir. Tal es, por ejemplo, el área de un triángulo, figura en la cual se salta del procedimiento natural, intuitivo antes señalado al de equivalencia de superficies, y creemos conveniente evidenciar la equivalencia de uno y otro procedimiento justificada en llegar al mismo resultado. Las adjuntas figuras muestran la marcha de la demostración, haciendo notar la equivalencia de los trozos sombreados para que efectivamente el número de unidades de superficie (cuadraditos) sea el indicado por la mitad del producto de la base por la altura. La tercera figura, que es el caso general, se reduce como puede verse, trazando su altura al anterior. La primera figura, caso particular del triángulo rectángulo isósceles, no tiene otro objeto que hacer ver más clara la equivalencia por ser iguales todos los elementos a una parte y otra del lado, mientras que en la segunda sólo son iguales dos a dos.

95. La graduación en el cálculo.—Independientemente de la consideración de los automatismos, la graduación en el cálculo exige el escalonamiento de las dificultades. El maestro debe preverlas, y en todo caso observarlas en su práctica, y con arreglo a ellas ordenar sus ejercicios. Como ejemplo citaremos la graduación en la multiplicación.

La graduación genética exige empezar por multiplicar: 1.°, números de una sola cifra; 2.°, números de varias cifras por otro de una, y 3.°, dos números de varias cifras.

Estos tres grados naturales se descomponen a su vez en la forma siguiente:

1.° Multiplicar dígitos:

a) Productos hasta 10. Intuitivos, correspondiéndose con el primer grado elemental de que hemos hablado.

b) Productos hasta 20, correspondiéndose con el segundo.

c) Productos de los 10 primeros números por 1, 2, 3, 4 y 5.

d) Cuadrados de los 10 primeros números.

e) Productos por 6, 7, 8 y 9.

2.° Multiplicar por un dígito:

a) Multiplicar por 2, 3 y 4 *sin llevar*.
b) Multiplicar por 5 siendo pares las cifras del multiplicando.
c) Multiplicar por 2, 3, 4, 5, *llevando*.
d) Multiplicador, cualquier dígito.
e) Ceros en el multiplicando.
3.° Multiplicar números de varias cifras:
a) Multiplicar por 10, 100, 1.000.
b) El multiplicador tiene sólo dos cifras.
c) Tiene dos cifras y termina en un cero.
d) Multiplicador de tres cifras.
e) Idem siendo cero la intermedia.

Después de lo cual ya puede pasarse al caso general, sin necesidad de considerar casos de varios ceros intercalados o terminales, porque estos casos deben ser resueltos por analogía, ya que una gradación tan delicada y sutil que suprimiese todas las dificultades no desarrollaría las aptitudes y estaría en contradicción con el sentido deportivo, de vencimiento de dificultades, en que hemos indicado se halla el principal atractivo de la Matemática.

2. — El plan

96. Distribución general.—La enseñanza de la Matemática se distribuye en general en tres grados, cada uno de los cuales se desdobla en dos, cubriendo así el tiempo total de enseñanza desde los seis a los doce años. Cabe, sin embargo, considerar antes de los seis años un nuevo grado, de párvulos o de ***Kindergarten***, y después de los doce una ampliación hasta los catorce, que en nuestro país son hasta ahora más teóricos que reales.

a) La primera parte de nuestra enseñanza, en donde se da formando parte del plan de conjunto, está claramente definida, y se limita al conocimiento de las formas geométricas y al cálculo con objetos e imágenes generalmente hasta 20, pero llegando a 100 cuando la enseñanza en cuestión abarca dos o tres años; claro es que tales niños llevan al grado elemental de las escuelas primarias una valiosa preparación que los hace destacarse de los demás.

b) En la segunda parte, Escuela primaria corriente, nos encontramos con el plan francés excesivamente intelectualista que desde el primer grado emplea definiciones y reglas que aprender de memoria, grado excesivamente nutrido del que apenas son repetición y ampliación los siguientes. Los libros escolares alemanes, menos recargados de materia, pesan en cambio por el exceso de mecanismo calculatorio y la ausencia de procedimientos que hagan grato el aprendizaje, siguiendo siempre la gradación indicada por la complejidad de números y formas.

c) Por otro lado nos encontramos con una distribución más racional de la enseñanza en tres etapas, propuestas por Thorndike y seguida en muchas escuelas de América. La primera, llamada *preparatoria*, comprende tres años a partir de los seis, y en ella se tiende a que el niño se familiarice con los hechos matemáticos, análogamente a como antes de aprender gramática se familiariza con el lenguaje. La enseñanza comprende el concepto escritura y manejo de números pequeños de una y hasta tres cifras a lo sumo, y de algunos números fraccionarios sencillos, así como de los decimales de dos cifras; el conocimiento y manejo de las monedas y medidas más sencillas y usuales y el uso aceptable de muchos vocablos propios de la aritmérica. Se toma el juego como principal estímulo para la acción y se procura colocar al niño en situaciones en que tenga que utilizar las operaciones fundamentales, hallando él mismo en cuanto sea posible las reglas para operar. Se recurre también a los trabajos manuales como base para obtener problemas, y a los acertijos y problemas curiosos. En Geometría se estudian incidentalmente las formas.

Los tres años siguientes, tienen como base de actividad el trabajo, llevando cuentas de gastos e ingresos, levantando planos, construyendo cuerpos geométricos y de la vida real, y recurriendo en menor escala a juegos, acertijos, dramatización, etc.

Se estudian los números hasta 1.000.000 en operaciones fundamentales con enteros, quebrados y decimales, la conversión de unos en otros, la simplificación de fracciones. El sistema métrico completo; las abreviaciones útiles. El tanto por ciento, el interés y el descuento. Perímetro y área de cuadrados y rectángulos y el volumen de los paralelepípedos. La base del método es encontrar por sí mismo las reglas apelando a la intuición.

Finalmente, desde los doce a los quince años, y de acuerdo con lo dicho en el capítulo V, tiene lugar la enseñanza sistemática y racional, ampliándose el contenido anterior con el estudio sencillo de las fracciones periódicas, el empleo del álgebra en la resolución de problemas, mayor estudio de las operaciones con complejos, y cuestiones de porcentaje, mensuración y contabilidad. Comprendiendo la mensuración la longitud de la circunferencia, las áreas en general y los volúmenes de primas regulares, cilindro y cono de revolución y esfera. Aún se usa la *dramatización*, por ejemplo, para la contabilidad, y se extiende la aplicación de los proyectos (1).

97. Adaptación.—Considerando el único acorde con la psicología infantil el plan americano, pudiera adaptarse a nuestras circunstancias reduciendo a dos años la duración de cada etapa para incluirlo dentro de nuestros límites escolares. Y tal vez convendría densificar un poco los primeros grados tomando algo del conceptualismo y la ordenación metódica de tipo francés y la actividad calculatoria de los *Rechenbuch* alemanes ya que es preciso no desentonar del conjunto de la enseñanza y se satisface la tendencia al cálculo mecánico que hemos señalado en la parte psicológica.

98. La interpolación.—Una parte común a todos los planes que se consideren es la de no dar serialmente la Aritmética y la Geometría, según la forma en que usualmente se presentan. Por el contrario, en la enseñanza de la Matemática han de llevarse de frente los siguientes aspectos: *Operaciones y propiedades de los números.—Cálculo mental y escrito.—Sistema métrico decimal.—Ejercicios y problemas.—Geometría*, apoyándose unos conocimientos en los otros.

Así, por ejemplo, al estudiar las unidades, decenas y centenas en la numeración se consideran simultáneamente el *m. Dm.* y *Hm.* La suma y

(1) Este plan es perfectamente adaptable a las nuevas Bases, recién presentadas a las Cortes y que comprenden la enseñanza de 5 a 14 años.

y resta de enteros se hace coincidir con la de segmentos y ángulos. La multiplicación de enteros con la obtención del área del rectángulo, y con las medidas de superficie. El cálculo va dando el armazón mecánico en que reposa todo ello y los ejercicios y problemas sirven de revisión, complemento y aclaración de cuanto se expone, hasta tal punto que casi a estas dos últimas cuestiones pudiera reducirse toda la enseñanza sin más que intercalar las definiciones, intuitivas o verbales, que sean precisas.

3. — Condiciones del método para hacerlo asociativo y razonado

99. Necesidad.—La lectura del plan esbozado en el apartado anterior muestra una vez más que la enseñanza de la Matemática en la Escuela primaria ha de hacerse en general ocasionalmente y prescindiendo del rigor lógico. Esto le haría perder sus cualidades más bellas y educativas, el maravilloso enlace de sus verdades y el ser fruto del uso casi exclusivo de nuestra razón. Sería ir contra el precepto fundamental de que ha de verificarse la enseñanza y que ha de ser *racional*. Por otra parte, como dice *Grosgurin*, «comprender no es confiar a la memoria la muchedumbre de los procedimientos, sino que es aproximar hechos y establecer entre ellos relaciones que respondan al esfuerzo constante del espíritu hacia la coordinación y la unidad». Y por lo que respecta a la segunda de las condiciones, dice Laisant:

«No es lo esencial imprimir en la memoria imágenes, figuras y fórmulas, sino desenvolver la facultad de razonar.»

100. La asociación en Aritmética.—La gradación genética que necesariamente ha de tener la enseñanza de esta ciencia la pone a salvo del peligro de disociaciones, pero es preciso que el método de enseñanza recalque los enlaces de sus diferentes partes. Así, por ejemplo, como la suma es una manera de hacer más breve la operación de contar en sentido progresivo, las primeras sumas se harán constando en esta forma, y ello servirá de medio para *formar* por el propio alumno la tabla correspondiente.

La sustracción análogamente utiliza el contar regresivo y puede hacerse la misma observación, pero además es la operación inversa de la suma, y esto se evidencia resolviendo durante algún tiempo tras de cada ejemplo, concreto o abstracto de suma, los dos de resta correspondientes, lo cual además es grato a los alumnos porque les da normas para inventar ejercicios cuya solución conocen.

Lo dicho de la adición podemos repetirlo de la multiplicación como suma abreviada, y en cuanto a la división, su doble aspecto de resta abreviada también y de operación inversa, nos incita a repetir lo dicho para la sustracción.

En los decimales puede ponerse de relieve su simetría con relación a los enteros, y también el hecho de ser caso particular de los quebrados.

La generalización sucesiva de las definiciones hasta quedar solamente los de carácter absoluto, es otro modo de asociar las ideas. Así el *número*

abstracto		abstractas
entero		enteras
fraccionario	es un conjunto de unidades	fraccionarias
decimal		decimales
concreto		concretas

Y en las definiciones de las operaciones puede ponerse de manifiesto su gradación, desde la de tomar un número por sumando etc., o determinar cuántas veces un número contiene a otro, aplicables sólo a números enteros, hasta las de carácter general de todos conocidas.

Un excelente medio es, al final de los estudios, la exposición en cuadros sinópticos del contenido de la Aritmética y la comparación de detalles en que puede percibirse su admirable simetría. Así, por ejemplo, los casos de la

suma	y los de la	resta
multiplicación		división

101. La asociación en Geometría.—Más difícil de conseguir que la anterior, son, sin embargo, válidas para ellas algunas de las reglas dadas, y como elementos que tienden a la unificación introduciremos en la enseñanza los movimientos: *traslación paralela, giro, rebatimiento,* que a la vez que unifican dan vida y animación a la enseñanza; *las simetrías,* con relación a un punto, un eje y un plano; *y los lugares geométricos,* útiles, además para la resolución de problemas.

Conviene además poner de manifiesto relaciones que suelen pasar desapercibidas; por ejemplo, la llamada ***distancia***, tiene las características *de ser una, y ser la menor*. Así, la distancia entre dos puntos, de un punto a una recta y a un plano, o la línea de máxima pendiente, o entre dos puntos de una superficie esférica. Las formas paralelográmicas tienen por área el producto de su base por su altura, y las triangulares la mitad; las prismáticas tienen por volumen el producto de su base por su altura, y las piramidales el tercio. Y finalmente asociará grandemente propiedades y operaciones la apelación constante a la ***correlación***.

102. El aspecto cuantitativo.—Existe una asociación de la Matemática con el mundo material que es de la más alta importancia, es la que puede dar vida y animación a su enseñanza, la que muestra su utilidad y responde en la Aritmética al criterio de Kant de que el número era el intermediario entre el espíritu y el mundo exterior, y en la Geometría al pensamiento de Platón de ser las formas geométricas los modelos de los cuerpos. Y no es difícil asociar nuestra enseñanza con la vida en general. Se inicia con la formación del Album de Números y el de Formas que responde al intento coleccionador del niño y le hace buscar por todas partes estas relaciones. Se continúa con la representación cuantitativa y gráfica de cuantos fenómenos en la vida o en la sociedad son susceptibles de ello, por ejemplo, las variaciones en peso y talla del niño durante el crecimiento, las de la temperatura de un enfermo, los precios de las mercancías, las producciones, etc,

Finalmente, los problemas vivifican todos los datos recogidos, y muestran al niño a la realidad plegándose dócilmente a las combinaciones numéricas.

Claro es que todo esto alcanza su máxima importancia en relación con las otras ciencias. y los trabajos manuales de que hablaremos más adelante.

103. El razonamiento.—Hay reglas y propiedades que no pueden ser demostradas racionalmente en la Escuela. Unas veces por su propia dificultad, por ejemplo, la regla para la obtención de la raíz cuadrada (la demostración intuitiva que suele darse no nos satisface), y otras porque exijan conocimientos previos, como ocurre con las propiedades de los números primos que necesitan como antecedente las del máximo común divisor.

En general, en Aritmética el método que consiste en obtener por sí mismo las reglas y las propiedades hace que se razonen, no con el razonamiento explícito, difícil al niño y desagradable, sino con un razonamiento práctico e implícito que es diferente. Así para obtener la regla de multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, el método en cuestión lleva a proponer al alumno ejercicios como: *Hallar cuánto valen 3 veces 412. Hallar cuánto valen 3 veces, 521*, etc. A pocos ejemplos comprenderá que es más sencillo multiplicar por 3 cada cifra que sumarla 3 veces, siendo el mismo el resultado. Lo que no sabrá el alumno tal vez es expresar este hecho con la corrección con que lo hacen los libros.

En Geometría los procedimientos de superposición a que se acude en los primeros grados, son de menos valor porque en ellos el razonamiento está demasiado implícito. Así, por ejemplo, al transformar el triángulo A B C en paralelogramo la figura obtenida es evidentemente tal, pero si puede admitirse que en la contemplación del movimiento esté ímplicito que B cae en C por ser N B = N C, seguramente no lo está el que M N en la nueva posición sea paralela a A C y M B a A M.

Por ello es precirso ir habituando al alumno a

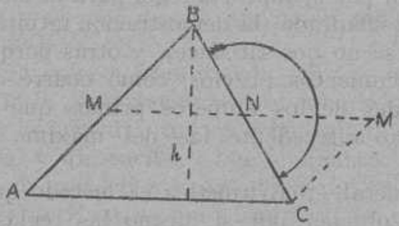


Fig. 35

precisar racionalmente el resultado de los movimientos y a convencerle de que las apariencias engañan con la *demostración* antes expuesta de 64 = 65.

También existen en Geometría verdades de imposible demostración en la Escuela primaria como ocurre, por ejemplo, con la fórmula del área de la superficie esférica, y en tales casos basta la comprobación intuitiva, pero advirtiendo siempre al alumno del escaso valor de tal procedimiento, mostrándole así la modestia de sus medios y la posibilidad de superarlos.

4. — Procedimientos que hacen la enseñanaa agradable, activa e intuitiva

104. La enseñanza grata.—El agrado de la enseñanza es en realidad una consecuencia de su adecuación a la capacidad, estímulos y demás cualidades del alumno, y por tanto de que esta enseñanza sea *activa, intuitiva graduada*, etc. Pero existen procedimientos que se dirigen directamente a hacer grata la enseñanza, unos de carácter general y otros especiales de la Matemática; para deducir unos y otros, remitimos al lector a nuestro capítulo sobre psicología infantil, especialmente a la parte que se refiere al carácter deportivo de nuestra enseñanza, (que es la nota más nueva y transcendente que podemos señalar) y a los estímulos que figuran en las Notas. A continuación damos un ejemplo de cada una de las clases citadas.

Apelación a la imaginación infantil.—Las anécdotas y las lecturas.

a) Como ejemplo de anécdotas de carácter matemático, citaremos la siguiente que en su fondo es rigurosamente histórica.

En un pueblo de Aragón se presentaron cierto día dos labradores al maestro. Se llamaban Antonio (A) y Basilio (B), exponiendo su caso. Cada uno tenía un solar junto a la casa del otro y querían naturalmente cambiarlos; les parecían de casi igual extensión y los gastos de escritura debería pagarlos el que tuviese el solar más pequeño, pues era el que salía ganando. El solar de A era cuadrado y el de B rectángular, más estrecho, pero más largo. Preguntaron los labradores cómo se medían exactamente los solares, pues sólo conocían la medida de los campos por la cantidad de semilla que podían recibir. El maestro les mostró el m^2 diciéndoles que esa era la unidad y que midiesen lo largo y lo ancho de los solares y volviesen a él que les diría exactamente cuál era el mayor. Volvieron, en efecto, los labradores, pero fué para decir al maestro que ya no le necesitaban. Los solares medían 6 m. de lado el cuadrado y 5×7 el otro; con un metro, una cuerda y un pico habían trazado en el terreno dos series de líneas perpendiculares entre sí (trácese la figura), con lo que habían quedado los solares divididos en m^2, y no habían tenido más que hacer que contarlos pasando por todos ellos para no equivocarse, resultando tener el cuadrado 36 m^2 y el rectangular 35 m^2.

Como puede notarse aparece aquí dramatizado en la narración (puede dramatizarse en la acción haciendo dos niños de labradores, marcando los solares, etc.) el *procedimiento natural* para la obtención de áreas, punto de partida de los que enseña la Geometría.

b) Otra anécdota interesante, ésta de carácter histórico, es la referente a la vara americana tomada sobre un patrón enviado de Castilla, pero al deshacer el envío hallaron los colonos españoles una hermosa vara de bronce con marcas divisorias que tomaron como modelo. Algún tiempo después se desprendió una cara de un extremo y apareció dentro la verdadera *vara* de Castilla que se enviaba con toda clase de precauciones. Por eso la vara americana es mayor que la enviada. (Como tipo de lectura véase la Nota de este capítulo, y como libro adecuado recomendamos, Arithmetique du Grand Papá de J. Macé.)

105. Con el fin de hacer ameno el cálculo pueden proponerse los ejercicios siguientes:

a) *Los cuadrados mágicos*, tienen la propiedad de que sus números sumados horizontal, vertical y diagonalmente dan el mismo resultado. Ejemplos:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

17	24	1	8	15
6	13	20	22	4
25	2	9	11	18
14	16	23	5	7
3	10	12	29	21

Existen también triángulos mágicos cuyos lados dan la misma suma. Ejemplo:

1	2	2
5 9	8 1	4 3
9 4	6 9	9 7
2 5 7 3	3 4 5 7	5 6 1 8

Para la multiplicación existen también cuadrados mágicos, dando producto, constante pero la excesiva magnitud de los resultados hace que nos limitemos a proponer el siguiente:

64	2	256
128	32	8
5	512	16

Pueden formarse también círculos y polígonos y hasta cubos mágicos, pero creemos basta con lo expuesto.

b) *Productos notables.*

1.° Si multiplicamos por 7 los números siguientes en progresión aritmética

15 873; 31 746; 47 619; 63 492; 79 365; 95 238; 111 111; 126 984; 142 857

obtenemos

111 111; 222 222; 333 333; 444 444; 555 555; 666 666; 777 777; 888 888; 999 999

Los niños inducen pronto estos resultados, pero creemos esto una ventaja en lugar de un inconveniente.

2.°

$$12\,345\,679 \times \left\{\begin{matrix} 9 \\ 18 \\ 27 \\ .. \\ .. \\ 81 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 111\;111\;111 \\ 222\;222\;222 \\ 333\;333\;333 \\ \dots\;\dots\;\dots \\ \dots\;\dots\;\dots \\ 999\;999\;999 \end{matrix}\right.$$

3.° Si multiplicamos por 37 los números en progresión aritmética

3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27

obtenemos

111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999

c) *Producto de varios factores*

$7 \times 11 \times 13$ por un número cualquiera de tres cifras *abc* da como producto *abc abc*, debido a que $7 \times 11 \times 13 = 1001$.

d) *Potencias curiosas:*

$$1^2 = 1 \qquad\qquad 9^2 = 81$$
$$11^2 = 121 \qquad\qquad 99^2 = 9801$$
$$111^2 = 12321 \qquad\qquad 999^2 = 998001$$
$$1111^2 = 1234321 \qquad\qquad 9999^2 = 99980001$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots$$

Estas potencias son interesantes, porque se prestan a una *generalización* determinando la forma de las potencias sucesivas, y fueron expuestas en el siglo IX por Ibn el Banna, matemático marroquí. Del mismo autor son los productos siguientes que se prestan a la misma inducción:

$$999 \times 222 = 22\ 17\ 78;\ 999 \times 666 = 66\ 53\ 34$$

El primer grupo del producto es el multiplicador con una cifra menos, el segundo el producto de 9 por la cifra del multiplicador menos 1, y el tercero se forma con la cifra última del anterior y ésta + 1.

e) *Productos y sumas.*

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$123456789 \times 9 + 10 = 111\ 111\ 111$$

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$987654321 \times 9 + 0 = 888\ 888\ 888$$

Otras muchas curiosidades del mismo género pueden tomarse de los libros que recomendamos en nuestra Bibliografía.

106. La enseñanza activa.—La actividad en la enseñanza se consigue por los procedimientos siguientes:

a) El juego, ya explicado en un capítulo anterior, y sobre el que insistiremos brevemente, notando cómo se confunde con la enseñanza intuitiva cuanto más nos aproximamos a la parte puramente matemática.

Ejemplo 1.° *El escaparate del panadero.*—Es

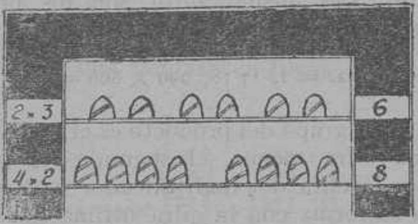


Fig. 36

un gran marco coloreado de azul que representa el escaparate del panadero. Se colocan los panes (de cartón o madera, amarillo-rojizos) en grupos iguales. Otros niños colocan en tarjetas a los lados el producto que cada agrupación representa. Figura 36.

Ejemplo 2.° *La casa de muñecas.*—Una casa con un cierto número de balcones *practicables*. Se entregan al niño un cierto número de muñequitos en cartulina y ha de colocar en cada balcón igual número de ellos.

Esto representa la división, en nuestro caso (figura 37) por 5. El resto se coloca en la parte inferior, siendo preferible, a nuestro juicio, que la casa careciese de ventanas y el *resto* hubiese de colocarse en la puerta de entrada.

b) *La dramatización.*—Consiste en representar algún paso de comedia relacionado con la enseñanza. El contenido en la anécdota inserta en el

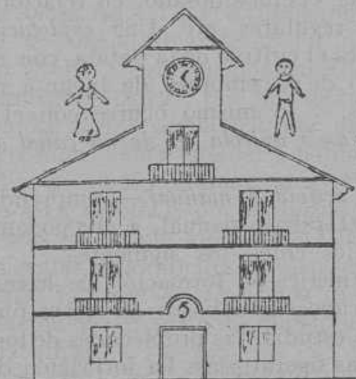


Fig. 37

párrafo anterior, o en otras obras como La Aritmética Inventiva de Nelson, pudiera servir de ejemplo.

También la dramatización interfiere con el juego, y de ello serían ejemplos: *La tienda*, juego interesante en que se compra, se vende, se dan facturas, etc. y *El Banco*, en que se hacen descuentos y se devengan intereses, y *La Casa* en que se lleva una modesta contabilidad propia de la *Economía Doméstica*.

c) *Los proyectos.*—Este método puede aplicarse con gran provecho a la enseñanza activa de la Matemática. *La construcción de una casa* con sus muebles da lugar a infinidad de problemas en que interviene la Aritmética y sobre todo la Geometría, desde el levantamiento del plano del terreno, la confección del plano del edificio, cálculo de espesores, áreas, distribución, dibujo de puertas y ventanas, el embaldosado, en relación con los polígonos regulares, etc. Una *explotación* de un campo para el cultivo de la patata, con el aspecto económico de la empresa, da lugar a numerosos problemas, y lo mismo ocurre con el proyecto de una *granja avícola*, el *de un canal de regadio*, etcétera.

d) *La actividad manual.*—Comprendida entre el juego y el trabajo manual, a ella podemos adscribir ejercicios como los siguientes:

En Aritmética la formación de haces de palillos, de grupos de cubos o de discos puede utilizarse para estudiar las propiedades de los números y las reglas operatorias. La formación de una escalera con dados da incluso una idea de las progresiones aritméticas. La actividad manual es necesaria para muchos ejercicios de la enseñanza intuitiva que luego veremos.

En Geometría con análogos elementos pueden construirse las figuras geométricas. Citaremos como ejemplo el empleo de los palillos, que debieran ser un poco mayores que los ordinarios y con los cuales se pueden formar líneas rectas y quebradas. Un segmento n veces mayor que otro. Comparar segmentos, incluso hallando la relación entre dos de ellos. Angulos rectos, paralelas y perpendiculares, todos los cuadriláteros, y sobre todo los polígonos regulares, triángulo equilátero, cuadrado, exágono, (obtenido por la agrupación de 6 triángulos equiláteros) pentágono regular, etc. Con ayuda de unas bolitas de cera o enebro pueden construirse también las figuras del espacio.

Algunos ejemplos más indicaremos al hablar del método de Fröebel.

e) *La invención.*—La actividad puramente intelectual se pone de manifiesto en la invención. Respecto a ello el gran pedagogo Tillich, decía: «Es tan antipsicológica y tan sin sentido empezar la enseñanza de la Aritmética por una masa de reglas heredadas como enseñar a hablar a un niño por medio de reglas gramaticales. Mientras las reglas no sean *obtenidas* por el mismo niño, la enseñanza será un simple mecanismo.» Para mostrar cómo las reglas más difíciles pueden ser obtenidas, indicaremos la serie de ejercicios que conducen a la obtención de la regla para multiplicar números de varias cifras.

Ejercicios: ¿Cuánto valen 10 libros a 5 pesetas cada uno? ¿Y 10 sombreros a 15 pesetas? ¿Cómo se multiplica un número por 10? ¿Cómo se multiplicará un número por 100?

Efectuar 345×20, 346×200, 164×30, $164 \times$ $\times 300$

. Efectuar 249×5 y 247×30. Obtener $247 \times$ $\times 35$ utilizando los productos anteriores.

Efectuar 246×4; 246×30; 246×2. Obtener 246×234 utilizando los productos anteriores.

Preparado así el espíritu del niño (puede prescindirse del último escalón), está en condiciones de conocer la simplificación que introduce en sus métodos la regla general a que se le envía a continuación.

En Geometría las áreas pueden estudiarse por el recortado de papel, invitando al niño a convertir un triángulo y un trapecio en rectángulo, así como un polígono regular (aquí con una ligera sugestión referente a su descomposición en triángulos), y por analogía puede transformar en un rectángulo mixtilíneo un círculo. La analogía le sugerirá métodos análogos para los volúmenes.

La simetría con relación a un eje puede obtenerse trazando una figura con tinta, y doblando el papel cuando aquélla esta fresca. Mejor aún puede hacerse dibujando la figura a un lado de una recta en papel transparente, doblando por la recta y calcando la figura en el otro lado. Análogamente puede procederse con relación a un punto mediante dos dobleces perpendiculares.

El uso del papel transparente y el de calco permite realizar en Geometría numerosas operaciones de comprobación de propiedades, reunión de elementos, superposición, etc.

107. La enseñanza intuitiva.—Los procedimientos para hacer intuitiva la enseñanza de la Matemática se reducen en último término a materializar los números de modo que puedan aparecer sus relaciones y propiedades, y a comprobar las relaciones existentes entre las figuras geométricas, realizando efectivamente cada operación que se indica.

La intuición tiene diferentes gradaciones eegún que se empleen objetos, de preferencia coloreados, imágenes o símbolos, pero nótese que esta gradación sucesiva ha de seguirse en la enseñanza hasta hacer innecesario todo el andamiaje intuitivo de sus primeros grados.

A fin de dar alguna idea de los procedimientos intuitivos expondremos algunos ejemplos.

a) *Los números.*—Los números pequeños se hacen intuitivos con objetos convenientemente agrupados. Preferimos los cubos y los discos coloreados porque pueden agruparse mejor. En imágenes pueden hacerse mediante representación de objetos o por puntos. La agrupación en este caso es esencial si se quiere que sean percibidos como un conjunto, habiendo resultado preferibles las agrupaciones simétricas y aquellas en que predomina la dimensión horizontal. Para los números grandes es preciso emplear haces de palillos como ya se indicó. Una representación simbólica para grandes números se obtiene fácilmente tomando I para las unidades H para las decenas y |=| para las centenas.

b) *Las operaciones.*—El manejo mismo de los objetos y de los haces de palillos hacen intuitivo el mecanismo operatorio. Las imágenes en que se pueden contar los objetos y una historieta que desarrolla la acción (ésta puede dramatizarse) dan los dos primeros grados de la intuición. Para el segundo tiene una excelente colección de imágenes la casa Nathan de París. Un tercer grado con la representación simbólica estaría dado por las figuras adjuntas que representan simples adiciones, la primera sin *llevar* y la segunda llevando. (Véanse las figuras 38 y 39 en la página siguiente).

Creemos, sin embargo, que el gusto que manifiesta el niño por el cálculo y su nula necesidad de explicación, hacen innecesarios algunos de estos grados en la escuela primaria para los niños pequeños, e inútiles, para los mayores, convenientes si acaso como ilustración.

c) *Las propiedades.*—Uno de los medios de

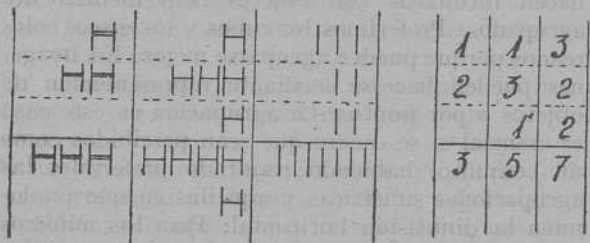


Fig. 38

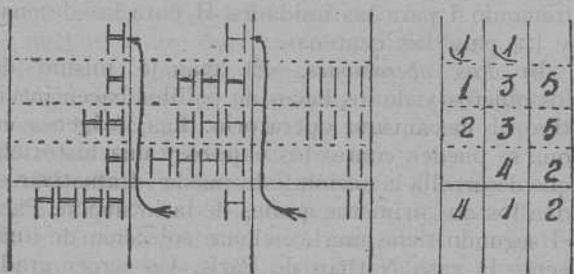


Fig. 39

hacer intuitiva la suma y la resta de números pequeños es formar una fila de cubos o discos de dos colores, por ejemplo: 5 rojos y 3 azules, la cual representa primeramente $5 + 3$ y después $8 — 5$ y $8 — 3$; pues bien, si a esta fila superponemos otras tres iguales, habremos tomado 4 veces las expresiones anteriores obteniendo así intuitivamente

$$(5+3)\times 4=5\times 4+3\times 4$$

y también

$$(8-5)\times 8-4-5-4 \text{ y } (8-3)\times 4=8-4-5-4$$

sin más que considerar las partes en que está descompuesto el todo.

Por medio de imágenes, con la representación gráfica de los números, puede hacerse como se indica en nuestra Aritmética Intuitiva.

d) *Las propiedades geométricas.*—Tratemos de hacer intuitivas las propiedades del cuadrado. Dibujaremos un cuadrado en el cual cada lado y las diagonales sean de colores distintos. Comprobaremos con la escuadra que todos sus ángulos son rectos, así como los formados por las diagonales. Con papel transparente le calcaremos con iguales colores y sujetando las dos figuras mediante un alfiler clavado en su centro, giraremos la superior para *ver* como coinciden los lados, las diagonales y las semidiagonales. La igualdad de los ángulos determinados por cada diagonal se comprueba mejor por doblamiento.

e) *En la obtención de fórmulas.*—En 94 hemos dado una demostración puramente intuitiva y graduada aplicable a los triángulos; indicaremos ahora algunas que refuerzan la obtención teórica, poco convincente para el niño y otras que sustituyan a demostraciones imposibles en la Escuela Primaria. Entre las primeras tenemos el volumen del cono y de la esfera. Obtenido con cierta facilidad el del cilindro, por analogía con las formas prismáticas, basta tomar un cilindro hueco de altura igual al diámetro en cuyo interior dos circunferencias marquen la división de su altura en tres partes iguales. Ahora un cono hueco de igual base y altura lleno de agua o arena no alcanza a llenar sino el tercio del cilindro, y una esfera de diámetro igual llenará los dos tercios.

Entre las fórmulas imposibles de obtener contaremos el valor de π y el área de la superficie esférica.

Para hallar la primera se toma una caja circular o una rueda pequeña y se miden su diámetro y su contorno arrollando una cuerda, y dividiendo éste por aquél obtenemos 3,14. Se repite la experiencia con cajas circulares o ruedas de tamaños muy diferentes para hacer notar que el valor es siempre el mismo.

Puede hacerse también la operación dibujando una circunferencia sobre la pizarra o en una tabla, y clavando alfileres en buen número en su contorno, pasar por estos una cuerda para medir el contorno, continuando como anteriormente.

Para hallar el área de la superficie esférica disponemos del cilindro y la esfera citados anteriormente. Una cuerda gruesa se arrolla lateralmente al cilindro hasta que cubra toda su superficie, y veremos que la misma longitud de cuerda cubre la esfera. El área del cilindro era $2\pi r \times \times 2r = 4\pi r^2$, y esta misma expresión nos dará el área de la superficie esférica.

Nosotros hemos relacionado la manera anterior de hallar los volúmenes de los cuerpos redondos con este procedimiento para obtener el área de la esfera en un aparatito que hemos bautizado con el nombre de «Arquímedes» en memoria del sabio griego que estudió científicamente los volúmenes de los cuerpos redondos (1).

5. — El automatismo en la enseñanza

208. Su papel.—El automatismo en el cultivo de la Matemática tiene una amplia esfera en cuanto se refiere sobre todo a los procedimientos de cálculo, y en efecto el arte de calcular ha de ser un puro automatismo para que la atención pueda quedar libre en la persecución de la solución del problema planteado, y sobre todo para que las operaciones se realicen con la rapidez y la exactitud que requieren, con la misma rapidez y exactitud que lo haría una máquina de calcular.

Su importancia es extraordinaria no sólo por la que tiene la adquisición de tales cualidades, sino además porque es preciso adquirirlas plenamente con el mínimo de esfuerzo. Junto a esto apenas si tiene relieve el aprendizaje de definiciones, reglas y fórmulas.

209. Reglas del automatismo.—1.° Los automatismos se forman más fácilmente en la infancia y por ello es adecuada la edad escolar para la adquisición del mecanismo del cálculo.

2.° Todo estado de sugestión facilita la adquisición del automatismo, bien provenga del prestigio personal, del número o del ritmo. Por esto las operaciones que el niño ve y oye realizar al maestro se

(1) Véanse las láminas del material EYA al final.

le graban más profundamente, así como aquellas que realiza en coro con los demás alumnos, y por esto se ha aprendido con una envidiable facilidad la regla de multiplicar cantando durante muchos años.

3.° Es esencial *el deseo* de adquirir el automatismo y el *interés* por hallar el resultado. Bien conocido es el caso del sujeto de Psicología experimental que después de varios cientos de repeticiones de un *test* de palabras sin sentido no se había aprendido ninguna, porque en las instrucciones que le dieron no figuraba el que había de aprenderlas de memoria. Esto nos pone en guardia contra la confianza del niño en el uso de la tabla. Debe persuadirse de que ha de prescindir de ella cuanto antes.

4.° Cuando un automatismo es compuesto se necesita el pleno dominio de los automatismos elementales de que se compone. Por esto es de una gran importancia el determinar cuáles son en el cálculo los automatismos fundamentales, que no están reducidos a las tablas de las cuatro operaciones fundamentales, sino que, por el contrario, han demostrado los *tests* manejados principalmente por psicólogos norteamericanos que son más numerosos y que abarcan una gran extensión de números. Así en la suma es preciso considerar la adición de números de dos cifras con otro de una sola, y en la división, la inexacta con la consideración del resto. La tabla adjunta que tomamos de Thorndike resume lo expuesto. El valor de dominar los automatismos fundamentales está demostrado con los siguientes datos: En un *test* de sumas de varias cifras, si en las sumas elementales se había alcanzado un 960 por mil de exactitud

Suma	Resta	Multiplicación	División
1 + 1	2 — 1	1 × 1	2 : 1
1 + 2	2 — 2	2 × 1	2 : 2
1 + 3		3 × 1	
.....	3 — 1	......	
1 + 9	3 — 2	9 × 1	3 : 1
	3 — 3		3 : 2
11 (21 — 31 ...) + 1		1 × 2	3 : 3
11 » + 2	4 — 1	2 × 2	4 : 1
11 » + 3	4 — 2	3 × 2	
....	4 — 3	.....	4 : 2
		......	4 : 3
11 » + 9	4 — 4	9 × 2	4 : 4
2 + 1			
2 + 2	5 — 1	1 × 3	5 : 1
....	5 — 2	2 × 3	5 : 2
			....
2 + 9	5 — 3	3 × 3	5 : 5
			....
			....
12 (22 — 32 ...) + 1	5 — 4		9 : 1
12 » + 2	5 — 5		9 : 2
....	.. ..	.....	....
12 » + 9		9 × 3	9 : 9
....		......	
....	. .. .	.....	10 : 2
			.....
9 + 1	9 — 1	1 × 9	10 : 9
....	......		. ...
9 + 9	....	2 × 9	.....
19 (29 — 39 ...) + 1	18 — 1	3 × 9	8 : 9
....	......	......	....
19 » + 9	18 — 9	9 × 9	89 : 9

eran necesarias 4.500, repiticiones en 1.000 sumas para obtener dos resultados concordantes. En cambio, habiendo alcanzado en aquellas 999 por mil de exactitud, sólo fueron necesarias 40 repeticiones.

5.° El automatismo se obtiene a costa de repeticiones del acto. Determinar cuántas repeticiones son necesarias y suficientes para fijar un automatismo es, después de la anterior, la cuestión más importante. Esto parecen no haberlo tenido en cuenta los autores de los ejercicios de cálculo. Hay automatísmos fundamentales que se ejercitan en número que varía desde 25 a 10.000 veces según los autores. Un ejemplo notable es el de un autor que empleaba 110 veces el producto 9×9 y nada menos que 265 el de 4×5, que es muchísimo más fácil.

Claro que el número de repeticiones necesarias varía con cada niño y con las formas de cálculo; (así, $5 + 4$ es más fácil que $8 + 7$) y que algunas de éstas son preparadas por otras; así, por ejemplo: saber que $7 + 7 = 14$ facilita el aprender $8 + 7 = 15$.

Las repeticiones en total no deben ser consecutivas, sino que tras de un período de aprendizaje debe venir otro de recuerdo y un tercero de afirmación. El número de repeticiones propuesto por Thorndike y que tiene en cuenta todo lo dicho anteriormente, se resume en los siguientes cuadros:

AUTOMATISMOS FACILES

Ejemplo: $4 + 3$; 5×4; $12 : 6$

Alumno medio	Idem bueno	Idem malo
12 veces la 1.ª semana.........	6	30
25 » los dos meses siguientes	12	50
30 » el resto del tiempo....	15	100

AUTOMATISMOS ORDINARIOS PREPARADOS

Ejemplo: 11 — 3; 4 × 7; 48 : 8

Alumno medio	Idem bueno	Idem malo
20 veces la 1.ª semana.........	12	20
30 » los dos meses siguientes	15	80
50 » el resto del tiempo....	20	200

AUTOMATISMOS ORDINARIOS NO PREPARADOS

Ejemplo: 13 — 9; 8 × 7; $\frac{1}{8}$ de 45

Alumno medio	Idem bueno	Idem malo
40 veces la 1.ª semana..........	24	40
60 » los dos meses siguientes	30	140
10 » el resto del tiempo....	40	400

210. Las dificultades de cada operación.—Un análisis detenido de una operación cualquiera nos mostrará que en ella se dan una serie de actividades psicológicas, cada una de las cuales presenta una pequeña dificultad, que es preciso tener en cuenta para irlas escalonando en la serie de ejercicios que se propongan.

Así, en la *multiplicación de un número de varias cifras por otro de una sola*, podemos notar los actos siguientes: 1.° Elegir la cifra del multiplicando. 2.° Efectuar sus productos por la del multiplicador. 3.° Recordar lo que se lleva del producto anterior. 4.° Sumarlo al producto obtenido. 5.° Separar las unidades. 6.° Escribirlas en su sitio. 7.° Convertir las decenas en unidades. 8.° Reservar las para añadirlas al producto siguiente.

Cuando este automatismo se ha producido como una serie o cadena bien soldada, la presencia de un cero en el multiplicando supone una cierta sorpresa, pues suprime de golpe algunos eslabones y crea por ello alguna dificultad, la cual es mucho mayor naturalmente cuando el *cero* aparece en el multiplicador.

Observación.—Nótese que tal encadenamiento se forma y fortifica mejor con operaciones en que los datos tienen muchas cifras, en lugar de las 3 usuales en los grados en que esto se aprende, lo cual justifica la costumbre de operar en esta forma en las escuelas antiguas.

211. Automatismos perjudiciales.—Todas aquellas prácticas que no deben subsistir deben suprimirse, y si son esenciales en cualquier etapa, debe prescindirse de ellas en cuanto sea posible. Así, por ejemplo, una vez que los niños han formado contando la tabla de sumar y sumando la de multiplicar, debe prescribirse en absoluto la costumbre que tienen de realizar la suma de dos dígitos añadiendo al primero las unidades del segundo ayudándose del punteo sobre la cifra que lo representa. Como se evitará que sumen de 2 en 2, de 3 en 3, etc., para multiplicar, ejercicio preparatorio de utilidad discutible.

Los resultados erróneos deben evitarse sobre todo al principio, ya que tienden a perpetuarse como los exactos, por eso al principio el niño debe ser guiado en la operación por el maestro, por los demás niños o por el uso constante de la tabla. Y por la misma razón no es conveniente que los niños corrijan al principio las faltas de los compañeros, pues el resultado inexacto que ven escrito deja huella en su memoria. Por la razón opuesta es útil conocer los resultados exactos, como dijimos anteriormente.

212. La gradación.—La dificultad operatoria supone alteraciones en la marcha genética antes indicada y la introducción de escalones intermedios, a fin de no acumular dos dificultades nuevas. Ejemplo de lo primero es la conveniencia de efectuar productos de números de varias cifras por otros de una sola cuando ésta es 5, 2, 3 ó 4, por este orden, antes de emplear las restantes cifras. La ventaja del 5 se encuentra en que sus productos son decenas completas o tienen 5 unidades, lo cual facilita el *llevar* y el sumar *lo llevado*.

Ejemplo de lo segundo es la conveniencia de efectuar ejercicios de la forma $4 \times 6 + 2$ antes de proponer ejemplos de multiplicaciones en que *se lleve*.

213. Las dificultades del simbolismo.—Aparecen en la sustitución de las palabras usuales por los símbolos, e incluso en la colocación de los datos, y en el tránsito a las operaciones inversas. Para abarcar con el menor número de ejemplos todo ello nos limitamos a los siguientes, que indican suficientemente la manera gradual de presentar gradualmente las dificultades.

PARA LA RESTA

3 y ... son 5	1 + son 3	3 + = 7	7	7 − 3 =
3 y ... son 9	2 + son 7	8 + = 13	− 3	11 − 8 =
....	....		....	....

PARA LA DIVISION

5 veces = 15	40 = 5 ×	20 ptas. = duros	Por 5 cts. compras 1 pastilla
5 » = 40	30 = 5 ×	15 » = »	» 10 » » 2 »
5 » = 45	15 = 5 ×	15 » = »	» 15 » » »
....			» 20 » » »

Este último ejemplo muestra la iniciación a la división de concretos más difícil que la de abstractos y que por eso viene después.

214. En los quebrados.—Pueden reconocerse en el cálculo de los quebrados análogas dificultades que en los enteros y es válida la regla de vencerlas aisladamente. Esto se relaciona además con la gran dificultad que supone el reducir tales números, por ejemplo, a un común denominador, el menor posible, sin conocer la teoría de *M* que cae fuera de la Escuela Primaria. Esto se prepara con ejercicios como los siguientes:

Expresar en *sextos* $^1/_2$ $^1/_3$

Idem en *doceavos* $^1/_3$ $^1/_4$ $^1/_6$.

Idem en *octavos* $^1/_2$ $^1/_4$.

A continuación viene el expresar análogamente quebrados de numerador distinto de la unidad, y finalmente la *elección* del denominador común que ha de ser un múltiplo de los denominadores.

Observación.—Con lo dicho creemos haber indicado lo suficiente para dar al lector una idea sobre la manera de formar los automatismos del cálculo tan estudiada porlos psicólogos norteamericanos, a cuyas obras, especialmente a las de Thorndike remitimos al lector. La importancia de la cuestión es considerable. En Norteamérica se ha encontrado que los niños de once años solo habían alcanzado un 80 por 100 de exactitud en los cálculos, tanto por ciento incompatible con la profesión de contable. En España hemos conocido alumnos de enseñanza secundaria que no sabían con seguridad la tabla de multiplicar. En todo caso la escuela debe excederse si es preciso en los ejercicios de cálculo, buscando preferentemente la *exactitud*, ya que la rapidez se adquiere por sí sola.

6.—El material de enseñanza.

215. Sus condiciones.—Para hacer activa e intuitiva la enseñanza de la Matemática se necesita disponer de una gran cantidad de material, afortunadamente de poco coste y que puede ser fácilmente construído en la misma escuela.

Este material ha de reunir ciertas condiciones, como son la de ser sólido, porque los niños lo destrozan fácilmente; agradable, por su colorido y acabamiento, ya que es preciso inculcar el afecto por lo bello y perfecto; de regular tamaño, contra la creencia de que el niño por ser pequeño prefiere las cosas pequeñas; y prestándose a ejercitar todos los sentidos incluso el muscular, por la acción, contra la tendencia a la simple visualización.

Pero además debe reunir el material la condición intrínseca de ser en la medida de lo posible *auto-instructivo* y *auto-correctivo*, es decir, que permita al niño instruirse y corregirse por sí mismo.

216. El material.—En la indicación que a continuación hacemos excluimos el material circunscrito a un método especial que estudiaremos en el lugar correspondiente.

La clasificación que presentamos no es tampoco rigurosa, puesto que un mismo material puede ser utilizado para diferentes cuestiones, y las indicaciones que hacemos acerca de su valor y empleo son deliberadamente sucintas, ya que aquél depende de éste y el uso puede ser ampliado y modificado por el ingenio del maestro y según las necesidades de la clase.

a) NUMERACION. — *Objetos naturales.*—Piedrecitas, discos, conchas, judías.

Objetos artificiales de madera.—Discos pequeños, Discos grandes de 5 cm. de diámetro por 1 cm. de grueso, pintados de colores variados. Cubos pequeños de cm^3. Cubos grandes de 5 cm.

Fig. 40.

de arista con un color diferente en cada cara. Palillos ordinarios. Palillos gruesos de 10 cm. de largo. Discos blancos de 5 cm. de diámetro, llenando puntos en rojo desde 1 hasta 9. Otros discos iguales, pero con cifras. Margaritas con pétalos separables.

De cartulina o cartón.—Lotería de puntos y de cifras, tarjetas con cifras sueltas. Dos bandas de cartulina unidas (fig. 40) con los números de 1 a 9 representados por grupos de objetos (cerezas, por ejemplo) en una banda. En la otra se colocan tarjetas que contienen representados: 1.° El mismo número de los mismos objetos. 2.° El mismo número de discos. 3.° El mismo número en cifras, *Mecanismos.*—Tiras de bolas conteniendo de 1 a 9. Cartulinas con las cifras y una pizarra con orificios en donde se ensartan las tiras, colocando sobre ellas la cifra correspondiente que en un grado superior se escribe.

El cinematógrafo numérico.—Cuadro, fig. 41, por cuya parte triangular desfilan las unidades insertas en un disco que se mueve mediante un manubrio. Las decenas se colocan a la derecha.

Fig. 41

b) *Análisis del número.*—Unas tablitas de madera delgada, pintadas de amarillo rojizo llevan, como muestra la fig. 42 puntos indicadores de un número. Una goma que envuelve la tablilla y puede deslizarse a lo largo de ella muestra la separación del número.

Fig. 42.

Un análisis completo presenta la figura 43. siendo de notar que los puntos están sobre tablitas movibles que se incrustan en el cuadro, Otro procedimiento es el indicado en la fig. 44 en la cual los cuadraditos son independientes y pueden ensamblarse unos con otros.

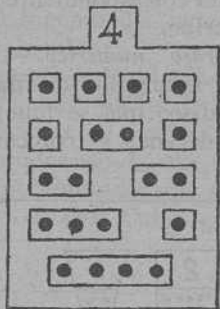


Fig. 43.

El material Harbimere-Lebert consta de tablillas como la de la fig. 43 con orificios en los

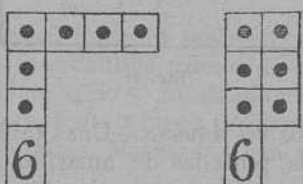


Fig. 44.

que se introducen discos de 1 cm. de diámetro, azules por un extremo y rojos por el otro. Colocando para el 6, por ejemplo, 3 rojos y 3 azules, queda expresado

$$6 = 3 + 3 = 2 \times 3$$

c) *Relaciones entre magnitudes y de éstas con los números.*—Casas como las representadas en la fig. 45 para compararlas con la precisión que pueda hacerse. Calderos de distintos tamaños y conejos también de distinto grandor para determinar cuál debe echarse en cada uno.

Botellas llenas de vino hasta diferentes alturas y fichas con diferente número de vasos iguales

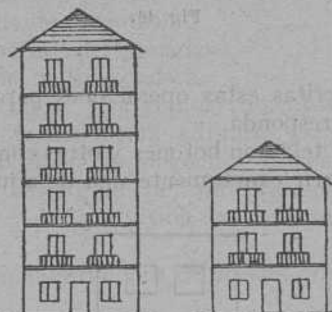


Fig. 45.

para que el niño indique la correspondiente que contenga los vasos que se llenarían con el líquido. Manzanos o naranjos de diferentes tamaños y fichas con naranjas o manzanas que hacerles corresponder. Cuando un mismo niño dispone de toda la serie, él mismo corrige sus primeros errores. En esta misma forma puede utilizarse el primer material indicado, haciendo fichas o tarjetas con un número variable de conejos.

d) *Las operaciones.*—Tiras de cartón con pequeños discos del mismo color o de diferentes colores fig. 46. Cordones que llevan ensartadas bolitas de dos colores. O tiras de tela con botones. El niño las toma libremente y escribe en su pizarra la operación que representan. Aún más sencillamente puede hacerse dando al niño tarjetas que conten-

Fig. 46.

gan ya escritas estas operaciones para que elija la que corresponda.

Tiras de tela con botones y otras con ojales que han de cubrir exactamente una de aquéllas.

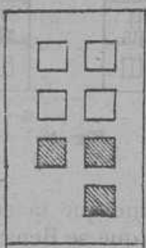


Fig. 47.

Tarjetones como el representado en la fig. 47, al pie del cual el niño ha de colocar la tarjeta correspondiente.

El listón separado en dos partes, cada una dividida en tres porciones, de donde penden los haces de palillos que representan unidades, decenas y centenas.

Los dados.

Los naipes numéricos.

El dominó, que conviene sea mayor que el ordinario. Nuestros alumnos construyeron uno de 10 × 5 × 1 cm. utilizado con buen éxito.

Cuadros con operaciones indicadas en donde falta un dato o un resultado que el niño completa mediante tarjetas.

El escaparate del panadero.

La lotería multiplicadora.

Cajitas con 2, 3, 4 compartimientos iguales en tres series y uno menor adjunto, para distribuir un número dado de pequeños discos colocando encima la tarjeta de la multiplicación (a veces con suma) y de la división exacta o inexacta que representa.

Juego de lanzamiento de discos por aberturas circulares.

e) *La tabla de multiplicar.—La de Pitágoras.* Debe haber una de gran tamaño colocada en sitio visible para que pueda servir de ayuda constante a los niños. Para enseñar a usarla debería el maestro emplear dos reglas formando escuadra que indicasen el camino. Un compás de madera abierto en ángulo recto puede servir.

La tabla ciega.—Encerrada en un marco de madera lleva delante unas ventanas obturadas por tablillas que es preciso separar tirando. Presenta sólo el número buscado y da pretexto a la acción.

La tabla en espiral.—Un círculo giratorio dividido en 8 sectores con un número en la parte exterior de cada uno y una serie de ventanitas en espiral. Un pequeño disco fijo concéntrico con el círculo anterior está también dividido en 8 sectores con 8 cifras. Por cada ventanita se ve el producto de los números correspondientes a los sectores que coinciden.

La tabla giratoria.—Construída por nuestros alumnos va arrollada en un cilindro, colocado dentro de una cajita, y puede girar por medio de un manubrio. *Diez* ventanitas numeradas permiten ver los productos correspondientes al número que aparece bajo la ventanita del número 1.

Tabla gráfica.—La fig. 48 muestra un fragmento

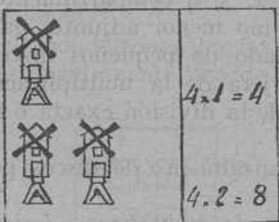


Fig. 48.

de ella. Para cada número se emplea un objeto natural o artificial que lo presente, por ejemplo, una hoja de trébol para el 3, una rosa para el 5, una hoja de castaño para el 7, etc.

Tabla monográfica.—Cada número viene dado horizontal y verticalmente por su representación gráfica, formándose naturalmente en el cruce la representación gráfica del producto correspondiente. Tiene la ventaja de que da en cada caso la intuición del valor del producto.

f) *Los quebrados.*—La mejor representación gráfica de un quebrado es un sector, ya que un trozo, banda o una porción de segmento puede representar un valor entero. Por ello deberán figurar en las escuelas círculos de 5 cm. de radio divididos en 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5, 10 sectores diferentemente coloreados.

g) *El Reloj*.—Al mismo tiempo que se aprende a distinguir las horas se presta a la enseñanza de las fracciones, por lo que deberá poseerse una esfera con manecillas. Puede servir, además, para enseñar, señalandolos, los enteros, promoviendo un *record* de velocidad de percepción. Pueden emplearse además tarjetas con datos y resultados operativos como para los enteros y decimales.

h) *El sistema métrico*.—Además del *Compendium* que existe por regla general en toda escuela, debe poseerse un m^2 dividido en dm^2 y uno de éstos en cm^2 y un dm^3 practicable para hallar experimentalmente su relación con el l. y el kg. así como también un cm^3 de hoja de lata para justificar la definición del gramo. Unas varillas de madera de 1 m. de longitud permitirán señalar la extensión de 1 m^3.

i) *El dinero escolar*.—En Geometría es indispensable la plomada, el nivel, una escuadra en el espacio, es decir, tres varillas perpendiculares entre sí. El *loto* de formas. La falsa escuadra. La falsa escuadra con agujeros equidistantes por los que pasa un hilo para relaciones entre lados y ángulos. Una regla y una escuadra inexactas.

Un círculo dividido en 3. 6, 4, 8, 5, 10 partes iguales.

Paralelogramo transformable en rectángulo.

Triángulo transformable en paralelogramo.

Trapecio transformable en triángulo o rectángulo. Polígono regular transformable en rectángulo.

Círculo transformable en rectángulo aproximadamente.

Sólidos geométricos desarrollables.

Cubo y ortoedro descompuesto en cubos.

Paralelepípedo recto transformable en paralelepípedo rectángulo.

Prisma triangular recto transformable en paralelepípedo rectángulo.

Prisma recto descomponible en prismas triangulares.

Pirámide y prisma huecos de igual base y altura, estando la de éste dividida en tres partes iguales.

La cinta pantógrafo.

Aparato »Arquímedes».

Teorema de Pitágoras con lados 3, 4 y 5.

Teorema de Pitágoras de superposición directa.

Cadena de agrimensor. Cinta métrica. Varillas de hierro marcadoras. Jalones. Grafómetro construído por los alumnos.

Regla para la suma y resta por el sistema de las de cálculo.

Regla de cálculo simplificada.

Album de Frúmeros.—Comprendiendo la colección de toda clase de imágenes de valor cuantitativo convenientemente clasificadas, y formado por los niños.

Album de formas.—Con las formas geométricas notables, vistas en objetos naturales o artificiales igualmente catalogadas.

Observación.—Esta enumeración es naturalmente incompleta, pero aún hemos de hacer notar que como dice Lipman, no deben mantenerse demasiado tiempo las representaciones sensoriales unidas a las verbales, cuando éstas deban utilizarse para el pensar lógico. Es decir, que debemos guardarnos de un exceso de *intuitivismo.*

Nota.—Aunque el material anteriormente expuesto, o está confeccionado o es fácil de hacer, convendría preocuparse de obtener de la industria otros modelos como los siguientes: Una esfera en la que hubiese inserto un cono cuyo vértice coincidiese con el centro y su base con la superficie esférica, utilizable para evidenciar que el volumen de la esfera es análogamente al del cono al tercio de su superficie por el radio. Un prismatoide descompuesto en pirámides haría intuitiva la fórmula de su volumen, tan interesante desde el punto de vista práctico.

7.—El contenido: su justificación.

217. Objeto.—En los capítulos II y III hemos expuesto los conocimientos, destrezas y hábitos mentales que deben o pueden figurar en un programa de enseñanza de la Matemática que desarrollar en la Escuela Primaria, justificándolos por su valor práctico o por su importancia educativa. Aquí nos limitaremos a precisar más el contenido, refiriéndonos a los conocimientos que deben constituir un programa escolar.

218. Conocimientos indispensables.—Por su empleo constante en la vida deben enseñarse en la Escuela los números enteros y decimales y las operaciones que con ellos se efectúan, reducidas a las cuatro fundamentales. El sistema métrico y los números concretos. Una noción sumaria de la proporcionalidad permitirá resolver con sólo lo que antecede las problemas de tanto por ciento, cambio e interés, que puedan presentarse en la vida corriente, teniendo con ello un contenido mínimo de la Aritmética. Las pruebas por 9, aun desechadas por muchos, opinamos que deben conservarse, porque, siendo sencillas, son útiles para la exploración de la exactitud de una operación. En Geometría debería ampliarse el programa corriente. Es preciso conocer las formas y las relaciones de posición que se encuentran a nuestro alrededor, e indispensable obtener muchas de ellas. Así la línea recta y su medida en el plano y en el terreno. Los ángulos, su valor, su trazado y especialmente la perpendicularidad, no sólo en el plano y en el terreno, sino en el espacio, ya que las rectas perpendiculares a planos y los planos perpendiculares entre sí se dan continuamente, aun cuando pueda simplificarse su estudio refiriéndolo a la horizontalidad y verticalidad, pero es absurdo que los alumnos carezcan de estas nociones. Como ejemplo, también lo es el que no se aprenda a mantener verticalmente un poste mediante cuerdas tirantes.

Análogamente al paralelismo del plano debe acompañar el del espacio y los ángulos diedros y triedros, por lo menos los trirectángulos tan comunes en las construcciones. Claro es que todo ello en la ocasión y método oportuno, pues no olvidemos la dificultad de *ver en el espacio*, que hacía enrojecer al mismo Platón.

Los polígonos ordinarios y estrellados, tan usados en adornos y pavimentos. La circunferencia, su longitud y las líneas principales que en ella se consideran, especialmente las tangentes, utilizables para el enlace de líneas y la obtención de sombras, y aunque parezca extraño, la elipse y la parábola tan interesantes, tan fáciles de construir, indispensable la primera para conocer algo tan importante como las órbitas planetarias, base de antiguos y modernos *Stadiums*, y de bóvedas del *secreto*; presente la segunda cada día en la caída oblicua de los cuerpos y utilizada en telescopios y reflectores. Claro es que esto lleva a la consideración de los elipsoides y paraboloides de revolución no más difíciles de ser percibidos que la misma esfera.

Su belleza y la frecuencia de su presentación exigen el estudio de las simetrías. El manejo constante de planos y mapas exige el conocimiento de las escalas y de su uso, y la manera de levantar un plano sencillo.

Finalmente, las áreas de uso corriente en la vida pueden limitarse a las del cuadrado, rectángulo y triángulo, a las que se reducen todas las demás, y a la del círculo. Los volúmenes comprenderán las formas prismáticas y piramidales y la esfera, incluyendo en las primeras el cilindro el cono, y tronco de cono, ya que muchos recipientes modernos tienen estas formas o sus combinaciones.

219. Conocimientos de ampliación.—El conocimiento de los sistemas de numeración tiene un alto valor educativo, tanto desde el punto de vista histórico como del matemático. Las propiedades de las operaciones, que permiten simplificarlas, tienen valor práctico y educativo, y especialmente *la divisibilidad*, teoría interesante, utilizable para simplificar la división y ulteriormente las fracciones. De éstas trataremos en capítulo aparte. La extracción de la raíz cuadrada puede darse reducida a la regla, y unas tablas de cuadrados y cubos, facilitarán el uso de esta regla y reemplazarán al de la cúbica. El conocimiento de las magnitudes relacionadas, el trazado de gráficas y cartogramas tienen igualmente valor en la vida corriente, donde se presentan habitualmente y son como indicamos del más alto valor educativo. También lo es el conocimiento y aplicación de la proporcionalidad, con su regla de tres simple y compuesta el tanto por ciento, el interés y el descuento, que con frecuencia se presentan, pero reducidos a los límites prácticos y no tratando, por ejemplo, del interés simple por años que no suele darse y en todo caso es un múltiplo de la renta; en cambio, debe hablarse del ahorro, y los seguros y dar unas nociones de Contabilidad.

La resolución de ecuaciones facilitará la de los problemas, renunciando a los artificiosos procedimientos de la Aritmética.

Un estudio más amplio de la forma que el indicado en el párrafo anterior sería deseable, tanto desde el punto de vista práctico como del educativo. A los cuadriláteros corrientes puede añadirse el trapezoide con un eje de simetría al que llamaremos para abreviar «la cometa», mereciendo especial consideración el rombo y el trapecio rectángulo y el isósceles (téngase en cuenta que en la selección de formas deben preferirse las más regulares).

Las áreas pueden ser incrementadas con las del paralelogramo, trapecio, polígono regular, figura cualquiera, sectores y segmentos y coronas circulares. Y los volúmenes con el del tubo o manguito, y nos atreveríamos a proponer, con el del prismatoide (véase nuestro *Nuevo tratado de Geometría*), de aplicación a la esfera, elipsoides, terraplenes, obeliscos, cuñas, montones de grava, y en general, aproximadamente, a todas las figuras que den cualquier sección cortable por una recta sólo en dos puntos, así pueden cubicarse aljibes, toneles, etc.

Por su alto valor educativo y por el enlace que proporcionan a los conocimientos geométricos, deben incluirse los movimientos: traslación, giro y doblamiento, así como el estudio y aplicación de los lugares geométricos.

La planta y el alzado de una figura, con todas las técnicas del dibujo geométrico deben llevarse al máximo posible.

220. Conocimientos excluídos.—Habrá notado el lector la eliminación de cuestiones como el D. y el M. (máximo comun divisor y mínimo común multiplo) y los números primos, de los cuales suele darse por lo menos indicación. Creemos que carecen de valor práctico, ya que es preciso *inventar* problemas en que sean de aplicación, y que pueden resolverse por tanteos. (ejemplo: los barcos que salen cada tanto tiempo de un puerto, una vez salen juntos; ¡cuándo volverá a ocurrir!) y su valor matemático sólo puede apreciarse en ulteriores estudios.

La llamada Aritmética Mercantil queda suprimida casi en absoluto, explicándose su presencia, como residuo permanente de los *Rechenmeister* que, por su especialidad mercantil, precisamente la enseñaban. El descuento racional no se aplica nunca o es un caso particular del tanto por ciento interno; los repartimientos proporcionales solamente suelen presentarse simples y directos y se dan en función de un coeficiente (por ejemplo, tanto por ciento en contribuciones). La regla de compañía suele presentarse sólo a los profesionales, y lo mismo decimos de la regla de las mezclas inversas. La directa es un problema sin dificultad ninguna, y en la de aligación sólo interesa la determinación del metal fino contenido en una aleación cuya ley se conoce, problema también reducido a una simple multiplicación una vez definidos los términos.

Observación.—Lo que antecede no aspira a ser una exposición detallada y completa del contenido, que exigiría demasiado espacio y que además ha de variar con las circunstancias locales, necesidades e intereses de los alumnos.

8.—Relaciones de la Aritmética con la Geometría, de ambas con las demás ciencias, y especialmente con el Dibujo y los Trabajos Manuales.

221. La Aritmética y la Geometría deben ir íntimamente unidas en la enseñanza primaria, con más motivo aún que en la secundaria, modalidad iniciada por matemáticos tan notables como el italiano Enríquez, y algo de esto hemos indicado en este mismo capítulo.

La Geometría puede hacer prácticas e intuitivas propiedades y operaciones aritméticas. Al estudio de la numeración debe acompañar la medida de segmentos, al concepto de las operaciones la suma, resta, multiplicaciones y división de un segmento por un número entero (o fraccionario) y la razón de dos segmentos. (Véase nuestra Aritmética Intuitiva.)

Los segmentos de paralelas comprendidas entre concurrentes dan la mejor idea de la proporcionalidad, y las porciones de planos paralelos comprendidos entre planos concurrentes (secciones en las pirámides) evidencian (juntamente con la relación entre lados y áreas) la proporcionalidad compleja (entre números y cuadrados) indispensable para entender cosas tan corrientes como las leyes de la atracción o las que rigen la intensidad de iluminación.

La Geometría proporciona a la Aritmética, con sus cálculos sobre longitudes, ángulos, perímetros, áreas, volúmenes y elementos proporcionales, gran cantidad de material documentalmente valioso para sus ejercicios. Todo ello sin perjuicio de las representaciones gráficas de que hemos hablado insistentemente.

La Geometría, formada antes que la Aritmética, más intuitiva que ella, más variada y práctica, prestándose más a todas las modalidades del razonamiento y de la resolución de problemas, dando a conocer relaciones tan importantes como las espaciales, debía ser cultivada en la Escuala Primaria por lo menos en pie de igualdad con la Aritmética.

222. Relaciones con la Física.—La Física como las demás ciencias, utiliza a la Matemática para sus fines propios, pero a su vez la presta gran cantidad de material para sus ejercicios y problemas, y en la Escuela Primaria esta relación debe estrecharse hasta el punto de que se formase un todo armónico entre estudios experimentales y aplicaciones cuantitativas con la Matemática.

Como ejemplos de esta relación citaremos: La lectura de temperaturas y presiones, hallar sus diferencias y sus medias, y representar gráficamente sus variaciones.

La densidad de los cuerpos, la concentración de las disoluciones, la dilatación, la caída de los cuerpos, son base de problemas del mayor interés.

Las leyes de la propagación del sonido y de la luz están en el mismo caso, y especialmente en el campo geométrico, se utiliza en propiedades tan curiosas como son el demostrar que el camino más corto de un punto a otro tocando en una recta es aquel en que los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales. (Para demostrarlo sustitúyase uno de los puntos por su simétrico, con lo cual el recorrido total no varía.)

A la aplicación hecha por Thales del paralelismo de los rayos solares para hallar la altura de un edificio (las pirámides de Egipto en su caso) se puede agregar la resolución del mismo problema colocando horizontalmente un espejo y situándose el observador de modo que vea la imagen del tejado o punto más alto: los triángulos semejantes que se forman, mediante la medición de dos distancias y una altura, dan la buscada.

La formación de imágenes en los espejos planos así como la marcha de los rayos en los elípticos y parabólicos, son también ejercicios excelentes.

Y de antiguo está admitido en los tratados de Aritméticas francesas y en sus programas lo referente a velocidad, espacio y tiempo en el movimiento uniforme.

223. Relaciones con la Geografía.—El primer motivo para trazar sobre el terreno dos rectas perpendiculares está ofrecido por la necesidad de marcar los puntos cardinales en el patio de la Escuela. Una rosa de los vientos debe dibujarse como aplicación de los polígonos estrellados.

Las longitudes de los ríos, la altura de las montañas, la superficie de las naciones, el desarrollo de los ferrocarriles y carreteras, el volumen del comercio, la densidad de población, la variedad de los cultivos, los días nublados o de sol en un lugar, la cantidad de lluvia, etc., son otros tantos motivos para representaciones gráficas. Nuestros alumnos han dibujado en gran tamaño la correspondiente a los cultivos españoles y creemos que esta representación debiera fugurar en todas las escuelas españolas.

Las longitudes y latitudes geográficas son base del estudio en la superficie esférica y con ella se relaciona la interesantísima cuestión de los husos horarios para la determinación de la hora oficial que no debiera ser desconocida por nadie.

Finalmente, la determinación del radio terrestre, y de las distancias entre puntos de nuestra esfera son también base de curiosos problemas.

224. Relaciones con la Historia.—La localización de fechas, la duración de períodos determinados, la de la vida de los grandes hombres, los hechos históricos de aspecto cualitativo y de valor educativo, como la relación entre el jornal de un obrero en las diferentes épocas históricas, la extensión relativa de los imperios, el valor sucesivo de la moneda y el coste de la vida, el volumen de las contribuciones y del ahorro... pueden ser motivo de ejercicios interesantes. Como uno de ellos citaremos la representación gráfica de la relación entre la extensión de España y de las tierras colonizadas por ella, que muestra el prodigioso esfuerzo hecho por nuestra nación.

Especialmente la Historia de la Matemática, la bibliografía de sus, sabios y las anécdotas a ellos referentes son del más alto valor educativo en los últimos años de la Escuela.

225. Relaciones con el Dibujo.—Aun el dibujo no geométrico que atiende a la forma, a la extensión, a la posición relativa, a la percépción de la perspectiva, está íntimamente ligado a la Geometría que trata de las mismas cuestiones, aun cuando sin el matiz artístico aquí predominante.

El dibujo geométrico es una de las tres partes (estudio de las formas, su reproducción, y la medida) que pueden constituir la Geometría elemental y se identifica con ella.

El dibujo constituye la expresión de lo percibido y asimilado, e incorpora artísticamente los elementos geométricos, demasiado fríos, que se transforman en vallados, casas, utensilios y máquinas, monumentos arquitéctonicos de diferentes estilos; o bien planos, mapas, y determinación precisa de objetos en un plano por su planta y alzado, susceptibles de ser estudiados y construídos por sus indicaciones.

226. Relaciones con el trabajo manual.—Tal vez la orientación de la Escuela Primaria sea la de convertirse en una Escuela del Trabajo, y por tanto la relación de la Matemática con el Trabajo Manual, en su más amplia acepción, sería la de subordinación, enseñando al niño todo aquello que hubiera de necesitar en sus trabajos. No se crea que por eso desminuyese el interés por la Matemática ni en gran parte su valor educativo. La experiencia de los cursos franceses para retrasados en que el trabajo manual es la base de la enseñanza, muestra que estos alumnos deficientes concluyen por alcanzar en Matemáticas el nivel normal. Por otra parte, el nivel de la enseñanza no se rebajaría, sino que sucedería todo lo contrario: la simple confección de una pantalla de forma tronco-cónica exige poseer con toda precisión conocimientos que no suelen pedirse en la enseñanza primaria ni aun en la secundaria, y la Geometría Descriptiva se haría bien pronto necesaria.

Pero por hoy hemos de limitarnos a las posibilidades de nuestras Escuelas, y en ellas apenas si podemos considerar que sea una realidad el empleo de materiales como la plastilina, el alambre, el papel y la cartulina. No podemos dar ni una lista completa ni el detalle de los ejercicios de carácter matemático que con tales medios pueden realizarse, y nos remitimos a los tratados especiales.

Con plastilina el niño, aún bastante pequeño, puede modelar los cuerpos geométricos más usuales: plastilina que puede sustituirse con cera para los cuerpos redondos y con una vulgar patata para los terminados por caras planas.

Con alambre pueden formarse ángulos y contornos poligonales, líneas curvas, circunferencias, elipses, espirales, etc.

El material que se presta más al trabajo manual de tipo geométrico es el papel, que debiera ser grueso y fuertemente coloreado.

Indicaremos algunos de los ejercicios que pueden realizarse:

1. El doblez de un papel es una línea recta, y doblándolo en 2, 3, 4 partes iguales, podemos dividir un segmento análogamente.

2. Doblando éste por un punto de modo que coincidan sus dos partes, el nuevo doblez es una recta perpendicular a la primera.

3. Doblando un papel en ángulo de modo que sus dos lados coincidan, se obtiene su bisectriz. Partiendo del ángulo recto se obtienen sucesivamente ángulos de 45° y 22°, 30°.

4. Puede doblarse un papel que tenga un borde recto en tres dobleces superpuestos exactamente formando tres ángulos de 60° alrededor de un vértice de dicho borde.

5. Las mitades de estos ángulos dan sucesivamente los de 30° y 15°.

6. Por un punto marcado fuera de una recta puede trazársele una perpendicular, doblando el papel por la recta, marcando la posición del punto en la otra parte y uniendo estos dos puntos por un doblez.

7. Dos perpendiculares a una recta dan dos paralelas.

8. Una hoja de papel es ordinariamente un rectángulo, cuyas diagonales y centro pueden obtenerse por doblamiento y comprobar la igualdad de lados y ángulos.

9. De un rectángulo sale fácilmente un cuadrado, llevando a coincidir dos lados contiguos y separando la parte no superpuesta.

10. Doblando un rectángulo por un eje de simetría y trazando un doblez del eje a la base y cortando sale un triángulo isósceles de base y altura determinadas.

11. Si en dos vértices del lado menor de un rectángulo se dobla el ángulo recto en tres superpuestos, y se corta por los pliegues que forman

con la base ángulos de 60°, se obtiene un triángulo equilátero.

12. Doblando un papel por la mitad, verificando los dobleces indicados en 4, marcando sobre los lados longitudes iguales, y cortando por la recta que une los puntos de división, y desplegando, se obtiene un exágono regular.

12. Si doblado el papel como antes se superponen *n* pliegues iguales y se corta como antes, se obtiene el polígono regular de $2n$ lados. Como límite, el círculo.

13. Si en el caso anterior el corte no es simétrico, se obtienen polígonos estrellados.

14. Cortando un papel por dos líneas paralelas, se obtiene una banda.

15. Una banda cruzada con otra de diferente anchura oblicuamente, da un romboide; si la anchura es igual, un rombo; si se cruzan perpendicularmente, dan un rectángulo y un cuadrado, respectivamente.

16. El nudo de la corbata hecho con una banda de papel da el pentágono regular.

17. Conocidos son «la pajarita», el barco de vela, «el molinillo», el cajón, el gorro de soldado, etc., en todos los cuales hay formas geométricas que considerar. Lo mismo ocurre al «gorro de mago» menos conocido y al gorro frigio que en realidad es de forma cúbica y puede utilizarse para estudiar esta figura.

18. El doblez sencillo del papel da las figuras simétricas con relación a un eje y un segundo doblez perpendicular al primero, proporciona las simetrías con relación a un punto.

La estrecha relación del trabajo manual con el dibujo aconseja que aquél se termine con un ejercicio de éste. (Véanse en las tres figuras adjuntas la manera de doblar el papel, el resultado obtenido y el dibujo de aplicación.)

Con cartulina pueden construirse carteras, cajas prismáticas y cilíndricas, que utilizan las formas geométricas, y estas mismas formas directamente.

Sobre todo esto puede construirse el material indicado en el párrafo 6 y dedicar además la actividad ocasionalmente a objetos para juegos,

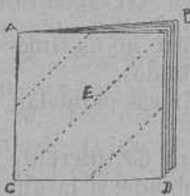


Fig. 49.

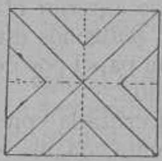


Fig. 50.

Fig. 51.

como la cometa, (trapezoidal, exagonal, etc.) casitas de cartulina, y demás que presenten formas geométricas.

NOTAS AL CAPITULO VI

Lecturas

El Rebaño de Juanillo

I

Juanillo era un mozo de unos dieciséis años, pequeñito, nervioso, inquieto, con fama de ser muy listo y avispado y con muchos deseos de que así lo creyesen los demás. Había entrado, no hacía mucho, a desempeñar el oficio de pastor en casa de un ganadero de Extremadura, dueño de numerosos rebaños, y como Juanillo quisiera antes ser cabeza de ratón que cola de león, hubo que confiarle a él solo la guarda de un rebaño, no muy grande para lo que allí es costumbre.

El amo de Juanillo, D. Juan, encantado con la viveza y deseo de bastarse a sí mismo que mostraba, le presentaba con frecuencia pequeñas dificultades por tener el gusto de ver cómo el muchacho salía de ellas a fuerza de ingenio. Y así, la noche antes de encargarle el cuidado de un rebaño para él solo, le llevó a un corral donde se apiñaban buen número de ovejas, y le dijo: *Mira, Juanillo, mañana con el alba llevarás a pastar todas estas ovejas ayudado por Pedrito el zagalín y estos dos mastines. Pero has de tener cuidado de que a la noche vuelvan tantas como te lleves sin faltar una, y ya sabes lo fácil que es que se alejen y no vuelvan cuando pastan. Pues bueno, tú las contarás al salir, y al volver, y me dirás si hay las mismas.*

Una buena media hora pasó el muchacho ensimismado y pensativo, y de pronto se dió un golpe en la frente y corrió como una centella hasta la orilla de un riachuelo cercano, cuya ribera estaba cubierta de menudas piedrezuelas; llenó de ellas su zurrón y volvió satisfecho y contento a dormir sobre el heno.

Al día siguiente, antes del alba ya estaba Juanillo junto a la puerta de salida del aprisco, teniendo en las manos su zurrón vacío y junto a él el famoso montón de piedrezuelas. El zagalín, siguiendo sus órdenes, hizo pasar ante él las ovejas una a una, y por cada oveja que pasaba hacía Juanillo caer en el zurrón una piedrezuela. Cuando todas las ovejas hubieron pasado cerró cuidadosamente el zurrón y emprendió alegremente el camino del monte.

A la noche, cuando las ovejas entraron en el aprisco, volvió a repetirse la misma escena, sólo que en orden inverso: por cada oveja que entraba, sacaba Juanillo una piedrezuela del zurrón, y cuando vió que al entrar la última oveja sacó la última piedrecita. corrió hacia D. Juan para decirle, lleno de orgullo y satisfacción: *Mi amo, todas han vuelto.*

II

Dichoso con su invento repitió Juanillo la operación en días sucesivos, pero fué notando que el morral lleno de piedrecitas le pesaba mucho, sus ovejas eran muchas también, y cuando el amo, ganoso de probarle le dijo un día: *Juanillo, con diez veces menos peso pudieras arreglarte.*

—*¿Qué es diez?*—preguntó el muchacho.

—*Mira,* le contestó su amo satisfecho de enseñarle, y fué presentándole sucesivamente *uno, dos, tres*... dedos y dándole los nombres correspondientes.

—*Gracias, mi amo, ya verá usted mañana,* dijo el muchacho lleno de gratitud y confianza.

Se le vió bajar otra vez a la orilla del río y al día siguiente, antes del alba tenía junto a sí dos montoncitos, uno de piedras como huevos de paloma y otro de las acostumbradas piedrezuelas. Y cuando pasaban las ovejas, iba contando con los dedos, y al llegar a diez dejaba caer una piedra en el zurrón, y cuando al final no llegaron a diez, puso unas piedrezuelas.

Rabiando estuvo todo el día por volver a ver a su amo, y hasta apresuró un tanto la hora del retorno, y en cuanto vió de lejos a D. Juan corrió a él para decirle: *Mi amo, ocho dieces y siete ovejas llevamos.*

III

Pasó tiempo, y cada día daba cuenta Juanillo a su amo del número de ovejas confiadas a su cuidado y cada día el amo le enseñaba algo nuevo que no dejaba muy satisfecho a Juanillo, porque todo se reducía a decirle: No se dice *siete dieces,* sino *setenta,* y cosas análogas; no se dice *un diez y cinco,* sino *quince.* No comprendía Juanillo el porqué de estas rarezas, pero como finalmente simplificaba la expresión, y su amo las decía, se las aprendió, y las usaba.

Pero un día su amo le dijo: *Ya has cumplido diecinueve años. Desde mañana llevarás un zagal más, y todo el rebaño de Antón. Me parece que tus* dieces *no van a servirte de mucho, porque va a haber más de diez* dieces.

—¿*Y cómo se llaman diez dieces, mi amo?*

—*Diez dieces se llaman ciento.*

Al día siguiente al salir las ovejas del aprisco eran tres los montoncitos de piedras que Juanillo tenía a su lad , y en vez de echar los *dieces* en el zurrón los iba colocando delante de él. Llegaron, en efecto, a alinearse diez *dieces*, esto es, diez piedras como huevos de paloma, y entonces las volvió al montón, y echó en su zurrón una piedra del tamaño de un huevo de gallina. Así continuó su operación. Y cuando volvió, llevando sólo *nueve* piedras en su zurrón, le dijo, radiante de satisfacción a su amo: tenemos *dos* cientos, *cuatro dieces* y *tres ovejas.*

¿Cómo?—preguntó el amo, haciéndose el extrañado?

Y Juanillo, cazando al vuelo la corrección, rectificó en seguida: *doscientas cuarenta y tres ovejas.* ¡Era listo Juanillo!

IV

Otra mañana, al hacer su acostumbrado recuento, estaba Juanillo un tanto preocupado, y al mismo tiempo que contaba por los dedos, o colocaba sus piedrecitas, iba contando maquinalmente: *uno, dos, tres... once, doce, trece... ochenta y uno, ochenta y dos..., doscientos uno, doscientos dos.* Cuando al llegar al final, volvió en sí súbitamente, y se encontró con que estaba murmurando: *doscientos cuarenta y tres,* y con que tenía ante sus ojos dos piedras gruesas, y cuatro medianas, y separaba tres dedos de la mano izquierda. Una idea clara como un relámpago cruzó por su cerebro. ¿A qué separar dedos ni poner piedrecillas, si el número que indican es el mismo que yo voy diciendo? ¡Al diablo las piedras!

Y aunque recogió algunas para poner en su zurrón, *dos* piedras grandes, *cuatro* medianas y *tres* piedrecillas, se fué muy ufano y ligero al cuidado del rebaño, y en adelante ya no usó más dedos ni piedras para contar, sino que se limitó, como había pensado, a cantar sus números cuando pasaban sus ovejas.

CAPITULO VII

METODOS ESPECIALES

1.—Enseñanza de la Matemática en el Método Froebel

227. Los principios.—El método de Froebel tiene, para la enseñanza de la Matemática, una importancia grandísima porque gracias a él se aplicaron a los niños muy pequeños y por vez primera los principios de *autodeterminación*, de *experiencia personal* y de *actividad libre*, suscitada por el ambiente, que habían de tener amplio desarrollo en Montessori, Decroly y Dowey y todo el moderno desenvolvimiento pedagógico.

Para Froebel, además, determinaba su método un desenvolvimiento ordenado, pasando de lo sencillo a lo compuesto propio al mismo tiempo de las formas geométricas y de la inteligencia infantil. Su fin era doble: Ejercitar a esta inteligencia en la *observación, análisis y comparación*, y realizar las *formas*, bien copiando, bien inventando formas tomadas del mundo ambiente, de carácter artístico o matemático.

La consecuencia de esto es que se adquieran conocimientos y destrezas de tipo geométrico, pero que trascienden grandemente del campo propio de los párvulos, creando procedimientos adecuados para informar y aun para ser utilizados en edades más adelantadas.

Muchos maestros sucesores de Froebel quitaron al método una de sus más importantes cualidades: la de servir a la espontaneidad infantil, transformándolo en una serie de ejercicios en que el niño se limitaba a seguir, con más o menos agrado, al maestro, consecuencia natural si se tiene en cuenta la pasividad intelectual del niño y el deseo del mismo Froebel de realizar ejercicios de análisis y comparación que no era fácil resignarse a dejar implícitos.

De todos modos, los niños educados en el *Kindergarten*, aun sin los ejercicios un poco forzados a que aludimos, muestran una gran superioridad sobre sus compañeros en cuanto se refiere al aprendizaje de la Matemática.

228. Los dones y su empleo. — 1.° El primer don consta de 6 pelotas de diferentes colores distintos; habían de dar al niño la noción de unidad y de movimiento y estaban en unas bolsitas con un cordón. El maestro mostraba las esferitas, las nombraba, las distribuía y hacía notar su *forma*, y las *posiciones* que podían adoptar con relación al niño o la cajita en que se guardaban. El cordón daba la intuición de la línea en sus diferentes clases y posiciones.

2.° El segundo don consiste en una esfera, un cilindro y un cubo de igual altura con anillas en puntos diferentes y un cordón capaz de pasar por ellas.

Se compara la esfera con la pelota, el cubo con la esfera, y el cilindro con ambos. Se pregunta por objetos análogos. Suspendiéndolos por el cordón, se les hace girar rápidamente para ver cuáles y cómo engendran figuras, iguales a sí mismas o distintas.

3.° El tercer don está formado por 8 cubos coloreados dentro de una caja también cúbica. Permite hacer el repaso de esta forma; alguna construcción sencilla; dar una noción de números enteros y fraccionarios $\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\right)$ y comparar las dimensiones con la superficie y el volumen (2 : 4; 2 : 8).

4.° El cuarto don lo constituyen 8 octoedros cuyas aristas están en la relación 1 : 2 : 3. Se utiliza para compararlos con las formas anteriores, analizar éstas, y reafirmar la noción de entero y quebrado intuitivamente e independiente de la forma cúbica anterior. Se prestan más a la obtención de formas combinadas.

5.° Las cajas de arquitectura formadas por 27 cubos, unos enteros y otros divididos según las diagonales del cuadrado en dos y en cuatro partes. Continúa el análisis y la comparación. Se adquiere la noción de todo y parte más claramente que antes por la disparidad de forma entre las partes y el todo. Se percibe la simetría y se practica el ensamblado. Las figuras que pueden construirse son cada vez más numerosas y variadas y más aún con el don 6.° formado por 27 ortoedros divididos en partes, unos según un plano de simetría transverso y otros longitudinalmente. Con esto se cierra la serie de los dones destinadas al conocimiento de los sólidos.

6.° Los dones 7. 8 y 9 están dedicados a las superficies. Constan de cuadrados enteros y divididos paralelamente a los lados de 2 a 10 partes, de triángulos rectángulos isósceles, de triángulos rectángulos y obtusángulos obtenidos por la división de un rombo, uno de cuyos ángulos valiese 60°. Todos brillantemente colorecados, y con ellos se realizan las mismas operaciones de observación, análisis, comparación y construcción de formas.

7.° Los dones del 10 al 12 están dedicados a estudio de las líneas y se hallan constituídos por listoncitos de 25 cm. de largo, palitos de 10 cm.

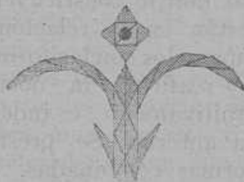


Fig. 52.

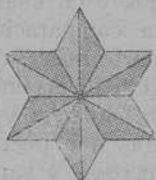


Fig. 53.

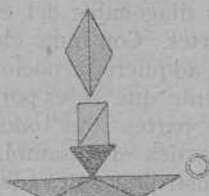


Fig. 54.

y anillos de cartón, enteros unos y divididos otros en $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. Con ellos pueden realizarse todas las posiciones de las líneas, adiestrarse en contar y obtener formas variadísimas.

8.° Los dones siguientes 13 y 14 están reducidos a trocitos de corcho o guisantes remojados que, con palillos sirven para componer los sólidos geométricos y las posiciones de rectas en el espacio; y de una substancia para modelar que puede dar dichos sólidos con mayor fidelidad obteniéndose fácilmente las principales formas cristalográficas, y esto por los procedimientos de biselamiento y truncadura prácticas que teóricamente forman los cristales derivándolos de las formas fundamentales.

Las adjuntas figuras fueron *inventadas* por uno de nuestros alumnos y pueden servir para dar una idea de lo que puede hacerse con los dones de Froebel, y para ser *imitadas* por los niños.

229. Opinión. Lo anteriormente expuesto habrá hecho ver claramente la preponderancia de la Matemática en el método Froebeliano. Nada hemos de objetar a su empleo juicioso y solamente lo transformaríamos un poco poniéndole en relación con el sistema métrico decimal e introduciendo algunas piezas nuevas como arcos y semiarcos de puente, pirámides, cilindros y conos que lo aproximasen a los *arquitectos* o cajas de construcción que tanto agradan a los niños, al mismo tiempo que completan las formas geométricas.

Claro es que Froebel no agotó con sus dones el material de enseñanza, ni con sus principios y procedimientos los que deben servir para la instrucción infantil, pero es de notar que fué preciso un siglo entero para realizar algun progreso serio en esta dirección.

2.—El Método Montessori.

230. Fundamentos.—La doctora Montessori amplió considerablemente la idea Froebeliana. Como él empieza con una educación sensorial, pero ella la extiende sistemáticamente a la parte motriz y tactil fundamental en el niño. Busca también su espontaneidad pero la lleva hasta la autodeterminación y la autocorrección. Completa el material de Froebel, suprime una parte y evita fatigar al niño con los análisis y las comparaciones forzadas que el niño prácticamente percibe y con las cuales tiene suficiente. Pero también como Froebel, al introducir al niño en el mundo de las formas concede un gran espacio en su método a la Geometría. Su material, por otra parte, al apelar a la motricidad se renueva en una dirección particularmente fecunda. Bastará indicarlo para comprender su manejo e importancia, que por otra parte pueden estudiarse de un modo especial.

231. El material para la educación sensorial.—*a*) Tres colecciones de ajustes de sólidos. En una los cilindros son todos de igual altura, pero distinto diámetro; en la segunda varían diámetro y altura, y en la tercera sólo la altura. El niño ha de insertarlos en el hueco correspondiente. Si se equivoca llegará un momento en que un cilindro no cabrá en ninguno de los huecos libres.

b) Cubos color de rosa, son 10, desde 1 dm. de arista hasta 1 cm. Han de colocarse formando torre por tamaño decreciente. Una equivocación supone la inestabilidad del edificio.

c) Prismas de color castaño oscuro. Son 10 prismas de 20 cm. de longitud y de sección cuadrada que disminuye desde 10 cm. a 1 cm. Se usa formando una escalera.

d) Listones de madera, de sección cuadrada de 4 cm. de lado. Son 10 y su longitud varía desde 10 cm. a 1 m. llevando coloreados alternativamente de rojo y azul los decímetros. Se usa como los anteriores, pero sirven además para contar, sumar y restar, y dan una intuición clara de la relación entre la cantidad y el número.

e) Varios sólidos geométricos, prismas, pirámides, cilindros, cono y esfera, que los niños reconocen por el tacto (sentido stereognóstico) y cuya movilidad y equilibrio estudian.

f) Tablitas rectangulares con superficies lisas y ásperas. Reconocidas al tacto contribuyen a dar por este sentido la noción de forma y extensión.

g) Tablitas de madera de pesos diferentes. Al apreciarlos se tiene la sensación directa del *mayor*, *igual* y *menor*, mediante el sentido básico.

232. Las formas geométricas. Presenta cuadros que contienen seis cuadritos, en cada uno de los cuales va encajada una figura geométrica que se retira y se encaja después seleccionándola de las seis que entran en el cuadro. En uno de éstos, las figuras son círculos de distinto diámetro; en otro, rectángulos de distinta base e igual altura; en otro, diversas clases de triángulos; en otro, seis polígonos regulares a partir del pentágono; en otro, un rombo, un romboide, un trapecio rectángulo, uno isósceles, una elipse y un óvalo, y en el último dos figuras irregulares y cuatro en blanco. (Creemos esto fácilmente mejorable dejando en el penúltimo solamente cuadriláteros, podía añadirse el trapezoide general y la *cometa*, incrementando el último con las dos figuras sobrantes del anterior más el triángulo de lados curvos entrantes y el ovoide). Los seis cuadros no son fijos en cada tablero, sino que pueden cambiarse para graduar las dificultades, pudiendo hacerse el reconocimiento por la vista o el tacto con los ojos tapados.

Las mismas figuras geométricas y de igual tamaño se hallan reproducidas en tres series de tarjetas: en la primera, la forma llena, recortada en papel azul y pegada; en la segunda hay sólo un contorno de la figura, pero de medio centímetro de ancho en papel azul; en la tercera serie, la figura está trazada mediante su contorno con una línea corriente en tinta.

Para usar este material, evidentemente muy graduado, coloca el niño la forma geométrica de madera sobre la correspondiente tarjeta. Claro es que se dan los nombres de todas las formas, que los niños asimilan fácilmente.

233. El material didáctico para la Aritmética.— *a*) Series de tarjetas en que están pegados números de papel de lija.

b) Grandes cartones con las mismas figuras en papel liso para la numeración de 10 en adelante.

c) Dos cajas con palillos en forma de huso para contar.

d) La Tabla de multiplicar formada por clavos de cabeza brillante formando un cuadro lleno de 10 clavos por lado. Con un cordón verde se envuelve el rectángulo que corresponde al producto.

e) La Tabla de multiplicar formada por un cuadro de orificios a los que se ajustan clavijas que formen el rectángulo representativo del producto.

234. Opinión.—El método Montessori es apropiado para párvulos solamente (por eso damos sólo el material para este grado, y las tablas de multiplicación por su importancia). Y aun en las escuelas francesas hemos podido recoger la certeza de que los mismos párvulos se cansan pronto del material Montessori que dominan rápidamente.

Lo valioso del método es su orientación, que debe revolucionar la enseñanza y la educación por completo.

El aspecto excesivamente geométrico de la educación sensorial en lo referente a formas ha sido criticado por Biciulesco, quien en sustitución del material Montessori propone objetos de la vida real: ventanas con cristales desmontables, armarios con puertas que se separan y se encajan, mesas con cajones de dimensiones diversas; vasos que varían como los cilindros de que antes se habló, platos, marcos de cuadro. Los cubos y prismas se sustituyen por baúles, tarros de confitura, toneles ... Las siluetas de formas geométricas, por otras siluetas de objetos o seres vivientes, etc.

La manera de operar es la misma y seguramente este material resultará más atractivo en principio que el de la Montessori; dudamos, sin embargo, de que sea tan educativo como aquél y aunque el interés que lleva consigo lo que el objeto representa no perturbe la intuición de la forma. Se está un poco de vuelta contra el exceso de facilidad y de intereses mediatos, y la cuestión es si la forma geométrica tiene bastante atractivo por sí misma para que el alumno trabaje.

3.—El Método Decroly.

235. Sus fundamentos.—Para nosotros tiene especial importancia la consideración de este método porque representa algo intermedio, tal vez una solución armónica, entre la enseñanza clásica por materias separadas, que es la más adecuada para la Matemática por sí misma, y la enseñanza puramente ocasional a que tienden las escuelas nuevas. En efecto, dice Decroly que «es preciso cuidar de que la enseñanza esté dominada por ciertas ideas generales para que no se convierta en una colección de detalles aislados».

Como consecuencia de esto, Decroly agrupa la materia de la enseñanza en sus conocidos Centros de Interés, y las actividades, en ejercicios de *observación*, de *asociación* y de *expresión*; y como medio indirecto de aprendizaje, predominante casi en los primeros grados, el *juego*, construyendo los mismos niños gran cantidad del material que se emplea, formado en gran parte por cartones con imágenes.

236. La aplicación.—Los niños adquieren el concepto de número contando los objetos que los rodean, dándoles nombre, los relacionan también con las cifras, sin escribirlas ellos, mediante la presentación de tarjetas, y reconocen también los números en las imágenes, así, por ejemplo, en un paisaje reconocen los árboles, las casas, los animales que aparecen, y colocan en el friso que lleva el cuadro otras tarjetitas con las imágenes correspondientes sueltas. Más tarde colocan las cifras, y solamente después aprenden a escribirlas.

Las operaciones se aprenden de la misma manera, bien contando y agrupando objetos, bien mediante cuadros en que existen grupos de objetos interesantes: cerezas, golondrinas, etc., el niño coloca frente a cada grupo la tarjeta con el número que le corresponde, otra con el signo de la operación, y debajo otra con el resultado.

Al sistema métrico dedica Decroly mucho tiempo, tal vez demasiado, pero hay que tener en cuenta que las medidas son base de muchos cálculos y conviene dar la noción exacta. Siguiendo el método histórico, empieza por formar un sistema de medidas *naturales* como son: para pesos, castañas; para volúmenes, el dedal, la taza y la jarra; para superficie, el pañuelo, el corral; para longitud, el dedo, el palmo, la braza... Sólo más adelante pasa al S. M. D.

El tiempo da también motivo a ejercicios útiles. El péndulo sirve para contar, y cuando se le hace batir segundos su longitud se toma para el metro del que realmente difiere muy poco. El reloj y el calendario son utilizados para la realización de ejercicios y los mismos niños forman un gran calendario para todo el año que lleva en el centro un reloj, a continuación periféricamente las cuatro estaciones con sus tres meses cada una como trapecios poligonales, y dentro de cada uno de éstos separados los días, con indicación en cada uno mediante un dibujo, un grabado recortado y pegado, una nota de algun suceso de trascendencia que ocurra el día en cuestión.

La Geometría se estudia con ocasión de las medidas y croquis que exige el trabajo manual.

237. Opinión.—La exposición que antecede, limitada por la escasez de espacio, puede dar una idea de lo que es el método Decroly en lo que se relaciona con la enseñanza de la Matemática. Opinamos que se pasa demasiado tiempo con ejercicios como las medidas naturales, ya que basta generalmente que en una sola clase los niños midan a palmos una cierta extensión para convencerles de la naturalidad, pero arbitrariedad e inconvenientes de tales medidas.

Hasta el uso con profusión de cuadros y tarjetas está siendo criticado y considerado como algo anticuado y excesivo por los psicólogos y pedagogos norteamericanos. Del método en cuestión conviene tomar algunos procedimientos y sugestiones, pero... su principal mérito no reside en el aspecto parcial de la enseñanza de la Matemática.

4.—La Matemática en las Escuelas Nuevas.

238. Su carácter.—La enseñanza metódica que la Matemática requiere no se compagina muy bien con el carácter de estas escuelas en que el respeto a la personalidad individual se traduce en una *autonomía* que llega en algunos casos a verdadera anarquía recordando la Escuela de Tolstoi. Otros de sus caracteres, la apelación a la *experiencia individual* y la relación íntima con la *sociedad*, pueden ser ocasión de métodos y procedimientos que no variarán gran cosa los expuestos por nosotros, así, por ejemplo, fundandose en la última tendencia, los alumnos de ciertas escuelas toman como base para sus problemas los precios locales, más tarde el desarrollo de las industrias y el comercio regionales, y finalmente las industrias y el comercio mundial. Los problemas de tanto por ciento surgen, por ejemplo, como resultado de una encuesta sobre la mortalidad.

El trabajo manual es en muchas de ellas el eje de la labor escolar, y los problemas que de él surgen, son, en su aspecto matemático, los que determinan el contenido en nuestro asignatura.

En algunas como las de Fair Hope el respeto a la iniciativa del niño llega a abolir toda enseñanza sistemática, y al detalle de que se estudien los números por contar objetos, y que se opere con ellos ocasionalmente sin escribir cifras hasta los nueve años, como en la escuela de Pestalozzi. En cambio, en otras escuelas la enseñanza del cálculo se hace sistemáticamente, estableciéndose de una parte comunidades libres de trabajo y de otras cursos metódicos, dedicando prácticas especiales al cálculo, como a la lectura y la escritura.

El principio de la experiencia personal como base de educación ha dado como consecuencia el que se haya ideado material como el Mac Kinder con el cual el niño puede aprender solo. En esencia está reducido al materal recomendado por nosotros aumentado con sus soluciones. Así, por ejemplo, nosotros proponemos tiras de bolas o de botones que se hacen corresponder con cifras escritas en tarjetas, y Mac Kinder presenta además cuadros con las soluciones, y otras veces apela a la obtención directa del resultado mediante la manipulación de objetos. Análogo a él es el método Winnetka.

Una ampliación de esto es el material de cálculo utilizado en algunas escuelas nuevas americanas, en el cual el alumno encuentra una serie de ejercicios graduados para su resolución, con referencia a soluciones al final de los mismos y con indicaciones de la manera de vencer las dificultades que puede encontrar en el camino. Este procedimiento robinsoniano no tiene más inconveniente que lo excesivamente largo que resulta.

Precisamente la ayuda del maestro sirve para abreviar el camino siempre largo y penoso de la *propia experiencia*, y no creemos que se gane gran cosa aislando excesivamente al maestro del alumno y sustituyendo la acción consciente y adaptada de éste por la mecánica de un libro de *tets* por muy bien hechos que estén. La orientación es excelente, pero creemos que ha sido llevada a la exageración.

Algo análogo decimos respecto al Método de Proyectos en relación con la enseñanza de la Aritmética; puede ser considerado como una parte importante de la enseñanza, incluso como la base de la misma, lo que no puede hacer es sustituir a la enseñanza metódica del cálculo (véase cap. VI, 5) ni a la parte sistemática de nuestra ciencia que le da la mayor parte de su valor educativo, a no ser que entre los *proyectos* entre el de dominar el cálculo o el de sistematizar los conocimientos.

CAPITULO VIII

EL PROGRAMA

1.—Estudio crítico de los programas extranjeros más notables

239. Objeto.—La finalidad de esta exposición crítica es mostrar con los mejores ejemplos cómo ha sido resuelto el difícil problema de la confección de un programa escolar para la enseñanza de la Matemática, juzgado con arreglo a los principios antes esteblecidos, exponiendo al mismo tiempo el nivel alcanzado por esta enseñanza en los diferentes países, y sus características especiales, todo lo cual puede constituir base de juicio, término de comparación, y sobre todo, dada nuestra situación en la enseñanza, considerable estímulo.

Seremos parcos en el comentario crítico porque creemos que es el lector quien ha de hacerlo como provechoso ejercicio de aplicación de lo expuesto hasta ahora.

FRANCIA

SECCION PREPARATORIA

(6-7 años)

240. Cálculo.—Primeros elementos de la numeración. Contar objetos, escribir los números correspondientes hasta 10 y luego hasta 100.

Pequeños ejercicios de calculo oral o escrito (sin pasar de 100), sumar y restar grupos de objetos: sumar y restar los números correspondientes.

Contar de 2 en 2, de 3 en 3 y de 4 en 4. Multiplicar por 2, 3 y 4.

Dividir grupos de objetos en 2, 3 y 4 partes iguales.

Dibujo.—Agrupación y disposición de objetos (cubos, palitos, fichas) en forma de siluetas.

Copia en negro, mejor en color, de estas combinaciones.

Pequeños dibujos geométricos.

Modelado.

Trabajo manual.—Recorte de «confetti» agrupando los discos de modo que representen números o formen motivos decorativos.

Pequeños ejercicios de trenzado, plegado y tejido.

(¿Cree el lector suficiente el conocimiento de las formas que habrá adquirido el niño en relación con lo propuesto sobre todo por Froebel y la Montessori?)

CURSO ELEMENTAL

(7-9 años)

241. Cálculo, Aritmética, Geometría.—1. *Numeración decimal*: el *m. g. l.* y sus múltiples.

Cálculo oral.—Tablas de sumar y multiplicar. Aplicación de las cuatro reglas a números inferiores a 100.

Cálculo escrito.—Aplicación de las cuatro reglas a pequeñas cantidades (limitándose para la división a un divisor de dos cifras).

Pequeños problemas orales o escritos sobre temas usuales.

Primeros ejercicios de cálculo rápido y de cálculo mental.

2. *Geometría.*—Medida de longitudes. Aprecia-

ción de distancia a simple vista y su comprobación por la medida directa.

Dibujar y reconocer las figuras más elementales: triángulo, rectángulo, cuadrado, círculo. Noción del ángulo.

Idea de la medida de superficies rectangulares mediante la cuadrícula.

Nociones sobre los cuerpos sólidos utilizando modelos en relieve.

Trabajo manual.—Ejercicios relacionados con la enseñanza de la Aritmética, Geometría y Dibujo.

Representaciones geométricas, sirviéndose de tiras de papeles de colores.

Comprobación de las propiedades de las figuras geométricas mediante el estudio comparativo de estas figuras o de sus elementos.

(Nótese con elogio la orientación del trabajo manual para nuestra enseñanza. ¿Es razonable llegar a los nueve años sin estudiar la peseta y el céntimo? ¿Sin emplear pesetas y céntimos en el cálculo y por lo tanto sin utilizar los números decimales? ¿Sin noción de las formas espaciales, por breve que sea, ha de iniciarse la Geometría? Sin haber hablado de las unidades de superficie ¿con qué clase de unidad se miden las formas rectangulares? ¿Bastará con las formas estudiadas para hacer variado el trabajo manual? ¿No surgen paralelas y perpendiculares de las mismas figuras recomendadas y de las *tiras* utilizadas?)

CURSO MEDIO

(9-11 años)

242. I. **Cálculo y Aritmética.**—Aplicación de las cuatro reglas a números mayores que en el curso elemental.

Números complejos: el tiempo (horas, minutos, segundos), cálculo de la longitud de la circunferencia.

Sistema de medidas legales a base de 10, 100 y 1.000.

Múltiplos y submúltiplos.

Cálculo de superficies: rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo.

Cálculo de volúmenes: prisma recto de base rectangular, cubo, cilindro.

Números decimales y fracciones decimales. Idea general de las fracciones ordinarias. Práctica de las cuatro operaciones con fracciones ordinarias en ejercicios muy sencillos numéricamente.

Problemas acerca de temas de uso corriente.

Regla de tres simple y de interés simple.

Continuación y ampliación de los ejercicios de cálculo rápido y mental.

2. **Geometría.**—Estudio intuitivo y representación mediante el dibujo de las figuras de la Geometría plana.

Nociones sumarias acerca de la representación de longitudes y sobre planos y mapas a una escala dada.

Nociones prácticas acerca de los sólidos geométricos simples (cubo, prisma recto). Nociones sumarias sobre su representación geométrica (croquis acotado).

Círculo.—Su división en grados.

Cuadrado, exágono regular, triángulo equilátero inscritos en el círculo.

Dibujo.—Dibujo geométrico, croquis acotado.

Trabajo manual.—Ejercicios sobre las formas geométricas planas. Descomposición de estas figuras. Relación entre sus elementos.

Representación y ejecución en cartón de los sólidos geométricos. Su desarrollo.

(¿No sería preferible estudiar el área del círculo después de la del polígono regular?

¿No convendría estudiar antes la del cuadrado que la del restángulo y el volumen del cubo antes que el del ortoedro?

¿No se presta a confusión colocar la longitud de la circunferencia antes de los números decimales, habiendo de utilizar π?

¿No debiera precisarse más el alcance de los números empleados y el de la regla de interés?)

CURSO SUPERIOR

(11-13 años)

243. 1. **Cálculo y Aritmética.**—Operaciones de cálculo acerca de los números enteros decimales, fraccionarios y complejos.

Cálculo de algunas superficies (paralelogramo, trapecio, polígono, sector de círculo, superficie lateral del cilindro y cono). Cálculo de la superficie de la esfera.

Cálculo de ciertos volúmenes (prisma recto de base poligonal, cono, esfera).

Problemas.—Solución razonada de problemas de interés, descuento, repartimientos proporcionales y densidades. Empleo progresivo de letras, representaciones gráficas y soluciones algebraicas de primer grado.

Continuación y ampliación de los ejercicios de cálculo mental y rápido.

2. **Geometría.**—Nociones muy sumarias de Geometría plana.

Circunferencia, su división en grados.

Operaciones muy sencillas de agrimensura.

Nociones muy elementales relacionadas con los ejercicios de dibujo geométrico.

Dibujo.—Dibujo geométrico, croquis acotado.

(Señálese la graduación en el conjunto del programa. Idem la separación del cálculo geométrico de la Geometría. ¿No es retrasar demasiado estudiar ahora la división en grados de la circunferencia? ¿No falta el volumen de las pirámides antes que el del cono, o con él? Nótese la transacción que supone el estudiar los repartimientos proporcionales como simples problemas. Nótense las reglas suprimidas. ¿Conviene que desaparezca la regla de tres compuesta? ¿Cómo puede ser sustituída?)

ITALIA

CLASE 1.ª ELEMENTAL

238. Números hasta 5 (un bimestre) con pequeños dibujos geométricos correlativos.

Desde 5 a 10 (otro bimestre). 1 a 15 — 1 a 20 con sus operaciones.

CLASE 2.ª ELEMENTAL

1. Escritura y lectura de números hasta 100.
2. Ejercicios orales acerca de las cuatro operaciones con tales números aplicados a solución de problemas fáciles. Tabla pitagórica preparada con ejercicios de contar de 2 en 2, etc. Seguridad y rapidez.
3. Monedas, medidas lineales, pesos, medidas comprendidas entre 1 y 100.
4. Dibujo de figuras geométricas regulares y conocimientos de sus características.

Nomenclatura de los cuerpos geométricos (cubo, esfera, cilindro).

CLASE 3.ª ELEMENTAL

245. 1. Repaso de la tabla pitagórica y ejercicios correspondientes.

2. Ejercicios graduados y preferentemente mentales sobre las cuatro operaciones de 1 a 1.000 (multiplicadores y divisores con una o dos cifras).
3. Problemas orales y escritos encaminados a explicar los conceptos de ganancia, pérdida, distribución.
4. Pesos, medidas y monedas. (Ejercicios oportunos para la composición y descomposición de los números).
5. Primeros ejercicios acerca de los decimales.
6. Dibujo geométrico.

Se invitará al alumno a explicar como ha obtenido los resultados.

CLASE 4.ª ELEMENTAL

246. 1. Ejercicios de repaso acerca de las reglas estudiadas en clases anteriores.

2. Extensión del período numeral hasta un millón y operaciones aritméticas sin la limitación precedente.

3. Nociones metódicas del sistema métrico decimal. Medidas de superficie.

4. Las cuatro operaciones con números decimales. (En la división se empleará como divisor un número entero por lo menos durante dos meses antes de pasar al divisor decimal).

5. Dibujo geométrico. Medición de superficies.

CLASE 5.ª ELEMENTAL

247. 1. Ejercicios, siempre que sea posible sin auxilio, acerca de las reglas aprendidas en las clases anteriores.

2. Extensión del período numeral por encima del millón, y operaciones aritméticas.

3. Elementos de aritmética razonada dentro del límite de las clases precedentes.

4. Repetición y nuevas aplicaciones de las nociones acerca del S. M. D. medidas de volumen.

5. Fracciones. Operaciones relativas.

6. Proporciones y regla de tres simple (con numerosos problemas, que habrán de ser resueltos con preferencia mentalmente, basados en la vida práctica). Regla de interés.

7. Dibujo geométrico.

8. Construcción de cuerpos sólidos.

9. Nociones de Contabilidad.

(¿Hace falta tanto tiempo para los números hasta 5? ¿Está justificado el escalón del 15? ¿No es demasiado bajo el del 20? Nótese la temprana aparición de las monedas, la consideración de la enseñanza como una forma de lenguaje, la importancia dada a la tabla de multiplicar y las indicaciones acerca del método. ¿No se habla de haber dado *reglas* demasiado pronto? ¿Está en su sitio el cálculo con decimales? ¿No falta relación con el trabajo manual y cuestiones de valor práctico como los volumenes, la agrimensura y el croquis acotado?)

SUIZA

(*Cantón de Ginebra*)

Aritmética

PRIMER AÑO

(Niños, 3 horas semanales; niñas, 4 horas)

248. El estudio de los 20 primeros números se hace en lecciones sucesivas por medio de objetos y figuras numéricas. De este modo se llega experimentalmente a la adición, construcción progresiva de la tabla de sumar por el alumno, sustracción, y algunos casos inmediatos, sin notación escrita, de la multiplicación y división.

SEGUNDO AÑO

(Idem)

249. Desarrollo de la práctica de la adición y la sustracción. La multiplicación en su sentido concreto y en su mecanismo, referida a la adición.

Construcción experimental por el alumno de la tabla de multiplicar en sesiones sucesivas; aplicaciones graduales de multiplicaciones escritas.

Numeración hablada y escrita hasta 1.200. Estudio particular de la centena.

Cálculo oral.—Tabla de multiplicar (su empleo para la división), adición, sustracción (límlte 120).

Nociones acerca de la mitad, el cuarto, el tercio y el sexto (en los límites de la tabla de multiplicar).

Cálculo escrito.—Adición y sustracción (límite 1.200).

Multiplicación con una y después con dos cifras en el multiplicador (límite del producto 1.200).

Sistema métrico.—Nociones elementales mediante la actividad concreta acerca del cm., dm., m., l., kg., fr. y céntimo.

Problemas.—Pequeños problemas realizados por los alumnos.

TERCER AÑO

(4 horas)

250. Recordar al niño con frecuencia y experimentalmente el sentido de las cuatro operaciones. El estudio de la división distingue el caso de la correspondencia total o parcial entre sus términos. Las lecciones acerca del S. M. D. no se proponen aún comunicar noción alguna de conjunto, por lo cual se difiere toda explicación sobre el sentido de los prefijos.

Numeración.—Las dos primeras clases. (Límite ordinario 200.000).

Cálculo oral.—Revisión de las tablas de sumar y multiplicar para que el alumno llegue a dominarlas. Las cuatro operaciones, la mitad, el cuarto, el octavo, el tercio y el sexto.

Cálculo escrito.—Las cuatro operaciones. División con una, y después con dos cifras en el divisor.

Sistema métrico.—Experimentación acerca del cm., dm., m., l., dl., kg., Hg., fr. y céntimos.

Problemas sencillos que no comprenden más de dos operaciones diferentes y tres operaciones en total.

CUARTO AÑO

(Niños, 4 horas; niñas, 3 horas)

251. Estudio experimental de las fracciones, aplicado especialmente a la 0,1; 0,01 y 0,001.

Se introduce y explica cada una de las cuatro operaciones con fracciones decimales, por medio de cantidades concretas. La resolución de problemas del sistema métrico insistirá en la noción de fracción decimal, de modo que esta noción no resulte borrosa por el empleo de la coma. Se introduce gradualmente la idea de límite en la apreciación previa del resultado de una operación.

Numeración.—Sus tres primeras clases. Numeración hablada y escrita de números decimales (límite, 4 decimales).

Cálculo oral.—Ejercicios sobre los números enteros; procedimientos particulares.

Empleo elemental de la noción de fracción.

Cálculo escrito.—Repaso razonado de las cuatro operaciones con números enteros. Las cuatro operaciones con números decimales.

Sistema métrico.—Unidades de longitud, capacidad, superficie y agrarias. Cambio de unidad en casos útiles.

Problemas.—Con números enteros y decimales que no ofrezcan más de un cambio de unidad y de tres operaciones.

QUINTO AÑO

(Idem)

252. Las operaciones sobre las fracciones ordinarias no habrán de apoyarse en regla ni fórmula general alguna que no sea el fruto de una abstracción progresiva hecha por el alumno sobre magnitudes concretas y variadas. En su parte esencial el campo de estudios comprende la multiplicación y división de una fracción ordinaria por un número entero. En cuanto a los problemas sencillos de multiplicación y división por una fracción se referirán analíticamente a las operaciones conocidas.

En la continuación del S. M. D. se insistirá en la noción de fracción decimal.

Cálculo oral.—Ejercicios acerca de los números enteros, las fracciones ordinarias y los decimales.

Cálculo escrito.—Revisión de las cuatro operaciones sobre números decimales, idea del límite (aproximación?).

Fracciones ordinarias; simplificación; cociente exacto.

Escritura de fracciones decimales bajo la forma de ordinarias, casos sencillos de conversión contraria.

Adición y sustracción. Multiplicación y división de una fracción por un número entero. Casos muy sencillos.

Sistema métrico.—Unidades de longitud y unidades de capacidad (revisión). Unidades de peso. Unidades de superficie (revisión) y unidades de volumen.

Problemas.—Problemas simples de proporción directa (por reducción a la unidad). Pequeñas facturas; compras diversas.

SEXTO AÑO

(Varones, cuatro horas; niños, tres horas)

253. Las lecciones de repaso se proponen como fin: *a*), dar al alumno nociones prácticas aplicadas al comercio, al ahorro o la vida corriente; dejarle un conocimiento bien coordenado del sistena métrico; *b*), precisar sus ideas sobre el sentido de las operaciones y algunas de sus propiedades útiles, habituarle a pensar con claridad, gracias a los trabajos reflexionados y bien ordenados. Estos objetivos no pueden alcanzarse completamente por la simple resolución de los problemas.

Cálculo oral.—Ejercicios sobre el número entero y los números decimales; procedimientos particulares. Resolución de casos muy simples de porcentaje, de interés y de descuento. Noción de raíz.

Cálculo escrito.—Revisión de las cuatro operaciones sobre números enteros, números decimales, fracciones ordinarias (en el sentido indicado en 5.º). Idea de límite.

Sistema métrico.—Revisión completa: longitud superficie, volumen, capacidad, peso, moneda. Correspondencia entre unidades. Experiencias sobre la noción de densidad.

Números complejos.—Medidas del tiempo y de ángulos (casos simples).

Problemas.—Problemas sobre el sistema métrico. Problemas sencillos de proporciones directas (por reducción a la unidad). Porcentaje, interés, descuento, calculado sobre billetes y extracciones establecidos previamente. Constitución de una cartilla de ahorros, Facturas, contabilidad de cajas sencillas.

SEPTIMO AÑO

(4 horas)

254. Cálculo oral, cálculo escrito, cálculo rápido.

Contabilidad.—Se trata, sobre todo, de contabilidad familiar, contabilidad de compras y ventas, contabilidad mutua, contabilidad doméstica y de presupuestos; diferentes modos de pagos, facturas, recibos, efectos comerciales, cheques y bonos de correos. Nociones elementales sobre el cambio (libra esterlina, marco, problemas muy sencillos).

El comercio, los comerciantes. Cálculo del precio líquido. Interés y descuento. Cartillas de ahorro.

Geometría.

255. De un carácter netamente experimental, la enseñanza se basa sobre la observación directa de los cuerpos y de las figuras geométricas, sobre su construcción por cada alumno (actividad manual) y sobre el empleo de los instrumentos (doble decímetro, compás, escuadra y trasportador). No utilizará ninguna regla o definición que no sea el fruto de una abstracción progresiva hecha por el alumno sobre magnitudes concretas.

CUARTO AÑO

(2 horas)

256. Observación directa sobre elementos fundamentales; líneas, puntos, ángulos; distancias de un punto a una recta; rectas paralelas.

Construcción de cuadriláteros, rectángulos, cuadrados, paralelogramos, rombos; observación de sus propiedades. Construcción de triángulos. Trazados de altura.

Uso del croquis a escala.

Medidas de longitud, cálculo de perímetros en figuras construídas. Empleo de escalas.

Area de rectángulos y de cuadrados.

Aplicación a objetos por medida directa.

QUINTO AÑO

(2 horas)

257. Repaso de las construcciones del campo precedente y de cálculos de áreas que se relacionen con él. Areas de triángulos por el rectángulo equivalente. Construcción de trapecios (el área del paralelogramo y del trapecio se calculará preferentemente por descomposición en triángulos).

El círculo; su circunferencia; determinación experimental. Area del círculo; determinación directa y después utilizando π (pi).

Construcción de algunos polígonos regulares inscritos. Primeras nociones sobre volúmenes. Paralelepípedos: desarrollo, volumen, superficie. Aplicación por medida directa de objeto.

Al aire libre: operaciones sencillas sobre el terreno; medida de una longitud, de un ángulo, de los elementos necesarios para levantar el plano de un triángulo.

SEXTO AÑO

(2 horas)

258. Revisión de las construcciones precedentes. Problemas sencillos de construcciones relativas a dos puntos situados (lugares geométricos).

Areas.—Revisión de los cálculos de áreas del programa precedente.

Volúmenes.—Construcción por el modelado de paralelepípedos, cubos, prismas, cilindros.

Desarrollo y cortes del paralelepípedo y del cilindro; cálculo de su volumen, de su superficie; aplicación a objetos usuales por su medida directa.

SEPTIMO AÑO

(Solamente los varones, una hora)

259. La pirámide, el cono. Construcción por el modelado y el cartón, cortes, cálculo del volumen.

Medida directa de volúmenes usuales con aplicación a los problemas sencillos: montones de arena, madera en troncos, madera en tablas.

Teorema de Pitágoras. Extracción de la raíz cuadrada (sin teoría).

(Nótese la elevación del límite a 1.200 que permite emplear sumandos de tres cifras, la introducción de fracciones pequeñas, el detalle y las acertadas indicaciones sobre el método; la importancia concedida a las tablas; la grada ción en los problemas; la relación entre los números y el S. M. D.; la insistencia sobre el sentido de las operaciones y su repaso razonado;

la armonía entre el cálculo oral y escrito; la introducción de la raíz cuadrada y el teorema de Pitágoras, y el carácter práctico de la enseñanza en los últimos años.)

(En cambio, ¿por qué omitir la significación de los prefijos en el S. M. D.? ¿Por qué extender a 4 las cifras decimales, e introducir tan tarde (4.º año) el estudio de las formas?)

BELGICA

Cálculo y sistema métrico

260. 1. La enseñanza *intuitiva* del cálculo no quiere decir, simplemente, mostrar a los alumnos los objetos, sino, sobre todo, hacérselos manejar de manera que entren también en actividad sus sentidos tactil y muscular.

2. Las ocupaciones manuales constituyen un excelente medio de adquisición, de aplicación y de comprobación de los conocimientos en el sistema métrico.

3. Los problemas serán tomados de la vida real y contendrán únicamente datos verdaderos.

A este respecto, las operaciones realizadas en el curso de trabajo manual pueden dar lugar a interesantísimas aplicaciones de cálculo, análogas a las que se resuelven todos los días en el ejercicio de las profesiones: cálculo de dimensiones, de superficies, de volúmenes, valoración de cantidades y de precios de las materias primas necesarias, etc.

4. Los ejercicios y los problemas serán resueltos por cálculo mental, siempre que las combinaciones de los datos numéricos permitan el empleo de *procedimientos abreviados*, basados en los principios establecidos; se escogerán los datos de modo que estos casos sean frecuentes.

5. Para que la enseñanza del cálculo ejerza toda su influencia sobre la educación intelectual del niño, no son suficientes las observaciones intui-

tivas y las comprobaciones: se debe acudir también al *razonamiento,* pero sin exceso (1).

El maestro relacionará, pues, rigurosamente todas las nociones de cálculo enseñadas. Esforzándose, por otra parte, en habituar a los alumnos al uso del término propio, del lenguaje matemático.

6. Las definiciones y las reglas serán siempre exactas, y se las reducirá al mínimo absolutamente indispensable para la comprensión del curso de matemáticas.

PROGRAMA

PRIMER AÑO

A.—*Cálculo mental*

261. 1. Formación, nomenclatura y representación intuitiva y por medio de cifras de los números de 1 a 20. Las cuatro operaciones combinadas con estos números.

2. Ejercicios y problemas de aplicación, unas veces propuestos por el maestro y otras planteados por los alumnos.

Observaciones.—1. El conocimiento perfecto de los primeros números, es decir, el conocimiento de las diversas maneras de formarlos y de descomponerlos, es el *fundamento indispensable* de todo curso de cálculo.

Para que el alumno lo adquiera, es preciso: que el maestro vaya muy lentamente al principio del curso, que el discípulo fije en su espíritu la imagen de cada formación por el manejo de los objetos o por el dibujo de las formas que dispone de diversas maneras (1), y que se use la

(1) Así, es abusivo enseñar en la escuela primaria la demostración de las operaciones fundamentales y la de los caracteres de divisibilidad; en el primer caso, la pretendida demostración no es a menudo más que una paráfrasis de la regla; en el segundo caso, sobrepasa el nivel intelectual del niño.

(2) Las disposiciones en grupos simétricos, de preferencia

noción nuevamente adquirida en *muy numerosos* ejercicios orales y gráficos de aplicación (1).

2. De la misma manera que el niño sabe leer cuando descifra las palabras de golpe, sin necesidad de deletrear, sabe calcular cuando puede dar inmediatamente el resultado de una operación sin detenerse en las descomposiciones mentales previas. El maestro evitará, pues, que los alumnos copien largas y fastidiosas series de operaciones, dando la preferencia a los ejercicios orales, que permiten un *vivo tiroteo* de respuestas. La rapidez es la medida del saber en cálculo mental

En tercero y cuarto grado se recomienda el recurrir a la previa estimación global del resultado y el uso del método analítico en la resolución de problemas.

3. Conviene acostumbrar a los alumnos a discurrir y a resolver pequeños problemas de una sola operación: *a*), materializada; *b*), representada en croquis; *c*), simplemente enunciada.

B.—*Sistema legal de pesas y medidas*

262. Conocimiento intuitivo y práctico del metro, del litro, del kilogramo y del franco. Hacer medir, contar, efectuar pagos ficticios.

SEGUNDO AÑO

A.—*Cálculo mental*

263. 1. El mismo estudio que en el primer año, con los números de 20 a 100.

2. Estudio sistemático de la tabla de multiplicar y de sus aplicaciones a la división de núme-

cuadrangulares, se retienen mucho mejor que las disposiciones lineales.

(1) Ejemplos: cálculos con cifras, dibujitos en negro y colores, recortado y pegado de papeles de color, de viñetas, de sellos, etc. Dictado de operaciones.

ros comprendidos entre 10 y 100 por los diez primeros.

3. Ejercicios y problemas de aplicación, unas veces propuestos por el maestro y otras sugeridos por los alumnos.

B.—*Sistema legal de pesas y medidas*

264. 1. Conocimiento intuitivo y práctico:

a) Del decámetro, del decímetro; del decalitro, del decilitro; del decagramo, del hectogramo.

b) Del medio litro y del medio kilogramo.

c) De las monedas de 1, 2, 5, 10 y 50 céntimos.

Hacer medir, pesar y efectuar pagos ficticios.

Ejercicios y problemas.

Observación.—La representación escrita de las mitades y de los divisores se trasladará al segundo grado.

TERCER AÑO

A.—*Cálculo mental y cálculo escrito*

265. 1. Repaso del curso anterior.

2. Formación, nomenclatura y escritura: *a*), de los números de 100 a 1.000; *b*), de la décima parte, la centésima parte, la milésima parte.

3. Las cuatro operaciones fundamentales efectuadas con estos números (cálculo mental y escrito). Explicación elemental del objeto y de los usos de cada una de ellas. Multiplicación de estos números: *a*), por un número dígito; *b*), por 10; *c*), por un número exacto de decenas; *d*), por un número de dos cifras. División de estos números: *a*), por un número dígito; *b*), por 10.

4. Formación material, nomenclatura y escritura de fracciones ordinarias cuyo denominador no pase de 10. Hallar $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^2/_5$, etc., de un número entero (el denominador no pasará de 10).

Empleo de ilustraciones gráficas para deducir las reglas.

5. Numerosos ejercicios y problemas tomados

de la vida diaria, de los oficios, de la agricultura, etcétera.

Observación.—Se estudiarán paralelamente el cálculo mental y el escrito, da manera que el primero proporcione la base y la explicación de las operaciones del segundo.

B.—*Sistema legal de pesas y medidas*

266. 1. Conocimiento intuitivo y práctico de las medidas de longitud, capacidad y peso. Relaciones entre la unidad principal, los múltiples y los divisores decimales, dentro de los límites de la numeración estudiada. Ejercicios de medir y de pesar.

2. Las monedas legales. Pagos ficticios.

3. Conocimiento intuitivo del metro cuadrado, del decímetro cuadrado, del centímetro cuadrado, del área y de la centiárea. Comparaciones.

4. Conocimiento intuitivo del metro, del decímetro y del centímetro cúbicos.

5. Ejercicios y problemas usuales, sirviendo de aplicación al sistema métrico con operaciones que deban resolverse unas veces por cálculo mental rápido y otras por escrito.

CUARTO AÑO

A.—*Cálculo mental, cálculo escrito*

267. 1. Repaso del curso anterior.

2. Conocimiento práctico de la numeración hablada y de la numeración escrita, de los números enteros y de los decimales.

3. Las cuatro operaciones fundamentales aplicables a estos números en un orden progresivo (cálculo mental, cálculo escrito). Multiplicación: 1.º, por un número dígito; 2.º, por 10, 100, 1.000; 3.º, por un número exacto de decenas, de centenas o de millares; 4.º, por un número formado por decenas, centenas y unidades. División: 1.º, por un número dígito; 2.º, por 10, 100, 1.000; 3.º, por un número compuesto de decenas y unidades. Casos

de multiplicación rápida por 5, 9, 11, 15, 19, 25, 50, 75, 100; casos de división rápida por 5, 25 y 15.

4. Numerosos ejercicios y problemas tomados de la vida corriente, de los oficios, de la agricultura y de la industria, etc. Algunas cuestiones fáciles sobre repartos desiguales.

Ejercicios y problemas inventados por los alumnos.

5. Fracciones ordinarias: *a*), formación, nomenclatura y escritura de fracciones ordinarias cuyo denominador no pase de 20; *b*), suma y resta de fracciones con igual denominador; *c*), transformación de números enteros y de números fraccionarios en expresiones fraccionarias equivalentes y viceversa; *d*), multiplicación y división de fracciones por un número entero inferior a 10. Los procedimientos serán deducidos, siempre que sea posible, por construcciones gráficas.

Observación.—Se llevarán paralelamente el cálculo mental y el escrito, de manera que aquél proporcione la base, la explicación y el razonamiento de éste.

B.—*Sistema legal de pesas y medidas*

268. 1. Exposición intuitiva, práctica y razonada del sistema legal de pesas y medidas.

2. Relaciones entre las medidas.

3. Area del cuadrado y del rectángulo. Volumen del cubo y del paralelepípedo rectángulo.

4. Ejercicios y problemas usuales con aplicaciones del sistema métrico y operaciones que puedan resolverse unas veces por cálculo mental rápido y otras por escrito.

QUINTO AÑO

A.—*Aritmética y cálculo mental*

269. 1. Estudio razonado y muy elemental de la numeración de los números enteros y de los números decimales.

2. Teoría muy elemental de las cuatro ope-

raciones fundamentales, con números enteros y decimales. Prueba de estas operaciones. Hallar el cociente con un error menor de 0,1; de 0,01; de 0,001. Explicación de los teoremas que sirven de base a las simplificaciones usadas, especialmente en el cálculo mental rápido.

3. Caracteres de divisibilidad por 2 y por 5; por 4 y 25; por 8 y 125; por 9 y 3 (enseñados por la observación de numerosos múltiplos).

4. Teoría muy elemental de las fracciones ordinarias: origen y definición; numeración; propiedades fundamentales; simplificación; reducción de fracciones a un común denominador: el denominador común es uno de los denominadores o el producto de ellos; adición y sustracción de las fracciones ordinarias y de los números fraccionarios. Multiplicación y división de las fracciones ordinarias por un número entero. Transformación de las fracciones ordinarias en fracciones decimales equivalentes, y recíprocamente.

5. Método de reducción a la unidad, aplicado a las siguientes cuestiones: regla de tres (simple) —ganancia y pérdida evaluadas en tanto por ciento (casos muy sencillos) —, interés simple.

6. Resolución de problemas referentes a la vida diaria, a los oficios, a la economía doméstica, a la agricultura, etc. Ejercicios de invención y problemas discurridos por los discípulos.

B.—*Sistema legal de pesas y medidas.*

270. 1. Repaso general y metódico del sistema métrico.

2. Aplicación de las medidas de superficie al cálculo del área de un rectángulo, de un paralelogramo, de un triángulo, del rombo.

3. Numerosos ejercicios y problemas de aplicación.

SEXTO AÑO

A.—*Aritmética y cálculo mental*

271. 1. Repaso metódico del curso precedente.

2. Multiplicación y división de las fracciones.

3. Método de reducción a la unidad aplicado a las cuestiones siguientes: regla de tres, ganancia y pérdida evaluadas en tanto por ciento, interés simple, descuento, reparto en partes directamente proporcionales a números dados; cálculo de promedios. La caja de ahorros y de pensiones para la vejez.

4. Problemas relacionados con la vida usual, con los oficios, con la economía doméstica, la agricultura, etcétera. Ejercicios de invención y problemas propuestos por los alumnos.

B.—*Sistema legal de pesas y medidas*

272. 1. Repaso general del sistema métrico.

2. Aplicación de las medidas de superficie al cálculo del área del trapecio, de los polígonos y del círculo.

3. Aplicación de las medidas métricas al cálculo del volumen del prisma, del cilindro, de la pirámide, del cono y de la esfera.

4. Relaciones entre los pesos y las medidas de volumen y de capacidad.

5. Numerosos ejercicios y problemas de aplicación.

SEPTIMO Y OCTAVO AÑOS

A.—*Aritmética sin adaptación al álgebra*

273. 1. Idea de la numeración romana.

2. Definición de número primo y de números primos entre sí. Repetición de los caracteres de divisibilidad. Pruebas de las operaciones. Aplicación a la división por 6, 12, 15, 18, 21..., 35... del principio siguiente (sin demostración): Si un número es divisible por otros dos primos entre sí, es divisible por su producto.

N. B.—Fijarse únicamente en la exactitud de la operación y la rapidez del cálculo.

3. Conversión de las fracciones ordinarias en decimales, y recíprocamente.

4. Cuadrado y cubo de un número. Extracción de la raíz cuadrada y de la raíz cúbica de un número.

B.—*Aritmética con adaptación al álgebra*

I

274. *Aritmética*	275. *Algebra*
1. Numeración.	Numeración. El signo.
2. Paréntesis: su uso y supresión.	Paréntesis, corchetes, llaves: uso y supresión de los mismos.
3. Cantidades homogéneas. Adición y sustracción.	Términos semejantes. Reducción de términos semejantes. Adición y sustracción.
4. Función del multiplicador.	Función del coeficiente.
5. Función del exponente.	Función del exponente.
6. División.	División: fijarse, sobre todo, en que resulte evidente.
7. Fracciones aritméticas (simplificadas).	Fracciones generalizadas (simplificadas) (1).
8. Buscar el mínimo común múltiplo.	Fracciones algebraicas simplificadas.
9. Interés simple, descuento, superficies, volúmenes.	El mínimo común múltiplo.
	Traducción en fórmulas de las mismas nociones.

(1) Los términos de la fracción generalizada no son solamente números enteros, como en la fracción $^3/_4$, sino números cualesquiera, fraccionarios o decimales. Ejemplos: $7\,^3/_4$, $9\,^2/_5$.
La fracción generalizada es la intermedia lógica entre la acción aritmética ordinaria y la fracción algebraica.

10. Método de reducción a la unidad.	Traducción en fórmulas.
11. Las igualdades.	Ecuaciones con una y con dos incognitas (pero con coeficientes numéricos) motivadas por los problemas.
12. Proporciones: propiedades principales.	Proporciones: propiedades principales.

276. Sistema métrico.—Hacer conocer las principales medidas antiguas aún en uso en la localidad o en la región.

Dar a conocer las principales medidas extranjeras de uso frecuente en la práctica de los diferentes oficios.

Formas geométricas y dibujo geométrico

277. 1. La enseñanza de las formas geométricas debe estar íntimamente relacionada con la del dibujo geométrico y la de los trabajos manuales.

2. Las nociones teóricas, siempre sencillas, aunque de una exactitud absoluta, se enseñarán mediante la observación y la experimentación (métodos activos): análisis de formas concretas, plegado de papel, trazado, medida, construcción y superposición de figuras, etcétera. Se limitarán, por otra parte, únicamente a lo que es indispensable: *a*), para el estudio del sistema métrico: *b*), para la comprensión y la justificación de los planos en estudio; *c*), para el conocimiento de útiles, de instrumentos y de operaciones que se emplean en la vida práctica o en las ocupaciones manuales.

3. Hay que ser muy sobrio en las definiciones.

4. Los planos serán siempre claros, precisos, empleando para hacerlos en limpio buenos instrumentos, seriamente comprobados, y ejecutándolos con la mayor exactitud posible.

5. La enseñanza de las proyecciones, tal como se practica habitualmente en las escuelas superiores (proyección del punto, de la recta, de los pla-

nos, etc.), no es adecuada para la escuela prima-ria.

6. Los pocos principios que deben servir de base al curso de proyecciones, en cuarto grado, serán deducidos de la experimentación, y dimanarán, por ejemplo, de la representación de un sólido. Se les aplicará al trazado de proyecciones de cuerpos geométricos y de objetos usuales colocados, cuando la cosa es posible, entre los planos de un proyectógrafo. El dibujo en proyección se combinará íntimamente con la construcción de los sólidos considerados, la evaluación de su superficie y de su volumen.

PRIMER GRADO

(Niños y niñas)

278. *Observación.*—En el primer grado, las nociones geométricas preliminares serán suministradas con motivo de las lecciones de dibujo y de los ejercicios manuales (donde existan).

Nociones intuitivas, prácticas y sin definiciones, sobre las materias siguientes:

1. El cubo y la bola (esfera). Compararlos.
2. El cubo y el ladrillo. Analizarlos someramente: caras, aristas, vértices.

N. B.—Para los números 1 y 2, empezar por la observación de objetos usuales que presenten estas formas, para llegar gradualmente a las formas puras.

3. Noción del cuadrado y del rectángulo; compararlos. Las medianas y las diagonales.
4. Los triángulos.
5. El círculo.
6. Las líneas: verticales, horizontales, oblicuas, paralelas, perpendiculares.
7. Los ángulos: recto, agudo, obtuso.

SEGUNDO GRADO

(Niños y niñas)

279. 1. El cubo y el paralelepípedo rectángulo. Análisis más detallado (ver grado inferior).

2. Los prismas.
El triángulo, el paralelogramo y el rombo.
3. El cilindro y la esfera.
El círculo y la circunferencia. Centro, radio, diámetro, etc.
4. Dibujo con instrumentos (regla, doble decímetro, escuadra, compás). Trazado de las figuras estudiadas.
Desarrollo de prismas rectos de base regular: croquis tomados a pulso y puestos en limpio con lápiz y con ayuda de instrumentos.

TERCER GRADO

(Niños y niñas)

280. 1. Los sólidos: cubo, prismas, cilindro, pirámides, cono, esfera. Desarrollo de estos sólidos.
2. El círculo, la circunferencia. Relación de la circunferencia al diámetro; comprobación experimental.
División de la circunferencia en partes iguales: polígonos.
División de la circunferencia en grados. El transportador. Medida de los arcos y de los ángulos en el centro.
3. Croquis acotados (proyección vertical y horizontal, perfil, corte) de algunos sólidos elegidos entre los estudiados.
4. Croquis acotados (proyección vertical) y horizontal, perfil, corte) de objetos usuales y sencillos, derivados de los sólidos geométricos, o de modelos que deban construirse en la clase de trabajos manuales. Poner en limpio, a escala, algunos de estos croquis (lápiz negro).
5. Curvas usuales: huevo, óvalo, elipse, espiral.
N. B.—Las lecciones de formas geométricas deben estar asociadas a las de sistema métrico,

CUARTO GRADO

(Escuelas de niños)

Geometría

281. A. *Pruebas*	**282.** B. *Aplicaciones*
1. En un punto de una recta...	Comprobar una escuadra. Efectuarlo con el compás.
2. El ángulo cualquiera.	La falsa escuadra, el transportador: uso.
3. La bisectriz.	Construcción de la bisectriz, siendo el vértice: *a*), conocido; *b*), desconocido.
4. La mediatriz.	Construcción de la mediatriz.
5. Las paralelas.	Trazado de las paralelas.
6. El triángulo. Condiciones de existencia. Suma de los ángulos.	Construir un triángulo conociendo tres lados. Determinar el tercer ángulo conociendo los otros dos.
7. El triángulo isósceles y el triángulo equilátero.	Construcción de estos triángulos.
8. Los triángulos semejantes; agrandar y disminuir un triángulo sin variar el valor de los ángulos, multiplicando el de los lados por un número entero y por una fracción.	Noción de las escalas. Dibujos y otros trabajos a escala.
9. Rectas y curvas tangentes a la circunferencia.	Los enlaces, las molduras.

10. El cuadrado de la hipotenusa.	Trazar una perpendicular, sin servirse de la escuadra ni del compás (1) escuadra ni del compás escuadra ni del compás (1). Cuadrado mitad y doble que otro.
11. Las superficies y los volúmenes, pruebas o demostraciones relacionadas con el cálculo aritmético y algébrico (ver programa de aritmética-álgebra).	
12. Ejercicios muy sencillos de agrimensura.	Trazados de agrimensura.
13. Estudio experimental y muy elemental de las proyecciones ortogonales. (Empezar por algunas nociones de perspectiva caballera: volúmenes y objetos sencillos)	Aplicación al dibujo de sólidos, de objetos usuales, de útiles, etc. Ejercicios de lectura de planos muy sencillos. Croquis a pulso, y a veces ponerlos en limpio con arreglo a escala y usando instrumentos. Proyección vertical y horizontal, perfil y sección de objetos que se construyen en la clase de trabajo manual.

(Escuelas de niñas)

Las nociones de geometría y los ejercicios de dibujo geometral se escogerán en correlación con los trabajos manuales femeninos.

(Lo más notable de estos admirables programas es su extensión. Alguna vez parecen prema-

(1) Por medio del triángulo cuyos lados están en la relación de 3, 4, 5. Sobre el terreno se la puede trazar mediante la cadena de agrimensor.

turos ciertos conocimientos como la consideración de las medianas en el primer grado y el desarrollo de primas regulares del segundo. Pero son pequeños reparos que no obscurecen la perfección del conjunto).

283. Creemos suficiente lo anteriormente expuesto para que el lector se haga una idea del contenido y la estructura de los programas extranjeros. En la imposibilidad de trasladarlos todos hemos seleccionado los que anteceden por las razones siguientes: Francia, por alcanzar en ella la enseñanza de la Matemática su más alto nivel intelectualista; Italia, por lo reciente de su reforma y la analogía con nuestro país, y Bélgica y Suiza, por ser los países clásicos de la Pedagogía, adelanto reflejado también en los programas que transcribimos. En Alemania, Inglaterra y Estados Unidos existe una variedad grande de programas y no creemos que su conocimiento añadiera gran cosa de la utilidad que puede extraer el lector de lo que llevamos expuesto.

2.—Estudio de los programas de obras e Instituciones españolas más notables.

284. Justificaciones.—El lector necesitaría conocer un programa más adaptado que los anteriores al carácter español, a la organización de nuestra enseñanza y al nivel y necesidades culturales de nuestro pueblo, pero no existe el programa oficial que pudiera servir de guía y por ello es necesario acudir a las fuentes de información arriba indicadas.

Sería innecesario y aun contraproducente hacer aquí el extracto de un libro escolar español, para presentar el programa; es preferible que el lector revise el libro por sí mismo, y haga él mismo el extracto, con lo cual se dará cuenta del método y los procedimientos seguidos por el autor para desarrollar ese programa. Esto puede hacerlo con cualquiera de las obras escolares que, por ser de uso más corriente, representan la tónica media española. Nosotros excluiríamos, sin embargo, las pequeñas enciclopedias escolares, prefiriendo la obra del especialista, y entre ellas recomendamos especialmente la colección de Palau Vera publicada por la casa Seix y Barral, que sabemos practicada con buen éxito en la enseñanza española, aun a despecho de excesos y faltas, sobre todo en su Geometría.

285. El programa del Instituto. Escuela de Madrid.—Entre las instituciones docentes españolas es seguramente ésta la que ha realizado sus pruebas con más brillantez y reconocido éxito. Por eso creemos conveniente la transcripción de su programa de estudios en lo que se refiere a nuestra enseñanza en la parte escolar.

1.—*Nota preliminar*

286. La enseñanza tiende a ser intuitiva, y graduada en tres ciclos, que pueden clasificarse a grandes rasgos de este modo:

1.° Conocimientos adquiridos por la observación de la numeración, suma, resta, unidades de longitud y figuras geométricas.

2.° Mecánica de las operaciones aritméticas con números enteros. Unidades de peso y capacidad.

Algunas propiedades de las figuras geométricas en el plano.

3.° *Nociones de números fraccionarios.*—Operaciones con números enteros y fraccionarios aplicados a números concretos. Figuras geométricas en el plano y en el espacio.

Se desea que los alumnos al pasar al grado secundario dominen la práctica de las cuatro operaciones fundamentales con números enteros y conozcan perfectamente los nombres de las figuras geométricas y el de sus elementos y algunas propiedades en el aspecto métrico de la Geometría.

El empleo de varillas, recortes de cartulina, etc., es necesario en el comienzo de la enseñanza de las Matemáticas; así como la costumbre de dedicar un corto espacio de tiempo al cálculo mental facilita el dominio de la práctica en las operaciones.

Todo maestro sabe que la mentalidad media de los grupos varía cada año lo suficiente para no proponer una serie de ejercicios; pero en el tercer ciclo, con más o menos intensidad, se pueden introducir cuestiones de proporcionalidad y resolución de sencillos problemas gráficos, que van adiestrando a los alumnos en el manejo de los instrumentos de Dibujo geométrico.

2.—*El Programa* (1)

CLASE INFANTIL (niños menores de ocho años).

287. El material de enseñanza consiste en:

Una caja que contiene de 500 a 1.000 conchas de mar.

(1) **Elaborado por el Catedrático del Instituto señor Sánchez Pérez.**

Una caja con 500 a 1.000 piedrecitas de río.

Una caja con semillas duras: judías, algarrobas, guijas, habas, etc.

Mil centímetros cúbicos sueltos, de madera, en una caja cúbica.

Una colección de varillas de hierro de tres tamaños distintos, 100 de cada uno.

Una colección de figuras recortadas de madera

Una colección de soldaditos de plomo.

Una colección de monedas.

Treinta tableros con orificios a un centímetro de distancia.

Dos metros graduados en centímetros: uno rígido y otro plegable.

Un litro.

Un decilitro.

Programa de Aritmética

288. Enseñar a los niños objetos de *diferentes* tamaños.

Hacerlos distinguir los *mayores* de los *menores*.

Formar grupos de objetos donde haya *más* o *menos*, mayor o menor número de ellos.

Objetos *iguales* y grupos de igual número de objetos.

Se provee a cada niño de varias conchas, piedras, semillas, varillas desiguales y figuras. Se da a todos la orden de colocar delante de sí tres objetos distintos; retirar el de mayor tamaño de los tres; retirar el menor de los dos que quedaban; buscar varios objetos iguales al que ha quedado solo; hacer dos grupos con todos éstos; indicar en qué agrupación hay más objetos y en cuál hay menos; retirar objetos del grupo mayor hasta que queden iguales; formar un grupo con objetos distintos, pero con igual número de objetos. Todas estas operaciones han debido hacerse por correspondencia entre los objetos de uno en uno.

Contar de 1 a 10, y de 10 a 1.

La Profesora cuenta una vez desde uno hasta diez, diciendo que esas palabras representan grupos de objetos. Los niños deben escribir en el cuaderno las palabras *uno, dos, tres..., diez*; repetir las palabras de memoria; decir cuántas letras tienen las palabras dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete; decir palabras que tengan una, dos, tres ..., nueve, diez letras. Los niños, ya solos, podrán contar de diez a uno.

Escribir los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Contar de 10 a 20 y de 20 a 10.

Contar de dos en dos y de tres en tres desde uno a diez y ocho, y viceversa.

Significado de *cero*.

Hacer observar al niño que contando hacia atrás llega un momento en que se terminan los objetos, y que *ninguno, nada* y *cero* son palabras de análogo significado. Los niños escriben en el cuaderno la palabra *cero* y el signo que lo representa.

Contar de 1 a 100 y de 100 a 1.

Contar de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de cinco en cinco.

Ejercicios de contar y descontar utilizando el material de que se dispone. Los niños escribirán en el cuaderno las palabras veinte, treinta, cuarenta ..., ciento.

Escritura de los cien primeros números.

Se hará ver la correspondencia entre la representación y las agrupaciones de objetos. Así, por ejemplo: un niño que tiene dos montones de diez objetos y cuatro objetos más, reúne veinticuatro objetos: el *dos* indica los *montones de diez*, y el *cuatro* los objetos que *no llegan a diez*. Ejercicios en el cuaderno.

¿Para qué sirve el metro?—Medir en la clase varios objetos.—¿Qué representan las divisiones del metro?

Se entrega a cada niño un metro, sin más definición que decir: *esto es un metro*. Se les dice que sirve para medir; lo que representan las distintas divisiones y numeraciones; se hacen ejercicios de lectura en el metro; se miden longitudes de un número exacto de metros, de un número exacto de decímetros y de un número exacto de centímetros, y se consignan en los cuadernos los resultados de los ejercicios de medida.

¿Para qué sirven las monedas?—Clases y nombres de algunas monedas.

Presentar las monedas corrientes de plata y bronce. Indicar la equivalencia. Entregar a los niños puñados de monedas para que las cuenten y hagan cartuchos de a 25 monedas. Al entregar, por ejemplo, 150 perras chicas, 150 perras grandes y 150 pesetas, es difícil que, repartidas a puñados, correspondan a 25 ó 50 a cada niño, y, por consiguiente, habrá varios restos. La reunión de estos restos sirve de comprobación para los cartuchos, y se puede utilizar además para iniciar la explicación de la suma.

Sumar objetos.—Expresión de la suma de dos o más números.—Sumar números de una cifra.—Sumar un número de dos cifras con otro de una.—Sumar dos números de dos cifras.—Ejercicios de sumar objetos, longitudes y monedas.

Los objetos que los niños tienen en varios grupos son las unidades; los grupos son los sumandos; la reunión de los grupos ha de dar la suma. Después de realizar cada ejercicio, se escribe en el cuaderno la operación. (Este paso al cuaderno se hará siempre desde aquí en adelante.)

Cálculo mental en los tres casos anteriores y ejercicios mentales referidos a objetos, longitudes y monedas.

Es muy conveniente que el maestro lleve a la clase una colección de ejercicios preparados que tengan una creciente dificultad. Los ejercicios mentales fatigan mucho a los niños y resulta contraproducente dedicar a aquéllos mucho tiempo seguido.

Restar objetos.—Expresión de la resta de dos números: Suma del número que se resta y el número que resulta.—Ejercicios con longitudes y objetos con números de una o dos cifras.

Cada niño dispone de un número de objetos y ha de separar varios de ellos; saber cuántos quedan es restar. Los primeros ejercicios deben efectuarse contando o descontando. Una vez hecha la observación de que es una operación inversa, harán los ejercicios buscando el sumando desconocido.

Cálculo mental y escrito.

Resultado obtenido al restar números iguales.

Longitud doble, triple y cuádruple de otra.—Duplo, triplo y cuádruplo de un número.—Expresión del producto de un número por dos, por tres y por cuatro.—Aprender de memoria los productos por dos, tres y cuatro de los doce primeros números.—Doble, triple y cuádruple de cero.—Ejercicios.

Longitud mitad, tercera y cuarta parte de otra.—Mitad, tercera y cuarta parte de un número previamente escogido para que tenga o no mitad, tercera y cuarta parte exacta.—Modo de expresar el cociente.—Ejercicios con objetos y medidas.

Programa de Geometría

289. Observación de objetos que den idea de una línea recta, una línea curva y una línea mixta.

La orientación intuitiva del programa y la redacción del mismo no hacen precisas nuevas observaciones. Los alumnos deben proveerse, a medida que lo vayan necesitando, de un doble decímetro, un compás, cartulina, lápices de colores y tijeras. La clase de Geometría debe dar la impresión de que los niños hacen juegos o trabajos manuales geométricos, Cuando el maestro presenta alguna figura geométrica no dará definición alguna; basta que diga: «Esta figura se llama...»

Colocación de objetos (piedras, conchas, soldados) en línea recta, curva y mixta.

Trazado de estas líneas en un papel, en la pizarra o en el suelo.

Rectas paralelas.—Su trazado a pulso.

Angulo de dos rectas.—Dibujar un ángulo agudo, otro recto y otro obtuso.—Nombre que reciben las dos rectas y el punto en que se cortan.

Circunferencia.—Trazado de circunferencia en la pizarra, en el papel y en el suelo. Dibujar una circunferencia con un radio y un diámetro, poniendo estos nombres en el lugar correspondiente del dibujo.—Medir el radio y el diámetro.—Consecuencia de esta medida.

Triángulos.—Dibujar un triángulo equilátero, otro isósceles y otro escaleno.—Lados, ángulos y vértices.—Ejercicios de medida en los lados.—Comparaciones.—Dibujar en papel o cartulina un triángulo; recortarlo; utilizarlo como plantilla y dibujar dos o tres triángulos.—Observar que resultan iguales. -Formación de mosaicos y figuras caprichosas compuestas de triángulos recortados.

Con este ejercicio puede el maestro observar y fomentar el ingenio de los niños, haciéndoles formar estrellas, pajaritas, mosaicos, etc.

Cuadrado.—Número de lados, vértices y ángulos.—Particularidad que presentan los lados.—Particularidad que presentan los ángulos.

Dibujar un mosaico de cuadrados.

Dibujar y dar colores en una cenefa cuadrada de cuadrados.

Combinaciones de triángulos y cuadrados en dibujo libre.

PRIMER GRADO (niños de ocho años)

290. El material de enseñanza para cada grupo de treinta alumnos consiste:

Seis metros de cinta, de los de sastre.

Seis metros articulados, de los de carpintero.

Una colección de monedas.

Una balanza.

Una caja de pesas.

Un litro, un decilitro y un centilitro.

Un nivel de burbuja.

Un cajón con arena fina lavada.
Un pequeño depósito con agua.

Programa de Aritmética

291. Numeración hablada hasta mil.—Ejercicios de contar hacia adelante y hacia atrás de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de cinco en cinco.

Valor absoluto y relativo de las cifras.—Numeración escrita hasta mil.

Metro, litro y gramo.—Ejercicios de medidas y peso utilizando metros, reglas graduadas, vasijas calibradas y la balanza.

Múltiplos y divisores, de uso muy frecuente.—Comprobación experimental de la relación entre los múltiplos y divisores con la unidad principal.—Ejercicios enlazados de numeración, medida y peso.

Monedas.—Reconocimiento de las de bronce, plata y alguna de oro.—Ejercicios de contar y cambiar monedas.

Valor de las letras en la numeración romana y aplicación de los números en la esfera de un reloj.

Sumar.—Sumandos.—Suma.—Signo.

Cálculo mental.—Dos sumandos de una cifra; un sumando de dos o tres cifras y otro de una; dos sumandos de dos cifras; varios sumandos de una o dos cifras.—Repetición de los ejercicios alterando el orden de los sumandos.

Cálculo escrito.—Sumar varios números de dos o tres cifras.—Reglas para sumar.—Prueba de la suma.

Problemas sencillos de sumas con números concretos, comprobándolos con el material de pesas y medidas.

Restar.—Minuendo.—Sustraendo.— Diferencia. Signo.

Cálculo mental: Restar dos números de una cifra; restar un número de una cifra de otro de dos cifras; restar números de dos cifras; sumas y restas combinadas con números de una cifra.

Cálculo escrito: Restar números de dos o tres cifras.— Reglas para restar.—Prueba de la resta.— Valor del resto cuando son iguales minuendo y sustraendo.

Problemas sencillos de restar, o de suma y resta con números concretos utilizando las pesas y medidas.

Multiplicar. — Multiplicando.—Multiplicador.— Producto. — Signo. — Producto de los doce primeros números por 1, 2, 3, 4 y 5.

Problemas con números conc etos, que se resuelven mediante los productos anteriores.

El maestro puede fomentar la rapidez en los cálculos utilizando algún estímulo; por ejemplo, distribuyendo por sexos o por suerte a los niños de la clase en dos grupos, y estableciendo la competencia entre los dos bandos. Es preciso ten r muy en cuenta que el entusiasmo y el amor propio es tan extraordinario en algunos niños, que su estímulo puede producir resultado contrario al que se busca. La prudencia y la vigilancia d l maestro le aconsejarán o no el empleo de medios para conseguir la mayor actividad en los alumnos.

Programa de Geometría

292. Cada alumno debe proveerse de una regla graduada, una escuadra y un compás. Su cuaderno de Geometría debe ser un álbum de dibujo geométrico en el que cada figura dibujada lleve su denominación. La persona encargada de la clase, tanto en este curso como en los siguientes, tendrá pretexto para ir enseñando a hacer rotulaciones con diversos caracteres de letra.

Uso de la regla

293. Línea recta.—Segmento rectilíneo.—Medida de un segmento.

Líneas quebradas: abierta, cerrada, que se corte a sí misma y que no se corte a sí misma.

Angulo.—Lados.—Vértice.

Triángulo.—Triángulo isósceles.—Lados.—Vértices.

Cuadriláteros.—Lados.—Vértices.— Diagonales.

Uso de la escuadra

294. Angulo recto.—Angulo agudo.—Angulo obtuso.

Rectas perpendiculares.—Rectas horizontales.—Empleo del nivel.—Rectas verticales.—Plomada.

Altura de un triángulo. -Triángulo rectángulo, acutángulo y obtusángulo.

Rectas paralelas.—Distancia entre paralelas. Paralelogramos.

Uso del compás

295. Circunferencia.—Centro.—Radio.—Diámetro.—Cuerda.—Secante.—Tangente.—Arco.

Hexágono regular.

Triángulo equilátero.

Mosaico de triángulos.—Mosaico de hexágonos. Mosaicos compuestos de hexágonos y triángulos.—Mosaicos formados con figuras geométricas dibujadas o recortadas.

SEGUNDO GRADO (niños de nueve años)

296. El material de enseñanza consiste en una colección completa de medidas del sistema métrico decimal y una colección de sólidos geométricos de madera.

El material que se indica en cada programa es para utilizarlo con la mayor frecuencia, incluso comprobando experimentalmente algunos ejercicios y problemas.

Programa de Aritmética

297. Numeración hablada y escrita en el sistema decimal.

1.° Hasta unidades de millar.—Ejercicios con números concretos.

2.° Hasta unidades de millón.—Ejercicios con números concretos.

3.° Hasta unidades de millar de millón.—Ejercicios.

Relación que existe entre las unidades de diversos órdenes.

Numeración romana.—Documentos.—Lápidas. Inscripciones.

Resulta de gran utilidad presentar a los alumnos, mediante fotografías o dibujos, algunas lápidas o inscripciones que conmemoren hechos gloriosos de la Historia o que están instalados en edificios notables.

Partes iguales de un todo.—Unidades fraccionarias.—Su aplicación a los números concretos.—Décima parte del metro y de la peseta.—Escritura de las décimas.—Centésima parte del metro y de la peseta.—Escritura de un número con parte entera, décimas y centésimas.—Milésimas.—Escritura de un número que exprese milésimas.

Metro lineal.—Metro cuadrado.—Metro cúbico.

Múltiplos y divisores.

Litro.—Múltiplos y submúltiplos.

Gramo.—Múltiplos.—Submúltiplos.

Ejercicios de medida y peso.

Monedas de cobre, plata y oro.—Papel moneda.

Ejercicios de cuenta y cambio.—Problemas sencillos utilizando el cálculo mental.

Suma de enteros y decimales.—Problemas con datos comprendidos entre 1.000 y 0,001.

Resta de enteros y decimales.—Problemas de ídem ídem.

Multiplicación de enteros.—Tabla de multiplicar hasta 12 × 12.

Multiplicar por la unidad seguida de ceros.—Multiplicar por una cifra significativa seguida de ceros.—Ejercicios mentales.

Multiplicar dos números de varias cifras.—

Comprobar que el orden de factores no altera el producto.—Prueba de la multip icación.—Multiplicar un decimal por un entero y un entero por un decimal.—Ejercicios mentales.— Multiplicar un decimal por otro.

(Los factores empleados en la explicación, ejemplos, ejercicios y problemas, deben ser menores que diez mil y no tener más que una o dos cifras decimales.)

Problemas concretos que se resuelven con multiplicaciones.

División.—Dividendo.--Divisor.--Cociente.—División exacta.—División inexacta.—Resto.—Divisiones mentales.—Divisiones en que el cociente tiene una cifra.—Dividir un número de varias cifras por otro que tenga una, dos o tres.—Prueba de la división.

Ejercicios y problemas concretos muy sencillos.

Programa de Geometría

298. Cuerpos geométricos.—Cubo.

La colección de sólidos se utilizará todo lo posible, muy especialmente en todo lo que supone revisión del curso anterior.

Uso de la regla y escuadra

299. Línea recta (revisión).—Trazado de rectas a pulso.—Medir un segmento a ojo y después con el doble decímetro.—Suma y resta de segmentos.

Angulos (revisión).—Rectas perpendiculares.

Dibujos ornamentales con elementos geométricos rectilíneos.

Traslación paralela.—Rectas paralelas.—Paraelas cortadas por paralelas.—Paralelogramos.—Diagonales.—Posición y magnitud de las diagonales en cada paralelogramo.

Triángulos (revisión).

Polígonos en general.—Cuadriláteros.—Trapecio.—Polígonos de cinco, seis, ocho y diez lados.—Trazado de las diagonales.

Uso del compás

300. Circunferencia.—Líneas de la circunferencia.

Posiciones de un punto y una circunferencia.

Posiciones de una recta y una circunferencia.

Posiciones de dos circunferencias.

Arco.—Medida.—Semicírculo graduado.—Su empleo.—Suma y resta de arcos.—Arco mitad de otro.—Dividir un segmento o un arco en dos partes iguales.

Polígonos regulares.

División de una circunferencia en seis partes iguales.—Hexágono regular.—Triángulo regular.

División de una circunferencia en cuatro partes iguales.—Cuadrado.—Octógono.

Mosaicos y redes de triángulos con hexágonos; de cuadrados y octógonos; de semicircunferencias.

Dibujo de los cuerpos geométricos siguientes:

Cubo. — Paralelepípedo.—Prisma triangular.—Prisma hexagonal.—Pirámide triangular.—Pirámide hexagonal.—Troncos de éstas.—Cilindro.—Cono.—Tronco de cono.—Esfera.

TERCER GRADO (niños de diez años)

301. El material de enseñanza consiste en:
Una colección de pesas y medidas del sistema métrico decimal.
Un vaso grande de cristal con graduación en centímetros cúbicos.
Una balanza.
Una colección de sólidos geométricos, de madera.
Una pizarra esférica de un metro de diámetro.
Un cilindro de madera de 20 cm. de altura.
Dos tableros de corcho, tamaño 25 por 35 cm., unidos por un lado con una visagra.
Cada alumno se proveerá de una caja de compases, hojas de cartulina, tijeras y goma de pegar.

Programa de Aritmética

302. Numeración de enteros (revisión rápida del ciclo segundo).--Continuación hasta trillones.—Ejercicios.
Numeración de decimales (revisión).—Continuación hasta millonésimas.—Alteraciones de un decimal al correr la coma.—Ejercicios.
Suma y resta de enteros y decimales (revisión).—Ejercicios mentales.—Problemas.
Multiplicación de enteros (revisión).—Ejercicios de cálculo mental.—Caso general con factores de cualquier número de cifras.—Casos particulares.—Problemas sencillos.—Multiplicación de decimales.—Problemas.

División de enteros (revisión).—Ejercicios mentales.—Caso general de la división.—Problemas sencillos.—División de decimales; dividir un decimal por un entero; dividir un entero por un decimal; dividir un decimal por otro.—Aproximar un cociente por decimales.

Sistema métrico decimal (revisión).

Transformación de concretos en un mismo sistema.—Problemas.

Idea de los números fraccionarios.—Concepto deducido de un ejemplo de medida.—Quebrado propio e impropio.—Reducir un número mixto a quebrado.—Reducir un entero a quebrado.—Reducir quebrados a común denominador.

Operaciones con quebrados, haciendo aplicación a problemas con datos muy sencillos.

Conversión de fracciones ordinarias en decimales en las casos $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_8$, $^2/_5$, $^3/_4$ y $^3/_5$

Problemas concretos con números fraccionarios.

Problemas de regla de tres simple por reducción a la unidad.

Programa de Geometría

Uso de la regla y escuadra (revisión rápida)

303. Figuras iguales.—Construir un segmento igual a otro.—Construir un ángulo igual a otro.—Operaciones con segmentos y ángulos.—Ejercicios.—Construcciones.

Traslación paralela.—Angulos formados por dos paralelas y una secante.

Paralelogramos.—Propiedades de los ángulos.—Propiedades de los lados.—Propiedades de las diagonales.

Cuadrado.—Rectángulo.—Rombo.—Romboide. Estudio experimental de sus áreas.

Figuras equivalentes.—Paralelogramos equivalentes.

Triángulos.—Relación entre los lados.—Relación entre los ángulos. — Area del triángulo.

Trapecios.—Trapecio rectángulo y trapecio isósceles.—Area del trapecio.

Polígonos.—Sus elementos.—Nombres según el número de lados.—Determinación del área de un polígono cualquiera.

Uso del compás (revisión rápida)

304. Polígonos regulares, convexos y estrellados.

Modo de dibujarlos.

Geometría del espacio

305. Superficie plana.—Angulo diedro.—Angulo poliedro.—Construcción de éstos en papel o cartulina.

Estudio elemental del cubo.

Planos perpendiculares.—Planos paralelos.

Medida de volúmenes.—Comprobación experimental en cada caso.—Volumen del cubo.—Construcción del cubo en cartulina.—Relación entre la capacidad y el volumen.

Desarrollo y construcción en cartulina del paralelepípedo: Su volumen.

Idem prisma triangular: Su volumen.

Idem prisma cualquiera: Su volumen.

Idem pirámide triangular: Su volumen.
Idem pirámide cualquiera: Su volumen.
Idem troncos de pirámide.
Idem poliedros regulares convexos.
Idem cilindro y cono.
Esfera.—Líneas de la esfera.—Propiedades de algunas de ellas.—Longitud y latitud geográficas.
Problemas y ejercicios diversos.

306. Opinión.—Nuestra crítica no afecta en nada al valor de este programa dado su fin esencial: preparar para la enseñanza secundaria. Forma parte de un todo y no debe ser juzgado aisladamente, y que cumple la función para que fué elaborado lo demuestran los brillantes resultados alcanzados en Matemáticas por los alumnos que terminaron sus estudios en este Centro.

Ahora, para una escuela primaria cuyos estudios forman un ciclo completo nos parecería deficiente en extremo. Nótese que se llega a los ocho años sin noción de las multiplicaciones más sencillas, a los nueve sin saber multiplicar más que por seis, y a los diez sin conocer el volumen del cubo, aun cuando se hayan estudiado ya las unidades correspondientes y que no se habla para nada de longitud de la circunferencia, área del círculo ni volumen de los cuerpos redondos. En cambio sobrarían detalles como los de la línea que se corta a sí misma, las paralelas cortadas por una secante, las cortadas por paralelas, etc. Encontramos un acierto en clasificar la Geometría por el instrumento que se maneja la regla, la escuadra, el compás y la introducción de la traslación paralela. Repitiendo empero que se trata de nuestro punto de vista puramente escolar en el cual hemos dicho que es esencial la relación con el trabajo manual, que aquí falta, y donde es preciso transmitir una serie de conocimientos e inculcar una serie de hábitos mentales que en unas clases preparatorias como éstas pueden tener más adecuado lugar en la enseñanza del Instituto.

3. — Formación de un programa propio

307. No nos atreveríamos a dar por nuestra cuenta ni aun un programa *previo* para ser ensayado, que pudiera desnaturalizar la iniciativa del lector. El programa, dentro de las líneas generales aquí determinadas, es algo relativo a las circunstancias de organización general, ambiente, disposición e intereses de los alumnos, etc., más aún en las condiciones de renovación cultural en que se encuentra España. El lector debe intentarlo por propia cuenta, lo cual constituirá un excelente y provechoso ejercicio.

Sí hemos de recomendar que el contenido se distribuya con arreglo al plan expuesto en el capítulo VI-1 y 2, prefiriendo que se adopte un grado de párvulos y seis de enseñanza primaria. El programa deberá ser dividido en lecciones que comprendan el trabajo posible de cada día, intercalando las que se refieren a las diferentes partes de la Matemática que hemos indicado deben llevarse de frente durante el curso, y en la parte de cálculo, ejercicios y problemas, deben cuidarse los temas y la clase de números y operaciones que utilizan. Indicaremos también la conveniencia de consignar períodos mensuales, trimestrales y anuales de *repaso* de lo estudiado anteriormente. Véase además (cap. IX-2) lo que indicamos acerca de las clases de lección.

CAPITULO IX

DESARROLLO DEL PROGRAMA

1.—Los «tests» como elemento de valoración

308. Su aplicación en la Enseñanza de la Matemática.—Los *tests*, o pruebas mentales, tan utilizados hoy, sobre todo en Norteamérica, son estudiados en cuanto a su concepto, fines, caracteres y valor práctico por la Pedagogía general. Aquí hemos de poner de manifiesto los caracteres siguientes que principalmente nos interesan:

a) En los *tests* de carácter general, destinados a determinar la edad psicológica del educando, hay una gran parte de carácter matemático debida a la gran influencia que las aptitudes y cultivo de este género tienen para el desenvolvimiento general, y a la facilidad con que, en este terreno, pueden practicarse las pruebas mentales; por ello haremos algunas indicaciones que creemos útiles.

b) En los *tests* puramente pedagógicos destinados a determinar los frutos obtenidos por la enseñanza existe gran variedad, habiendo alcanzado mayor precisión los propios de la Matemática que los referentes a otras ramas de la enseñanza, y su conocimiento es esencial cuando el alumno ingresa en la Escuela para clasificarlo en el grado correspondiente; ulteriormente, para determinar el avance realizado en la enseñanza y a fin de poder pasar a los alumnos a los grados sucesivos una vez alcanzado el dominio de los conocimientos, destrezas y hábitos mentales que constituyen cada grado de la enseñanza, condición ésta esencial en nuestros estudios.

c) Se ha llegado en nuestro terreno a formular *tests* de diagnóstico, esto que permiten determinar la aptitud matemática de los alumnos con independencia relativa de su grado de instrucción.

d) Los autores norteamericanos principalmente han establecido *tests* analíticos, que permiten determinar las diferentes fases en que se descompone un proceso matemático y su dificultad relativa, cuestión de la más alta importancia para la formación adecuada, sin faltas, que serían perniciosas, ni excesos que serían lamentables, del indispensable automatismo del cálculo.

De todo ello damos a continuación información amplia, pero no completa, en parte por su excesiva extensión, y principalmente porque no puede darse nada como definitivo, en atención a que las pruebas mentales han de adaptarse a la idiosincrasia de cada pueblo y al estado de su enseñanza, labor a realizar, altamente recomendable para los laboratorios de nuestras Escuelas Normales.

309. Los «tests» de Terman.—Entre las pruebas mentales de carácter general creemos deber circunscribirnos a las del autor indicado, que selecciona y engloba la mayor parte de las propuestas hasta ahora por los autores más distinguidos, incluso Alfredo Binet, su iniciador. Existe un estudio de dichos *tests* y un ensayo de adaptación a los niños españoles recomendado en nuestra Bibliografía. De las diferentes pruebas indicaremos con algun comentario únicamente las directamente relacionadas con nuestro estudio, ya que indirectamente lo están casi todas, incluso la de *describir un grabado* (observación) y la de *definir conceptos*, cualidad tan esencial para el cultivo racional de la Matemática.

PARA 3 AÑOS

Señalar la nariz.—(Relación espacial enlazada con el sentido muscular).

Repetir tres cifras.

PARA 4 AÑOS

Comparar dos líneas.—(Noción de mayor y menor).

Distinción de formas.—(Indudablemente del más alto valor para nosotros).

Contar cuatro monedas.—(En su sencillez es más de conocimiento que de aptitud).

Dibujar un cuadrado.—(Es esencial la conservación aproximada de los ángulos, dicen las instrucciones. ¿Y por qué no la de los lados?)

Repetir tres cifras.

PARA 5 AÑOS

Comparación de pesos.—3 g. y 15 g. (Mayor y menor).

Juego de paciencia: Una tarjeta entera y otra dividida en dos trozos por la diagonal. Con éstos reconstruir aquélla.—(En su sencillez es admirable para discernir la capacidad de síntesis de formas).

Distinguir la mano derecha de la izquierda. (Relación espacial interesante y no simple nominalismo como pudiera parecer).

PARA 6 AÑOS

Contar 13 *monedas.*—(Depende puramente de la instrucción).

Nombrar cuatro monedas.—(Las propuestas son de 5 cts., 25 cts., 50 cts. y 2 ptas.; opinamos que por su rareza la tercera, y por su semejanza con la peseta la segunda no están adecuadamente elegidas).

PARA 7 AÑOS

¿Cuántos dedos tenemos en cada mano?—(A pesar de la distinción que supone el *cada*, opinamos que es demasiado sencillo para esta edad, sobre todo porque al hablar ordinariamente del número de dedos de la mano suele referirse a una sola, con lo cual queda invalidada la dificultad.

Repetir cinco cifras. — (Haremos notar que el uso de las cifras para medir la memoria, o mejor la retentiva, en estos casos, se funda en que no suele acompañarlas el tono afectivo que a las palabras corrientes; por ejemplo: *mamá, casa,* etc. Sin embargo, algunas cifras como 1 y 5 pueden determinar asociaciones visuales: el dedo, la mano abierta, que faciliten su retención sobre las demás).

Copiar un rombo.—(Los ángulos, valor apreciado, presentan gran dificultad sobre todo si no se coloca el rombo con un eje vertical).

Repetir tres cifras en orden inverso.—(Una buena aptitud para esta prueba facilitaría la de contar en sentido inverso, conveniente para la resta, y predispondría a *conmutar* los datos en la suma y la multiplicación, simplificando grandemente el aprendizaje de las tablas respectivas).

PARA 8 AÑOS

Indicar cómo se procedería para hallar una pelota perdida en un campo de forma circular con una sola entrada.—(Prueba de gran valor psicológico de síntesis espacial, ya que se ha de determinar la dirección y el sentido de líneas que han de cubrir una superficie con la menor longitud posible y el mínimo cambio de dirección. Por ello la espiral creemos que es la mejor de las soluciones).

Contar de 20 *a* 1.

Nombrar 6 *monedas.*—(Las de 6 años más la peseta y el duro).

Decir la fecha del día.—(Importante por su carácter numérico serial y por la noción de tiempo que implica).

PARA 9 AÑOS

Comparar cinco pesos de 3, 6, 9, 12 *y* 15 *g.*—(No sólo tiene importancia por la barestesia que supone, sino porque conduce a la formación de una serie de desigualdades).

Si compro 4 *pts. de caramelos y le doy* 10 *al comerciante, ¿cuánto me ha de devolver?* — (A nuestro juicio, es lamentable este problema para los niños españoles, porque no circula moneda de 10 pts. Si el niño piensa, puede decir que basta entregar 5 pts.).

Si compro 12 pts. de bombones y le doy 15 pts. al vendedor, ¿cuánto me devolverá?—(Para la generalidad de nuestros niños son demasiadas pesetas y el asombro del niño perturba la buena marcha de la prueba).

Si compro 4 pts. de mercancía y le doy 25 pts. al vendedor, ¿cuánto me ha de devolver?—(La palabra abstracta *mercancía* sospechamos que introducirá en el pensamiento del niño una laguna que no debiera existir); tiempo para cada uno, 10-15^s.

Repetir cuatro cifras en orden inverso.

Hallar el valor de 6 sellos de correos, 3 de 5 cts. y 3 de 10 cts. que se presentan al niño en un cartón.—Tiempo 15^s (Excelente prueba de suma compuesta, o de multiplicación y suma, cuyo soporte concreto permite que se resuelva con la menor cantidad posible de interpretación del lenguaje y entrenamiento para el cálculo).

PARA 10 AÑOS

Reproducir dibujos de memoria.—(Gran importancia para la Geometría por lo que supone la capacidad de observar y memoria de formas. Bien elegidos los dibujos por su regularidad).

Repetir seis cifras.

Rompecabezas.—Puzzle (Demostrativo de la capacidad de síntesis de forma. Valioso).

PARA 12 AÑOS

Repetir 5 cifras en orden inverso.

PARA 14 AÑOS

Prueba de inducción.—Doblar un papel y hacer una ventana en el doblez. Observar que aparece una sola ventana al desdoblar. Redoblar el papel, repetir la operación, salen dos ventanas. Generalizar. (Valor de inducción como su nombre indica, aun cuando parece excesivamente sencilla).

Un hombre gana 20 pts. semanales y gasta 14 pesetas también cada semana; ¿cuánto tiempo tarda en ahorrar 300 pts.?

Dos lápices valen 50 cts.; ¿cuántos lápices pueden comprarse con 5 pts.?

A 60 pts. la docena, ¿cuánto valen 50 lapiceros? (Creemos excesivo el precio, sobre todo después del problema anterior. Si se tomasen 60 cts. resultaría, análogamente, demasiado pequeño).

Invertir las manecillas de un reloj.—Imaginada una hora por la posición de las saetas se imagina que se coloca el minutero en la posición del horario, y viceversa. Averiguar la hora que marca. (Excelente ejercicio de imaginación espacial utilizando ángulos y relaciones temporales).

Repetir siete cifras.

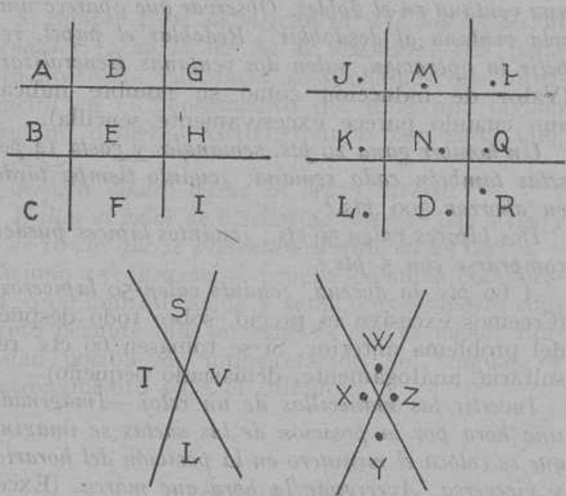
ADULTOS MEDIOS

Las cajas cerradas.—Una caja, que se presenta, tiene dentro dos cajitas y cada una de éstas tiene *una; ¿cuántas cajas hay en total?* Medio minuto.

El mismo problema si cada cajita contiene dos.— El mismo, conteniendo la caja 3 cajitas y cada una de éstas, tres. El mismo problema siendo 4 las cajitas y 4 las que contiene cada una.

Repetir seis cifras en orden inverso.

Las claves.—Nótese la disposición de las rectas, paralelas cortadas rectangularmente por parale-



las en los dos primeros casos, y los ángulos en los últimos. Véase también el orden en que aparecen agrupadas las letras por orden alfabético, vertical en las dos primeras, y sentido contrario al giro de las agujas del reloj, en las segundas. Nótese también la extensión que facilita la simple agregación de un punto. Para representar una letra se dibujan las líneas que la comprenden: así PAZ se escribe 

Fué usada en la Guerra de Secesión de los Estados Unidos. (Aun cuando estas pruebas mentales y las siguientes excedan al campo de acción de la Escuela primaria, pueden tener cabida en la Normal, aplicadas a sus propios alumnos para que se percaten del valor de los *tests*. Además la anterior prueba es interesantísima como caso concreto de aplicación del simbolismo, tan utilizado en Matemáticas).

ADULTOS SUPERIORES

Prueba del papel cortado.—Dóblese un cuadrado por un eje de simetría. Dóblese análogamente la figura resultante. Hágase una ventana en el borde que presenta un doblez único. La prueba consiste en dibujar la figura que resultará al desdoblar completamente el papel.

(Excelente prueba en que interviene el conocimiento de formas geométricas combinado ingeniosamente con la imaginación espacial. Variando el eje de simetría que se tome como punto de partida se duplica la prueba).

Repetir ocho cifras.

Repetir siete cifras en orden inverso.

Una mujer envía a su hija al río con un cubo de 3 *l. y otro de* 5 *l. para que traiga exactamente* 7 *l. de agua. ¿Qué ha de hacer?*

El mismo problema, siendo 5 *l. y* 7 *l. la capacidad de los cubos y* 8 *l. la cantidad pedida.*

El mismo problema siendo 4 l., 9 l. y 7 l. las cantidades respectivas.

(Problemas muy ingeniosos y llenos de interés, exigiendo escasísimos conocimientos, y determinando la aptitud para encontrar un número por el menor juego posible de sumas y restas).

310. Los «tests» pedagógicos.--Empezaremos por clasificarlos según que midan el estado del alumno en el mecanismo del cálculo exclusivamente, o según que, determinen la capacidad para la resolución de problemas, por medio de un razonamiento correcto, limitándonos a exponer una muestra de las principales formas en que se realizan estas pruebas.

a) *Los «tests» de Curtis.*—Miden el adelanto del alumno en el cálculo por el número de ejercicios, de igual dificultad que ejecuta en un tiempo determinado. Las tablas adjuntas son las utilizadas, pudiéndose notar que se refieren únicamente a números enteros y a multiplicaciones y divisiones breves. Además de las instrucciones contenidas en las mismas hojas, recomienda Curtis las siguientes: El día anterior debe explicarse el alcance de la prueba, que se ha de presentar en cuanto sea posible como un ejercicio normal, evitando el nerviosismo y procurando una placentera espontaneidad. Sacando una hoja del montón de ellas, el maestro dice a los niños que van a hacer una especie de juego que les gustará. En muchas otras escuelas se ha hecho y espera que lo hagan lo mejor posible para que la suya quede bien. Se recomienda dejar libres los pupitres y tener dispuestos los lápices, y que al recibir cada hoja se ponga boca abajo la página escrita.

Se hace la distribución ordenada. Cada alumno lee en su hoja las instrucciones y el maestro las aclara hasta que las comprenden todos, y las vuelven boca abajo una vez leídas. Cuando el maestro pregunta: *¿Listos?* Los niños levantan la mano en que llevan el lápiz, y cuando dice *«ahora»*, vuelven las hojas y empiezan su trabajo, hasta que, agotado el tiempo concedido, dice el maestro: *Basta, levantad el lápiz.* Si la puntuación han de hacerla los mismos niños, dice a continuación. *Cambiad los papeles,* acción que ejecutan en la forma que acostumbren. Todo ello tiene por objeto asegurar la simultaneidad en el trabajo dentro del tiempo fijado.

Conviene anotar la *marca* de cada alumno = *números de ejercicios bien resueltos*; y también la marca de la clase, bien por la *media = suma de las marcas: número de alumnos*; o bien por la *mediana = marca del alumno que ocupa el término medio de la clase, ordenada por marcas.*

Las hojas deberían llevar las instrucciones al dorso, así como los datos personales, fecha, etc. Pero el inconveniente principal de tales pruebas lo encontramos, aparte de su propia limitación, en que sólo sirven para niños del segundo grado en adelante, perdiéndose la fina gradación que caracteriza los automatismos del cálculo. A pesar de ello se han consumido más de seis millones de *tests* en solo seis años.

TESTS DE CURTIS

NUM. 1.—ADICION

Operaciones hechas:... *Operaciones exactas:...*

Tienes ocho minutos para hacer tantas sumas de éstas como puedas. Escribe el resultado debajo de cada ejemplo. No es preciso hacerlos todos. Se tendrá en cuenta la rapidez y la exactitud, pero vale más hacer bien las sumas que hacer muchas.

927	297	136	486	384	176	277	837	537	664	634	572
379	925	340	765	477	783	445	882	695	278	168	253
756	473	988	524	881	697	682	959	471	345	717	948
837	983	386	140	266	200	594	603	913	921	142	529
924	315	353	812	679	366	481	118	568	787	449	936
110	661	904	466	241	851	778	781	932	645	453	223
854	794	547	355	796	535	849	756	559	433	924	358
965	177	192	834	850	323	157	222	106	464	659	675
344	124	439	567	733	229	953	525	228	449	432	122

226	351	428	862	677	223	186	275	432	634	547	588
880	788	975	159	464	874	474	521	875	327	197	256
663	705	450	383	234	682	927	454	571	327	685	719
318	174	194	451	718	399	516	939	917	394	678	524
779	426	666	934	838	904	923	582	789	807	456	969
123	649	742	433	293	353	553	566	895	169	393	761
338	755	295	599	423	419	215	936	250	491	525	113
996	140	189	172	955	756	669	472	833	885	240	449
303	246	281	152	519	384	409	264	318	403	152	122

TESTS DE CURTIS

NUM. 2.—SUSTRACCION

Operaciones hechas:... *Resultados exactos:...*

Tienes cuatro minutos para hacer tantas restas como puedas. Escribe los resultados debajo de los ejemplos. No es preciso resolverlos todos. Se tiene en cuenta la rapidez y la exactitud, pero vale más hacer bien las restas que hacer muchas

9409 —5938	6047 —5019	1198 —343	1377 —701	1446 —741	8083 —4917	107795491 —77197029

75088824 —57406894	91500053 —19901563	87939983 —72207316	160620971 —80361837
51274387 —25842708	117359208 —36955523	27222970 —17504943	115364741 —40195261
87298125 —29346861	92057352 —42689037	113380936 —42556840	64547329 —48813139
121961723 —90492726	109514632 —81268615	125778972 —30394060	292971900 —62207032
121961723 —90492726	109514632 —81268615	125778972 —30394060	292971900 —62207032

104339409
—74835938

TESTS DE CURTIS

NUM. 3.—MULTIPLICACION

Operaciones hechas:... *Resultados exactos:...*

Tienes seis minutos para hacer el mayor número posible de estas multiplicaciones. Escribe el producto debajo de cada ejemplo. No es preciso resolverlos todos. Se tendrá en cuenta la rapidez y la exactitud, pero vale más hacer bien las multiplicaciones que hacer muchas.

4952 × 7	3876 × 9	9245 × 6	7368 × 4	2594 × 5	6495 × 3
8246 ×29	3597 ×73	5739 ×85	2648 ×46	9537 ×92	4268 ×37
7593 ×640	6428 ×58	8563 ×207	2947 ×63	5368 ×95	4792 ×84
3586 ×36	9742 ×59	8736 ×502	5942 ×39	6837 ×680	

TESTS DE CURTIS

NUM. 4.—DIVISION

Operaciones hechas:... *Resultados exactos:...*

Tienes ocho minutos para hacer tantas divisiones de estas como puedas. Escribe el resultado debajo de los ejemplos. No es preciso resolverlos todos. Se tendrá en cuenta la rapidez y la exactitud, pero vale más hacer las divisiones bien que hacer muchas.

6375 | 3	6842 | 6	5376 | 4	9884 | 7
7845 | 3	9960 | 8	6775 | 25	85352 | 94
9990 | 37	80066 | 86	58765 | 73	31409 | 49
43520 | 68	9750 | 25	39508 | 68	28420 | 49
21112 | 52	33653 | 73	23548 | 28	48708 | 54

b) *Los «tests» de Woody.*—Formados por series de ejercicios de dificultad creciente miden el adelanto por el mayor número de cada serie que es resuelto correctamente en diez minutos. Su técnica es análoga a la de Curtis, su extensión es completa para el cálculo, pues comprenden las operaciones con enteros, fraccionarios, decimales y concretos, y su inconveniente principal estriba en no presentar más que un ejemplo de cada una de las dificultades que el cálculo presenta, con lo cual el acierto o error en la solución tiene mucho de azar. Por este motivo, y porque la parte referente a los números concretos no tiene en general utilidad para nuestras escuelas, por estar expresados en unidades inglesas, nos limitamos a dar las adjuntas tablas (que son a su vez un extracto de otras del mismo escritor) en que los números entre paréntesis indican el orden en que han de hacerse las operaciones, siempre sobre la misma hoja que se entrega, para evitar las molestias y los errores en las copias y la mala colocación o falta de claridad en las cifras. Unas tablas españolas construídas sobre este modelo y con tres ejercicios de cada clase nos parecen deseables, siendo de notar que para obtener sus Escalas Woody experimentó sobre 20.000 niños, reputando problema más fácil el que era resuelto por mayor número de ellos.

TESTS DE WOODY

ESCALA DE LA MULTIPLICACION

(1)	(3)	(4)	(5)	(8)	(9)
$3 \times 7 =$	$2 \times 3 =$	$4 \times 8 =$	23	50	254
			$\times 3$	$\times 3$	$\times 6$

(11)	(12)	(13)	(16)	(20)
1036	5096	8754	24	287
$\times$ 8	$\times$ 6	$\times$ 8	$\times 234$	$\times 0{,}5$

(24)	(26)	(27)	(27)	(33)
16	9752	6,25	$^1/_8 \times 2 =$	$2\,^1/_2 \times 3\,^1/_2 =$
$\times 2\,^5/_8$	$\times 59$	$\times 3{,}2$		

(35)	(37)	(38
$987\,^3/_4$	$2\,^1/_4 \times 4\,^1/_2 \times 1\,^1/_2 =$	$0{,}963\,^1/_8$
$\times$ 25		$\times 0{,}84$

TESTS DE WOODY

ESCALA DE LA DIVISION

(1)	(2)	(7)	(8)	(11)	(14)
6 : 3	27 : 9	4 : 2 =	10 | 9	13 | 2	5856 | 8

(15)	(17)	(19)	(23)
$^1/_4$ de 128 =	50 : 7 =	248 : 7 =	469 | 23

(27)	(28)	(30)	(34)
$^7/_8$ de 624 =	0,0936 | 0,003	$^3/_4$: 5 =	62,50 : 1 $^1/_4$ =

(36)
69 lbs. 9 | 9

c) *Examen pedagógico, según Binet.*—Adaptado para determinar el adelanto escolar de los niños franceses, suele ir englobado con los de lectura y ortografía, y aunque realmente incompleto, puede servir de orientación para realizar análogo trabajo en nuestras escuelas. Las pruebas que es preciso vencer en cada edad, son las siguientes:

De 6-7 años.—*Restar de un número de dos cifras inferior a* 20 *un número de una sola cifra. Se dan tres problemas de los que es preciso resolver dos, todos ellos concretos.*

De 7-8 años.—*Sustracción escrita de dos números inferiores a* 100.—Análoga observación.

De 8-9 años.—*Idem de números menores que mil.* Ejemplo: *Una caja de naranjas contiene* 604 *naranjas, se venden* 62. *¿Cuántas quedan?*

De 9-10 años.—*Tres problemas de dividir por un dígito.* Ejemplo: *un individuo compra ocho li-*

bros que le cuestan 84 *pesetas. ¿Cuanto cuesta cada libro?*

De 10-11 años.—*Tres problemas combinando las operaciones inversas fundamentales.* Ejemplo: *Si un minero gana al mes* 228 *ptas. y economiza* 75 *pts., ¿cuánto gasta al día?*

Obsérvese que sólo se ha tratado de operaciones inversas cuyo conocimiento supone el de las directas. Los dos últimos problemas exigen el empleo de los decimales y parecen de muy desigual dificultad.

311. Examen de la aptitud para la Matemática. El norteamericano Rogers ha tratado de resolver este problema adoptando para ello pruebas que exijan aptitudes de índole matemática sin necesitar para llevarlas a cabo de conocimientos previos que las hagan ineficaces de no existir, o que las simulasen cuando existen. Estas pruebas se agrupan de la manera siguiente:

1. *Cálculo algébrico.*—Dos páginas de ejemplos referentes a la evaluación de expresiones algébricas, suma de términos semejantes, solución de ecuaciones sencillas, de algunas con coeficientes fraccionarios y de dos ecuaciones con dos incognitas, todo ello en 10 m.

Observación.—La complejidad de esta serie y los conocimientos que presupone creemos que se apartan del propósito del autor y queda muy al margen de las pruebas siguientes que creemos plenamente adecuadas.

2. *Interpolación.*—Ocupa esta prueba dos páginas, de las cuales una se reproduce a continuación. Con ayuda del maestro se resuelven la- 5 primeras series hallando el número que es pres ciso añadir a cada término para obtener el siguien-

te. Todo ello en 5 m. y los alumnos, en 13 m., deben ocupar los huecos con los números correspondientes en las series restantes.

TESTS DE ROGERS

INTERPOLACION

A	1	8	15	22	.	36	43	50	.	64	71
B	3	7	11	15	.	23	27	31	.	39	43
C	4	10	16	22	.	34	40	46	.	58	64
D	6	10	14	.	22	26	30	.	38	42	36
E	9	20	31	.	53	64	75	.	97	108	119
F	5	17	29	.	53	65	77	.	101	113	125
G	8	17	26	.	44	53	.	71	80	89	98
H	0	.	16	.	32	.	48	.	64	.	80
I	7	.	13	.	19	.	25	.	31	.	37
J	2	.	16	.	30	.	44	.	58	.	72
K	1	.	.	7	.	.	13	.	.	.	21
L	4	.	.	31	.	.	58	.	.	.	94
M	7	.	.	.	27	.	.	.	47	.	.
N	9	.	.	.	57	.	.	.	105	.	.
O	.	.	13	.	.	.	29	.	.	.	45
P	.	.	16	.	.	.	44	.	.	.	72
R	2	.	.	.	.	47	.	.	.	.	92
S	6	.	.	.	.	.	72	.	.	.	116
T	5	.	.	.	.	.	83	.	.	.	135

3. *Geometría.*—Se dan cinco *hechos* geométricos que han de servir de datos para resolver las diferentes cuestiones. Los hechos geométricos, acompañados de las correspondientes figuras son los siguientes:

1.° *Un ángulo recto tiene* 90 *grados.*

2.° *Todos los ángulos de un triángulo valen* 180 *grados.*

3.° *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales e igual el ángulo comprendido, son iguales.*

4.° *Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales, y los ángulos opuestos también iguales.*

5.° *En un cuadrado los lados son iguales, y los ángulos, rectos.*

Las propiedades que es preciso demostrar son del tipo siguiente:

Un triángulo dado es isósceles, y el ángulo B *de la base mide* 60°; *¿cuánto vale el otro ángulo* C *de la base?*

Dado un ángulo recto dividido en dos partes m *y* n *por una recta, el ángulo* m *vale* 30°, *¿cuánto vale* n?

Dado un triángulo rectángulo en A, B *vale* 30°, *¿cuánto vale* C?

Todas las notas se dan construídas y el examinador resuelve una de ellas por escrito, razonando con relación a los *datos* del problema y a los *hechos* que sirven de base.

4. *Superposición.*—El material para la prueba consta de dos páginas, como la reproducida en la fig. 50. El maestro dibuja en la pizarra la posición de los rombos indicada sobre la línea gruesa, en gran tamaño, 10 pulgadas de lado, y dispone de tres rombos en cartulina como los que aparecen en las tres primeras series de la figura; tratando una tras otras las posiciones, explica que es preciso colocar la figura que lleva el círculo sobre sus iguales colocadas en la línea gruesa de modo que sobre ésta coincida el borde en negro del rombo movible. Se trata de dibujar el círculo que distingue a éste en el vértice que le correspon-

da. Se emplean cinco minutos para la explicación y dos minutos para la prueba.

5. *Relaciones.*—Se trata de determinar el cuarto elemento de una especie de proporción,

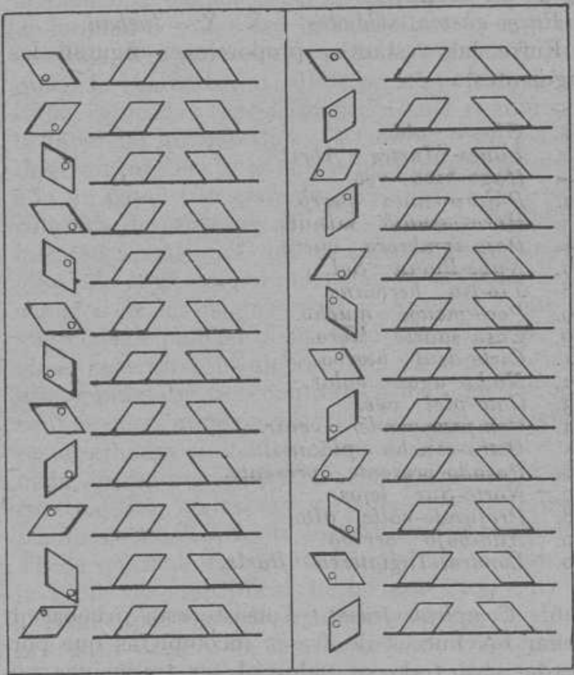


Fig. 55.

de tal modo que el nuevo elemento esté con e tercero en la misma relación que el segundo está con el primero. El maestro resuelve las tres primeras proporciones. Estas son:

Color-rojo, nombre—X. X = Juan, porque el rojo *es* un color y Juan es un nombre.

Hoja-libro, mango — X. X = cuchillo, porque la hoja es parte de un libro y el mango es parte de un cuchillo.

Fuego-quema, soldados — X. X = luchan.

Entre las restantes proporciones figuran las siguientes:

1. *Ojo-ve oído.*
2. *Lunes-Martes Abril.*
3. *Hago-hice veo.*
4. *Pájaro-canta perro.*
5. *Hora-minuto minuto.*
6. *Paja-sombrero cuero.*
7. *Nube-lluvia Sol.*
8. *Tío-tía hermano.*
9. *Poco-menos mucho.*
10. *Casa-cuarto libro.*
11. *Cielo-azul hierba.*
12. *Nadar-agua volar.*
13. *Gato-piel ave.*
14. *Comprar-vender venir.*
15. *Ostra-concha plátano.*
16. *Pasado-presente presente.*
17. *Norte-Sur lejos.*
18. *Profundo-valle alto.*
19. *Alto-bajo arriba.*
20. *Londres-Inglaterra París.*

6. *Completar frases.*—Consiste esta prueba en llenar los huecos de frases incompletas que por perder casi todo su valor al ser traducidas no transcribimos.

312. «Tests» analíticos.—Tienen por objeto determinar cuales son las destrezas, conocimientos o hábitos mentales que faltan al alumno o que éste no domina por completo. Pueden ser de carácter *general* o *particulares*. Entre los primeros encontramos *Curtis Standard Practice tests* que comprenden en 48 páginas todos los automatismos del cálculo con el número de ejercicios que el autor cree suficientes para su dominio. Así, en la adición una página está dedicada a simples sumas de unidades con ceros intercalados; la segunda contiene decenas, la tercera está dedicada al adquirir la costumbre de «llevar», etc.; tres páginas están dedicadas especialmente a *tests* resumiendo la labor de las anteriores. El alumno no escribe directamente en la página sino que coloca sobre ella un papel transparente y escribe en él bajo la columna de números del *test*. Al dorso se hallan las soluciones, para que el alumno pueda corregirse. Se empieza por proponer al alumno la resolución de las páginas *tests* y los errores que en ella cometa indican al maestro a cuál de las páginas anteriores ha de recurrir para nuevo análisis y práctica. No comprenden más que las operaciones con números enteros. Los *tests* particulares destinados al análisis de una cuestión determinada, se reducen a ejercicios en que se trate esta cuestión con todas las variantes posibles, agrupando sistemáticamente los resultados obtenidos. Puede servir de tipo el estudio del aprendizaje de la tabla de multiplicar hecho por Cleene.

Dando, por ejemplo, a un mismo grupo de alumnos gran número de productos que verificar, se forma una tabla con los diferentes productos ensayados y el número de errores cometidos, reducido a % si el total de ejercicios no era el mismo para cada dos factores. Así puede comprobarse el menor error en los productos que son cuadrados (5×5), el aumento en los correspondientes a la segunda parte de la tabla, e incluso la diferencia entre productos de factores iguales, según el orden en que se tomen, lo cual indica que se trata de automatismos diferentes.

2.—La lección. Sus clases y normas para su desarrollo

313. Clasificación.—La materia y la forma de una lección varían considerablemente según la clase de niños a quien se dirija y la finalidad que con ella se proponga el maestro. Distinguiremos dos clases de lección, según que consideremos la enseñanza de la Matemática en su período *preparatorio* u ocasional, o bien en el *sistemático*. El grado intermedio tendrá como es natural un carácter mixto.

Por la finalidad propuesta las lecciones pueden ser: de *elaboración*, que tienen por objeto adquirir algun conocimiento nuevo; de *repaso*, que se proponen aplicar inmediatamente lo aprendido o reiterar su expresión; y de *recapitulación* o *generalización*, cuando se trata de efectuar una síntesis de conocimientos ya elaborados.

Algunos autores consideran además las lecciones de *aplicación*, que nosotros incluímos en los *problemas*, y las de *ejercitación* que tienen su lugar en los ejercicios.

Caracteres de la lección.—Deben ser los propios de toda la enseñanza (véase, cap. VI), entre los cuales hemos de hacer resaltar el *interés* del tema que algunos autores llaman la *motivación*, y tiene por objeto despertar la atención del alumno. Los herbartianos indican que basta la enunciación del fin de la lección que por sí mismo ha de despertar tal interés. No creemos que baste. Tal sería el interés inmediato, pero en Matemáticas es preciso recurrir al interés mediato y para ello hemos dado la lista de los estímulos de Parker y de Thorndike (cap. V, nota).

La amenidad del lenguaje, la inclusión de anécdotas, la relación con la vida corriente, la apelación a la actividad del alumno, y en los primeros grados el juego, la dramatización, etc., son cualidades que debe reunir toda lección.

La de Matemática especialmente, requiere por parte del alumno la concentración de la atención y ausencia de fatiga. Por ello la lección deberá darse en el centro de la sesión de la mañana y no exceder de quince a veinte minutos en el grado preparatorio ni de treinta a cuarenta y cinco en el sistemático, teniendo en cuenta para los mínimos y máximos el método que se emplee.

314. Las fases didácticas.—En el grado *preparatorio* no caben sino lecciones de elaboración reducidas a los juegos, seguidas de ejercicios y problemas sobre los mismos, distinguiéndose solamente dos fases: 1.ª Sugerir la actividad. 2.ª Ejercitarla.

La sugestión debe ser breve, concreta y clara. A veces bastará con unas preguntas, la presentación del material empleado, un cuento, una invitación: vamos a jugar...

El juego en que la actividad se desarrolle puede tener el inconveniente de borrar, por su mayor interés, la parte de aprendizaje matemático que contiene, y esto habrá de tenerlo en cuenta el maestro para evitarlo.

Esto seguramente parecerá a muchos maestros inadecuado al estado actual de nuestra enseñanza y chocando no sólo con las costumbres, sino con las circunstancias, número de alumnos, falta de local, deficiencia del material, necesidad de atender a otros grados, etc.; en tal caso el maestro no tiene sino derivar hacia las fases de la elección sistemática.

315. En la parte sistemática la lección de elaboración constará de las siguientes partes:

1.ª *Planteo de un problema numérico,* gráfico, manual, observación de figuras, consideración de algunos ejemplos numéricos etc., que tiendan al fin señalado por la lección.

El problema que se plantee ha de ser interesante por sí mismo o por la manera que se presente; así, por ejemplo, la igualdad de triángulos se funda en la construcción de un triángulo igual a otro, de mayor interés y valor práctico, pero éste a su vez puede presentarse como lo hacía Thales de Mileto: Manera de averiguar la distancia a la orilla de un buque anclado en el puerto.

Las figuras que se observen deben destacarse de objetos que se presenten a los alumnos y relacionarlas con las que vean o recuerden de la naturaleza y del arte; o ser construídas mediante el dibujo y el trabajo manual; o mejor procediendo de la presentación y la construcción.

Los ejercicios, han de ser variados, para evitar la monotonía; suficientes, para no abusar de la disposición del niño a una generalización prematura; típicos, por huir de lo artificioso, y graduados sistemáticamente para vencer una tras otras las dificultades. Así, por ejemplo, para obtener la regla de multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, partiremos de un ejemplo concreto que exija esta operación, tomando 2 como multiplicador, propondremos a continuación un ejemplo numérico con 3 por multiplicador, etc, resolviendo por suma los ejemplos presentados.

2.ª *Paso a la obtención de reglas o expresión de propiedades.* Una labor de comparación, de abstracción, de síntesis, de generalización realizada mediante un diálogo con el mayor número posible de alumnos, conducirá al fin obtenido que debe ser esencialmente único, esto es, que *cada lección comporte,* como regla general, *la adquisición de un solo conocimiento fundamental.*

3.ª *Ejercicios de comprensión* que afiancen lo expuesto y permitan al maestro asegurarse de que ha sido comprendido por todos. Al mismo tiempo presentan ocasión para gran número de ejercicios de cálculo mental. Lo mismo decimos de las construcciones geométricas sencillas.

4.ª *Ejercicios de ampliación.*—Que permiten ejercitar la inventiva del alumno y orientarle acerca de nuevos desenvolvimientos, preparando además la elaboración de los futuros conocimientos.

Las reglas y propiedades obtenidas deberán ser escritas cuidadosamente y memorizadas las que hayan de quedar definitivamente. En Geometría puede terminarse la lección con una figura decorativa hecha a base de los elementos geométricos estudiados.

316. La lección de repaso.—Puede revestir diferentes formas, siendo la más sencilla la de una lección de elaboración abreviada, en que los dos primeros momentos, especialmente el segundo, se reducen al mínimo y en cambio se aumente el tercero.

Una repetición de lo aprendido anteriormente suele resultar excesivamente monótona, y por ello se aconseja amenizarla con la emulación entre dos bandos, a cada uno de los cuales se le lleva cuenta de las ganancias y pérdidas.

Y cabe, finalmente, un término intermedio en el cual los alumnos resuelven problemas o responden a cuestiones fáciles referentes a enunciación de reglas y exposición de propiedades, que constituyen pequeños exámenes preparados. Esta clase de repasos se refieren a más de una lección y deben hacerse antes de pasar a teorías que necesiten el conocimiento previo de otra anterior, de cuyo conocimiento siempre debe asegurarse el maestro.

317. La lección de recapitulación.—Propia del último grado de la enseñanza es tan útil como poco frecuente y tiene por objeto sistematizar los conocimientos con la consiguiente disminución de esfuerzo mental, facilitación de la memoria, y beneficio de la educación intelectual.

En ella el primer tiempo debe consistir en la evocación de los conocimientos que hayan de ser relacionados. El segundo, en el establecimiento de esta conexión en que cabe la exposición por el maestro. Y el tercer tiempo se referirá a ejercicios que muestran las ventajas de la sistematización efectuada.

Claro es que los cuadros sinópticos o los resúmenes han de ser utilizados ampliamente.

Así, por ejemplo, podemos tratar de establecer el cuadro de las operaciones aritméticas directas e inversas y de los casos que en ellas se consideran en la forma siguiente:

Suma	Resta
$a + b = S$	$S - a = b$ $S - b = a$
Casos	*Casos*
1.º $5 + 9 = 14$ 2.º $35 + 27 = 62$	$14 - 9 = 5$ $62 - 27 = 35$

Multiplicacion	Division
$a \times b = P$	$P : a = b$ $P : b = a$
Casos	*Casos*
1.º $5 \times 9 = 45$ 2.º $35 \times 8 = 280$ 3.º $35 \times 11 = 385$	$45 : 9 = 5$ $280 : 8 = 35$ $280 : 35 = 8$ $385 : 11 = 55$

Caben preguntas como las siguientes: *¿Cuál debería ser, al parecer, en la* $\left\{\begin{matrix}\textit{resta}\\ \textit{división}\end{matrix}\right\}$ *el caso correlativo del primero de la* $\left\{\begin{matrix}\textit{suma}\\ \textit{multiplicación}\end{matrix}\right\}$*? ¿Cuáles serían en la división los casos correlativos de multiplicar por la unidad seguida de ceros, y por una cifra significativa seguida de ceros y cómo se resolverían? ¿Por qué a cada caso de la* $\left\{\begin{matrix}\textit{suma}\\ \textit{multiplicación}\end{matrix}\right\}$ *no corresponde más que un caso de la* $\left\{\begin{matrix}\textit{resta}\\ \textit{división?}\end{matrix}\right\}$ *¿Cómo aparece esta correlación en los números concretos?*

Otro ejemplo: *Hecha la clasificación de los paralelogramos, pueden proponerse las cuestiones siguientes: ¿Cómo se define el cuadrado a partir del rombo? ¿A partir del rectángulo? ¿Qué propiedades tienen el* $\left\{\begin{matrix}\textit{rombo}\\ \textit{rectángulo}\end{matrix}\right\}$ *por ser paralelogramos? ¿Qué propiedades tiene el cuadrado por ser* $\left\{\begin{matrix}\textit{rombo}\\ \textit{rectángulo}\end{matrix}\right\}$*?*

3.—Didáctica de la Aritmética y la Geometría

Aritmética

318. Preliminares.—El estudio que llevamos hecho marcando las normas generales de la enseñanza, y el estudio especial de determinados aspectos de la misma que hemos de hacer después, nos relevan de hacer un estudio detallado de todos los momentos de la enseñanza, labor imposible y poco deseable, pudiendo limitarnos a indicar la manera de adquirir los conceptos referentes a las definiciones de las operaciones, a su mecanismo, a sus propiedades, y a algunas cuestiones especiales como la didáctica del S. M. D. y de la Aritmética aplicada, por lo que a esta ciencia se refiere.

Habremos de mantenernos en un terreno ecléctico entre la Didáctica americana y la corriente. Aquella, más moderna, tiende a dar mediante el juego los conceptos de las operaciones, y numéricamente, la justificación de su mecanismo, ya que la tendencia dominante parece ser que las operaciones numéricas parten de *hechos que tienen significación,* y también se *interpretan* sus resultados, pero sin que la operación en sí la tenga. Por ejemplo: Si un pastor dice que tiene 4 ovejas por *una* cabra, y que tiene 32 cabras. El número de ovejas viene dado por el producto 32 × 4, sin que hayan de ser el multiplicando y el producto de la misma especie como suele decirse. La Didáctica europea, por el contrario, se aferra en cuanto puede al concepto concreto de los números, y a base de ellos estudia las definiciones y justifica los mecanismos.

319. La numeración.—Para los números pequeños se emplean colecciones de objetos e imágenes, se acude a la representación gráfica y a la medida directa, estudiando unos hasta 10 y otros hasta 20, su composición y descomposición.

El concepto de los números grandes y de los diferentes órdenes de unidades se obtiene con *rosarios* numéricos y pilas de discos que forman decenas. Haces de palillos y tiras de botones que llegan a formar centenas. Tiras y cuadrados de cuadraditos que forman también centenas, imágenes como los H y |=| recomendadas. Los ábacos, y las unidades y medidas del sistema métrico, ya que, por ejemplo, si 1 mm. representa la unidad, los cm., dm. y m., representan las unidades de los diferentes órdenes.

320. La suma.—*Concretamente* se define formando un conjunto con otros varios, haciéndose intuitiva con los mismos elementos que los números correspondientes.

En *abstracto,* por la adición sucesiva de la unidad. Los mismos niños inventan formas como ///// /// para obtener $5 + 3 = 8$.

La propiedad conmutativa se evidencia fácilmente alterando el orden de los dos grupos (cubos, discos) que representan los sumandos, instando al niño a escribir en las dos formas la

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	4	5	6	7	8	9	10	11
		3	6	7	8	9	10	11	12
			4	8	9	10	11	12	13
				5	10	11	12	13	14
					6	12	13	14	15
						7	14	15	16
							8	16	17
								9	18

operación. Consecuencia de ello es la simplificación que introduce en la tabla de sumar que puede reducirse a la siguiente, en la cual no se suma nunca el menor número con el mayor; así no se dice 5 y 7 = 12, sino 7 y 5 = 12, como no se dice $5 + 20$, sino $20 + 5$, siendo esta inversión del orden un automatismo, utilizable también en la multiplicación que suprime 36 automatismos particulares.

Se forma esta tabla como la ordinaria deteniéndose al llegar en cada columna al duplo del número que la encabeza, y se emplea lo mismo que ella, sin más que tomar el mayor de los números dados en la primera fila y el segundo en la diagonal.

321. La resta.—*Concepto concreto.*—Separar de un conjunto un cierto número de unidades. Se verifica intuitivamente tanto para los números pequeños como para los grandes, utilizando las representaciones numéricas concretas, pero falla en seguida el carácter del sustraendo de no presentar la cuestión en esta forma. *¿En cuánto excede este conjunto a este otro? ¿Cuántos discos hay aquí más que allí?* No creemos que valga la pena de insistir en el mecanismo concreto, sino para números menores que 20, considerando el caso en que las decenas y unidades del minuendo son más que las del sustraendo, y en el caso en que esto no ocurra, es preciso deshacer una pila de 10 discos del minuendo para añadirla a las unidades; y aun esto, como base de un automatismo transitorio (la regla general es *llevar*), no tiene gran valor.

Concepto abstracto.—Como operación inversa de la adición se obtiene fácilmente a base de ejercicios como: *¿Cuántas bolas y* 8 *bolas son* 12 *bolas?* 8 *y*   *son* 12 ; 8 +   *son* 12 8 +   = 12.

Esta es además la preparación más adecuada para el *método* llamado *austriaco* y que opera así. Sea por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 834 \\ -265 \\ \hline 569 \end{array}$$

Se dice: 5 + (9) = 14 ,, llevo 1 ,, 6 + 1 = = 7 ,, 7 + (6) = 13; llevo 1 . 2 + 1 = 3 ,, 3 + (5) = 8

es decir, que se realiza la resta buscando el número que, sumado con la cifra del sustraendo, da la del minuendo o ésta aumentada en 10.

La no variación del resto por aumento (o disminución) de sus dos términos se hace intuitiva con dos series de cubos del mismo color que se correspondan, incrementados a la izquierda con igual número de cubos de color diferente. También puede hacerse por la representación gráfica como puede verse en nuestra Aritmética Intuitiva.

322. La multiplicación. — *Carácter concreto.* — El concepto de la operación indicada 2 × 3 se adquiere formando 2 grupos de 3 cubitos. Este equivale a enunciar 2 × 3 en la forma 2 veces 3, lo cual está en contradicción con el carácter que suele darse al multiplicando: enunciado primero y concreto; y el multiplicador: enunciado después, y abstracto. A pesar de ello creemos que conviene hacerlo así, por ser mucho más claro que enunciar 2 × 3 como 2, tres veces. Ello se presta al artificio de mostrar a los niños el signo × con dos V juntas, indicadoras abreviadamente del *veces*.

Concepto abstracto.—Según él, 2 × 3 equivale a 3 + 3. Concepto harto más fecundo que el anterior que no ha de ser sino su preparación.

La propiedad conmutativa. Es fácil de demostrar con el concepto intuitivo. Basta para ello representar el producto 3 × 4 con 3 filas de a 4 discos que se convierten fácilmente en 4 pilas de 3 discos. Puede hacerse con formaciones de niños y también mediante la representación gráfica del producto.

La trascendencia de esta propiedad es grande, tanto para el concepto intuitivo como para el aprendizaje de productos.

En el primer caso reduce productos como 4× 1 a 1× 4; este es, 4 veces 1, difícil de ver, a 1 vez 4 más fácil de ver y de obtener. Y con su auxilio podemos reducir a la mitad la tabla de multiplicar (ya fué propuesto por Widmann), tomando como primer factor el menor de ambos. El niño tiende siempre a decir 5 × 8 = = 40 mejor que 8 × 5. Y esto se patentiza más en el caso de 2 veces 10 = 20, preferible con mucho al de 10 veces 2 que es casi ininteligible.

El mecanismo general de la inversión sustituirá aquí como en la suma a 36 automatismos particulares.

La tabla de multiplicar se presentaría en la forma siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	9	12	15	18	21	24	27
		4	16	20	24	28	32	36
			5	25	30	35	40	45
				6	36	42	48	54
					7	49	56	63
						8	64	72
							9	81

Esta tabla se construye como la ordinaria, deteniéndose al llegar en cada columna al cuadrado del número que la encabeza, y se usa como la otra sin más que tomar el número menor en la diagonal y el mayor en la primera fila.

Los mecanismos, en su forma abstracta, han sido explicados en (95) y (106, *e*). En su forma concreta, apenas si cabe la multiplicación de un número de dos cifras, representado mediante discos, por 2 y aun 3, primeramente sin *llevar* y después llevando.

323. La división.—*Los conceptos.*—*a*) La noción de conceptos, como *cuántas veces* un número contiene a otro, se hace intuitiva, o *concreta*, presentando un conjunto de objetos, cubos y preguntando: *¿Cuántas veces estos* 12 *cubos contienen a* 3 *cubos*? Basta separar los cubos de 3 en 3 y contar los grupos formados.

El concepto abstracto se obtiene análogamente:

¿Cuántas veces 3 *son* 12?

y en otra forma más abstracta todavía

$$? \times 3 = 12$$

b) La segunda significación de la operación como *dividir en partes iguales* o repartir *entre*, se adquiere en forma concreta invitando al alumno a repartir 12 cubitos pequeños en 3 cajitas.

El concepto abstracto se obtiene pidiendo al niño que complete las expresiones

4 veces   bolas son 12 bolas
$4 \times ? = 12$

Observaciones; 1.ª: Claro es que la división exacta debe preceder a la inexacta. 2.ª La reducción del concepto segundo al primero puede hacerse observando que para hacer la distribución se va colocando un cubito en cada caja, y se necesitan 3 para poner 1, luego podrán ponerse tantos como veces contenga 12 a 3. 3.ª En lugar de la expresión *entre*, puede utilizarse con gran ventaja la partitiva: así dividir una cantidad *entre* 2 se hace tomando su *mitad*; análogamente pasa con el tercio, cuarto, etc. no teniendo otra dificultad que la división inexacta.

324. Los mecanismos.—*a*) Intuitivamente, y mejor después por la multiplicación, han de adquirirse los automatismos indicados en VI-5. Puede emplearse también la representación gráfica. Ejemplo: *¿con* 49 *cuadritos cuántas pilas de a* 5 *pueden hacerse? ¿Cuántos sobran?*

b) La división de un número de varias cifras por otro de una sola no ofrece dificultad, considerando primero el caso de que todas las cifras sean divisibles y después que alguna no lo sea. No creemos ni siquiera preciso recurrir al procedimiento intuitivo, ni aun a considerar el dividendo formado por un número, métrico, que serían los dos grados anteriores al problema simplemente numérico. Así para obtener 85 : 2 = 427, se dice: Dividir un número por 2 es hallar su mitad; la mitad de 8 centenas son 4 centenas; la mitad de 5 decenas son 2 decenas y sobra una; una decena son 10 unidades, que con las 4 siguientes hacen 14; la mitad de 14 unidades son 7 unidades.

Solamente para niños deficientes cabría que el dividendo fuese, por ejemplo, metros, sustituyendo en el razonamiento las palabras centena y decena por Hm. y Dm.

c) La división por un número de varias cifras se hace análogamente, justificándola con un ejemplo sencillo, divisor 11, como se indica en (70).

d) La división por 10, 100, 1.000 se justifica por la 1.ª definición con ejemplos como los siguientes: 40 : 10 *¿Cuántas decenas hay en* 40 *unidades?*, 46 : 10 *¿Cuántas decenas hay en* 46 *unidades? ¿Cuántas sobran?*

e) La alteración del cociente cuando se multiplican los dos términos de la división por un mismo número se hace intuitiva, efectuando en esta forma una división (reparto) y tomando a continuación doble número de cubitos y de cajas. Los niños en seguida se dan cuenta de que corresponderá el mismo número a cada caja. Ejemplos teóricos lo afianzarán, como reparto de un cierto número de caramelos entre los niños de una clase, y de doble número entre los de dos clases. A continuación debe venir la aplicación: supresión de ceros y factores comunes que simplifiquen de un modo llamativo la división.

Los números decimales

325. La numeración.—El sistema métrico proporciona fácilmente la noción de número decimal, su representación gráfica, el valor relativo de las unidades, y el valor, relativo también, de la posición de la coma, creyendo nosotros que debe renunciarse a considerar los números decimales como caso particular de las fracciones. Los niños comprenden perfectamente expresiones cómo 2,25 ptas., son capaces de sumarlas, restarlas y multiplicarlas o dividirlas por números enteros.

La representación intuitiva está dada por el *cm.* en relación con el *dm.* independientemente de sus nombres para 0,1, por el *dm.*^{2} en relación con el *m.*^{2} para 0,01 y con las unidades cúbicas correspondientes para 0,001. El *m.* y sus divisores completan la noción. La significación de la coma se entiende fácilmente por las transformaciones de los números métricos, tales como la igualdad 3,578 *m.* = 357,8 *cm.* determinada por constar ambas cantidades de igual número de *m*,. *dm*,, *cm* y *mm*.

Las décimas y las centésimas, se enseñan a continuación de las decenas y centenas en el primer grado. Una apelación a la intuición basta: la tablita de chocolate que se divide en 10 partes primero, y después cada una de éstas en 10, y la significación de la coma para separar las unidades de las décimas, es suficiente. Inmediatamente, la apelación a ejemplos del sistema métrico decimal afianzará estas nociones.

Algo más difícil es la lectura y escritura de decimales. Para hacerla intuitiva puede utilizarse un tablero contador vertical con una coma movible y también una barra con divisiones para las distintas unidades donde se coloquen tarjetas con cifras y la coma sea también movible; pueden utilizarse para leer los números representados y para expresar los números dictados, cabiendo incluso la competencia por bandos. Más tarde se utiliza el método Tabereau.

La graduación para ambas operaciones puede ser la siguiente:

a) Expresiones decimales puras con todas sus cifras significativas.... Ejemplo: 0.6; 0,32; 0,428

b) Expresiones decimales puras con alguna cifra no significativas . . .	Ejemplo: 0,06; 0,004; 0,038
c) Expresiones mixtas en los dos casos anteriores .	Ejemplo: 1,6; 1,06; 5,004
d) Expresiones mixtas expresadas en forma entera.	Ejemplo: 16 décimas 106 centésimas.

Observación: Justifíquese la aparente incongruencia de escribir 3,50 ptas. ó 3,50 m. por la significación de las unidades *principales* del sistema métrico.

326. Transformaciones.—Añadiendo a la idea fundamental, la relación con el S. M. D. es fácil hacer ver por ejemplo: que 3,842 *m.* × 100 = = 384,2 *m.*, puesto que cada cifra representa unidades concretas 100 veces mayores. De aquí puede pasarse fácilmente a las unidades abstractas.

Análogamente se demuestra la posibilidad de agregar o suprimir ceros a la derecha.

327. Suma y resta.—Son completamente idénticas a las operaciones correspondientes hechas con enteros sin más complicación que la falta de unidades de un orden que pueden suplirse en un principio con ceros. Por ejemplo: 3,14 — 5,2867 se escribirá en un principio 3,1400 — 5,2867.

328. Multiplicación.—El multiplicador entero no ofrece dificultad ninguna, y para el multiplicador decimal la regla se justifica fácilmente con un ejemplo de la manera siguiente:

Un metro de tela cuesta 2,80 *ptas. ¿Cuánto cuestan* 0,75 *m?*

Razonamiento: Si se tratase de 75 *m.* el coste sería 2,80 × 75 = 210 ptas.; como se trata de una cantidad 1 0 0 veces menor, el resultado será también 100 veces menor, esto es: 2,10 ptas.

Observación: La regla primera que se obtiene según esto, es la de *multiplicar como si fuese entero el multiplicador y correr después la coma en el producto tantos lugares como cifras decimales tiene dicho multiplicador,* pero es ya fácil pasar a la ordinaria.

329. División.—Sólo presenta análogamente dificultad el caso del divisor decimal.

Ejemplo: *Se han pagado* 2,10 *ptas. por* 0,75 *m. de tela; ¿cuál es el precio de* 1 ?

Razonamiento: Para hacer entero el divisor, diremos: Si hubiese comprado 100 veces más tela, el costo hubiese sido 100 veces mayor, esto es, que 75 *m.* hubiesen costado 210 ptas. Ahora, precio de 1 *m.* = 210 : 75 = 2,80 ptas.

De aquí la regla, única buena, de hacer el divisor entero multiplicando los dos términos por el número conveniente 10, 100, 1.000...

Observación 1.ª: Sobre todo en los decimales conviene obtener previamente un resultado aproximado; así, en el primer ejemplo, diremos: 0,75 *m. es menos de* 1 *m. y más de* $^1/_2$ *m., luego el coste estará comprendido entre* 2,80 *y* 1,20, como ha ocurrido.

En el segundo caso, análogamente, el precio estará comprendido entre 2,10 ptas. y su duplo esto es, 4,20 ptas.

Observación 2.ª: Conviene habituar al alumno a calcular la aproximación efectiva de los productos desechando las cifras innecesarias. Así, por ejemplo, en coste se desprecia la cifra que sigue a los céntimos, aumentando una unidad si vale más de medio céntimo la cantidad de que se prescinde.

Observación 3.ª: Es conveniente practicar la aproximación del cociente en menos de una unidad decimal, dada, lo que no ofrece dificultad alguna.

El sistema métrico

330. Caracteres de su enseñanza.—Ninguna otra parte de la aritmética se presta mejor a hacer la enseñanza activa e intuitiva; ocasional en un principio, y solamente sistemática al final.

Rápidamente se pasará por las unidades naturales, y además de las diferencias obtenidas midiendo con ellas una misma cantidad (por ejemplo, con palmos la longitud de la clase), se podrá acudir a historietas entretenidas como la de la vara española en América o el origen de la yarda inglesa = longitud del brazo de Enrique VII, dada para evitar disensiones entre sus súbditos que tenían siempre *dos* medidas, una para comprar y otra para vender.

Los mismos alumnos construirán las unidades que son susceptibles de ello: el *m.* con una cinta, por comparación, y sus divisores por doblamiento; el $dm.^2$ y luego el $m.^2$ mediante el dibujo, el $dm.^3$ en cartulina o papel.

La evaluación directa de cantidades obligará a usar la unidad proporcionada; el *m.* para la longitud de la clase y el *mm.* para el grueso de una madera, haciéndose la doble labor de calcular a ojo la extensión de una cantidad dada, y la de determinar la extensión correspondiente a un número dado de unidades, todo ello referido a lo que más pueda interesar al niño: su propia altura y peso, la altura del asiento y la del respaldo, la superficie de la ventana, la cubicación de la clase.

Esta evaluación se hace extensiva a cuestiones de Historia Natural, Geografía, Estadística, etc. Por ejemplo: altura de algunas especies arbóreas; longitud de algunos ríos; anchura de algunos pasos marítimos y canales, ríos, etc.; altura de algunos monumentos, peso de obeliscos, de animales de cebo; precios mundiales de diferentes mercancías, etc. La comparación de magnitudes obliga al cambio de unidad; y la apreciación del resultado de un problema, a la separación de sus unidades de diferentes órdenes.

La relación entre las diferentes unidades métricas servirá para determinar capacidades mediante el peso en agua, la densidad de un cuerpo experimentalmente, y con ello la obtención de pesos por el volumen (peso del tablero de una mesa de mármol), y de volúmenes por peso (peso de una llave).

Con todo ello se procurará que el alumno adquiera un conocimiento intuitivo de las extensiones, empezando por las que expresan unidades, como, por ejemplo: la anchura de la mesa, es un metro; el patio de la escuela, es un $Dm.^2$; la capacidad de una carreta, es un $m.^3$; y siguiendo por las demás, por ejemplo, relacionar los tamaños de las botellas con su capacidad respectiva, el peso de un bloque de piedra o de un ladrillo, etc.

Pocas dificultades presenta el S. M. D. como no sea el crecimiento de las unidades de superficie de 100 en 100 y las de volumen de 1.000 en 1.000 contra lo que parece indicar su nombre. La obtención de la relación entre tales extensiones y una dimensión hecha agrupando 4, 9, 16 cuadrados y 8, 27, 64 cubitos, empieza a dar una idea clara; sigue la construcción de tales unidades y la comprobación de cuantas subunidades comprenden; y se termina con ejercicios que diferencien la nomenclatura formando, por ejemplo: 6 *dm.*^{2} y 10 *dm.*^{2} para distinguir este último del *m.*^{2}

331. Las unidades de tiempo.—Debe darse idea de la determinación del día por el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano, apreciados por ser mínima la sombra de una varilla vertical. Análogamente se explicá la duración del año, y la del segundo se obtiene experimentalmente por el tiempo que dura la oscilación de un péndulo formado por una cuerda de 1 m. de largo suspendida por un extremo y con un plomo en el otro. Un reloj construído por los mismos alumnos con un cartón y manecillas movibles permitirá enseñar a reconocer la hora y servirá para pequeños problemas de cálculo y aun para reconocimiento de ángulos.

Las transformaciones de los llamados números complejos, desprovistos de su extraña nomenclatura, son simples aplicaciones de la multiplicación y división, indispensables en algunos problemas concretos, o para formarse idea más clara de la cantidad que tales números representan, y su enseñanza, que ha de ser también ocasional, como base de problemas, o como aplicación de operaciones, no ofrece dificultad alguna.

Complementos

332. Las propiedades de las operaciones.—Hemos indicado algunas de ellas en (42) y (107, *c*) el mismo camino puede seguirse para las restantes que se crean de interés. Así pueden verse en nuestra *Aritmética Intuitiva.*

La raíz cuadrada puede demostrarse intuitivamente, pero no creemos en la claridad de la demostración que suele darse y preferimos el empleo de tablas, o dar la regla sin demostración. Análogamente ocurre con la raíz cúbica.

333. La divisibilidad.—Apenas útil para la simplificación de la división, y por tanto de las fracciones, pueden obtenerse los caracteres de divisibilidad, sin que sirva de gran cosa la apelación a la intuición, pues esta falla para los grandes números.

Así, para la divisibilidad por 9 podemos seguir el camino siguiente:

1.° 10, 100, 1.000... forman un múltiplo de 9 más 1, puesto que son 9 + 1, 99 + 1, 999 + 1, esto es, 10, 100, 1.000 discos pueden ponerse en filas de 9 y sobrará 1 para cada uno.

2.° Un número tal como 200 = 2 veces 100 se discompondrá en filas de 9 y sobrarán 2.

3.° Un número tal como 235 = 200 + 30 + 5 se descompondrá en filas de 9 y sobrarán 2 + 3 + 5; con éstas se puede formar otra fila de 9 sobrando 1.

Este es el resto que da un número al dividirlo por 9, y que es el mismo que da la suma de sus cifras.

334. La prueba por 9.— Conveniente, sobre todo para los niños, a quienes gusta estar seguros de la exactitud de la operación que han efectuado, puede darse la prueba por 9 sin justificación, o apelar sencillamente para ello, en primer lugar, a que la operación bien hecha dé la prueba, y en el segundo lugar a la demostración que damos en nuestra *Aritmética Intuitiva*.

La Aritmética mercantil

335. El tanto por ciento.—*a*) Siguiendo la regla de hacer intuitivos los conceptos relacionándolos con el sistema métrico, las primeras enseñanzas se referirán a determinar el 1, 2, 3 por ciento de 1 pta., 1 m., 1 l., 1 $m.^2$, etc.

b) De los tres problemas que plantea el tanto por ciento, el más sencillo es la determinación del tanto por ciento de una cantidad; el siguiente qué tanto por ciento de una cantidad es otra, y el más difícil el de hallar una cantidad dado su tanto por ciento.

c) En ésta como en las *reglas* siguientes deberá practicarse previamente el cálculo mental con ayuda de artificios, el escrito con ellos, y la resolución general escrita.

d) Es preferible en general reducir el tanto por ciento a fracción ordinaria de la cantidad o decimal de la unidad. Así, el 5 por 100 $= \frac{1}{20}$ de la cantidad o 0,05 de la misma por unidad.

Ejemplo: *Calcular el 4 y medio por ciento de 72 pesetas.*

Cálculo con artificios.

El 4 por 100 equivale a 0,04 cts. por cada peseta. Por 72 será	$0{,}04 \times 72 = 2{,}88$ ptas.
Hay que agregar el medio por ciento que es un octavo del anterior	$2{,}88 : 8 = 0{,}36$
Total............	3,24 pts.

Observación: Si los números anteriores hubieran sido más sencillos pudiera haberse resuelto mentalmente.

Cálculo general.

Primera forma: 1 % de 72 pts. = 0,72

$\times$ 4,5

4,5 » » » 3,24

Segunda forma: $0{,}045$ de $72 = 0{,}045 \times 72 = 3{,}24$

336. El interés.—*a*) Puede considerarse como un caso particular de la regla de tanto por ciento suponiendo además la ganancia proporcional al tiempo.

b) De los varios problemas que plantea, los más interesantes son el cálculo del interés y el del capital, por ser los más usuales, siendo el primero el más sencillo de todos. No deberá practicarse el cálculo del interés por varios años por ser caso irreal.

c) En el cálculo del interés empieza por hallarse el tanto por ciento del capital como anteriormente, obteniendo así la renta. La división por 12 (360) dará el interés mensual (diario) y la multiplicación por el número de meses (días) termina el problema.

d) El cálculo mental se presta a interesantes artificios que refuerzan la percepción de las tres magnitudes, capital, tiempo y ganancia, que intervienen.

Ejemplo: *¿Qué capital produce* 12 *ptas. al año al* 5 %?

1 pta. es producida por 20,
12 ptas. son producidas por $20 \times 12 = 240$ ptas.

¿Qué capital produce 14 *ptas. en un año al* 4%?

4 ptas. son producidas por 100 ptas.
14 es $3\,^1/_2$ veces 4, luego el capital será $3 \times 100 +$
$+ \frac{1}{2}\, 100 = 350$ ptas.

Cuando el tiempo no es un año, sino meses o días, se averigua el interés de una peseta durante un mes (día), después durante el año, y el capital buscado es la relación entre lo realmente producido y esto.

337. La contabilidad.—Una sencilla contabilidad doméstica, y aun mercantil, puede ser enseñada en la escuela primaria por su indudable valor práctico y por su alto valor educativo, al habituar al análisis de los hechos económicos y a establecer el orden, la correlación y la claridad entre los hechos contables. Los alumnos tienen un gusto especial por esta enseñanza, sobre todo si se *dramatiza*, esto es, se fingen compras y ventas, se maneja el dinero escolar, incluso los pagarés y los depósitos, estableciéndose en la escuela una serie de pequeños establecimientos que comprendan desde la casa particular y la tienda, hasta un modesto establecimiento bancario, llevándose los libros correspondientes y expidiéndose los documentos necesarios.

La Geometría

338. Preliminar.—La didáctiva de la Geometría presenta muchas menos dificultades que la de la Aritmética, por prestarse más a aplicar sin artificio alguno las normas generales de la enseñanza que venimos explicando; por esto nos limitaremos a precisar para algunos puntos detalles que puedan tener alguna importancia.

Realmente la Geometría en la Escuela Primaria no puede pasar de las fases de *observación* y *experimentación* que son su principio, dejando la formación lógica para la enseñanza secundaria. Sin embargo, no deben prolongarse aquellos períodos y en todo momento debe hacerse la apelación posible al aspecto lógico, si se quiere que esta enseñanza no pierda uno de sus principales medios de educación intelectual.

339. El período de observación.—Se caracteriza por el estudio intuitivo de la forma, la posición y el movimiento.

Puede emplearse el material Froebel, el Montessori y las formas geométricas coloreadas de Mlle. Andemars, con las que se forman casitas, verjas, incluso siluetas de animales. También es recomendable la lotería de *formas* que contiene las fundamentales y con la que se juega como con la ordinaria.

El conocimiento de las formas espaciales, superficiales o lineales va unido al aprendizaje del nombre correspondiente (lo mismo decimos de las *posiciones*), por lo cual es preciso dar nombre a una figura cualquiera y seleccionar una figura por su nombre, y esto ha de hacerse tanto por la vista como al tacto. Queda por fin reproducir la forma, bien por el modelado, el plegado, recortado, etc.

El análisis y la síntesis de las figuras lleva a descomponerlas y recomponerlas cortadas por sus líneas y planos principales, lindando con los puzzles geométricos. La combinación de elementos de figuras para obtener otras simétricas con relación a un eje o a un centro, producto de una traslación paralela (por ejemplo, varios △ iguales colocados formando un piso), da idea de la posición y el movimiento.

340. El período experimental.—En él las propiedades de las figuras se estudian experimentalmente, comprobando, por ejemplo, que la línea recta entre dos puntos es más corta que una quebrada o curva de los mismos extremos, y hasta cuánto más corta es. Lo mismo se hace comparando la perpendicular y la oblicua, evidenciando además que sin grandes desviaciones del pie la diferencia no es muy grande, lo cual permite apreciar los errores que puedan cometerse en agrimensura, cuando la perpendicular a una base puede sufrir desviación.

Pueden utilizarse figuras con movimiento como los paralelogramos articulados, y, para citar un ejemplo, la mediatriz de un segmento se obtiene experimentalmente fijando en sus extremos los de una goma y dilatando ésta por un lápiz fijo en su punto medio.

Los ángulos se definirán por el giro, con auxilio de las manecillas de un reloj, a partir del ángulo llano y la perpendicularidad estará dada por los ángulos adyacentes iguales, desterrando para siempre lo de no inclinarse más a un lado que a otro. La primera definición de paralelas puede darse por la equidistancia.

Las áreas y volúmenes se empiezan a estudiar por el procedimiento natural de descomposición en unidades de superficie o volumen, apelando después a la equivalencia o a la comprobación experimental, para lo cual es útil el material indicado en 216.

4.—El cálculo ordinario y el cálculo rápido

341. Diferenciación.—Existe una pequeña confusión acerca de las formas en que se desarrolla la actividad calculatoria. Para evitarla, nosotros consideraremos *cálculo ordinario* al que se realiza según las reglas ordinarias, oralmente para los números comprendidos en las tablas y por escrito para los demás. Por *cálculo rápido* entenderemos el realizado bajo reglas que abrevian el procedimiento ordinario, pero en el cual es preciso escribir para obtener el resultado. *Cálculo mental* es aquel en que percibidos los datos, visual o auditivamente, puede enunciarse el resultado sin necesidad de recurrir a la escritura. Así, por ejemplo, el producto de un número por 9 hecho por las reglas ordinarias, es cálculo ordinario; verificado cuando el número es largo por la regla de restar cada cifra de la siguiente, lo cual exige escribirlas sucesivamente, es cálculo rápido; y la multiplicación por 9 de un número de dos cifras multiplicándolo por 10 y restando el mismo número, todo lo cual se hace mentalmente, es cálculo mental.

342. Justificación.—El cálculo no tiene solamente el valor práctico fácilmente recognoscible, sino además un alto valor educativo, ya que habitúa a ser preciso, a trabajar con orden, a utilizar metódicamente los conocimientos adquiridos, a desenvolver el poder de atención y de reflexión. Obliga al análisis de los números y prepara el razonamiento deductivo. Claro es que todo ello se desvanece casi al aparecer los automatismos del cálculo, pero es preciso que éstos se adquieran racionalmente por una parte, y por otra el cálculo rápido y el cálculo mental renuevan constantemente esas cualidades, sobre todo cuando se impulsa al niño a buscar *procedimientos propios*, que además serán los más adecuados para sus condiciones psicológicas. Son además los ejercicios numéricos un complemento natural de las lecciones de elaboración, ya que los conocimientos adquiridos en ellas tienden a aplicarse inmediatamente por una expansión psicológica natural.

343. Caracteres generales.—Los ejercicios de cálculo, no deben hacerse rutinariamente ni aun confiando en el gusto del niño por la adquisición de automatismos. Es preciso que revistan algún interés, y para ello basta en general referirse, al proponerlos, a los motivos de la lección de elaboración de que dependen. Claro es que cuanto mayor sea el niño más se puede acudir a su gusto por la exactitud, a la emulación individual o por grupos, y en una palabra al *carácter deportivo* de la Matemática.

Los números que han de emplearse en los cálculos son, como regla general, los correspondientes al grado de que se trate, y los usuales en la vida. Según Wilson, de los números empleados en la vida corriente $^7/_8$ no tienen más de 5 cifras; la mitad de los multiplicadores son de una cifra, y los $^3/_4$ de las operaciones son las fundamentales entre números que representan numerario: pesetas y céntimos.

El cálculo oral es preferible al escrito por la fatiga y desviación de la atención que éste supone. Los ejemplos son mejor cortos que largos, y su corrección puede hacerse por los alumnos mejores.

344. La iniciación al cálculo.—Es de especial importancia, porque en ella se obtienen intuitivamente los conceptos de números y operaciones y se forman los primeros automatismos numéricos; en ella se emplea generalmente (hay excepciones provinientes ya de Pestalozzi), tanto el calculo oral, que no llega a mental por operarse materialmente, como el escrito. Se realiza con los párvulos de cuatro a seis años, o en el primer grado escolar, de seis a siete años, dedicándole un cuarto de hora cada día, que puede aumentarse si no se fatigan los pequeños alumnos. Se puede considerar este período dividido en dos, estudiándose en el 1.° los números y sus operaciones hasta 10, y en el 2.° hasta 20, en la forma siguiente:

1.° Estudio monográfico de los 9 primeros números.—Obtención nombre y signo.—Su obtención por suma y multiplicación de todas las maneras posibles.—Restarle todos los números anteriores (según nuestra experiencia personal esto suele recargar demasiado la lección).—La mitad, el tercio y el cuarto.— División por 2, 3 y 4.

2.° La decena, de 10 a 20. Sumas de tipo: *a*) $11 + 3 = 14$; *b*) $7 + 5 = 12$.—Restas de tipo: *a*) $14 - 3 = 11$; *b*) $12 - 5 = 7$.—Multiplicación hasta 18. Operación inversa.

El material empleado y los procedimientos pueden fácilmente verse en los capítulos VI y VII. Se opera sucesivamente con objetos, con imágenes y con números, oralmente y por escrito.

Así, por ejemplo, para el núm. 4 dispondríamos de cuatro cubos coloreados como material fundamental y todo aquel del propuesto que se refiera a este número. Los niños deberían tener también sus cuatro cubitos, aunque esto no es siempre posible; pero todos han de tener su cuaderno de papel cuadriculado, lápiz negro y de colores.

Se presenta un grupo de tres cubitos, se pregunta cuántos hay. Se pone junto a ellos otro cubito, y se pregunta: ¿y ahora? Se forma con los cuatro cubitos un grupo, y se dice ahora hay *cuatro*, y se escribe 4, y también *cuatro*. A continuación, agrupando convenientemente los cubos, se obtienen las sumas $3 + 1 = 4$, $2 + 2 = 4$, $1 + 3 = 4$, además 2 veces $2 = 4$, y separando cubos $4 - 1 = 3$, $4 - 2 = 2$, $4 - 1 = 3$ y $4 - 4 = 0$.

Dibújase finalmente un cuadrado, cuyos lados se cuentan y se escribe su nombre.

El uso del resto del material, las historietas, los ejercicios de comprensión, completan la lección o la repiten ampliándola al día siguiente.

Los procedimientos Mac Kinder Winecketa y análogos son altamente recomendables en este período y casi sólo para él.

345. La escritura de los números.—Condición fundamental para la exactitud, rápidez y fines del cálculo, es una correcta escritura de los mismos: el perfecto trazado de las cifras (teniendo en cuenta posibles confusiones como el 3 y 5, el 6 el o y el 8), su adecuada separación y su colocación en columna, para lo cual es utilísimo el empleo del papel cuadriculado. Aun así las confusiones son muy grandes y la fatiga que la escritura supone considerable para el niño, por lo cual es conveniente el uso de cuadernos que tengan impresos los datos, u obtenidos cuando menos en un multicopista.

346. Normas para el cálculo.—El maestro ha de observar a sus alumnos y analizar cada una de las operaciones parciales en que una operación de cálculo se descompone, y proponer a los alumnos el número de ejercicios necesarios y suficientes para dominar progresivamente todas las operaciones.

En la imposibilidad de dar aquí el análisis de todas las operaciones y la serie de ejercicios necesarios, cosa propia de un libro especial, nos limitaremos a hacer tales indicaciones para la suma por considerarla la operación fundamental.

I. *Momentos psicológicos de la adición en columna,* según Thomdicke:

1.° Mantener la atención en la columna correspondiente.

2.° Conservar en la mente el resultado de cada adición hasta la siguiente.

3.° Sumar un número *visto* con otro *pensado.*

4.° Prescindir de los espacios vacíos.

5.° Prescindir de los ceros.

6.° Sumar unidades con números mayores que 10.

7.° Escribir las unidades en vez de la suma total.

8.° Llevar, es decir, descomponer un número mayor que 10 en unidades y decenas y reducir éstas a unidades.

La colocación de los datos influye en la dificultad, así tres cifras en columna son sumadas correctamente por el 95 por ciento de los alumnos de primer grado, mientras que en fila sólo lo son por el 77 por ciento (Wilson).

2. *La gradación en la suma.*—La dificultad de efectuar una suma aumenta con el número de cifras en cada columna más que con el número de cifras en cada fila, y es más grande sumando de menor a mayor que al contrario, y lo es también al pasar de 9 el resultado.

Cuando se forman decenas se dificulta más la operación cuanto más alejada del final de la columna aparecen, siendo lo más en columna intermedia que en la última; finalmente, el número de veces que es preciso llevar acrecienta la dificultad. Con arreglo a todo ello podemos proponer los siguientes ejercicios graduados, tomados de Grosgurin.

a) *Sin llevar:*

5	8	14	3	14	10	14	32	86	43	231	243
3	0	2	14	10	18	13	56	42	85	42	36

254	243	4	6	6	3	12	30	1241	3220	3694
123	654	2	0	2	6	42	12	232	621	1036
		2	3	5	8	13	17	16	42	4205

b) *Llevando.*

4	4	7	4	4	4	19	37	127	135	235	519
2	2	4	5	8	8	4	9	19	46	146	138
3	8	3	6	4	9			30	10	276	292
6	3	5	8	7	5						

Observación: En un principio en ésta como en las restantes operaciones se debe expresar el orden de unidades con que se opera y la forma de hacer la descomposición para llevar; más adelante debe tenderse a emplear, por el contrario, el mínimo de palabras.

3. La graduación en la resta no ofrece dificultad. En la multiplicación, reduciéndola a un ejemplo de cada clase, expondremos los tipos siguientes:

143	129	345	3056
×2	×2	×3	×4

En el primer producto no se lleva; en el segundo se lleva sólo en las unidades; en el tercero en las unidades y en las decenas; en el cuarto hay un cero intercalado, etc. En todos ellos los multiplicadores son 2 a 5, que son los más fáciles, especialmente este último. Los ejercicios siguientes serán análogos, pero en los primeros, mientras el multiplicador es mayor que 5, las cifras del multiplicando son menores que 6.

Seguidamente se pasa a multiplicar por la unidad seguida de ceros y por una cifra significativa seguida de ceros sin concederles gran importancia, y finalmente se proponen ejercicios de dificultad creciente como los que siguen:

a)	12 ×12	37 ×11	*b)*	2389 ×15	4829 ×16	*c)*	12101 ×18	15483 ×19
ch)	383 ×31	1289 ×41	*d)*	13005 ×122	3289 ×301	*e)*	3 283 ×36	1508 ×47
f)	32842 ×109	54287 ×98	*g)*	9698 ×678	8768 ×697			

4. Los momentos que considerar en la división son, en primer lugar, los fundamentales señalados en 209-4 empezando por los cocientes exactos; después puede procederse en la siguiente forma: ·

α) *Divisor de una cifra.*—1.--Cocientes exactos:

a) 81 : 3 90 : 2 56 : 4 75 : 5 84 : 6 96 : 8.
b) 128 : 2 219 : 3 560 : 4 1323 : 3 455 : 7 829 : 9.
c) 2824 : 4 2030 : 5 1824 : 6 4235 : 7.

2.—Cocientes inexactos:

a) 77 : 2 95 : 6 49 : 4 72 : 5.
b) 399 : 2 512 : 6 126 : 7 450 : 8.
c) 3571 : 2 4151 : 3 1085 : 7 5020 : 8.
d) 1.000 : 9 30.025 : 6 80.071 : 7 20.501 : 6.

β) *Divisor de varias cifras.*—Se empezará por tomar como divisor una cifra significativa seguida de uno o más ceros; y se continuará con números de dos cifras cuyas unidades sean menores que 5, para terminar con los números que las tengan mayores; claro es que en cada caso debe comenzarse porque el cociente tenga una sola cifra.

347. Los números decimales.—Desde el punto de vista del cálculo no ofrecen dificultad alguna, ya que sus reglas se reducen a las de los enteros. Es esencial el comprender la trascendencia de la supresión de las comas y hacer un tanteo antes de colocarla definitivamente en el resultado, sobre todo en la división; así, por ejemplo, si en los datos la primera cifra significativa del dividendo son unidades y la del divisor centésimas, hemos de pensar que el cociente será $1 \times \times 100 =$ centenas aproximadamente, ya que dividir por 0,01 equivale a multiplicar por 100.

348. El cálculo rápido.—Interesante por la disminución de esfuerzo que supone, lo es aún más por mostrar la aplicación de las teorías matemáticas al carácter de *arte* que hemos señalado a esta ciencia, y por prestarse a la invención por parte del alumno, neutralizando los efectos del automatismo.

No necesita el cálculo rápido de procedimientos especiales para su enseñanza, y en cuanto a los ejercicios a que se presta remitimos en general al lector a nuestra *Aritmética Intuitiva*. Sin embargo, hacemos a continuación algunas indicaciones.

Suma.—Para obtener $8 + 5 + 7$, dígase sucesivamente 8 — 13 — 20.

Búsquense los sumandos que dan 10 o decenas justas. Así $3 + 8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 10 + + 10 + 10 = 30$.

Búsquense los sumandos iguales para proceder por multiplicación.

Resta.—No se presta a más abreviaciones que a las resultantes de emplear el complemento aritmético del sustraendo, sumándolo y restando una unidad de orden superior: así $1436 - 542 = 1436 + 458 - 1000$. transformación realmente útil cuando son varias las cantidades que restar.

Multiplicación.—Multiplicar por 5, 50, 500; por 15 y 150; por 25 y 250. (Véase Aritmética Intuitiva.

Por 75 *y* 125. — $N \times 75 = N \cdot 100 - \dfrac{N\ 100}{4}$

$$N \cdot 125 = N \cdot 100 + \frac{N \cdot 100}{4}$$

Por 11, 111, 1111, 9, 99, 999.—Supóngase uno, dos, tres ceros delante y detras y $\left\{\begin{array}{c}\text{súmese}\\\text{réstese}\end{array}\right\}$ cada cifra $\left\{\begin{array}{c}\text{con}\\\text{de}\end{array}\right\}$ la siguiente:

Por 12, 13, 14, 19.—Supóngase un cero delante y otro detrás, multiplíquese cada cifra por las unidades del multiplicador y súmese con la cifra siguiente.

Productos de números de dos cifras:

$$\begin{array}{c} 3\ \ 4 \\ 1 \times 1 \\ 8\ \ \ 7 \end{array} \left\{\begin{array}{r} 28 \\ 21 \\ 32 \\ 24 \\ \hline 2958 \end{array}\right\}$$

Los productos parciales y las sumas se hacen mentalmente.

Por 279, 357, 549, *etc.*—Caso en que las decenas son un múltiplo dígito de las unidades. Se efectúa el producto por éstas, y el producto parcial se multiplica por el factor dígito.

Así $\begin{array}{r} 5823 \\ \times\ 279 \\ \hline 52407 \\ 157221 \\ \hline 1624617 \end{array}$ $\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Producto de } 5823 \text{ por } 9 \\ \quad » \quad\ » \ 52407 \ » \ 3 \\ \\ \end{array}$

Por $1\,{}^1/_2$, $2\,{}^1/_2$, $3\,{}^1/_2$ ... $2\,{}^1/_4$, $3\,{}^1/_4$ ...—Efectuando la multiplicación por el entero y sumando la mitad, cuarta parte del multiplicando.

Por ${}^3/_4 = {}^1/_2 + {}^1/_4$—Cómo indica la equivalencia, sumando su mitad con la mitad del resultado.

Por ${}^7/_8 = {}^4/_8 + {}^2/_8 + {}^1/_8 = {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8$.—Cómo indica la igualdad tomando mitades sucesivas.

Por 33, 55, 36, *etc.*—Números descomponibles en factores fáciles, haciéndolo por cada factor sucesivamente.

Por 0,50; 0,25; 0,125. Por $0{,}75 = 1 - {}^1/_4$. *Por* $1{,}25 = 1 + {}^1/_4$.—Como indica la equivalencia.

División.—La simplificación preferible es la de suprimir los factores comunes al dividendo y divisor. Los ceros en el divisor deben suprimirse separando en el dividendo otras tantas cifras.

División por 0,5; 5,50. Por 0,25; 2,5; 25. Por 0,125; 1,25; 12,5; 125. Como corresponde al primer número transformado en fracción, dividiendo después por 10, 100 y 1.000.

Por $75 = 25 \cdot 3$; $375 = 125 \cdot 3$, *etc.*—Como indica la descomposición en factores, sucesivamente.

5.—El cálculo mental

349. Justificación.—El valor práctico del cálculo mental se encuentra en la enseñanza, por lo que facilita ésta con su rapidez y animación; y en la vida, por ser imprescindible constantemente. Su gran valor educativo ha sido ya señalado como base del cálculo pensado; de la reacción contra el automatismo; del ejercicio de la atención, convertida en reflexión, difícil de lograr en el niño sin soporte intuitivo, y de la *invención*, ya que el niño ha de ingeniarse con reglas propias para responder con rapidez y exactitud. Es además el que se presta a establecer más inmediatamente el pugilato entre los alumnos por las respuestas rápidas y exactas, y ya hemos indicado que los ejercicios de comprensión que deben hacerse en cada una de las lecciones son, en su parte numérica, ejercicios de cálculo mental.

350. Los procedimientos.—El interés que despierta el cálculo mental por sí mismo hace casi innecesarios los procedimientos artificiales. Conviene, sin embargo, que los ejercicios tengan en un principio base concreta de objetos. Por ejemplo: grupos de cubos; imágenes, así, cuadros donde aparezcan tres vasos y el precio de uno, 75 cts., para preguntar el valor de los tres; ejemplos concretos sin imágenes, y finalmente los ejercicios numéricos, con la gradación de escribir primeramente los números en la pizarra, y de suprimirlos si su sencillez lo permite.

Como procedimiento de aplicación citaremos el de *Tabereau*, de la Martiniere. Los alumnos están provistos de pizarras. El maestro presenta el ejercicio, y concede un poco de tiempo para obtener el resultado. A una palmada los niños lo escriben en la pizarra y vuelven lo escrito sobre la mesa. Otra palmada, y todos los niños levantan la pizarra volviéndola hacía el maestro. *Ventajas*: simultaneidad y orden en el trabajo; imposibilidad de copiarse unos a otros; rapidez en los ejercicios y en la percepción del resultado; posibilidad de la corrección como si fuese individual; conocimiento inmediato por los mismos alumnos de quienes lo han hecho bien y quienes mal; regulación del tiempo dedicado a cada ejercicio, pudiendo acelerarse progresivamente.

351. El programa.—Los ejercicios indicados para el cálculo rápido sirven en general para el cálculo mental cuando se opera con números pequeños, pero, estando esta interesante práctica muy descuidada en España, vamos a dar un programa detallado seguido con éxito, en unas escuelas de París, no sin hacer notar que los ejercicios siguen, como es natural, a las lecciones de elaboración de que proceden.

Primer grado.—Sumar y restar 2, 3, 4 ... 9. Sumas de tipo: 30 + 50; 20 + 27; 45 + 30; 23 + + 42. Núneros décimales análogos. Sustracción de tipo: 50 — 20; 65 — 40; 48 — 24; 40 — 36; 42 — 37; Complemento a una peseta de un cierto número de céntimos. Números decimales.

Multiplicación por 2, 3, 4, 6, 7 y 8. Multiplicaciones de tipo: 40 × 7; 6 × 40.

Tomar la mitad, multiplicar por 0,50 y 5. Complementos a 2 pesetas. Multiplicar por 1,50.

Tomar el tercio y el cuarto. Multiplicar por 0,25 y 25. Multiplicar por 9, 11 y 15.

Segundo grado.—Repaso del anterior. Efectuar sumas como $345 + 231 = 345 + 100 + 30 + 1$.

Idem $345 + 576 = 345 + 500 + 70 + 6$ (llevando). Números decimales. Efectuar restas como $746 - 235 = 746 - 200 - 30 - 5$. Idem $746 - 278 = 746 - 200 - 70 - 8$ (llevando).

Multiplicaciones de tipo: $63 \times 4 = 60 . 4 + 3 . 4$. Idem $63 \times 40 = 63 . 4 . 10$. Idem por 11, 21, 31 ... 9, 19, 29... Idem por 12, (docena). Decimales. División. Repaso del anterior. Dividir por 20, 200, 30, 300. Idem por 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04. Idem por 6, 8, 9, por divisiones sucesivas. Idem por 12, 15, 16, 18.

Multiplicación y división.—Multiplicar y dividir por 0,50; 5; 50; 0,5; 0,25; 2,5; 25; 250. Idem por 0,75; 7,5; 75; 0,125; 1,25; 12,5; 125; 1,5 y 15.

Coste de una cantidad pesada a tanto el kilogramo. Ejercicios de aplicación con modificación de los datos para utilizar el cálculo mental. (Ejemplo: *un obrero gana 47 ptas. semanales: ¿cuánto gana al año?* $47 \times 52 = 47 \times 50 + 47 . 2$). Multiplicar por un número que tiene por parte decimal 0,5; 0,75; 0,75. Aplicación de los procedimientos estudiados a ejercicios sobre el interés, descuento, etcétera. Así $5 \% = {}^1/_{20}$; $20 \% = {}^1/_5$, etcétera.

Tercer grado.—Suma. Procedimientos fundados en la descomposición de un número en sus diferentes órdenes de unidades, en los números redondos, y en la compensación. Idem para la sustracción. Idem en la multiplicación (ejemplo: $47 \times 8 = 40 . 8 + 7 . 8$; $68 \times 3 = (70 - 2) 3 = 70 . 3 . - 2 . 3$). Ampliación del grado anterior.

Observación.—El programa anterior es tal vez excesivamente sistemático e intelectualista y recargado. El período primario de la enseñanza proporcionará múltiples ocasiones de ejercitar el cálculo mental y en el período siguiente han de estudiarse los procedimientos aplicables a compras y ventas y referentes a las unidades del peso, capacidad, longitud y tiempo. La conversión de unas unidades monetarias en otras, incluyendo el *real*, el duro y el *décimo* y los billetes facilita la comprensión de muchos artificios. Así, por ejemplo: multiplicar por 1,25 se reduce a la adquisición de objetos que valen primeramente *n* ptas y *n* reales y a convertir éstos en pesetas dividiendo por 4. Recíprocamente a esta clase de operaciones debe aplicarse con preferencia el cálculo mental, enseñando a contar los billetes de 25, los duros y las monedas de 0,05 de 2 en 2; a devolver el cambio, y a obtener el precio de diferentes objetos empleando para ello en un principio el *dinero escolar*.

6.—Los ejercicios y problemas

352. Su diferenciación.—Por ejercicio entendemos la simple aplicación de una regla dada, esté o no esté explícita. Así, son ejercicios *dividir* 345 *por* 5, *y averiguar cuántos* duros son 345 ptas. Lo es también hallar el volumen de un ortoedro, no obstante necesitarse dos operaciones, y trazar una tangente a una circunferencia, no obstante su complicación. Por problema entendemos toda cuestión que exige la combinación de dos o más reglas conocidas. En esta combinación, que supone un análisis y una síntesis por breves que sean, radica la esencia del problema. Así, calcular el peso de una barra de tiza de 1 *dm.* de larga, 1 *cm.* de ancha, 1 *cm.* de gruesa y 2 de densidad, es ya un problema, no obstante su sencillez.

De los ejercicios hemos ya hablado en el capítulo dedicado a la lección, cuanto expongamos a continuación, aun refiriéndose concretamente a los problemas, tiene una parte extensiva a los ejercicios, fácil de apreciar.

353. Su importancia.--Hemos dicho que el ideal de la enseñanza de la Matemática en la E. P. sería convertirse en una serie de ejercicios y problemas, con lo cual se asegurarían todas las cualidades que debe tener la enseñanza, pues sería eminentemente *activa* y *placentera* por la continua invención, y necesariamente adaptada a las cualidades del niño, sin lo cual no podría adelantar un paso, lo cual le haría ser *interesante, graduada,* etc.

Y si nos resignamos a que en nuestra enseñanza haya una parte expositiva, ésta debe ir preparada, seguida y afianzada por los ejercicios y problemas. Ellos tienen el más alto valor práctico, pues preparan directamente para resolver problemas análogos en la vida (realidad) y al mismo tiempo son eminentemente educativos, puesto que ejercitan las facultades de análisis y síntesis, llegando a la invención y ejercitan la expresión correcta.

A esta segunda parte se tendía antes, principalmente, ya que el resolver un problema es la mejor prueba de inteligencia, descuidando no sólo el aspecto práctico de la realidad, sino también las condiciones psicológicas y didácticas del problema.

354. Asuntos de los problemas.—Deben tomarse de la vida real en orden concéntrico. Primeramente lo que se refiere a los mismos niños, su talla, su peso, los objetos con que juegan, el coste de sus dulces, sus notas de clase, etc. Después vienen los referentes a la escuela y a la casa: las dimensiones de la sala de clase, la anchura del pasillo, el número de baldosas, el coste de los cuadernos ... Más tarde, cuanto se refiere a la ciudad: su comercio, su industria, el correo, el tren ... Llega un momento en que el niño percibe el valor de la actualidad y entonces los datos del periódico son los más interesantes; le interesan los deportes, y los problemas sobre *records* o marcas le apasionan. Finalmente, su interés abarca el mundo entero, y entonces es ocasión de tomar datos de la Geografía, la Historia, las Ciencias, la Estadística, el Comercio y la Industria mundiales, presentando como dice Smith *el aspecto cuantitativo de la vida*. Mucho pueden hacer los temas elegidos para el valor educativo de un problema, por ejemplo, la cantidad de Hl. de trigo que da una Ha. en los diferentes países; la productividad de la tierra de secano o regadío; la mortalidad en las diferentes naciones; la criminalidad y su descenso progresivo; el tanto por ciento de muertes prematuras, crímenes, locura entre los alcohólicos, etc.

355. Las condiciones.—Los problemas deben ser:.

a) *Comprensibles*, esto es, que ni en su redacción tengan nada oscuro o que despiste al alumno, ni en sus palabras halla ninguna de significación ambigua o desconocida.

b) *Interesantes.*—Lo cual se consigue, principalmente, con la elección del tema y la finalidad del problema. Los *estímulos* anteriormente indicados y los *intereses* son guías seguros. Y con relación a su origen tengamos en cuenta que los más interesantes son los *presentados por la realidad* (el reloj, las formaciones de los niños, la situación de las mesas, los trazados necesarios para los juegos, etcétera) luego vienen los *imaginados* (viaje en un auto, adquisiciones en la feria, el vendedor de periódicos, etc). Y finalmente vienen los *propuestos* por el maestro.

c) *Reales*, en el sentido de que se presenten como en la vida real, para la que preparan. Esta *realidad* ha de manifestarse no sólo en el tema, sino en la *forma* del enunciado, que no ha de ser ni más difícil ni más explícito que en la vida real; en los *datos*, que han de ser no sólo verdaderos, sino los mismos que suelen darse en la vida. Así, para determinar el coste de un viaje por ferrocarril no se dan estrictamente las distancias a recorrer sino una guía; para formar una factura se da la lista de precios que le sirve de base, etc. Han de ser incluso *reales* en la manera de resolverse, así en el último caso citado se extenderá la factura en forma análoga a como lo hace el comerciante, y si se trata del interés de una libreta de la caja de ahorros se calculará por quincenas como en ellas se hace.

d) *Graduados*.—Los primeros problemas serán intuitivos: *Un niño tiene* 7 *bolitas, y pierde* 4; *¿Cuántas le quedan?* El niño tomará 7 discos, separará 4 y contará los restantes.

La graduación después suele hacerse por las operaciones y el número de ellas que intervienen: dos sumas, una suma y una resta, una multiplicación y una suma, etc. Teniendo en cuenta que las operaciones inversas suponen mayor dificultad que las directas.

e) *Seriados.*—Los problemas deben darse en series no muy extensas para que no lleguen ni a la mecanización ni al aburrimiento. Esta seriación puede hacerse:

1.° Por el artificio empleado para resolver el problema. (Véase 44).

2.° Por el asunto general: Pérdidas y ganancias, densidades, pesos, etc.

3.° Por el tema concreto que sirve de punto de partida. Así de la imaginada excursión en automóvil, surgen problemas referentes al tiempo, velocidad, recorrido total, coste de accesorios para el coche, gastos personales de sus ocupantes, y demás.

Estas series deben graduarse en complicación creciente para cada año escolar aun cuando varios cursos trabajen sobre un mismo tema.

356. La invención de problemas.—Despierta el interés del alumno, ejercita sus cualidades y las manifiesta claramente. Esta invención puede proponerse gradualmente:

a) Expresar la pregunta que constituye el problema después de la exposición de los datos. Ejemplo: *Un pastor tiene* 12 *ovejas, y vende* 4. El problema puede consistir en preguntar *¿cuántas le quedan?* o bien *¿qué parte del total vendió?*

b) Inventar sobre un esquema. Por ejemplo: El maestro escribe en la pizarra

$$PCT = PVT - G$$

que significa: *Precio de compra total = Precio de venta total — ganancia.*

Se trata, pues, de determinar el *precio de venta ottal* de una mercancía en función de las otras dos cantidades que pueden ser explícitas o implícitas. Los alumnos inventan a su capricho las condiciones particulares.

c) Problemas sin más indicación que la serie de operaciones que han de exigir. Cabe desde pedir una simple suma hasta combinar las cuatro operaciones.

357. La solución del problema.—Pueden considerarse en ella tres momentos:

a) *La comprensión del enunciado*, separando los datos de las incógnitas y estableciendo las relaciones entre unos y otras, y *vitalizando* el tema como si el alumno fuese, si ha lugar, el protagonista.

b) *La resolución.*—Acerca de ella hemos dicho lo suficiente en 9 y 43. Aquí nos concretaremos a dar algunos consejos para la mejor exposición: 1.° Si el problema es algo complicado deben hacerse una separación por una línea vertical entre las operaciones materiales y las operaciones indicadas, que indican la marcha del problema. 2.° Esta marcha se expondrá sistemáticamente justificando cada operación que se realice como se indicó en la *síntesis* en 9. Esto último es aplicable hasta a los casos más sencillos.

Ejemplo: *Andrés tenía 16 bolitas y jugando con Basilio perdió 4 ¿pero jugando con Carlos ganó 7. Cuántas bolas tenía al final?*

Resolución: Después de jugar con Basilio le quedaron

$$16 - 4 = 12 \text{ bolas}$$

Después de jugar con Carlos tenía

$$12 + 7 = 19 \text{ bolas}$$

Respuesta: 19 *bolas.*

c) *La comprobación.*—Consiste en rehacer el problema tomando como dato la incógnita anterior, pero no siempre es fácil encontrar una comprobación. Cabe en cambio siempre, y siempre debe realizarse, una *comprobación aproximada*, que dé un valor límite para la cantidad buscada. Así, por ejemplo, si se nos pide *averiguar la capacidad de un depósito cilíndrico* de 4,60 *m* de radio y 8,50 *m* de altura. Sustituiremos el círculo por un cuadrado de 9 *m* de lado y obtendremos como volumen aproximado $9^2 \times 8{,}50 = 81 \times 8{,}50 \simeq 688\ m^3$. Una cantidad que difiera considerablemente de esa no puede ser solución.

358. Calificación de los problemas.—El fin perseguido en la resolución de un problema es la exactitud, pero ésta puede perderse por defectos en el razonamiento, deficiencia en los conocimientos aplicados, o error de cálculo. Nosotros clasificaríamos así, por este orden, la importancia de las faltas cometidas. La claridad y pulcritud en la presentación son cualidades accesorias, pero dignas de aprecio y cultivo.

Cuando los problemas se empleen como medio de examen deben darse dos por lo menos, uno fácil (*a*) y otro más difícil (*b*) con lo cual se obtienen cuatro grados: *ningún problema bien*; *a*; *b*; $a + b$.

7.—Cuestiones especiales

A. *La enseñanza de los números fraccionarios.*

359. Sus detractores.—Es un hecho la disminución constante de la atención dedicada a los números fraccionarios en los programas escolares de todo el mundo, excepto Francia. En Norteamérica no se enseñan sino en su forma más sencilla. Y en Francia misma se ha iniciado una campaña contra ellos por la parte más renovadora del Magisterio. Las razones que aducen son, entre otras, las siguientes:

a) La desaparición del sistema métrico antiguo con su división en partes alícuotas variables, y su sustitución por el sistema métrico decimal, tiene como consecuencia la sustitución de los quebrados ordinarios por los decimales.

b) No se presentan casi nunca en la vida corriente.

c) La reducción de las fracciones ordinarias a decimales permite operar con éstas en sustitución de aquéllas con toda la aproximación que se desee.

d) Su valor educativo es discutible, e incluso se prestan a introducir confusiones en la mente infantil. Baste indicar la tendencia a obtener sumas como $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{5}{13}$.

e) Los problemas que se proponen, son por regla general, artificiosos y además pueden resolverse por procedimientos ordinarios que no exigen cálculo de fracciones.

Ejemplo 1.°.—*Calcular el tiempo que necesita un peatón para caminar* $1\frac{2}{3}$ *kms. a razón de* 4 *kms. por hora.*

El procedimiento ordinario consiste en decir:

Tantas horas como veces contiene 4 a $1\frac{2}{3}$, y lleva consigo una división por un número mixto.

El procedimiento natural es el siguiente:

Parar recorrer 1 km emplea $\frac{1}{4}$ hora $= 15^{m}$
Para recorrer $\frac{1}{3}$ km. emplea $15 : 3 = 5^{m}$
Para recorrer $\frac{2}{3}$ emplea $5 \times 2 = 10^{m}$

Total $15 + 10 = 25^{m}$

Ejemplo 2.°—*De un depósito de agua se sacan los 3/7 y después los 5/9 del resto, quedando 960 l. ¿Cuál es la capacidad del depósito?*

Resolución:

Supongamos la altura de $9 \times 7 = 63$ dm.
Sacando $\frac{1}{7}$, su altura rebajaría en $\frac{63}{7} = 9$ dm. y por $\frac{3}{7}$ en $9 \times 3 = 27$ dm. quedando $63 - 27 = 36$ dm.
Sacando $\frac{1}{9}$, su altura rebajaría en $\frac{36}{9} = 4$ dm y por $\frac{5}{9}$ en $4 \times 5 = 20$ dm. quedando $36 - 20 = 16$ dm.

Ahora 16 dm. suponen una capacidad de ..	960 l.
1 dm. supone una capacidad de ..	$960 : 16 = 60$ l.
63 dm. suponen una capacidad de ..	$60 \times 63 = 3780$ l.

360. Los defensores.—Los defensores de la continuación de la enseñanza de los quebrados en la escuela primaria alegan por su parte.

a) Que no han desaparecido del sistema métrico los divisores no decimales. (Tiempo, circunferencia, papel).

b) Que en la vida corriente se presenta el hecho de tomar partes alícuotas de una cantidad. Ejemplo: $\frac{3}{4}$ de l.

c) Que sólo son reducibles exactamente a decimales muy pocas fracciones (las de denominador cuyos factores primos son 2 y 5) y que aun en este caso, y en todas los demás es preferible por la rapidez y exactitud operar con las fracciones, así $\frac{1}{8}$ es más sencillo que 0,125 y $\frac{1}{3}$ más sencillo y exacto que 0.3333...

d) Su valor educativo es notable, como que presentan un caso que comprende la mayor parte de los números reales y generaliza las operaciones que con ellos pueden efectuarse.

e) En los problemas tratados sin las reglas operatorias propias de las fracciones, no se hace más que operar como ellas indican, con artificio y premiosidad.

361. Nuestra opinión.—Siendo atendibles unas y otras razones opinamos que ni el valor práctico ni el educativo compensan los esfuerzos que es preciso hacer para su enseñanza. Una posición ecléctica, más necesaria circunstancialmente como transición, nos llevaría a estudiar las fracciones sencillas, que son las que aparecen en la vida: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ son más sencillos que 0,1 y pueden enseñarse incluso a los párvulos. Según Wilson el 95 por 100 de las fracciones que se presentan en la vida corriente son

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{5}$$

y esto en Norteamérica, que conserva el antiguo sistema de pesas y medidas.

Esta simplificación del valor de las fracciones y el considerarlas como cocientes indicados de una cantidad con las mismas propiedades que la división facilita extraordinariamente su estudio.

362. Didáctica de los números fraccionarios.— *a*) El concepto de fracción se adquiere por la división en partes de un objeto: naranja, manzana, tarta, torta de madera preparada; y por la contemplación de imágenes, de preferencia el círculo dividido en sectores.

Después viene la consideración de fracciones de magnitudes. Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ de litro marcado en botellas; y finalmente una fracción de cantidades concretas y de números.

Naturalmente se empieza por las fracciones de numerador 1 para pasar después al conjunto de unidades fraccionarias. La representación por segmentos o bandas viene más tarde. Puede hacerse intuitiva la comparación de quebrados, pero sobre todo es interesante notar su relación con la unidad, y su complemento a ella.

El concepto del quebrado como cociente se obtiene sencillamente con ejemplos.

3 naranjas entre 4 niños $= 3 : 4 = \frac{3}{4}$ de naranja

5 manzanas » » $= 5 : 4 = 1\ \frac{1}{4}$ de manzana

b) En la suma y la resta, para evitar la confusión de que antes hablamos los ejemplos se graduarán. Así:

3 cuartos + 2 cuartos = 5 cuartos = 1 y un cuarto

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

c) La conversión de quebrados a igual denominador se preparará mostrando la equivalencia de fracciones, por la posibilidad de multiplicar el numerador y denominador por un mismo número, pudiendo hacerse intuitivamente. Así la figura adjunta

<table>
<tr><td colspan="4">1/2</td><td colspan="4">1/2</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/4</td><td colspan="2">1/4</td><td colspan="2">1/4</td><td colspan="2">1/4</td></tr>
<tr><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td></tr>
</table>

muestra como $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

La reducción se hará con fracciones sencillas, *buscando el denominador conveniente*, empezando por indicarlo. Así, la primera forma de la suma será $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 12$ que invita a representar en 12 avos el denominador.

d) La multiplicación por una fracción se descompone en una división y una multiplicación, ya preparada por tomar los $\frac{m}{n}$ de una cantidad, y la representación gráfica hace perfectamente inteligibles los resultados. (Véase nuestra Aritmética Intuitiva).

e) El divisor fraccionario es realmente difícil de comprender. Puede prepararse inductivamente con ejemplos paralelos como estos:

$60 : 12 = 5$	en donde se observa que a
$60 : \ 6 = 10$	medida que el divisor se hace
$60 : \ 4 = 15$	*dos, tres, cuatro* veces *menor*,
$60 : \ 3 = 20$	el cociente se hace dos, tres,
	cuatro veces *mayor*.

Ahora podemos obtener los cocientes siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 12 : 1 = 12 \\ 12 : \frac{1}{2} = \ ? \\ 12 : \frac{1}{3} = \ ? \\ 12 : \frac{1}{4} = \ ? \end{array}\right\} \text{y finalmente} \left\{\begin{array}{l} 12 : \frac{2}{3} = ? \\ 12 : \frac{3}{4} = ? \end{array}\right\}$$

notando que el divisor es ahora *dos, tres* veces mayor que antes.

También podría operarse con un problema concreto:

Una máquina teje $\frac{1}{3}$ *de braza en una hora ¿Cuánto teje en* $\frac{3}{4}$ *de hora?*

Solución:

En 1 hora teje $\frac{2}{3}$ de braza.

» $\frac{1}{4}$ » » $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

» $\frac{3}{4}$ » » $\frac{1}{6} \times 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de braza.

Resumen:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \\ = \frac{2 \times 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

f) Mayor dificultad presenta el caso de la fracción divisor, pudiendo operarse por inversión del ejemplo anterior.

Si una máquina teje $\frac{2}{3}$ *de braza en una hora, ¿que tiempo necesita para tejer* $\frac{1}{2}$ *braza?*

Solución:

tantas horas como $\frac{1}{2}$ contenga a $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$

Reduciéndolos a un común denominador, resulta $\frac{1 \times 3}{6}$ y $\frac{2 \times 2}{6} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$ de hora.

de donde sale la regla ordinaria.

También podría aceptarse la simple comprobación, como operación numérica inversa de la multiplicación.

Observación.—Todo esto evidencia la dificultad de enseñar racionalmente las fracciones y nos inclina a su limitación en la enseñanza primaria.

B.—*La proporcionalidad*

363. La razón de dos cantidades.—Es un concepto que a pesar de su aparente sencillez no percibe claramente el niño, como no se trate de una razón entera, y que, en general, carece de interés para él en un principio. Por ello opinamos que no debe darse de primera intención sino que puede procederse en las siguientes etapas:

a) Se da un segmento, se dice al alumno que representa 1 *m* y se le pide que dibuje una casa de 6 *m* de alta por 8 de larga, con una puerta que mida 2 *m* $\frac{1}{4}$ de alta por 1 $\frac{1}{2}$ *m* de ancha, etc.

b) Se presenta un plano del pueblo en el qu

1 cm. representa, por ejemplo, 100 m. y se le pide al alumno que determine distancias de interés: De la escuela a su casa, etc.

c) Se da un cuadrado y se pide dibujar otro cuyos lados sean 2 veces, 2 veces y media, etc., los del dado. Se puede operar con rectángulos y triángulos.

d) Así preparada puede definirse la relación de dos segmentos, después la de dos cantidades cualesquiera, para descender en seguida a la representación gráfica de esta relación. (Véase nuestro «Nuevo Tratado de Aritmética»).

364. La proporcionalidad.—Opinamos que no se debe hablar al alumno de la proporcionalidad numérica ni de su aplicación inmediata, la regla de tres como suele darse. Con ello se le descarga de un bagaje no sólo inútil sino perjudicial. Inútil desde el punto de vista práctico, porque el medio verdadero de resolver los problemas de reglas de tres es el empleo *del coeficiente*. (Velocidad, en el movimiento uniforme; precio en los valores, densidad en los pesos, etc.). Perjudicial, porque conduce la rutina de las reglas de tres, sacadas maquinalmente con perjuicio de la educación intelectual.

En cambio, opinamos que debe darse claramente, con multitud de ejemplos, el *concepto de proporcionalidad*, determinando las magnitudes que *no son* proporcionales (edad y talla, arcos y cuerdas); las que lo son entre ciertos límites (número de obreros y tiempo que emplean), y las que lo son completamente. Y en estas creemos que debe darse la *proporcionalidad simple*, que es la habitual, la *compleja* (proporcionalidad a cuadrados, etc.) y la *compuesta*. No hay derecho a no interpretar con precisión las leyes de la propagación de la luz, o del sonido, o de la gravitación universal; ni a desconocer que el área de un rectángulo depende de sus dos dimensiones; la ganancia, del capital, y del tiempo; y el coste del transporte de la longitud y del peso.

Para alcanzar estos conceptos debe empezarse por las representaciones geométricas. Dado un ángulo se trazan perpendiculares a un lado, a distancias crecientes del vértice, y se percibe primero y se calcula después su longitud. Las áreas de las secciones piramidales (proyección del haz de rayos del cine en pantallas a distancias distintas) dan la proporcionalidad compleja, y el área de dos rectángulos la compuesta.

Inmediatamente deben venir las aplicaciones de carácter gráfico, tales como determinar distancias, alturas de edificios, etc. (véase nuestro Nuevo Tratado de Geometría) y posteriormente las numéricas siempre a base del *coeficiente*. Ya hemos indicado algunos de éstos (valor que corresponde a la unidad de los demás) y notaremos, para terminar, que el coeficiente en el caso de la luz es su intensidad de iluminación normal a 1 m. de distancia, bastando dividir por el cuadrado de ésta, en metros, para hallar la iluminación a cualquier distancia. Análogamente el coeficiente en el transporte, es el costo de una tonelada a 1 km. de distancia, y en el interés debería ser la ganancia de una peseta en un año. Con ello los problemas de regla de tres vienen a resolverse *por reducción a la unidad*, con la ventaja de que una vez determinado el coeficiente, pueden resolverse más sencillamente los problemas análogos y se presta a la obtención de fórmulas generales $C = c \times p \times d$ para el transporte e $i = \frac{r}{100} \times c \times t$ para el interés.

C.—*La Agrimensura*

365. Su utilidad.—La agrimensura debe enseñarse en las escuelas rurales, principalmente, por su valor práctico, pero tiene además un gran valor educativo por obligar a los alumnos a trabajar en equipos, ponerles en contacto con la realidad, y, por tanto, con dificultades mayores que las presentadas por el papel o la pizarra, y finalmente les proporciona una elevada idea de la aplicación de la Matemática. Su implantación exige las prácticas que pueden verse en cualquier manual, algunas ampliaciones de material, y orientación especial en la enseñanza.

366. El material.—Para las alineaciones son menester piquetes o jalones que pueden ser sustituídos con simples cañas a las que se adhiere un papel para que puedan ser vistas de lejos. La cadena de agrimensor o la cinta métrica son en cambio indispensables.

Convendría poseer un grafómetro, o escuadra de agrimensor, pero pueden sustituirse sin grandes errores por un bloque de madera en el que se han trazado con una sierra dos cortes perpendiculares entre sí y si se quiere sus bisectrices. Un círculo graduado con un travesero giratorio que lleva dos rectángulos verticales con un hilo en cada uno en su eje vertical sustituye al grafómetro. Uno y otro han de colocarse sobre vástagos con la punta cubierta de hojadelata y que lleven un hueco con una plomadita.

367. Orientación de los conocimientos.—Todas aquellas operaciones geométricas que sean susceptibles de realizarse en el plano y en el terreno deben estudiarse en ambos dominios, dando a conocer los procedimientos especiales aplicables a éste. Por ser muy ingeniosos y poco conocidos indicaremos los procedimientos siguientes.

a) *Por un punto dado trazar una perpendicular a una alineación* (digase, por ejemplo, de una fuente a una tubería).—Tómese una cuerda en la que se marca el punto medio M. Un extremo A se coloca en el punto y el otro B en uno cualquiera de la alineación con tal que la cuerda quede tirante. Fijando el punto M y fijo el B, se lleva el A a la alineación, obteniéndose el pie de la perpendicular.

b) *En un punto de una alineación levantarle una perpendicular.*—Fíjese un extremo A de la cuerda en el punto, y el otro extremo B en cualquier otro punto de la alineación. Póngase la cuerda tirante por M, y fijando M, y llevando A hasta que la cuerda forme una línea recta, la posición de A es otro punto de la perpendicular.

Uno y otro procedimiento están fundados en las propiedades de las diagonales del rectángulo.

También será conveniente manejar la fórmula de Heron para el área del triángulo dada en (IV, Nota 9) ya que en último término cualquier figura del terreno puede determinarse por descomposición en triángulos, cuya determinación no exige más empleo que el de la cinta métrica.

368. Ejercicios.—Los ejercicios que se realicen en el campo no deben ser sólamente los de levantamiento de planos, sino aquellos otros capaces de despertar la curiosidad del alumno, como hallar la anchura de un río, la distancia de dos puntos inaccesibles, etc. Y deben terminar con el trazado de los planos a escala y la evaluación de áreas.

D.—*Planos y mapas*

369. Justificación.—La enseñanza de los planos y mapas en la escuela tiene evidentemente un *valor práctico*, puesto que lleva al conocimiento precioso de cuestiones que se presentan constantemente en la vida corriente; valor de *relación*, puesto que es indispensable para la enseñanza de la Geografía; y valor *educativo*, porque pone en práctica las teorías más elevadas de la Aritmética y Geometría, mostrando su enorme utilidad, y la sencillez de medios con que se amplia el conocimiento humano, ya que sobre un simple plano o mapa se pueden resolver múltiples cuestiones que tratadas en la realidad supondrían esfuerzos penosos y considerables.

370. Su utilización.—Contra lo que generalmente suele hacerse en tales casos, opinamos que debe preceder la utilización de los planos y mapas a su construcción, en primer lugar, porque es más sencilla, y en segundo, porque presenta, desde luego un interés para el alumno que la construcción no tiene, pero que sí encuentra preparada por la utilización.

Claro es que en ésta deberá seguirse el orden de lo inmediato a lo remoto, presentando el plano de la clase, el de la escuela, el del pueblo, el mapa de la provincia, etc., teniendo, además, los primeros la ventaja de que son inmediatamente comprobables los resultados que se obtengan. También debe procurarse esa comprobación en los demás casos, cuando sea posible, por ejemplo, con las guías de ferrocarriles y carreteras y los itinerarios de vapores.

Las cuestiones que presenta la utilización de mapas y planos se refieren, en primer lugar, a la determinación de distancias, que ha de hacerse entre lugares interesantes, sirviéndose primero de la escala numérica, que es la más clara, y después de la gráfica por la simplificación que supone.

En segundo lugar, vienen los problemas inversos que tienen por objeto determinar sobre el mapa puntos que estén situados a distancias dadas de puntos fijos, y pueden relacionarse con los lugares geométricos. Por ejemplo, hallar el emplazamiento de una casa situada a tal distancia de una A y a tal distancia de otra B. Determinar el trazado de una calle paralela a otra y a una distancia determinada, etc.

La construcción.—Siendo un mapa una figura situada en un plano y semejante a otra figura del terreno, el método natural aconseja empezar su estudio por la construcción de figuras semejantes más sencillas. En el párrafo 358 se indicó la construcción de las más simples, ellas sirven de preparación a las que han de seguirles, como por ejemplo, obtener el plano de la superficie de una mesa, de la superficie del aula, del patio de juego si es rectangular, o por descomposición en triángulos en todo caso, etc.

Para obtener el concepto general de figura semejante puede emplearse la reducción o ampliación de un dibujo por el procedimiento de la cuadrícula y mejor aun partiendo del ejercicio del párrafo 359. En lugar de trazar dos rectas que partan de un vértice se trazan varias, construyendo dos o más figuras que por ser *homotéticas* serán *semejantes*. Puede comprobarse en ellas la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de los lados en razón constante, igual a la de semejanza o *escala*. Esto prepara además la obtención de figuras semejantes por el *pantógrafo* corriente, y mejor aun por el construído sencillamente con una cinta de goma, en uno de cuyos extremos se practica un orificio. En el punto medio y en puntos que disten $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ del origen se colocan simples botones automáticos, o cualquier otra señal. Para utilizarlo se fija en un punto conveniente el extremo no perforado y manteniendo tirante la cinta con un lápiz introducido en el orificio del otro extremo se marca la figura ampliación de la dada, sin más que moverlo de modo que la marca correspondiente recorra el contorno de ésta. El levantamiento del plano de la escuela y de sus alrededores y los trabajos de Agrimensura darán lugar al trazado de planos, con lo que se termina esta enseñanza que se puede iniciar en el segundo grado, pero que sólo puede desenvolverse en el tercero, lo cual permite un desarrollo sistemático.

Observación.—Para todo lo que antecede remitimos una vez más al lector a nuestro Nuevo Tratado de Geometría.

8. Utilización del Algebra y la Trigonometría en la Escuela Primaria

371. Justificación.—Como puede verse en los programas del cap. VII son varios las naciones que han introducido la enseñanza del Algebra y la Trigonometría en la Escuela Primaria. Los Estados Unidos desarrollan un programa bastante serio que comprende el estudio de la fórmula, la representación gráfica de funciones, los números positivos y negativos, las ecuaciones, incluso la de segundo grado, la técnica algebraica, incluso con radicales sencillos; y una Trigonometría muy sucinta reducida al cálculo de los elementos de un triángulo rectángulo. En algunas escuelas españolas se utiliza el Algebra en la resolución de ecuaciones con excelente resultado.

Desde luego la introducción de estas enseñanzas tiene un gran valor práctico, ya que las ecuaciones simplifican la resolución de problemas suprimiendo los artificios, y la Trigonometría resuelve múltiples problemas con gran elegancia y sencillez. Su valor educativo estriba en la generalización que con relación a la Aritmética y Geometría representan.

372. El contenido del Algebra.—Existe un punto de capital importancia para la determinación del contenido: la adopción o exclusión de los números negativos. Reducida la aplicación algebraica a la resolución de problemas por medio de ecuaciones de primer grado, aun incluyendo los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, es de suponer que las soluciones negativas queden excluídas, y todo se reduce a enseñar la preparación de la ecuaciones efectuando las operaciones indicadas, reduciendo sus términos a común denominador y suprimiendo éste, verificando la transposición y reduciendo los términos semejantes, operaciones todas sencillísimas y preparadas suficientemente para los alumnos del último año a los que esta enseñanza se dirige. La resolución paralela de problemas por artificios aritméticos y por procedimientos algebraicos evidenciará las ventajas de estos últimos.

Los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se preparan como se mostró en (44, e).

La introducción de los números negativos complica de tal manera el contenido de la enseñanza, si se quiere que esa introducción se utilice, que la creemos inadecuada para la Escuela Primaria española en su estado actual.

373. Contenido de la Trigonometría.—También aquí la introducción de los números negativos es un factor importantísimo. Ella permite extender las líneas trigonométricas hasta los ángulos mayores de 90°, ya que su coseno y tangente son negativas. Al contrario su exclusión limita las aplicaciones trigonométricas a los ángulos menores de 90°, y, por tanto, la resolución de triángulos a los rectángulos.

A pesar de la limitación que esto supone, y con el aval de los programas norteamericanos, creemos que efectivamente deben ser excluídos los números negativos también en Trigonometría.

El programa de esta ciencia estaría reducido a definir el *sen. cos.* y *tg.* como *razones* trigonométricas, único modo de concebir que son números, determinando por mediciones directas y cocientes valores típicos, *sen.* 30°, *sen.* 45°, *tg.* 45°, y otros no típicos, para comprobarlos por las tablas de 3 ó 4 decimales que deben usarse, pasando en seguida a las relaciones entre los elementos del triángulo rectángulo que permiten determinarlo, para descender en seguida a las aplicaciones, que deben ser curiosas y prácticas: Determinación de la altura del Sol por su sombra, cálculo de la altura de una casa, de la anchura de un río, etc., aplicaciones que comparadas con los procedimientos geométricos mostrarán su superioridad.

El cálculo de la altura de un triángulo cualquiera permite determinar trigonométricamente su área, de un triángulo y con ello resolver problemas de áreas de sectores y segmentos y polígonos regulares con gran sencillez, cuando se conozca el radio del círculo en que están inscritos. Así el área del octógono regular tiene por fórmula $8 \times \frac{1}{2} r^2 \text{ sen. } \frac{360^\circ}{8} = 4 r^2 \text{ sen. } 45^\circ$.

La posibilidad de una enseñanza sistemática en este grado, y la escasa monta del contenido, ndicado, eximen de una exposición didáctica del tema.

NOTA

Consejos acerca de una lección de Matemática

Las observaciones que siguen están extractadas de la discusión que siguió durante el curso

1931-32 a las lecciones explicadas por los alumnos del grado profesional de la Normal de Baleares a los niños de la graduada de la misma. Son, pues, observaciones *in vivo* que tienden a remediar los defectos más comunes entre los maestros que empiezan sus prácticas, y por eso las creemos de interés.

1.° Preparar y ordenar cuidadosamente todo el material necesario, y mantenerlo oculto por el interés que provoca la novedad. (Así en el aparato Arquímedes se tiene la cuerda arrollada a la esfera porque es más fácil aplicarla después al cilindro).

2.° Interrogar; 1.° Colectivamente ¿quién sabe? (Emulación); 2.° Individualmente a varios. (estímulo).

3.° Escribir y dibujar con la mayor claridad posible.

4.° Escribir las palabras nuevas y explicar su significación primitiva. Ejemplo: arco; cuerda; área; esfera = pelota; isósceles = piernas iguales; escaleno = cojo; diámetro = medida a través.

5.° Dominar la clase. Cortar distracciones o faltas al iniciarse.

6.° Una lección = una idea.

7.° Operar antes de definir. (Ejemplo clases de triángulos) o de enunciar . (Ejemplo: A + B + + C = 2R).

8.° El ejemplo antes que la regla.

9.° Interrogar a los más torpes y distraídos.

10. Adaptarse a los niños variando el plan dispuesto. (La obtención del triángulo equilátero llevando la base sobre el eje del rectángulo hubo de ser sustituída por la dada en 226 — 11.

11. Relacionar con la vida. Ejemplo: formas △; esfera = bolas de rozamiento; Tm. = = carga carro, camión; peso, con monedas; empleo de la libra en donde es usada).

12. Clasificar en cuanto sea posible.

13. Emplear notaciones correctas y universales. Ejemplo: La coma en los decimales en la parte inferior, los lados de un △, *a*, *b*, *c*, sus vértices A, B, C.

14. Motivar. Ejemplo: Empezar por la pelota para tratar de la esfera.

15. Tener ocupados a los niños. Dibujo, cálculo, trabajo manual.

16. Comprobar las reglas. La abreviación por la operación directa. Las construcciones por la medida.

17. Tener preparada la pizarra, en ella una cuadrícula de 5 cm de lado; los alumnos con papel cuadriculado también.

18. Resumir lo aprendido que deba quedar. (Modelo de expresión, ejercicio de la memoria, ayuda al saber).

19. Hacer notar las ventajas de lo aprendido Ejemplo: transformar escala de $\frac{5}{100}$ en $\frac{1}{20}$

20. Tener preparados los datos para que no resulten números raros.

21. Emplear un lenguaje preciso y claro para no originar confusiones al niño.

22. Definir por afirmación y negación y comprobar por reconocimiento. Ejemplo el diámetro.

23. Lo que se emplee para agradar sea adecuado. Ejemplo: No monigotes para niños de 12 años.

24. Aplicar los conocimientos a las demás cien-

cias. Ejemplo: esfera, planetas; elipse, órbitas.

25. Una anécdota o historieta en cada lección.

26. Lenguaje ameno (al determinar la altura de una torre se evoca el escalatorres).

27. Procurar la ayuda mutua de los niños. Mediciones, comprobaciones.

28. Emplear números sencillos y reales cuando se explica. No escala $\frac{1}{19}$

29. Es preferible hacer los dibujos en la pizarra a tenerlos preparados (interés del movimiento) los alumnos, convenientemente dirigidos, y actuando despacio, van copiando.

30. No mezclar cosas, y menos, cuanto más afines.

31. Los productos del trabajo de la clase deben quedar para los niños (adquisitividad) el metro confeccionado en cinta, el dm^3 en papel.

32. No iniciar nada que no se complete.

33. Relacionar con el mismo niño. Metro, braza; *dm*, palmo; *cm*, dedo.

34. Dejar al niño sentir la dificultad antes de ayudarle a resolverla.

35. Emplear fórmulas adecuadas: $c = \pi d$ es preferible a $2\pi\ r$; $E = \pi d^2$ lo es a $4\pi r^2$.

36. Las definiciones deben ser adecuadas. Kg = peso, l = vaso. Las unidades espaciales tardan a *verlas*.

37. Educación sensorial. Medidas, pesadas, evaluación a sentimiento.

38. Organizar el trabajo como para 40 niños. Ejemplo: medir altura de la silla, anchura de los barrotes ... de cada uno.

39. Experimentar en cuanto sea posible $Dm^3 = l = Kg$.

40. Repasar las nociones que se van a utilizar (apercepción).

41. Máxima precisión en órdenes. Sin ellas es difícil construír hasta un rectángulo de 5×7.

42. Comprender y utilizar las nuevas nociones antes de pasar a otras. Ejemplo: después de definida la *escala* empleese reiteradamente.

43. Dejar pasar algún tiempo antes de utilizar un conocimineto como base de otro, más aun en los inversos. (Cálculo de una dimensión conocida el área y el volumen).

44. Emplear formas de expresión adaptadas Ejemplo: Escala 1 cm. por 20 m. más claro que 1/2.000.

45. Preparar al menos *tres* ejercicios de cada clase.

46. Problemas reales e interesantes. No lo es calcular la longitud de una arista medible.

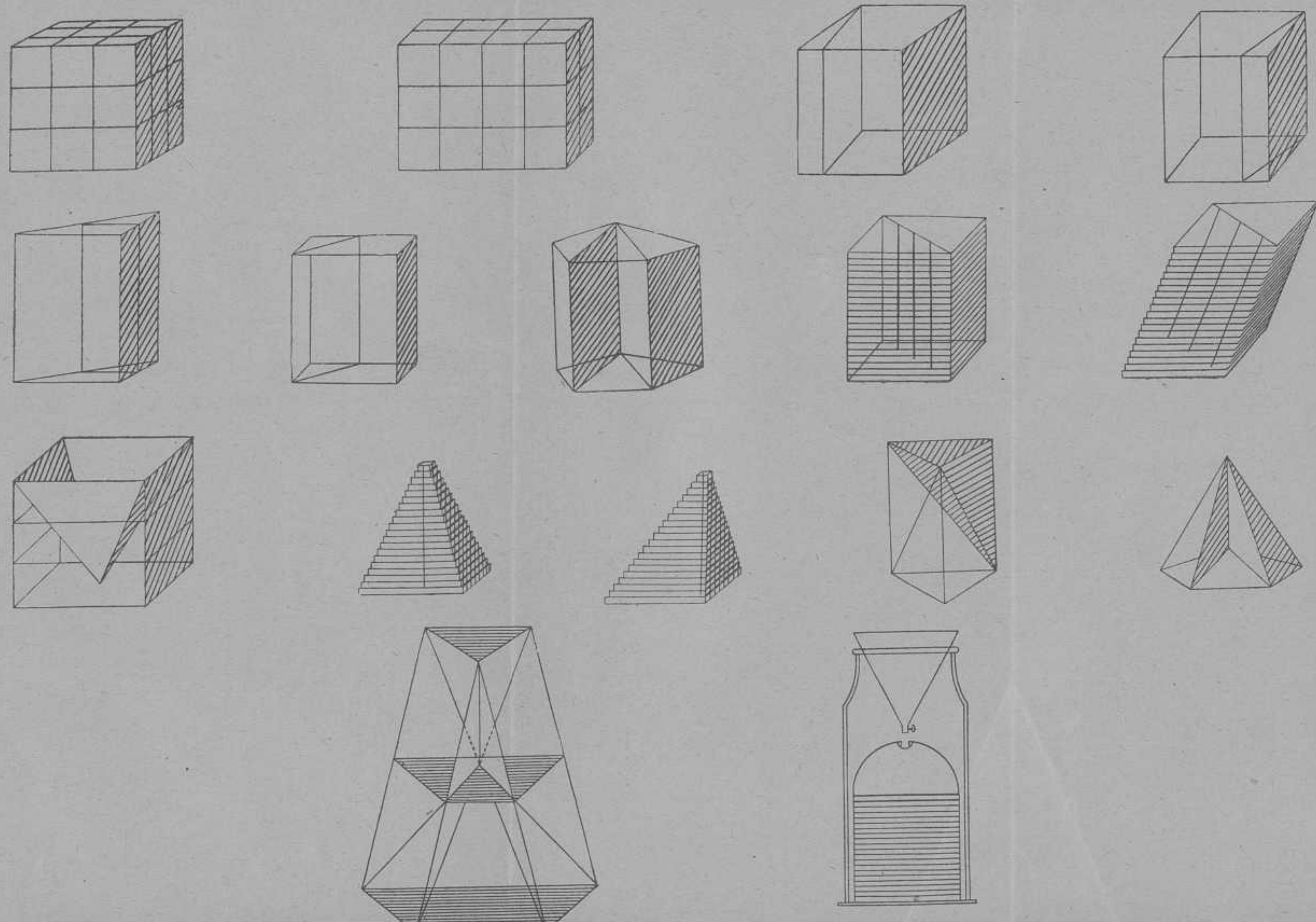
47. Dar forma sugestiva y aun misteriosa a los problemas.

48. Actualizar (Deportes, noticias, prensa).

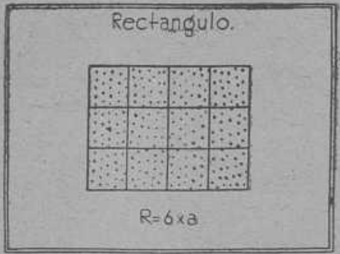
49. Enunciar despacio para copiar, mirando al más torpe.

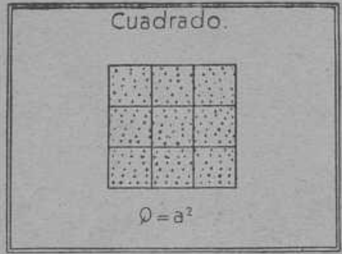
50. Operar simultáneamente con los alumnos. (Guía y comprobación).

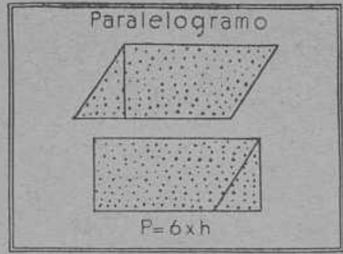
Figuras EYA para los volúmenes

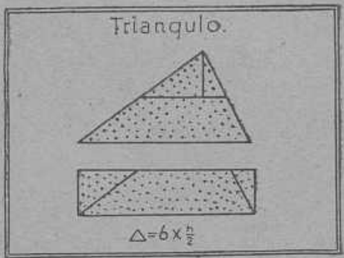


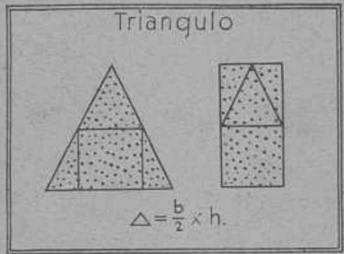
Figuras EYA para las áreas

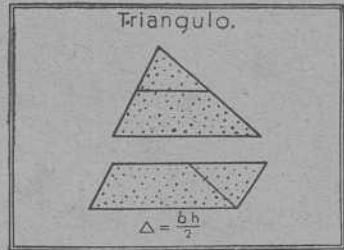


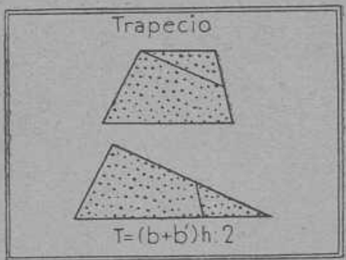


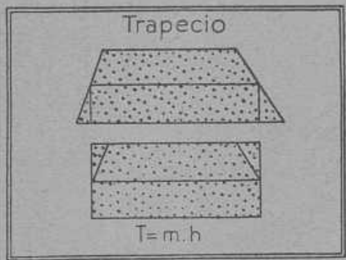


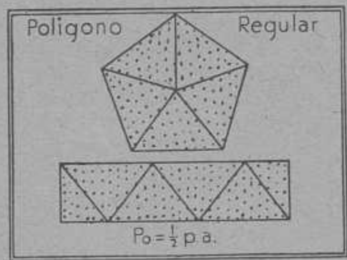


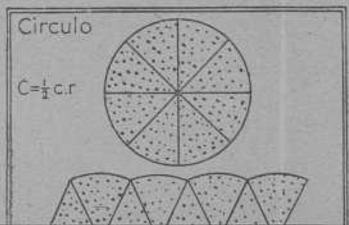


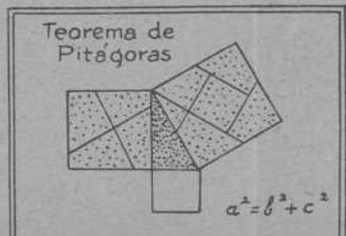




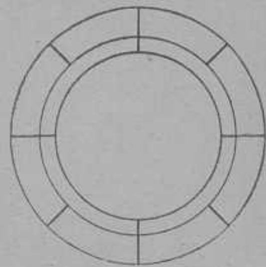


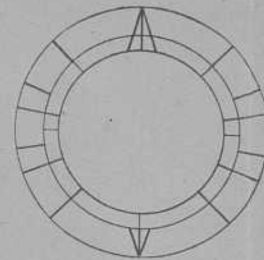




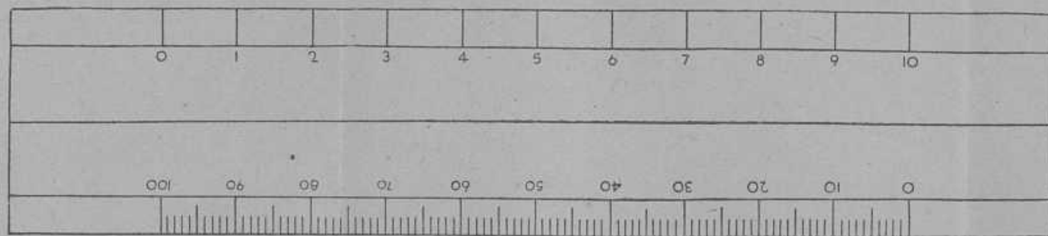


Disco EYA para la división de la circunferencia en 4, 8, 3, 6, 5 y 10 partes iguales y obtención de los correspondientes polígonos regulares

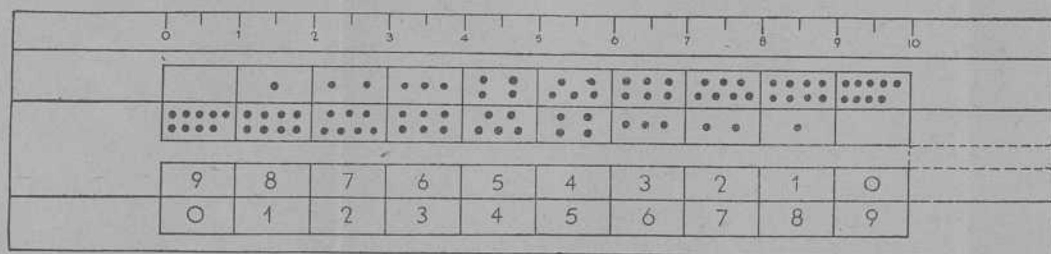




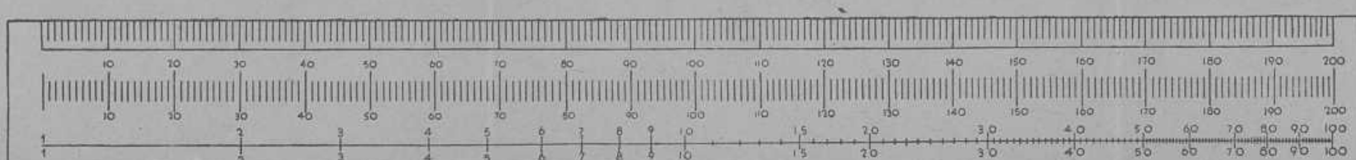
Regla EYA núm. 1 para el dibujo, la medida y el trazado de perpendiculares



Regla EYA núm. 2 para la adición y sustracción intuitiva y numérica hasta 20



Regla EYA núm. 3. Realiza mecánicamente las cuatro operaciones y la obtención de logaritmos



BIBLIOGRAFIA

COMPRENDE UNICAMENTE LAS OBRAS CONSULTADAS PARA LA COMPOSICION DE LA PRESENTE OBRA

Obras del mismo autor

Aritmética Intuitiva.—Editorial Reus.
La Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Francesas.—Junta de Ampliación Estudios.
Nuevo Tratado de Aritmética.—Editorial Reus.
Nuevo Tratado de Geometría.—Editorial Reus.

Obras generales

ABEL REY.—*Lógica.*
ALCANTARA GARCIA.—*El Trabajo Manual.*
ALCANTARA GARCIA.—*Manual de Educación de Párvulos.*
BAIN.—*La Ciencia de la Educación.*
BARTH.—*Pedagogía.*
CLAPAREDE.—*Psicología del niño.*
COMAS.—*Las Escuelas Nuevas inglesas.*
DECROLY ET MONCHAMP.—*La iniciación a la actividad intelectual y motriz por los juegos educativos.*
DESCOEDRES.—*El desarrollo del niño.*
DEWEIY.—*La Escuela de mañana.*
ESTALELLA.—*Ciencia Recreativa.*
FITCH.—*Conferencias sobre enseñanza.*
GERMAIN Y RODRIGO.—*Pruebas de Inteligencia.*
JULY ET ROCHERON.—*Le travail Manuel a L'Ecde Primaire.*
KOFKA.—*Bases de la evolución psicológica infantil.*
La Lectura.—*Los nuevos programas escolares.*
LIPMANN.—*Psicología para maestros.*

LIARD.—*Logique.*
LUZURIAGA.—*Las Escuelas Nuevas alemanas.*
MONTESSORI.—*Manual práctico del Método.*
POINCARE.—*Science el Methode.*
SAIZ, FERNANDO.—*Las Escuelas Nuevas Norte-americanas.*

Obras especiales

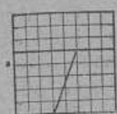
CAJORI.—*A History of Elementary Mathematics.*
CLEENE.—*L'enseignement de la table de la Multiplication.*
COMAS.—*Metodología de la Aritmética y la Geometría.*
COURTIS.—*Teacher's Manual for the Courtis practice tests.*
DECROLY.—*Le calcul et la mesure au premier digré de l'Ecole Decroly.*
GROSGURIN.—*Enseignement de l'Arithmetique—Methodologie.*
GROSGURIN.—*Methodologie de la Geometrie.*
HAMILTON.—*Un primer libro de Geometría.*
Internacional commision of the teaching of Mathematics: The Teaching of Mathematices un the normal School of the U. S. A.
KLAUS UND HABERMAL.—*Rechenbuch.*
LAISANT.—*Iniciación Matemática.*
LAISANT.—*Le Mathematique. Fiolosofie. Enseignement.*
MACE.—*L'Arittmetique du Grand Papa.*
MAILLET.—*Le libre de maitre pour l'enseignement du calcul aux debulants.*
MAROGER.—*Fondaments des Mathematiques.*
MOEKNIUS.—*Rechenbuch.*
NELSON.—*Aritmética Inventiva.*
PALAU VERA.—*Aritmética.*
PALAU VERA.—*Geometría.*
PEREZ SOMOZA.—*Metodología de la Aritmética Elemental.*
PIERROT ET BICIULESCU.—*L'arithmetique des petits.*
REIDT.—*Die Elemente des Mathematiks.*

Rey Pastor.—*Fundamentos de la Geometréa moderna.*
Rodriguez.—*Metodología didáctica de la Aritmética.*
Rapport of the comision of ten.
Royer et coont.—*Arithmetique.*
Rousse Ball.—*Historie des Mathematiques.*
Rouse Ball.—*Recreations scientifiques et problemes.*
Saiz Salvat.—*Arte de Estudiar Matemáticas.*
Smith.—*The teaching of elementary Mathematics.*
Spencer.—*Geometría Inventiva.*
Thorndike.—*Psycology of Arithmetic.*
Thorndike.—*Aritmética.—Métodos modernos.*
Vera Francisco.—*Historia de la Matemática en España.*
Vera, Francisco.—*Espacio, Hiperespació y tiempo.*
Woody.—*The Woody arithmatics Seael.*

INDICE

Págs.

FE DE ERRATAS

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
19	21	los números	la Música
22	15	Gans	Gaus
35	15	Leibnitr	Leibnitz
36	29	a | b	a | c
39	16	Eedeo	Eadem
39	17	resurgo	resurjo
41	25	ellas	ella
51			
52	8	DAC	OAC
55	22	$/\!\underline{\;A\;} = a \; /\!\underline{A+B} = n$	$/\!\underline{\;A\;} = a \; {}_{b}/\!\underline{A \cdot B} = n$
56		${}_{5}/\!\underline{25} = 3$	$/\!\underline{1\;5} = 3$
59	15	ha	han

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
69	26	35	83
71	17		fig. 10
74	1	en	es
77	18	designa	se designa
95	11	solución	soluciones
96	8	$x\ 2/3\ r$	$x = \sqrt{3}\, r$
101	19	explicaciones	duplicaciones
102	17	que	y
103	18	β	, β
128	6	Clairant	Clairaut
137	4	cantigrados	centigrados y
143	12	êter	êtez
143	23	por	para
149	22	cara	cola
156	11	$(5 - b)\,5$	$(5 - b)$
157	2	última línea de la página anterior.	
168	13	especial	espacial
177	7	psiquicas	psíquic-s del niño
188	12	intento	instinto
195		1 8 9 9 4 6 5 7 3	1 5 9 9 4 2 5 7 3
195		5	4
201	26	245	246
	28	249	247
205	5	(8 — 5) — etc.	(8 — 5) . 4 = B . 4 — 5 . 4 (8 — 3) . 4 = 8 . 4 — 3 . 4
209	27	8 : 9	9 : 9
213	24	gradual	....
213	32	15 » =	25 » =
218	6	fig. 48	fig. 42
219	10	correspondiente	
224	26	Frúmeros	Números
233	26	cualitativo	cuantitativo
243	21	mundo	....
244	17	diferentes	....
245	8	octoedros	ortoedros
246	1	colorecados	coloreados
249	15	básico	bárico
251	21	aunque	aun, que
285	20	de	a
314	11	D.	O.
328	24	fig. 50	fig. 55
340	19	siguiente	adjunta
349	16	1 ?	1 m. ?
357	26	Andemars	Audemars
363	25	Thomdicke	Thorndicke
364	16	alejada	lejos

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
368			$\begin{matrix}3\\1\\8\end{matrix} \times \begin{matrix}4\\1\\7\end{matrix} \left(\begin{matrix}28\\21\\32\\21\end{matrix}\right) \; 2958$
369	5	5,50	5; 50
372	4	$345 + 100$	$345 + 200$
378	6	del	de
377	31	*ottal*	*total*
384	17	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 12$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{?}{12}$
387	23	conduce la	conduce a la
391	13	precioso	preciso
292	30	358	365
393	6	359	364
396	17	; de un triángulo,	....

J. MARIA

METODOLOGI
DE LA
MATEMATICA